АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ, ТОМ 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Ответственный редактор акад. *С. Л. Соболев*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск 1982

УДК 517.1+517.11 : 518.5+517.15+519.4

Математическая логика и теория алгоритмов.— Новосибирск: Наука, 1982.

В сборник входят работы, представляющие новые результаты исследований по проблемам теории нумераций, теории моделей, теории доказательств, а также по приложениям математической логики в теоретическом программировании.

Книга будет полезна научным работникам, аспирантам и студентам, специализирующимся в указанных областях математики.

М $\frac{1702020000 - 886}{055(02) - 82}$ 11 — 82, кн. 2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник составляют работы, в которых изучаются проблемы математической логики и приложения ее методов в других областях.

Статьи, вошедшие в сборник, условно можно разбить на три группы. Первая связана с исследованием свойств элементарных теорий и исчислений. В работе М. Г. Перетятькина построены примеры конечно аксиоматизируемых полных элементарных теорий с различными свойствами. Работа В. А. Горбунова и В. А. Туманова посвящена исследованию решеток квазимногообразий и решению проблемы А. И. Мальцева об описании этих решеток. В статье Л. Л. Максимовой изучается интерполяционное свойство Линдона в классе модальных систем. В работе В. Н. Ремесленникова и А. Г. Мясникова дана элементарная классификация степенных нильпотентных групп.

Тематика второй группы статей связана с алгоритмическими проблемами. В работе С. С. Гончарова исследуется алгоритмическая размерность конструктивизируемых систем, приведены применения теории алгоритмической размерности в теории вычислимых нумераций. В статье В. Л. Селиванова описаны общие схемы построения иерархий, аналогичных известным иерархиям Клини — Мостовского и Ершова. На этой основе вводится естественная иерархия семейств рекурсивно перечислимых множеств и изучаются ее свойства.

Третий раздел, посвященный приложению математической логики в программировании, представлен работой Н. Н. Непейводы и Д. И. Свириденко, в которой анализируется современная тенденция развития программирования и формулируется вывод о том, что качественное улучшение ситуации, сложившейся в программировании, должно базироваться на идеях и концепциях математической логики. Здесь приведены некоторые результаты, полученные авторами при решении задачи синтеза программ.

ПРЕДЕЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ КОНСТРУКТИВИЗАЦИИ

С. С. ГОНЧАРОВ

Изучение неавтоэквивалентных конструктивизаций было начато в работах А. И. Мальцева [1, 2]. За прошедшие годы получены новые, проясняющие общую картину результаты. Одной из основных в этом направлении является проблема о числе неавтоэквивалентных конструктивизаций алгебраических систем, исследованию которой посвящен ряд работ.

Будем в дальнейшем называть максимальное число неавтоэквивалентных конструктивизаций алгебраической системы $\mathfrak{A}$ ее *алгоритмической размерностью*, используя при этом обозначение $\dim_A(\mathfrak{A})$. В этой терминологии проблема о числе неавтоэквивалентных конструктивизаций может быть сформулирована как проблема описания спектра алгоритмических размерностей алгебраических систем. Многочисленные попытки дать такое описание не приводили долгое время к успеху. Задачей данной работы является выяснение причин тех трудностей, которые препятствуют полному решению указанной проблемы, а также использование полученных свойств к изучению конкретных классов моделей. Полученные результаты показывают, что для решения проблемы применение метода приоритета с конечными нарушениями, который являлся до недавнего времени основным в этом направлении, ограничено наличием неавтоэквивалентных, но предельно автоэквивалентных конструктивизаций у исследуемых моделей. Это заставило по-новому взглянуть на проблему спектра, стала ясна принципиальная трудность в изучении данной ситуации, были намечены два возможных пути ее разрешения. Первый — создание нового метода, позволяющего строить не предельно автоэквивалентные конструктивизации, и второй — доказательство существования у любой неавтоустойчивой модели предельно автоэквивалентных, но не автоэквивалентных конструкций, что позволило бы ограничиться старыми методами. Как показали дальнейшие исследования автора [3, 4], верным оказался первый из предложенных путей.

В работах [4, 5] было разработано применение метода приоритета с бесконечными нарушениями в новой ситуации — в теории конструктивных моделей, что и позволило дать полное решение проблемы возможного числа неавтоэквивалентных конструктивизаций. Основной результат данной работы был анонсирован автором без доказательства в [6]. Отметим, что изучение эквивалентных конструктивизаций оказалось полезным в теории конструктивных моделей, а также имеет интересные приложения в теории вычислимых нумераций, которые будут обсуждаться во втором параграфе. В нем основное внимание уделено вопросам существования позитивных и однозначных нумераций, привлекавших внимание многих специалистов [5, 7—15].

§ 1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

В этом параграфе будет указан теоретико-рекурсивный признак бесконечности алгоритмической размерности, основанный на понятии предельно автоэквивалентных конструктивизаций.

Будем придерживаться в этой работе определений и обозначений, касающихся теории рекурсивных функций,— из монографии [16], теории вычислимых нумераций — из монографии [8], а теории конструктивных моделей — из монографий [9, 10] и работ [1—3].

Будем обозначать через $K(x, y)$ двуместную частично рекурсивную функцию, универсальную в классе одноместных частично рекурсивных функций, через $f_n^t(x)$ — значение $K(n, x)$, если оно вычисляется меньше, чем за t, шагов и $f_n^t(x)$ не определено в противном случае. Через N, как обычно, обозначим множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Рассмотрим некоторую геделевскую нумерацию всех конечных кортежей натуральных чисел и будем обозначать через $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle$ номер кортежа $(x_0, \ldots, x_n)$ в этой нумерации.

Алгебраическую систему

$$\mathfrak{A} = \langle A, P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots; F_0^{m_0}, \ldots, F_k^{m_k}, \ldots\rangle$$

назовем *рекурсивной*, если A — рекурсивное подмножество в N, а множества $\{\langle k, l_1, \ldots, l_{n_k}\rangle \mid (l_1, \ldots, l_{n_k}) \in P_k\}$, $\{\langle k, l_0, l_1, \ldots, l_{m_k}\rangle \mid F_k(l_1, \ldots \ldots, l_{m_k}) = l_0\}$ и функции $n(k) \rightleftharpoons n_k$, $m(k) \rightleftharpoons m_k$ рекурсивны.

Последовательность

$$\{\mathfrak{A}_n = \langle A_n, {}^nP_0, \ldots, {}^nP_k, \ldots; {}^nF_0, \ldots, {}^nF_k, \ldots\rangle, n \in N\}$$

рекурсивных алгебраических систем соответственно сигнатур

$$\left\{\langle {}^nP_0^{n_0^n}, \ldots, {}^nP_k^{n_k^n}, \ldots; {}^nF_0^{m_0^n}, \ldots, {}^nF_k^{m_k^n}, \ldots\rangle, n \in N\right\}$$

называется *вычислимой*, если множества $\{\langle n, m\rangle \mid m \in A_n\}$,

$$\left\{\langle n, \langle k, l_1, \ldots, l_{n_k^n}\rangle\rangle \mid \left(l_1, \ldots, l_{n_k^n}\right) \in {}^nP_k\right\},$$

$$\left\{\langle n, \langle k, l_0 \ldots, l_{m_k^n}\rangle\rangle \mid {}^nF_k\left(l_1, \ldots, l_{m_k^n}\right) = l_0\right\}$$

и функции $n(n, k) \rightleftharpoons n_k^n$, $m(n, k) \rightleftharpoons m_k^n$ рекурсивны.

Последовательность

$$\{\mathfrak{A}_n = \langle A_n, {}^nP_0, \ldots, {}^nP_k, \ldots; {}^nF_0, \ldots, {}^nF_k, \ldots\rangle, n \in N\}$$

конечных рекурсивных моделей называется *строго вычислимой*, если она вычислима, а последовательность конечных множеств $\{A_n, n \in N\}$ сильно вычислима [8].

Определение 1. Пусть ν и μ — две конструктивизации модели $\mathfrak{M}$. Назовем ν и μ *предельно автоэквивалентными*, если существует автоморфизм φ модели $\mathfrak{M}$ и функция f из Δ_2^0 такие, что $\varphi\nu = \mu f$.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{M}$ имеет две неавтоэквивалентные, но предельно автоэквивалентные конструктивизации, то* $\dim_A(\mathfrak{M}) = \infty$.

Доказательство. Пусть ν и μ — две однозначные конструктивизации модели $\mathfrak{M}$, которые неавтоэквивалентны, но предельно автоэквивалентны, и φ — автоморфизм, а g — функция из Δ_2^0 такие, что $\varphi\nu = \mu g$. Нетрудно заметить, что существует вычислимая последовательность разнозначных рекурсивных функций $\{g_n \mid n \in N\}$ такая, что $\lim g_n = g$.

Построение искомой последовательности $\{\gamma_n, n \in N\}$ конструктивизаций модели $\mathfrak{M}$ будем вести по шагам, используя метод приоритета с конечными нарушениями. В результате будет построена вычислимая последовательность рекурсивных моделей $\{\mathfrak{M}_m,\ m \in N\}$, которые с естественной нумерацией будут представлять конструктивную модель, изоморфную $(\mathfrak{M}, \gamma_m)$, $m \in N$, а также вспомогательные функции $r(n, m, k, t)$, ζ_m^t, η_m^t равномерно по t.

Будем также ставить на γ_n- и γ_m-номера метки $S_{\langle n, m, k\rangle}$ и $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$, где $m \neq n$, упорядоченные по номерам троек $\langle n, m, k\rangle$ в некоторой геделевской нумерации всех троек, а из двух меток с одним и тем же номером большей будем считать метку со звездочкой.

Шаг 0. Определим $\gamma_n^0 = \varnothing$, $\mathfrak{M}_0^n = \varnothing$, $\zeta_n^0 = \eta_n^0 = \varnothing$ и $r(n, m, k) \leftrightharpoons \langle n, m, k\rangle$ для всех $n, m, k \in N$.

Шаг $t+1$. Этот шаг состоит из трех этапов.

Этап 1. Рассмотрим наименьшую S-метку $S_{\langle n, m, k\rangle}$, которая стоит на некоторых числах, и наименьшее l такое, что функции $g_t\zeta_l^t$ и η_l^t не совпадают на множестве $[l]^t_{(n,m,k)} \leftrightharpoons \{x \mid$ на γ_l-номере x стоит метка $S_{\langle n, m, k\rangle}$, либо $S^*_{\langle n,m,k\rangle}\}$, но совпадают на множестве $\langle l\rangle^t_{(n,m,k)} \leftrightharpoons \{x \mid$ на γ_l-номере x стоит метка, меньшая $S_{\langle n, m, k\rangle}\}$, и $l = n$ либо $l = m$.

Если такой метки нет, то переходим к следующему этапу, если же есть, то ищем такое $t' \geqslant t+1$, что либо

A) найдутся конечные функции

$$\zeta \supseteq \zeta_l^t \restriction \langle l\rangle^t_{(n,m,k)} \text{ и } \eta \supseteq \eta_l^t \restriction \langle l\rangle^t_{(n,m,k)}$$

такие, что

1) $\mu g_{t'}\zeta$ и $\mu\eta$ совпадают на $[l]^t_{(n,m,k)}$ и существует изоморфизм φ подмодели с основным множеством $\nu\zeta(|\mathfrak{M}_t^l|)$ модели $\mathfrak{M} \restriction \Sigma^t$ на подмодель этой же модели, но с основным множеством $\mu\eta(|\mathfrak{M}_t^l|)$, такой, что $\varphi\nu\zeta(x) = \mu g_{t'}\eta(x)$ для $x \in \langle l\rangle^t_{(n,m,k)}$, и $\nu\zeta$ и $\mu g_{t'}\eta$ — изоморфные вложения модели $\mathfrak{M}_t^l$ в модель $\mathfrak{M}$;

2) $\zeta = \zeta_m^t$, если $l = m$, и $\eta = \eta_n^t$, если $l = n$;

либо

B) $\mu g_{t'}\zeta_l^t$ и $\mu\eta^l$ не совпадают на $\langle l\rangle^t_{(n,m,k)}$.

Если выполнено условие B), то переходим к следующему шагу. Если выполнено условие A), то полагаем $\zeta_l^{t+1} \leftrightharpoons \zeta \restriction |\mathfrak{M}_l^t|$, $\eta_l^{t+1} \leftrightharpoons \eta \restriction |\mathfrak{M}_l^t|$ и $r(n, m, k, t+1) \leftrightharpoons (n, m, k, t) + 1$.

Все метки с номерами, большими номера метки $S_{\langle n, m, k\rangle}$, снимаем, а на все $x \in (\zeta_l^{t+1})^{-1}(\{0, 1, \ldots, r(n, m, k, t+1)\})$ поставим метку $S_{\langle n, m, k\rangle}$. Определим $\gamma_n^{t+1}(x) = \nu\zeta_n^t(x)$ для $n \in N$ и $x \in |\mathfrak{M}_n^t|$. Определим $\mathfrak{M}_l^{t+1}$, доопределив на $\mathfrak{M}_l^t$ еще не определенные предикаты из Σ^{t+1}, используя вложение $\nu\zeta_l^{t+1}$, все остальное оставляем без изменений и переходим к следующему шагу.

Этап 2. Проделаем последовательно для всех $i \leqslant t$ следующие построения.

Подэтап i, $i \leqslant t$. Найдем наименьшие числа $n \notin \zeta_i^t(|\mathfrak{M}_i^t|)$ и $m \notin |\mathfrak{M}_i^t|$ и определим ζ, доопределив ζ_i^t в точке m значением n.

Ищем теперь $t' \geqslant t+1$ такое, что либо

a$_i$) существует изоморфизм φ подмоделей модели $\mathfrak{M} \restriction \Sigma^t$ с основным множеством из $\nu\zeta(|\mathfrak{M}_i^t| \cup \{m\})$ и $\mu g_{t'}\zeta(|\mathfrak{M}_i^t| \cup \{m\})$, причем $\mu g_{t'}\zeta$ и $\mu\eta_m^t$ совпадают на всех x, на которых стоят метки, а $\nu\zeta$ и $\mu g_{t'}\zeta$ изоморфно вкладывают $\mathfrak{M}_i^t$ в $\mathfrak{M}$; либо

b$_i$) $\mu g_{t'}\zeta(x) \neq \mu\eta_m^t(x)$ для некоторого x, на котором стоит метка.

Если выполнено условие b$_i$), то, оставив все без изменений, переходим к подэтапу $i+1$, если $i < t$, и к этапу 3, если $i = t$.

Если выполнено условие a_i), то положим $\zeta_i^{t+1} \leftrightharpoons \zeta$, $\eta_i^{t+1} \leftrightharpoons g_{t'}\zeta$, определим $\mathfrak{M}_i^{t+1}$, взяв $|\mathfrak{M}_i^{t+1}| \leftrightharpoons |\mathfrak{M}_i^t| \cup \{m\}$ и доопределив все предикаты из Σ^{t+1} на $|\mathfrak{M}_i^{t+1}|$, используя отображение $\nu\zeta$ из $|\mathfrak{M}_i^{t+1}|$ в $\mathfrak{M}$. Если $m \leqslant r(j_0, j_1, k', t)$ для некоторой тройки $\langle j_0, j_1, k'\rangle$, где $j_0 = i \vee j_1 = i$, а на m стоит метка $S_{\langle j_0, j_1, k'\rangle}$ то поставим на m метку $S^*_{\langle j_0, j_1, k'\rangle}$, и переходим к подэтапу $i+1$, если $i < t$, и к этапу 3, если $i = t$.

Этап 3. Выбираем наименьшую тройку $\langle n, m, k\rangle \leqslant t$, $n \neq m$, такую, что f_k^t — разнозначная функция и существует $f \subseteq f_k^t$ такая, что

3.1. $\delta f \supseteq \{x|$ на γ_n-номере x стоит метка с номером, не большим $\langle n, m, k\rangle\} \cup \{x | x \leqslant r(n, m, k)\}$;

3.2. $\rho f \supseteq \{x|$ на γ_m-номере x стоит метка с номером, не большим $\langle n, m, k\rangle\} \cup \{x | x \leqslant r(n, m, k, t)\}$;

3.3. $g_t\zeta_m^t(\rho f) \supseteq \{x \mid x \leqslant r(n, m, k, t)\}$,

$\zeta_n^t(\delta f) \supseteq \{x \mid x \leqslant r(n, m, k, t)\}$;

3.4. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n^t & \xrightarrow{\zeta_n^t} & N \\ f\downarrow & & \downarrow g_t \\ \mathfrak{M}_m^t & \xrightarrow{\eta_m^t} & N \end{array}$$

коммутативна, $\eta_m^t f = g_t\zeta_n^t$.

Если такой тройки нет, то переходим к следующему шагу. В противном случае снимем все метки с номерами, большими $\langle n, m, k\rangle$, на все γ_n-номера x такие, что $x \in \delta f$, поставим метку $S^*_{\langle n, m, k\rangle}$. И на все γ_m-номера x такие, что $x \in \rho f$, поставим метку $S^*_{\langle n, m, k\rangle}$, а на все γ_n-номера x такие, что $\zeta_n^{t+1}(x)$ определено, поставим метку $S_{\langle n, m, k\rangle}$. И на γ_m-номера x такие, что $\eta_m^{t+1}(x)$ определено, поставим метку $S_{\langle n, m, k\rangle}$. Положим $r(n, m, k, t+1) = r(n, m, k, t) + 1$ и перейдем, оставив все остальное без изменений, к следующему шагу.

Лемма 1. *Каждая метка ставится лишь конечное число раз.*

Доказательство. Рассмотрим наименьшую метку, которая ставится бесконечно часто. Пусть это $S_{\langle n, m, k\rangle}$. Рассмотрим шаг t_0, после которого никакая метка с меньшим номером больше не ставится и не снимается. Рассмотрим функции γ_n^t и γ_m^t, $t \geqslant 0$. Так как после шага t_0 метка $S_{\langle n, m, k\rangle}$ не может сниматься, то после шага t_0 для всех l таких, что на γ_n-номер l ставится метка $S_{\langle n, m, k\rangle}$ на шаге $t' \geqslant t_0$, имеем $\gamma_n^{t'}(l) = \gamma_n^t(l)$ для всех $t \geqslant t'$, аналогично и для γ_m-номеров l. Кроме того, так как $S_{\langle n, m, k\rangle}$ ставится бесконечно часто, то $\lambda t r(n, m, k, t)$ возрастает и $\lim r(n, m, k, t) = \infty$. Для γ_n-номеров, на которые поставится метка $S_{\langle n, m, k\rangle}$ после шага t_0, будет выполняться $\gamma_n^t(l) = \nu\zeta_n^t(l)$, $\gamma_m^t(l) = \mu\eta_m^t(l)$ для $t \geqslant t' \geqslant t_0$ и значения $\lambda t\zeta_n^t(l)$ и $\lambda t\eta_m^t(l)$ не изменяются после этого шага. Поэтому из определения подэтапа 3, который для метки $S_{\langle n, m, k\rangle}$ выполняется бесконечно часто, следует, что функция $\lambda x K(k, x)$ всюду определена и осуществляет изоморфизм $(\mathfrak{M}, \gamma_n)$ на $(\mathfrak{M}, \gamma_m)$, где $\gamma_n = \lim \gamma_n^t$, $\gamma_m = \lim \gamma_m^t$, но в таком случае, как видно из вышесказанного, функция $\zeta(l) = \zeta_n^{t'}(l)$, где $t' \geqslant t_0$ и $\zeta_n^{t'}(l)$ определено, задает рекурсивный изоморфизм $(\mathfrak{M}, \gamma_n)$ и $(\mathfrak{M}, \nu)$, а функция $\eta(l) = \eta_m^{t'}(l)$, где $t' \geqslant t_0$ и $\eta_m^{t'}(l)$ определено, задает рекурсивный изоморфизм $(\mathfrak{M}, \gamma_m)$ на $(\mathfrak{M}, \mu)$, но это противоречит тому, что выбранные нумерации ν и μ не автоэквивалентны. Таким образом, S-метка не может ставиться бесконечно часто.

Осталось рассмотреть лишь следующий случай: наименьшая метка, которая бесконечно часто ставится, это $S^*_{\langle n, m, k\rangle}$. Рассмотрим шаг t_0, после которого никакая метка, меньшая $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$, уже больше не ставится и не снимается, но в этом случае метка $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$ уже больше не снимается, а только ставится. Но так как метка $S_{\langle n,m,k\rangle}$ больше не ставится, то $\lambda tr(n, m, k, t)$ после шага t_0 не изменяется, а $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$ ставится лишь на элементы с $\zeta^t_n, g_t\zeta^t_m$ образами, $t \geqslant t_0$ меньшими $r(n, m, k, t)$, но таких образов после шага t_0 может быть лишь конечное число, а поэтому $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$ также не может ставиться бесконечно. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Если $\gamma^t_n(l)$ определено, то значения $\lambda t\zeta^t_n(l)$ и $\lambda t\eta^t_n(l)$ могут изменяться лишь конечное число раз.*

Доказательство. Рассмотрим наименьшее n, для которого не выполнено условие леммы, и наименьшее l такое, что $\lambda t\zeta^t_n(l)$, либо $\lambda t\eta^t_n(l)$ принимает бесконечно много значений. Если на γ_n-номер l не ставится никакая метка, то начиная с некоторого шага t_0 никакая метка $S_{\langle m,n,k\rangle}$, $S_{\langle n,m,k\rangle}$, $S^*_{\langle m,n,k\rangle}$, либо $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$, где $k, m \in N$, больше не ставится. Рассмотрим шаг $t_1 \geqslant t_0$, после которого значения $\lambda t\zeta^t_n(l')$ и $\lambda t\zeta^t(l')$ для $l' < l$ уже не изменяются. Это означает, что ни для какой метки $S_{\langle n,m,k\rangle}$ и $S_{\langle n,m,k\rangle}$, где $k, m \in N$, не выполняются условия этапа 1. Но в таком случае мы не можем изменить и значения $\zeta^t_n(l)$ и $\eta^t_n(l)$. Если же на γ_n-номер l ставится на некотором шаге какая-нибудь метка, то рассмотрим наименьшую метку $\varkappa$, которая ставится на γ_n-номер l. Рассмотрим шаг t_0, после которого $\lambda t\zeta^t_n(l')$ и $\lambda t\eta^t_n(l')$ для $l' < l$ уже не изменяются и метка $\varkappa$ больше не ставится. Заметим, что для метки $\varkappa$ условия этапа 1 могут выполняться только конечное число раз. Это происходит в силу того, что если на l ставится и больше не снимается некоторая метка, то $\lambda t\zeta^t_n(l)$, либо $\lambda t\eta^t_n(l)$ уже не изменяется, а вторая из этих функций определяется так, что $g_t\zeta^t_n(l) = \eta^t_n(l)$, но $g = \lim g_t$, а поэтому с некоторого шага $t' \geqslant t_0$ и вторая функция для l не будет изменяться.

Лемма 3. *Этап 1 для каждой тройки $\langle n, m, k\rangle$ может выполняться лишь конечное число раз.*

Доказательство. Рассмотрим наименьшую тройку $\langle n, m, k\rangle$, для которой не выполнена лемма.

Рассмотрим шаг t_0, после которого никакая метка не большая $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$ уже не ставится и не снимается и для троек, меньших $S_{\langle n,m,k\rangle}$, больше не выполняется этап 1. Рассмотрим шаг $t_1 \geqslant t_0$, после которого значения $\lambda t\zeta^t_n(l)$ и $\lambda t\eta^t_n(l)$ для γ_n-номеров, на которых стоит метка $S^*_{\langle n,m,k\rangle}$, либо $S_{\langle n,m,k\rangle}$, уже не изменяются. Аналогично для γ_m-номеров. Но тогда для тройки $\langle n, m, k\rangle$ после шага $t_2 > t_1$ такого, что $\lambda t g_t\zeta^t_n(l)$ больше не изменяется для $t \geqslant t_2$, этап 1 не может выполниться для $\langle n, m, k\rangle$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4. *Бесконечно часто для каждого n выполняется условие* a_n) *подэтапа n этапа* 2.

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим наименьшее n, для которого это не так. Заметим, что этап 2 выполняется бесконечно часто, так как в противном случае может выполняться лишь этап 1, но через конечное число шагов, когда для всех i и n таких, что $\gamma^t_n(i)$ определено, мы определим ζ^t_n и η^t_n таким образом, что $g_t\zeta^t_n(i) = \eta^t_n(i)$ и $g_t\zeta^t_n(i)$ больше не изменяется, этап 1 больше не будет выполняться и мы должны будем перейти к этапу 2. Таким образом, этап 2 выполняется бесконечно часто. Так как для n условие a_n) по предположению выполняется лишь конечное число раз, область определения γ^t_n, начиная с некоторого шага t_0, уже не изменяется, и в силу леммы 2 существует шаг $t_1 \geqslant t_0$, после которого значения $\lambda t \zeta_n^t(l)$ и $\lambda t \eta_n^t(l)$ для $l \in \rho\gamma_n^{t_0}$ уже не изменяются. Пусть $\varkappa = S_{\langle l_1, l_2, k\rangle}$, либо $\varkappa = S^*_{\langle l_1, l_2, k\rangle}$, где $l_1 = n$, либо $l_2 = n$. Рассмотрим шаг $t_2 \geqslant t_1$, после которого для тройки $\langle l_1, l_2, k\rangle$ не выполняется этап 1. Такой шаг существует в силу леммы 3. Тогда для всех $l \in \rho\gamma_n^{t_0}$ и $t \geqslant t_2$ выполняется $g_t \zeta_n^t(l) = \eta_n^t(l)$, а значит, взяв шаг $t_3 \geqslant t_2$, после которого выполняется этап 2, придем к тому, что для t_2 выполнено условие a_n) подэтапа n. Полученное противоречие заканчивает доказательство леммы.

Лемма 5. *Для всех n и l существует* $\gamma_n(l) = \lim \gamma_n^t(l)$.

Доказательство. В силу леммы 4 для любых n и l существует шаг t такой, что $\gamma_n^t(l)$ определено, и отсюда по лемме 2 существует $\lim \gamma_n^t(l) \in M$.

Таким образом, мы определяем нумерацию γ_n некоторой подмодели модели $\mathfrak{M}$. Эта нумерация разнозначна, так как все γ_n^t разнозначны. Покажем, что это нумерация всей модели $\mathfrak{M}$.

Лемма 6. *Для любых $n \in N$ и $d \in N$ существует $l \in N$ такое, что* $\gamma_n(l) = \nu(d)$.

Доказательство. Рассмотрим наименьшее n, а для него и наименьшее d такие, что для них не справедлива наша лемма. Если существует бесконечно много меток $S_{\langle m, n, k\rangle}$, $S_{\langle n, m, k\rangle}$, $m, k \in N$, которые ставятся на некотором шаге, то существует бесконечно много таких меток, которые будут поставлены и больше не снимутся. Выберем среди них такую, что $\langle n, m, k\rangle > \max\{d, d'\}$, где $\mu(d') = \nu(d)$. Для того, чтобы эта метка поставилась на шаге t_0, нужно, чтобы существовали l и l' такие, что $\zeta_n^{t_0}(l) = d$ и $\eta_n^{t_0}(l') = d'$, в таком случае на l и l_1 поставится метка, которая больше не снимется. А отсюда либо $\lambda t \zeta_n^t(l)$, либо $\lambda t \eta_n^t(l')$ больше не изменяется после этого шага, в зависимости от того, стоит $S_{\langle n, m, k\rangle}$, либо $S_{\langle n, m, k\rangle}$. Поэтому $\gamma_n(l) = \nu\zeta_n^{t_0}(l)$, либо $\gamma_n(l') = \mu\eta_n^{t_0}(l')$, а отсюда $\gamma_n(l) = \nu d$, либо $\gamma_n(l') = \nu(d)$ и лемма доказана.

Лемма 7. *Для любого n отображение γ_n задает конструктивизацию модели $\mathfrak{M}$ равномерно по n, т. е. $\{\gamma_n | n \in N\}$ — вычислимая последовательность конструктивизаций $\mathfrak{M}$.*

Доказательство следует из того, что $\{\mathfrak{M}_n^t \mid n, t \in N\}$ — вычислимая последовательность конструктивных моделей, $\mathfrak{M}_n^0 \subseteq \mathfrak{M}_n^1 \subseteq \ldots$, $\bigcup_t \mathfrak{M}_n^t$ — рекурсивная модель, изоморфная $\mathfrak{M}$, а для любого t отображение $\gamma_n^t : \mathfrak{M}_n^t \to \mathfrak{M}$ является изоморфным вложением.

Лемма 8. *Для любых $n \neq m$ конструктивизации γ_n и γ_m неавтоэквивалентны.*

Доказательство. Предположим противное, пусть φ — автоморфизм модели $\mathfrak{M}$ и f_k — рекурсивная функция такая, что $\varphi\gamma_n = \gamma_m f_k$. Рассмотрим метку $S_{\langle n, m, k\rangle}$ и шаг t_0, после которого метки, не больше $S^*_{\langle n, m, k\rangle}$, уже не ставятся и не снимаются. В силу леммы 6 на всех γ_n-номерах x таких, что $\zeta_n^t(l) \leqslant r(n, m, k, t_0)$, и всех γ_m-номерах l' таких, что $\eta_m^t(l') \leqslant r(n, m, k, t_0)$ и $t \geqslant t_0$, уже стоит метка $S^*_{\langle n, m, k\rangle}$ и $\zeta_n^t(l)$ и $\eta_m^t(l')$ определены на таких числах, соответственно $\eta_n^{t_0}(l)$ и $\eta_m^{t_0}(l')$. Рассмотрим шаг $t_1 \geqslant t_0$, после которого для тройки $\langle n, m, k\rangle$ не выполняется этап 1. Рассмотрим шаг $t_2 \geqslant t_1$ такой, что для всех $l \leqslant r(n, m, k, t_0)$ найдется d_l, $\zeta_n^{t_2}(d_l) = l$ и $\lambda t \zeta_n^t(d_l)$ после t_2 не изменяется, аналогично для $l' \leqslant r(n, m, k, t_0)$ найдется d'_l, $\eta_m^{t_2}(d'_l) = l'$ и $\lambda t \eta_m^t(d'_l)$ не изменяется. Выберем l_0, больший всех таких d_l и $d_{l'}$, а также больше $r(n, m, k, t)$ и всех чисел, на которых стоят меньшие метки. Существует $t_3 \geqslant t_2$ такое, что $\delta f_k^{t_3} \supseteq \supseteq \{0, \ldots, l_0\}$ и $\rho f_k^{t_3} \supseteq \{0, \ldots, l_0\}$. Выберем $t_4 \geqslant t_3$ такое, что для всех $x \in \in \{0, \ldots, l_0\}$ $\lambda t \zeta_n^t(x)$ и $\lambda t \eta_n^t(x)$ при $t \geqslant t_4$ не изменяются, $\lambda t \zeta_m^t f_k(x)$ и $\lambda t \eta_m^t f_k(x)$ при $t \geqslant t_4$ также не изменяются и $\lambda t g_t(\zeta_n^t(x))$ при $t \geqslant t_4$ тоже не изменяется. Рассмотрим теперь шаг $t_5 > t_4$, на котором ставится метка $S_{\langle n', m', k' \rangle}$, большая метки $S_{\langle n, m, k \rangle}$. Тогда на этом шаге для тройки $\langle n, m, k \rangle$ выполнятся все условия этапа 3, и должна будет поставиться метка $S_{\langle n, m, k \rangle}$, что противоречит предположению.

Если же такого шага не найдется, то так как после t_4 не ставится никакой метки $S_{\langle n', m', k' \rangle}$, большей $S_{\langle n, m, k \rangle}$, то тоже выполнится этап 3 для $S_{\langle n, m, k \rangle}$ на некотором шаге $t \geqslant t_4$.

§ 2. ПРИЛОЖЕНИЯ К ВЫЧИСЛИМЫМ НУМЕРАЦИЯМ

Как было сказано выше, все определения относящиеся к вычислимым нумерациям, взяты из [8]. В этой части укажем некоторые приложения теоремы 1 к изучению позитивных и однозначных нумераций.

Определение 2 . Нумерация γ_0 *Δ_2^0-сводится* к γ_1 ($\gamma_0 \leqslant_{\Delta_2^0} \gamma_1$), если существует функция f из Δ_2^0 класса арифметической иерархии такая, что $\gamma_0(n) = \gamma_1 f(n)$ для любого $n \in N$.

Определение 3. Нумерации γ_0 и γ_1 *Δ_2^0-эквивалентны*, если они Δ_2^0-сводятся друг к другу.

Заметим, что если $\gamma_0 \leqslant_{\Delta_2^0} \gamma_1$ и γ_1-позитивная нумерация, а γ_0 и γ_1 — вычислимые нумерации одного и того же семейства, то γ_0 и γ_1 **Δ_2^0-эквивалентны**

Предложение 1. *Семейство р. п. множеств S, имеющее две неэквивалентные вычислимые однозначные нумерации, но Δ_2^0-эквивалентные, имеет счетное число неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций.*

Доказательство. Пусть γ_0 и γ_1 — две неэквивалентные однозначные вычислимые нумерации семейства S, тогда существует $0'$-рекурсивная функция f такая, что $\gamma_0(n) = \gamma_1 f(n)$ для всех $n \in N$.

Рассмотрим модель $\mathfrak{M}_S$, построенную в работе [3] для семейства S, и ее две конструктивизации ν_{γ_0} и ν_{γ_1}. Используя f, нетрудно построить теперь функцию g, также $0'$-рекурсивную, такую что $\varphi\nu_{\gamma_0}(n) = \nu_{\gamma_1} g(n)$ для всех $n \in N$, где φ — автоморфизм модели $\mathfrak{M}_S$. Теперь, применяя теорему 1, получаем, что класс конструктивизаций модели $\mathfrak{M}_S$ бесконечен, а в силу предложения из [3] существует бесконечно много однозначных вычислимых нумераций и у S.

Следствие 1 [10]. *Семейство о. р. ф. S с двумя неэквивалентными однозначными вычислимыми нумерациями имеет счетное число неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций.*

Пусть γ_0 и γ_1 — две неэквивалентные вычислимые нумерации S, тогда $\{(n, m) \mid \gamma_0(n) = \gamma_1(m)\} \in \Sigma_2^0$ и, следовательно, применимо предложение 1.

Следствие 2 [10, 13]. *Семейство конечных множеств с двумя неэквивалентными однозначными вычислимыми нумерациями имеет счетное число неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций.*

Пусть γ_0 и γ_1 — две неэквивалентные однозначные вычислимые нумерации семейства S. Тогда множество $\{(n, m) \mid \gamma_0(n) = \gamma_1(m)\} \in \Sigma_2^0$

и, следовательно, функция f с этим графиком принадлежит Δ_2^0 и применяется предложение 1.

Предложение 2. *Если семейство р. п. множества S имеет две неэквивалентные, но Δ_2^0-эквивалентные позитивные вычислимые нумерации, то существует счетное число неэквивалентных позитивных нумераций.*

Доказательство. Пусть γ — вычислимая позитивная нумерация семейства S с бесконечными смежными классами по нумерационной эквивалентности η_γ. Определим модель $\mathfrak{M}_S^*$ сигнатуры $\langle A^1, P^3, Q^3, R_n^3, S_n^2 \mid n \in N \rangle$.

Пусть $\eta_\gamma = \cup \eta^t$, где η^t, $t \geqslant 0$,— сильно вычислимая возрастающая последовательность конечных множеств. Основное множество $\mathfrak{M}_S^*$ будет $M \rightleftharpoons N \cup N^3 \cup N^3 \times \{0\}$. Определим теперь предикаты: $A \rightleftharpoons N$, $P \rightleftharpoons \{(n, m\ (n, m, k)) \mid m, k, n \in N\}$, $R_n \rightleftharpoons \{(m, (m, n, k)) \mid m, k \in N\}$, $Q \rightleftharpoons \{(n, m, (n, m, t, 0)) \mid (n, m) \in \eta^{t+1} \setminus \eta^t\}$, $S_n \rightleftharpoons \{(m, (m, n, t)) \mid n \in \gamma^{t+1}(m) \setminus \gamma^t(m)\}$, где $\{\gamma^t(m)\}$ — сильно вычислимая двойная последовательность, монотонно возрастающая по t для любого m и $\cup \gamma^t(m) = \gamma(m)$. Ясно, что с точностью до изоморфизма определение модели $\mathfrak{M}_S^*$ от нумерации γ не зависит. Определим

$$\nu_\gamma(n) \rightleftharpoons \begin{cases} m & , \text{ если } n = 3m, \\ (ll(m), rl(m), r(m)), & \text{если } n = 3m + 1, \\ ((ll(m), rl(m), r(m)), & \text{если } n = 3m + 2. \end{cases}$$

Ясно, что ν_γ — конструктивизация $\mathfrak{M}_S^*$.

Рассмотрим формулы $\varphi_n(x) \rightleftharpoons (\exists y) S_n(x, y)$ и $\psi(x, y) \rightleftharpoons (\exists z) Q(x, y, z)$.

Нетрудно непосредственно проверить следующие леммы.

Лемма 1.

$$\text{(i)}\ \mathfrak{M}_S^* \models \varphi_n(a) \qquad a \in A \text{ и } n \in \gamma(a).$$

$$\text{(ii)}\ \mathfrak{M}_S^* \models \psi(a, b) \qquad a, b \in A \text{ и } \gamma(a) = \gamma(b).$$

Лемма 2. *γ_1 и γ_2 неэквивалентные $\Leftrightarrow \nu_{\gamma_1}$ и ν_{γ_2} — неавтоэквивалентные конструктивизации.*

Если ν — конструктивизация $\mathfrak{M}_S^*$, то определим рекурсивную функцию $f: N \xrightarrow{1-1} \nu^{-1}(A)$.

Положим $\gamma_\nu(n) \rightleftharpoons \{m \mid \mathfrak{M}_S^* \models \varphi_m(\nu f(n))\}$. Нетрудно видеть, что γ_ν — позитивная нумерация.

Лемма 3. *ν и μ — неавтоэквивалентные конструктивизации тогда и только тогда, когда γ_ν и γ_μ неэквивалентны.*

Пусть γ_0 и γ_1 — неэквивалентные позитивные вычислимые нумерации семейства S, которые Δ_2^0-эквивалентны, тогда существует $0'$-рекурсивная функция f такая, что $\gamma_0 = \gamma_1 f$. Нетрудно добиться того, чтобы f отображала N на N.

Используя эту функцию, легко определить $0'$-рекурсивную функцию h, для которой выполнено равенство $\nu_{\gamma_0} = \nu_{\gamma_1} h$. Применив теперь теорему 1, получаем в силу леммы 3, что S имеет счетное число неэквивалентных позитивных вычислимых нумераций.

Пусть S — семейство конечных множеств, ν и μ — две позитивные нумерации семейства S. Значение $f(n)$ положим равным m такому, что существует t такое, что выполнено условие A: для всех $t' \geqslant t$ множества $\mu^t(i)$ и $\mu^{t'}(i)$ для $i \leqslant m$ равны и множества $\nu^t(i)$ и $\nu^{t'}(i)$, $i \leqslant m$, также равны, и $\nu^t(n) = \mu^t(m)$, но $\mu^t(m) \neq \mu^t(i)$ для всех $i < m$. Условие A рекурсивно относительно $0'$, поэтому функция f имеет $0'$-перечислимый график, а так как она всюду определена, то f $0'$-рекурсивна и, следовательно, мы построили функцию из Δ_2^0 такую, что $\nu = \mu f$. Применив теперь предложение 2, получаем

Следствие. *Если семейство конечных множеств имеет две неэквивалентные вычислимые позитивные нумерации, то существует счетное число таких неэквивалентных нумераций.*

В заключение сформулируем два вопроса, уже давно известные и неоднократно упоминавшиеся в выступлениях Ю. Л. Ершова и С.С. Марченкова.

Вопросы:

1. Всякое ли семейство рекурсивно перечислимых множеств, имеющее не менее двух неэквивалентных позитивных вычислимых нумераций, обладает счетным числом таких неэквивалентных нумераций?

2. Существуют ли семейства рекурсивно перечислимых множеств с любым заданным конечным числом неэквивалентных минимальных вычислимых нумераций?

Отметим в связи с этими проблемами, что существуют семейства рекурсивно перечислимых множеств с любым заданным числом неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мальцев А. И.** Конструктивные модели I.— Успехи мат. наук, 1961, т. 16, № 3, с. 3—60.
2. **Мальцев А. И.** О рекурсивных абелевых группах.— Докл. АН СССР, 1962, т. 146, № 5, с. 1009—1012.
3. **Гончаров С. С.** Однозначные вычислимые нумерации.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 5, с. 507—551.
4. **Гончаров С. С.** Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций — Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 2, с. 271—274.
5. **Гончаров С. С.** Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 6, с. 621—639.
6. **Гончаров С. С.** Автоустойчивость моделей и абелевых групп — Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 1, с. 23—44.
7. **Бадаев С. А.** О позитивных нумерациях.— Сиб. мат. журн., 1977, т. 18, № 3, с. 483—496.
8. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
9. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций III. Новосибирск: изд. Новосиб. ун-та, 1974.
10. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
11. **Селиванов В. Л.** О нумерациях семейств общерекурсивных функций.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 2, с. 205—226.
12. **Селиванов В. А.** О нумерациях канонически вычислимых семейств конечных множеств.— Сиб. мат. журн., 1977, т. 18, № 6, с. 1373—1380.
13. **Селиванов В. Л.** Несколько замечаний о классах рекурсивно перечислимых множеств.— Сиб. мат. журн., 1980, т. 18, № 1, с. 153—160.
14. **Lachlan A. N.** On recursive enumeration without repetition.— Z. Math. Logik Grundl. Math., 1965, Bd. 11, N 3, S. 209—220.
15. **Lachlan A. N.** On recursive enumeration without repetition: a correction.— Z. Math. Logik Grundl. Math., 1967, Bd. 13, N 2, S. 99—100.

СТРОЕНИЕ РЕШЕТОК КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

В А ГОРБУНОВ, В И. ТУМАНОВ

В работе предложен алгебраический подход к изучению квазимногообразий алгебраических систем, основанный на использовании языка подпрямых произведений и надпрямых пределов. Установлено соответствие между «внутренним» строением квазимногообразий и строением алгебраических решеток. Это позволило найти точное представление решеток квазимногообразий в виде решеток алгебраических множеств конгруэнций свободных систем счетного ранга. Проблема об описании класса всех решеток квазимногообразий была поставлена А. И. Мальцевым [1, 2], идеи и результаты которого оказали на авторов большое влияние.

Основная часть работы была изложена на V Всесоюзной конференции по математической логике, посвященной 70-летию академика А. И. Мальцева (Новосибирск, ноябрь 1979 г.).

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В работе используется, как правило, общепринятая терминология [3—5]. Приведем некоторые определения и обозначения.

Под *сигнатурой языка 1-й ступени* понимаем упорядоченную тройку $\sigma = \langle \sigma^F, \sigma^P, \nu \rangle$, состоящую из непересекающихся множеств σ^F, σ^P и отображения местности $\nu : \sigma^F \cup \sigma^P \to \omega$, где $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Элементы из σ^F называются *символами операций* (*функций*), элементы из σ^P — *символами предикатов* (*отношений*). Алгебраическая система сигнатуры σ — это тройка, состоящая из непустого множества A, набора отношений $\{r^A \subseteq A^{\nu(r)} | r \in \sigma^P\}$ и набора функций $\{f^A : A^{\nu(f)} \to A | f \in \sigma^F\}$. Для удобства считаем, что $\approx \in \sigma^P$, $\nu(\approx) = 2$, причем символ $\approx$ интерпретируем на любой системе как отношение равенства. Систему сигнатуры σ с основным множеством A обозначаем через $\langle A, \sigma \rangle$, или, если не возникает недоразумений, просто через A.

Атомной формулой сигнатуры σ в алфавите $X = \{x_i | i \in I\}$ называется формула вида $r(t_1, \ldots, t_s)$, где $r \in \sigma^P$, $t_1, \ldots, t_s$ — термы в алфавите X. Пусть $R_1, \ldots, R_m, R_{m+1}$ — атомные формулы сигнатуры σ в алфавите $\{x_1, \ldots, x_n\}$, тогда формула вида

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ (R_1 \& \ldots \& R_m \to R_{m+1})$$

называется *квазитождеством* (универсальной строго хорновой формулой). Аксиоматизируемый класс $\mathfrak{R}$ называется *квазимногообразием*, если существует система аксиом для $\mathfrak{R}$, состоящая из квазитождеств. Подробное изложение основ теории квазимногообразий содержится в монографии А. И. Мальцева [4], результаты из которой будем иногда использовать без особых ссылок.

Считаем, что все классы алгебраических систем абстрактны, т. е. замкнуты относительно изоморфных систем, а сигнатура, если не оговорено противное, произвольная и фиксированная.

Под *оператором* X на классах систем понимаем правило, которое любому классу $\mathfrak{R}$ сопоставляет некоторый класс $X(\mathfrak{R})$. Если X, Y — два оператора, то по определению $XY(\mathfrak{R}) = X(Y(\mathfrak{R}))$.

Нам понадобятся следующие операторы:

$\mathbf{S}(\mathfrak{R})$ — класс всех подсистем $\mathfrak{R}$-систем;

$\mathbf{H}(\mathfrak{R})$ — класс всех гомоморфных образов $\mathfrak{R}$-систем;

$\mathbf{P}(\mathfrak{R})$ — класс всех прямых произведений $\mathfrak{R}$-систем, при этом считаем, что прямое произведение пустого множества систем есть единичная система;

$\mathbf{P}_r(\mathfrak{R})$ — класс всех фильтрованных произведений $\mathfrak{R}$-систем;

$\mathbf{P}_u(\mathfrak{R})$ — класс всех ультрапроизведений $\mathfrak{R}$-систем;

$\mathbf{P}_s(\mathfrak{R})$ — класс всех подпрямых произведений $\mathfrak{R}$-систем;

$\mathbf{L}(\mathfrak{R})$ — класс всех прямых пределов $\mathfrak{R}$-систем;

$\vec{\mathbf{V}}(\mathfrak{R})$ — наименьший универсальный класс, содержащий класс $\mathfrak{R}$;

$\mathbf{Q}(\mathfrak{R})$ — наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathfrak{R}$;

$\mathbf{V}(\mathfrak{R})$ — наименьшее многообразие, содержащее класс $\mathfrak{R}$.

Запись $A=(a_i|i\in I)$ означает, что система A порождена множеством $\{a_i|i\in I\}$, а запись $A\leqslant B$ — что система A изоморфна подсистеме системы B. Гомоморфизм $A\to B$ называется *собственным*, если он не является изоморфизмом A на B.

Под *кардиналом* понимаем ординал, который нельзя взаимно однозначно отобразить на меньший ординал; ω — первый бесконечный кардинал. Множество A имеет мощность α (символически: $|A|=\alpha$), если существует взаимно однозначное соответствие между A и α.

Терминология по теории решеток соответствует [6, 7]. Точную верхнюю (точную нижнюю) грань подмножества A решетки L обозначаем через $\bigvee A$ (соответственно $\bigwedge A$) и называем *суммой* (соответственно *пересечением*). Булеву решетку всех подмножеств множества X обозначаем через $P(X)$, а решетку разбиений (отношений эквивалентности) на множестве X — через $\mathrm{Part}(X)$. Если $\pi\in\mathrm{Part}(X)$, то $[x]\pi$ обозначает смежный класс, содержащий элемент $x\in X$. Везде далее $2=\{0, 1\}$ — двухэлементная решетка, в которой $0<1$.

Для чтения настоящей работы желательно знакомство с работой авторов [8].

§ 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОДМНОЖЕСТВА

Напомним, что элемент a полной решетки L называется *компактным*, если для любого подмножества $A\subseteq L$ из $a\leqslant\bigvee A$ следует, что $a\leqslant\bigvee K$ для некоторого конечного подмножества $K\subseteq A$. Решетка L называется *алгебраической*, если L — полная решетка и любой элемент из L представим в виде суммы компактных элементов.

Без труда проверяется, что полная решетка L является алгебраической тогда и только тогда, когда для любых элементов a, $b\in L$, $a<b$, существует компактный элемент $c\in L$ такой, что $c\leqslant b$ и $c\nleqslant a$. Класс всех алгебраических решеток замкнут относительно взятия прямых произведений и полных подрешеток.

В этом разделе определим одно из основных решеточных понятий, используемых в работе — понятие алгебраического подмножества полной решетки, и исследуем связь алгебраических подмножеств с алгебраическими решетками.

Лемма 2.1. *Элемент a полной решетки L компактен тогда и только тогда, когда для любой цепи $C\subseteq L$ из $a\leqslant\bigvee C$ следует, что $a\leqslant c$ для некоторого элемента $c\in C$.*

Доказательство. Предположим, что условие леммы выполнено. Пусть $a\leqslant\bigvee A$ для некоторого подмножества $A\subseteq L$. Индукцией по $|A|$ докажем, что тогда найдется конечное подмножество $K\subseteq A$ такое, что $a\leqslant\bigvee K$. Для конечных A это очевидно. Предположим, что множество A бесконечно, $|A|=\alpha$, и утверждение справедливо для всех подмножеств, мощность которых $<\alpha$. Запишем A в виде $A=\{a_0, \ldots, a_\gamma, \ldots|\gamma<\alpha\}$, и пусть по определению $A_\beta=\{a_\gamma|\gamma<\beta\}$ при $\beta<\alpha$. Тогда $|A_\beta|<\alpha$, множество $\{\bigvee A_\beta|\beta<\alpha\}$ образует цепь и $a\leqslant\bigvee A=\bigvee(\bigvee A_\beta|\beta<\alpha)$. Следовательно, согласно условию, $a\leqslant\bigvee A_\beta$ для некоторого $\beta<\alpha$, откуда, в силу индукционного предположения, $a\leqslant\bigvee K$ для некоторого конечного подмножества $K\subseteq A_\beta\subseteq A$. Лемма доказана.

Элемент a полной решетки L называется *вполне конеразложимым*, если для любого подмножества $B\subseteq L$ из $a=\bigwedge B$ следует, что $a\in B$.

Лемма 2.2. *Любой элемент a алгебраической решетки A представим в виде $a=\bigwedge M$ для некоторого множества M вполне конеразложимых элементов.*

Эта лемма известна [6], но для полноты изложения приведем ее доказательство.

Пусть M — множество всех вполне конеразложимых элементов, больших или равных a, и $m = \bigwedge M$. По определению $a \leqslant m$. Предположим, что $a < m$. Так как A — алгебраическая решетка, то найдется компактный элемент $d \in A$ такой, что $d \leqslant m$ и $d \nleqslant a$. Пусть

$$R = \{x \in A \mid a \leqslant x,\ d \nleqslant x\}.$$

Множество R не пусто, поскольку $a \in R$. Покажем, что ч. у. множество $\langle R, \leqslant\rangle$ удовлетворяет условию леммы Цорна. Пусть C — цепь в R и $c = \bigvee C$. По определению $a \leqslant c$, и если бы $d \leqslant c$, то $d \leqslant c_0$ для некоторого $c_0 \in C$, что противоречило бы включению $C \subseteq R$. Следовательно, $c \in R$.

Пусть x_0 — максимальный элемент в R. Покажем, что $x_0 \in M$. Пусть $x_0 = \bigwedge B$ для некоторого подмножества $B \subseteq A$, но $x_0 \notin B$, т. е. $x_0 < b$ для всех $b \in B$. Так как элемент x_0 максимален в R и $a \leqslant x_0$, то отсюда следует, что $d \leqslant b$ для всех $b \in B$. Следовательно, $d \leqslant \bigwedge B = x_0$, что невозможно. Итак, $x_0 \in M$ и $d \nleqslant x_0$. Полученное противоречие заканчивает доказательство леммы.

Подмножество A полной решетки L назовем *алгебраическим*, если выполнены следующие два условия:

a1) A замкнуто относительно пересечений, т. е. $\bigwedge B \in A$ для любого подмножества $B \subseteq A$;

a2) A замкнуто относительно сумм по цепям, т. е. $\bigvee C \in A$ для любой цепи $C \subseteq A$.

Отметим, что в терминологии работы [8] алгебраическое подмножество в L — это в точности полная нижняя предельно замкнутая подполурешетка в L.

Из условия a1) следует, что алгебраическое подмножество $A \subseteq L$ является полной решеткой относительно индуцированного порядка, сумма $\bigvee_A$ в которой, вообще говоря, не совпадает с суммой $\bigvee$ в решетке L.

Лемма 2.3. *Любое алгебраическое подмножество A алгебраической решетки L является алгебраической решеткой относительно индуцированного порядка.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$, $a < b$. Так как L — алгебраическая решетка, то найдется компактный элемент $d \in L$ такой, что $d \leqslant b$ и $d \nleqslant a$. Пусть $d_0 = \bigwedge(x \in A \mid d \leqslant x)$. По определению $d_0 \in A$, $d_0 \leqslant b$ и $d \leqslant d_0 \nleqslant a$. Осталось показать, что элемент d_0 компактен в решетке A. Воспользуемся леммой 2.1. Пусть C — цепь в A и $d_0 \leqslant \bigvee_A C$. Так как элемент d компактен в решетке L, $\bigvee_A C = \bigvee C$ и $d \leqslant d_0 \leqslant \bigvee_A C$, то $d \leqslant c_0$ для некоторого $c_0 \in C$. Следовательно, $d_0 \leqslant c_0$, что и требовалось.

Напомним, что ч. у. множество $\langle P, \leqslant\rangle$ называется *направленным*, если для любых элементов $a, b \in P$ существует элемент $c \in P$ такой, что $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$.

Лемма 2.4. *Подмножество M полной решетки L замкнуто относительно сумм по цепям тогда и только тогда, когда M замкнуто относительно сумм по направленным подмножествам.*

Доказательство. Предположим, что множество M замкнуто относительно сумм по цепям. Пусть B — произвольное направленное подмножество в M и $b = \bigvee B$. Если B конечно, то $b \in B \subseteq M$. Предположим, что множество B бесконечно. Для любых элементов $a, c \in B$ выберем элемент $\varphi(a, c)$ такой, что $a \vee c \leqslant \varphi(a, c)$. Докажем теперь индукцией по $|B|$, что $b \in M$.

Рассмотрим сначала случай $|B| = \omega$. Считая, что $B = \{b_n \mid n \in \omega\}$, определим элементы $c_n \in B$, $n \in \omega$, индукцией по n следующим образом:

$$c_0 = b_0,\ c_{n+1} = \varphi(b_n, c_n),\ n > 0.$$

Так как множество $C = \{c_n \mid n \in \omega\}$ является цепью, то, согласно предположению, $c = \bigvee C \in M$. Из включения $C \subseteq B$ следует, что $c \leqslant b$. С другой стороны, $c \geqslant c_{n+1} \geqslant b_n$ для всех $n \in \omega$, поэтому $c \geqslant b$ и $b = c \in M$.

Пусть теперь $|B| = \beta > \omega$ и $B = \{b_\xi | \xi < \beta\}$. Тогда $B = \bigcup(B_\gamma | \omega \leqslant \gamma < \beta)$, где $B_\gamma = \{b_\xi | \xi < \gamma\}$ при $\omega \leqslant \gamma < \beta$. Для всех $\omega \leqslant \gamma < \beta$ и $n \in \omega$ определим подмножество $D_n(B_\gamma)$ индукцией по n следующим образом:

$$D_0(B_\gamma) = B_\gamma,$$

$$D_{n+1}(B_\gamma) = D_n(B_\gamma) \cup \{\varphi(b_1, b_2) | b_1, b_2 \in D_n(B_\gamma)\}, \ n > 0.$$

Очевидно, что множество $D(B_\gamma) = \bigcup (D_n(B_\gamma) | n \in \omega)$ направленно, $B_\gamma \subseteq D(B_\gamma) \subseteq B$ и $D(B_{\gamma_1}) \subseteq D(B_{\gamma_2})$ при $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 < \beta$. Далее, в силу определения $D_n(B_\gamma)$, имеем $\omega \leqslant \gamma \leqslant |D_n(B_\gamma)| \leqslant \gamma + \gamma^2 = \gamma$, т. е. $|D_n(B_\gamma)| = \gamma$ (здесь и далее сумма кардинальная). Следовательно.

$$\omega \leqslant \gamma \leqslant |D(B_\gamma)| \leqslant \sum(|D_n(B_\gamma)| \, | n \in \omega),$$

т. е. $|D(B_\gamma)| = \gamma < \beta$. Отсюда, согласно индукционному предположению следует, что элемент $d_\gamma = \bigvee D(B_\gamma)$ лежит в M для всех $\omega \leqslant \gamma < \beta$. Поскольку множество $\{d_\gamma | \gamma < \beta\}$ является цепью, то $d = \bigvee(d_\gamma | \omega \leqslant \gamma < \beta) \in M$. Осталось показать, что $b = d$. Так как $B_\gamma \subseteq D(B_\gamma) \subseteq B$, то $\bigvee B_\gamma \leqslant d_\gamma \leqslant b$, и поэтому

$$b = \bigvee(\bigvee B_\gamma | \omega \leqslant \gamma < \beta) \leqslant \bigvee(d_\gamma | \omega \leqslant \gamma < \beta) = d \leqslant b,$$

т. е. $d = b$. Лемма доказана.

Отметим, что леммы 2.1 и 2.4 остаются справедливыми, если в них цепи заменить вполне упорядоченными множествами.

Согласно [5] полная нижняя подполурешетка булевой решетки $P(X)$, замкнутая относительно объединенной по направленным подмножествам называется *алгебраически-замкнутой системой*. Ввиду леммы 2.4 алгебраически-замкнутые системы в $P(X)$ совпадают с алгебраическими подмножествами. Поэтому в силу замечания 2.4 работы авторов [8] и леммы 2.3 имеет место

Предложение 2.5. *Для полной решетки L следующие условия равносильны:*

1) *L — алгебраическая решетка;*

2) *существует алгебраически-замкнутая система $B \subseteq P(X)$ такая, что $L \simeq \langle B, \subseteq\rangle$;*

3) *существует алгебраическое подмножество $B \subseteq P(X)$ такое, что $L \simeq \langle B, \subseteq\rangle$;*

4) *существует замкнутая нижняя подполурешетка $B \subseteq P(X)$ такая, что $L \simeq \langle B, \subseteq\rangle$.*

Замкнутость в условии 4) рассматривается в топологии произведения 2^X, где 2 — двухэлементное множество с дискретной топологией, а множество $P(X)$ отождествлено с множеством 2^X.

Заметим, что равносильность условий 1) и 2) доказана Биркгофом и Фринком (см. [5]).

§ 3. КОНГРУЭНЦИИ НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

При изучении алгебраических систем важную роль играют конгруэнции, поскольку они тесно связаны с гомоморфизмами систем. Общепринятое определение конгруэнции на алгебраической системе (см. [4]) не зависит от предикатов системы и поэтому не дает, вообще говоря, известного соответствия между гомоморфными образами системы и ее конгруэнциями. Этим, в частности, объясняется тот факт, что теория конгруэнций развивалась только для алгебр, т. е. систем функциональной сигнатуры (см. обзор Б. Йонсона [9]).

В этом параграфе мы дадим новое определение конгруэнции на алгебраической системе, совпадающее со старым в случае алгебр и позволяющее использовать методы теорий конгруэнций в общем случае.

Пусть A — произвольная алгебраическая система сигнатуры $\sigma = \langle \sigma^F, \sigma^P, \nu \rangle$. Рассмотрим решетку

$$\Theta(A) = \prod (P(A^{\nu(r)}) \mid r \in \sigma^P).$$

Так как $P(A^{\nu(r)})$ — алгебраические решетки относительно включения, то $\Theta(A)$ — алгебраическая решетка относительно покомпонентного включения:

$$\theta_1 \subseteq \theta_2 \Leftrightarrow \forall r \in \sigma^P (\theta_1(r) \subseteq \theta_2(r)).$$

Операции в решетке $\Theta(A)$, совпадающие с покомпонентным объединением и пересечением, будем обозначать через $\cup$ и $\cap$ соответственно.

Элемент θ решетки $\Theta(A)$ назовем *конгруэнцией* на системе A, если выполнены следующие условия:

c1) $\theta(\approx)$ — отношение эквивалентности на A;

c2) для всех $f \in \sigma^F$ и $a_i, b_i \in A$, $i = 1, \ldots, m = \nu(f)$, если $\langle a_i, b_i \rangle \in \theta(\approx)$, то $\langle f^A(a_1, \ldots, a_m), f^A(b_1, \ldots, b_m) \rangle \in \theta(\approx)$;

c3) для всех $r \in \sigma^P$ и $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n = \nu(r)$, если $r^A(a_1, \ldots, a_n)$, то $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \theta(r)$;

c4) для всех $r \in \sigma^P$ и $a_i, b_i \in A$, $i = 1, \ldots, n = \nu(r)$, если $\langle a_i, b_i \rangle \in \theta(\approx)$ и $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \theta(r)$, то $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in \theta(r)$.

Заметим, что условие c1) является следствием условий c3) и c4). Если $\sigma^P = \{\approx\}$, т. е. σ — функциональная сигнатура, то условие c1) равносильно условиям c3), c4); в частности, в этом случае данное определение конгруэнции совпадает с общепринятым определением.

Обозначим через $\mathrm{Con}(A)$ множество всех конгруэнций на системе A. Так как пересечение любого множества конгруэнций в решетке $\Theta(A)$ является конгруэнцией, то $\mathrm{Con}(A)$ — полная решетка относительно индуцированного порядка. Пересечение в решетке $\mathrm{Con}(A)$ совпадает с пересечением в решетке $\Theta(A)$, а сумма $\vee\theta_i$ устроена следующим ообразом:

$$(\vee\theta_i)(\approx) \text{ — сумма в решетке } \mathrm{Part}(A),$$

$$\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in (\vee\theta_i)(r) \Leftrightarrow \exists \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \cup\theta_i(r)$$

$$(\langle a_j, b_j \rangle \in (\vee\theta_i)(\approx),\ j = 1, \ldots, n).$$

Наибольшую и наименьшую конгруэнции на системе А обозначим через 1_A и 0_A соответственно.

Пример 3.1. Проиллюстрируем данное определение на графах, т. е. системах с одним бинарным предикатом r (и с отношением равенства $\approx$).

Рассмотрим неориентированный граф без петель T, изображенный на рис. 3.1. По определению $\Theta(T) = P(T^2) \times P(T^2)$. Пусть θ — произвольная конгруэнция на графе T, $\theta = \langle \theta(\approx), \theta(r) \rangle$. Ввиду условия c3) множество $\delta_0 = \{\langle i, j \rangle \mid i, j \in T,\ i \neq j\}$ содержится в $\theta(r)$. Всевозможные надмножества $\delta_I = \delta_0 \cup \{\langle i, i \rangle \mid i \in I\}$, $I \subseteq T$, множества δ_0 образуют относительно $\subseteq$ булеву решетку, изображенную на рис. 3.2, *а*. Согласно условию c1) $\theta(\approx)$ — отношение эквивалентности на T. Всевозможные отношения

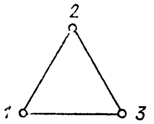


Рис. 3.1.

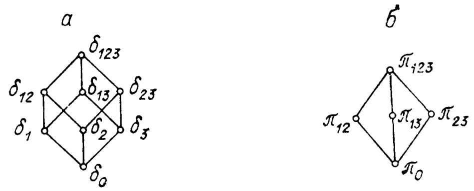


Рис. 3.2.

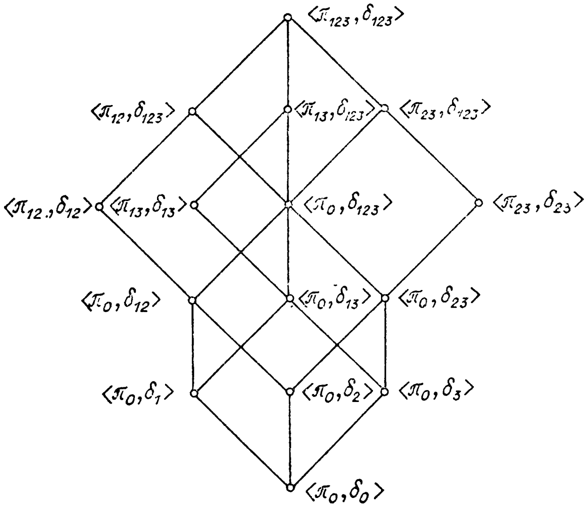


Рис. 3.3.

эквивалентности $\pi_J=\{\langle i, j\rangle | i, j\in J, i\neq j\}\cup\pi_0$ на T, где $\pi_0=\{\langle i, i\rangle | i\in T\}$, $J\subseteq T$, $|J|\neq 1$, образуют относительно включения решетку, изображенную на рис. 3.2, *б*. Следовательно, ввиду условия с4) конгруэнция θ имеет вид $\langle\pi_J, \delta_I\rangle$, где

$$\forall i\in T\ (i\in J\Rightarrow i\in I),$$

$$I,\ J\subseteq T,\ |J|\neq 1,$$

и такими парами исчерпываются все конгруэнции на T. Теперь нетрудно построить решетку $\mathrm{Con}(T)$, она изображена на рис. 3.3.

Предложение 3.2. $\mathrm{Con}(A)$ *является алгебраическим подмножеством решетки* $\Theta(A)$ *и, следовательно, алгебраической решеткой относительно индуцированного порядка.*

Доказательство. Уже отмечалось, что подмножество $\mathrm{Con}(A)$ замкнуто относительно пересечений. Без труда проверяется то, что объединение произвольной цепи конгруэнций снова является конгруэнцией. Поэтому алгебраичность решетки $\mathrm{Con}(A)$ следует из леммы 2.3.

Пусть $\theta\in\mathrm{Con}(A)$, $A/\theta=\{[a]\theta | a\in A\}$ — фактор-множество по отношению эквивалентности $\theta(\approx)$. Определим на множестве A/θ операций $f^{A/\theta}(m=\nu(f))$ и предикаты $r^{A/\theta}(n=\nu(r))$ сигнатуры σ следующим образом:

$$f^{A/\theta}([a_1]\theta, \ldots, [a_m]\theta)=[f^A(a_1, \ldots, a_m)]\theta,$$

$$r^{A/\theta}([a_1]\theta, \ldots, [a_n]\theta)\Leftrightarrow\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\in\theta(r).$$

Из условий с2) и с4) следует, что данное определение корректно. Полученную систему назовем *фактор-системой системы A по конгруэнции* θ и обозначим через A/θ.

Согласно условию с3) отображение $a\to[a]\theta$, $a\in A$, системы A на фактор-систему A/θ является гомоморфизмом; этот гомоморфизм называется каноническим. Пусть $\varphi: A\to B$ — произвольный гомоморфизм. Без труда проверяется, что элемент $\ker\varphi\in\Theta(A)$, определенный следующим образом:

$$(\ker\varphi)(r)=\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\in A^n | r^B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))\},$$

является конгруэнцией на системе A; эта конгруэнция называется *ядерной конгруэнцией гомоморфизма* φ. По определению ядерная конгруэнция канонического гомоморфизма $A\to A/\theta$ совпадает с конгруэнцией θ.

Предложение 3.3. (теорема о гомоморфизме). *Пусть φ — гомоморфизм системы A на систему B, ψ — канонический гомоморфизм $A\to A/\ker\varphi$. Тогда отображение $\alpha: A/\ker\varphi\to B$ по правилу $\alpha([a]\ker\varphi)=\varphi(a)$, $a\in A$, является изоморфизмом и $\varphi=\alpha\psi$.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что α — взаимно однозначный гомоморфизм системы $A/\ker\varphi$ на систему B. Покажем, что α^{-1} — также гомоморфизм. Пусть $r^B(b_1, \ldots, b_n)$, где $r\in\sigma^P$, $b_i\in B$, $i=1, \ldots, n=\nu(r)$, и элементы $a_i\in A$, $i=1, \ldots, n$, таковы, что $\varphi(a_i)=b_i$. Тогда $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\in\ker\varphi(r)$, отсюда

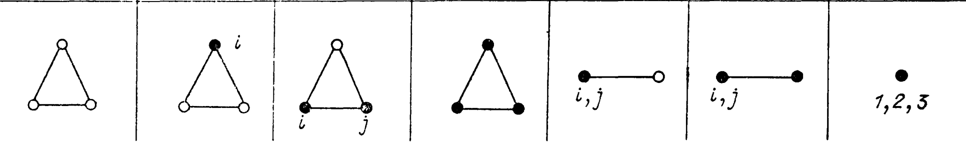
$$r^{A/\ker\varphi}([a_1]\ker\varphi, \ldots, [a_n]\ker\varphi),$$

что и требовалось. Равенство $\varphi = \alpha\psi$ следует непосредственно из определений.

Отметим, что ввиду предложения 3.3 задачи: а) найти все гомоморфные образы системы A и б) найти все конгруэнции на системе A — равносильны (ср. [4, с. 64]).

Пример 3.4. Обратимся к примеру 3.1, в котором описаны конгруэнции графа T. Из этого описания легко находятся все гомоморфные образы графа T и соответствующие им конгруэнции согласно следующей таблице (здесь черными кружками обозначены петли графов).

$\langle \pi_0, \delta_0 \rangle$	$\langle \pi_0, \delta_i \rangle$	$\langle \pi_0, \delta_{ij} \rangle$ $i \neq j$	$\langle \pi_0, \delta_{123} \rangle$	$\langle \pi_{ij}, \delta_{ij} \rangle$ $i \neq j$	$\langle \pi_{ij}, \delta_{123} \rangle$ $i \neq j$	$\langle \pi_{123}, \delta_{123} \rangle$



Следует отметить, что естественным образом переформулируются также 1-я и 2-я теоремы об изоморфизме.

Определим теперь в терминах конгруэнций некоторые известные конструкции, необходимые в дальнейшем.

Подсистема A прямого произведения $\prod_i A_i$ называется *подпрямым произведением систем* A_i, если все проектирования $\pi_i : A \to A_i$ являются гомоморфизмами на (символически: $A \leqslant_s \prod_i A_i$). Согласно определению

$$A \leqslant_s \prod_i A_i \Rightarrow \bigcap_i \ker \pi_i = 0_A.$$

Справедливо и обратное утверждение.

Лемма 3.5. Если $\theta = \bigcap_i \theta_i$, $\theta_i \in \mathrm{Con}(A)$, *то* $A/\theta \leqslant_s \prod_i A/\theta_i$.

Доказательство. Определим отображение $\varphi : A/\theta \to \prod_i A/\theta_i$, полагая $\varphi([a]\theta)(i) = [a]\theta_i$, $a \in A$. Без труда проверяется, что определение корректно, φ — гомоморфизм и $\varphi(A/\theta) \leqslant_s \prod_i A/\theta_i$.

Покажем, что отображение φ является изоморфизмом A/θ на $\varphi(A/\theta)$. Пусть $r^{\varphi(A/\theta)}(b_1, \ldots, b_n)$, где $r \in \sigma^P$, $b_j \in \varphi(A/\theta)$, $j = 1, \ldots, n = \nu(r)$, и элементы $a_j \in A$, $j = 1, \ldots, n$, таковы, что $\varphi([a_j]\theta) = b_j$. Тогда

$$r^{A/\theta_i}([a_1]\theta_i, \ldots, [a_n]\theta_i) \text{ для всех } i,$$

отсюда $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \bigcap_i \theta_i(r)$. Следовательно, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \theta(r)$, или равносильно, $r^{A/\theta}([a_1]\theta, \ldots, [a_n]\theta)$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс алгебраических систем. Система $A \in \mathfrak{K}$ называется *подпрямо* $\mathfrak{K}$*-неразложимой*, если для любых $A_i \in \mathfrak{K}$ из $A \leqslant_s \prod_i A_i$ следует, что одно из проектирований $\pi_i : A \to A_i$ является изоморфизмом.

Следствие 3.6. *Система A подпрямо неразложима в классе всех систем данной сигнатуры тогда и только тогда, когда конгруэнция* 0_A *вполне конеразложима в решетке* $\mathrm{Con}(A)$.

Лемма 3.7. *Пусть $A = \prod_i A_i$ — прямое произведение систем A_i, $i \in I$, D — произвольный фильтр на I. Тогда элемент $\theta_D \in \Theta(A)$ такой, что*

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \theta_D(r) \Leftrightarrow \{i \in I \mid r^{A_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))\} \in D$$

для всех $r \in \sigma^P$ *и* $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n = \nu(r)$, *является конгруэнцией на* A, *и* $A/\theta \simeq {}_D\prod_i A_i/D$.

Доказательство следует из определений (ср. [10, с. 200]).

Конгруэнция θ на алгебраической системе A называется *вполне характеристической,* если для любого гомоморфизма $\varphi: A \to A$ и для любых $r \in \sigma^P$, $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n = \nu(r)$, имеет место импликация

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \theta(r) \Rightarrow \langle \varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)\rangle \in \theta(r).$$

Без труда проверяется, что множество $\mathrm{Ch}(A)$ всех вполне характеристических конгруэнций на системе A является полной подрешеткой в $\mathrm{Con}(A)$.

Предложение 3.8. *Пусть* F — *свободная система счетного ранга из многообразия* $\mathfrak{M}$. *Тогда отображение*

$$\theta \to \mathbf{V}(F/\theta), \quad \theta \in \mathrm{Ch}(F),$$

является антиизоморфизмом решетки $\mathrm{Ch}(F)$ *на решетку* $L_v(\mathfrak{M})$ *всех подмногообразий многообразия* $\mathfrak{M}$.

Для многообразий функциональной сигнатуры доказательство предложения содержится в [4]. В общем случае ввиду предложения 3.3 доказательство аналогично и поэтому опускается.

В заключение несколько слов о строении решеток $\mathrm{Con}(A)$. Пусть A — произвольная система сигнатуры σ, A_F — ее σ^F-обеднение. Без труда проверяется, что отображение $\varphi: \theta \to \theta(\approx)$, $\theta \in \mathrm{Con}(A)$, является полным гомоморфизмом $\mathrm{Con}(A)$ на $\mathrm{Con}(A_F)$, причем каждый смежный класс по $\ker\varphi$ изоморфен булевой решетке вида $P(X)$. В частности, если σ состоит только из предикатных символов, т. е. $\sigma^F = \varnothing$, то $\mathrm{Con}(A)$ имеет очень специальное строение: $\mathrm{Con}(A)/\ker\varphi \simeq \mathrm{Part}(A)$, и каждый смежный класс по $\ker\varphi$ изоморфен $P(X)$ для некоторого множества X. Отметим еще, что $\mathrm{Con}(A_F)$ является полной подрешеткой в $\mathrm{Con}(A)$.

§ 4. НАДПРЯМЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Напомним, что кортеж $\mathcal{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$, состоящий из направленного множества $\langle I, \leqslant\rangle$, семейства $\{A_i | i \in I\}$ алгебраических систем A_i фиксированной сигнатуры σ и семейства $\{\varphi_{ij} | i, j \in I, i \leqslant j\}$ гомоморфизмов $\varphi_{ij}: A_i \to A_j$, называется *прямым спектром,* если φ_{ii} — тождественное отображение и $\varphi_{ik} = \varphi_{jk}\varphi_{ij}$ для всех $i, j, k \in I$, $i \leqslant j \leqslant k$. Обозначим через A_∞ фактор-множество множества $\cup(A_i \times \{i\} | i \in I)$ по следующему отношению эквивалентности:

$$\langle a, i\rangle \equiv \langle b, j\rangle \Leftrightarrow \exists k \in I(i, j \leqslant k, \varphi_{ik}(a) = \varphi_{jk}(b)).$$

Пусть $[a, i]$ — смежный класс по отношению $\equiv$, содержащий элемент $\langle a, i\rangle$. На множестве A_∞ определим операции $f^{A_\infty}(m = \nu(f))$ и предикаты $r^{A_\infty}(n = \nu(r))$ сигнатуры σ следующим образом:

$$f^{A_\infty}([a_1, i_1], \ldots, [a_m, i_m]) = \left[f^{A_j}\left(\varphi_{i_1 j}(a_1), \ldots, \varphi_{i_m j}(a_m)\right), j\right],$$

где $j \geqslant i_1, \ldots, i_m$;

$$r^{A_\infty}([a_1, i_1], \ldots, [a_n, i_n]) \Leftrightarrow \exists j \geqslant i_1, \ldots, i_n \left(r^{A_j}\left(\varphi_{i_1 j}(a_1), \ldots, \varphi_{i_n j}(a_n)\right)\right).$$

Без труда проверяется корректность данного определения; полученная система называется *прямым пределом по прямому спектру* $\mathcal{A}$ и обозначается через $\varinjlim \mathcal{A}$ (см. [5]).

Из определения $\varinjlim \mathscr{A}$ следует, что атомная формула $R(x_1, \ldots, x_n)$ истинна в системе $\varinjlim \mathscr{A}$ при подстановке $x_j \to [a_j, i_j]$ тогда и только тогда, когда существуют $k \in I$ и $a'_j \in A_k$, $j = 1, \ldots, n$, такие, что $A_k \models R(a'_1, \ldots, a'_n)$ и $[a_j, i_j] = [a'_j, k]$, $j = 1, \ldots, n$. Отметим также, что отображение $\varphi_{i\infty} : \mathscr{A}_i \to \varinjlim \mathscr{A}$, $\varphi_{i\infty}(a) = [a, i]$, является гомоморфизмом и $\varphi_{j\infty}\varphi_{ij} = \varphi_{i\infty}$ для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$; если гомоморфизмы φ_{ij} разнозначны (на), то гомоморфизмы $\varphi_{i\infty}$ также разнозначны (на).

Пусть J — направленное подмножество в I такое, что любой элемент из I меньше (или равен) некоторого элемента из J, и $\mathscr{A}_J$ — прямой спектр, получающийся из спектра $\mathscr{A}$ естественным ограничением на J. Тогда $\varinjlim \mathscr{A} \simeq \varinjlim \mathscr{A}_J$, в частности, $\varinjlim \mathscr{A} \simeq \varinjlim \mathscr{A}_{[i)}$, где $[i) = \{j \in I \mid j \geqslant i\}$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что множество I содержит наименьший элемент 0.

Кортеж $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij} \rangle$ назовем *надпрямым спектром,* если $\mathscr{A}$ — прямой спектр и отображения φ_{ij} являются гомоморфизмами A_i на A_j для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$. Предел по надпрямому спектру назовем *надпрямым пределом.*

Понятие надпрямого предела ýже понятия прямого предела. Проиллюстрируем это на следующем примере. Рассмотрим класс $\mathfrak{R}$ всех конечно порожденных систем данной сигнатуры. Очевидно, класс $\mathfrak{R}$ замкнут относительно надпрямых пределов. В то же время класс $\mathfrak{R}$ не замкнут относительно прямых пределов, так как любая не конечно порожденная система является прямым пределом своих конечно порожденных подсистем.

Пусть $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij} \rangle$ — произвольный надпрямой спектр. Так как $\varphi_{i\infty}$ — гомоморфизм системы A_i на систему $\varinjlim \mathscr{A}$, то, в силу предложения 3.3, имеем $\varinjlim \mathscr{A} \simeq A_i/\theta_{i\infty}$, где $\theta_{i\infty} = \ker \varphi_{i\infty}$. Без труда находится строение конгруэнции $\theta_{i\infty}$: если $r \in \sigma^P$, $n = \nu(r)$, то

$$\theta_{i\infty}(r) = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A_i^n \mid \exists k \geqslant i \; r^{A_k}(\varphi_{ik}(a_1), \ldots, \varphi_{ik}(a_n))\}.$$

Дадим теперь характеризацию надпрямых пределов в терминах конгруэнций.

Предложение 4.1. *Пусть* $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij} \rangle$ *— надпрямой спектр,* $\theta_i = \ker \varphi_{0i}$ *и* $\theta = \bigcup_i \theta_i$. *Тогда* $\{\theta_i \mid i \in I\}$ *— направленное подмножество в* $\mathrm{Con}(A_0)$, $\theta \in \mathrm{Con}(A_0)$ и $\varinjlim \mathscr{A} \simeq A_0/\theta$.

Обратно, пусть B *— произвольная система,* I *— направленное подмножество в* $\mathrm{Con}(B)$ *и* $\theta = \cup I$. *Тогда* $\theta \in \mathrm{Con}(B)$, *кортеж* $\mathscr{B} = \langle I_0, B_i, \varphi_{ij} \rangle$, *где* $I_0 = I \cup \{0_B\}$, $B_i = B/i$ *и* $\varphi_{ij}: B/i \to B/j$ *— канонический гомоморфизм для всех* $i, j \in I_0$, $i \subseteq j$, *является надпрямым спектром и* $B/\theta \simeq \varinjlim \mathscr{B}$.

Доказательство. а) Так как I — направленное множество, то для любых $i, j \in I$ найдется $k \in I$ такое, что $i, j \leqslant k$. Поэтому из равенств $\varphi_{0k} = \varphi_{ik}\varphi_{0i} = \varphi_{jk}\varphi_{0j}$ следует, что $\theta_i, \theta_j \subseteq \theta_k$, т. е. $\{\theta_i \mid i \in I\}$ — направленное подмножество в $\mathrm{Con}(A_0)$. Так как $\mathrm{Con}(A_0)$ — алгебраическое подмножество в $\Theta(A_0)$, то, согласно лемме 2.4, $\theta \in \mathrm{Con}(A_0)$. В силу изоморфизма $\varinjlim \mathscr{A} \simeq A_0/\theta_{0\infty}$ осталось доказать равенство $\theta = \theta_{0\infty}$. Если $r \in \sigma^P$, $n = \nu(r)$ и $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A_0^n$, то из определения θ и описания $\theta_{0\infty}$ получаем

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \theta(r) \Leftrightarrow \exists i \in I \left(r^{A_i}(\varphi_{0i}(a_1), \ldots, \varphi_{0i}(a_n))\right) \Leftrightarrow \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \theta_{0\infty}(r).$$

б) Ясно, что $\mathscr{B}$ — надпрямой спектр и $\theta \in \mathrm{Con}(B)$. Так как $\varinjlim \mathscr{B} \simeq B_0/\theta_{0\infty}$ и $B_0 = B$, то требуемое утверждение следует из равенства $\theta = \theta_{0\infty}$, которое доказывается так же, как в п. а). Предложение доказано.

Надпрямой предел $\varinjlim \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$ называется *цепным*, если I — цепь.

Следствие 4.2. *Класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем замкнут относительно надпрямых пределов тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K}$ замкнут относительно цепных надпрямых пределов.*

Действительно, предположим, что класс $\mathfrak{K}$ замкнут относительно цепных надпрямых пределов. Пусть $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$ — произвольный надпрямой спектр, где $A_i \in \mathfrak{K}$ для всех $i \in I$. Согласно предложению 4.1 $\varinjlim \mathscr{A} \simeq A_0/\theta$, где θ — сумма некоторого направленного семейства конгруэнций из множества $C_{\mathfrak{K}}(A_0) = \{\pi \in \mathrm{Con}(A_0) \mid A_0/\pi \in \mathfrak{K}\}$. Поэтому достаточно доказать, что множество $C_{\mathfrak{K}}(A_0)$ замкнуто относительно сумм по направленным подмножествам. Ввиду леммы 2.4 это утверждение достаточно доказать для цепей. Пусть C — произвольная цепь в $C_{\mathfrak{K}}(A_0)$ и $\theta = \bigcup C$. В силу предложения 4.1 имеем $A_0/\theta \simeq \varinjlim \mathscr{B}$, где $\mathscr{B} = \langle J, B_i, \psi_{ij}\rangle$, $J = C \cup \{0_{A_0}\}$ и $B_i = A_0/i$ при $i \in J$. Так как J — цепь и $B_i \in \mathfrak{K}$, то по предположению $A_0/\theta \in \mathfrak{K}$, что и требовалось.

Докажем теперь несколько вспомогательных утверждений о прямых пределах.

Лемма 4.3. *Пусть $\prod\limits_{i\in I} A_i/D$ — фильтрованное произведение систем A_i по фильтру D и $\mathscr{A} = \langle D, A_{J_1}, \pi_{J_1J_2}\rangle$, где множество D упорядочено относительно $\supseteq$, $A_{J_1} = \prod\limits_{i\in J_1} A_i$ и $\pi_{J_1J_2} : A_{J_1} \to A_{J_2}$ — проектирование A_{J_1} на A_{J_2} для всех $J_1, J_2 \in D$, $J_1 \supseteq J_2$. Тогда $\mathscr{A}$ — надпрямой спектр и $\prod\limits_i A_i/D \simeq \varinjlim \mathscr{A}$.*

Доказательство. Имеем $\varinjlim \mathscr{A} \simeq A_I/\theta$, $\prod\limits_i A_i/D \simeq A_I/\theta_D$, где θ — ядерная конгруэнция гомоморфизма $\pi_{I\infty} : A_I \to \varinjlim \mathscr{A}$, а конгруэнция θ_D определена в лемме 3.7. Без труда проверяется, что $\theta = \theta_D$. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Пусть $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$ — надпрямой спектр и $B = (b_k \mid k \in K) \leqslant \varinjlim \mathscr{A}$. Выбрав в A_0 элементы a_k, $k \in K$, такие, что $\varphi_{0\infty}(a_k) = b_k$, полагаем $B_i = (\varphi_{0i}(a_k) \mid k \in K)$, ψ_{ij} — сужение φ_{ij} на B_i для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$. Тогда $\mathscr{B} = \langle I, B_i, \psi_{ij}\rangle$ — надпрямой спектр и $B \simeq \varinjlim \mathscr{B}$.*

Доказательство. Проверим, что $\psi_{ij}(B_i) = B_j$ для всех $i, j \in I$, $i \leqslant j$. Пусть $a \in B_i$, тогда $a = \psi_{0i}(a_0)$ для некоторого $a_0 \in B_0$, и поскольку $\psi_{0j} = \psi_{ij}\psi_{0i}$, то $\psi_{ij}(a) = \psi_{ij}\psi_{0i}(a_0) = \psi_{0j}(a_0) \in B_j$. Следовательно, $\psi_{ij}(B_i) \subseteq B_j$. Аналогично проверяется обратное включение. Так как гомоморфизмы ψ_{ij} согласованы, то $\mathscr{B}$ — надпрямой спектр.

По предложению 4.1 $\varinjlim \mathscr{B} \simeq B_0/\pi$, где $\pi = \bigcup\limits_i \ker \psi_{0i}$. С другой стороны, сужение φ гомоморфизма $\varphi_{0\infty}$ на B_0 отображает B_0 на B. Следовательно, $B \simeq B_0/\theta$, где $\theta = \ker \varphi$. Без труда проверяется, что $\pi = \theta$. Лемма доказана.

Напомним [4, с. 171], что *локальными подмоделями системы* A называются конечные обеднения конечных подмоделей системы A.

Лемма 4.5. *Пусть $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$ — прямой спектр, $\langle M, \sigma'\rangle$ — локальная подмодель системы $\varinjlim \mathscr{A}$. Тогда найдутся символ $i \in I$ и локальная подмодель $\langle M_i, \sigma'\rangle$ в A_i такие, что сужение $\varphi_{i\infty}$ на $\langle M_i, \sigma'\rangle$ является изоморфизмом на $\langle M, \sigma'\rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму подмодели $\langle M, \sigma' \rangle$, т. е. множество D всех атомных формул вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) \approx x_{n+1}, \ r(x_1, \ldots, x_s),$$
$$f, r \in \sigma', \ x_i \in \{x_m | m \in M\},$$

и их отрицаний, истинных в $\varinjlim \mathscr{A}$ при подстановке $x_m \to m$. Пусть $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 — множество атомных формул, D_2 — множество отрицаний атомных формул.

По определению для любой формулы $k \in D_1$ найдутся элементы $i_k \in I$ и $a_{mi_k} \in A_{i_k}$, $m \in M$, такие, что $\varphi_{i_k\infty}(a_{mi_k}) = m$, и формула k истинна в системе A_{i_k} при подстановке $x_m \to a_{mi_k}$. Так как множество D_1 конечно, то для любого $m \in M$ существуют элементы $j_m \in I$ и $b_{j_m} \in A_{j_m}$ такие, что $j_m \geqslant i_k$ и $\varphi_{i_k j_m}(a_{mi_k}) = b_{j_m}$ для всех $k \in D_1$. Выберем элемент $d \in I$ такой, что $d \geqslant j_m$ для всех $m \in M$, и рассмотрим элементы $c_m = \varphi_{j_m d}(b_{j_m})$, $m \in M$. Поскольку произвольная формула $k \in D_1$ истинна в системе A_{i_k} при подстановке $x_m \to a_{mi_k}$ и

$$c_m = \varphi_{j_m d}(b_{j_m}) = \varphi_{j_m d}\varphi_{i_k j_m}(a_{mi_k}) = \varphi_{i_k d}(a_{mi_k}),$$

то все формулы из D_1 истинны в системе A_d при подстановке $x_m \to c_m$.

Так как формулы из D_2 истинны в системе $\varinjlim \mathscr{A}$ при подстановке $x_m \to m$ и $m = [c_m, d]$, то они истинны и в системе A_d при подстановке $x_m \to c_m$.

Таким образом, все формулы из D истинны в системе A_d при подстановке $x_m \to m$. Это означает. что локальная подмодель $\langle M_d, \sigma' \rangle$, где $M_d = \{c_m | m \in M\}$, изоморфна подмодели $\langle M, \sigma' \rangle$. Так как $\varphi_{d\infty}(c_m) = m$ для всех $m \in M$, то подмодель $\langle M_d, \sigma' \rangle$ является требуемой.

Из теоремы Тарского — Лося [4, с. 174] получаем

Следствие 4.6. *Любой универсальный класс замкнут относительно прямых пределов.*

§ 5. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

Согласно теореме Мальцева [10] класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем тогда и только тогда является квазимногообразием, когда он замкнут относительно подсистем и фильтрованных произведений. В частности, имеет место равенство

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{K}) = \mathbf{SP}_r(\mathfrak{K}). \tag{1}$$

Используя это равенство, можно получить другие характеризации квазимногообразий (см. [11—14]). В этом параграфе мы дадим характеризацию квазимногообразий в терминах подпрямых произведений и надпрямых пределов.

Обозначим через $\underset{\to}{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{K})$ класс всех систем, изоморфных надпрямым пределам систем из класса $\mathfrak{K}$.

Лемма 5.1. *Для любого класса $\mathfrak{K}$ алгебраических систем имеют место равенства*

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{K}) = \mathbf{S}\underset{\to}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}(\mathfrak{K}) = \underset{\to}{\mathbf{L}}_s\mathbf{SP}(\mathfrak{K}) = \underset{\to}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}_s\mathbf{S}(\mathfrak{K}).$$

Доказательство. Ввиду следствия 4.6 имеем $\underset{\to}{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathfrak{K})$, а так как $\mathbf{SP}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathfrak{K})$, то

$$\mathbf{S}\underset{\to}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathfrak{K}). \tag{2}$$

С другой стороны, по лемме 4.3 $\mathbf{P}_r(\mathfrak{R}) \subseteq \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}\mathbf{P}(\mathfrak{R})$, поэтому из (1), (2) получаем

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}\mathbf{P}(\mathfrak{R}). \tag{3}$$

Далее, в силу леммы 4.4, $\mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}(\mathfrak{R}) \subseteq \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}\mathbf{S}(\mathfrak{R})$, следовательно, из (3) получаем $\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}\mathbf{P}(\mathfrak{R}) \subseteq \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}\mathbf{SP}(\mathfrak{R}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathfrak{R})$, т. е.

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}\mathbf{SP}(\mathfrak{R}). \tag{4}$$

Так как $\mathbf{SP}(\mathfrak{R}) = \mathbf{P}_s\mathbf{S}(\mathfrak{R})$, то формулу (4) можно переписать в виде

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}\mathbf{P}_s\mathbf{S}(\mathfrak{R}). \tag{5}$$

Лемма доказана.

Поскольку $\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}(\mathfrak{R}) \subseteq \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}(\mathfrak{R})$, то из (4) вытекает формула Т. Фудзивара [15] (см. также Т. Кашиваги [14], Г. Гретцер и Х. Лаксер [13]): $\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}\mathbf{SP}(\mathfrak{R})$.

Отметим, что формула $\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \mathbf{SP}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}(\mathfrak{R})$, вообще говоря, не верна. Действительно, рассмотрим класс $\mathfrak{R}$ всех циклических групп $\mathbf{Z}_{p_i}$, где p_i — простое число, $i = 0, 1, \ldots$; $p_0 = 1$, $p_1 = 2, \ldots$. Тогда $\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$. Пусть D — какой-нибудь неглавный ультрафильтр над ω. Без труда проверяется (см. [4, с. 206]), что группа $G = \prod\limits_i \mathbf{Z}_{p_i}/D$ изоморфна прямому произведению континуума копий аддитивной группы рациональных чисел. Следовательно, G финитно не аппроксимируема и, в частности, $G \notin \mathbf{SP}(\mathfrak{R})$. Отсюда следует, что $\mathbf{SP}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}(\mathfrak{R}) = \mathbf{SP}(\mathfrak{R}) \neq \mathbf{Q}(\mathfrak{R})$.

Докажем теперь, что в формуле (5) оператор $\mathbf{S}$ на самом деле можно опустить.

Теорема 5.2. *Для любого класса $\mathfrak{R}$ алгебраических систем имеет место равенство $\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}\mathbf{P}_s(\mathfrak{R})$.*

Доказательство. Достаточно доказать импликацию $\mathbf{P}_s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \Rightarrow \mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}(\mathfrak{R})$, так как тогда из (3) получаем $\mathbf{Q}(\mathfrak{R}) = \mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}\mathbf{P}(\mathfrak{R}) = \mathbf{S}\underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}\mathbf{P}_s(\mathfrak{R}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}_s}\mathbf{P}_s(\mathfrak{R})$.

Предположим, что $\mathbf{P}_s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$ и $A \leqslant B$, где $B \simeq \varinjlim \mathscr{B}$, $\mathscr{B} = \langle I, B_i, \varphi_{ij}\rangle$ — надпрямой спектр и $B_i \in \mathfrak{R}$ для всех $i \in I$. Пусть $\omega_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Рассмотрим множество $D(i, n)$ всех функций $b \in B_i^{\omega_n}$ таких, что

$$\exists a \in A\ \exists k \geqslant n\ \forall s, l \geqslant k (b(s) = b(l),\ \varphi_{i\infty}(b(s)) = a).$$

Ясно, что для данной функции $b \in D(i, n)$ соответствующий элемент a определен однозначно; обозначим его через $d_{(i, n)}(b)$.

а) Докажем, что множество $D(i, n)$ является подсистемой в $B_i^{\omega_n}$. Пусть f — произвольная m-арная операция системы $B_i^{\omega_n}$, $b_1, \ldots, b_m \in D(i, n)$ и $b = f(b_1, \ldots, b_m)$. Согласно определению существуют элементы $k_j \geqslant n$ и $a_j \in A$, $j = 1, \ldots, m$, такие, что

$$b_j(s) = b_j(l),\ \varphi_{i\infty}(b_j(s)) = a_j \text{ для всех } s, l \geqslant k_j. \tag{6}$$

Поэтому для всех $s, l \geqslant \max(k_1, \ldots, k_m)$ имеем

$$b(s) = f(b_1(s), \ldots, b_m(s)) = f(b_1(l), \ldots, b_m(l)) = b(l),$$

$$\varphi_{i\infty}(b(s)) = \varphi_{i\infty}(f(b_1(s), \ldots, b_m(s))) = f(\varphi_{i\infty}(b_1(s), \ldots, \varphi_{i\infty}(b_m(s))) = \\ = f(a_1, \ldots, a_m).$$

Так как $f(a_1, \ldots, a_m) \in A$, то $b \in D(i, n)$. В частности, справедливо равенство
$$f(d_{(i,n)}(b_1), \ldots, d_{(i,n)}(b_m)) = d_{(i,n)}(f(b_1, \ldots, b_m)). \qquad (7)$$

б) Докажем, что $D(i, n) \in \mathfrak{K}$. Так как $\mathfrak{K} = \mathbf{P}_s(\mathfrak{K})$ и $B_i \in \mathfrak{K}$, то достаточно проверить, что $D(i, n) \leqslant_s B_i^{\omega n}$, т. е
$$\forall k \geqslant n \;\; \forall b \in B_i \;\; \exists c \in D(i, n) \;\; (c(k) = b).$$

Фиксируя произвольный элемент $a \in A$, выберем элемент $a_i \in B_i$ такой, что $\varphi_{i\infty}(a_i) = a$. Теперь для данных элементов $b \in B_i$ и $k \geqslant n$ определим элемент $c \in B_i^{\omega n}$, полагая
$$c(s) = \begin{cases} b, & \text{если } n \leqslant s \leqslant k, \\ a_i, & \text{если } s \geqslant k + 1. \end{cases}$$

По определению $c \in D(i, n)$ и $c(k) = b$, что и требовалось.

в) Построим теперь надпрямой спектр. Рассмотрим множество $K = I \times \omega$, упорядоченное следующим образом:
$$\langle i, n\rangle \leqslant \langle j, m\rangle \Leftrightarrow (i \leqslant j \text{ и } n \leqslant m).$$

Так как множества I, ω направлены, то множество K также направлено. Для любых $\langle i, n\rangle, \langle j, m\rangle \in K$, $\langle i, n\rangle \leqslant \langle j, m\rangle$, определим отображение $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle} : D(i, n) \to D(j, m)$ по формуле
$$\left[\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}(b)\right](s) = \varphi_{ij}(b(s)), \quad b \in D(i, n), \; s \geqslant m. \qquad (8)$$

Покажем, что $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}(D(i, n)) = D(j, m)$. Пусть $b \in D(j, m)$, т. е. $\varphi_{j\infty}(b(s)) = a \in A$ и $b(s) = b(l)$ для всех s, $l \geqslant k \geqslant m$. Выберем элементы $c^*(s) \in B_i$, $s \geqslant m$, такие, что $\varphi_{ij}(c^*(s)) = b(s)$. Можно считать, что $c^*(s) = c^*(l)$ при s, $l \geqslant k$, поскольку $b(s) = b(l)$. Теперь, фиксируя произвольный элемент $b_i \in B_i$, определим элемент $c \in B_i^{\omega n}$, полагая
$$c(s) = \begin{cases} c^*(s), & \text{если } s \geqslant m, \\ b_i, & \text{если } n \geqslant s \geqslant m - 1. \end{cases}$$

Для всех $s \geqslant k$ имеем
$$\varphi_{i\infty}(c(s)) = \varphi_{i\infty}(c^*(s)) = \varphi_{j\infty}\varphi_{ij}(c^*(s)) = \varphi_{j\infty}(b(s)) = a,$$
поэтому $c \in D(i, n)$. А так как $\left[\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}(c)\right](s) = \varphi_{ij}(c^*(s)) = b(s)$, $s \geqslant m$, то $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}(c) = b$. Еще проще проверяется включение $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}(D(i, n)) \subseteq D(j, m)$.

Из (8) следует, что отображения $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}$ являются гомоморфизмами. Так как гомоморфизмы φ_{ij} согласованы, то гомоморфизмы $\psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}$ также согласованы. Таким образом, кортеж $\mathscr{D} = \langle K, D(i, n), \psi_{\langle i,n\rangle}^{\langle j,m\rangle}\rangle$ образует надпрямой спектр.

г) Докажем, что $A \simeq \varinjlim \mathscr{D}$. Имеем $\varinjlim \mathscr{D} \simeq D(0, 0)/\theta$, где $\theta = \ker \psi_{\langle 0,0\rangle}^{\infty}$. С другой стороны, в силу определения системы $D(0, 0)$ и равенства (7), отображение $d : D(0, 0) \to A$ по правилу $d(b) = d_{(0,0)}(b)$, $b \in D(0, 0)$, является гомоморфизмом на систему A. Следовательно, $A \simeq D(0, 0)/\pi$, где $\pi = \ker d$.

Осталось показать, что $\theta = \pi$. Пусть $r \in \sigma^P$, $n = \nu(r)$ и $b_1, \ldots, b_n \in D(0, 0)$. Выберем элементы $k_j \in \omega$, $a_j \in A$, $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие условию (6). Пусть $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$. Согласно определению конгруэнции θ
$$\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in \theta(r) \Leftrightarrow \exists \langle i, m\rangle \in K \left(r^{D(i,m)}\left(\psi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle i,m\rangle}(b_1), \ldots, \psi_{\langle 0,0\rangle}^{\langle i,m\rangle}(b_n)\right)\right).$$

Так как $D(i, m) \leqslant B_i^{\omega m}$, то ввиду (8) последнее условие равносильно следующему:

$$\exists i \in I \exists m \geqslant k \forall s \geqslant m \left(r^{B_i}(\varphi_{0i}(b_1(s)), \ldots, \varphi_{0i}(b_n(s)))\right). \tag{9}$$

Но функции $b_j \in D(0, 0)$, $j = 1, \ldots, n$, постоянны при $s \geqslant k$, следовательно, (9) равносильно условию

$$\exists i \in I \exists s \geqslant k \left(r^{B_i}(\varphi_{0i}(b_1(s)), \ldots, \varphi_{0i}(b_n(s)))\right). \tag{10}$$

Наконец, так как $\varphi_{i\infty}\varphi_{0i}(b_j(s)) = a_j = d(b_j)$, $i \in I$, $s \geqslant k$, то согласно определению предела,

$$(10) \Leftrightarrow r^A(d(b_1), \ldots, d(b_n)) \Leftrightarrow \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in \pi(r).$$

Таким образом, $A \simeq \underrightarrow{\lim}\, \mathscr{D} \in \underrightarrow{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{K})$. Теорема доказана.

Следствие 5.3. *Класс алгебраических систем тогда и только тогда является квазимногообразием, когда он замкнут относительно подпрямых произведений и надпрямых пределов.*

Из теоремы 5.2 вытекает также равенство:

$$\mathbf{Q}(\mathfrak{K}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}\mathbf{P}_s(\mathfrak{K}). \tag{11}$$

Заметим [16], что оператор $\underrightarrow{\mathbf{L}}$ не идемпотентен, т. е. существуют такие классы $\mathfrak{K}$, что $\underrightarrow{\mathbf{L}}^2(\mathfrak{K}) \neq \underrightarrow{\mathbf{L}}(\mathfrak{K})$.

Следствие 5.4. *Если класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем замкнут относительно подпрямых произведений, то*

$$\underrightarrow{\mathbf{L}}^2(\mathfrak{K}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}(\mathfrak{K}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}_s^2(\mathfrak{K}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}_s(\mathfrak{K}).$$

Действительно, используя (11), получаем $\underrightarrow{\mathbf{L}}(\mathfrak{K}) \subseteq \underrightarrow{\mathbf{L}}\underrightarrow{\mathbf{L}}(\mathfrak{K}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}\mathbf{Q}(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathfrak{K}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}(\mathfrak{K})$, поэтому включения можно заменить равенствами. Для оператора $\underrightarrow{\mathbf{L}}_s$ доказательство аналогично.

Следующее утверждение для систем функциональной сигнатуры было доказано С. Р. Когаловским [17].

Следствие 5.5. *Для любого класса $\mathfrak{K}$ алгебраических систем имеет место равенство* $\mathbf{V}(\mathfrak{K}) = \mathbf{HP}_s(\mathfrak{K})$.

Действительно, по теореме Биркгофа [4, с. 339] $\mathbf{V}(\mathfrak{K}) = \mathbf{HSP}(\mathfrak{K})$, отсюда $\mathbf{V}(\mathfrak{K}) = \mathbf{HQ}(\mathfrak{K}) = \mathbf{H}\underrightarrow{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}_s(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{HP}_s(\mathfrak{K}) \subseteq \mathbf{V}(\mathfrak{K})$.

В заключение отметим, что оператор $\underrightarrow{\mathbf{L}}_s$ играет в квазимногообразиях такую же роль, какую оператор $\mathbf{H}$ играет в многообразиях. В некоторых случаях это позволяет по данным утверждениям (понятиям) для многообразий получать (определять) аналогичные утверждения (понятия) для квазимногообразий.

§ 6. ПРЕДЕЛЬНО ПРОЕКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

В теории многообразий важную роль играет понятие проективной системы. Напомним, что система P из класса $\mathfrak{K}$ называется $\mathfrak{K}$-проективной, если для любого гомоморфизма $\tau: A \to B$ системы $A \in \mathfrak{K}$ на систему $B \in \mathfrak{K}$ и любого гомоморфизма $\varphi: P \to B$ существует гомоморфизм $\psi: P \to A$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ A \arrow[rr, "\tau"'] & & B \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $\varphi = \tau\psi$. Например, любая $\mathfrak{R}$-свободная система является $\mathfrak{R}$-проективной.

Заменяя в этом определении оператор $\mathbf{H}$ оператором $\underset{\to}{\mathbf{L}}_s$, приходим к понятию предельно проективной системы. Пусть $\mathfrak{R}$ — какой-нибудь класс алгебраических систем, замкнутый относительно надпрямых пределов. По определению система $A \in \mathfrak{R}$ *предельно $\mathfrak{R}$-проективна*, если для любого надпрямого спектра $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$, $A_i \in \mathfrak{R}$, и для любого гомоморфизма $\alpha: A \to \varinjlim \mathscr{A}$ существуют $i \in I$ и гомоморфизм $\beta: A \to A_i$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ A_i \arrow[rr, "\varphi_{i\infty}"'] & & \varinjlim \mathscr{A} \end{tikzcd}$$

коммутативна. В частности, если α — вложение A в $\varinjlim \mathscr{A}$, то β — вложение A в A_i такое, что сужение $\varphi_{i\infty}$ па $\beta(A)$ является изоморфизмом на $\alpha(A)$.

Оказывается, что если проективные системы тесно связаны со свободными системами, то предельно проективные системы — с конечно определенными.

Обозначим через $F_{\mathfrak{R}}(X, \Delta)$ систему, определенную в классе $\mathfrak{R}$ множеством соотношений Δ в порождающих $X = \{x_i | i \in I\}$ (см. [4]). В силу теоремы Мальцева любую систему из квазимногообразия $\mathfrak{R}$ можно представить в виде $F_{\mathfrak{R}}(X, \Delta)$ для подходящих X и Δ. По определению система A из класса $\mathfrak{R}$ *конечно определена* (*имеет конечное число соотношений*) в $\mathfrak{R}$, если $A \simeq F_{\mathfrak{R}}(X, \Delta)$ для некоторых конечных X и Δ (конечного Δ). Любая система с конечным числом соотношений из класса $\mathfrak{R}$ изоморфна $\mathfrak{R}$-свободному произведению конечно определенной и свободной систем.

Лемма 6.1. *Пусть $\mathfrak{R}$ — квазимногообразие, $A \in \mathfrak{R}$ и $A \simeq F_{\mathfrak{R}}(X, \Delta)$ в порождающих a_i, $i \in I$. Тогда кортеж $\mathscr{K} = \langle K, A_k, \varphi_{kh}\rangle$, где K — множество всех конечных подмножеств в Δ, упорядоченное относительно включения, $A_k \simeq F_{\mathfrak{R}}(X, k)$ в порождающих a_{ki}, $i \in I$, и φ_{kh} — естественный гомоморфизм A_k на A_h при $k \subseteq h$, является надпрямым спектром и $A \simeq \varinjlim \mathscr{K}$.*

Доказательство. Очевидно, $\mathscr{K}$ — надпрямой спектр. Согласно определению $\varphi_{kh}(a_{ki}) = a_{hi}$ при $k \subseteq h$. Поэтому $[a_{ki}, k] = [a_{hi}, h]$ для всех $k, h \in K$, т. е. элемент $[a_{ki}, k]$ не зависит от k, обозначим его через b_i. Так как $\varinjlim \mathscr{K} = (b_i | i \in I)$ и формулы из Δ истинны в системе $\varinjlim \mathscr{K}$ при подстановке $x_i \to b_i$, то существует гомоморфизм $\varphi: A \to \varinjlim \mathscr{K}$ такой, что $\varphi(a_i) = b_i$.

Покажем, что φ — изоморфизм. Пусть атомная формула R истинна в системе $\varinjlim \mathscr{K}$ при подстановке $x_i \to b_i$. Тогда найдется элемент $k \in K$

такой, что формула R истинна в A_k при подстановке $x_i \to a_{ki}$, $i \in I$. Поскольку отображение $\varphi_k : A_k \to A$, $\varphi_k(a_{ki}) = a_i$, $i \in I$, является гомоморфизмом, то формула R истинна в системе A при подстановке $x_i \to a_i$. Это означает, что $\varphi : A \simeq \varinjlim \mathscr{K}$. Лемма доказана.

Надпрямой спектр из леммы 6.1 назовем *каноническим спектром системы* A.

Теорема 6.2. *Любая система с конечным числом соотношений из квазимногообразия* $\mathfrak{K}$ *предельно* $\mathfrak{K}$*-проективна. Конечно порожденная* $\mathfrak{K}$*-система предельно* $\mathfrak{K}$*-проективна тогда и только тогда, когда она конечно определена в* $\mathfrak{K}$.

Доказательство. а) Пусть $A \in \mathfrak{K}$ — система с конечным числом соотношений, $A \simeq F_{\mathfrak{K}}(X, \Delta)$ в порождающих a_i, $i \in I$, $\alpha : A \to B$ — произвольный гомоморфизм и $B \simeq \varinjlim \mathscr{B}$, где $\mathscr{B} = \langle J, B_j, \varphi_{ij} \rangle$ — надпрямой спектр, $B_j \in \mathfrak{K}$.

Рассмотрим локальную подмодель $\langle M, \sigma' \rangle$ в A, где σ' — множество всех сигнатурных символов, входящих в запись хотя бы одной формулы из Δ, M — множество всех элементов вида $t(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ таких, что соответствующий терм $t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$входит в запись хотя бы одной формулы из Δ; эти множества конечны, так как $|\Delta| < \omega$. Тогда $\langle \alpha(M), \sigma' \rangle$ — локальная подмодель в B. Следовательно, по лемме 4.5 найдутся $j \in J$ и локальная подмодель $\langle M', \sigma' \rangle$ в B_j такие, что сужение $\varphi_{j\infty}$ на $\langle M', \sigma' \rangle$ является изоморфизмом на $\langle \alpha(M), \sigma' \rangle$. Выбрав элементы $b_i \in B_j$, $i \in I$, такие, что $\psi_{j\infty}(b_i) = \alpha(a_i)$, $i \in I$, определим элементы $a_{ji} \in B_j$, $i \in I$, следующим образом:

$$a_{ji} = \begin{cases} b_i, \text{ если } a_i \notin M, \\ \varphi_{j\infty}^{-1}\alpha(a_i), \text{ если } a_i \in M. \end{cases}$$

По определению формулы из Δ истинны в системе B_j при подстановке $x_i \to a_{ji}$, $i \in I$, следовательно, существует гомоморфизм $\beta : A \to B_j$ такой, что $\beta(a_i) = a_{ji}$ при $i \in I$. Поскольку гомоморфизм α совпадает с гомоморфизмом $\varphi_{j\infty}\beta$ на порождающих a_i, $i \in I$, то $\alpha = \varphi_{j\infty}\beta$. Тем самым предельная проективность системы A доказана.

б) Пусть A — конечно порожденная предельно $\mathfrak{K}$-проективная система, $A \simeq F_{\mathfrak{K}}(x_1, \ldots, x_n; \Delta)$ в порождающих $a_1, \ldots, a_n$. Согласно лемме 6.1 $A \simeq \varinjlim \mathscr{K}$, где $\mathscr{K} = \langle K, A_k, \varphi_{kh} \rangle$ — канонический спектр системы A, $A_k \simeq F_{\mathfrak{K}}(x_1, \ldots, x_n; k)$ в порождающих a_{ki}, $i = 1, \ldots, n$, и $\varphi_{k\infty}(a_{ki}) = a_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Так как система A предельно $\mathfrak{K}$-проективна, то найдутся $k \in K$ и вложение $\beta : A \to A_k$ такие, что $\varphi_{k\infty}(b_{ki}) = a_i$, где $b_{ki} = \beta(a_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $[b_{ki}, k] = [a_{ki}, k]$, то существует элемент $h_i \in K$ такой, что $k \leqslant h_i$ и $\varphi_{kh_i}(b_{ki}) = \varphi_{kh_i}(a_{ki}) = a_{h_i i} \in A_{h_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $h \in K$, $h \geqslant h_1, \ldots, h_n$. Тогда $a_{hi} = \varphi_{h_i h}(a_{h_i i}) \in A_h$, $i = 1, \ldots, n$, и поскольку $\varphi_{kh}(b_{ki}) = \varphi_{h_i h}\varphi_{kh_i}(b_{ki}) = \varphi_{h_i h}(a_{h_i i}) = a_{hi}$, то φ_{kh} отображает $\beta(A)$ на A_h.

Покажем, что φ_{kh} — изоморфизм. Пусть атомная формула $R(x_1, \ldots, x_n)$ истинна в системе A_h при подстановке $x_i \to a_{hi}$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $A = \varphi_{h\infty}(A_h)$, то формула R истинна в системе A при подстановке $x_i \to [a_{hi}, h]$. Но $[a_{hi}, h] = [b_{ki}, k]$, следовательно, формула R истинна в системе $\beta(A)$ при подстановке $x_i \to [b_{ki}, k]$, $i = 1, \ldots, n$.

Итак, $A \simeq A_h$, т. е. система A конечно определена.

Из теоремы 6.2 и леммы 6.1 вытекает

Следствие 6.3. *Любая система из квазимногообразия* $\mathfrak{K}$ *изоморфна надпрямому пределу предельно* $\mathfrak{K}$*-проективных систем.*

Заметим, что это следствие «двойственно» следующей теореме Мальцева: любая система из квазимногообразия $\mathfrak{K}$ изоморфна подпрямому произведению подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложимых систем (см. следствие 7.8).

Так как любая $\mathfrak{K}$-проективная система предельно $\mathfrak{K}$-проективна, то имеет место

Следствие 6.4. *Любая конечно порожденная проективная система из квазимногообразия $\mathfrak{K}$ конечно определена в $\mathfrak{K}$.*

Покажем, что не всякая предельно проективная система определяется конечным множеством соотношений.

Пример 6.5. *Пусть* $\mathbf{D}$ — *многообразие дистрибутивных решеток и* $C_\omega = \langle \omega, \leqslant \rangle$. *Тогда решетка* C_ω *проективна, но не определяется конечным множеством соотношений в* $\mathbf{D}$.

Для доказательства проективности решетки C_ω воспользуемся следующим почти очевидным утверждением: если все гомоморфные образы $P \in \mathfrak{K}$ системы $A \in \mathfrak{K}$ *слабо $\mathfrak{K}$-проективны*, т. е. для любого гомоморфизма $\tau : B \to P$ системы $B \in \mathfrak{K}$ на систему P существует такой гомоморфизм $\varphi : P \to B$, что $\tau\varphi = \mathrm{id}_P$, то система A $\mathfrak{K}$-проективна.

Гомоморфными образами решетки C_ω являются цепи $C_n = \langle \{0, 1, \ldots, n-1\}, \leqslant \rangle$, C_ω, $n < \omega$. Покажем, что они слабо $\mathbf{D}$-проективны. Пусть τ — гомоморфизм дистрибутивной решетки L на решетку C_n. Выбрав элементы $b_m \in L$ такие, что $\tau(b_m) = m$, $m \in C_n$, полагаем

$$a_0 = b_0, \ldots, a_m = a_{m-1} \vee b_m, \ldots, a_{n-1} = a_{n-2} \vee b_{n-1}.$$

Тогда для всех $m \in C_n$ имеем

$$\tau(a_m) = \tau(a_{m-1} \vee b_m) = \tau(a_{m-1}) \vee \tau(b_m) = (m-1) \vee m = m.$$

Следовательно, гомоморфизм $\varphi : C_n \to L$, где $\varphi(m) = a_m$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, удовлетворяет равенству $\tau\varphi = \mathrm{id}_{C_n}$.

Покажем, что решетка C_ω не имеет конечного числа соотношений.

Предположим противное, т. е. что существует конечное множество соотношений Δ, определяющее решетку C_ω в многообразии $\mathbf{D}$ в порождающих a_n, $n \in \omega$. Выбрав максимальный порождающий элемент a_n такой, что x_n входит в запись термов из Δ, определим отображение $\varphi : C_\omega \to 2$ так:

$$\varphi(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \leqslant a_n, \\ 0, & \text{если } m > a_n. \end{cases}$$

По определению формулы из Δ истинны в решетке $\mathbf{2}$ при подстановке $x_m \to \varphi(m)$, но φ не гомоморфизм, ибо $a_n < a_n + 1$ и $\varphi(a_n) > \varphi(a_n + 1)$. Противоречие.

Представляется интересным вопрос: для каких квазимногообразий $\mathfrak{K}$ все предельно $\mathfrak{K}$-проективные системы определяются в $\mathfrak{K}$ конечным множеством соотношений? Укажем одно простое достаточное условие.

Предложение 6.6. *Пусть* $\mathfrak{K}$ — *квазимногообразие, в котором подсистемы систем с конечным числом соотношений также имеют конечное число соотношений. Тогда любая предельно $\mathfrak{K}$-проективная система имеет в $\mathfrak{K}$ конечное число соотношений.*

Доказательство. Пусть A — предельно $\mathfrak{K}$-проективная система и $A \simeq F_{\mathfrak{K}}(X, \Delta)$. По лемме 6.1 $A \simeq \varinjlim \mathscr{K}$, где $\mathscr{K}$ — канонический спектр системы A. Следовательно, $A \leqslant A_k$ для некоторого $k \in K$. Так как система A_k с конечным числом соотношений, то по предположению система A также с конечным числом соотношений. Предложение доказано.

Предложение 6.6 очевидным образом применимо к многообразию $\mathfrak{A}$ абелевых групп, так что любая предельно $\mathfrak{A}$-проективная группа имеет конечное число соотношений в $\mathfrak{A}$.

В заключение покажем, что многие свойства конечно определенных систем остаются справедливыми для предельно проективных систем.

Предложение 6.7. *Если $\mathfrak{K} = \mathbf{Q}(\mathfrak{N})$ для некоторого наследственного класса $\mathfrak{N}$, то любая предельно $\mathfrak{K}$-проективная система аппроксимируется $\mathfrak{N}$-системами.*

Для конечно определенных систем предложение доказано в [11]. В общем случае доказательство следует из формулы $\mathbf{Q}(\mathfrak{N}) = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s\mathbf{P}_s(\mathfrak{N})$ (см. теорему 5.2).

В теории квазимногообразий важную роль играет лемма о невложимости [11]. Обобщим ее на предельно проективные системы.

Рассмотрим какой-нибудь класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем. Для любого подкласса $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{K}$ обозначим через $\mathbf{N}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{N})$ класс всех $\mathfrak{K}$-систем, в каждую из которых не вложима ни одна система из класса $\mathfrak{N}$. Пусть далее $A \in \mathfrak{K}$, $A = \langle a_i | i \in I \rangle$ и Δ — некоторое множество атомных формул в алфавите $X = \{x_i | i \in I\}$, ложных в A при подстановке $x_i \to a_i$. По определению $[A, \Delta]$ — множество всех таких гомоморфных образов $\varphi(A) \in \mathfrak{K}$, что хотя бы одна формула из Δ остается ложной в $\varphi(A)$ при подстановке $x_i \to \varphi(a_i)$.

Предложение 6.8. *Если $\mathfrak{K}$ — квазимногообразие, A — неединичная предельно $\mathfrak{K}$-проективная система, то $\mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$ — собственное подквазимногообразие в $\mathfrak{K}$.*

Доказательство. В силу следствия 5.3 достаточно доказать, что класс $\mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$ замкнут относительно подпрямых произведений и надпрямых пределов.

Пусть $B \leqslant_s \prod\limits_j B_j$, где $B_j \in \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$, но $B \notin \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$. Тогда найдутся гомоморфизм $\varphi : A \to B$ и формула $R \in \Delta$ такие, что $\varphi(A) \models \neg R$ при подстановке $x_i \to \varphi(a_i)$. Поскольку $\varphi(A) \leqslant \prod\limits_j B_j$, то $B_{j_0} \models \neg R$ для некоторого j_0 при подстановке $x_i \to \pi_{j_0}\varphi(a_i)$, $i \in I$. Следовательно, $B_{j_0} \notin \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$, что противоречит предположению.

Пусть далее $B \simeq \underset{\longrightarrow}{\lim} \mathscr{B}$ для некоторого надпрямого спектра $\mathscr{B} = \langle J, B_j, \varphi_{ij} \rangle$ и $B_j \in \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$. Если $B \notin \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$, то существуют гомоморфизм $\varphi : A \to B$ и формула $R \in \Delta$ такие, что $\varphi(A) \models \neg R$ при подстановке $x_i \to \varphi(a_i)$. Поскольку система A предельно $\mathfrak{K}$-проективна, то существуют $j_0 \in J$ и гомоморфизм $\psi : A \to B_{j_0}$ такие, что $\varphi = \varphi_{j_0\infty}\psi$. Поэтому $\psi(A) \models \neg R$ при подстановке $x_i \to \psi(a_i)$, что противоречит включению $B_{j_0} \in \mathbf{N}_{\mathfrak{K}}[A, \Delta]$. Предложение доказано.

§ 7. РЕШЕТКИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

Часто удобно рассматривать не все конгруэнции на данной системе, а только те, фактор-системы по которым удовлетворяют некоторому свойству. Например, при изучении неориентированных графов естественно рассматривать только такие конгруэнции, фактор-графы по которым также неориентированны.

В связи с этим для произвольной системы A и для произвольного класса $\mathfrak{K}$ алгебраических систем той же сигнатуры полагаем

$$C_{\mathfrak{K}}(A) = \{\theta \in \mathrm{Con}(A) \mid A/\theta \in \mathfrak{K}\}.$$

Множество $C_{\mathfrak{K}}(A)$ частично упорядоченно относительно включения, но, вообще говоря, не является решеткой.

Лемма 7.1. *Класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем замкнут относительно подпрямых произведений тогда и только тогда, когда для любой системы*

А частично упорядоченное множество $C_{\mathfrak{R}}(A)$ является полной нижней подполурешеткой в $\mathrm{Con}(A)$.

Необходимость. Пусть A — произвольная система и $\theta_i \in C_{\mathfrak{R}}(A)$, $i \in I$. Тогда по лемме 3.5

$$A/\bigcap_i \theta_i \leqslant_s \prod_i A/\theta_i,$$

и так как по условию $A/\theta_i \in \mathfrak{R}$, то $A/\bigcap_i \theta_i \in \mathfrak{R}$. Следовательно, $C_{\mathfrak{R}}(A)$ — полная нижняя подполурешетка в $\mathrm{Con}(A)$.

Достаточность. Пусть $A \leqslant_s \prod_i A_i$, где $A_i \in \mathfrak{R}$. Тогда если π_i — проектирование A на A_i, то

$$A_i \simeq A/\ker \pi_i, \quad \bigcap_i \ker \pi_i = 0_A. \tag{1}$$

Так как $C_{\mathfrak{R}}(A)$ — полная нижняя подполурешетка в $\mathrm{Con}(A)$ и $\ker \pi_i \in C_{\mathfrak{R}}(A)$, то $0_A \in C_{\mathfrak{R}}(A)$. Следовательно, $A \in \mathfrak{R}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольный класс алгебраических систем и A — какая-нибудь система этой же сигнатуры. Гомоморфизм α системы A на некоторую $\mathfrak{R}$-систему B будем называть *$\mathfrak{R}$-морфизмом*, если для любого гомоморфизма γ системы A на $\mathfrak{R}$-систему C существует гомоморфизм $\beta : B \to C$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & B \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

коммутативной. Каждый $\mathfrak{R}$-морфный образ системы A называется *$\mathfrak{R}$-репликой* и обозначается $A_{\mathfrak{R}}$. Ясно, что любые две $\mathfrak{R}$-реплики системы A изоморфны.

Отметим, что наше определение $\mathfrak{R}$-морфизма отличается от определения, данного А. И. Мальцевым [4].

Следствие 7.2. *Для произвольного класса $\mathfrak{R}$ алгебраических систем следующие условия равносильны:*

а) *класс $\mathfrak{R}$ замкнут относительно подпрямых произведений,*

б) *любая система имеет $\mathfrak{R}$-реплику в классе $\mathfrak{R}$,*

в) *для любой системы A частично упорядоченное множество $C_{\mathfrak{R}}(A)$ имеет наименьший элемент.*

Действительно, по определению б) $\Rightarrow$ в). Покажем, что в) $\Rightarrow$ а). Пусть $A \leqslant_s \prod_i A_i$, где $A_i \in \mathfrak{R}$. Если π_i — проектирование A на A_i, то справедливо условие (1). Так как $\ker \pi_i \in C_{\mathfrak{R}}(A)$, то $\ker \pi_i \supseteq \varkappa_A$, где $\varkappa_A$ — наименьший элемент в $C_{\mathfrak{R}}(A)$. Следовательно, $\varkappa_A = 0_A$, т. е. $A \in \mathfrak{R}$.

Ввиду леммы 7.1 а) $\Rightarrow$ в). Покажем, что в) $\Rightarrow$ б). Пусть A — произвольная система, $\varkappa_A$ — наименьшая конгруэнция в $C_{\mathfrak{R}}(A)$. Тогда $A/\varkappa_A$ есть $\mathfrak{R}$-реплика системы A, а канонический гомоморфизм $\alpha : A \to A/\varkappa_A$ есть $\mathfrak{R}$-морфизм. Действительно, пусть γ — произвольный гомоморфизм системы A на $\mathfrak{R}$-систему C. Согласно предложению 3.3 существует естественный изоморфизм $\varphi : A/\ker \gamma \simeq C$, отсюда $\varkappa_A \subseteq \ker \gamma$. Поэтому если ρ — канонический гомоморфизм $A/\varkappa_A$ на $A/\ker \gamma$, то $\gamma = (\varphi\rho)\alpha$, что и требовалось.

Отметим, что если класс $\mathfrak{R}$ алгебраических систем замкнут относительно подпрямых произведений, то из леммы 7.1 следует, что $C_{\mathfrak{R}}(A)$ —

полная решетка относительно включения. В силу 2-й теоремы об изоморфизме для любой конгруэнции $\theta \in c_{\mathfrak{R}}(A)$ имеет место изоморфизм

$$C_{\mathfrak{R}}(A/\theta) \simeq [\theta) = \{\eta \in C_{\mathfrak{R}}(A) \mid \theta \subseteq \eta \subseteq 1_A\}. \tag{2}$$

Поэтому из следствия 7.2 получаем

Следствие 7.3. *Если класс $\mathfrak{R}$ алгебраических систем замкнут относительно подпрямых произведений, то $C_{\mathfrak{R}}(A) \simeq C_{\mathfrak{R}}(A_{\mathfrak{R}})$ для любой системы A.*

Следующая лемма в некотором смысле двойственна лемме 7.1.

Лемма 7.4. *Класс $\mathfrak{R}$ алгебраических систем замкнут относительно надпрямых пределов тогда и только тогда, когда для любой системы A частично упорядоченное множество $C_{\mathfrak{R}}(A)$ замкнуто относительно объединений по цепям.*

Необходимость. Пусть A — произвольная система, $\{\theta_i | i \in I\}$ — произвольная цепь в $C_{\mathfrak{R}}(A)$ и $\theta = \bigcup\limits_i \theta_i$. Тогда, согласно предложению 4.1, $A/\theta \simeq \varinjlim \mathscr{A}$ для некоторого надпрямого спектра $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$, где $A_i \simeq A/\theta_i$. Так как $A/\theta_i \in \mathfrak{R}$, то по условию $A/\theta \in \mathfrak{R}$ и, следовательно, $\theta \in C_{\mathfrak{R}}(A)$.

Достаточность. Предположим, что $A \simeq \varinjlim \mathscr{A}$ для некоторого надпрямого спектра $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij}\rangle$, где $A_i \in \mathfrak{R}$. Пусть 0 — наименьший элемент в I, $\theta_i = \ker \varphi_{0i}$ и $\theta = \bigcup\limits_i \theta_i$. По предложению 4.1 $A \simeq A_0/\theta$ и $\{\theta_i | i \in I\}$ — направленное подмножество в $\mathrm{Con}(A_0)$. Так как $C_{\mathfrak{R}}(A_0)$ замкнуто относительно объединений по цепям и $\theta_i \in C_{\mathfrak{R}}(A_0)$, то по лемме 2.4 $\theta \in C_{\mathfrak{R}}(A_0)$. Следовательно, $A \in \mathfrak{R}$. Лемма доказана.

Предложение 7.5. *Класс $\mathfrak{R}$ алгебраических систем является квазимногообразием тогда и только тогда, когда $C_{\mathfrak{R}}(A)$ — алгебраическое подмножество в $\mathrm{Con}(A)$ для любой системы A.*

Доказательство ввиду следствия 5.3 следует непосредственно из лемм 7.1 и 7.4.

Следствие 7.6. *Если $\mathfrak{R}$ — квазимногообразие, то $C_{\mathfrak{R}}(A)$ — алгебраическая решетка относительно включения для любой системы A.*

Следует из леммы 2.3 и предложения 3.2.

Рассмотрим в качестве примера класс Λ всех неориентированных графов без петель, дополненный единичным графом; Λ — квазимногообразие, так как он задается в классе всех графов квазитождествами:

$$\forall xy(r(x, y) \to r(y, x)), \ \forall xy(r(x, x) \to x \approx y).$$

Пусть T — трехэлементный граф из примера 3.1, тогда $|\mathrm{Con}(T)| = 15$, а, в силу примера 3.4, $C_\Lambda(T) \simeq \mathbf{2}$. Пусть K — четырехэлементный граф, изображенный на рис. 7.1. Можно показать, что $|\mathrm{Con}(K)| = 351$. С другой стороны, решетка $C_\Lambda(K)$ легко описывается (см. рис. 7.2) и имеет всего 10 элементов.

Предложение 7.5 устанавливает связь между квазимногообразиями и алгебраическими решетками. Используя эту связь, дадим, например, простое решеточное доказательство теоремы Мальцева о подпрямом разложении [18].

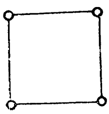


Рис. 7.1.

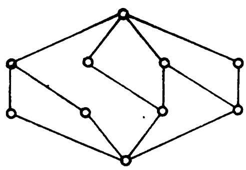


Рис 7.2. Решетка $C_\Lambda(K)$

Обобщим сначала следствие 3.6.

Предложение 7.7. *Если класс $\mathfrak{K}$ замкнут относительно подпрямых произведений, то система $A \in \mathfrak{K}$ подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложима тогда и только тогда, когда конгруэнция 0_A вполне конеразложима в $C_{\mathfrak{K}}(A)$.*

Доказательство. Предположим, что система A подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложима, но $0_A = \bigcap_i \theta_i$ для некоторых конгруэнций $\theta_i \in C_{\mathfrak{K}}(A)$, $\theta_i \neq 0_A$. Тогда по предложению 3.5 $A/0_A \leqslant_s \prod_i A/\theta_i$, и ни одно из проектирований $A \to A/\theta_i$ не является изоморфизмом. Противоречие.

Обратно, предположим, что 0_A — вполне конеразложимая конгруэнция в $C_{\mathfrak{K}}(A)$ и $A \leqslant_s \prod_i A_i$ для некоторых систем $A_i \in \mathfrak{K}$. Так как $A_i \simeq A/\theta_i$, где $\theta_i = \ker \pi_i$, и $0_A = \bigcap_i \theta_i$, то существует i такое, что $0_A = \theta_i$. Следовательно, π_i — изоморфизм. Предложение доказано.

Следствие 7.8 (А. И. Мальцев [18]). *Любая система из квазимногообразия $\mathfrak{K}$ изоморфна подпрямому произведению подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложимых систем.*

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{K}$, то ввиду следствия 7.6 $C_{\mathfrak{K}}(A)$ — алгебраическая решетка, отсюда по лемме 2.2 $0_A = \bigcap_i \theta_i$ для некоторых вполне конеразложимых конгруэнций $\theta_i \in C_{\mathfrak{K}}(A)$. Следовательно, ввиду предложения 3.5 $A \leqslant_s \prod_i A/\theta_i$. Осталось показать, что системы A/θ_i подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложимы. В силу условия (2) $C_{\mathfrak{K}}(A/\theta_i) \simeq [\theta_i)$. Так как конгруэнция θ_i вполне конеразложима в $C_{\mathfrak{K}}(A)$, то конгруэнция $0_{A/\theta_i}$ вполне конеразложима в $C_{\mathfrak{K}}(A/\theta_i)$. Следовательно, согласно предложению 7.8 система A/θ_i подпрямо $\mathfrak{K}$-неразложима.

По теореме Г. Гретцера и Е. Шмидта [19] любая алгебраическая решетка представима в виде $\mathrm{Con}(B)$ для некоторой алгебры B. Какие решетки представимы в виде $C_{\mathfrak{K}}(A)$?

Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Предложение 7.9. *Для любой полной решетки L найдутся класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем предикатной сигнатуры, замкнутый относительно подпрямых произведений, и свободная система $F \in \mathfrak{K}$ такие, что $L \simeq C_{\mathfrak{K}}(F)$.*

Для любой алгебраической решетки A найдутся квазимногообразие $\mathfrak{K}$ алгебраических систем предикатной сигнатуры и свободная система $F \in \mathfrak{K}$ такие, что $A \simeq C_{\mathfrak{K}}(F)$. При этом если A — конечная решетка, то F — конечная система конечной сигнатуры.

Доказательство. а) Пусть L — произвольная полная решетка. Отображение $\psi : L \to P(L)$ по правилу $\psi(a) = \{b \in L \mid b \leqslant a\}$, $a \in L$, является изоморфизмом L на $\psi(L)$ как полных нижних полурешеток. Следовательно, если $\psi(L)$ рассматривать как полную решетку относительно включения, то $L \simeq \psi(L)$.

Рассмотрим многообразие $\mathcal{O}_L$ систем предикатной сигнатуры $\sigma = \langle P_\alpha \mid \alpha \in L \rangle$, заданное тождеством $\forall xy(x \approx y)$. Отображение $\varphi : P(L) \to \mathcal{O}_L$ по правилу

$$(\varphi(a) \vDash P_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in a),\ a \in P(L),\ \alpha \in L,$$

взаимно однозначно и сохраняет пересечения, т. е. $\varphi(\bigcap A) = \prod_{a \in A} \varphi(a)$ для $A \subseteq P(L)$. Поэтому если A — полная нижняя подполурешетка в $P(L)$, то подкласс $\varphi(A) = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$ замкнут относительно подпрямых произведений. Пусть $\mathfrak{K} = \varphi\psi(L)$, F — свободная система в $\mathfrak{K}$. Тогда ввиду вышесказанного класс $\mathfrak{K}$ замкнут относительно подпрямых произведений и

$F = \varphi(f)$, где f — наименьший элемент в $\psi(L)$, т. е. $f = \cap (a | a \in \psi(L))$. Так как отображение φ взаимно однозначно и система $\varphi(a)$ является гомоморфным образом системы $\varphi(b)$ тогда и только тогда, когда $a \supseteq b$, то $C_{\mathfrak{R}}(F) \simeq \psi(L)$. Следовательно, $C_{\mathfrak{R}}(F) \simeq L$.

б) Пусть A — произвольная алгебраическая решетка, ψ, φ — отображения из п. а). В силу предложения 2.5 $\psi(A)$ — замкнутая подполурешетка в $P(A)$. Поэтому из доказательства леммы 2.1 [8] следует, что $\mathfrak{R} = \varphi\psi(A)$ — подквазимногообразие в $\mathcal{O}_A$. Теперь так же, как в п. а), устанавливается, что если F — свободная система в $\mathfrak{R}$, то $C_{\mathfrak{R}}(F) \simeq \psi(A) \simeq L$.

Предложение доказано.

§ 8. КОДИСТРИБУТИВНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И РЕШЕТКИ $S_p(A, \varkappa)$

Бинарное отношение $\varkappa$ на полурешетке L назовем *кодистрибутивным*, если

$$\forall a, b, c \in L[a\varkappa(b \wedge c) \Rightarrow \exists b', c' \in L(b'\varkappa b, c'\varkappa c, a = b' \wedge c')].$$

Это определение соответствует определению дистрибутивной полурешетки (см. [7]). Отметим также, что решетка L дистрибутивна тогда и только тогда, когда двойственный порядок $\geqslant$ кодистрибутивен на L. Действительно, пусть L — дистрибутивная решетка и $a \geqslant (b \wedge c)$, $b, c \in L$. Тогда $a = a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ и $a \vee b \geqslant b$, $a \vee c \geqslant c$, т. е. порядок $\geqslant$ кодистрибутивен. Обратно, предположим, что порядок $\geqslant$ кодистрибутивен на решетке L, но L не дистрибутивна. Тогда одна из решеток M_3, N_5 (см. рис. 8.1) вложима в L. Так как $a \geqslant (b \wedge c)$, то по условию найдутся элементы $b', c' \in L$ такие, что $b' \geqslant b$, $c' \geqslant c$ и $a = b' \wedge c'$. Но $b' \geqslant (a \vee b) \geqslant c$, отсюда $a = b' \wedge c' \geqslant c$, что невозможно.

Рис. 8.1. Слева — решетка M_3, справа — N_5.

Ясно, что отношение равенства кодистрибутивно на любой полурешетке.

Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное квазимногообразие и $A \in \mathfrak{R}$. Определим на решетке $C_{\mathfrak{R}}(A)$ *отношение изоморфизма* τ и *отношение вложения* ε следующим образом:

$$\theta_1\tau\theta_2 \Leftrightarrow A/\theta_1 \simeq A/\theta_2,\ \theta_1\varepsilon\theta_2 \Leftrightarrow A/\theta_1 \leqslant A/\theta_2.$$

Лемма 8.1. *Отношения τ и ε являются кодистрибутивными предпорядками на решетке $C_{\mathfrak{R}}(A)$.*

Доказательство. Без труда проверяется, что отношения τ, ε являются предпорядками на множестве $C_{\mathfrak{R}}(A)$. Докажем кодистрибутивность отношения ε. Пусть $\theta_1\varepsilon(\theta_3 \cap \theta_2)$ для некоторых конгруэнций $\theta_i \in C_{\mathfrak{R}}(A)$. Тогда по лемме 3.5 $A/\theta_1 \leqslant A/(\theta_3 \cap \theta_2) \leqslant_s A/\theta_2 \times A/\theta_3$. Пусть φ — канонический гомоморфизм A на A/θ_1, π_i — проектирование A/θ_1 в A/θ_i, $A_i = \pi_i(A/\theta_1)$, $i = 2, 3$. По определению $A/\theta_1 \leqslant_s A_2 \times A_3$, отсюда $\theta_1 = \theta_2' \cap \theta_3'$, где $\theta_i' = \ker \pi_i\varphi$, $i = 2, 3$. А так как $A/\theta_i' \simeq A_i \leqslant A/\theta_i$, то $\theta_i'\varepsilon\theta_i$, $i = 2, 3$.

Кодистрибутивность отношения τ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Пусть $\varkappa$ — произвольное бинарное отношение на полурешетке L. Будем говорить, что подмножество $M \subseteq L$ *$\varkappa$-наследственно*, если $\forall a, b \in L(a\varkappa b, b \in M \Rightarrow a \in M)$.

Например, если $\geqslant$ — двойственный порядок полурешетки L, то $\geqslant$-наследственные подполурешетки в L совпадают с *фильтрами* полурешетки L.

Для любой полной решетки L и для любого бинарного отношения $\varkappa$ на L обозначим через $S_p(L, \varkappa)$ множество всех алгебраических $\varkappa$-наследственных подмножеств в L. Так как пересечение любого семейства алгебраических $\varkappa$-наследственных подмножеств является алгебраическим $\varkappa$-наследственным подмножеством, то $S_p(L, \varkappa)$ — полная решетка относительно включения.

Отметим, что решетки вида $S_p(L) = S_p(L, \approx)$, где $\approx$ есть отношение равенства на L, были введены авторами в работе [8] для описания одного класса решеток квазимногообразий. Напомним некоторые результаты из этой работы.

Пусть $\mathscr{P}$ — класс всех решеток квазимногообразий вида $L_q(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M} \vDash \forall xy(x \approx y)$.

Теорема 8.2 [8]. *Решетка L принадлежит классу $\mathscr{P}$ тогда и только тогда, когда L изоморфна решетке вида $S_p(A)$ для некоторой алгебраической решетки A.*

Для любого множества X обозначим через $T(X)$ решетку всех замкнутых нижних подполурешеток булевой решетки $P(X)$ относительно включения (см. замечание к предложению 2.5), и пусть $\mathscr{T}$ — класс всех решеток вида $T(X)$.

Теорема 8.3 [8]. *Класс $\mathbf{S}(\mathscr{P})$ замкнут относительно прямых произведений, т. е. $\mathbf{S}(\mathscr{P}) = \mathbf{SP}(\mathscr{P})$, и $\mathbf{S}(\mathscr{P}) = \mathbf{S}(\mathscr{T})$.*

Теорема 8.4 [8]. *Любая свободная решетка принадлежит классу $\mathbf{S}(\mathscr{P})$.*

Пусть $\mathscr{R}$ — класс всех решеток вида $S_p(A, \varkappa)$, где A — алгебраическая решетка, $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на A.

В силу теоремы 8.2 $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{R}$. Следующая лемма показывает, что класс $\mathscr{R}$ шире класса $\mathscr{P}$.

Лемма 8.5. *Если L — дистрибутивная коалгебраическая решетка, то $L \simeq S_p(M, \trianglelefteq)$, где M — двойственная L решетка, $\trianglelefteq$ — порядок на M. В частности, $L \in \mathscr{R}$.*

Доказательство. Действительно, если $B \in S_p(M, \trianglelefteq)$, то множество B совпадает с фильтром $[\bigwedge B)$, поэтому $S_p(M, \trianglelefteq) = \{[a) \mid a \in M\}$. Далее, для любых $a, b \in M$ имеем $[a) \subseteq [b) \Leftrightarrow b \trianglelefteq a \Leftrightarrow a \leqslant b$. Следовательно, отображение $a \to [a)$, $a \in L$, является изоморфизмом L на $S_p(M, \trianglelefteq)$. Лемма доказана.

Покажем теперь, что в определении $\mathscr{R}$-решетки бинарное отношение можно заменить предпорядком.

Лемма 8.6. *Пусть $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на полной решетке L. Тогда наименьший предпорядок $\bar{\varkappa}$, содержащий отношение $\varkappa$, кодистрибутивен и $S_p(L, \varkappa) = S_p(L, \bar{\varkappa})$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in L$. Без труда проверяется, что $a\bar{\varkappa}b$ тогда и только тогда, когда $a = b$ либо

$$\exists n \geqslant 1 \ \exists c_0, \ldots, c_n \in L(a = c_0\varkappa c_1\varkappa \ldots \varkappa c_n = b).$$

Поэтому если $a\bar{\varkappa}(c \wedge b)$ и $a \neq (b \wedge c)$, то существуют элементы $c_i \in L$ такие, что

$$a = c_0\varkappa c_1\varkappa \ldots \varkappa c_n = (c \wedge b).$$

Так как отношение $\varkappa$ кодистрибутивно, то по индукции можно выбрать элементы $c_i', b_i' \in L$, удовлетворяющие условиям

$$c_i = c_i' \wedge b_i', \ c_i'\varkappa c_{i+1}', \ b_i'\varkappa b_{i+1}', \quad i = 0, \ldots, n-1, \ b_n' = b, \ c_n' = c.$$

Следовательно, $a = c_0' \wedge b_0'$ и $c_0'\bar{\varkappa}c$, $b_0'\bar{\varkappa}b$. Таким образом, $\bar{\varkappa}$ — кодистрибутивный предпорядок на L.

Докажем, что $S_p(L, \varkappa) = S_p(L, \bar{\varkappa})$. Так как $\varkappa \subseteq \bar{\varkappa}$, то $S_p(L, \bar{\varkappa}) \subseteq S_p(L, \varkappa)$. Обратно, пусть $M \in S_p(L, \varkappa)$ и $a\bar{\varkappa}b$ для некоторых элементов $a \in L$, $b \in M$. По определению, если $a \neq b$, то существуют элементы $c_i \in L$ такие, что $a = c_0\varkappa c_1\varkappa \ldots \varkappa c_n = b$. Так как множество M $\varkappa$-наследственно и $b \in M$, то $c_{n-1} \in M$; далее по индукции получаем, что $a \in M$. Следовательно, множество M $\bar{\varkappa}$-наследственно и $M \in S_p(L, \bar{\varkappa})$. Лемма доказана.

Лемма 8.7. *Пусть A — алгебраическая решетка и $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на A. Тогда $S_p(A, \varkappa) \leqslant S_p(A)$.*

Доказательство. По определению $S_p(A, \varkappa)$ — нижняя подполурешетка в $S_p(A)$. Пусть $B, C \in S_p(A, \varkappa)$. Обозначим через $+$ сумму в решетке $S_p(A)$. В силу следствия 1.4 работы [8] имеем $B + C = \{b \wedge c \mid b \in B,\ c \in C\}$. Покажем, что $B + C \in S_p(A, \varkappa)$, т. е. что множество $B + C$ $\varkappa$-наследственно. Пусть $z \in B + C$, $y \in A$ и $y\varkappa z$. Надо доказать, что $y \in B + C$. Так как $z = (b \wedge c)$ для некоторых элементов $b \in B$, $c \in C$ и отношение $\varkappa$ кодистрибутивно, то существуют элементы $b', c' \in A$ такие, что $b'\varkappa b$, $c'\varkappa c$ и $y = b' \wedge c'$. По условию множества B, C $\varkappa$-наследственны, поэтому $b' \in B$, $c' \in C$. Отсюда следует, что $y \in B + C$. Итак, $B + C$ — сумма множеств B и C в решетке $S_p(A, \varkappa)$. Лемма доказана.

§ 9. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕТОК КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

Систему G из квазимногообразия $\mathfrak{R}$ назовем *$\mathfrak{R}$-определяющей*, если G предельно $\mathfrak{R}$-проективна и любое подквазимногообразие в $\mathfrak{R}$ порождается системами вида G/θ, где $\theta \in C_{\mathfrak{R}}(G)$.

Примером $\mathfrak{R}$-определяющей системы является $\mathfrak{R}$-свободная система счетного ранга; $\mathfrak{R}$-свободная система конечного ранга n тогда и только тогда является $\mathfrak{R}$-определяющей, когда любое подквазимногообразие в $\mathfrak{R}$ порождается не более чем n-порожденными системами, или, что равносильно, аксиоматический квазиранг (см. [4]) любого подквазимногообразия в $\mathfrak{R}$ не превосходит n.

Теорема 9.1. *Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное квазимногообразие, G — некоторая $\mathfrak{R}$-определяющая система. Тогда*

$$L_q(\mathfrak{R}) \simeq S_p\left(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon\right),$$

где ε — отношение вложения на решетке $C_{\mathfrak{R}}(G)$.

Доказательство. Для любого квазимногообразия $\mathfrak{N} \in L_q(\mathfrak{R})$ полагаем $C(\mathfrak{N}) = C_{\mathfrak{N}}(G) = \{\theta \in C_{\mathfrak{R}}(G) \mid G/\theta \in \mathfrak{N}\}$.

а) $C(\mathfrak{N}) \in S_p\left(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon\right)$. Действительно, ввиду предложения 7.5 $C(\mathfrak{N})$ — алгебраическое подмножество в $C_{\mathfrak{R}}(G)$. Пусть $\theta_1, \theta_2 \in C_{\mathfrak{R}}(G)$, $\theta_1\varepsilon\theta_2$ и $\theta_2 \in C(\mathfrak{N})$. Тогда $G/\theta_2 \in \mathfrak{N}$ и $G/\theta_1 \leqslant G/\theta_2$, поэтому $G/\theta_1 \in \mathfrak{N}$, т. е. $\theta_1 \in C(\mathfrak{N})$. Следовательно, множество $C(\mathfrak{N})$ ε-наследственно.

б) Отображение C: $L_q(\mathfrak{R}) \to S_p\left(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon\right)$ разнозначно. В самом деле, пусть $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \in L_q(\mathfrak{R})$ и $\mathfrak{N}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}_2$. Так как система G является $\mathfrak{R}$-определяющей, то существует система A такая, что $A \in \mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$ и $A \simeq G/\theta$ для некоторой конгруэнции $\theta \in C_{\mathfrak{R}}(G)$. Следовательно, $\theta \in C(\mathfrak{N}_1) \setminus C(\mathfrak{N}_2)$, т. е. $C(\mathfrak{N}_1) \not\subseteq C(\mathfrak{N}_2)$.

в) C является отображением на. Для произвольного $B \in S_p\left(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon\right)$ полагаем $\mathfrak{B} = \{G/\theta \mid \theta \in B\}$ и $\mathfrak{N} = \mathbf{Q}(\mathfrak{B})$. По определению $\mathfrak{N} \in L_q(\mathfrak{R})$ и $B \subseteq C(\mathfrak{N})$.

Докажем обратное включение. Пусть $\theta \in C(\mathfrak{N})$, $A = G/\theta$ и φ_θ — канонический гомоморфизм G на A. Тогда, выбрав в G произвольную систему порождающих $\{x_k | k \in K\}$, будем иметь $A = (b_k | k \in K)$, где $b_k = \varphi_\theta(x_k)$. По теореме 5.2 $\mathfrak{N} = \underset{\rightarrow}{\mathbf{L}}_s \mathbf{P}_s(\mathfrak{B})$, поэтому

$$A \simeq \varinjlim \mathscr{A}, \tag{1}$$

где $\mathscr{A} = \langle I, A_i, \varphi_{ij} \rangle$ — надпрямой спектр, и

$$A_i \leqslant_s \prod_{j \in J_i} A_{ij},\ A_{ij} \in \mathfrak{B},\ i \in I,\ j \in J_i. \tag{2}$$

Поскольку система G предельно $\mathfrak{N}$-проективна, то существуют $i_0 \in I$ и гомоморфизм $\psi : G \to A_{i_0}$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi_\theta"] & \\ A_{i_0} \arrow[rr, "\varphi_{i_0\infty}"'] & & A \end{tikzcd}$$

коммутативна. Если $\mathscr{A}_{I_0}$ — надпрямой спектр, получающийся из спектра $\mathscr{A}$ сужением на $I_0 = \{i \in I | i_0 \leqslant i\}$, то ввиду (1) $A \simeq \varinjlim \mathscr{A}_{I_0}$. Пусть далее $B_{i_0} = \psi(G)$ и $a_{i_0 k} = \psi(x_k)$, $k \in K$. По определению $B_{i_0} = (a_{i_0 k} \,|\, k \in K)$ и $\varphi_{i_0 \infty}(a_{i_0 k}) = b_k$. Поэтому, в силу леммы 4.4, кортеж $\mathscr{B} = \langle I_0, B_i, \psi_{ij} \rangle$, где $B_i = \left(\varphi_{i_0 i}\left(a_{i_0 k}\right) \middle| k \in K\right)$, ψ_{ij} — сужение φ_{ij} на B_i при $i, j \in I_0$, $i \leqslant j$, образует надпрямой спектр и

$$\varinjlim \mathscr{B} \simeq \varinjlim \mathscr{A}_{I_0} \simeq A. \tag{3}$$

Пусть θ_i — ядерная конгруэнция композиции гомоморфизмов

$$G \xrightarrow{\psi} B_{i_0} \xrightarrow{\psi_{i_0 i}} B_i. \tag{4}$$

По предложению 3.3 $B_i \simeq G/\theta_i$, следовательно, $\theta_i \in C_{\mathfrak{N}}(G)$. Так как для любых $i, j \in I_0$ существует $s \in I_0$ такой, что $i, j \leqslant s$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] & B_{i_0} \arrow[r, "\psi_{i_0 i}"] \arrow[d, "\psi_{i_0 j}"'] \arrow[dr, "\psi_{i_0 s}"] & B_i \arrow[d, "\psi_{is}"] \\ & B_j \arrow[r, "\psi_{js}"'] & B_s \end{tikzcd}$$

коммутативна, то $\{\theta_i | i \in I_0\}$ — направленное подмножество в $C_{\mathfrak{N}}(G)$. Следовательно, если

$$\overline{\theta} = \cup\, (\theta_i | i \in I_0), \tag{5}$$

то ввиду предложения 4.1 и условия (3) имеем $\theta \in C_{\mathfrak{N}}(G)$ и

$$G/\overline{\theta} \simeq A. \tag{6}$$

Из условия (2) следует, что $B_i \leqslant \prod_{j \in J_i} A_{ij}$, $i \in I_0$. Поэтому если $B_{ij} = \pi_{ij}(B_i)$, где π_{ij} — проектирование B_i в A_{ij}, $i \in I_0$, $j \in J_i$, то

$$B_i \leqslant_s \prod_{j \in J_i} B_{ij}. \tag{7}$$

Пусть θ_{ij} — ядерная конгруэнция композиции гомоморфизмов

$$G \xrightarrow{\psi} B_{i_0} \xrightarrow{\psi_{i_0 i}} B_i \xrightarrow{\pi_{ij}} B_{ij}. \tag{8}$$

Так как $G/\theta_{ij} \simeq B_{ij} \leqslant A_{ij}$, $A_{ij} \in \mathfrak{B}$ и множество B ε-наследственно, то $\theta_{ij} \in \in B$, $i \in I_0$, $j \in J_i$.

Далее, из определения гомоморфизмов (4), (8) и условия (7) получаем $\theta_i = \cap (\theta_{ij} | j \in J_i)$, $i \in I_0$. Поскольку B — алгебраическое подмножество в $C_{\mathfrak{R}}(G)$, то $\theta_i \in B$, $i \in I_0$, поэтому ввиду (5) $\overline{\theta} \in B$. Так как в силу условия (6) $G/\overline{\theta} \simeq A \simeq G/\theta$ и множество B ε-наследственно, то $\theta \in \in B$. Таким образом, $B = C(\mathfrak{R})$.

г) Отображение C сохраняет порядок. Из пп. б), в) следует, что для любого $B \in S_p(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon)$ имеет место равенство $C^{-1}(B) = = \mathrm{Q}\{G/\theta | \theta \in B\}$. Поэтому если $B_1, B_2 \in S_p(C_{\mathfrak{R}}(G), \varepsilon)$ и $B_1 \subseteq B_2$, то $C^{-1}(B_1) \subseteq C^{-1}(B_2)$. С другой стороны, в силу определения C, если $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_i \in L_q(\mathfrak{R})$, то $C(\mathfrak{R}_1) \subseteq C(\mathfrak{R}_2)$. Теорема доказана.

Следствие 9.2. *Если F — свободная система счетного ранга из квазимногообразия $\mathfrak{R}$, то*

$$L_q(\mathfrak{R}) \simeq S_p(C_{\mathfrak{R}}(F), \varepsilon),$$

где ε — отношение вложения на решетке $C_{\mathfrak{R}}(F)$.

Отметим, что выбор «хорошей» $\mathfrak{R}$-определяющей системы может значительно облегчить вычисление решетки $L_q(\mathfrak{R})$. Рассмотрим два примера.

Пример 9.3. а) Пусть $\mathfrak{M}$ — квазимногообразие алгебр сигнатуры $\langle f, g, e\rangle$ типа $\langle 1, 1, 0\rangle$, заданное квазитождествами

$$\forall x (fg(x) \approx gf(x) \approx x),$$
$$\forall x (f(x) \approx x \,\&\, g(x) \approx x \leftrightarrow x \approx e).$$

Пусть $N^0 = \langle \omega, \trianglelefteq \rangle$, где

$$n \trianglelefteq m \Leftrightarrow (m \text{ делит } n), \tag{9}$$

при этом считаем, что $0/n = 0$ для всех $n \in \omega$. В работе [22] доказано, что

$$L_q(\mathfrak{M}) \simeq S_\wedge (N^0), \tag{10}$$

где $S_\wedge(N^0)$ — решетка полных нижних подполурешеток в N^0.

Докажем формулу (10), используя теорему 9.1. Введем обозначения:

$$x^0 = x,\ x^{n+1} = f(x^n),\ x^{-(n+1)} = g(x^{-n}),\ n \geqslant 0,$$
$$C_n = F_{\mathfrak{M}}(x, x^n = x),$$

в частности, C_1 — единичная алгебра, $C_0 = \{x^n | n \in \mathbf{Z}\} \cup \{e\}$ — свободная алгебра в $\mathfrak{M}$ ранга 1.

Без труда проверяется, что любую алгебру $A \in \mathfrak{M}$ можно представить в виде $A = \cup (C_{n_i} | i \in I)$, и отображение $\varphi_i : A \to C_i$ по правилу

$$\varphi_i(a) = \begin{cases} a, & \text{если } a \in C_{n_i}, \\ e, & \text{если } a \notin C_{n_i}, \end{cases}$$

является гомоморфизмом; в частности, A аппроксимируется алгебрами вида C_n, $n \in \omega$. Отсюда следует, что любое подквазимногообразие в $\mathfrak{M}$ порождается 1-порожденными алгебрами, поэтому C_0 является $\mathfrak{M}$-определяющей алгеброй.

Определим конгруэнции $\theta_n \in \mathrm{Con}(C_0)$, $n \in \omega$, следующим образом:

$$\theta_0 = 0_{C_0},\ \theta_1 = 1_{C_0},$$
$$\theta_k = \{\langle x^m, x^n\rangle | m \equiv n (\mathrm{mod}\, k)\} \cup \{\langle e, e\rangle\},\ k \geqslant 2.$$

Поскольку других конгруэнций на C_0 нет и $\theta_k \subseteq \theta_s \Leftrightarrow k \trianglelefteq s$, то $C_{\mathfrak{M}}(C_0) \simeq \simeq N^0$. Поэтому, в силу изоморфизма $C_0/\theta_k \simeq C_k$, имеем $\langle m, n\rangle \in \varepsilon \Leftrightarrow \Leftrightarrow C_0/\theta_m \leqslant C_0/\theta_n \Leftrightarrow (m = n$ либо $m = 1)$. Отсюда, в силу теоремы 9.1, получаем

$$L_q(\mathfrak{M}) \simeq S_p(N^0, \varepsilon) \simeq S_p(N^0, =) \simeq S_p(N^0) \simeq S_\wedge(N^0).$$

б) Пусть $\mathfrak{A}$ — многообразие всех абелевых групп. Так как любая конечно порожденная абелева группа изоморфна прямой сумме циклических групп, то группа $\mathbf{Z}$ является $\mathfrak{A}$-определяющей. Без труда проверяется, что $\operatorname{Con}(\mathbf{Z}) \simeq \operatorname{Sub}(\mathbf{Z}) \simeq N^0$. Поэтому, в силу теоремы 9.1, имеем $L_q(\mathfrak{A}) \simeq S_\wedge(N^0, \varepsilon)$, где $S_\wedge(N^0, \varepsilon)$ — решетка полных нижних ε-наследственных подполурешеток в N^0. Так как

$$\langle n, m\rangle \in \varepsilon \Leftrightarrow \mathbf{Z}/(n) \leqslant \dot{\mathbf{Z}}/(m) \Leftrightarrow (m \trianglelefteq n,\ mn \neq 0 \text{ либо } n = m = 0),$$

то $S_\wedge(N^0, \varepsilon)$ совпадает с решеткой полных нижних подполурешеток решетки N^0, в которых с каждым ненулевым числом содержатся все его делители.

Далее мы воспользуемся следующей конструкцией. Пусть L — произвольная решетка, I — ее идеал, $2 = \{0, 1\}$, $0 < 1$. Без труда проверяется, что множество $D(L, I) = \{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle | a \in I, b \in L\}$ является подрешеткой в $2 \times L$ (см. рис. 9.1).

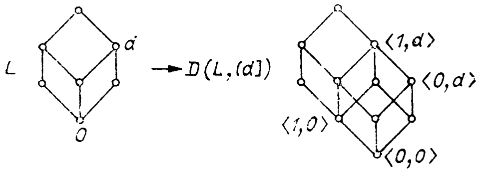


Рис. 9.1.

Пусть $F(N)$ — решетка фильтров решетки N положительных целых чисел относительно порядка, определенного условием (9). Так как N — дистрибутивная решетка и для любых $A, B \in F(N)$ имеет место равенство $A \vee B = \{c \in N | \exists a \in A \exists b \in B(c = a \wedge b)\}$, то $F_\omega(N) = \{A \in F(N) | |A| < \omega\}$ — идеал в $F(N)$. Теперь без труда проверяется, что $L_q(\mathfrak{A}) \simeq D(F(N), F_\omega(N))$.

В частности, отсюда вытекает, что $L_q(\mathfrak{A})$ — дистрибутивная решетка, ибо решетка фильтров дистрибутивной решетки дистрибутивна.

Несколько слов о решетках $F(N)$, $F_\omega(N)$. Пусть $\omega + 1 = \{0, 1, \ldots, \omega\}$ — цепь относительно естественного порядка, $p_0 = 2$, $p_1 = 3, \ldots$ — последовательность всех простых чисел. Тогда отображение $\varphi : F(N) \to (\omega + 1)^\omega$ по правилу

$$(\varphi(A))(n) = \sup\{k \in \omega \mid p_n^k \in A\}, A \in F(N), n \in \omega,$$

является изоморфизмом, и φ переводит $F_\omega(N)$ в идеал

$$\{f \in (\omega + 1)^\omega | \sup\{f(k) | k \in \omega\} < \omega\}.$$

Это, в частности, дает представление решетки $L_q(\mathfrak{A})$ в терминах бесконечных последовательностей, найденное А. А. Виноградовым [20].

Пример 9.3 б) показывает, что в теореме 9.1 отношение вложения нельзя, вообще говоря, заменить отношением изоморфизма. Действительно, отношение τ на $\mathbf{Z}$ совпадает с отношением равенства, следовательно,

$$S_p(\operatorname{Con}(\mathbf{Z}), \tau) \simeq S_p(N^0, \tau) \simeq S_p(N^0) \simeq S_\wedge(N^0).$$

Но ввиду следствия 5.4 работы [8] решетка $S_\wedge(N^0)$ не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству, поэтому она не изоморфна решетке $L_q(\mathfrak{A})$.

Оказывается, если рассматривать не произвольные $\mathfrak{K}$-определяющие системы, а только $\mathfrak{K}$-свободные системы счетного ранга, то теорему 9.1 можно усилить. Основой для этого является следующая

Лемма 9.4. *Пусть A, B — счетно порожденные системы и $A \leqslant B$. Тогда существует надпрямой спектр $\mathscr{B} = \langle \omega, C_n, \psi_{nm} \rangle$ такой, что все системы C_n счетно порождены, $C_n \in \mathbf{P}_s(B)$ и $A \simeq \varinjlim \mathscr{B}$.*

Доказательство. Для любых n, $m \in \omega$, $n \leqslant m$, пусть $\omega_n = \{n, n+1, \ldots\}$ и φ_{nm} — гомоморфизм B^{ω_n} на B^{ω_m}, определенный следующим образом: $(\varphi_{nm}(b))(k) = b(k)$, $b \in B^{\omega_n}$, $k \in \omega_m$. По определению $\mathscr{A} = \langle \omega, B^{\omega_n}, \varphi_{nm} \rangle$ — надпрямой спектр.

Пусть далее $A = (a_n | n \in \omega)$, $B = (b_n | n \in \omega)$. Для любой пары $\langle k, s \rangle \in \omega^2$ определим элемент $c_{ks} \in B^\omega$, полагая

$$c_{ks}(n) = \begin{cases} b_k, \text{ если } 0 \leqslant n \leqslant s, \\ a_k \text{ если } n > s. \end{cases}$$

Пусть C_0 — подсистема в B^ω, порожденная множеством $\{c_{ks} | \langle k, s \rangle \in \omega^2\}$. По определению $C_0 \leqslant {}_s B^\omega$, и для любого $c \in C_0$ существуют $k \in \omega$ и $a \in A$ такие, что $c(n) = a$ для всех $n \geqslant k$. Элемент a определен однозначно; если его обозначить через $d(c)$, то для любых $f \in \sigma^F$, $c_i \in C_0$, $i = 1, \ldots, m = \nu(f)$, будем иметь

$$f(d(c_1), \ldots, d(c_m)) = d(f(c_1, \ldots, c_m)). \tag{11}$$

Рассмотрим кортеж $\mathscr{B} = \langle \omega, C_n, \psi_{nm} \rangle$, где $C_n = \varphi_{0n}(C_0)$ и ψ_{nm} — сужение φ_{nm} на C_n при n, $m \in \omega$, $n \leqslant m$. По определению все системы C_n счетно порождены и $C_n \leqslant_s B^{\omega_n}$. Так как $\mathscr{A}$ — надпрямой спектр, то $\mathscr{B}$ — также надпрямой спектр.

Докажем, что $A \simeq \varinjlim \mathscr{B}$. Согласно определению $\varinjlim \mathscr{B} \simeq C_0/\theta$, где $\theta = \ker \psi_{0\infty}$. С другой стороны, ввиду формулы (11) отображение $c \to d(c)$, $c \in C_0$, является гомоморфизмом C_0 на A; в частности, $A \simeq C_0/\bar{\theta}$, где $\bar{\theta} = \ker d$. Осталось показать, что $\theta = \bar{\theta}$. Пусть $r \in \sigma^P$, $n = \nu(r)$ и $c_1, \ldots, c_n \in C_0$, тогда найдутся $k_i \in \omega$ и $a_i \in A$ такие, что $c_i(m) = a_i = d(c_i)$ для всех $m \geqslant k_i$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$. Имеем

$$\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \in \theta(r) \Leftrightarrow \exists\, m \geqslant k \left(r^{C_m}(\psi_{0m}(c_1), \ldots, \psi_{0m}(c_n))\right). \tag{12}$$

Так как на C_m функции $\psi_{0m}(c_i)$ постоянны и равны $d(c_i)$, то

$$(12) \Leftrightarrow r^A(d(c_1), \ldots, d(c_n)) \Leftrightarrow \langle c_1, \ldots, c_n \rangle \in \bar{\theta}(r).$$

Лемма доказана.

Теорема 9.5. *Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное квазимногообразие, F — свободная система в $\mathfrak{R}$ счетного ранга. Тогда*

$$L_q(\mathfrak{R}) \simeq S_p(C_{\mathfrak{R}}(F), \tau),$$

где τ — отношение изоморфизма на решетке $C_{\mathfrak{R}}(F)$.

Доказательство. Согласно следствию 9.2 $L_q(\mathfrak{R}) \simeq S_p(C_{\mathfrak{R}}(F), \varepsilon)$, где ε — отношение вложения на $C_{\mathfrak{R}}(F)$. Докажем, что $S_p(C_{\mathfrak{R}}(F), \varepsilon) = S_p(C_{\mathfrak{R}}(F), \tau)$. Так как $\tau \subseteq \varepsilon$, то достаточно установить, что любое алгебраическое τ-наследственное подмножество $M \subseteq C_{\mathfrak{R}}(F)$ является ε-наследственным.

Пусть $\theta \in C_{\mathfrak{R}}(F)$, $\bar{\theta} \in M$ и $\theta \varepsilon \bar{\theta}$. Тогда системы $A = F/\theta$ и $B = F/\bar{\theta}$ счетно порождены и $A \leqslant B$. Следовательно, в силу леммы 9.4, существует надпрямой спектр $\mathscr{B} = \langle \omega, C_n, \psi_{nm} \rangle$ такой, что все системы C_n счетно порождены, $C_n \in \mathbf{P}_s(B)$ и $A \simeq \varinjlim \mathscr{B}$.

Пусть $C_0 \simeq F/\theta_0$, $\theta_0 \in C_{\mathfrak{R}}(F)$, ψ — канонический гомоморфизм F на C_0 и θ_n — ядерная конгруэнция композиции гомоморфизмов

$$F \xrightarrow{\psi} C_0 \xrightarrow{\psi_{0n}} C_n. \tag{13}$$

Так как подмножество $\{\theta_n | n \in \omega\}$ направлено в $C_{\mathfrak{R}}(F)$ и $F/\theta_n \simeq C_n$, то ввиду предложения 4.1 имеем $\tilde{\theta} = \bigcup (\theta_n | n \in \omega) \in C_{\mathfrak{R}}(F)$ и $F/\tilde{\theta} \simeq \varinjlim \mathscr{B}$. Следовательно, $A \simeq F/\theta \simeq \varinjlim \mathscr{B} \simeq F/\tilde{\theta}$, отсюда $\tilde{\theta}\tau\theta$.

Далее, поскольку $C_n \in \mathbf{P}_s(B)$, то

$$C_n \leqslant_s B^{I_n} \tag{14}$$

для некоторого множества I_n. Для любого $i \in I_n$ пусть π_{ni} — проектирование C_n на i-ю копию B, а θ_{ni} — ядерная конгруэнция композиции гомоморфизмов

$$F \xrightarrow{\psi} C_0 \xrightarrow{\psi_{0n}} C_n \xrightarrow{\pi_{ni}} B. \tag{15}$$

Так как $F/\theta_{ni} \simeq B \simeq F/\overline{\theta}$, то $\theta_{ni}\tau\overline{\theta}$, и поскольку множество M τ-наследственно, то $\theta_{ni} \in M$, $n \in \omega$, $i \in I_n$. Из определения гомоморфизмов (13), (15) и условия (14) следует, что $\theta_n = \bigcap (\theta_{ni} | i \in I_n)$, $n \in \omega$. Поэтому также $\theta_n \in M$, $n \in \omega$, отсюда $\tilde{\theta} \in M$. Поскольку $\theta\tau\tilde{\theta}$, то $\theta \in M$.

Таким образом, множество M ε-наследственно. Теорема доказана.

§ 10. ТЕОРЕМА О СЖАТИИ

Напомним (см. § 8), что $\mathscr{Q}$ — класс всех решеток квазимногообразий; $\mathscr{P}$ — класс всех решеток вида $S_p(A)$, где A — алгебраическая решетка; $\mathscr{R}$ — класс всех решеток вида $S_p(A, \varkappa)$, где A — алгебраическая решетка, $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на A.

Теорема 10.1. *Имеют место строгие включения*

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{Q} \subset \mathscr{R}, \tag{1}$$

и равенства

$$\mathbf{S}(\mathscr{P}) = \mathbf{S}(\mathscr{Q}) = \mathbf{S}(\mathscr{R}). \tag{2}$$

Доказательство. В силу теоремы 8.2 $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}$. Поскольку все $\mathscr{P}$-решетки являются точечными (предложение 3.1 из работы [8]), а 5-элементная немодулярная решетка $N_5 \in \mathscr{Q}$ неточечная, то $\mathscr{P} \subset \mathscr{Q}$. В силу теоремы 9.1 леммы 8.1 и следствия 7.6 справедливо включение $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{R}$. Пусть α — несчетный ординал, тогда по теореме 4.1 [8] $P(\alpha) \notin \mathscr{Q}$, а ввиду леммы 8.5 $P(\alpha) \in \mathscr{R}$, так что $\mathscr{Q} \subset \mathscr{R}$.

Из условия (1) следует, что $\mathbf{S}(\mathscr{P}) \subseteq \mathbf{S}(\mathscr{Q}) \subseteq \mathbf{S}(\mathscr{R})$. Пусть $S_p(A, \varkappa) \in \mathscr{R}$, тогда по лемме 8.7 $S_p(A, \varkappa) \leqslant S_p(A)$, отсюда, в силу теоремы 8.2, имеем $S_p(A, \varkappa) \in \mathbf{S}(\mathscr{P})$. Следовательно, $\mathbf{S}(\mathscr{R}) \subseteq \mathbf{S}(\mathscr{P})$, тем самым равенства (2) доказаны.

Следствие 10.2. *Класс $\mathbf{S}(\mathscr{Q})$ замкнут относительно прямых произведений, т. е. $\mathbf{S}(\mathscr{Q}) = \mathbf{SP}(\mathscr{Q})$.*

Следует из теоремы 8.3 и равенства (2).

Следствие 10.3. *Универсальные классы и квазимногообразия, порожденные классами $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ и $\mathscr{R}$, совпадают между собой, т. е. $\mathbf{V}(\mathscr{Q}) = \mathbf{Q}(\mathscr{Q}) = \mathbf{V}(\mathscr{P}) = \mathbf{Q}(\mathscr{P}) = \mathbf{V}(\mathscr{R}) = \mathbf{Q}(\mathscr{R})$.*

Доказательство. В силу следствия 2 теоремы 3 [11] и следствия 10.2 имеем $\mathbf{Q}(\mathscr{Q}) = \mathbf{SP}_u\mathbf{P}(\mathscr{Q}) = \mathbf{SP}_u\mathbf{SP}(\mathscr{Q}) = \mathbf{SP}_u\mathbf{S}(\mathscr{Q}) = \mathbf{SP}_u(\mathscr{Q}) = \mathbf{V}(\mathscr{Q})$. Осталось воспользоваться равенствами (2).

Следствие 10.4. *Имеют место равенства $\mathbf{S}(\mathscr{Q}) = \mathbf{S}(\mathscr{T})$ и $\mathbf{Q}(\mathscr{Q}) = \mathbf{Q}(\mathscr{T})$.*

Следует из теоремы 8.3 и теоремы 10.1 (определение класса $\mathscr{T}$ см. в § 8).

§ 11. ПРЕДПОЛНЫЕ ПОДРЕШЕТКИ РЕШЕТОК КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

Здесь мы дадим описание класса $\mathscr{R}$ в терминах подрешеток $\mathscr{Q}$-решеток.

Напомним, что решетка L называется *непрерывной*, если L — полная решетка и

$$a \wedge (\vee C) = \vee (a \wedge c \mid c \in C)$$

для любого $a \in L$ и для любой цепи $C \subseteq L$. Например, любая алгебраическая решетка является непрерывной. Подмножество B полной решетки L называется *непрерывным* в L, если для любого элемента $a \in L$ имеет место равенство $a \wedge (\vee B) = \vee (a \wedge (\vee K) \mid K \in F(B))$, где $F(B)$ — множество всех конечных подмножеств в B. Ясно, что если подмножество B имеет наибольший элемент или конечно, то B непрерывно в L. Без труда проверяется (см. [6]), что полная решетка L непрерывна тогда и только тогда, когда любое подмножество в L непрерывно.

Подмножество M полной решетки L назовем *предполным*, если выполнены следующие условия:

п1) M имеет наибольший элемент и $\wedge A \in M$ для любого непустого подмножества $A \subseteq M$,

п2) $\vee B \in M$ для любого непрерывного в L подмножества $B \subseteq M$.

Из определения следует, что предполное подмножество является подрешеткой в L и любая полная подрешетка в L предполна; если L — непрерывная решетка, то справедливо обратное утверждение: любая предполная подрешетка в L полна.

Согласно условию п1) предполная подрешетка в L является полной решеткой относительно индуцированного порядка, «бесконечные» суммы в которой, вообще говоря, не совпадают с суммами в L.

Лемма 11.1. *Если* $L_1 \leqslant L_2 \leqslant L_3$ и L_i *предполна в* L_{i+1}, $i = 1, 2$, *то* L_1 *предполна в* L_3.

Доказательство. Условие п1) выполнено автоматически. Докажем условие п2). Пусть подмножество $B \subseteq L_1$ непрерывно в L_3. Для любого $M \subseteq L_2$ пусть $\vee M$ — сумма в L_3, а $\sqcup M$—сумма в L_2. Так как подрешетка L_2 предполна в L_3, то $\vee B = \sqcup B \in L_2$. Отсюда для любого $a \in L_2$ имеем

$$a \wedge (\sqcup B) \geqslant \sqcup (a \wedge (\sqcup K) \mid K \in F(B)) = \sqcup (a \wedge (\vee K) \mid K \in F(B)) =$$
$$= \vee (a \wedge (\vee K) \mid K \in F(B)) = a \wedge (\vee B) = a \wedge (\sqcup B).$$

Следовательно, неравенства можно заменить равенствами, и подмножество B непрерывно в L_2. Так как подрешетка L_1 предполна в L_2, то $\vee B \in L_1$. Лемма доказана.

Теорема 11.2. *Для произвольной решетки M следующие условия равносильны*:

а) *M — предполная подрешетка некоторой $\mathscr{P}$-решетки*,

б) *M — предполная подрешетка некоторой $\mathscr{Q}$-решетки*,

в) *$M \in \mathscr{R}$, т. е. $M \simeq S_p(A, \varkappa)$ для некоторой алгебраической решетки A и некоторого кодистрибутивного отношения $\varkappa$ на A.*

Доказательство. Так как $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}$, то а) $\Rightarrow$ б).

в) $\Rightarrow$ а). Пусть A — произвольная алгебраическая решетка, $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на A и $M = S_p(A, \varkappa)$. По теореме 8.2 $S_p(A) \in \mathscr{P}$, а по лемме 8.7 M — подрешетка в $S_p(A)$. Докажем, что на самом деле M — предполная подрешетка в $S_p(A)$. Достаточно проверить условие п2). Пусть $B \subseteq M$ и B непрерывно в $S_p(A)$, пусть $\sqcup B$ — сумма в решетке $S_p(A)$.

Докажем, что множество $\sqcup B$ $\varkappa$-наследственно (отсюда будет следовать, что $\vee B \in M$). Пусть элементы $a, b \in A$ таковы, что $b \in \sqcup B$ и

$a\varkappa b$. Так как подмножество B непрерывно в $S_p(A)$, то

$$\{b, 1\} = \{b, 1\} \cap (\sqcup B) = \sqcup (\{b, 1\} \cap (\sqcup K) \mid K \in F(B)),$$

отсюда $b \in \sqcup K$ для некоторого $K \in F(B)$, $K = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. В силу леммы 1.4 [8] существуют $b_i \in \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $b = b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$. Так как отношение $\varkappa$ кодистрибутивно, то $a = b_1' \wedge \ldots \wedge b_n'$ для некоторых $b_i' \varkappa b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Но множества β_i $\varkappa$-наследственны, значит, $b_i' \in \beta_i$, отсюда $a \in \beta_1 \sqcup \ldots \sqcup \beta_n \subseteq \sqcup B$, что и требовалось.

а) $\Rightarrow$ в). Пусть A — алгебраическая решетка, M — предполная подрешетка в $S_p(A)$. Докажем, что $M \in \mathscr{R}$. Пусть B — наибольший элемент в M. Так как $S_p(B)$ — полная подрешетка в $S_p(A)$, то ввиду леммы 11.1 M — предполная подрешетка в $S_p(B)$. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $A \in M$.

Для любого $a \in A$ полагаем $\mu(a) = \cap (\mu \in M \mid a \in \mu)$. По определению $\mu(a) \in M$. Определим на решетке A отношение $\varkappa$ следующим образом: $a \varkappa b \Leftrightarrow \mu(a) \subseteq \mu(b) \Leftrightarrow a \in \mu(b)$.

Покажем, что $\varkappa$ — кодистрибутивное отношение на A. Пусть a, b_1, $b_2 \in A$ и $a \varkappa (b_1 \wedge b_2)$. Так как $b_1 \wedge b_2 \in \mu(b_1) \sqcup \mu(b_2) \in M$, то $a \in \mu(b_1 \wedge \wedge b_2) \subseteq \mu(b_1) \sqcup \mu(b_2)$. Отсюда, в силу леммы 1.4 [8], $a = b_1' \wedge b_2'$ для некоторых $b_i' \in \mu(b_i)$, $i = 1, 2$. Так как $b_i' \in \mu(b_i)$, то $b_i' \varkappa b_i$.

Покажем теперь, что $M \simeq S_p(A, \varkappa)$, т. е. для любого алгебраического подмножества $\beta \subseteq A$ справедливо условие: (β $\varkappa$-наследственно) $\Leftrightarrow \beta \in M$.

Пусть $\beta \in M$, a, $b \in A$, $a \varkappa b$ и $b \in \beta$. Тогда $\mu(a) \subseteq \mu(b) \subseteq \beta$, отсюда $a \in \beta$, т. е. β $\varkappa$-наследственно. Обратно, пусть β — алгебраическое $\varkappa$-наследственное подмножество в A. Тогда $\beta = \cup (\mu(b) \mid b \in \beta)$.

Покажем, что подмножество $B = \{\mu(b) \mid b \in \beta\} \subseteq M$ непрерывно в $S_p(A)$. Пусть $\alpha \in S_p(A)$, тогда, очевидно, $\alpha \cap (\sqcup B) \subseteq \sqcup (\alpha \cap (\sqcup K) \mid K \in F(B))$. Обратно, пусть $a \in \alpha \cap (\sqcup B)$. Так как

$$\alpha \cap (\sqcup B) = \alpha \cap (\sqcup (\mu(b) \mid b \in B)) = \alpha \cap (\cup (\mu(b) \mid b \in B)) = \alpha \cap \beta,$$

то $a \in \alpha \cap \mu(b)$ для некоторого $b \in B$, что и требовалось. Теорема доказана.

§ 12. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В силу теоремы 9.5 вопрос об описании решетки $L_q(\mathfrak{R})$ подквазимногообразий данного квазимногообразия $\mathfrak{R}$ сводится к следующим двум вопросам:

1) описанию решетки $C_{\mathfrak{R}}(F)$ конгруэнций $\mathfrak{R}$-свободной системы счетного ранга F;

2) решению алгебраической проблемы изоморфизма для системы F, т. е. описанию отношения изоморфизма τ на решетке $C_{\mathfrak{R}}(F)$.

Если по первому вопросу (например, в случае многообразий) существует достаточно обширная информация, то по второму почти ничего не известно.

Для «больших» многообразий второй вопрос представляется достаточно трудным. Естественно попытаться сначала решить этот вопрос для многообразий, решетки подмногообразий которых описаны и не очень сложны, например, для многообразия двуступенно нильпотентных групп (идемпотентных полугрупп, дистрибутивных решеток с псевдодополнениями). Отметим, что вопросы об описании решеток подквазимногообразий указанных многообразий обсуждались в литературе и пока не решены (см. [7, 21]).

В силу теоремы 9.1 сказанное выше остается справедливым, если $\mathfrak{R}$-свободную систему F заменить $\mathfrak{R}$-определяющей системой A, а отношение изоморфизма — отношением вложения на $C_{\mathfrak{R}}(A)$.

В связи с проблемой А. И. Мальцева [2] об описании класса всех решеток квазимногообразий особый интерес представляет следующий вопрос: описать пары $\langle A, \varkappa \rangle$, где A — алгебраическая решетка, $\varkappa$ — кодистрибутивный предпорядок на A, такие, что $A \simeq C_{\mathfrak{R}}(F)$ и $\varkappa$ совпадает с отношением изоморфизма на $C_{\mathfrak{R}}(F)$ для некоторого квазимногообразия $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}$-свободной системы F счетного ранга.

В работе [12] была высказана гипотеза о том, что квазимногообразие $Q(\mathcal{Q})$, порожденное классом $\mathcal{Q}$, определяется в классе всех решеток одним квазитождеством

$$\mathrm{SD}_{\vee} \rightleftharpoons \forall xyz(x \vee y \approx x \vee z \to x \vee y \approx x \vee (y \wedge z)).$$

До сих пор эта гипотеза не решена. В силу следствий 10.3 и 10.4 вопрос о нахождении базиса квазитождеств класса $\mathcal{Q}$ сводится к нахождению базиса квазитождеств одного из классов $\mathscr{P}$ либо $\mathscr{T}$, описание которых дано в чисто решеточных терминах.

Остается нерешенным также вопрос (см. [12]): верно ли, что класс $\mathbf{S}(\mathcal{Q})$ всех подрешеток $\mathcal{Q}$-решеток не аксиоматизируем? В силу следствия 10.2 этот вопрос равносилен следующему: будет ли класс $\mathbf{SP}(\mathscr{P})$ квазимногообразием?

Заметим, что решение указанных вопросов в значительной степени зависит от построения глубокой структурной теории для квазимногообразия решеток, определенного квазитождеством $\mathrm{SD}_{\vee}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мальцев А. И.** Математическая логика и общая теория алгебраических систем: Избранные труды, т. 2. М.: Наука, 1976.
2. **Мальцев А. И.** О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики.— В кн.: Труды Международного конгресса математиков: Москва, 1966. М.: Мир, 1968, с. 217—231.
3. **Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.** Математическая логика. М.: Наука, 1979.
4. **Мальцев И. А.** Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
5. **Crätzer G.** Universal algebra.— Berlin a. o.: Springer-Verlag, 1979.
6. **Grawley P., Dilworth R.** Algebraic theory of lattices. New Jersey: Prentice-Hall, 1973.
7. **Grätzer G.** General lattice theory.— Berlin: Akademie-Verlag, 1978.
8. **Горбунов В. А., Туманов В. И.** Об одном классе решеток квазимногообразий.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 1, с. 59—80.
9. **Jónsson B.** Congruence varieties.— Algebra Univers., 1980, v. 10, № 3, p. 355—394.
10. **Мальцев А. И.** Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем.— Алгебра и логика, 1966, т. 5, № 3, с. 3—9.
11. **Будкин А. И., Горбунов В. А.** К теории квазимногообразий алгебраических систем.— Алгебра и логика, 1975, т. 14, № 2, с. 123—142.
12. **Горбунов В. А.** О решетках квазимногообразий.— Алгебра и логика, 1976, т. 15. № 4, с. 436—457.
13. **Grätzer G., Lakser H.** A note on implicational class generated by a class of structures.— Canad. Math. Bull., 1974, v. 16, № 4, p. 603—605.
14. **Kashiwagi T.** On implicational classes.— Math. Japonical, 1972, v. 17, № 1, p. 1—12.
15. **Fujiwara T.** On the construction of the least universal Horn class containing a given class.— Osaka J. Math., 1971, v. 8, № 3, p. 425—436.
16. **Platt C.** Iterated limits of universal algebras.— Algebra Univers., 1971, v. 1, № 2, p. 167—181.
17. **Когаловский С. Р.** О теореме Биркгофа.— Успехи мат. наук, 1965, т. 20, вып. 4, с. 206—207.
18. **Мальцев А. И.** Подпрямые произведения моделей.— Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 2, с. 264—266.
19. **Grätzer G., Schmidt E.** Characterizations of congruence lattices of abstract algebras.— Acta scient. Math., 1963, v. 24, p. 34—59.
20. **Виноградов А. А.** Квазимногообразия абелевых групп.— Алгебра и логика, 1965, т. 4, № 6, с. 15—19.
21. **Коуровская** тетрадь.— Новосибирск: изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1976.
22. **Горбунов В. А.** Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость.— Алгебра и логика, 1977, т. 10, № 5, с. 507—548.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ЛИНДОНА В МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ

Л. Л. МАКСИМОВА

В работе [1] было доказано, что существует лишь конечное число нормальных модальных логик, содержащих логику S4, в которых верна интерполяционная теорема Крейга. В [2] была доказана теорема Крейга для ряда предикатных модальных систем, а в [3, 4] — для пропозициональных модальных логик.

В настоящей работе мы рассмотрим более сильное свойство — интерполяционное свойство Линдона [5]. Мы покажем, что интерполяционным свойством Линдона обладают некоторые известные предикатные модальные системы, в том числе логики $K^{\text{п}}$, $\text{K4}^{\text{п}}$, $\text{S4}^{\text{п}}$, а также некоторые пропозициональные логики, содержащие S4, и ряд суперинтуиционистских логик. С другой стороны, существуют нормальные расширения логики S4, в которых верна теорема Крейга, но неверна теорема Линдона.

Напомним, что формулы предикатной модальной логики строятся из атомных формул с помощью связок $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\Box$, $\Diamond$ и кванторов $\forall$, $\exists$; к атомным формулам причисляем также **0** и **1**. Обычным образом можно определить *положительные* и *отрицательные* вхождения подформул и предикатных символов в формулу. Если α — любое множество формул, через $\Omega^+(\alpha)$ $(\Omega^-(\alpha))$ обозначим множество предикатных символов, имеющих положительные (соответственно отрицательные) вхождения в формулы из α. *Интерполяционной теоремой* (или *свойством*) *Линдона* в логике L называем предложение:

Если формула $(A \supset B)$ *входит в* L, *то существует такая формула* C, *что* $(A \supset C) \in L$, $(C \supset B) \in L$, $\Omega^+(C) \subseteq \Omega^+(A) \cap \Omega^+(B)$, $\Omega^-(C) \subseteq \Omega^-(A) \cap \Omega^-(B)$. Такую формулу C называем *интерполянтом Линдона* для формулы $(A \supset B)$.

§ 1. МОДАЛЬНЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

Через $K^{\text{п}}$ обозначаем предикатную модальную логику, аксиомы которой есть

а) аксиомы классического исчисления предикатов,

б) $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$,

правила вывода — обычные для классической логики предикатов, а также правило Гёделя $A/\Box A$. Далее,

$$T^{\text{п}} = K^{\text{п}} + (\Box A \supset A),$$

$$\text{K4}^{\text{п}} = K^{\text{п}} + (\Box A \supset \Box\Box A),$$

$$\text{S4}^{\text{п}} = T^{\text{п}} + \text{K4}^{\text{п}}.$$

Мы докажем в этом параграфе, что в $K^{\text{п}}$, $T^{\text{п}}$, $\text{K4}^{\text{п}}$, $\text{S4}^{\text{п}}$ верна интерполяционная теорема Линдона.

Формулы, построенные из атомных формул и отрицаний атомных формул с помощью $\&$, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$ $\forall$, $\exists$, будем называть *приведенными*.

Лемма 1. *Пусть* A — *произвольная формула исчисления* $K^{\text{п}}$. *Тогда* A *эквивалентна в* $K^{\text{п}}$ *некоторой приведенной формуле* A', *причем* $\Omega^+(A) = \Omega^+(A')$, $\Omega^-(A) = \Omega^-(A')$.

Для доказательства используются следующие эквивалентности исчисления $K^{\text{п}}$:

$$\neg\neg A \equiv A, \quad (A \supset B) \equiv (\neg A \vee B),$$

$$\neg(A \& B) \equiv (\neg A \vee \neg B), \quad \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \& \neg B),$$

$$\neg\Box A \equiv \Diamond\neg A,\quad \neg\Diamond A \equiv \Box\neg A,$$
$$\neg(\forall x)A \equiv (\exists x)\neg A,\quad \neg(\exists x)A \equiv (\forall x)\neg A.$$

Для семейства формул α обозначим через $D(\alpha)$ множество всех предметных переменных и констант, входящих в α. Будем обозначать буквой $\mathfrak{L}$ (иногда с индексами) *язык*, состоящий из приведенных формул, т. е. множество всех приведенных формул A, удовлетворяющих условию: $\Omega^+(A) \subseteq \Omega^+(\mathfrak{L})$, $\Omega^-(A) \subseteq \Omega^-(\mathfrak{L})$, $D(A) \subseteq D(\mathfrak{L})$. Если α — множество приведенных формул, то через $\mathfrak{L}(\alpha)$ обозначаем наименьший язык, содержащий α. Язык $\mathfrak{L}'$ называется *несущественным расширением* языка $\mathfrak{L}$, если $D(\mathfrak{L}') \supseteq D(\mathfrak{L})$, $\Omega^+(\mathfrak{L}') = \Omega^+(\mathfrak{L})$, $\Omega^-(\mathfrak{L}') = \Omega^-(\mathfrak{L})$. Языки $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ называем *согласованными*, если $D(\mathfrak{L}_1) = D(\mathfrak{L}_2)$.

Зафиксируем любую предикатную модальную логику L, т. е. множество формул исчисления предикатов, содержащее все аксиомы и замкнутое относительно всех правил вывода исчисления $K^{\text{п}}$. Если α, β — множества формул, что $\alpha \vdash_L \beta$ означает, что существуют такие формулы $A_1, \ldots, A_k \in \alpha$, $B_1, \ldots, B_l \in \beta$, что $((A_1 \& \ldots \& A_k) \supset (B_1 \vee \ldots \vee B_l)) \in L$. Будем называть *$L$-теорией* языка $\mathfrak{L}$ любое множество $T \subseteq \mathfrak{L}$, удовлетворяющее условию:
$$A \in \mathfrak{L} \wedge T \vdash_L A \Rightarrow A \in T.$$

Множество $F \subseteq \mathfrak{L}$, удовлетворяющее двойственному условию:
$$A \in \mathfrak{L} \wedge A \vdash_L F \Rightarrow A \in F,$$

будем называть *L-котеорией* языка $\mathfrak{L}$. Через $\mathrm{Th}(\mathfrak{L}, L)$ будем обозначать множество всех L-теорий, а через $\mathrm{CTh}(\mathfrak{L}, L)$ — множество всех L-котеорий языка $\mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ — согласованные языки, $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$, $\alpha \subseteq \mathfrak{L}_1$, $\beta \subseteq \mathfrak{L}_2$. Пару $\langle\alpha, \beta\rangle$ будем называть *L-отделимой* в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, если существует такая формула $C \in \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$, то $\alpha \vdash_L C$ и $C \vdash_L \beta$. Заметим, что если $T \in \mathrm{Th}(\mathfrak{L}_1, L)$, $F \in \mathrm{CTh}(\mathfrak{L}_2, L)$, то пара $\langle T, F\rangle$ является L-неотделимой в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$ в том и только в том случае, когда $T \cap F = \varnothing$.

Пару $\langle T, F\rangle$ будем называть *L-насыщенной* в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, если выполнены условия:

1) $T \in \mathrm{Th}(\mathfrak{L}_1, L)$, $F \in \mathrm{CTh}(\mathfrak{L}_2, L)$;
2) $T \cap F = \varnothing$, т. е. пара $\langle T, F\rangle$ L-неотделима в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$;
3) $(A \vee B) \in T \Rightarrow A \in T$ или $B \in T$;
4) $(\exists x)A(x) \in T \Rightarrow (\exists c \in D(\mathfrak{L}_1))(A(c) \in T)$;
5) $(A \& B) \in F \Rightarrow A \in F$ или $B \in F$;
6) $(\forall x)A(x) \in F \Rightarrow (\exists c \in D(\mathfrak{L}_2))(A(c) \in F)$.

В дальнейшем для краткости будем иногда при фиксированной логике L называть L-неотделимые (L-насыщенные) пары просто неотделимыми (насыщенными).

Лемма 2. *Пусть $\langle\alpha, \beta\rangle$ есть L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Тогда*

а) *если $\Diamond A_0 \in \alpha$, то $\langle\{A_0\} \cup \{A \mid \Box A \in \alpha\}, \{B \mid \Diamond B \in \beta\}\rangle$ есть L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$;*

б) *если $\Box B_0 \in \beta$, то $\langle\{A \mid \Box A \in \alpha\}, \{B_0\} \cup \{B \mid \Diamond B \in \beta\}\rangle$ есть L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$.*

Доказательство. а) Допустим, что
$$(A_0 \& A_1 \& \ldots \& A_k \supset C) \in L,\ (C \supset B_1 \vee \ldots \vee B_l) \in L$$

для некоторой формулы $C \in \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$, где $\Box A_1, \ldots, \Box A_k \in \alpha$; $\Diamond B_1, \ldots, \Diamond B_l \in \beta$. Тогда $(\Diamond A_0 \& \Box A_1 \& \ldots \& \Box A_k \supset \Diamond C) \in L$ и $(\Diamond C \supset \Diamond B_1 \vee \ldots \vee \Diamond B_l) \in L$, $\Diamond C \in \mathfrak{L}_0$, а значит, пара $\langle\alpha, \beta\rangle$ является L-отделимой в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$.

б) Допустим, что
$$(A_1 \& \ldots \& A_k \supset C) \in L,\ (C \supset B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_l) \in L,$$

где $C \in \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$; $\Box A_1, \ldots, \Box A_k \in \alpha$; $\Diamond B_1, \ldots, \Diamond B_l \in \beta$. Тогда $(\Box A_1 \& \ldots \& \Box A_k \supset \Box C) \in L$, $(\Box C \supset \Box B_0 \vee \Diamond B_1 \vee \ldots \vee \Diamond B_l) \in L$, $\Box C \in \mathfrak{L}_0$, т. е. пара $\langle \alpha, \beta \rangle$ является L-отделимой.

Лемма 3. *Любая L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, где $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ счетны, может быть расширена до L-насыщенной пары в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$, где $\mathfrak{L}_i'$ есть счетное несущественное расширение $\mathfrak{L}_i$ для $i = 1, 2$.*

Доказательство. Пусть $\langle \alpha, \beta \rangle$ есть L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Расширим языки $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ до $\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2'$ соответственно, добавив в сигнатуру счетное множество новых констант $\{c_0, c_1, \ldots\}$. Заметим сразу, что $\langle \alpha, \beta \rangle$ есть L-неотделимая пара в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$. В самом деле, если существует такая $C \in \mathfrak{L}_0' = \mathfrak{L}_1' \cap \mathfrak{L}_2'$, что $\alpha \vdash_L C$ и $C \vdash_L \beta$, то, заменяя новые константы переменными и связывая эти переменные кванторами общности, получим формулу $C' \in \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$ такую, что $\alpha \vdash_L C'$ и $C' \vdash_L \beta$.

Перенумеруем все формулы языков $\mathfrak{L}_1'$ и $\mathfrak{L}_2'$:

$$\mathfrak{L}_1' = \{A_0, A_1, \ldots\}, \mathfrak{L}_2' = \{B_0, B_1, \ldots\}.$$

Положим $T_0 = \alpha$, $F_0 = \beta$. Далее, на шаге $(2n+1)$ полагаем $F_{2n+1} = F_{2n}$ и, кроме того:

$T_{2n+1} = T_{2n} \cup \{A_n\}$, если пара $\langle T_{2n} \cup \{A_n\}, F_{2n} \rangle$ L-неотделима в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$ и формула A_n не начинается с квантора $\exists$;

$T_{2n+1} = T_{2n} \cup \{A_n, A_n'(c_k)\}$, если пара $\langle T_{2n} \cup \{A_n\}, F_{2n} \rangle$ L-неотделима в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$, $A_n = (\exists x) A_n'(x)$, c_k — первая константа, не входящая в формулы из $T_{2n} \cup \{A_n\} \cup F_{2n}$;

$T_{2n+1} = T_{2n}$, если пара $\langle T_{2n} \cup \{A_n\}, F_{2n} \rangle$ L-отделима.

На шаге $(2n+2)$ полагаем $T_{2n+2} = T_{2n+1}$ и, кроме того:

$F_{2n+2} = F_{2n+1}$, если пара $\langle T_{2n+1}, \{B_n\} \cup F_{2n+1} \rangle$ L-отделима в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$;

$F_{2n+2} = F_{2n+1} \cup \{B_n, B_n'(c_k)\}$, если $\langle T_{2n+1}, F_{2n+1} \cup \{B_n\} \rangle$ L-неотделима, $B_n = (\forall x) B_n'(x)$ и c_k есть первая константа, не входящая в $T_{2n+1} \cup F_{2n+1} \cup \{B_n\}$;

$F_{2n+2} = F_{2n+1} \cup \{B_n\}$ в остальных случаях. Имеем $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$, $F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$

Стандартным образом по индукции доказывается, что для любого n пара $\langle T_n, F_n \rangle$ является L-неотделимой в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$.

Положим теперь

$$T = \{A \in \mathfrak{L}_1' \mid \exists n \, (T_n \vdash_L A)\},$$

$$F = \{B \in \mathfrak{L}_2' \mid \exists n \, (B \vdash_L F_n)\}$$

и покажем, что $\langle T, F \rangle$ есть L-насыщенная пара в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$.

Очевидно, $T \in \mathrm{Th}(\mathfrak{L}_1', L)$, $F \in \mathrm{CTh}(\mathfrak{L}_2', L)$ и пара $\langle T, F \rangle$ L-неотделима в $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$.

По построению имеем

а) для любой формулы $A \in \mathfrak{L}_1'$:

$A \in T \Leftrightarrow \langle T \cup \{A\}, F \rangle$ есть L-неотделимая пара,

б) для любой формулы $B \in \mathfrak{L}_2'$:

$B \in F \Leftrightarrow \langle T, \{B\} \cup F \rangle$ есть L-неотделимая пара.

Действительно, пусть $A = A_k$. Тогда из неотделимости пары $\langle T \cup \{A\}, F \rangle$ следует неотделимость пары $\langle T_{2k} \cup \{A\}, F_{2k} \rangle$, поэтому $A \in T_{2k+1} \subseteq T$. С другой стороны, из $A \in T$ следует неотделимость пары $\langle T \cup \{A\}, F \rangle$ ввиду неотделимости пары $\langle T, F \rangle$. Аналогично доказывается б).

Пусть теперь $(A \vee B) \in T$. Допустим, что $A \notin T$, $B \notin T$. Тогда пары $\langle T \cup \{A\}, F\rangle$ и $\langle T \cup \{B\}, F\rangle$ являются отделимыми, поэтому

$$T, A \vdash_L C_1 \vdash_L F \quad \text{и} \quad T, B \vdash_L C_2 \vdash_L F$$

для некоторых $C_1, C_2 \in \mathfrak{L}_0' = \mathfrak{L}_1' \cap \mathfrak{L}_2'$. Отсюда

$$T, A \vee B \vdash_L C_1 \vee C_2 \vdash_L F, C_1 \vee C_2 \in \mathfrak{L}_0',$$

т. е. пара $\langle T, F\rangle$ является отделимой, вопреки доказанному. Таким образом, имеем $(A \vee B) \in T \Rightarrow (A \in T$ или $B \in T)$. Аналогично доказывается $(A \,\&\, B) \in F \Rightarrow (A \in F$ или $B \in F)$.

Наконец, пусть $(\exists x)A(x) \in T$, $(\exists x)A(x) = A_n$. Тогда пара $\langle T_{2n} \cup \cup \{A_n\}, F_{2n}\rangle$ является неотделимой; по построению $A(c_k) \in T_{2n+1} \subseteq T$ для некоторого k. Аналогично проверяется п. 6) определения насыщенной пары. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть L — любая из логик $K^{\text{п}}$, $T^{\text{п}}$, $\mathrm{K4}^{\text{п}}$, $\mathrm{S4}^{\text{п}}$ и пусть $(A_0 \supset B_0) \in L$. Тогда существует такая формула C, что $(A_0 \supset C) \in L$, $(C \supset B_0) \in L$ и*

$$\Omega^+(C) \subseteq \Omega^+(A_0) \cap \Omega^+(B_0), \ \Omega^-(C) \subseteq \Omega^-(A_0) \cap \Omega^-(B_0).$$

Доказательство. Допустим, что $(A_0 \supset B_0) \in L$ и не существует интерполянта C с указанными свойствами. Построим такую счетную семантическую модель $\langle W, R, D, \Vdash\rangle$, в которой опровергается формула $(A_0 \supset B_0)$.

Можем считать, ввиду леммы 1, что A_0, B_0 — приведенные формулы.

Пара $\langle\{A_0\}, \{B_0\}\rangle$ является L-неотделимой в $(\mathfrak{L}_1^0, \mathfrak{L}_2^0)$, где $\Omega^+(\mathfrak{L}_1^0) = \Omega^+(A_0), \Omega^-(\mathfrak{L}_1^0) = \Omega^-(A_0)$, $\Omega^+(\mathfrak{L}_2^0) = \Omega^+(B_0)$, $\Omega^-(\mathfrak{L}_2^0) = \Omega^-(B_0)$, $D(\mathfrak{L}_1^0) = D(\mathfrak{L}_2^0) = D(A_0 \supset B_0)$.

По лемме 3 пару $\langle\{A_0\}, \{B_0\}\rangle$ можно расширить до L-насыщенной пары $\langle T_0, F_0\rangle$ в $(\mathfrak{L}_1^*, \mathfrak{L}_2^*)$, где $\mathfrak{L}_i^*$ есть счетное несущественное расширение $\mathfrak{L}_i^0$ $(i = 1, 2)$. Полагаем

$$W_0 = \{\langle T_0, F_0\rangle\}.$$

Предположим, что W_k уже построено и все элементы W_k являются насыщенными парами в подходящих счетных языках. Пусть $\langle T, F\rangle \in W_k$ — любая насыщенная пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Для любой формулы $\Diamond A \in T$ добавляем к W_k насыщенную пару $\langle T', F'\rangle$ в подходящих счетных языках $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$ такую, что $T' \supseteq \{A\} \cup \{B \mid \Box B \in T\}$, $F' \supseteq \{B \mid \Diamond B \in F\}$, $D(\mathfrak{L}_1') = D(\mathfrak{L}_2') \subseteq D(\mathfrak{L}_1) = D(\mathfrak{L}_2)$, $\mathfrak{L}_i'$ есть несущественное расширение $\mathfrak{L}_i$. Кроме того, для любой формулы $\Box B \in F$ добавляем насыщенную пару $\langle T', F'\rangle$ в подходящих счетных $(\mathfrak{L}_1', \mathfrak{L}_2')$ такую, что $T' \supseteq \{A \mid \Box A \in T\}$, $F' \supseteq \{B\} \cup \cup \{A \mid \Diamond A \in F\}$, $\mathfrak{L}_i'$ есть несущественное расширение $\mathfrak{L}_i$. Такие пары $\langle T', F'\rangle$ существуют в силу лемм 2 и 3. Проводя построение для всех $\langle T, F\rangle \in W_k$, получаем множество $W_{k+1} \supseteq W_k$. Заметим, что так как все языки счетны, для любой $\langle T, F\rangle \in W_k$ добавляется не более чем счетное множество пар. Поэтому все W_k счетны. Полагаем, наконец, $W = \bigcup\limits_{k<\omega} W_k$.

Если $\langle T, F\rangle \in W$ — насыщенная в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, то

$$D(\langle T, F\rangle) \leftrightharpoons D(\mathfrak{L}_1) = D(\mathfrak{L}_2),$$

$$\langle T, F\rangle R \langle T', F'\rangle \leftrightharpoons D(\langle T, F\rangle) \subseteq D(\langle T', F'\rangle) \ \wedge$$

$$\wedge \ (\forall A \in \mathfrak{L}_1)(\Box A \in T \Rightarrow A \in T') \ \wedge \ (\forall B \in \mathfrak{L}_2)(\Diamond B \in F \Rightarrow B \in F').$$

Если $\langle T, F\rangle \in W$, P — n-местный предикатный символ в $\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2$,

$c_1, \ldots, c_n \in D(\langle T, F\rangle)$, то полагаем

$$\langle T, F\rangle \Vdash P(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow (P(c_1, \ldots, c_n) \in T \text{ или } \neg P(c_1, \ldots, c_n) \in F).$$

Тогда $\mathfrak{W} = \langle W, R, D, \Vdash\rangle$ есть семантическая модель логики $K^{\text{п}}$.

Если $L = T^{\text{п}} = K^{\text{п}} + (\Box A \supset A)$, то отношение R рефлексивно. В самом деле, так как $\Box A \vdash_{T^{\text{п}}} A$ и $B \vdash_{T^{\text{п}}} \Diamond B$, имеем для любой $\langle T, F\rangle \in W$:

$$\Box A \in T \Rightarrow A \in T, \quad \Diamond B \in F \Rightarrow B \in F.$$

Поэтому все аксиомы логики $L = T^{\text{п}}$ общезначимы в $\mathfrak{W}$.

Если $L = \mathrm{K}4^{\text{п}} = K^{\text{п}} + (\Box A \supset \Box\Box A)$, то отношение R транзитивно. В самом деле, $\Box A \vdash_L \Box\Box A$ и $\Diamond\Diamond B \vdash_L \Diamond B$. Поэтому для любых $\langle T, F\rangle$, $\langle T', F'\rangle$, $\langle T'', F''\rangle \in W$, таких что $\langle T, F\rangle R \langle T', F'\rangle$ и $\langle T', F'\rangle R \langle T'', F''\rangle$, имеем:

$$D(\langle T, F\rangle) \subseteq D(\langle T', F'\rangle) \subseteq D(\langle T'', F''\rangle),$$
$$\Box A \in T \Rightarrow \Box\Box A \in T \Rightarrow \Box A \in T' \Rightarrow A \in T'',$$
$$\Diamond B \in F \Rightarrow \Diamond\Diamond B \in F \Rightarrow \Diamond B \in F' \Rightarrow B \in F'',$$

т. е. $\langle T, F\rangle R \langle T'', F''\rangle$. Значит, в этом случае аксиома $\Box A \supset \Box\Box A$ общезначима в $\mathfrak{W}$.

Из доказанного выше следует, что при $L = \mathrm{S}4^{\text{п}}$ построенная модель $\mathfrak{W}$ является моделью для $\mathrm{S}4^{\text{п}}$.

Докажем теперь, что формула $(A_0 \supset B_0)$ опровергается в $\mathfrak{W}$; более точно, $\langle T_0, F_0\rangle \Vdash A_0$ и неверно $\langle T_0, F_0\rangle \Vdash B_0$. Это сразу вытекает из следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть $\langle T, F\rangle \in W$ есть L-насыщенная пара в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Тогда*

а) $(\forall A \in \mathfrak{L}_1)(A \in T \Rightarrow \langle T, F\rangle \Vdash A)$,

б) $(\forall B \in \mathfrak{L}_2)(B \in F \Rightarrow$ неверно $\langle T, F\rangle \Vdash B)$.

Доказательство а). Индукцией по построению приведенной формулы A. Для атомной формулы A — по определению. Пусть A есть отрицание атомной формулы, $A = \neg P(c_1, \ldots, c_n)$. Тогда из $A \in T$ следует $P(c_1, \ldots, c_n) \notin T$, в противном случае было бы $T \vdash_L \mathbf{0} \vdash_L F$, т. е. пара $\langle T, F\rangle$ была бы L-отделимой. Кроме того, $A \notin F$ ввиду насыщенности пары $\langle T, F\rangle$. Поэтому неверно $\langle T, F\rangle \Vdash P(c_1, \ldots, c_n)$), $\langle T, F\rangle \Vdash \neg P(c_1, \ldots, c_n)$.

Пусть $A = A_1 \mathbin{\&} A_2 \in T$. Тогда $T \vdash_L A_1$ и $T \vdash_L A_2$, а значит, $A_1 \in T$, $A_2 \in T$. По индукционному предположению $\langle T, F\rangle \Vdash A_1 \mathbin{\&} A_2$.

Пусть $A = A_1 \vee A_2 \in T$. Тогда $A_1 \in T$ или $A_2 \in T$ ввиду насыщенности $\langle T, F\rangle$. По индукционному предположению $\langle T, F\rangle \Vdash A_1 \vee A_2$. Аналогично рассматривается случай $A = (\exists x)A_1$.

Пусть $A = (\forall x)A_1(x)$. Тогда $A_1(c) \in T$ для любой $c \in D(\mathfrak{L}_1)$, так как $T \vdash_L A_1(c)$ и $A_1(c) \in \mathfrak{L}_1$. По индукционному предположению имеем $\langle T, F\rangle \Vdash A_1(c)$ для любой $c \in D(\langle T, F\rangle)$, а значит, $\langle T, F\rangle \Vdash (\forall x)A_1(x)$.

Пусть $A = \Box A_1 \in T$. Тогда для любой $\langle T', F'\rangle$ такой, что $\langle T, F\rangle R \langle T', F'\rangle$, имеем $A_1 \in T'$, а значит, $\langle T', F'\rangle \Vdash A_1$. Поэтому $\langle T, F\rangle \Vdash \Box A_1$.

Пусть, наконец, $A = \Diamond A_1 \in T$. По построению модели имеем $\langle T, F\rangle \in W_k$ для некоторого k. Тогда существует пара $\langle T', F'\rangle \in W_{k+1} \subseteq W$ такая, что $\langle T, F\rangle R \langle T', F'\rangle$ и $A_1 \in T'$. По индукционному предположению $\langle T', F'\rangle \Vdash A_1$, а значит, $\langle T, F\rangle \Vdash \Diamond A_1$. Лемма 4 а) доказана.

Доказательство п. б) проводится аналогично, индукцией по построению приведенной формулы B.

Таким образом, при $L = K^{\text{п}}$, $T^{\text{п}}$, $\mathrm{K}4^{\text{п}}$, $\mathrm{S}4^{\text{п}}$ все верные в L формулы общезначимы в построенной модели $\mathfrak{W}$, а формула $(A_0 \supset B_0)$ опровергается в $\mathfrak{W}$. Следовательно, $(A_0 \supset B_0) \notin L$. Теорема 1 доказана.

§ 2. ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ, СОДЕРЖАЩИЕ S4, И СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИЕ ЛОГИКИ

Очевидно, если предикатная модальная логика обладает интерполяционным свойством Линдона, то и ее пропозициональная часть тоже обладает этим свойством. Интерполяционная теорема Линдона в пропозициональной логике L формулируется точно так же, как и в предикатной системе; под $\Omega^{+}(\alpha)$ (соответственно $\Omega^{-}(\alpha)$) следует, естественно, понимать множество пропозициональных переменных, имеющих положительные (соответственно отрицательные) вхождения в формулы из α.

Используя обозначения из [4, 6], обозначим через $\Gamma(L_5, 1, 1)$ логику, которая характеризуется двухэлементной шкалой $\langle\{0, 1\}, R\rangle$, где $xRy \Leftrightarrow x \leqslant y$.

Теорема 2. *Логика* $\Gamma(L_5, 1, 1)$ *обладает интерполяционным свойством Линдона.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Точно так же, как и в § 1, для данной логики мы можем определить понятия L-неотделимой и L-насыщенной пары, опуская пункты, относящиеся к кванторам, и доказать леммы 2 и 3. Далее, заметим, что формула $(\Box\Diamond A \equiv \Diamond\Box A)$ верна в $\Gamma(L_5, 1, 1)$, и докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $L \supseteq S4$, $L \ni (\Box\Diamond A \equiv \Diamond\Box A)$ *и* $\langle T, F\rangle$ *есть L-насыщенная пара в* $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. *Тогда пара* $\langle T^*, F^*\rangle$, *где* $T^* = \{A \mid \Box\Diamond A \in T\}$, $F^* = \{B \mid \Diamond\Box B \in F\}$ *является L-насыщенной в* $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$ *и, сверх того, удовлетворяет для любых* $A \in \mathfrak{L}_1$, $B \in \mathfrak{L}_2$ *условиям*:

а) $A \in T^* \Leftrightarrow \Box A \in T^* \Leftrightarrow \Diamond A \in T^*$,

б) $B \in F^* \Leftrightarrow \Box B \in F^* \Leftrightarrow \Diamond B \in F^*$,

в) $\Box A \in T \Rightarrow A \in T^*$, $\Diamond B \in F \Rightarrow B \in F^*$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что T^* есть L-теория в $\mathfrak{L}_1$, а F^* есть L-котеория в $\mathfrak{L}_2$. Допустим, что $\langle T^*, F^*\rangle$ L-отделима в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Тогда существует $C \in \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$ такая, что $T^* \vdash_L C$ и $C \vdash_L F^*$. Следовательно, для некоторых $A_1, \ldots, A_k \in T^*$, $B_1, \ldots, B_l \in F^*$ имеем $(A_1 \& \ldots \& A_k \supset C) \in L$ и $(C \supset B_1 \vee \ldots \vee B_l) \in L$. Отсюда $\Box\Diamond A_i \in T$, $\Diamond\Box B_j \in F$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l)$ и

$$(\Box\Diamond(A_1 \& \ldots \& A_k) \supset \Box\Diamond C) \in L,\quad (\Diamond\Box C \supset \Diamond\Box(B_1 \vee \ldots \vee B_l)) \in L.$$

Учитывая $(\Box\Diamond(A_1 \& \ldots \& A_k)) \equiv (\Box\Diamond A_1 \& \ldots \& \Box\Diamond A_k) \in L$, $(\Box\Diamond C \equiv \Diamond\Box C) \in L$, $(\Diamond\Box(B_1 \vee \ldots \vee B_l) \equiv (\Diamond\Box B_1 \vee \ldots \vee \Diamond\Box B_l)) \in L$, получаем, что пара $\langle T, F\rangle$ отделима формулой $\Box\Diamond C \in \mathfrak{L}_0$, вопреки условию. Таким образом, пара $\langle T^*, F^*\rangle$ является L-неотделимой. Далее,

$$(A \vee B) \in T^* \Rightarrow \Box\Diamond(A \vee B) \in T \Rightarrow (\Box\Diamond A \vee \Box\Diamond B) \in T \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\Box\Diamond A \in T \text{ или } \Box\Diamond B \in T) \Rightarrow (A \in T^* \text{ или } B \in T^*).$$

Аналогично $(A \& B) \in F^* \Rightarrow (A \in F^*$ или $B \in F^*)$. Значит, пара $\langle T^*, F^*\rangle$ — насыщенная в $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Условия а) и б) вытекают из определения T^*, F^* и соотношений $(\Box\Box A \equiv \Box A) \in L$, $(\Diamond\Diamond A \equiv \Diamond A) \in L$, $(\Box\Diamond\Box A \equiv \Box\Diamond A) \in L$, $(\Diamond\Box\Diamond A \equiv \Diamond\Box A) \in L$.

Заметим, наконец, что

$$\Box A \in T \Rightarrow \Box\Diamond A \in T \Rightarrow A \in T^*,$$
$$\Diamond B \in F \Rightarrow \Diamond\Box B \in F \Rightarrow B \in F^*.$$

Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим следующую модель $\mathfrak{W} = \langle W, R, \Vdash\rangle$: $W = \{\langle T_0, F_0\rangle, \langle T_0^*, F_0^*\rangle\}$, где пара $\langle T_0, F_0\rangle$ определяется, как в доказательстве теоремы 1, и для $\pi_0, \pi_1 \in W : \pi_0 R \pi_1 \Leftrightarrow (\pi_0 = \pi_1$ или $\pi_0 = \langle T_0, F_0\rangle, \pi_1 = \langle T^*, F_0^*\rangle)$. Для $\langle T, F\rangle \in W$ и пропозициональной переменной $P \in \mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2$ полагаем

$$\langle T, F\rangle \Vdash P \leftrightharpoons (P \in T \text{ или } \neg P \in F).$$

Очевидно, $\mathfrak{W}$ есть модель логики $\Gamma(L_5, 1, 1)$.

Докажем теперь, что для нашей модели справедлива лемма, аналогичная лемме 4.

Лемма 6. *Пусть* $A \in \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}(T_0)$, $B \in \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}(F_0)$. *Тогда для любой* $\langle T, F\rangle \in W$:

а) $A \in T \Rightarrow \langle T, F\rangle \Vdash A$,

б) $B \in F \Rightarrow \langle T, F\rangle \Vdash B$.

Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 4, за исключением случаев $A = \Diamond A_1$ и $B = \Box B_1$. Рассмотрим эти случаи. Допустим, что $A = \Diamond A_1 \in T$ и утверждение а) верно для формулы A_1. Ввиду $(\Diamond A_1 \equiv (A_1 \vee \Diamond \Box A_1)) \in \Gamma(L_5, 1, 1)$ имеем $A_1 \in T$ или $\Diamond \Box A_1 \in T$; во втором случае получаем $\Box \Diamond A_1 \in T$ и $A_1 \in T^*$. Так как $T_0^{**} = T_0^*$, $F_0^{**} = F_0^*$, ввиду леммы 5 а, б, то множество W замкнуто относительно операции $*$. Таким образом, получаем

$$\langle T, F\rangle \in W \wedge \Diamond A_1 \in T \Rightarrow (\exists \langle T', F'\rangle)(\langle T, F\rangle R \langle T', F'\rangle \wedge A_1 \in T').$$

Учитывая индукционное предположение, заключаем, что для любой $\langle T, F\rangle \in W$

$$\Diamond A_1 \in T \Rightarrow \langle T, F\rangle \Vdash \Diamond A_1.$$

Для случая $B = \Box B_1$ надо использовать соотношение

$$(\Box B_1 \equiv (B_1 \,\&\, \Box \Diamond B_1)) \in \Gamma(L_5, 1, 1).$$

Из леммы 6 и построения модели сразу следует, что неверно $\langle T_0, F_0\rangle \Vdash A_0 \supset B_0$, что и требовалось. Теорема доказана.

Обозначим через $F_1(P)$ формулу $\Box(\Box \Diamond P \supset \Diamond \Box P)$, $F_2(P) \leftrightharpoons \Box(\Box \Diamond P \equiv \Diamond \Box P)$, $F_3(P) \leftrightharpoons \Box(\Box P \equiv \Diamond P)$. В соответствии с [1, 4, 6] обозначаем

$$\Gamma(\mathrm{Int}, 1, \omega) = \mathrm{S4} + F_1(P),$$

$$\Gamma(\mathrm{KC}, 1, \omega) = \mathrm{S4} + F_2(P),$$

$$\Gamma(\mathrm{Cl}, 1, 0) = \mathrm{S4} + F_3(P).$$

Мы выведем интерполяционную теорему Линдона для этих трех логик из интерполяционного свойства для логики S4.

Лемма 7. *Для любой формулы A, все переменные которой входят в список $P_1, \ldots, P_n$, и для $i = 1, 2, 3$ имеем*

$$F_i(P_1), \ldots, F_i(P_n) \vdash_{\mathrm{S4}} F_i(A).$$

Напомним, что $A_1, \ldots, A_n \vdash_L B$ есть сокращение для $(A_1 \,\&\ldots\&\, A_n \supset B) \in L$. Для доказательства леммы достаточно заметить, что для $i = 1, 2, 3$ справедливы соотношения:

$$F_i(P) \vdash_{\mathrm{S4}} F_i(\neg P),$$

$$F_i(P), F_i(Q) \vdash_{\mathrm{S4}} F_i(P \,\&\, Q),$$

$$\vdash_{\mathrm{S4}} F_1(P),$$

$$F_2(P) \vdash_{\mathrm{S4}} F_2(\Box P),\quad F_3(P) \vdash_{\mathrm{S4}} F_3(\Box P).$$

Из леммы 7 вытекает

Лемма 8. *Для любой формулы A, содержащей лишь переменные $P_1, \ldots, P_n$, и для $i = 1, 2, 3$:*

$$A \in \mathrm{S4} + F_i(P) \Leftrightarrow \vdash_{\mathrm{S4}} F_i(P_1) \,\&\ldots\&\, F_i(P_n) \supset A.$$

Доказательство. Пусть $A \in L = S4 + F_i(P)$. Тогда существует вывод $A_1, \ldots, A_k = A$ формулы A из аксиом логики $S4 + F_i(P)$. Можно преобразовать его в бесподстановочный вывод формулы A, т. е. такой вывод, где правило подстановки применяется лишь к аксиомам. Полученный вывод можно рассматривать как бесподстановочный вывод в S4 формулы A из формул $F_i(B_1), \ldots, F_i(B_m)$ для подходящих $B_1, \ldots, B_m$, причем можно предполагать, что $B_1, \ldots, B_m$ не содержат переменных, отличных от $P_1, \ldots, P_n$. Учитывая, что формула $F_i(P)$ начинается с символа $\Box$, получаем $\vdash_{S4} F_i(B_1) \& \ldots \& F_i(B_m) \supset A$. Из леммы 7 следует $\vdash_{S4} F_i(P_1) \& \ldots \& F_i(P_n) \supset A$.

Лемма 9. *Для любых формул A, B обозначим через $[A]^P_B$ результат подстановки B вместо P в A. Тогда*

а) *если P входит в A лишь положительно, то*

$$\vdash_{S4} A \supset [A]^P_1 \quad \text{и} \quad \vdash_{S4} [A]^P_0 \supset A;$$

б) *если P входит в A лишь отрицательно, то*

$$\vdash_{S4} A \supset [A]^P_0 \quad \text{и} \quad \vdash_{S4} [A]^P_1 \supset A.$$

Доказательство. Ввиду леммы 1 можем считать формулу A приведенной. Индукцией по построению формулы A нетрудно доказать более сильное утверждение:

Пусть $\vdash_{S4} B_1 \supset B_2$. Если P входит в A лишь положительно, то $\vdash_{S4} [A]^P_{B_1} \supset [A]^P_{B_2}$. Если P входит в A лишь отрицательно, то $\vdash_{S4} [A]^P_{B_2} \supset [A]^P_{B_1}$.

Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Теорема 3. *Логики*

$$\Gamma(\mathrm{Int}, 1, \omega) = S4 + \Box(\Box \Diamond P \supset \Diamond \Box P),$$
$$\Gamma(\mathrm{KC}, 1, \omega) = S4 + \Box(\Box \Diamond P \equiv \Diamond \Box P),$$
$$\Gamma(\mathrm{Cl}, 1, 0) = S4 + \Box(\Box P \equiv \Diamond P)$$

обладают интерполяционным свойством Линдона.

Доказательство. Пусть $L = S4 + F_i(P)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ и $(A_0 \supset B_0) \in L$. По лемме 8 получаем

$$\vdash_{S4} F_i(P_1) \& \ldots \& F_i(P_n) \supset (A_0 \supset B_0),$$

где $P_1, \ldots, P_n$ — все переменные формулы $(A_0 \supset B_0)$.

Индукцией по j построим формулы $(A_j \supset B_j)$ для $j \leqslant n$ так, чтобы для любого j выполнялись условия:

а) $\Omega^+(A_j) \cap \Omega^+(B_j) \subseteq \Omega^+(A_0) \cap \Omega^+(B_0)$,

б) $\Omega^-(A_j) \cap \Omega^-(B_j) \subseteq \Omega^-(A_0) \cap \Omega^-(B_0)$,

в) $(A_0 \supset A_j) \in L$, $(B_j \supset B_0) \in L$,

г) $\vdash_{S4} F_i(P_{j+1}) \& \ldots \& F_i(P_n) \supset (A_j \supset B_j)$.

Шаг $(j+1)$. Допустим, что A_j, B_j уже построены.

Случай 1. Переменная P_{j+1} не имеет положительных вхождений в A_j и отрицательных вхождений в B_j. Подставив в формулу г) $\mathbf{0}$ вместо P_{j+1}, получаем

$$\vdash_{S4} F_i(P_{j+2}) \& \ldots \& F_i(P_n) \supset ([A_j]_0^{P_{j+1}} \supset [B_j]_0^{P_{j+1}}.$$

По лемме 9 $\vdash_{S4} A_j \supset [A_j]_0^{P_{j+1}}$, $\vdash_{S4} [B_j]_0^{P_{j+1}} \supset B_j$.

Полагаем

$$A_{j+1} \leftrightharpoons [A_j]_0^{P_{j+1}}, \; B_{j+1} \leftrightharpoons [B_j]_0^{P_{j+1}}.$$

Условия а) — в) выполняются вследствие предположения индукции.

Случай 2. Переменная P_{j+1} не имеет положительных вхождений в B_j и отрицательных вхождений в A_j. Полагаем

$$A_{j+1} \leftrightharpoons [A_j]_1^{P_{j+1}},\ B_{j+1} \leftrightharpoons [B_j]_1^{P_{j+1}}.$$

Условия а) — г) доказываются аналогично случаю 1.

Случай 3. Случаи 1, 2 не выполняются и $P_{j+1} \notin \Omega^+(B_j) \cap \Omega^-(B_j)$. Полагаем

$$A_{j+1} \leftrightharpoons A_j \,\&\, F_i(P_{j+1}),\ B_{j+1} \leftrightharpoons B_j.$$

Проверим условия а) — г). Пусть $P_{j+1} \in \Omega^+(A_{j+1}) \cap \Omega^+(B_{j+1})$. Тогда $P_{j+1} \in \Omega^+(B_j)$, а значит, $P_{j+1} \notin \Omega^-(B_j)$. Поскольку случай 1 не имеет места, получаем $P_{j+1} \in \Omega^+(A_j)$, а значит, $P_{j+1} \in \Omega^+(A_j) \cap \Omega^+(B_j)$, и условие а) выполнено. Аналогично доказывается условие б), так как случай 2 не имеет места. Так как $L = \mathrm{S4} + F_i(P)$, имеем $(A_j \supset A_{j+1}) \in L$, и ввиду индукционного предположения $(A_0 \supset A_{j+1}) \in L$. Так как формула $F_i(P_{j+2}) \&\ldots \ldots \& F_i(P_n) \supset (F_i(P_{j+1}) \,\&\, A_j \supset B_j)$ равносильна в S4 формуле

$$F_i(P_{j+1}) \&\ldots\& F_i(P_n) \supset (A_j \supset B_j),$$

получаем условие г).

Случай 4. $P_{j+1} \in \Omega^+(B_j) \cap \Omega^-(B_j)$. Полагаем

$$A_{j+1} \leftrightharpoons A_j,\ B_{j+1} \leftrightharpoons (F_i(P_{j+1}) \supset B_j).$$

Имеем $\Omega^+(B_{j+1}) = \Omega^+(B_j)$, $\Omega^-(B_{j+1}) = \Omega^-(B_j)$, поэтому условия а), б) выполняются по индукционному предположению. Условия в), г) доказываются аналогично случаю 3.

Рассмотрим теперь формулу $(A_n \supset B_n)$. По условию г) $\vdash_{\mathrm{S4}}(A_n \supset B_n)$. По теореме 1 существует интерполянт Линдона C для формулы $(A_n \supset B_n)$ в S4. Из условий а)—в) следует, что C является одновременно интерполянтом Линдона для $(A_0 \supset B_0)$ в L. Теорема доказана.

Интерполяционное свойство Линдона для суперинтуиционистских логик можно легко получить из свойства Линдона для их модальных напарников. Напомним [7, 8], что существует перевод T из интуиционистской логики Int в модальную логику S4, т. е. $A \in \mathrm{Int} \Leftrightarrow T(A) \in \mathrm{S4}$ для любой пропозициональной формулы A. Этот перевод определяется следующим образом:

$$T(P) = \Box P \text{ для пропозициональной переменной } P,$$

$$T(0) = 0,\ T(1) = 1,$$

$$T(A \,\&\, B) = T(A) \,\&\, T(B),\ T(A \vee B) = T(A) \vee T(B),$$

$$T(A \supset B) = \Box(\neg T(A) \vee T(B)),\ T(\neg A) = \Box\neg T(A).$$

Для любой нормальной модальной логики $M \supseteq \mathrm{S4}$ обозначим (см. [9]) через $\rho(M)$ суперинтуиционистский фрагмент логики M, т. е. $\rho(M) = \{A \mid T(A) \in M\}$.

Предложение. *Пусть M — нормальная модальная логика, содержащая* S4, *в которой верна интерполяционная теорема Линдона. Тогда в $\rho(M)$ также верна интерполяционная теорема Линдона.*

Доказательство. Пусть $(A \supset B) \in \rho(M)$. Тогда $(T(A) \supset T(B)) \in M$ и существует интерполянт Линдона C для формулы $(T(A) \supset T(B))$. Имеем $(T(A) \supset C) \in M$, $(C \supset T(B)) \in M$. Так как $(T(A) \equiv \Box T(A)) \in M$, то $(T(A) \supset \Box C) \in M$ и $(\Box C \supset T(B)) \in M$, т. е. $\Box C$ также является интерполянтом Линдона для формулы $(T(A) \supset T(B))$. Подставим теперь вместо каждой переменной P формулу $\Box P$. Результаты подстановки в $T(A)$ и в $T(B)$ будут эквивалентны в S4 самим формулам $T(A)$ и $T(B)$ соответственно; обозначим через C' результат указанной подстановки в формулу C, получаем

$$(T(A) \supset \Box C') \in M \text{ и } (\Box C' \supset T(B)) \in M.$$

По лемме из [10] существует такая формула E без модальностей, что $\vdash_{S4} \Box C' \equiv T(E)$; при этом $\Omega^+(C') = \Omega^+(T(E))$ и $\Omega^-(C') = \Omega^-(T(E))$. Отсюда получаем $(A \supset E) \in \rho(M)$ и $(E \supset B) \in \rho(M)$. Заметим, что при переводе T положительные вхождения переменных переходят в положительные, а отрицательные — в отрицательные, т. е. $\Omega^+(A) = \Omega^+(T(A))$ и $\Omega^-(A) = \Omega^-(T(A))$. Поэтому формула E является интерполянтом Линдона для формулы $(A \supset B)$ в $\rho(M)$. Предложение доказано.

Из этого предложения, а также из теорем 1—3 сразу вытекает

Теорема 4. *Следующие суперинтуиционистские логики обладают интерполяционным свойством Линдона*:

$$L_1 = \mathrm{Int} — \textit{интуиционистская логика},$$
$$L_2 = \mathrm{KC} = \mathrm{Int} + (\neg A \vee \neg\neg A),$$
$$L_5 = \mathrm{KC} + (A \vee (A \supset (B \vee \neg B))),$$
$$L_7 = \mathrm{Cl} = \mathrm{Int} + (A \vee \neg A),$$
$$L_8 = \mathrm{Пр} = \mathrm{Int} + (A \mathbin{\&} \neg A).$$

Напомним [11, 12], что существует точно 8 суперинтуиционистских логик, обладающих интерполяционным свойством Крейга. Остается открытым вопрос, существует ли суперинтуиционистская логика со свойством Крейга, не обладающая интерполяционным свойством Линдона.

§ 3. МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ СО СВОЙСТВОМ КРЕЙГА, НЕ ОБЛАДАЮЩИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ СВОЙСТВОМ ЛИНДОНА

В соответствии с [4, 6] через $\Gamma(\mathrm{Cl}, 2, 0)$ обозначаем логику, которая характеризуется двуэлементной шкалой $Q_1 = \langle\{0, 1\}, R_1\rangle$, где $0R_1R0$; $\Gamma(L_3, 1, 2)$ полна относительно класса $K(L_3, 1, 2)$ шкал с единственным внутренним сгустком, мощность которого не превосходит 2, и с одноэлементными внешними сгустками; $\Gamma(L_4, 1, 2)$ полна относительно класса шкал из $K(L_3, 1, 2)$, имеющих не более двух внешних сгустков; $\Gamma(L_5, 1, 2)$ характеризуется трехэлементной шкалой $Q_2 = \langle\{0, 1, 2\}, R_2\rangle$ с двухэлементным внутренним и одноэлементным внешним сгустками. Напомним [4], что все эти логики обладают интерполяционным свойством Крейга.

Теорема 5. *Логики* $\Gamma(\mathrm{Cl}, 2, 0)$, $\Gamma(L_3, 1, 2)$, $\Gamma(L_4, 1, 2)$, $\Gamma(L_5, 1, 2)$ *не обладают интерполяционным свойством Линдона.*

Доказательство. а) Рассмотрим $M = \Gamma(\mathrm{Cl}, 2, 0)$. Нетрудно проверить, что формула

$$\Diamond P \mathbin{\&} \neg P \mathbin{\&} \Box(\neg P \vee Q) \supset \neg Q \vee \Box Q$$

верна в шкале Q_1 и, следовательно, принадлежит M. Допустим, что для этой формулы существует интерполянт Линдона C, т. е.

$$(\Diamond P \mathbin{\&} P \mathbin{\&} \Box(\neg P \vee Q) \supset C) \in M,$$
$$(C \supset \neg Q \vee \Box Q) \in M,$$
$$\Omega^+(C) = \{Q\},\ \Omega^-(C) = \emptyset.$$

По лемме 1 можно считать C приведенной формулой.

Рассмотрим следующее означивание v_1 в топобулевой алгебре $\mathscr{P}(Q_1)$ всех подмножеств шкалы Q_1: $v_1(P) = v_1(Q) = \{0\}$. Ввиду $\mathscr{P}(Q_1) \models M$ получаем

$$v_1(\Diamond P \mathbin{\&} \neg P \mathbin{\&} \Box(\neg P \vee Q)) = Q_1 \mathbin{\&} \{1\} \mathbin{\&} Q_1 = \{1\} \leqslant v_1(C),$$
$$v_1(C) \leqslant v_1(\neg Q \vee \Box Q) = \{1\} \cup \emptyset = \{1\},$$

т. е. $v_1(C) = \{1\}$.

С другой стороны, множество $S_1 = \{\varnothing, \{0\}, Q_1\}$ содержит $v_1(Q)$ и замкнуто относительно &, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$. Поскольку C не содержит отрицательных вхождений Q, то $v_1(C) \in S_1$, а значит, $v_1(C) \neq \{1\}$. Полученное противоречие доказывает, что интерполянта C не существует.

б) Пусть M — любая из логик $\Gamma(L_3, 1, 2)$, $\Gamma(L_4, 1, 2)$, $\Gamma(L_5, 1, 2)$. Тогда M содержит формулу

$$\Box\Diamond\Box P \,\&\, \Diamond(P \,\&\, \neg\Box P) \,\&\, \neg P \supset \Diamond(P \,\&\, R) \vee \Box\neg R \vee R,$$

так как она верна в любой шкале из класса $K(L_3, 1, 2)$. Допустим, что для этой формулы существует интерполянт Линдона C, т. е.

$$(\Box\Diamond\Box P \,\&\, \Diamond(P \,\&\, \neg\Box P) \,\&\, \neg P \supset C) \in M,$$

$$(C \supset \Diamond(P \,\&\, R) \vee \Box\neg R \vee R) \in M,$$

$$\Omega^+(C) = \{P\},\ \Omega^-(C) = \phi.$$

Рассмотрим означивание v_2 в топобулевой алгебре $\mathscr{P}(Q_2)$: $v_2(P) = \{1, 2\}$, $v_2(R) = \{0\}$. Тогда, так как $\mathscr{P}(Q_2) \models M$, имеем

$$v_2(\Box\Diamond\Box P \,\&\, \Diamond(P \,\&\, \neg\Box P) \,\&\, \neg P) = Q_2 \,\&\, \{0, 1\} \,\&\, \{0\} = \{0\} \leqslant v_2(C),$$

$$v_2(C) \leqslant v_2(\Diamond(P \,\&\, R) \vee \Box\neg R \vee R) = \{2\} \cup \{0\} = \{0, 2\}.$$

С другой стороны, $v_2(P) \in S_2 = \{\phi, \{2\}, \{1, 2\}, Q_2\}$, и множество S_2 замкнуто относительно операций &, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$. Так как C не содержит отрицательных вхождений P, то $v_2(C) \in S_2$, что противоречит ранее полученному соотношению $\{0\} \leqslant v_2(C) \leqslant \{0, 2\}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Максимова Л. Л.** Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр.— Алгебра и логика, 1979, т. 18, № 5, с. 556—586.
2. **Gabbay D.** Craig's interpolation theorem for modal logics.— In: Conference in mathematical logic — London, 70. Berlin a. o., Springer — Verlag, 1972, p. 111—127.
3. **Schumm G. F.** Interpolation in S5 and related systems.— Reports Math. Logic, 1976, v. 6, p. 107—110.
4. **Максимова Л. Л.** Интерполяционные теоремы в модальных логиках. Достаточные условия.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 2, с. 194—213.
5. **Lyndon R.** An interpolation theorem in the predicate calculus.— Pacific J. Math., 1959, v. 9, N 1, p. 129—142.
6. **Максимова Л. Л.** Об одной классификации модальных логик.— Алгебра и логика, 1979, т. 18, № 3, с. 328—340.
7. **Gödel K.** Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkül.— Epgebnisse math. Koll., 1933, Bd. 4, S. 39—40.
8. **McKinsey J., Tarski A.** Some theorems about the sententional calculi of Lewis and Heyting.— J. Symbolic Logic, 1948, v. 13, N 1, p. 1—15.
9. **Максимова Л. Л., Рыбаков В. В.** О решетке нормальных модальных логик.— Алгебра и логика, 1974, т. 13, № 2, с. 188—216.
10. **Maksimova L.** Interpolation properties of superintuitionistic logics.— Studia Logica, 1979, v. 38, N 4, p. 419—428.
11. **Максимова Л. Л.** Интерполяционная теорема Крейга и амальгамируемые многообразия.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1281—1284.
12. **Максимова Л. Л.** Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр.— Алгебра и логика, 1977, т. 16, № 6, с. 643—681.

КЛАССИФИКАЦИЯ СТЕПЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ПО ЭЛЕМЕНТАРНЫМ СВОЙСТВАМ

А. Г. МЯСНИКОВ, В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ

Цель настоящей статьи — показать тесную связь между проблемами изоморфизма и элементарной эквивалентности в классе степенных нильпотентных групп. По модулю проблемы изоморфизма получена, в частности, полная классификация по элементарным свойствам (свойствам, которые могут быть записаны на языке узкого исчисления предикатов) нильпотентных $\mathbf{Q}$-групп конечного ранга. Эта классификация и результат Р. А. Саркисяна [1] о разрешимости проблемы изоморфизма в классе таких групп позволили доказать алгоритмическую разрешимость проблемы элементарной эквивалентности для нильпотентных $\mathbf{Q}$-групп конечного ранга. Основным инструментом при получении модельных результатов служит теорема 5.2, гарантирующая при некоторых естественных ограничениях существование степенного изоморфизма между абстрактно изоморфными группами.

Все результаты этой статьи справедливы в соответствующих формулировках и для рациональных алгебр в силу известной связи, установленной А. И. Мальцевым [2], между категориями нильпотентных $\mathbf{Q}$-групп и рациональных нильпотентных алгебр.

До сих пор классификация по элементарным свойствам известна была только для двух классов групп: абелевых групп [3] — теорема В. Шмелевой, и классических линейных групп [4] — результаты А. И. Мальцева. В частности, хорошо известно, что любые две абелевы $\mathbf{Q}$-группы элементарно эквивалентны.

§ 1. СТЕПЕННЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

В этом параграфе мы повторим некоторые определения и факты, касающиеся степенных групп; часть из них содержится в работах [5, 6].

Как обычно, символами $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ будем обозначать множество натуральных чисел, кольцо целых чисел, поле рациональных чисел.

Пусть $\mathfrak{o}$ — биномиальное кольцо, т. е. область целостности, содержащая $\mathbf{Z}$ в качестве подкольца и вместе с каждым элементом $\lambda \in \mathfrak{o}$ все биномиальные коэффициенты:

$$\binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!},\ n \in \mathbf{N},$$

Определение. Нильпотентная группа G ступени нильпотентности m называется $\mathfrak{o}$-*степенной*, если для любых x из G и λ из $\mathfrak{o}$ однозначно определен элемент $x^\lambda \in G$, причем выполняются следующие аксиомы ($x, y, x_1, \ldots, x_n$ — произвольные элементы из G; λ, μ — произвольные элементы из $\mathfrak{o}$):

I. $x^1 = x,\ x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu,\ x^{\lambda\mu} = (x^\lambda)^\mu$;

II. $y^{-1}x^\lambda y = (y^{-1}xy)^\lambda$;

III. $x_1^\lambda x_2^\lambda \cdot \ldots \cdot x_n^\lambda = (x_1 \ldots x_n)^\lambda \tau_2(x)^{\binom{\lambda}{2}} \ldots \tau_m(x)^{\binom{\lambda}{m}}$,

где $\tau_k(x)$ — k-е слово Петреску от $x_1, \ldots, x_n$. Опишем более подробно слова Петреску. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — базис свободной группы F. Для каждого натурального k k-е слово Петреску $\tau_k(x_1, \ldots, x_n) = \tau_k(x)$ определяется рекуррентно из соотношения

$$x_1^k \ldots x_n^k = \tau_1(x)^k \tau_2(x)^{\binom{k}{2}} \ldots \tau_{k-1}(x)^{\binom{k}{k-1}} \tau_k(x).$$

В частности, $\tau_1(x) = x_1 \ldots x_n$.

Через $\gamma_i(G)$, $Z_i(G)$ будем обозначать соответственно i-й член нижнего, верхнего центрального ряда группы G, $\gamma_1(G) = G$, $Z_1(G) = Z(G)$ — центр группы G. Хорошо известно (см., например, [7]), что для любого натурального k $\tau_k(x) \in \gamma_k(F)$.

Если группа G абелева, то аксиомы I—III сводятся к обычным аксиомам модуля над кольцом о, т. е. абелевы о-степенные группы — это в точности модули над кольцом о.

Подгруппу о-степенной группы G будем называть *о-степенной подгруппой*, если она замкнута относительно возведения в степень λ, $\lambda \in$ о. Пусть H — подгруппа G, ее о-замыкание $H_о$ есть наименьшая о-степенная подгруппа группы G, содержащая H. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — элементы группы G. Запись гр$(g_1, \ldots, g_n)_о$ означает о-замыкание подгруппы, порожденной элементами $g_1, \ldots, g_n$. В случае гр$(g_1, \ldots, g_n)_о = G$ элементы $g_1, \ldots, g_n$ будем называть *порождающими группы* G, а группу G — конечно порожденной степенной группой. Если H — нормальная о-степенная подгруппа группы G, то на множестве смежных классов G по H естественным образом вводится структура о-степенной группы.

Отметим несколько полезных формул. Пусть G — о-степенная группа, x, y из G, λ из о. Следствием аксиомы III является равенство

$$[x, y^\lambda] = [x, y]^\lambda \tau_2^{\binom{\lambda}{2}}(y[y^{-1}, x], y) \ldots \tau_m^{\binom{\lambda}{m}}(y[y^{-1}, x], y). \tag{1}$$

В самом деле, $[x, y^\lambda] = x^{-1}y^{-\lambda}xy^\lambda = (y[y^{-1}, x])^\lambda y^\lambda$, и применяем аксиому III. Если $x \in \gamma_k(G)$, $y \in \gamma_l(G)$, то как следствие формулы (1) получаем

$$[x, y^\lambda] \equiv [x, y]^\lambda \bmod \gamma_{k+l+l}(G).$$

Совершенно аналогично

$$[x^\lambda, y] \equiv [x, y]^\lambda \bmod \gamma_{k+l+k}(G),$$

k, $l \geqslant 1$, поэтому, объединяя предыдущие сравнения,

$$[x, y^\lambda] \equiv [x^\lambda, y] \equiv [x, y]^\lambda \operatorname{mod}_{k+l+1}(G). \tag{2}$$

Пусть теперь $[x, y] = z$, где $z \in Z(G)$. Тогда с помощью формулы (1) получаем равенство

$$[x^\lambda, y] = [x, y^\lambda] = z^\lambda. \tag{3}$$

При помощи формул (1)—(3) легко доказываются две следующие леммы из работы [5].

Лемма 1.1. *Пусть H — подгруппа о-степенной группы G. Классы нильпотентности подгрупп H и $H_о$ совпадают.*

Лемма 1.2. *Пусть G — о-степенная группа, тогда $\gamma_i(G)$ и $Z_i(G)$ являются о-степенными подгруппами группы G.*

Следующая лемма иллюстрирует механизм возведения в степень и будет полезна при изучении гомоморфизмов степенных групп.

Лемма 1.3. *Для любых n, $m \in \mathbf{N}$ существует такое слово*

$$v_{n,m}(x_1, \ldots, x_n, t) = x_{i_1}^{f_1(t)} x_{i_2}^{f_2(t)} \ldots x_{i_s}^{f_s(t)},$$

где $x_{i_k} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, $f_1(t), \ldots, f_s(t)$ — многочлены над $\mathbf{Q}$ от переменной t, что для любой о-степенной группы G ступени нильпотентности $\leqslant m$ и для любых $g_1, \ldots, g_n$ из G, $\lambda \in$ о выполняется равенство

$$(g_1 \ldots g_n)^\lambda = v_{n,m}(g_1, \ldots, g_n, \lambda).$$

Доказательство проведем индукцией по ступени нильпотентности m. Если $m=1$, то $v_{n,1}(x_1, \ldots, x_n, t) = x_1^t \ldots x_n^t$. Пусть G — произвольная о-степенная группа ступени нильпотентности m. По аксиоме III для любых $g_1, \ldots, g_n$ из G, $\lambda \in$ о имеем равенство

$$(g_1 \ldots g_n)^\lambda = g_1^\lambda \ldots g_n^\lambda \tau_m(g)^{-\binom{\lambda}{m}} \ldots \tau_2(g)^{-\binom{\lambda}{2}},$$

где, как обычно $g = (g_1, \ldots, g_n)$. По лемме 1.2 элементы $\tau_m(g)^{-\binom{\lambda}{m}}, \ldots$ $\ldots, \tau_2(g)^{-\binom{\lambda}{2}}$ лежат в коммутанте группы G. По индукции можно считать, что $\tau_k(g)^{-\binom{\lambda}{n}}$ переписываются при помощи слов $v_{r_k, m-1}(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{r_k}, t)$, где r_k — длина слова $\tau_k(x)$, $2 \leqslant k \leqslant m$. Если в слове $\tau_k(x)$ на i-м и j-м местах переменные совпадают, то отождествим переменные x_i и x_j в слове $v_{r_k, m-1}(x_1, \ldots, x_{r_k}, t)$; полученные слова обозначим через $W_k(x_1, \ldots, x_n, t)$. Ясно, что

$$(g_1, \ldots, g_n)^\lambda = v_{n,1}(g_1, \ldots, g_n, \lambda) W_m\left(g_1, \ldots, g_n, \binom{\lambda}{m}\right) \ldots W_2\left(g_1, \ldots, g_m \binom{\lambda}{2}\right).$$

Для завершения доказательства осталось в каждом многочлене — показателе слова $W_k(x_1, \ldots, x_n, t)$ произвести замену переменной t на многочлен $\binom{t}{k} = \frac{t(t-1) \ldots (t-k+1)}{k!}$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть G — о-степенная группа, G_1, G_2 — о-степенные подгруппы группы G. Тогда группа G_3, порожденная подгруппами G_1 и G_2, также является о-степенной подгруппой группы G.*

Доказательство. Подгруппа G_3 состоит из всевозможных произведений вида $g_1, \ldots, g_n$, где каждый сомножитель g_i лежит либо в подгруппе G_1, либо в подгруппе G_2. Достаточно доказать, что для любого произведения такого вида и любого $\lambda \in$ о элемент $(g_1 \ldots g_n)^\lambda$ принадлежит подгруппе G_3. По лемме 1.3

$$(g_1, \ldots, g_n)^\lambda = v_n(g_1, \ldots, g_n, \lambda) = a_{i_1}^{f_1(\lambda)} \ldots a_{i_s}^{f_s(\lambda)}, \; a_i \in \{g_1, \ldots, g_n\}.$$

G_1 и G_2 — о-степенные группы, поэтому принадлежность элемента $a_{i_1}^{f_1(\lambda)} \ldots a_{i_n}^{f_n(\lambda)}$ подгруппе G_3 очевидна. Следствие доказано.

Порядком элемента g о-степенной группы назовем идеал $I_g = \{\lambda \in$ $\in$ о $| g^\lambda = 1\}$. Говорят, что о-степенная группа G *не имеет о-кручения*, если порядок любого неединичного элемента из G равен нулевому идеалу. В частности, если о — поле, то любая о-степенная группа не имеет о-кручения.

Подмножество M из G называется *о-изолированным*, если из включения $x^\lambda \in M$ следует $x \in M$ для любых $x \in M$, $\lambda \neq 0$ из о. Очевидно, фактор-группа по некоторой нормальной о-степенной подгруппе не имеет кручения тогда и только тогда, когда эта подгруппа о-изолирована в G.

Лемма 1.4. *Пусть G — о-степенная группа без о-кручения. Тогда*

а) *равенство $x^\lambda = y^\lambda$, $\lambda \neq 0$ влечет $x = y$;*

б) *если $[x^\lambda, y^\mu] = 1$, то $[x, y] = 1$.*

Доказательство см. [5].

Следствие. *В о-степенной группе без о-кручения следующие множества о-изолированы: $C_G(N)$ — централизатор любого подмножества N из G, $Z_i(G)$ — любой член верхнего центрального ряда группы G.*

Заметим, что члены нижнего центрального ряда о-степенной группы не всегда о-изолированы. Однако в случае, когда о — поле, любая о-степенная подгруппа о-изолирована.

Упорядоченный набор элементов $u_1, \ldots, u_n$ назовем *мальцевской базой* о-степенной группы G, если 1) каждый элемент x из G можно единственным способом представить в виде

$$x = u_1^{t_1(x)} \dots u_n^{t_n(x)},\ t_i(x) \in \mathfrak{o};$$

2) пусть $G_i = \text{гр}(u_i, u_{i+1}, \dots, u_n)_{\mathfrak{o}}$, тогда цепочка подгрупп $G = G_1 \geqslant G_2 \geqslant \dots \geqslant G_n \geqslant 1$ образует центральный ряд группы G. Элементы $t_1(x), \dots, t_n(x)$ кольца $\mathfrak{o}$ называется *координатами элемента x в базе $u_1, \dots, u_n$*. Наряду с записью $x = u_1^{t_1(x)} \dots u_n^{t_n(x)}$ будем также использовать векторную запись $x = u^{t(x)}$.

Если в п. 1) определения мальцевской базы отказаться от требования единственности, то получим *слабую мальцевскую базу группы G*.

Теорема 1.1. *Каждая конечно порожденная степенная группа G имеет слабую мальцевскую базу.*

Доказательство следует непосредственно из леммы 1.5.

Лемма 1.5. *Пусть $G = \text{гр}(y_1, \dots, y_n)_{\mathfrak{o}}$, тогда каждый элемент группы G представим в виде $v_1^{\xi_1} \dots v_m^{\xi_m}$, где $\xi_i \in \mathfrak{o}$ и v_i — i-й базисный коммутатор от $y_1, \dots, y_n$.*

Доказательство индукцией по ступени нильпотентности группы G.

Координаты произведения $t_i(xy)$ элементов x и y в фиксированной слабой мальцевской базе группы G являются функциями от $2n$ переменных $t_k(x)$, $t_s(y)$, если элементы x и y пробегают всю группу G. Если $\lambda \in \mathfrak{o}$, то координаты $t_i(x^\lambda)$ являются функциями от $n+1$ переменной $t_i(x)$, λ. Обозначим через $\mathfrak{o}_{\mathbf{Z}}$ кольцо частных кольца $\mathfrak{o}$, в котором обращаются элементы из $\mathbf{Z}$.

Теорема 1.2. Пусть G — $\mathfrak{o}$-*степенная группа со слабой мальцевской базой $u_1, \dots, u_n$ и координатами $t_1(x), \dots, t_n(x)$. Тогда координатные функции умножения и возведения в степень являются многочленами над кольцом $\mathfrak{o}_{\mathbf{Z}}$. Более точно, если $x, y \in G$, $\lambda \in \mathfrak{o}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то $t_i(xy)$ — многочлен над $\mathfrak{o}_{\mathbf{Z}}$ от $\{t_k(x), t_k(y) \mid k < i\} + t_i(x) + t_i(y)$, $t_i(x^\lambda)$ — многочлен над $\mathfrak{o}_{\mathbf{Z}}$, от λ и $\{t_k(x) \mid k < i\} + \lambda t_i(x)$.*

Для доказательства теоремы 1.2 нужно дословно повторить доказательство теоремы 6.5 из [6], заменяя кольцо $\mathbf{Z}$ на кольцо $\mathfrak{o}$.

Следствие. *Пусть $v(z_1, \dots, z_n)$ слово от переменных $z_1, \dots, z_n$. Подстановка вместо z_i элемента $x_i = u^{t(x_i)}$ группы G определяет в группе G элемент $w = v(x_1, \dots, x_n)$. Тогда координаты $t_i(w)$ элемента w вычисляются при помощи некоторых многочленов над $\mathfrak{o}_{\mathbf{Z}}$, которые будем обозначать $h_i(w)$.*

Пусть $G = \text{гр}(y_1, \dots, y_n)_{\mathfrak{o}}$ — конечно порожденная $\mathfrak{o}$-степенная группа. Через G_0 будем обозначать подгруппу $\text{гр}(y_1, \dots, y_n)_{\mathbf{Z}}$, если кольцо $\mathfrak{o}$ не содержит поля $\mathbf{Q}$ в качестве подкольца, и подгруппу $\text{гр}(y_1, \dots, y_n)_{\mathbf{Q}}$ — в противном случае. Ясно, что подгруппа G_0 зависит от выбора порождающих $y_1, \dots, y_n$ группы G.

Лемма 1.6. *Пусть $u_1, \dots, u_n$ — слабая мальцевская база группы G_0. Тогда она является слабой мальцевской базой группы G.*

Доказательство. Пусть $G_i = \text{гр}(u_i, u_{i+1}, \dots, u_n)_{\mathfrak{o}}$. Докажем, что ряд подгрупп $G = G_1 \geqslant G_2 \geqslant \dots \geqslant G_n \geqslant 1$ является центральным рядом группы G.

Подгруппы G_i нормальны в G. Действительно, достаточно доказать, что для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{o}$ элемент $u_j^{-\beta} u_i^\alpha u_j^\beta$ принадлежит подгруппе G_i. Имеем

$$u_j^{-\beta} u_i^\alpha u^\beta = (u_i [u_i, u_j^\beta])^\alpha.$$

Распишем коммутатор $[u_i, u_j^\beta]$ по формуле (1)

$$[u_i, u_j^\beta] = [u_i, u_j]^\beta \tau_2 (u_j [u_j^{-1}, u_i], u_j)^{\binom{\beta}{2}} \dots \tau_m (u_j [u_j^{-1}, u_i], u_j)^{\binom{\beta}{m}}.$$

Принадлежность правой части этого равенства подгруппе G_i очевидна.

Докажем, что $[G_i, G] \leqslant G_{i+1}$. Переходя к фактор-группе $\overline{G} = G/G_{i+1}$, имеем $[\overline{u}_i, \overline{u}_j] = 1$ в $\overline{G}$, но тогда $\left[\overline{u}_i^{\alpha}, \overline{u}_j^{\beta}\right] = [\overline{u}_i, \overline{u}_j]^{\alpha\beta} = 1$ для любого u_j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Для окончания доказательства леммы осталось заметить, что $G_i/G_{i+1} \simeq \text{гр}(u_i)_{\text{o}}$.

Лемма 1.7. *Пусть $G = \text{гр}(y_1, \ldots, y_n)_{\text{o}}$, $H = \text{гр}(x_1, \ldots x_n)_{\text{o}}$ — конечно порожденные* o*-степенные группы. Если $u_1, \ldots, u_k$ — слабая мальцевская база группы G_0, $v_1, \ldots, v_k$ — слабая мальцевская база группы H_0, причем для любых $1 \leqslant i, j \leqslant k$ $u_i^{-1}u_ju_i = u^{\xi(i,j)}$, $v_i^{-1}v_jv_i = v^{\xi(i,j)}$, где $\xi(i,j)$ есть k-вектор над* $\mathbf{Q}$, *то в базах u, v координатные функции умножения и возведения в степень групп G_0, H_0, G, H можно задать одними и теми же многочленами с коэффициентами из поля* $\mathbf{Q}$.

Доказательство проводится по длине мальцевской базы и подобно доказательству теоремы 6.5 из [6].

Не всякая конечно порожденная o-степенная группа без o-кручения обладает мальцевской базой, не свободные конечно порожденные o-модули без кручения мальцевской базы не имеют.

Лемма 1.8. *Пусть* o — *кольцо главных идеалов. Тогда каждая конечно порожденная* o*-степенная группа G, не имеющая* o*-кручения, обладает мальцевской базой.*

Доказательство. Во-первых, каждая конечно порожденная степенная группа над нетеровым кольцом удовлетворяет условию максимальности для степенных подгрупп, т. е. каждая ее степенная подгруппа конечно порождена. Во-вторых, известно, что конечно порожденные модули без кручения над областью главных идеалов свободны. Отсюда следует, что факторы верхнего центрального ряда группы G являются свободными o-модулями конечного ранга. Ясно, что для них существуют мальцевские базы, а потому мальцевская база существует и для всей группы G. Лемма доказана.

Много примеров степенных групп с мальцевской базой доставляет конструкция пополнения конечно порожденных нильпотентных групп.

Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, $u_1, \ldots, u_n$ — некоторая мальцевская база группы G (существование мальцевской базы для таких групп хорошо известно, для доказательства достаточно повторить рассуждения леммы 1.8). Тогда всякий элемент x из G единственным образом представим в виде

$$x = u_1^{\xi_1} \ldots u_n^{\xi_n} = u^{\xi}, \ \xi_i \in \mathbf{Z}.$$

Пусть $y = u^{\eta}$ — некоторый другой элемент из G и $xy = u^{o}$. Пусть еще $\lambda \in \mathbf{Z}$ и $x^{\lambda} = u^{\omega}$. Известно (см. теорему 1.2), что o_i, ω_i являются многочленами от ξ_i, η_i и ξ_i, λ соответственно. Так как многочлены o_i, ω_i целозначны, то они представимы в виде

$$o_i = \sum_j a_{ij} \binom{\xi_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\xi_j}{\alpha_j} \binom{\eta_1}{\beta_1} \cdots \binom{\eta_j}{\beta_j},$$

$$\omega_i = \sum_j b_{ij} \binom{\xi_1}{\gamma_1} \cdots \binom{\xi_1}{\gamma_j} \binom{\lambda}{\delta_j},$$

где a_{ij}, b_{ij}, α_i, β_i, γ_i, $\delta_i \in \mathbf{Z}$, причем α_j, β_j, γ_j, $\delta_j \geqslant 0$. В качестве элементов новой группы G^{o} рассмотрим всевозможные формальные произведения u^{ξ} с показателями $\xi_1, \ldots, \xi_n$ из o, умножение и возведение в степень λ из o зададим с помощью многочленов $o_i(\xi, \eta)$ и $\omega_i(\xi, \lambda)$. При таком определении G^{o} становится o-степенной группой, так как аксиомы o-степенной группы, включая аксиомы группы, можно выразить в виде полиномиальных тождеств, которым должны удовлетворять многочлены $o_i(\xi, \eta)$ и $\omega_i(\xi, \lambda)$.

Конструкцию пополнения конечно порожденных нильпотентных групп без кручения можно обобщить на случай произвольных o-степенных нильпотентных групп с мальцевской базой. Пусть G — o-степенная группа с мальцевской базой $u_1, \ldots, u_n$; σ_i, ω_i, $i = 1, \ldots, n$,— многочлены умножения и возведения в степень в базе $u_1, \ldots, u_n$. Возьмем произвольное биномиальное кольцо o_1, содержащее кольцо o в качестве подкольца. Тогда на множестве формальных произведений $u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i \in o_1$, при помощи многочленов o_i, ω_i можно задать структуру o_1-степенной группы. Полученную группу будем называть o_1-*пополнением группы* G и обозначать через G^{o_1}.

Отметим некоторые свойства группы G^{ϑ_1}, сразу вытекающие из конструкции пополнения.

Лемма 1.9. *Пусть G — ϑ-степенная группа с мальцевской базой $u_1, \ldots, u_n$, ϑ — биномиальное кольцо, содержащее кольцо ϑ в качестве подкольца. Тогда*

а) *ступени нильпотентности групп G и G^{o_1} совпадают,*

б) *$u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G^{o_1},*

в) *группа G^{o_1} не имеет кручения.*

Доказательство. Условия а) и б) очевидны. Докажем в). Пусть $\left(u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n}\right)^\lambda = 1$, α_i, $\lambda \in o_1$, $\lambda \neq 0$. Расписывая это равенство по аксиоме III, получим

$$u_1^{\alpha_1\lambda} \ldots u_n^{\alpha_n\lambda} = \tau_2 (u^\alpha)^{\binom{\lambda}{2}} \ldots \tau_m (u^\alpha)^{\binom{\lambda}{m}}.$$

Правая часть лежит в подгруппе $G_2 = \text{гр}\,(u_2, \ldots, u_n)_{o_1}$, следовательно, $\alpha_1 = 0$ и доказательство завершает индукция по длине мальцевской базы. Лемма доказана.

Пусть k — произвольное фиксированное поле характеристики ноль. Для степенных групп над полем удобно использовать следующие определения. Систему элементов $\{\alpha_i | i \in I\}$ будем называть *независимой системой порождающих k-степенной группы G*, если они порождают группу G и линейно независимы по модулю коммутанта группы G. В нильпотентной группе элементы $\{a_i | i \in I\}$ порождают всю группу G тогда и только тогда, когда их образы $\{\bar{a}_i | i \in I\}$ при естественном отображении $G \to G/G'$ порождают группу G/G'. Поэтому система элементов $\{a_i | i \in I\}$ является независимой системой порождающих группы G тогда и только тогда, когда $\{\bar{a}_i | i \in I\}$ есть базис векторного пространства G/G' над k.

Рангом k-степенной группы G будем называть мощность независимой системы порождающих группы G и обозначать его $r(G)$. *Длиной k-степенной группы G конечного ранга* будем называть длину мальцевской базы группы G и обозначать ее $l_k(G)$. Для степенных групп над полем длина группы не зависит от выбора мальцевской базы.

Лемма 1.10. *Пусть G — k-степенная группа конечного ранга. Тогда выполнены следующие условия:*

1) *из всякой слабой мальцевской базы группы G можно выбрать мальцевскую базу группы G;*

2) *любая независимая система порождающих группы G продолжается до мальцевской базы группы G.*

Доказательство. Доказательство п. 1) проведем индукцией по длине слабой мальцевской базы группы G. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — слабая мальцевская база группы G, $G_i = \text{гр}(a_i, \ldots, a_n)_k$. Очевидно, что $u_2, \ldots, u_n$ — слабая мальцевская база группы G_2. По предположению индукции из базы $u_2, \ldots, u_n$ выберем мальцевскую базу $v_2, \ldots, v_m$, $m \leqslant n$, группы G_2. Если элемент u_1 лежит в подгруппе G_2, то $G = G_2$ и $v_2, \ldots, v_m$ — искомая мальцевская база группы G. Пусть $u_1 \notin G_2$. В этом случае $u_1, v_2, \ldots, v_m$ является искомой мальцевской базой группы G. Действительно, равенство $u_1^{\xi_1} v_2^{\xi_2} \ldots v_m^{\xi_m} = u_1^{\eta_1} v_2^{\eta_2} \ldots v_m^{\eta_m}$ по модулю подгруппы G_2 имеет вид $u_1^{\xi_1} = u_1^{\eta_1}$ или $u_1^{\xi_1 - \eta_1} = 1$. Группа G/G_2 без k-кручения, следовательно, $\xi_1 = \eta_1$. Равенство остальных коэффициентов $\xi_2 = \eta_2, \ldots, \xi_m = \eta_m$ следует из единственности представления элемента в мальцевской базе $v_2, \ldots, v_m$. 2) следует из 1) и леммы 1.5.

Пусть G — k-степенная группа конечного ранга. Группу G будем называть **Q**-*определенной*, если существует мальцевская база группы G, в которой умножение и возведение в степень задается многочленами с рациональными коэффициентами.

Подгруппу G_0 группы G будем называть *равномерной подгруппой группы* G, если выполнены следующие условия:

а) G_0 — **Q**-*группа конечного ранга*;

б) $l_{\mathbf{Q}}(G_0) = l_k(G)$;

в) k-замыкание подгруппы G_0 равно группе G.

Например, пусть G — **Q**-группа конечного ранга, G_k — k-пополнение группы G, тогда G — равномерная подгруппа группы G^k.

В работе [8] А. И. Мальцева построен пример конечномерной нильпотентной алгебры Ли над полем вещественных чисел, не имеющей базиса с рациональными структурными константами. В силу известного соответствия между конечномерными нильпотентными алгебрами Ли над полем k и k-степенными группами конечного ранга этот пример показывает, что существуют степенные группы конечного ранга над полем, не являющиеся **Q**-определенными.

Теорема 1.3. *k-степенная группа G конечного ранга является **Q**-определенной тогда и только тогда, когда существует равномерная подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть группа G **Q**-определена; $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G, в которой умножение и возведение в степень задается при помощи многочленов с рациональными коэффициентами. Докажем, что подгруппа $G_0 = \mathrm{гр}(u_1, \ldots, u^n)_{\mathbf{Z}}$ является равномерной подгруппой группы G. Выполнимость условий а) и в) в группе G_0 очевидна. Достаточно доказать, что $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G_0, в этом случае $l_{\mathbf{Q}}(G_0) = l_k(G)$ и подгруппа G_0 является равномерной. Многочлены умножения и возведения в степень в базе $u_1, \ldots, u_n$ имеют рациональные коэффициенты, поэтому множество $U = \left\{u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n} \middle| \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{Q}\right\}$ замкнуто относительно умножения и возведения в рациональную степень. Следовательно, группа G_0 как множество совпадает с множеством U. Элементы $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G, следовательно, представление любого элемента группы G_0 в виде $u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i \in \mathbf{Q}$, единственно. Очевидно также, что подгруппы $G_i = \mathrm{гр}(u_i, \ldots, u_n)_{\mathbf{Q}}$ образуют центральный ряд группы G_0.

Пусть G_0 — равномерная подгруппа группы G, $u_1, \ldots, u_n$ — произвольная мальцевская база группы G_0. По лемме 1.6 система элементов $u_1, \ldots, u_n$ является слабой мальцевской базой группы G. По лемме 1.7 умножение и возведение в степень в группе G в базе $u_1, \ldots, u_n$ задается теми же многочленами, что и в группе G_0, следовательно, многочленами с рациональными коэффициентами. Осталось доказать, что $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G. По лемме 1.10 из системы элементов $u_1, \ldots, u_n$ можно выбрать мальцевскую базу группы G. Длина этой базы не может быть меньше n по условию, поэтому $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G. Теорема доказана.

Отметим в качестве следствий некоторые факты, попутно доказанные в теореме 1.3.

Следствие 1. *Пусть G_0 — равномерная подгруппа k-степенной группы G, тогда $G = G_0^k$.*

Следствие 2. *k-степенная группа G конечного ранга является $\mathbf{Q}$-определенной тогда и только тогда, когда группа G есть k-пополнение некоторой $\mathbf{Q}$-группы конечного ранга.*

Лемма 1.11. *Пусть G — k-степенная группа конечного ранга, H — собственная k-степенная подгруппа группы G. Тогда*

$$l(H) < l(G),\ r(H) \leqslant l(H).$$

Доказательство очевидно для векторных пространств. В общем случае — индукцией по ступени нильпотентности G.

Лемма 1.12. *Пусть G — k-степенная группа. Тогда*

$$G = \overline{G} \times A,\ \text{где}\ A \leqslant Z(G), A \cap [G, G] = 1,\ Z(\overline{G}) \leqslant [\overline{G}, \overline{G}].$$

Доказательство. Пусть $\{g_i | i \in I\}$ — максимальная система элементов группы G, линейно независимых по модулю подгруппы $G_1 = [G, G] \cdot Z(G)$, $\{a_j | j \in J\}$ — максимальная линейно независимая система элементов группы $Z(G)$ по модулю подгруппы $G_2 = Z(G) \cap [G, G]$. Такие системы элементов существуют, так как подгруппы G_1 и G_2 являются k-степенными подгруппами группы G и фактор-группы G/G_1, G/G_2 — абелевы k-степенные группы, т. е. векторные пространства над k. Очевидно, что система элементов $\{g_i, a_j | i \in I, j \in J\}$ линейно независима по модулю подгруппы $[G, G]$. Положим $\overline{G} = \text{гр}(g_i | i \in I)_k$, $A = \text{гр}(a_j | j \in J)_k$. По построению подгруппа $\overline{G} \cdot A$ порождает группу G по модулю коммутанта $[G, G]$, G нильпотентна, хорошо известно (см. [6]), что в этом случае $G = \overline{G} \cdot A$. Требуемое разложение легко проверяется.

§ 2. ГОМОМОРФИЗМЫ СТЕПЕННЫХ ГРУПП

Пусть $\mathfrak{o}'$ — биномиальное подкольцо кольца $\mathfrak{o}$, G и H — $\mathfrak{o}$-степенные группы. Структура степенной группы позволяет среди всех гомоморфизмов G в H естественно выделить следующие подклассы гомоморфизмов.

1. Гомоморфизм $\varphi : G \to H$ будем называть *$\mathfrak{o}'$-гомоморфизмом*, если $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^\alpha$ для любых $g \in G$, $\alpha \in \mathfrak{o}'$. В частности, любой гомоморфизм является $\mathbf{Z}$-гомоморфизмом, а если $\mathfrak{o}$ — поле, то и $\mathbf{Q}$-гомоморфизмом.

2. Гомоморфизм $\varphi : G \to H$ будем называть *полулинейным гомоморфизмом*, если существует такой эндоморфизм θ кольца $\mathfrak{o}'$, что $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^{\alpha\theta}$ для любых $g \in G$, $\alpha \in \mathfrak{o}'$.

3. Гомоморфизм $\varphi : G \to H$ будем называть *почти $\mathfrak{o}'$-гомоморфизмом, если* $(g^\alpha)^\varphi \in \text{гр}\ (g^\varphi)_{\mathfrak{o}'}$ для любых $g \in G$, $\alpha \in \mathfrak{o}'$.

Каждая $\mathfrak{o}$-степенная группа является также и $\mathfrak{o}'$-степенной группой, поэтому, не уменьшая общности, в дальнейших рассмотрениях полагаем $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}$. Для краткости гомоморфизмы второго типа будем называть C-гомоморфизмами, а гомоморфизмы третьего типа — N-гомоморфизмами. Среди гомоморфизмов каждого типа естественным образом определяются изоморфизмы и автоморфизмы. Например, C-гомоморфизм $\varphi : G \to H$ является C-изоморфизмом, если существует такой C-гомоморфизм $\psi : H \to G$, что $\psi\varphi = \mathrm{id}_H$, $\varphi\psi = \mathrm{id}_G$.

В леммах 2.1 и 2.2 собраны без доказательства несколько очевидных утверждений о введенных выше гомоморфизмах.

Лемма 2.1. *Если группы G и H не имеют $\mathfrak{o}$-кручения, то изоморфизм $\varphi : G \to H$ является C-изоморфизмом тогда и только тогда, когда* *существует автоморфизм* θ *кольца* $\mathfrak{o}$, *такой что* $(g^{\alpha})^{\varphi} = (g^{\varphi})^{\alpha^{\theta}}$ *для любых* $g \in G$, $\alpha \in \mathfrak{o}$.

Лемма 2.2. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *суперпозиция гомоморфизмов одного типа есть гомоморфизм этого же типа;*

б) *если обозначить* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(G, H)$, $\mathrm{Hom}_C(G, H)$, $\mathrm{Hom}_N(G, H)$ *соответственно множества всех* $\mathfrak{o}$-*гомоморфизмов*, C-*гомоморфизмов*, N-*гомоморфизмов* G *в* H, *то выполнены следующие включения*:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(G, H) \leqslant \mathrm{Hom}_C(G, H) \leqslant \mathrm{Hom}_N(G, H);$$

в) *пусть* F — *нормальная* $\mathfrak{o}$-*степенная подгруппа* H, *тогда естественный гомоморфизм* $\eta : H \to H/F$ *является* $\mathfrak{o}$-*гомоморфизмом.*

Лемма 2.3. *Пусть* G — *конечно порожденная нильпотентная группа без кручения,* H — *произвольная* $\mathfrak{o}$-*степенная группа. Тогда любой гомоморфизм* G *в* H *продолжается до* $\mathfrak{o}$-*гомоморфизма* $G^{\mathfrak{o}}$ *в* H.

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G, $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм групп. Очевидно, что $u_1^{\varphi}, \ldots, u_n^{\varphi}$ — слабая мальцевская база в группе G^{φ}. По лемме 1.6 $u_1^{\varphi}, \ldots, u_n^{\varphi}$ — слабая мальцевская база $\mathfrak{o}$-степенной группы $(G^{\varphi})_{\mathfrak{o}}$. По лемме 1.7 координатные функции умножения и возведения в степень в группах $G^{\mathfrak{o}}$ и $(G^{\varphi})_{\mathfrak{o}}$ можно задать одинаковыми многочленами. Естественное продолжение $\bar{\varphi}$ гомоморфизма φ на группу $G^{\mathfrak{o}}$

$$u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n} \xrightarrow{\bar{\varphi}} (u_1^{\varphi})^{\alpha_1} \ldots (u_n^{\varphi})^{\alpha_n}$$

определено корректно, так как $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы $G^{\mathfrak{o}}$. Гомоморфность отображения $\bar{\varphi}$ обеспечивается одинаковыми координатными функциями умножения и возведения в степень в группах $G^{\mathfrak{o}}$ и $(G^{\varphi})^{\mathfrak{o}}$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $F_{m,n}$ — *свободная нильпотентная группа ранга* m *ступени нильпотентности* n, $x_1, \ldots, x_m$ — *базис группы* $F_{m,n}$. *Тогда для любой* $\mathfrak{o}$-*степенной группы* H *ступени нильпотентности* $\leqslant m$, *для любых* $y_1, \ldots, y_m \in H$ *отображение* $x_1 \to y_1, \ldots, x_m \to y_m$ *продолжается до* $\mathfrak{o}$-*гомоморфизма группы* $F_{m,n}^{\mathfrak{o}}$ *в группу* H.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi : G \to H$ — *изоморфизм* $\mathbf{Q}$-*определенных* k-*степенных групп конечного ранга,* G_0 — *равномерная подгруппа группы* G. *Тогда* k-*изоморфизм* $\psi : G \to H$, *совпадающий на подгруппе* G_0 *с изоморфизмом* φ, *существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) $l_k(G) = l_k(H)$;

2) гр $(G_0^{\varphi})_k = H$

Доказательство. Необходимость условий 1) и 2) очевидна.

Достаточность. Пусть G_0 — равномерная подгруппа группы G, $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G_0. По следствию 1 теоремы 1.3 группа G есть k-пополнение G_0^k группы G_0, поэтому $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G. Пусть $H_0 = G_0^{\varphi}$. Изоморфизм φ является $\mathbf{Q}$-изоморфизмом группы G_0 на группу H_0, поэтому $u_1^{\varphi}, \ldots, u_n^{\varphi}$ — мальцевская база группы H_0. По условию гр$(H_0)_k = H$ и $l(H_0) = l(G_0) = l(H)$, следовательно, H_0 — равномерная подгруппа группы H и, значит, $u_1^{\varphi}, \ldots, u_n^{\varphi}$ — мальцевская база группы H. По лемме 2.3 гомоморфизм $\varphi : G_0 \to H$ продолжается до k-гомоморфизма $\psi : G_0^k \to H$, причем

$$u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n} \xrightarrow{\psi} (u_1^{\varphi})^{\alpha_1} \ldots (u_n^{\varphi})^{\alpha_n}.$$

Системы элементов $u_1, \ldots, u_n$ и $u_1^{\varphi}, \ldots, u_n^{\varphi}$ — мальцевские базы соответственно в группах G и H, следовательно, гомоморфизм ψ является k-изоморфизмом группы G на группу H, совпадающим на подгруппе G_0 с изоморфизмом φ. Теорема доказана.

Пусть H_1 — нормальная о-степенная подгруппа группы H. Запись $f \underset{H_1}{\equiv} h$ будет означать, что элементы f и h группы H лежат в одном смежном классе по подгруппе H_1. Все три вышеназванных типа гомоморфизмов G в H можно определить по модулю подгруппы H_1. Для этого достаточно в определениях 1 и 2 знак равенства заменить на $\overset{\equiv}{H_1}$, а в определении 3 включение понимать по модулю подгруппы H_1. Иначе говоря, гомоморфизм $\varphi : G \to H$ есть гомоморфизм одного из трех типов по модулю подгруппы H_1 тогда и только тогда, когда гомоморфизм $\varphi\eta : G \to H/H_1$, где $\eta : H \to H/H_1$, имеет тот же тип.

Лемма 2.4. *Пусть для гомоморфизма $\varphi : G \to H$ существуют такой эндоморфизм θ кольца* о *и такая система порождающих $\{a_i | i \in I\}$ группы G, что $(a_i^\alpha)^\varphi = (a_i^\varphi)^{\alpha\theta}$ для любых $i \in I$, $\alpha \in$ о. Тогда φ есть C-гомоморфизм G в H.*

Доказательство. Пусть, как в лемме 1.3, $v_n(x_1, \ldots, x_n, t) = x_{i_1}^{f_1(t)} \ldots x_{i_s}^{f_s(t)}$ — такое слово от переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, что для любых элементов $g_1, \ldots, g_n$ из G, $\lambda \in$ о выполняется равенство $(g_1, \ldots, g_n)^\lambda = v_n(g_1, \ldots, g_n, \lambda)$. Многочлены — показатели $f_1(t), \ldots, f_s(t)$ в доказательстве леммы 1.3 получались из некоторых многочленов с целыми коэффициентами при помощи нескольких операций подстановки вместо переменной t биномиального коэффициента вида $\begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbf{N}$. Заметим, что при любом ненулевом гомоморфизме θ кольца о подкольцо $\mathbf{Z}$ остается на месте, а биномиальный коэффициент $\begin{pmatrix} \lambda \\ k \end{pmatrix}$ отображается в биномиальный коэффициент $\begin{pmatrix} \lambda\theta \\ k \end{pmatrix}$. Поэтому верна цепочка равенств

$$\left[\left(a_{j_1}^{\alpha_1} \ldots a_{j_n}^{\alpha_n}\right)^\lambda\right]^\varphi = v_n\left(a_{j_1}^{\alpha_1}, \ldots, a_{j_n}^{\alpha_n}, \lambda\right)^\varphi = v_n\left(\left(a_{j_1}^\varphi\right)^{\alpha_1\theta}, \ldots, \left(a_{j_n}^\varphi\right)^{\alpha_n\theta}, \lambda\theta\right) =$$
$$= \left[\left(a_{j_1}^\varphi\right)^{\alpha_1\theta} \ldots \left(a_{j_n}^\varphi\right)^{\alpha_n\theta}\right]^{\lambda\theta} = \left[\left(a_{j_1}^{\alpha_1} \ldots a_{j_n}^{\alpha_n}\right)^\varphi\right]^{\lambda\theta}.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть H_1 — нормальная степенная подгруппа группы H. Если в условиях леммы 2.4 выполняются сравнения $(a_i^\alpha)^\varphi \underset{H_1}{\equiv} (a_i^\varphi)^{\alpha\theta}$ для любых $\alpha \in$ о, $i \in I$, то φ есть C — гомоморфизм G в H по модулю H_1.*

Доказательство. Достаточно продолжить гомоморфизм на фактор-группу H/H_1 и применить лемму 2.4.

Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм о-степенных групп. Тогда о-степенную подгруппу Z группы будем называть *допустимой относительно* φ, если Z^φ — о-степенная подгруппа группы H. Если Z — допустимая подгруппа группы G относительно изоморфизма $\varphi : G \to H$, то изоморфизм φ будем называть изоморфизмом одного из трех вышеназванных типов по модулю подгруппы Z тогда и только тогда, когда φ и φ^{-1} являются гомоморфизмами этого же типа по модулю соответственно подгрупп Z^φ и Z.

Пусть G и H — неабелевы о-степенные группы без о-кручения, Z — о-изолированная о-степенная подгруппа группы G, лежащая в центре $Z(G)$. Тогда справедлива

Лемма 2.5. *Пусть $\varphi : G \to H$ — изоморфизм групп, причем Z — допустимая подгруппа группы G относительно изоморфизма φ. Тогда если*

φ — N-изоморфизм по модулю Z, то φ является C-изоморфизмом по модулю Z.

Доказательство. Пусть $\varphi : G \to H$ есть N-изоморфизм по модулю Z. В рамках доказательства леммы 2.5 образ произвольного элемента a из G при изоморфизме φ будем обозначать через $\bar{a}$. Докажем, что подгруппа Z^φ также о-изолирована. Если элементы g из H и λ из о таковы, что $g^\lambda \in Z^\varphi$, то элемент $(g^\lambda)^{\varphi^{-1}}$ принадлежит подгруппе Z. По условию леммы φ^{-1} есть N-гомоморфизм по модулю Z, т. е. $(g^\lambda)^{\varphi^{-1}} \underset{Z}{\equiv} (g^{\varphi^{-1}})^\mu$ для некоторого $\mu \in$ о. В силу о-изолированности подгруппы Z элемент $g^{\varphi^{-1}} \in Z$, а значит, $g \in Z^\varphi$.

В дальнейшем все сравнения $\equiv$ понимаются по модулю Z или Z^φ в зависимости от контекста.

Для произвольного элемента g группы G, не лежащего в подгруппе Z, определим отображение θ_g кольца о в себя. А именно, в силу о-изолированности подгруппы Z^φ для любого $\alpha \in$ о элемент $\alpha\theta_g$ кольца о однозначно определяется из сравнения $(g^\alpha)^\varphi \equiv (g^\varphi)^{\alpha\theta}$. Ясно, что θ_g — эндоморфизм аддитивной группы кольца о.

Группа G неабелева, но нильпотентна, поэтому найдутся элементы a и b группы G такие, что $[a, b] \neq 1$ и $[a, b] \in Z(G)$. Подействуем изоморфизмом φ на тождества $[a^\alpha, b] = [a, b^\alpha]$, $\alpha \in$ о. Z^φ — центральная подгруппа группы H, следовательно, $[a^\varphi, b^\varphi]^{\alpha\theta_a} = [a^\varphi, b^\varphi]^{\alpha\theta_b}$. Группа H без о-кручения и $[a^\varphi, b^\varphi] \neq 1$, поэтому $\theta_a = \theta_b$. Аналогично тождества $[a^\alpha, b^\beta] = [a, b^{\alpha\beta}]$, $\alpha, \beta \in$ о, влекут мультипликативность θ_a, т. е. θ_a — эндоморфизм кольца о. Аналогично изоморфизму φ^{-1} и элементу a^φ группы H соответствует эндоморфизм τ_a кольца о в себя. Очевидно, что для любого $\alpha \in$ о

$$a^{\alpha\theta_a\tau_a} \equiv a^\alpha \text{ и } (a^\varphi)^{\alpha\tau_a\theta_a} \equiv (a^\varphi)^\alpha.$$

Группы Z и Z^φ о-изолированы, следовательно, для любого элемента $\alpha \in$ о имеем равенство $\alpha\tau_a\theta_a = \alpha\theta_a\tau_a$, т. е. θ_a — автоморфизм кольца о.

Пусть g — произвольный элемент группы, не лежащий в подгруппе Z. Докажем, что $\theta_a = \theta_g$.

Предположим, что $[a, g] \neq 1$. Элемент $[a, g]$ лежит в некотором скачке $Z_k(G) \setminus Z_{k-1}(G)$ верхнего центрального ряда. Подгруппы $Z_i(G)$ — о-изолированные о-степенные подгруппы группы G, поэтому изоморфизм φ индуцирует изоморфизм

$$\psi: G/Z_{k-1}(G) \to H/Z_{k-1}(H)$$

о-степенных групп без о-кручения. Ясно, что ψ является N-изоморфизмом по модулю образа подгруппы Z в фактор-группе G/Z_{k-1}. Подгруппа Z — центральная, поэтому либо $Z_{k-1} = 1$ и $\varphi = \psi$, либо образ подгруппы Z равен единице в фактор-группе G/Z_{k-1}. Для доказательства равенства $\theta_a = \theta_g$ осталось повторить рассуждения, проведенные ранее для элементов a и b.

Пусть теперь $[a, g] = 1$. Заметим, что в этом случае $(ag)^\lambda = a^\lambda g^\lambda$ и $(\overline{ag})^\lambda = \bar{a}^\lambda \bar{g}^\lambda$. Доказательство разобьем на две части: $ag \in Z$ и $ag \notin Z$. Пусть $ag \in Z$, тогда $a \equiv g^{-1}$ и $\bar{a} \equiv \overline{g^{-1}}$, поэтому для любого $\lambda \in$ о

$$\bar{a}^{\lambda\theta_a} \equiv \overline{g^{-1}}^{\lambda\theta_{g^{-1}}} \equiv \bar{a}^{\lambda\theta_{g^{-1}}}.$$

В силу о-изолированности подгруппы Z^φ $\lambda\theta_a = \lambda\theta_{g^{-1}}$, т.е. $\theta_a = \theta_{g^{-1}}$. Отображение θ_g является эндоморфизмом аддитивной группы кольца о, поэтому $\theta_g = \theta_{g^{-1}} = \theta_a$.

Допустим, $ag \notin Z$. Если $g \in Z(G)$, то $[ag, b] = [ab] \neq 1$, следовательно, $\theta_{ag} = \theta_b = \theta_a$. Для любого $\lambda \in$ о вычислим образ элемента $(ag)^\lambda$ при изоморфизме φ:

$$\overline{(ag)^\lambda} \equiv \overline{ag}^{\lambda\theta_{ag}} \equiv \overline{ag}^{\lambda\theta_a} \equiv \bar{a}^{\lambda\theta_a}\, \bar{g}^{\lambda\theta_a}.$$

С другой стороны, $\overline{(ag)^\lambda} \equiv \overline{a^\lambda g^\lambda} \equiv \bar{a}^{\lambda\theta_a}\bar{g}^{\lambda\theta_g}$, откуда $\bar{g}^{\lambda\theta_a} \equiv \bar{g}^{\lambda\theta_g}$ и, следовательно, $\theta_a = \theta_g$. Остался неразобранным случай $ag \notin Z$ и $g \notin Z(G)$. Элемент g нецентральный, поэтому θ_g — автоморфизм кольца о. Опять двумя способами выпишем образ элемента $(ag)^\lambda$, $\lambda \in$ о, при изоморфизме φ:

$$\overline{(ag)^\lambda} \equiv \bar{a}^{\lambda\theta_a}\bar{g}^{\lambda\theta_g},\ \overline{(ag)^\lambda} \equiv \bar{a}^{\lambda\theta_{ag}}\bar{g}^{\lambda\theta_{ag}},$$

откуда $\bar{a}^{\lambda\theta_a - \lambda\theta_{ag}} = \bar{g}^{\lambda\theta_{ag} - \lambda\theta_g}$. Пусть $\lambda\theta_a - \lambda\theta_{ag} = \mu_1$, $\lambda\theta_{ag} - \lambda\theta_g = \mu_2$. Если один из элементов μ_1, μ_2 равен нулю, то равен нулю и второй, а значит, равны автоморфизмы θ_a и θ_g. Пусть $\mu_1, \mu_2 \neq 0$. Подействовав на равенство $\bar{a}^{\mu_1} = \bar{g}^{\mu_2}$ изоморфизмом φ^{-1}, получим $a^{\nu_1} = g^{\nu_2}$, где $\nu_1 = \mu_1\theta_a^{-1}$, $\nu_2 = \mu_2\theta_g^{-1}$. Для любого $\alpha \in$ о выполнены следующие сравнения:

$$\overline{a^{\nu_1\alpha}} \equiv \bar{a}^{\nu_1\theta_a\cdot\alpha\theta_a} \equiv \left(\overline{a^{\nu_1}}\right)^{\alpha\theta_a},$$

$$\overline{g^{\nu_2\alpha}} \equiv \bar{g}^{\nu_2\theta_g\cdot\alpha\theta_g} \equiv \left(\overline{g^{\nu_2}}\right)^{\alpha\theta_g}.$$

Вспоминая, что $a^{\nu_1} \equiv g^{\nu_2}$, получим $\alpha\theta_a = \alpha\theta_g$, и равенство автоморфизмов θ_a и θ_g доказано.

Пусть $\{a_i | i \in I\}$ — система порождающих группы G. Если элемент a_i не лежит в подгруппе Z, то автоморфизм θ_{a_i} определен и равен θ_a. Ясно, что для любого порождающего a_j, лежащего в подгруппе Z, сравнение $\overline{a_i^\lambda} \underset{Z}{\equiv} \bar{a}_j^{\lambda\theta_a}$ выполняется для всех $\lambda \in$ о. Таким образом, существуют автоморфизм θ_a кольца о и система порождающих $\{a_i | i \in I\}$ группы G такие, что $(a_i^\lambda)^\varphi \underset{Z}{\equiv} (a_i^\varphi)^{\alpha\theta_a}$ для всех $i \in I$, $\lambda \in$ о.

По следствию леммы 2.4 изоморфизм φ является C-гомоморфизмом по модулю Z.

Аналогично изоморфизм φ^{-1} является C-гомоморфизмом по модулю Z. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $\varphi : G \to H$ есть N-изоморфизм о-степенных групп без о-кручения по модулю центра $Z(G)$. Тогда φ является C-изоморфизмом по модулю $Z(G)$.*

Следствие 2. *Пусть $\varphi : G \to H$ есть N-изоморфизм неабелевых о-степенных групп без о-кручения, тогда φ является C-изоморфизмом.*

§ 3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ

Цель данного параграфа — напомнить некоторые определения и факты из теории моделей, а также условиться относительно обозначений. Все необходимые сведения содержатся в книге [7].

Функциональная сигнатура $\langle \cdot^2, (^{-1})^1; e\rangle$ называется *групповой сигнатурой*, а функциональная сигнатура $\langle +^2, \cdot^2; 0,1\rangle$ называется *кольцевой сигнатурой*.

Пусть A — алгебраическая система сигнатуры Σ. Множество всех замкнутых формул сигнатуры Σ, истинных на A, называется *элементарной теорией системы* A и обозначается $\mathrm{Th}(A)$. Алгебраические системы

A и B сигнатуры Σ называются *элементарно эквивалентными* ($A \equiv B$), если и только если $\mathrm{Th}(A) = \mathrm{Th}(B)$.

Пусть I — множество, D — ультрафильтр на I, A_i, $i \in I$, — семейство алгебраических систем. Тогда ультрапроизведение семейства A_i, $i \in I$, по ультрафильтру D обозначается через $\prod\limits_I A_i/D$. Ультрастепень системы A по ультрафильтру D будем обозначать через A^I/D.

При классификации элементарных теорий степенных нильпотентных групп важную роль играет следующая

Теорема 3.1. (Кейслер — Шелах). *Алгебраические системы A и B сигнатуры Σ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют множество I и ультрафильтр D на I такие, что ультрастепени A^I/D и B^I/D изоморфны.*

Доказательство см. в [7].

Лемма 3.1. *Пусть G — конечно порожденная $\mathfrak{o}$-степенная группа; $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G, I — множество, D — ультрафильтр на I. Тогда ультрастепень $G^I/D = \widetilde{G}$ есть $\widetilde{\mathfrak{o}}$-пополнение группы G, где через $\widetilde{\mathfrak{o}}$ обозначена ультрастепень $\mathfrak{o}^I/D$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{G}$ есть ультрастепень G_I/D, $\prod\limits_I G$ и $\prod\limits_I \mathfrak{o}$ — декартовы степени соответственно группы G и кольца $\mathfrak{o}$. Для элементов $g \in \prod\limits_I G$, $\alpha \in \prod\limits_I \mathfrak{o}$ покомпонентным возведением в степень определим элемент $g^\alpha \in \prod G$, а именно, $g^\alpha(i) = g(i)^{\alpha(i)}$, $i \in I$. Заметим, что кольцо $\widetilde{\mathfrak{o}}$ биномиально, так как существование произвольного биномиального коэффициента в кольце $\mathfrak{o}$ легко записывается формулой кольцевой сигнатуры. Для элемента $\tilde{g} \in \widetilde{G}$, элемента $\tilde{\alpha}$ из $\widetilde{\mathfrak{o}}$ определим элемент $\tilde{g}^{\tilde{\alpha}}$ из $\widetilde{G}$ как класс эквивалентности элемента g^α из $\prod\limits_I G$. Определение операции возведения в степень $\tilde{\alpha} \in \widetilde{\mathfrak{o}}$ корректно и удовлетворяет всем аксиомам $\widetilde{\mathfrak{o}}$-степенной группы. Пусть $\varphi : G \to \widetilde{G}$ и $\psi : \mathfrak{o} \to \widetilde{\mathfrak{o}}$ — естественные диагональные вложения. Если $u_1, \ldots, u_n$ — мальцевская база группы G, ω_i, σ_i — многочлены умножения и возведения в степень в базе $u_1, \ldots, u_n$, то система элементов $u_1^\varphi, \ldots, u_n^\varphi$ является мальцевской базой $\widetilde{\mathfrak{o}}$-степенной группы $\widetilde{G}$ с многочленами $\omega_i^{\psi_1}, \sigma_i^{\psi_1}$, где ψ_1 — продолжение гомоморфизма $\psi : \mathfrak{o} \to \widetilde{\mathfrak{o}}$ до гомоморфизма колец частных $\psi_1 : \mathfrak{o}_{\mathbf{Z}} \to \widetilde{\mathfrak{o}}_{\mathbf{Z}}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть группа G разлагается в прямое произведение $G = G_1 \times G_2$, I — множество, D — ультрафильтр на I. Тогда*

$$G^I/D = G_1^I/D \times G_2^I/D.$$

Доказательство очевидно.

Лемма 3.3. *Пусть алгебраические системы A_i, B_i, $i = 1, 2$, попарно элементарно эквивалентны: $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$. Тогда существуют множество I и ультрафильтр D на I такие, что ультрастепени A_1^I/D и B_1^I/D, а также A_2^I/D и B_2^I/D* изоморфны.

Доказательство. По теореме Кейслера — Шелаха найдутся множество I и ультрафильтр D на I такие, что ультрастепени $\overline{A}_1 = A_1^I/D$ и $\overline{B}_1 = B_1^I/D$ изоморфны. Очевидно, что ультрастепени $\overline{A}_2 = A_2^I/D$ и $\overline{B}_2 = B_2^I/D$ элементарно эквивалентны. Опять по теореме Кейслера — Шелаха найдется множество J и ультрафильтр F на J такие, что ультрастепени $\overline{A}_2^J/F$ и $\overline{B}_2^J/F$ изоморфны. Тем более изоморфны ультрастепени $\overline{A}_1^J/F$ и $\overline{B}_1^J/F$. По теореме о конечной итерации (см. [7]) существуют такие множество K и ультрафильтр S на K, что итерированные ультрастепени $\overline{A}_i^J/F$ и $\overline{B}_i^J/F$, $i = 1, 2$, являются простыми ультрастепенями A_i^K/S и B_i^K/S. Множество K и ультрафильтр S на K — искомые. Лемма доказана.

Пусть A — алгебраическая система сигнатуры Σ'. Множество элементов M системы A называется *формульным,* если существует формула $\Phi(x)$ сигнатуры Σ' такая, что $M = \{a \in A \mid A \vDash \Phi(a)\}$.

Множество элементов M системы A называется *относительно формульным,* если существует конечный набор элементов $b_1, \ldots, b_n$ системы A и формула $\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ сигнатуры Σ' такие, что $M = \{a \in A \mid A \vDash \Phi(a, b_1, \ldots, b_n)\}$.

Лемма 3.4. *Пусть A — алгебраическая система сигнатуры Σ, M — формульное множество элементов системы A, выделяющееся формулой Φ сигнатуры Σ. Тогда в любой ультрастепени A^I/D формула Φ выделяет множество M^I/D.*

Доказательство леммы следует из фильтруемости любой формулы по любому ультрафильтру.

§ 4. МОДЕЛЬНЫЕ СТЕПЕННЫЕ ГРУППЫ

В этом параграфе мы будем изучать в некотором смысле простейшие — «модельные» степенные группы (см. [9]).

Определение. *Модельной о-степенной группой M(о) будем называть* пильпотентную ступени два неабелеву 2-порожденную о-степенную группу без о-кручения.

Укажем некоторые очевидные свойства группы M(о). Пусть a, b — порождающие группы M(о), $c = [b, a] \neq 1$, тогда

а) $[M(о), M(о)] = Z(M(о)) = \mathrm{гр}(c)о$;

б) a, b, c — мальцевская база группы M(о);

в) умножение и возведение в степень в базе a, b, c записываются следующим образом:

$$(a^\alpha b^\beta c^\gamma)(a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'}) = a^{\alpha+\alpha'} b^{\beta+\beta'} c^{\gamma+\gamma'+\beta\alpha'},$$

$$(a^\alpha b^\beta c^\gamma)^\lambda = a^{\alpha\lambda} b^{\beta\lambda} c^{\gamma\lambda+\binom{\lambda}{2}\alpha\beta},$$

где α, β, γ, α', β', γ', λ — элементы кольца о.

Пусть UT_3(о) — группа унитреугольных матриц степени 3 над кольцом о. Определим возведение в степень $\lambda \in$ о в группе UT_3(о) при помощи формулы $g^\lambda = \sum\limits_{i=0}^{2} \binom{\lambda}{i} (g-e)^i$, где $g \in UT_3$(о), e — матричная единица.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что отображение

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является о-изоморфизмом группы M(о) на группу UT_3(о).

Определение. Нильпотентную группу G ступени нильпотентности два будем называть *квазимодельной* и обозначать K(о), если G содержит подгруппу G_1, которая является модельной группой M(о), и $G = M(о) \cdot Z(G)$.

В частности, если о — поле, то о-степенная группа G есть группа K(о) тогда и только тогда, когда $G = M(о) \times A$, где $A \leqslant Z(G)$.

Укажем некоторые условия, выполняющиеся в модельных (квазимодельных) группах, отталкиваясь от которых, мы попытаемся охарактеризовать все группы, элементарно эквивалентные данной модельной (квазимодельной) группе.

Для произвольной модельной группы $M(\mathrm{o})$ до конца параграфа зафиксируем следующие обозначения: a, b — порождающие группы $M(\mathrm{o})$, $c=[a, b]$, $A=\text{гр}(a)_{\mathrm{o}}$, $B=\text{гр}(b)_{\mathrm{o}}$. Пусть G есть группа $M(\mathrm{o})$ для некоторого биномиального кольца о. Тогда группа G удовлетворяет следующим условиям:

M1) G — нильпотентная группа ступени два;

M2) G порождается двумя абелевыми подгруппами A и B;

$$A \cap B=1,\ a \in A,\ b \in B,\ [a, b] \neq 1;$$

M3) $[a, B]=Z(G)$, причем $[a, b_1]=[a, b_2]$ тогда и только тогда, когда $b_1=b_2$;

M4) $[A, b]=Z(G)$, причем $[a_1, b]=[a_2, b]$ тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$;

Группы $A=\text{гр}(a)_{\mathrm{o}}$, $B=\text{гр}(b)_{\mathrm{o}}$, $C=\text{гр}(c)_{\mathrm{o}}$ о-изоморфны между собой, причем условия M3, M4 как раз и дают эти изоморфизмы:

$$x \in A_1 \xrightarrow{\psi_1} [x, b] \in C, \quad y \in B \xrightarrow{\psi_2} [a, y] \in C. \qquad (O_1)$$

Пусть $\varphi=\psi_1\psi_2^{-1}$, тогда $\varphi: A \to B$. Отметим три важных свойства изоморфизмов ψ_1, ψ_2, φ. Во-первых, $\forall_\alpha \in \mathrm{o}$

$$a^\alpha \xrightarrow{\varphi} b^\alpha.$$

Во-вторых, $\forall\alpha, \beta \in \mathrm{o}$

$$\left(a^{\alpha\beta}\right)^{\psi_1}=\left[a^{\alpha\beta}, b\right]=\left[a^\alpha, b^\beta\right]=\left[a^\alpha, (a^\beta)^\varphi\right].$$

Следовательно,

$$a^{\alpha\beta}=\left[a^\alpha, (a^\beta)^\varphi\right]^{\psi_1^{-1}}. \qquad (O_2)$$

Аналогично

$$b^{\alpha\beta}=\left[(b^\alpha)^{\varphi^{-1}}, b^\beta\right]^{\psi_2^{-1}}. \qquad (O_3)$$

На группе A можно естественно ввести структуру кольца, определив кольцевое умножение по формуле $a^\alpha \circ a^\beta=a^{\alpha\beta}$, очевидно, что в этом случае кольцо A изоморфно кольцу о. Точно так же вводится структура колец на B и C, причем изоморфизмы φ, ψ_1, ψ_2 становятся кольцевыми изоморфизмами. Оказывается эту ситуацию можно обобщить, пользуясь формулами (O_1), (O_2) и (O_3), на случай произвольной группы, удовлетворяющей условиям M1—M4.

Пусть группа G, A, B — подгруппы группы G, $a \in A$, $b \in B$ таковы, что выполняются условия M1—M4. Обозначим $Z(G)$ через C. Изоморфизмы групп $\psi_1: A \to C$, $\psi_2: B \to C$ определим по формуле (O_1). Положим $\varphi=\psi_1\psi_2^{-1}$, тогда $\varphi: A \to B$, причем $a^\varphi=b$. В терминах этих изоморфизмов определим операцию $\circ$ на абелевых группах A, B, C.

Пусть $a_1, a_2 \in A$, определим $a_1 \circ a_2$ по формуле:

$$a_1 \circ a_2=\left[a_1, a_2^\varphi\right]^{\psi_1^{-1}}. \qquad (O_4)$$

Пусть $b_1, b_2 \in B$, определим $b_1 \circ b_2$ по формуле:

$$b_1 \circ b_2=\left[b_1^{\varphi^{-1}}, b_2\right]^{\psi_2^{-1}}. \qquad (O_5)$$

Пусть $c_1, c_2 \in C$, тогда $c_1=[a_1, b]$, $c_2=[a_2, b]$; определим $c_1 \circ c_2$ по формуле

$$c_1 \circ c_2=\left[a_1, a_2^\varphi\right]=\left[c_1^{\psi_1^{-1}}, \left(c_2^{\psi_1^{-1}}\right)^\varphi\right]. \qquad (O_6)$$

Непосредственно проверяется, что групповое умножение дистрибутивно относительно операции $\circ$ в группах A, B, C. Таким образом на абелевых группах A, B, C определена структура кольца, где роль кольцевого умножения играет операция $\circ$, причем элементы a, b, $[a, b]$ — кольцевые единицы соответственно в кольцах A, B, C, а изоморфизмы ψ_1, ψ_2 и φ являются кольцевыми изоморфизмами.

В группе $M(\mathfrak{o})$ кольца A, B, C изоморфны кольцу $\mathfrak{o}$, значит, по крайней мере биномиальны, однако в случае произвольной группы G, удовлетворяющей условиям М1—М4, мы имеем в наличии только дистрибутивность операции $\circ$ относительно группового умножения и существования кольцевой единицы. Поэтому в терминах изоморфизмов ψ_1, ψ_2, φ допишем к М1—М4 условия, гарантирующие нам биномиальность, например, кольца A.

М5) Ассоциативность: $(a_1 \circ a_2) \circ a_3 = a_1 \circ (a_2 \circ a_3)$,

$$\left[[a_1, a_2^{\varphi}]^{\psi_1^{-1}}, a_3^{\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}} = \left[a_1 [a_2, a_3]^{\psi_1^{-1}\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}}.$$

М6) Коммутативность: $a_1 \circ a_2 = a_2 \circ a_1$,

$$[a_1, a_2^{\varphi}]^{\psi_1^{-1}} = [a_2, a_1^{\varphi}]^{\psi_1^{-1}}.$$

М7) Отсутствие делителей нуля: $a_1 \neq 0 \mathbin{\&} a_2 \neq 0 \rightarrow a_1 \circ a_2 \neq 0$,

$$a_1 \neq 1 \mathbin{\&} a_2 \neq 1 \rightarrow [a_1, a_2^{\varphi}]^{\psi_1^{-1}} \neq 1.$$

М8) Биномиальность кольца $A: a_1 \in A, k \in \mathbf{N} \rightarrow \binom{a_1}{k} \in A$, $\forall a_1 \in A$, $\forall k \in \mathbf{N}$ существует $a_2 \in A$ такой, что

$$a_2^{k!} = a_1 \circ (a_1 a^{-1}) \circ \ldots \circ (a_1 a^{-k+1}).$$

Расписывать это равенство подробно слишком громоздко, поэтому оставим его в такой форме, напомним только, что a — единичный элемент кольца A.

Чтобы кольцо A было полем, необходимо добавить еще одно условие:

М9) Существование обратного: $\forall a_1 \in A$, $a_1 \neq 0$, существует $a_2 \in A$, $[a_1, a_2^{\varphi}] = a$.

Лемма 4.1. *Группа G является модельной группой $M(\mathfrak{o})$ тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условиям* М1—М8; *причем G является модельной группой над полем тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условиям* М1—М9.

Доказательство. Необходимость. Очевидно, что модельная группа $M(\mathfrak{o})$ удовлетворяет условиям М1—М4. При помощи формулы (O_2) легко проверяется выполнимость в группе $M(\mathfrak{o})$ условий М5—М8, а если $\mathfrak{o}$ — поле, то М5—М9.

Достаточность. Пусть группа G удовлетворяет условиям М1—М8. Тогда A, B, $Z(G)$ — биномиальные кольца относительно группового умножения и операции $\circ$, определенной по формулам (O_4), (O_5), (O_6). Пусть

$$\psi_1 : A \rightarrow Z(G),\ \psi_2 : B \rightarrow Z(G),\ \varphi : A \rightarrow B$$

есть изоморфизмы колец, построенные по формуле (O_1). Введем на G структуру A-степенной группы. Каждый элемент группы G единственным образом представим в виде $\alpha\beta\gamma$, где $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma \in Z(G)$. Действительно, пусть $\alpha\beta\gamma = 1$, тогда $\alpha = \gamma^{-1}\beta^{-1}$ и выполнена следующая цепочка равенств:

$$1 = [\gamma^{-1}\beta^{-1}, \alpha] = [\beta^{-1}, \alpha] = [\alpha, \beta] = \left[\alpha, \left(\beta^{\varphi^{-1}}\right)^{\varphi}\right],$$

следовательно,

$$\alpha\circ\beta^{\varphi^{-1}}=\left[\alpha,\left(\beta^{\varphi^{-1}}\right)^{\varphi}\right]^{\psi_1^{-1}}=1,$$

но единица группы G — это нулевой элемент кольца A. Кольцо A без делителей нуля, поэтому либо $\alpha=1$, либо $\beta=1$. Пусть, например, $\alpha=1$, тогда $\beta\gamma=1$, если $\beta\neq1$, то $\beta\in B\cap Z(G)$ — противоречие с условием М3. Случай $\beta=1$ разбирается аналогично. Пусть теперь $\alpha\beta\gamma=\alpha_1\beta_1\gamma_1$, тогда

$$1=\alpha_1\beta_1\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma_1\gamma^{-1}=\alpha_1\alpha^{-1}\beta_1\beta^{-1}[\beta_1,\alpha^{-1}]\gamma_1\gamma^{-1},$$

следовательно, $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$, $\gamma_1=\gamma$.

Определим в группе G возведение в степень $\lambda\in A$ по формуле

$$(\alpha\beta\gamma)^{\lambda}=\alpha\circ\lambda\beta\circ\lambda^{\varphi}\gamma\circ\lambda^{\psi_1}\cdot\binom{\lambda}{2}^{\psi_1}\circ\alpha^{\psi_1}\circ\beta^{\psi_2}.$$

Возведение в степень $\lambda\in A$ удовлетворяет всем аксиомам A-степенной группы. Действительно, фактически умножение и возведение в степень в группе G происходит при помощи многочленов с рациональными коэффициентами, которые совпадают с многочленами умножения и возведения в степень модельной группы. Очевидно, что $G=\text{гр}(a,b)_A$ и G не имеют A-кручения. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Группа G изоморфна группе $M(\mathfrak{o})$ тогда и только тогда, когда $G=M(\mathfrak{o}_1)$, причем кольца $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{o}_1$ изоморфны.*

Доказательство. Очевидно, что группа G удовлетворяет условиям М1—М8, следовательно, по лемме 4.1 $G=M(\mathfrak{o}_1)$. Изоморфизм $\varphi: G\to M(\mathfrak{o})$ индуцирует изоморфизм $\bar\varphi$ центров $Z(G)$ и $Z(M(\mathfrak{o}))$. Непосредственно проверяется, что изоморфизм $\bar\varphi$ мультипликативен относительно операции $\circ$, определенной на $Z(G)$ и $Z(M(\mathfrak{o}))$, поэтому является изоморфизмом колец $Z(G)$ и $Z(M(\mathfrak{o}))$. Для завершения доказательства осталось заметить, что кольцо $Z(G)$ изоморфно кольцу $\mathfrak{o}_1$, а кольцо $Z(M(\mathfrak{o}))$ изоморфно кольцу $\mathfrak{o}$. Лемма доказана.

Для изучения элементарных теорий модельных групп условия М1—М9 удобно несколько модифицировать.

В модельной группе $M(o)=G$ обозначим через A_1 подгруппу $\text{гр}(a)_{\mathfrak{o}}\cdot Z(G)$, через B_1 — подгруппу $\text{гр}(b)_{\mathfrak{o}}\cdot Z(G)$. Отметим, что A_1 — это централизатор элемента a, B_1 — централизатор элемента b в группе G. Тогда условия М1—М9 относительно подгрупп A_1 и B_1 принимают следующий вид.

М1.1. G нильпотентна ступени 2. Кроме того, существуют такие элементы a и b группы G, что $[a,b]\neq1$. Пусть A_1 — централизатор элемента a, B_1 — централизатор элемента b.

М1.2. G порождается подгруппами A_1 и B_1. Подгруппы A_1 и B_1 — абелевы нормальные подгруппы группы G, причем $A_1\cap B_1=Z(G)$.

М1.3. $[a,B_1]=Z(G)$, причем $[a,b_1]=[a,b_2]$ тогда и только тогда, когда $b_1=b_2(\text{mod}\,Z(G))$.

М1.4. $[A_1,b]=Z(G)$, причем $[a_1,b]=[a_2,b]$ тогда и только тогда, когда $a_1=a_2(\text{mod}\,Z(G))$.

При помощи формулы (O_1) определяем гомоморфизмы $\psi_1: A_1\to Z(G)$, $\psi_2: B_1\to Z(G)$, которые индуцируют изоморфизмы групп $\bar\psi_1: A_1/Z(G)\to Z(G)$, $\bar\psi_2: B_1/Z(G)\to Z(G)$. Пусть $\bar\varphi=\bar\psi_1\cdot\bar\psi_2^{-1}$. С помощью формул (O_4) — (O_6) на группах $A_1/Z(G)$, $B_1/Z(G)$, $Z(G)$ вводится структура кольца, а изоморфизмы $\bar\psi_1$, $\bar\psi_2$, $\bar\varphi$ становятся изоморфизмами колец. Условия М1.5—М1.9 получаются из условий М5—М9 заменой изоморфизмов ψ_1, ψ_2, φ на изоморфизмы $\bar\psi_1$, $\bar\psi_2$, $\bar\varphi$.

Лемма 4.3. *Существует замкнутая формула Φ групповой сигнатуры такая, что группа G удовлетворяет условиям* М1.1.—М1.9 *тогда и только тогда, когда Φ истинна на G.*

Доказательство. Пусть группа G вместе с подгруппами A_1, B_1 и элементами a, b удовлетворяет условиям М1.1—М1.9. Для каждого пункта М1.i условий М1.1—М1.9 построим формулу $\Phi i(a, b)$, «равносильную» условию М1.i, в которой a и b участвуют в качестве констант. Более точно, пусть Σ — групповая сигнатура, добавим к сигнатуре символы a и b в качестве символов предметных констант и обозначим новую сигнатуру через Σ'. Допуская некоторую вольность обозначений, мы через a и b обозначаем как символы сигнатуры Σ', так и выделенные элементы группы G. Однако это не вызовет недоразумений, если мы будем считать, что во всех формулах a и b означают символы сигнатуры Σ', а в остальных случаях — выделенные элементы группы G. По каждому пункту условий М1.1—М1.9 построим замкнутую формулу Φ_i сигнатуры Σ' такую, что группа G с выделенными элементами a и b удовлетворяет условию М1.i тогда и только тогда, когда в G истинна формула Φ_i, причем сигнатурные символы a, b интерпретируются элементами a, b группы G. Формулы Φ_i пишутся естественным образом для каждого пункта условий М1.1—М1.9. Сделаем это, например, для п. М1.2 и М1.6.

Построим формулу Φ_2. Группа G порождается нормальными подгруппами A_1 и B_1, причем $A_1 = C(a)$, $B_1 = C(b)$, A_1 и B_1 — абелевы и $A_1 \cap B_1 = Z(G)$.

Подгруппы A_1 и B_1 нормальны в группе G тогда и только тогда, когда в группе G истинна следующая замкнутая формула сигнатуры Σ':

$$\Phi_{21} \overset{\mathrm{df}}{=} \forall x \forall y \forall z \left([x, a] = 1 \to \left[z^{-1}xz, a\right] = 1\right) \mathbin{\&} \left([y, b] = 1 \to \left[z^{-1}yz, b\right] = 1\right).$$

Подгруппы A_1 и B_1 абелевы тогда и только тогда, когда в группе G истинна формула

$$\Phi_{22} \overset{\mathrm{df}}{=} \forall x_1 \forall x_2 \left(\left([x_1, a] = 1 \mathbin{\&} [x_2, a] = 1\right) \vee \left([x_1, b] = 1 \mathbin{\&} [x_2, b] = 1\right)\right) \to$$
$$\to x_1 x_2 = x_2 x_1).$$

Группа G порождается нормальными подгруппами A_1 и B_1, т. е. $G = A_1 B_1$, тогда и только тогда, когда в G истинна формула:

$$\Phi_{23} \overset{\mathrm{df}}{=} \forall z \exists x \exists y \left([x, a] = 1 \mathbin{\&} [y, b] = 1 \mathbin{\&} z = xy\right).$$

Наконец, $A_1 \cap B_1 = Z(G)$ тогда и только тогда, когда в G истинна формула

$$\Phi_{24} \overset{\mathrm{df}}{=} \forall z \left(\forall z_1 (z z_1 = z_1 z) \leftrightarrow ([z, a] = 1 \mathbin{\&} [z, b] = 1)\right).$$

Понятно, что в качестве Φ_2 можно взять формулу

$$\Phi_{21} \mathbin{\&} \Phi_{22} \mathbin{\&} \Phi_{23} \mathbin{\&} \Phi_{24}.$$

Построим формулу Φ_6, соответствующую коммутативности кольцевого умножения в $A_1/Z(G)$. Напомним, что $a_1 \circ a_2 = \left[a_1, a_2^{\bar{\varphi}}\right]^{\bar{\psi}_1^{-1}}$, где a_1, a_2 — элементы группы $A_1/Z(G)$. Для любых $a_1, a_2 \in A_1/Z(G)$ равенство $a_1 \circ a_2 = a_2 \circ a_1$ выполняется в группе $A_1/Z(G)$ тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x_2 \in A_1$

$$[x_1, b_2] = [x_2, b_1],$$

где b_1 и b_2 — произвольные элементы группы B_1, удовлетворяющие равенствам $b_1^{\psi_2} = a_1^{\psi_1}$, $b_2^{\psi_2} = a_2^{\psi_1}$. Следовательно, в качестве Φ_6 можно взять следующую замкнутую формулу сигнатуры Σ':

$$\forall x_1, x_2 \in A_1 \forall y_1 y_2, y_2 \in B_1(([x_1, b] = [a, y_1] \,\&\, [x_2, b] = [a, y_2]) \to [x_1, y_2] = [x_2, y_1])$$

(здесь $x_1, x_2 \in A_1$ и $y_1, y_2 \in B_1$ — сокращенная запись соответствующих формул).

Пусть Φ_i построена для любого i, $1 \leqslant i \leqslant 9$. Положим $\Phi_0 = \mathop{\&}\limits_{i=1}^{9} \Phi_i$, тогда Φ_0 — замкнутая формула сигнатуры Σ'. Искомая формула сигнатуры Σ получается из формулы Φ_0 следующим образом:

$$\Phi \overset{\mathrm{df}}{=} \exists a \exists b \Phi_0,$$

где a и b выступают уже в качестве предметных переменных. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Пусть k — произвольное поле нулевой характеристики, H — группа. Тогда $H \equiv M(k)$ тогда и только тогда, когда $H = M(k_1)$, k_1 — поле и $k \equiv k_1$.*

Доказательство. Пусть I — множество, D — ультрафильтр на I. Если G — произвольная алгебраическая система, то через $\widetilde{G}$ будем обозначать ультрастепень G^I/D.

Достаточность. Пусть $H = M(k_1)$ и $k_1 \equiv k$. По теореме Кейслера — Шелаха найдутся такое множество I и ультрафильтр D на I, что поля $\widetilde{k}_1$ и $\widetilde{k}$ изоморфны. По леммме 4.2 изоморфны группы $M(\widetilde{k}_1)$ и $M(\widetilde{k})$. По лемме 3.1 $M(\widetilde{k}_1) = \widetilde{M(k_1)}$ и $M(\widetilde{k}) = \widetilde{M(k)}$. Таким образом, некоторые ультрастепени групп H и $M(k)$ изоморфны, следовательно, $H \equiv M(k)$.

Необходимость. Пусть $H \equiv M(k)$. Поле k содержит поле $\mathbf{Q}$, поэтому $M(k)$ — делимая группа, т. е. для любого натурального числа n в группе $M(k)$ истинна формула $\forall x \exists y (y^n = x)$, следовательно, группа H также делимая, иначе говоря, H — $\mathbf{Q}$-группа. Группа $M(k)$ удовлетворяет условиям M1.1 — M1.9, по лемме 4.3 группа H тоже удовлетворяет условиям M1.1—M1.9, пусть A_1, B_1, $a \in A_1$, $b \in B_1$ — подгруппы группы H, удовлетворяющие вместе с элементами a, b условиям M1.1—M1.9. Тогда A_1 — централизатор элемента a, B_1 — централизатор элемента b. Централизатор любого множества о-степенной группы сам является о степенной подгруппой, поэтому A_1, B_1, $Z(G)$ — абелевы $\mathbf{Q}$-подгруппы группы H, причем $Z(G) < A_1$, $Z(G) < B_1$. В векторных пространствах каждое подпространство имеет прямое дополнение, поэтому найдутся такие $\mathbf{Q}$-подгруппы $A < A_1$, $B < B_1$, что $A_1 = A \times Z(G)$, $B_1 = B \times Z(G)$. Заметим, что $a \in A$, $b \in B$. Оказывается, что группа H вместе с подгруппами A, B и элементами a, b удовлетворяет M1—M9. Проверим, например, что группа H порождается подгруппами A и B. Условия M1.1—M1.4 гарантируют совпадение центра и коммутанта группы H, группа H нильпотентна, коммутант, а значит и центр, лежит в подгруппе Фраттини — подгруппе «непорождающих» элементов группы H, следовательно, $H = \text{гр}(A_1, B_1) = \text{гр}(A, B, Z(G)) = \text{гр}(A, B)$. Проверка остальных условий достаточно очевидна и опирается на разложение $A_1 = A \times Z(G)$ и $B_1 = B \times Z(G)$. Таким образом, группа H удовлетворяет условиям M1—M9, следовательно, по лемме 4.1 $H = M(k_1)$, где k_1 — некоторое поле. Группы $M(k_1)$ и $M(k)$ элементарно эквивалентны, по теореме Кейслера — Шелаха найдутся такие множество I и ультрафильтр D на I, что группы $\widetilde{M(k_1)}$ и $\widetilde{M(k)}$ изоморфны. По лемме 3.1 $\widetilde{M(k_1)} = M(\widetilde{k}_1)$ и $\widetilde{M(k)} = M(\widetilde{k})$, следовательно, по лемме 4.2 поля $\widetilde{k}_1$ и $\widetilde{k}$ изоморфны, поэтому поля k_1 и k элементарно эквивалентны. Лемма доказана.

Подобно условиям M1—M9 и M1.1—M1.9 модельной группы укажем определяющие условия для квазимодельной группы. По существу квазимодельная группа отличается от модельной тем, что ее центр не обязан совпадать с коммутантом. Поэтому если в п. М2 условий М1—М9 требование $G = \text{гр}(A, B)$ заменить на $G = \text{гр}(A, B) \cdot Z(G)$, в п. М3, М4 центр $Z(G)$ заменить на коммутант G', то получим условия К1—К9, характеризующие квазимодельную группу. Аналогично, если в п. М1.3 и М1.4 условий М1.1—М1.9 центр $Z(G)$ заменить на коммутант G', остальные оставить без изменений, то получим условия К1.1—К1.9.

Доказательства всех последующих лемм, кроме леммы 4.8, почти дословно повторяют рассуждения в случае модельной группы.

Лемма 4.5. *Группа G является квазимодельной группой $K(\mathfrak{o})$ тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условиям* К1—К8, *причем является квазимодельной группой над полем тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условиям* К1—К9.

Лемма 4.6. *Пусть группа G изоморфна группе $K(\mathfrak{o})$. Тогда $G = K(\mathfrak{o}_1)$, причем кольца $\mathfrak{o}_1$ и $\mathfrak{o}$ изоморфны.*

Доказательство следует из леммы 4.2.

Заметим, что квазимодельная группа $K(\mathfrak{o})$ определяется не однозначно, а с точностью до центральной «добавки». Поэтому две квазимодельные группы над одним и тем же кольцом не обязаны быть изоморфны между собой.

Лемма 4.7. *Существует замкнутая формула Φ групповой сигнатуры такая, что группа G удовлетворяет условиям* К1.1—К1.9 *тогда и только тогда, когда Φ истинна на G.*

Лемма 4.8. *Пусть $K(\mathfrak{o})$ — делимая квазимодельная не модельная группа, причем $\mathfrak{o}$ — поле. Делимая группа H элементарно эквивалентна группе $K(\mathfrak{o})$ тогда и только тогда, когда $H = K(\mathfrak{o}_1)$, H — немодельная, причем поля $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{o}_1$ элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Для произвольного множества I, ультрафильтра D на I, произвольной алгебраической системы G через $\tilde{G}$ будем обозначать ультрастепень G^I/D.

Достаточность. Пусть $H = K(\mathfrak{o}_1)$, причем $\mathfrak{o} \equiv \mathfrak{o}_1$. По условию группы H и $K(\mathfrak{o})$ делимые, следовательно, по лемме 1.12

$$K(\mathfrak{o}_1) = M(\mathfrak{o}_1) \times A_1, \quad K(\mathfrak{o}) = M(\mathfrak{o}) \times A,$$

где A_1 и A — делимые абелевы группы. Хорошо известно [10], что любые две делимые абелевы группы элементарно эквивалентны, значит, $A_1 \equiv A$. По лемме 3.3 найдутся такие множество I и ультрафильтр D на I, что одновременно поле $\tilde{\mathfrak{o}}_1$ изоморфно полю $\tilde{\mathfrak{o}}$, а группа $\tilde{A}_1$ изоморфна группе $\tilde{A}$. В силу лемм 3.2 и 3.1 имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \widetilde{K(\mathfrak{o}_1)} &= \widetilde{M(\mathfrak{o}_1)} \times \tilde{A}_1 = M(\tilde{\mathfrak{o}}_1) \times \tilde{A}_1, \\ \widetilde{K(\mathfrak{o})} &= \widetilde{M(\mathfrak{o})} \times \tilde{A} = M(\tilde{\mathfrak{o}}) \times \tilde{A}. \end{aligned} \tag{1}$$

Из равенств (1), учитывая изоморфность групп $M(\tilde{\mathfrak{o}}_1)$ и $M(\mathfrak{o})$, $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}$, получаем изоморфизм ультрастепеней $\widetilde{K(\mathfrak{o}_1)}$ и $\widetilde{K(\mathfrak{o})}$, следовательно, группы $K(\mathfrak{o}_1)$ и $K(\mathfrak{o})$ элементарно эквивалентны.

Необходимость. Пусть $H \equiv K(\mathfrak{o})$. По лемме 4.7 группа H удовлетворяет условиям К1.1—К1.9. По условию группа H делимая. Рассуждения, проведенные в доказательстве леммы 4.4, показывают, что в этом случае в группе H можно выделить модельную группу $M(\mathfrak{o}_1)$ над некоторым полем $\mathfrak{o}_1$, причем так, что $H = M(\mathfrak{o}_1) \cdot Z(H)$. Иначе говоря, $H = K(\mathfrak{o}_1)$. Осталось доказать, что $\mathfrak{o} \equiv \mathfrak{o}_1$. По теореме Кейслера — Шелаха найдутся такие множество I и ультрафильтр D на I, что группа $\widetilde{K(\mathfrak{o})}$ изоморфна группе $\widetilde{K(\mathfrak{o}_1)}$. Отсюда следует изоморфизм групп $M(\tilde{\mathfrak{o}}) \times \tilde{A}$ и $M(\tilde{\mathfrak{o}}_1) \times \tilde{A}_1$, где A и A_1 определяются из равенств $K(\mathfrak{o}) = M(\mathfrak{o}) \times A$, $K(\mathfrak{o}_1) = M(\mathfrak{o}_1) \times A$. По лемме 4.6 получаем, что группа $M(\tilde{\mathfrak{o}}) \times \tilde{A}$ является квазимодельной группой как над полем $\tilde{o}$, так и над некоторым полем, изоморфным полю $\tilde{o}_1$. Докажем, что в этом случае поля $\tilde{o}$ и $\tilde{o}_1$ изоморфны, тем самым будет доказана элементарная эквивалентность полей $\tilde{o}$ и $\tilde{o}_1$. Оказывается верно следующее, более общее утверждение. Пусть $G = M(k)Z(G) = M(k_1)Z(G)$, где k и k_1 — произвольные поля характеристики ноль, тогда поля k и k_1 изоморфны. Действительно, пусть a, b, $[a, b] \neq 1$ — k-порождающие группы $M(k)$. Тогда $a = a_1z_1$, $b = b_1z_2$, где a_1, $b_1 \in M(k_1)$, z_1, $z_2 \in Z(G)$, причем $[a_1, b_1] \neq 1$. Так как k_1 — поле, то a_1 и b_1 — k_1-порождающие группы $M(k_1)$. Операция $\circ$, построенная на коммутанте G' группы G при помощи элементов a и b, превращает G' в кольцо, изоморфное полю k. С другой стороны, операция $\circ^1$, построенная на коммутанте G' группы G, при помощи элементов a_1 и b_1 превращает G' в кольцо, изоморфное полю k_1. Так как $a = a_1z_1$, $b = b_1z_2$, элементы z_1, $z_2 \in Z(G)$, то операции $\circ$ и $\circ^1$ на группе G' совпадают, следовательно, поля k и k_1 изоморфны. Возвращаясь к доказательству леммы, получаем изоморфизм полей $\tilde{o}$ и $\tilde{o}_1$. Лемма доказана.

Отметим следующий факт, попутно доказанный нами в лемме 4.8. Пусть $K(o_1) = K(o_2)$, причем кольца o_1 и o_2 являются полями. Тогда поля o_1 и o_2 изоморфны.

Доказательства лемм 4.4 и 4.8 содержат некоторую общую часть, а именно, если G — делимая группа, то из выполнимости в группе G условий М1.1—М1.9 или К1.1—К1.9 следует соответственно выполнимость в группе G условий М1—М9 или К1—К9. Зафиксируем это утверждение в качестве леммы.

Лемма 4.9. *Пусть G — делимая группа. Тогда условия* М1—М9 *выполняются в группе G тогда и только тогда, когда выполняются условия* М1.1—М1.9. *Аналогично выполнимость в группе G условий* К1—К9 *равносильна выполнимости в группе G условий* К1.1—К1.9.

Из выполнимости в группе G условий К1.1—К1.4 не следует, что группа G — квазимодельная, однако верна следующая

Лемма 4.10. *Пусть k-группа G конечного ранга удовлетворяет условиям* К1.1—К1.4, *тогда группа G содержит относительно формульную квазимодельную группу G_1, причем если G — o-степенная группа, то G_1 — o-степенная подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть группа G вместе с подгруппами A, B и элементами $a \in A$, $b \in B$ удовлетворяет условиям К1.1—К1.4. Тогда на группах $A/Z(G)$ и $B/Z(G)$ можно ввести структуру кольца с единицей и без делителей нуля, но в общем случае неассоциативного и некоммутативного. Если элемент $x \in A$, то через $\bar{x}$ будем обозначать образ элемента x в группе $A/Z(G)$. Пополним групповую сигнатуру символами предметных констант a и b, которые в группе G будут интерпретироваться элементами a и b. Полученную сигнатуру обозначим через Σ'. В лемме 4.3 показано, как определить операцию $\circ$ в группах $A/Z(G)$ и $B/Z(G)$ на языке формул сигнатуры Σ'. Поэтому в следующих формулах мы будем для краткости употреблять символ операции $\circ$, подразумевая под этим обозначение соответствующей формулы.

Первый шаг. Выделим множество элементов группы A, образы которых в $A/Z(G)$ составляют центр кольца $A/Z(G)$. Пусть

$A_1 = \{a_1 \in A \mid \forall a_2 \in A(\bar{a}_1 \circ \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \circ \bar{a}_1)\}$.

Очевидно, что A_1 — $\mathbf{Q}$-подгруппа и выделяется в группе A формулой сигнатуры Σ', причем образ подгруппы в группе $A/Z(G)$ образует коммутативное подкольцо — центр кольца $A/Z(G)$. Аналогично выделяется подгруппа B_1 группы B. Заметим, что подгруппы A_1 и B_1, по крайней мере, содержат центр $Z(G)$ и соответственно $\mathbf{Q}$-подгруппы гр$(a)\mathbf{Q}$ и гр$(b)\mathbf{Q}$. Действительно, элементы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — кольцевые единицы колец $A/Z(G)$ и $B/Z(G)$, которые на самом деле являются $\mathbf{Q}$-алгебрами (группы A, B,

$Z(G)$ — $\mathbf{Q}$-группы), поэтому однопараметрические $\mathbf{Q}$-подпространства, натянутые на $\bar{a}$ и $\bar{b}$, лежат соответственно в центрах колец $A/Z(G)$ и $B/Z(G)$.

Второй шаг. Выделим в подгруппе A_1 элементы, образы которых составляют ассоциативное подкольцо кольца $A_1/Z(G)$. Пусть

$$A_2 = \{a_2 \in A_1 \mid \forall x,\ y \in A_1(\bar{a}_2 \circ (\bar{x} \circ \bar{y}) = (\bar{a}_2 \circ \bar{x}) \circ \bar{y}\}.$$

Непосредственно проверяется, что A_2 — $\mathbf{Q}$-подгруппа группы A_1, содержащая элемент a и центр $Z(G)$. Очевидно, что подгруппа A_2 выделяется в группе A_1 (а значит, и в группе G) формулой сигнатуры Σ'. Аналогично выделяется подгруппа B_2 в группе B_1.

По построению кольца $A_2/Z(G)$ и $B_2/Z(G)$ — ассоциативные, коммутативные $\mathbf{Q}$-алгебры без делителей нуля, следовательно, кольца $A_2/Z(G)$ и $B_2/Z(G)$ биномиальны. Пусть $G_1 = \text{гр}(A_2, B_2) = A_2 \cdot B_2$, тогда G_1 — формульная подгруппа группы G сигнатуры Σ'. Непосредственно проверяется, что группа G_1 удовлетворяет условиям К1.1—К1.8. Так как группа G_1 делимая, то по лемме 4.9 группа G удовлетворяет условиям К1—К8, следовательно, по лемме 4.5 G_1 квазимодельная. Если группа G — о-степенная группа, то непосредственно проверяется, что подгруппы A_1 и A_2, B_1 и B_2 — о-степенные подгруппы группы G. Следовательно, группа $G_1 = \text{гр}(A_2, B_2)$ также является о-степенной подгруппой группы G. Лемма доказана.

Лемма 4.11. *Пусть k — поле характеристики нуль, G — k-степенная группа конечного ранга, удовлетворяющая условиям* К1.1—К1.4. *Тогда группа G содержит относительно формульную квазимодельную группу $K(k_1)$,* где k_1 — *некоторое конечное алгебраическое расширение поля k.*

Доказательство. По лемме 4.10 группа G содержит k-степенную относительно формульную подгруппу G_1 являющуюся квазимодельной группой $K(\mathfrak{o})$, где $\mathfrak{o}$ — некоторая область целостности. По определению квазимодельной группы $K(\mathfrak{o}) = M(\mathfrak{o}) \cdot Z(K(\mathfrak{o}))$. Пусть a, b — порождающие группы $M(\mathfrak{o})$, A — централизатор элемента a в группе $M(\mathfrak{o})$. Как отмечалось ранее, на группе A при помощи формулы (O_4) можно определить структуру кольца, причем кольца A и $\mathfrak{o}$ изоморфны. Легко видеть, что отображение $\alpha \in k \to a^\alpha \in A$ является мономорфизмом колец. Группа A — k-степенная группа конечного ранга, поэтому кольцо A является конечномерной коммутативной алгеброй без делителей нуля над полем k, следовательно, A — поле конечной размерности над k. Таким образом, $K(A)$ — искомая квазимодельная группа. Лемма доказана.

§ 5. ИЗОМОРФИЗМЫ СТЕПЕННЫХ ГРУПП

На протяжении всего параграфа символ k означает поле характеристики нуль.

Определение. Поле k будем называть *автоустойчивым,* если любой изоморфизм $\theta : k_1 \to k_2$ произвольных конечных алгебраических расширений k_1 и k_2 поля k оставляет поле k на месте, т. е. $k^\theta = k$.

Например, простые и алгебраические замкнутые поля являются автоустойчивыми.

Лемма 5.1. *Пусть I — множество, D — ультрафильтр на I. Тогда поле $\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^I/D$ является автоустойчивым.*

Доказательство. Пусть k — произвольное конечное алгебраическое расширение поля $\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^I/D$. Поле $\widetilde{\mathbf{Q}}$ — характеристики нуль, следовательно, k — сепарабельное расширение поля $\widetilde{\mathbf{Q}}$. Пусть α — примитивный элемент расширения k над $\widetilde{\mathbf{Q}}$, $f(x) \in \widetilde{\mathbf{Q}}[x]$ — неприводимый над $\widetilde{\mathbf{Q}}$ многочлен такой, что $f(\alpha) = 0$, $f(x) = \tilde{a}_n x^n + \ldots + \tilde{a}_0$, где $\tilde{a}_i \in \widetilde{\mathbf{Q}}$, $i = 0, \ldots$

..., n. Обозначим через $\prod_I \mathbf{Q}$ декартову степень поля $\mathbf{Q}$, тогда элементы $\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_n$ суть классы эквивалентности по фильтру D некоторых элементов $a_0, \ldots, a_n$ из $\prod_I \mathbf{Q}$. Для каждого $i \in I$ через $f_i(x)$ обозначим многочлен $a_n(i)x^n + \ldots + a_0(i)$ с рациональными коэффициентами. Пусть $\alpha_i \in \mathbf{C}$ — произвольный корень многочлена $f_i(x)$. Через k_i обозначим поле $\mathbf{Q}(\alpha_i)$ — конечное алгебраическое расширение поля $\mathbf{Q}$. Тогда $k = \prod_I k_i/D$. Действительно, поле $\tilde{k} = \prod_I k_i/D$ содержит поле $\tilde{\mathbf{Q}}$, пусть $\tilde{\alpha}$ — класс эквивалентности функции $i \in I \to \alpha_i \in k_i$ из декартова произведения $\prod_I k_i$. Ясно, что $\tilde{\alpha}$ — корень многочлена $f(x)$, причем $\tilde{k} = \tilde{\mathbf{Q}}(\alpha)$. Следовательно, поля k и $\tilde{k} = \prod_I k_i/D$ изоморфны. По теореме Д. Робинсон [10] для любого натурального n существует формула $\Phi_n(x)$ кольцевой сигнатуры, выделяющая поле $\mathbf{Q}$ в каждом конечном алгебраическом расширении K поля $\mathbf{Q}$ степени не выше n. По лемме 3.4 формула Φ_n выделяет поле $\tilde{\mathbf{Q}}$ в поле $\tilde{k} = k$. Очевидно, что любой автоморфизм поля k оставляет поле $\tilde{\mathbf{Q}}$ на месте. Лемма доказана.

Введем некоторые обозначения. Пусть k — поле характеристики нуль. Через $T(k)$ будем обозначать класс всех k-степенных групп конечного ранга, центр которых содержится в коммутанте, $T_0(k)$ — подкласс класса $T(k)$, состоящий из всех $\mathbf{Q}$-определенных групп класса $T(k)$.

Лемма 5.2. *Пусть G — k-степенная группа конечного ранга. Тогда для любой пары a, b некоммутирующих элементов группы G, $[a, b] \in Z(G)$, существует относительно формульная подгруппа, содержащая элементы a, b и удовлетворяющая условиям $K1$—$K4$ квазимодельной группы.*

Доказательство. Пусть a, $b \in G$, причем $1 \neq [a, b] \in Z(G)$. В силу конечности ранга группы G, любая убывающая последовательность k-подгрупп группы G стабилизируется через конечное число шагов (лемма 1.11), поэтому множество относительно формульных k-степенных подгрупп группы G, содержащих элементы a и b, имеет минимальный элемент, обозначим его через Φ. Докажем, что Φ — искомая относительно формульная подгруппа. Доказательство разбивается на два случая.

Пусть подгруппа Φ нильпотентна ступени два. Проверим, что Φ удовлетворяет условиям K1.1—K1.4 квазимодельной группы. K1.1. Пусть $A = C_\Phi(a)$, $B = C_\Phi(b)$ — централизаторы элементов a, b в группе Φ. K1.2. A и B — относительно формульные k-степенные подгруппы группы Φ, причем $a \in A$, $b \in B$. Группа гр. $(A, B) = A \cdot B$ — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, содержащая элементы a и b, ввиду минимальности Φ имеем равенство $\Phi = A \cdot B$. Докажем, что $A \cap B = Z(\Phi)$. Действительно, пусть элемент c принадлежит подгруппе $A \cap B$. Централизатор $C_\Phi(c)$ — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, причем a, $b \in C_\Phi(c)$, следовательно $C_\Phi(c) = \Phi$, иначе говоря $c \in Z(\Phi)$. Подгруппы A и B абелевы. Пусть, напротив, существуют, например, элементы a_1, $a_2 \in A$ такие, что $[a_1, a_2] \neq 1$. Централизатор $C_\Phi(a_1)$ элемента a_1 — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, причем $C_\Phi(a_1)$ содержит элемент a. Тогда группа $C_\Phi(a_1) \cdot B$ — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, содержащая элементы a и b, из минимальности Φ получаем $C_\Phi(a_1) \cdot B = \Phi = A \cdot B$. Поэтому $a_2 = xy$, где $x \in C_\Phi(a_1)$, $y \in B$. Следовательно, $x^{-1}a_2 = y$ и элемент $x^{-1}a_2 \in A \cap B = Z(\Phi)$. Таким образом, элементы x и a_2 отличаются на центральный элемент, значит, $a_2 \in C_\Phi(a_1)$ — противоречие.

К1.3—К1.4. Докажем, что $[a, B]=[A, b]=[\Phi, \Phi]$. Пусть

$$A_1=\{x\in A\,|\,[x, B]\leqslant[a, B]\},$$
$$B_1=\{y\in B\,|\,[A_1, y]\leqslant[A_1, b]\}.$$

Очевидно, что A_1 — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, следовательно, B_1 — также относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, причем $a\in A_1$, $b\in B_1$, $A_1\geqslant Z(\Phi)$, $B_1\geqslant Z(\Phi)$. Подгруппа $\text{гр}(A_1, B_1)=A_1\cdot B_1$ — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, следовательно, $\Phi=A_1\cdot B_1$. Рассуждения. проведенные в предыдущем пункте, показывают, что в этом случае $A=A_1$, $B=B_1$. Подгруппы A и B — абелевы, поэтому коммутант Φ' группы Φ равен $[A, B]=[a, B]=[A, b]$.

Пусть для некоторых элементов $a_1, a_2\in A$ имеем равенство $[a_1, b]=[a_2, b]$. Тогда $\left[a_1a_2^{-1}, b\right]=1$ и элемент $a_1a_2^{-1}\in A\cap B=Z(\Phi)$, следовательно, $a_1=a_2\ (\mathrm{mod}\,Z(\Phi))$. Аналогично проверяется, что из $[a, b_1]=[a, b_2]$ следует $b_1=b_2\ (\mathrm{mod}\,Z(\Phi))$.

Мы установили, что группа Φ удовлетворяет условиям К1.1—К1.4 Группа Φ — делимая, следовательно, по лемме Φ удовлетворяет также условиям К1.—К4.

Общий случай. Пусть Φ — минимальная относительно формульная k-степенная подгруппа группы G, содержащая элементы a и b. Для доказательства леммы достаточно понять, что Φ имеет ступень нильпотентности два. По условию элемент $[a, b]$ лежит в центре группы G. Пусть

$$\Phi_1=\{x\in\Phi\,|\,[x, a]\in Z(G)\ \&\ [x, b]\in Z(G)\}.$$

Очевидно, что Φ_1 — относительно формульная k-степенная подгруппа группы Φ, причем $a, b\in\Phi_1$. Пусть

$$\Phi_2=\{x\in\Phi_1\,|\,\forall y\in\Phi_1([y, x]\in Z(G))\}.$$

Тогда Φ_2 — k-степенная относительно формульная подгруппа группы Φ ступени нильпотентности два, причем $a, b\in\Phi_2$. В силу минимальности Φ получаем равенство $\Phi=\Phi_2$. Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть G — k-степенная группа конечного ранга. Тогда существует центральный ряд относительно формульных k-подгрупп*

$$Z(G)=R_0\leqslant R_1\leqslant\ldots\leqslant R_n=G$$

группы G такой, что для любого изоморфизма k-групп $\varphi: G\to H$ ограничение φ на R_i является полулинейным по модулю R_{i-1}.

Доказательство. Пусть a — элемент группы G такой, что для некоторого y из G коммутатор $[a, y]$ неединичен и лежит в центре $Z(G)$ (например, $a\in Z_2(G)\backslash Z(G)$). По лемме 5.2 существует относительно формульная k-подгруппа Φ группы G, содержащая элементы a, y и удовлетворяющая условиям К1—К4. По лемме 4.12 найдется элемент b из Φ, $[a, b]\neq 1$, и относительно формульная подгруппа $K(a, b)\leqslant\Phi$ — квазимодельная над некоторым полем, k_1-конечным алгебраическим расширением поля k, причем $K(a, b)$ содержит элементы a, b. Тогда относительно формульна и подгруппа $[a, b]^{k_1}$ — коммутант группы $K(a, b)$. Действительно,

$$K(a, b)'=\{[x, y]\,|\,x\in A,\ y\in B\},$$

где A и B — централизаторы в группе $K(a, b)$ соответственно элементов a и b. (Очевидно, A и B относительно формульны.)

Из построения подгруппы Φ в лемме 5.2 ясно, что $K(a, b)'\leqslant Z(G)$. В частности, $[a, b]^{k_1}$ — нормальная подгруппа группы G.

Положим

$$R(G)=\{x\in G\,|\,\forall y\,[x,\,y]\in[a,\,b]^{k_1}\}.$$

Легко понять, что $R(G)$ — прообраз центра при естественном эпиморфизме

$$\eta: G\to G/[a,\,b]^{k_1},$$

следовательно, справедливы включения

$$R(G)\geqslant z(G)\geqslant[a,\,b]^{k_1}.$$

Зафиксируем произвольно изоморфизм k-групп $\varphi: G\to H$. Для элемента a из G через $\bar{a}$ будем для краткости обозначать элемент a^{φ} из H.

Докажем, что изоморфизм φ полулинейный на подгруппе $[a,\,b]^{k_1}$. Из построения $K(a,\ b)$ ясно, что $K(a,\ b)^{\varphi}$ — k-подгруппа группы H. Действительно, достаточно в доказательстве леммы 5.2 рассмотреть минимальную относительно формульную k-подгруппу Φ, содержащую элементы a, b и образ которой при любом изоморфизме k-групп $\varphi: G\to H$ является k-подгруппой группы H. Дословно повторяя рассуждения леммы 5.2, легко убедиться, что Φ удовлетворяет условиям K1—K4. Аналогично проверяется, что образ подгруппы $K(a,\ b)$, построенной в лемме 4.12, при изоморфизме φ также является k-подгруппой. Так как $K(a,\ b)^{\varphi}$ изоморфна $K(a,\ b)$, то по лемме 4.2 $K(a,\ b)^{\varphi}$ — квазимодельная подгруппа над полем k', причем ограничение θ изоморфизма φ на подгруппу $[a,\,b]^{k_1}$ является изоморфизмом полей k_1 и k'. По условию поле k автоустойчиво, следовательно, $k^{\theta}=k$.

Пусть $[u,\,v]\in[a,\,b]^{k_1}$, $\lambda\in k$. Обозначим через $\circ$ операцию кольцевого умножения на коммутанте квазимодельной группы $K(a,\ b)$, а через $\bar{\circ}$ — соответствующую операцию в $K(a,\ b)^{\varphi}$. Тогда

$$[u,\ v]^{\lambda}=[u,\ v]\circ[a,\ b]^{\lambda},$$

следовательно,

$$\overline{[u,\,v]^{\lambda}}=\overline{[u,\,v]}\,\bar{\circ}\,\overline{[a,\,b]^{\lambda}}=[\bar{u},\,\bar{v}]\,\bar{\circ}\,[\bar{a},\,\bar{b}]^{\lambda\theta}=[\overline{u,\,v}]^{\lambda\theta},$$

что и доказывает полулинейность изоморфизма φ на $[a,\ b]^{k_1}$.

Докажем теперь, что φ — полулинейный по модулю $Z(H)$ на подгруппе $R(G)$. Возьмем произвольный нецентральный элемент x из $R(G)$. Положим $\bar{c}=\overline{x^{\lambda}}\bar{x}^{-\lambda\theta}$, т. е.

$$\overline{x^{\lambda}}=\bar{x}^{\lambda\theta}\bar{c},$$

и докажем, что $\bar{c}$ лежит в центре группы H. Пусть $\bar{y}$ — произвольный элемент из H.

Тогда

$$\overline{[x^{\lambda},\,y]}=[\bar{x}^{\lambda\theta}\bar{c},\,\bar{y}]=[\bar{x},\,\bar{y}]^{\lambda\theta}[\bar{c},\,\bar{y}]. \tag{1}$$

Заметим, что равенство $[\bar{x}^{\lambda\theta},\,\bar{y}]=[\bar{x},\,\bar{y}]^{\lambda\theta}$ справедливо, так как по построению $R(G)$ элемент $[\bar{x},\,\bar{y}]$ лежит в центре $Z(H)$.

С другой стороны, $[x^{\lambda},\,y]\in[a,\,b]^{k_1}$ и в силу полулинейности φ на $[a,\,b]^{k_1}$ имеем:

$$\overline{[x^{\lambda},\,y]}=\overline{[x,\,y]^{\lambda}}=\overline{[x,\,y]}^{\lambda\theta} \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует $[\bar{c},\,\bar{y}]=1$. Таким образом, доказано, что φ полулинейный по модулю $Z(H)$ на подгруппе $R(G)$. Возьмем в качестве R_1 подгруппу $R(G)$.

Рассмотрим факторгруппу

$$G_1 = G/[a, b]^{k_1}.$$

Ясно, что $l(G_1) < l(G)$. Используя индукцию по рангу, можно считать, что в группе G_1 искомая цепочка подгрупп

$$Z(G) \leqslant R_1(G_1) \leqslant \ldots \leqslant R_s(G_1) = G_1$$

уже построена. Положим

$$R_{i+1} = (R_i(G))^{\eta^{-1}}, \ i = 1, \ldots, s.$$

Подгруппы R_{i+1} относительно формульны. Действительно, пусть $\Phi_i\left(x, a_1^{\eta_1}, \ldots, a_m^{\eta}\right)$ — формула с константами из G_1, выделяющая подгруппу $R_i(G_1)$ в G_1, $\Psi(x, b_1, \ldots, b_t)$ — формула с константами из G, выделяющая $[a, b]^{k_1}$ в G. Будем считать, что Φ_i находится в приведенной пренексной нормальной форме, т. е. $\Phi_i = Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\Phi_{i0}$, где Q_i — кванторы, Φ_{i0} находится в дизъюнктивной нормальной форме и каждая атомарная подформула Φ_{i0} имеет вид либо $uv = w$, либо $y \neq z$.

Формула, выделяющая R_{i+1} в G, получается из Φ_i переписыванием подформулы Φ_{i0}, по модулю подгруппы $[a, b]^{k_1}$. А именно, каждую атомарную подформулу вида $uv = w$ заменим на формулу

$$\exists f(\psi(f) \,\&\, uv = wf),$$

а каждую атомарную формулу вида $y \neq z$ заменим на формулу

$$\forall f(\psi(f) \to y \neq zf).$$

Далее элементы $a_1^{\eta}, \ldots, a_m^{\eta}$ заменим на $a_1, \ldots, a_m$. Очевидно, что полученная формула выделяет R_{i+1} в G.

Из включения $R_1(G_1) \geqslant Z(G_1)$ и равенства $R_1(G) = Z(G_1)^{\eta^{-1}}$ следует, что

$$Z(G) \leqslant R_1(G) \leqslant R_2(G) \leqslant \ldots \leqslant R_{s+1} = G. \tag{3}$$

Пусть изоморфизм φ индуцирует на факторгруппе G_1 изоморфизм $\varphi_1 : G_1 \to H_1$, где

$$H_1 = H\Big/\left([a, b]^{k_1}\right)^{\varphi}.$$

Как было доказано выше, $\left([a, b]^{k_1}\right)^{\varphi}$ — k-подгруппа группы H. Поэтому φ_1 является изоморфизмом k-групп. По индукции ограничение φ_1 на $R_1(G_1)$ является полулинейным по модулю $Z(G_1)$, поэтому переходя к прообразам получим, что ограничение φ на $R_2(G)$ является полулинейным по модулю $R_1(G)$. Полулинейность φ в факторах R_{i+1}/R_i очевидна.

Центральность ряда подгрупп (3) непосредственно следует из построения.

Теорема доказана.

Приведем пример, показывающий что даже в случае ступени нильпотентности два не каждый изоморфизм k-групп является полулинейным по модулю центра.

Лемма 5.3. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле с нетривиальным дифференцированием η, в частности k автоустойчиво, $\mathfrak{o}$ — двумерная k-алгебра с порождающими 1, c, причем $c^2 = 0$. Тогда модельная группа $M(\mathfrak{o})$, рассматриваемая как k-группа, обладает автоморфизмом, не являющимся полулинейным по модулю центра.*

Доказательство. Определим сначала автоморфизм θ кольца $\mathfrak{o}$ следующим образом. Положим

$\theta : 1 \cdot \alpha \to 1 \cdot \alpha + c\alpha^{\eta}$,

$\theta : c\alpha \to c\alpha,$
для каждого $\alpha \in k$.

Проверка аддитивности и мультипликативности отображения θ проводится прямым вычислением и использует элементарные свойства дифференцирования η. Равенства $\theta(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ и $\ker \theta = 0$ очевидны.

Автоморфизм кольца $\mathfrak{o}$ индуцирует автоморфизм φ группы $M(\mathfrak{o})$. А именно, если a, b, $d = [a, b]$ — $\mathfrak{o}$-порождающие группы $M(\mathfrak{o})$, то положим
$(a^{\alpha} b^{\beta} d^{\gamma})^{\varphi} = a^{\alpha\theta} b^{\beta\theta} d^{\gamma\theta}$.

Автоморфизм φ не является полулинейным по модулю $Z(M(\mathfrak{o}))$. Действительно, по условию дифференцирование η нетривиально, поэтому найдется элемент $\alpha \in k$, такой, что $\alpha^{\eta} \neq 0$. Тогда

$$(a^{\alpha})^{\varphi} = a^{\alpha + c\alpha^{\eta}}.$$

Центр группы $M(\mathfrak{o})$ имеет вид $\{d^{\lambda} | \lambda \in \mathfrak{o}\}$, поэтому полулинейность автоморфизма φ по модулю центра означает, что найдутся элементы $x \in k$, $\lambda \in \mathfrak{o}$, для которых справедливо равенство:

$$a^{\alpha + c\alpha^{\eta}} = a^{x} d^{\lambda}.$$

Однако a, b, d — мальцевская база группы $H(\mathfrak{o})$, следовательно, предыдущее равенство влечет равенство показателей:

$$\alpha + c\alpha^{\eta} = x,$$

что невозможно, так как $\alpha^{\eta} \neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 5.4. *Пусть G — k-группа из класса $T(k)$. Тогда существует мальцевская база $u_1, \ldots, u_n$ группы G такая, что для любого изоморфизма k-групп $\varphi : G \to H$ $u_1^{\varphi}, \ldots, u_n^{\varphi}$ — мальцевская база группы H.*

Доказательство. Предварительно докажем следующее утверждение. Пусть $f : A \to B$ изоморфизм k-групп, A_1 — нормальная k-подгруппа A такая, что A/A_1-абелева, $B_1 = A_1^{f}$ — k-подгруппа группы B и изоморфизм f является полулинейным по модулю B_1. Тогда, если $a_1, \ldots, a_m$ — k-база A по модулю A_1, то $a_1^{f}, \ldots a_m^{f}$ — k-база B по модулю B_1.

Действительно, пусть $b = (a_1^{f})^{\alpha_1} \ldots (a_m^{f})^{\alpha_m} \equiv 0 \pmod{B_1}$. Обозначим через θ автоморфизм поля k, соответствующий полулинейному по модулю B_1 изоморфизму f. Тогда найдутся элементы β_i такие, что $\alpha_i = \beta_i\theta$, $i = 1, \ldots, m$. Следовательно,

$$\left(a_1^{\beta_1} \ldots a_m^{\beta_m}\right)^{f} \equiv b \equiv 0 \pmod{B_1}$$

и, значит,

$$a_1^{\beta_1} \ldots a_m^{\beta_m} \equiv 0 \pmod{A_1}.$$

В силу независимости системы $a_1, \ldots, a_m$ по модулю A_1 получаем

$$\beta_1 = \ldots = \beta_m = 0,$$

откуда

$$\alpha_1 = \beta\theta = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_m = \beta_m\theta = 0.$$

С другой стороны, если

$$b^{f^{-1}} \equiv a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\gamma_m} \pmod{A_1},$$

то в силу полулинейности f по модулю B_1 имеем:

$$b \equiv \left(a_1^f\right)^{\alpha_1\theta} \dots \left(a_m^f\right)^{\alpha_m\theta},$$

т. е. $a_1^f, \dots, a_m^f$ — k-база B по модулю B_1.

Построим центральный ряд группы G, начинающийся с единицы, так, чтобы любой изоморфизм k-групп $\varphi: G \to H$ действовал в каждом факторе этого ряда полулинейно.

Рассмотрим ряд k-подгрупп

$$Z(G) = R_0 \leqslant R_1 \leqslant \dots \leqslant R_n = G, \tag{1}$$

построенный в теореме 5.1. Образуем из него следующий ряд k-подгрупп $R_i' = [R_i, G]$:

$$1 = R_0' \leqslant R_1' \leqslant \dots \leqslant R_n' = G'. \tag{2}$$

Уплотним этот ряд следующим образом. Положим

$$R_{ij} = R_i' \gamma_{c+1-j}(R_{i+1}),$$

$0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant c-1$, $\gamma_{c+1}(G) = 1$. Очевидно, что

$$R_{i0} = R_i' \leqslant R_{i1} \leqslant \dots \leqslant R_{ic-1} = R_{i+1}'. \tag{3}$$

Положим, наконец,

$$Z_{ij} = R_{ij} \cap Z(G).$$

По условию леммы $Z(G) \leqslant G'$ (группа G из класса $T(k)$), поэтому

$$Z(G) = Z(G) \cap G' = Z(G) \cap R_{n-1,\, c-1} = Z_{n-1,\, c-1},$$

$$Z_{00} = R_{00} \cap Z(G) = R_0' \cap Z(G) = 1.$$

Рассмотрим ряд

$$Z_{00} \leqslant Z_{01} \leqslant \dots \leqslant Z_{0c-1} \leqslant \dots \leqslant Z_{n-1,\, c-2} \leqslant Z_{n-1,\, c-1}. \tag{4}$$

Уплотним ряд (1) в первом члене при помощи ряда (4). Полученный ряд

$$1 \leqslant Z_{01} \leqslant \dots \leqslant R_0 \leqslant R_1 \leqslant \dots \leqslant R_n = G \tag{5}$$

искомый. Действительно, достаточно доказать, что произвольный изоморфизм k-групп $\varphi: G \to H$ является полулинейным в каждом факторе Z_{ij+1}/Z_{ij}, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant c-2$. Пусть $x \in Z_{ij+1} = R_i' \gamma_{c-j}(R_{i+1}') \cap \cap Z(G)$. Для простоты обозначим $g^\varphi = \bar{g}$, $g \in G$, $c - j = t + 1$, $\gamma_0\left(R_{i+1}'\right) = G$. Тогда

$$Z_{ij+1} = R_i' \gamma_t (R_{i+1}') \cap Z(G),$$

$$Z_{ij} = R_i' \gamma_{t+1} (R_{i+1}') \cap Z(G).$$

Заметим, что для любого j подгруппа Z_{ij} содержит $R_i' \cap Z(G)$. Имеем

$$x = r \Pi [w_s, a_s],$$

где $r \in R_i'$, $w_s \in \gamma_{t-1}(R_{i+1}')$, $a_s \in R_{i+1}'$ при $t \geqslant 2$, $a_s \in R_{i+1}$ при $t = 1$, s пробегает конечное множество индексов. Тогда

$$x \equiv \Pi [w_s, a_s] \pmod{R_i'},$$

$$x^\lambda \equiv (\Pi [w_s, a_s])^\lambda \equiv \Pi \left[w_s, a_s^\lambda\right] \pmod{R_i'}, \quad \lambda \in k,$$

последнее уравнение справедливо, так как элементы $[w_s, a_s]$ центральны по модулю $\gamma_{t+1}(R_{i+1}')'$, а значит, и подгруппы R_i'. Следовательно,

$$\overline{x^\lambda} \equiv \Pi \left[\bar{w}_s, \bar{a}_s^{\lambda\theta} \bar{c}_s\right] \equiv \Pi \left[\bar{w}_s, \bar{a}_s^{\lambda\theta}\right] [\bar{w}_s, \bar{c}_s] \left(\mathrm{mod}\, (R_i')^\varphi\right),$$

где c_s — элементы из подгруппы R_i, а θ — автоморфизм поля k, ассоциированный с полулинейным изоморфизмом, который индуцирован изоморфизмом φ на факторе R_{i+1}/R_i.

Для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n$, члены ряда (1) удовлетворяют свойству:

$$\gamma_t(R'_{i+1}) \leqslant R'_i, \ t \geqslant 2, \tag{6}$$

Действительно, для $R_0 = Z(G)$ доказательство очевидно. R_1 удовлетворяет (6) по построению (см. теорему 5.1). Для произвольного i, $1 \leqslant i \leqslant \leqslant n$, свойство (6) доказывается по индукции, переходя как и в теореме 5.1 к факторгруппе

$$G/[a, b]^{k_1} = G/R'_1.$$

В силу свойства (6) получаем $R_{ij} = R'_i$, $Z_{ij} = R'_i \cap Z(G)$, $\quad t \geqslant 2$,

$$[w_s, c_s] \in R'_i$$

и, значит,

$$\overline{x^\lambda} \equiv \Pi [\bar{w}_s, \bar{a}_s]^{\lambda\theta} \equiv (\Pi [\bar{w}_s, \bar{a}_s])^{\lambda\theta} \pmod{Z^{\varphi}_{ij}}.$$

Таким образом, (5) искомый. Для завершения доказательства леммы осталось выбрать мальцевскую базу, приуроченную к ряду (5), и воспользоваться утверждением, доказанным в начале доказательства леммы.

Лемма доказана.

Теорема 5.2. *Пусть поле k автоустойчиво*, $\varphi: G \to H$ — *изоморфизм групп из класса $T_0(k)$, тогда существует k-изоморфизм групп G и H.*

Доказательство. Пусть G_0 — равномерная подгруппа группы G. Тогда по лемме 5.5 $l(G) = l(H)$ и $\text{гр}\,(G_0^\varphi)_k = H$. В этом случае существование k-изоморфизма групп G и H гарантируется теоремой 2.1. Теорема доказана.

§ 6. КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ k-СТЕПЕННЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА

В этом параграфе будет дана элементарная классификация Q-определенных k-степенных групп конечного ранга для автоустойчивого поля k. В частности, будет дана классификация элементарных теорий Q-групп конечного ранга.

Определение. Пусть G — k-степенная группа, Q — определенная группа конечного ранга. По лемме 1.12 $G = \bar{G} \times A$, где $\bar{G} \in T_0(k)$, $A \leqslant Z(G)$ и $\bar{G}$ определяется по G однозначно с точностью до изоморфизма. Группу $\bar{G}$ будем называть *основой группы G*.

Теорема 6.1. *Пусть поле k таково, что любая ультрастепень k автоустойчива. Если группы G, H элементарно эквивалентны и принадлежат классу $T_0(k)$, то G k-изоморфна H.*

Доказательство. Пусть группы G, H удовлетворяют условиям теоремы. В силу теоремы 3.1 найдутся такие множество I и ультрафильтр D над I, что ультрастепени $\tilde{G} = G^I/D$ и $\tilde{H} = H^I/D$ изоморфны. Обозначим через $\tilde{k}$ ультрастепень k^I/D. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — мальцевская база некоторой равномерной подгруппы G_0 группы G, $b_1, \ldots, b_n$ — мальцевская база равномерной подгруппы H_0 для H. По лемме 3.1 $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ есть пополнения соответственно групп G, H (G_0, H_0) с помощью поля $\tilde{k}$. По лемме

1.9 системы элементов $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_n$ будут мальцевскими базами в группах $\widetilde{G}$, $\widetilde{H}$ соответственно, причем многочлены умножения и возведения в степень у групп G_0 и $\widetilde{G}$, а также у групп H_0 и $\widetilde{H}$ в этих базах одинаковы. В частности, группы $\widetilde{G}$, $\widetilde{H}$ — $\mathbf{Q}$-определены. По теореме 5.2 (после $\widetilde{k}$ автоустойчиво) существует k-изоморфизм $\varphi : \widetilde{G} \to \widetilde{H}$, так что $m = n$.

Пусть изоморфизм φ на элементах базы $a_1, \ldots, a_m$ группы $\widetilde{G}$ действует следующим образом:

$$a_i \xrightarrow{\varphi} b^{\eta_i}, \text{ где } \eta_i \in \widetilde{k}^n, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Запишем условия, характеризующие те отображения φ, которые являются $\bar{k}$-изоморфизмами:

1) элементы b^{η_i}, $i = 1, \ldots, n$, $\widetilde{k}$-порождают $\widetilde{H}$,

2) $\forall g \in \widetilde{G}$, $g \neq 1$, $g^\varphi \neq 1$,

3) $\forall g_1, g_2 \in \widetilde{G}$, $(g_1 g_2)^\varphi = g_1^\varphi \cdot g_2^\varphi$,

4) $\forall p \in \widetilde{G}$, $\alpha \in \widetilde{k}$, $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^\alpha$.

Перепишем условия 1—4 на языке коэффициентов. Пусть $a_1, \ldots, a_s$, $s < n$,— система независимых $\widetilde{k}$-порождающих группы $\widetilde{G}$. Тогда условие 1 эквивалентно тому, что образы элементов $b^{\eta_1}, \ldots, b^{\eta_s}$ являются базой k-векторного пространства $\widetilde{H}/[\widetilde{H}, \widetilde{H}]$; другими словами, когда самый левый M_s минор s-порядка в матрице, составленной из вектор-строчек $\eta_1, \ldots, \eta_s$, не равен нулю:

1) $M_s \neq 0$, $s \leqslant n$.

Предполагая, что φ — $\widetilde{k}$-изоморфизм, вычислим образ произвольного элемента $a^\xi = a_1^{\xi_1} \ldots a_n^{\xi_n}$ группы $\widetilde{G}$:

$$a^\xi = a_1^{\xi_1} \ldots a_n^{\xi_n} \xrightarrow{\varphi} \left(b^{\eta_1}\right)^{\xi_1} \ldots \left(b^{\eta_n}\right)^{\xi_n}.$$

Так как умножение и возведение в степень в группе $\widetilde{H}$ производится при помощи многочленов с рациональными коэффициентами, то существует набор многочленов $h_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, с рациональными коэффициентами такой, что

$$(a^\xi)^\varphi = \left(b^{\eta_1}\right)^{\xi_1} \ldots \left(b^{\eta_n}\right)^{\xi_n} = b^{h(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)},$$

где

$$h = (h_1, \ldots, h_n).$$

Условие 2 на языке коэффициентов принимает следующий вид:

2) $\forall \xi \in \widetilde{k}^n$ вектор $h(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi) \neq 0$.

Для записи условия 3 вычислим значения элементов

$$g_1^\varphi, g_2^\varphi, (g_1 g_2)^\varphi, \text{ где } g_1 = a^\alpha,\ g_2 = a^\beta,\ \alpha, \beta \in \widetilde{k}^n.$$

Пусть в группе $\widetilde{G}$ умножение в базе a задается при помощи набора многочленов $t = (t_1, \ldots, t_n)$, а в группе H в базе b — при помощи набора $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Тогда

$$(a^\alpha)^\varphi \cdot (b^\beta)^\varphi = b^{h(\eta_1, \ldots, \eta_n, \alpha)} \cdot b^{h(\eta_1, \ldots, \eta_n, \beta)} = b^{u(h(\alpha), h(\beta))}.$$

Аналогично

$$(a^\alpha a^\beta)^\varphi = (a^{t(\alpha, \beta)})^\varphi = b^{h(\eta_1, \ldots, \eta_n, t(\alpha, \beta))}.$$

Условие 3 на языке коэффициентов выглядит следующим образом:

3) $\forall \alpha, \beta \in \widetilde{k}^n$, $u(h(\alpha), h(\beta)) = h(t(\alpha, \beta))$.

Наконец, перепишем условие 4. Пусть в группе $\widetilde{G}$ возведение в степень в базе a задается при помощи набора многочленов с рациональными коэффициентами $v=(v_1, \ldots, v_n)$, а в группе $\tilde{H}$ в базе b — при помощи набора $w=(w_1, \ldots, w_n)$. Тогда

$$((a^\xi)^\alpha)^\varphi = (a^{v(\xi,\alpha)})^\varphi = b^{h(\eta_1,\ldots,\eta_n,v(\xi,\alpha))}, \quad \alpha \in \tilde{k}.$$

Аналогично

$$((a^\xi)^\varphi)^\alpha = \left(b^{h(\eta_1,\ldots,\eta_n,\xi)}\right)^\alpha = b^{w(h(\eta_1,\ldots,\eta_n,\xi))}, \quad \alpha \in \tilde{k}.$$

Условие 4 на языке коэффициентов выглядит следующим образом: 4) $\forall \xi \in \tilde{k}^n$, $\alpha \in \tilde{k}$, $h(\eta_1, \ldots, \eta_n, v(\xi(\alpha)) = w(h(\eta_1, \ldots, \eta_n, \xi))$.

Условия 1—4 записываются формулами Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 кольцевой сигнатуры с константами $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Следовательно, в поле $\tilde{k}$ истинна формула

$$\Phi = \exists \eta_{11}, \ldots, \eta_{1n}, \ldots, \eta_{n1}, \ldots, \eta_{nn}, \Phi_1 \,\&\, \Phi_2 \,\&\, \Phi_3 \,\&\, \Phi_4.$$

Так как поле $\tilde{k}$ элементарно эквивалентно полю k, то формула Φ истинна и в поле k, т. е. найдутся такие векторы $\overline{\eta_1}, \ldots, \overline{\eta_n} \in k^n$, что для них выполнены условия 1—4. Вышеприведенные рассуждения показывают, что отображение $a_i \to b^{\overline{\eta_i}}$ продолжается до k-изоморфизма G на H, ибо многочлены умножения и возведения в степень для $\overline{G}$ и G, а также для $\tilde{H}$ и H совпадают. Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Пусть G, H — произвольные $\mathbf{Q}$-группы конечного ранга. Группы G, H элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их основы $\overline{G}$, $\overline{H}$ изоморфны; причем одновременно либо группы G, H совпадают со своими основами, либо не равны им.*

Доказательство. Пусть заключение теоремы выполнено для G, H и пусть $G=\overline{G}\times A$, $H=\overline{H}\times B$, A, $B\neq 1$ — абелевы $\mathbf{Q}$-группы. Тогда $A\equiv B$, так как абелевы делимые группы без кручения составляют полный класс, следовательно, $G\equiv H$. Предположим теперь, что $G\equiv H$. Тогда если $G\in T_0(k)$, то и $H\in T_0(k)$, а потому по теореме 6.1 G изоморфна H. Наконец, разберем случай, когда $G=\overline{G}\times A$, $H=\overline{H}\times B$, A, $B\neq 1$. В силу теоремы 3.1 найдутся изоморфные ультрастепени $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ групп G, H, причем $\tilde{G}=\tilde{\overline{G}}\times\tilde{A}$, $\tilde{H}=\tilde{\overline{H}}\times\tilde{B}$. В силу конечности рангов $\overline{G}$, $\overline{H}$ группы $\tilde{\overline{G}}, \tilde{\overline{H}}$ будут $\tilde{\mathbf{Q}}$-группами конечного ранга, а их центры будут содержаться в коммутантах. Следовательно, группы $\tilde{\overline{G}}, \tilde{\overline{H}}$ будут основами $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ соответственно. Так как основа определяется по группе однозначно с точностью до изоморфизма, то $\tilde{\overline{G}}$ изоморфна $\tilde{\overline{H}}$, а потому $\overline{G}\equiv\overline{H}$. По теореме 6.1 группа $\overline{G}$ изоморфна $\overline{H}$. Теорема доказана.

Следствие. *Проблема элементарной эквивалентности в классе нильпотентных $\mathbf{Q}$-групп конечного ранга алгоритмически разрешима.*

Доказательство. В статье [5] указывается алгоритм, позволяющий по конечному копредставлению $\mathbf{Q}$-группы G находить представление любой ее подгруппы, а по порождающим любых двух ее подгрупп копредставление пересечения этих подгрупп. Пусть $\langle a_1, \ldots, a_n;$ $r_1=1, \ldots, r_m=1\rangle$ — конечное копредставление $\mathbf{Q}$-группы G. Находим порождающие центра и коммутанта группы G, а затем и порождающие $b_1, \ldots, b_s$ пересечения центра и коммутанта. Обычными приемами линейной алгебры систему $b_1, \ldots, b_s$ дополняем до неприводимой системы порождающих $b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_{n-s}$ группы G. Подгруппа, порожденная $c_1, \ldots, s_{n-s}$, будет основой G. Таким образом, по копредставлению G алгоритмически определяется копредставление основы и выясняется, принадлежит ли группа G классу $T_0(\mathbf{Q})$ или нет. Следовательно, по теореме 6.2 проблема элементарной эквивалентности нильпотентных $\mathbf{Q}$-групп конечного ранга сводится к проблеме изоморфизма. Последняя проблема алгоритмически разрешима [1].

А. И. Мальцевым доказано [2], что соответствие между нильпотентными $\mathbf{Q}$-группами и $\mathbf{Q}$-алгебрами Ли взаимно однозначно. Более точно: если L — нильпотентная алгебра Ли над $\mathbf{Q}$, то, задавая операцию $\circ$ на L формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа $x \circ y = x + y + {}^1/_2[x, y] + \ldots$, где $[x, y]$ — лиев коммутант, получаем относительно $\circ$ нильпотентную $\mathbf{Q}$-группу $G(L)$, причем L_1 изоморфна L_2 тогда и только тогда, когда $G(L_1)$ изоморфна $G(L_2)$ и каждая нильпотентная $\mathbf{Q}$-группа изоморфна $G(L)$ для подходящей нильпотентной $\mathbf{Q}$-алгебры Ли. Это соответствие категорное, т. е. если $\varphi: L_1 \to L_2$ — гомоморфизм алгебр Ли, то φ остается гомоморфизмом и в групповой сигнатуре, причем все групповые гомоморфизмы таким образом получаются.

С помощью описанного выше соответствия все результаты статьи о нильпотентных $\mathbf{Q}$-группах переносятся на нильпотентные алгебры Ли. Следует только договориться о выборе сигнатуры, в которой рассматриваются $\mathbf{Q}$-алгебры Ли. Достаточно ограничиться операциями сложения и коммутирования, так как умножение на данное рациональное число — определимая через $+$ операция.

Лемма 6.1. *Нильпотентные $\mathbf{Q}$-алгебры Ли L_1, L_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G(L_1)$ элементарно эквивалентна $G(L_2)$.*

Доказательство. Пусть $L_1 \equiv L_2$. По лемме 3.1 подходящие ультрастепени $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ алгебр Ли L_1, L_2 изоморфны. Так как $\widetilde{G(L_i)} = G(\tilde{L}_i)$, $i = 1, 2$, то $\mathbf{Q}$-группа $\widetilde{G(L_1)}$ изоморфна $\mathbf{Q}$-группе $\widetilde{G(L_2)}$. Отсюда следует, что $G(L_1) \equiv G(L_2)$. Аналогично доказывается обратное утверждение.

Теорема 6.3. *Конечномерные рациональные нильпотентные алгебры Ли L_1, L_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их основы $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$ изоморфны; причем одновременно либо алгебры Ли совпадают со своими основами, либо не равны им.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Саркисян Р. А.** Об одной проблеме вхождения для когомологий Галуа.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 6, с. 707—725.
2. **Мальцев А. И.** Нильпотентные группы без кручения.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 3, с. 201—212.
3. **Szmielew W.** Elementary properties of Abelian groups.— Fundam. Math., 1954, v. 41, p. 203—271.
4. **Мальцев А. И.** Об элементарных свойствах линейных групп.— В кн.: Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1976, с. 195—215.
5. **Каргаполов М. И. и др.** Алгоритмические вопросы для ϑ-степенных групп.— Алгебра и логика, 1969, т. 8, № 6, с. 643—659.
6. **Холл Ф.** Нильпотентные группы.— В кн.: Математика. Сб. переводов, 1968, т. 12, № 1, с. 3—36.
7. **Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.** Теория моделей. М.: Мир, 1977.
8. **Мальцев А. И.** Об одном классе однородных пространств.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 1, с. 9—32.
9. **Мальцев А. И.** Об одном соответствии между кольцами и группами.— Мат. сб., 1960, т. 50, № 3, с. 257—266.
10. **Robinson J.** The undecidability of algebraic rings and fields.— Proc. Amer. Math. Soc., 1959, v. 10, p. 950—957.

КОНЕЧНО АКСИОМАТИЗИРУЕМЫЕ ТОТАЛЬНО ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ТЕОРИИ

М. Г. ПЕРЕТЯТЬКИН

В работе описывается один общий метод построения конечно аксиоматизируемых теорий. По произвольной машине Тьюринга M строится конечно аксиоматизируемая теория, в которой особым образом представлена работа этой машины. Сетка для интерпретации работы машины Тьюринга построена на основе ω_1-категоричной полной конечно аксиоматизируемой теории, описанной в работе автора [1]. При этом многие важные свойства получаемой теории зависят от результатов работы машины M. Таким образом, выбором машины Тьюринга мы можем управлять свойствами получаемой конечно аксиоматизируемой теории. Сформулируем несколько конкретных результатов, полученных этим методом.

а) *Существует полная конечно аксиоматизируемая тотально трансцендентная теория, у которой простая модель и счетная насыщенная модель не являются конструктивизируемыми.*

б) *Для любого конструктивного ординала $\beta \geqslant 1$ существует полная конечно аксиоматизируемая тотально трансцендентная теория T, имеющая ранг Морли $\alpha_T = \beta + 3$.*

в) *Пусть S — множество гёделевских номеров предложений, определяющих полные тотально трансцендентные теории. Тогда S является максимальным (по m-сводимости) множеством в классе Π_1^1.*

Основная конструкция описывается в первых тринадцати параграфах. В последующих параграфах содержатся конкретные результаты, причем все они выводятся из основной теоремы, приведенной в § 9.

Результаты работы анонсированы в [2, 3].

Предварительные сведения. Пусть U — унарный, а R — n-арный предикат, $n \geqslant 1$. Будем говорить, что R *определен тривиально вне U*, если выполняется предложение, которое является универсальным замыканием формулы

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \bigwedge_{i=1}^{n} U(x_i).$$

Если E — отношение эквивалентности, а R — n-арный предикат, то говорим, что R *корректно определен на E-классах*, если выполнено предложение

$$\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, y_i) \to [R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow R(y_1, y_2, \ldots, y_n)].$$

В случае унарного предиката U и бинарного предиката R мы в некоторых случаях вместо выражений $U(x)$ и $R(x, y)$ будем использовать более краткие $x \in U$ и xRy. В работе будет использоваться теоретико-множественная терминология, естественно связанная с семантикой понятия «предикат».

Если E — отношение эквивалентности, а R — бинарный предикат, то утверждение, что R *является отношением следования на E-классах*, будет означать следующую группу аксиом:

C1. $xEx' \,\&\, yEy' \to (xRy \leftrightarrow x'Ry')$,

C2. $xRy \to \neg xEy$,

C3. $xRy \,\&\, x'Ry' \to (xEx' \leftrightarrow yEy')$,

C4. $(\forall x)(\exists y)xRy$,

C5. $(\forall y)(\exists x)xRy$.

В одном случае (в § 2) нам понадобится подобная группа аксиом, в которой отсутствует лишь аксиома C5. В этом случае будем говорить, что *R является отношением следования на E-классах, допускаются начальные классы.*

Все теории рассматриваются в логике предикатов первого порядка с равенством. Общие понятия, используемые в работе, соответствуют монографиям Ю. Л. Ершова [4], Г. Кейслера — Ч. Ч. Чэна [5], X. Роджерса [6]. Специальные понятия определяются по ходу изложения материала.

Стандартные обозначения. Через $|\mathfrak{M}|$ обозначается носитель (основное множество) модели $\mathfrak{M}$. Если E — отношение эквивалентности, то через $[a]_E$ обозначается E-класс, содержащий элемент a. $\mathscr{P}(X)$ — множество всех подмножеств X, $\bar{\bar{X}}$ — мощность этого множества. ω — первый бесконечный ординал, λ — первый неконструктивный ординал. Если X — множество ординалов, то $\sup X$ означает наименьший ординал, превосходящий все ординалы из X. Множество натуральных чисел $\{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ обозначается N. $c(x, y)$, $l(n)$, $r(n)$ — канторовские функции нумерации пар [6, с. 89].

Специальные знаки. Знак $\rightleftharpoons$ служит для введения обозначений. $\restriction$ — знак ограничения, например, $\mathfrak{M} \restriction X$ — ограничение модели $\mathfrak{M}$ до множества X. Знаком $\square$ отмечается окончание доказательства или конец группы аксиом.

Сокращения. О. р. ф.— общерекурсивная функция, ч. р. ф.— частично рекурсивная функция, р. п.— рекурсивно перечислимый, с. к.— сильно конструктивизируемый.

§ 1. МАШИНЫ ТЬЮРИНГА С ДЕЛЕНИЕМ КЛЕТОК

В этом параграфе мы опишем вариант машин Тьюринга, используемый для интерпретаций в конечно аксиоматизируемых теориях.

Машина M имеет конечный набор a_i, $i < d$, символов ленты, конечный набор q_j, $j < e$, символов внутренних состояний, а также имеет программу, состоящую из конечного множества команд вида

$$(1.1)\quad a_iq_j \Rightarrow a_mq_tL, \qquad (1.2)\quad a_iq_j \Rightarrow a_mq_tR,$$
$$(1.3)\quad a_iq_j \Rightarrow a_ma_nq_tL, \qquad (1.4)\quad a_iq_j \Rightarrow a_ma_nq_tR.$$

В каждый момент времени головка машины обозревает одну из клеток бесконечной в обе стороны ленты. В каждой клетке записан один из символов a_i, $i < d$. В каждый момент машина находится в одном из внутренних состояний q_j, $j < e$. Машина начинает работу в состоянии q_0. Команда (1.1) является инструкцией о том, что если в некоторый момент машина имеет внутреннее состояние q_j, а в обозреваемой клетке записано a_i, то машина записывает в обозреваемой клетке символ a_m, принимает внутреннее состояние q_t и сдвигает головку влево на соседнюю клетку. Команда (1.2) подобна команде (1.1), но со сдвигом головки вправо. Будем говорить, что эти команды применимы к ситуации a_iq_j. Команда (1.3) является инструкцией о том, что машина в ситуации a_iq_j должна разделить обозреваемую клетку на две новых, записать в левой из них a_m, в правой — a_n, затем изменить внутреннее состояние на q_t и сдвинуть головку влево на клетку, соседнюю к полученной паре новых клеток. В случае команды (1.4) делается то же, но со сдвигом головки вправо. Требуется, чтобы в любой ситуации было применимо не более одной команды. Машина останавливается, если встретилась ситуация, к которой неприменима ни одна из команд. Таким образом, работа машины M однозначно определяется ее программой, а также информацией на ленте в начальный момент времени.

Класс машин описанного вида обозначим через $\mathscr{M}$. Естественно назвать его *классом машин Тьюринга с делением клеток ленты.*

§ 2. АКСИОМАТИКА И ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ

По машине M описанного вида построим конечно аксиоматизируемую теорию F_M^* языка $\mathscr{L}_M$. Начнем с характеризации теории в целом. Устройство теории F_M^* носит многоступенчатый характер, причем разные ступени выполняют разные функции и мало зависят друг от друга. Поэтому исследование всей теории сводится, по существу, к изучению каждой ступени в отдельности. Можно выделить пять ступеней.

Первая ступень. (*Теория квазиследования*). Описана в работе автора [1]. Ее назначение — обеспечить плоскую форму каркаса, не допустить разного рода циклов.

Вторая ступень. (*Каркас* — КРК). Аксиомы этой ступени описывают каркас, имеющий форму плоской сети, на которой размещены все последующие ступени.

Третья ступень. (*Устройство разметки ленты для размещения оракула* — ОРК). Назначение этой ступени — выделить формульно множество клеток ленты, в которых будет размещена информация оракула. При этом клетки ленты, несущие полезную информацию, оказываются разделенными возрастающими промежутками, свободными от информации. В результате оказывается, что число типов, порождаемых оракулом, не превосходит ω. Таким образом, благодаря устройству разметки ленты, содержимое оракула не оказывает негативного влияния на существование счетной насыщенной модели и на тотальную трансцендентность.

Четвертая ступень. (*Интерпретация работы машины Тьюринга* — МТ). Эта ступень определяет в теории функционирование заданной машины M. В моделях теории с помощью специальных унарных предикатов представлены состояния ленты и внутренние состояния машины в каждый момент времени. Аксиомы ступени описывают взаимодействие головки и ленты в точном соответствии с программой машины M.

Пятая ступень. (*Транслятор* — ТРН.) Назначение этой ступени — переводить результаты работы машины Тьюринга в строение структуры формульных подмножеств специального предиката U. Таким путем работа машины M будет определять свойства простой модели и счетной насыщенной модели, а также величину ранга трансцендентности каждого пополнения теории F_M^*.

Теорию ω_1-категоричного квазиследования [1] будем обозначать через QS. Ее язык $\mathscr{L}_{QS}$ содержит, среди других, предикаты $\lhd$ и $\sim$, причем $\sim$ является отношением эквивалентности, а $\lhd$ — отношением следования на $\sim$-классах, без начальных и без конечных классов и без циклов. Если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — модели теории QS, то всякий $\lhd$-изоморфизм фактор моделей $\mathfrak{M}/\sim$ и $\mathfrak{N}/\sim$ продолжается до изоморфизма $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$.

По отношению к языку $\mathscr{L}_{QS}$ будем придерживаться соглашения: предикатные символы $\lhd$ и $\sim$ относятся к языку теории квазиследования, все другие предикатные символы, используемые в работе, предполагаются не входящими в $\mathscr{L}_{QS}$.

Приступаем к формальному описанию аксиом теории F_M^*. Будем предполагать, что M — фиксированная машина Тьюринга, имеющая d символов ленты и e внутренних состояний, как это было описано в § 1.

Язык: $\mathscr{L}_M = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2 \cup \mathscr{L}_3 \cup \mathscr{L}_4 \cup \mathscr{L}_5$,

где

$\mathscr{L}_1 = \{\lhd^2, \sim^2, \ldots\}$ — язык теории квазиследования,

$\mathscr{L}_2 = \{P^2, L^2, E^2, R^2, S^2, B^1, H^1, J^1, O^1, X^1, Y^1, W^1\}$,

$\mathscr{L}_3 = \{C^1, \Lambda^1\}$,

$$\mathscr{L}_4 = \{K^1, Ш^1, Г^1, A_0^1, \ldots, A_{d-1}^1, Q_0^1, \ldots, Q_{e-1}^1\},$$
$$\mathscr{L}_5 = \{U^1, D^2\}.$$

Часть языка $\mathscr{L}_k$ соответствует k-й ступени теории. Многоточие в $\mathscr{L}_1$ заменяет невыписанные предикатные символы языка теории QS. Верхние индексы указывают арности предикатов.

Аксиомы будем описывать по ступеням. В нумерации аксиом используется мнемоника, приведенная при описании ступеней.

Вторая ступень включает 25 аксиом:

КРК.1. X, Y, W — разбиение основного множества.

КРК.2. L — отношение эквивалентности, P — отношение следования на L-классах.

КРК.3. E — отношение эквивалентности на $X \cup W$, вне этого множества предикат E определен тривиально.

КРК.4. $xEy \to xLy$.

КРК.5. Y пересекается с каждым L-классом.

КРК.6. X пересекается с каждым E-классом и с каждым L-классом.

КРК.7. Предикаты из $\mathscr{L}_1$ на множестве $X \cup Y$ удовлетворяют всем аксиомам теории квазиследования, вне $X \cup Y$ эти предикаты определены тривиально.

КРК.8. Если $Y(a)$, то $[a]_\sim = [a]_L \cap Y$.

КРК.9. Если $X(a)$, то $[a]_\sim = [a]_E \cap X$.

КРК.10. Если $a \lhd b$, то $X(a) \Leftrightarrow X(b)$.

КРК.11. $aPb \leftrightarrow (\exists x, y)(aLx \,\&\, bLy \,\&\, x, y \in Y \,\&\, x \lhd y)$.

КРК.12. R — отношение следования на E-классах, предикат R определен тривиально вне $X \cup W$.

КРК.13. $xRy \to xLy$.

КРК.14. $aRb \leftrightarrow (\exists x, y)(aEx \,\&\, bEy \,\&\, x, y \in X \,\&\, x \lhd y)$.

КРК.15. S — отношение следования на E-классах, допускаются начальные классы. Предикат S определен тривиально вне $X \cup W$.

КРК.16. $xSy \to xPy$.

КРК.17. Если $xRy \,\&\, xSx' \,\&\, ySy'$, то y' является либо первым, либо вторым R-последователем x'. Во втором случае первый R-последователь элемента x' не имеет S-предшественника.

КРК.18. Если xRy, то из элементов x, y по меньшей мере один имеет S-предшественника.

КРК.19. Предикат J выделяет единственный L-класс.

КРК.20. B, H — разбиение основного множества.

КРК.21. Предикаты B, H корректно определены на L-классах.

КРК.22. Если xPy и $\neg J(y)$, то $B(x) \leftrightarrow B(y)$.

КРК.23. Если xPy и $J(y)$, то $H(x) \,\&\, B(y)$.

КРК.24. Каждый E-класс из J имеет S-предшественника.

КРК.25. Предикат O выделяет единственный E-класс в J.

Аксиомы КРК.1—6 описывают общую форму каркаса, аксиомы КРК.7—14 вписывают в каркас теорию квазиследования с целью исключить циклы, остальные аксиомы описывают детали устройства каркаса. Форма модели приведенных аксиом показана на рис. 1 вверху. Шестиугольники изображают $\sim$-классы теории квазиследования, стрелки между ними представляют $\lhd$-связи. Элементы модели расположены внутри квадратов и шестиугольников.

Множество, определяемое предикатом H, будем называть *нижней частью модели*, здесь будет размещена третья ступень. Множество, определяемое предикатом B, будем называть *верхней частью модели*, здесь разместятся четвертая и пятая ступени теории.

Предикат J выделяет L-класс, расположенный в верхней части на стыке с нижней частью. Предикатом O отмечен единственный E-класс, расположенный в J, он играет роль «начала координат».

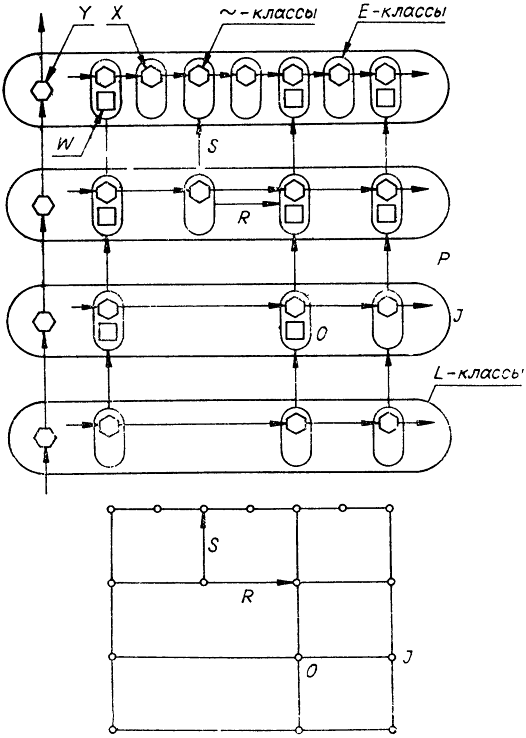


Рис. 1.

При описании следующих двух ступеней будут рассматриваться лишь R-связи и S-связи между E-классами, а также унарные предикаты, корректно определенные на E-классах. В таких случаях, чтобы опустить из рассмотрения ненужные детали, будем изображать E-классы в виде точек (рис. 2, *Б*). При этом E-классы будем называть *точками*.

Назовем *блоком* минимальную непустую совокупность точек, замкнутую относительно R-связей и S-связей. Блок, содержащий точку O, назовем *стандартным*.

Приступаем к аксиомам *третьей ступени*.

ОРК.1. $\Lambda \subset C \subset H \backslash Y$.

ОРК.2. Предикаты Λ и C корректно определены на E-классах.

ОРК.3. В каждом L-классе в нижней части предикат Λ выделяет ровно один E-класс.

ОРК.4. $xRy \;\&\; ySz \to (x \in \Lambda \leftrightarrow \leftrightarrow z \in \Lambda \cap O)$.

ОРК.5. Каждая C-точка имеет S-предшественника.

ОРК.6. Если $x,\ y \in H$ и xSy, то $x \in C \leftrightarrow y \in C \backslash \Lambda$.

ОРК.7. Точка в нижней части модели не имеет S-предшественника тогда и только тогда, когда ее R-предшественник или R-последователь принадлежит $C \backslash \Lambda$.

ОРК.8. Если xSy и $J(y)$, то $x \in C \to y \in K \backslash O$.

Форма третьей ступени изображена на рис. 2, *Б*. Некоторые комментарии будут даны позже.

Приступим к описанию четвертой ступени. Ее строение, схематично представленное на рис. 2, *А*, будем описывать в терминах, связанных с функционированием машины Тьюринга. Не составит особого труда перевести это описание на формальный язык. Вначале свяжем терминологию работы машины Тьюринга с элементами строения моделей.

L-классы представляют *моменты времени* при работе машины Тьюринга. Перемещение по P-цепи соответствует течению времени. На рисунках: «прошлое» — вниз, «будущее» — вверх. L-класс J является *начальным моментом времени* в работе машины.

K-точки (т. е. E-классы, отмеченные предикатом K) одного L-класса представляют *клетки ленты* в один момент времени. Отрезок S-цепи, целиком состоящий из K-точек, будем называть K-трассой. Каждая K-трасса представляет одну клетку ленты в последовательные моменты времени.

Г-точка представляет положение *головки машины* по отношению к ленте. E-классы, удовлетворяющие K & Г, представляют *точки исполнения команд* машины. Другие комментарии будут даваться по ходу описания аксиом.

Четвертая ступень включает 15 аксиом:

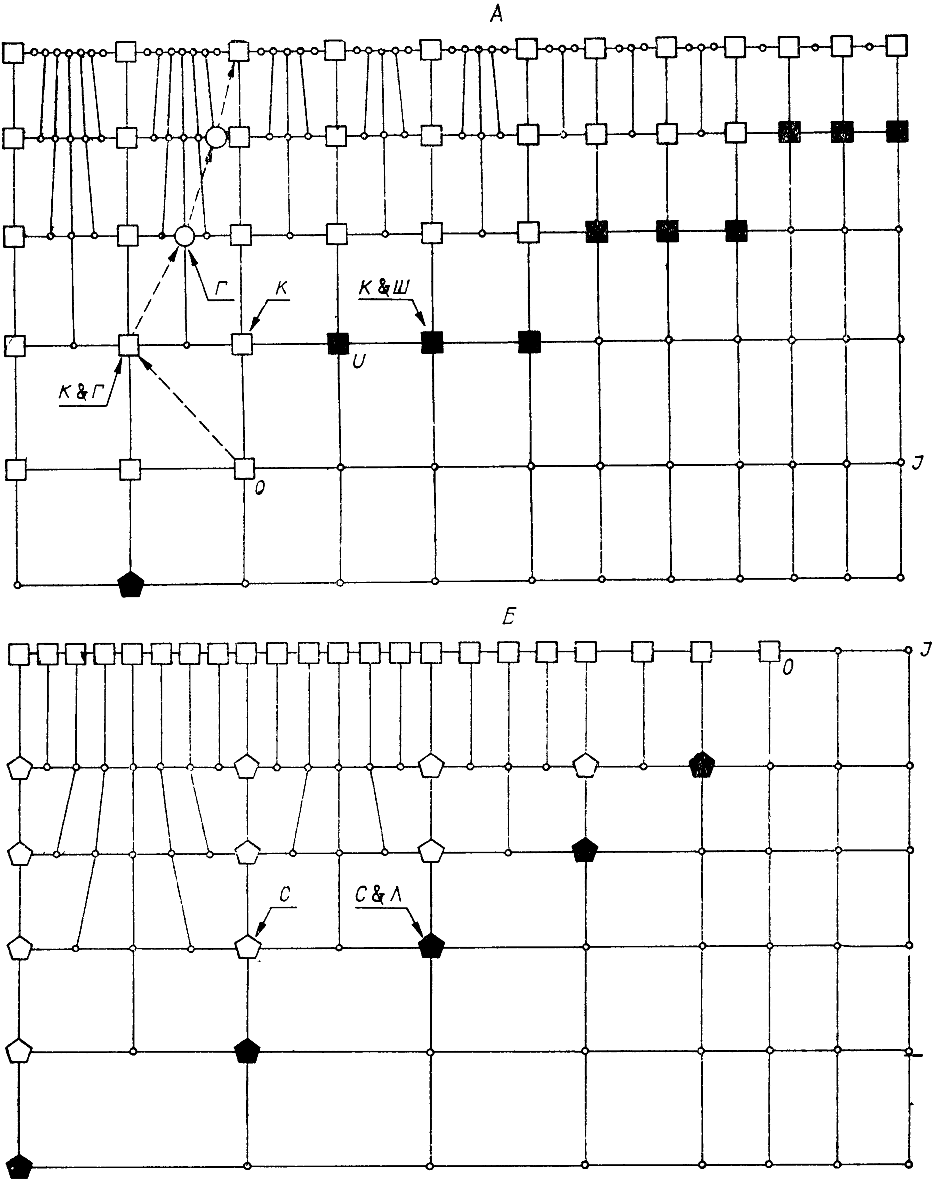


Рис. 2.

МТ.1. Все предикаты из $\mathscr{L}_4$ не пересекаются с $Y \cup H$ и корректно определены на E-классах.

МТ.2. В начальный момент лента не ограничена влево и ограничена справа точкой O.

МТ.3. Каждая K-точка удовлетворяет в точности одному из предикатов A_i, $i < d$. Вне K все предикаты A_i ложны. □

Предикат A_i означает, что в отмечаемой им клетке в данный момент времени записан символ a_i. Будем отождествлять a_0 с 0, а a_1 — с 1.

МТ.4. В начальный момент на ленте записана некоторая последовательность нулей и единиц, при этом символ 1 допустим только в тех клетках, S-предшественник которых является C-точкой. □

Посредством этой аксиомы четвертая ступень использует разметку ленты, выполненную третьей ступенью.

МТ.5. В каждом L-классе в верхней части, исключая класс J, имеются элементы $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}$, удовлетворяющие условиям:

(а) $x_0 R x_1 R \ldots R x_{d-1}$.

(б) $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1} \in$ Ш.

(в) $[x_0]_L \cap$ Ш $= [x_0]_E \cup \ldots \cup [x_{d-1}]_E$.

(г) $A_i(x_i)$, $0 \leqslant i < d$.

(д) Если $x_{d-1} S y$ и $y R z$, то $z \in$ Ш $\cap A_0$.

При этом в L-классе J нет Ш-элементов. □

С течением времени лента независимо от работы машины Тьюринга паращивается справа. В каждый момент, кроме начального, пристраивается ровно d новых клеток, в которые также независимо от машины вписываются символы $a_\sigma, a_1, \ldots, a_{d-1}$ (рис. 2, *А* соответствует случаю $d = 3$). Пристраиваемые таким образом клетки отмечаются специальным предикатом Ш. Ряд Ш-точек данного блока, имеющий форму ступенчатой линии, будем называть *линией шума*. Сформулированная аксиома в связи с этим будет называться *аксиомой шума*.

МТ.6. Вверх K-трасса обрывается только в одном случае: в точке исполнения команды с делением клетки ленты (см. рис. 3, *Б*). Вниз K-трасса обрывается в трех случаях:

(а) В L-классе J.

(б) На линии шума.

(в) Около точки исполнения команды с делением клетки. Случай (в) представлен на рис. 3, *Б*. В этом случае K-точка обрыва даже не имеет S-предшественника.

МТ.7. Предикаты A_i передаются вдоль K-трасс неизменными всюду, кроме точек, удовлетворяющих Г.

МТ.8. В верхней части модели, вдали от K-трасс, каждая точка имеет S-предшественника. Вблизи от K-трасс и в окрестности точек исполнения команд строение R-S-сети такое, как это показано на рис. 2, *А*, 3, *А*, 3, *Б*.

МТ.9. В каждом L-классе в верхней части предикат Г выделяет ровно одну точку. Г-трассой назовем ряд Г-точек в последовательные моменты времени. Г-трасса в промежутках между точками исполнения команд имеет постоянный наклон, влево или вправо, как это показано на рис. 2, *А*, 3, *А*, 3, Б. □

Для наглядности Г-трасса отмечается пунктирной линией.

МТ.10. Каждая Г-точка удовлетворяет ровно одному из предикатов Q_j, $j < e$. Вне Г все предикаты Q_j ложны. □

Предикат Q_j означает, что в данный момент времени машина имеет внутреннее состояние q_j.

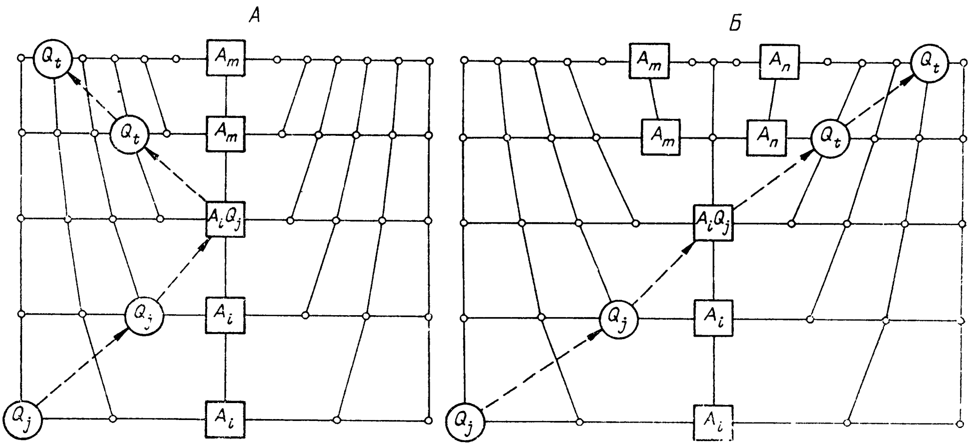


Рис. 3. Точка исполнения команды: A — $a_i g_j \Rightarrow a_m g_l L$; $Б$ — $a_i g_j \Rightarrow a_m a_n g_l R$.

МТ.11. Предикаты Q_j передаются вдоль Г-трасс неизменными всюду, кроме точек исполнения команд.

МТ.12. Изменение предикатов A_i и Q_j в окрестности точки исполнения команды, а также направление движения головки после этой точки определяются командами машины M. □

На рис. 3, A, 3, $Б$ показаны окрестности точек исполнения команд.

МТ.13. Точка O удовлетворяет предикату Q_0. □

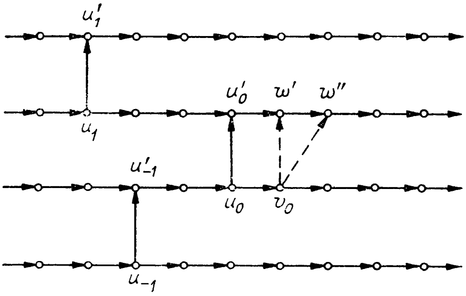


Рис. 4.

Другими словами, машина начинает работу в состоянии q_0, при этом головка обозревает клетку O.

МТ.14. Машина M не останавливается.

МТ.15. $xSy \,\&\, y \in Ш \to x,\ y \notin Г$.

Замечание к аксиомам МТ.8, 9. В этих аксиомах следует особо предусмотреть поведение головки в окрестности точки O. К примеру, особым следует считать случай, когда исполнение команды в точке O вызывает движение головки вправо. В этом случае нужно потребовать, чтобы головка попадала на соседнюю клетку, а не перескакивала через нее, как того требует общее описание, данное выше.

Наша цель сейчас — указать некоторый общий способ исследования формы блоков, базирующийся на аксиомах второй ступени.

Пусть нам требуется изучить блок, содержащий точку u (рис. 4). Согласно КРК.12, 14 предикат R является отношением следования на E-классах и не имеет циклов. Построим R-цепь, содержащую точку u. По КРК.13 вся эта цепь будет расположена в одном L-классе. Выберем на построенной R-цепи точку u_0 и возьмем ее S-последователь u_0', существующий по КРК.15. После этого построим R-цепь, содержащую точку u_0', выберем на ней точку u_1 и возьмем ее S-последователь, и т. д. Аксиома КРК.18 обеспечивает возможность такого же процесса вниз. Благодаря теории квазиследования P-циклы невозможны. Тогда все построенные цепи будут различными, поскольку они попадут в разные L-классы по КРК.13, 16.

Рассмотрим одно из построенных звеньев, для определенности $\langle u_0, u_0'\rangle$. Выберем точки v_0, w', w'' так, что u_0Rv_0 и $u_0'Rw'Rw''$. Точка v_0 имеет S-последователя, а по КРК.17 им должен быть либо w', либо w''. Эта же аксиома гарантирует, что во втором случае точка w' не имеет S-предшественника. Определив S-последователя точки v_0, приступим к нахождению S-последователя следующей точки v_1, и т. д. Таким образом, мы «сплетем» две половинки R-цепей. Можно проделать такой же процесс плетения в обе стороны от каждого из звеньев $\langle u_i, u_i'\rangle$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Указанные звенья, играющие особую роль, будем называть *опорными звеньями.*

Описанный способ определения формы блока будем называть *методом плетения сетей.* Он может быть использован следующим образом. При исследовании конкретного блока необходимо указать такую последовательность действий, при которой результат каждого шага однозначно определяется аксиомами. При этом наряду с плетением R-S-сети должны рассматриваться унарные предикаты. Таким путем получается доказательство того, что исследуемый блок необходимо имеет заданную форму. Возможны различные модификации этого метода. Например, построение опорных звеньев может чередоваться с построением других звеньев. Можно также использовать метод плетения сетей для изучения отдельных частей блока.

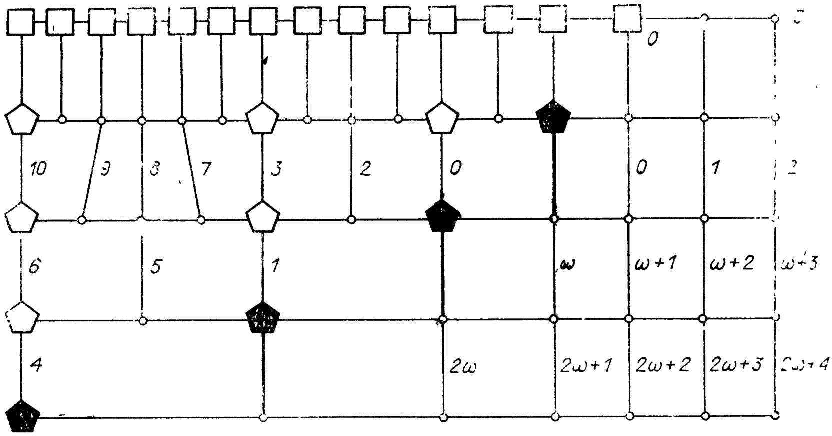


Рис. 5.

Применим описанный метод для изучения стандартного блока. Докажем, что аксиомы обеспечивают форму его нижней части, представленную на рис. 2, *Б*.

По аксиоме МТ.2 R-цепь, содержащая точку O, в левой половине состоит из K-точек, а в правой половине — из точек, не удовлетворяющих K. По КРК.17, 24 отношение S является биекцией, сохраняющей следование, между точками на стыке верхней и нижней части стандартного блока. Используя многократно аксиому ОРК.4, можно построить опорные звенья, выделенные на рис. 5 жирными линиями. Плетение правой части ведется в порядке, обозначенном ординалами до ω^2. Используются аксиомы ОРК.6—8. Левая часть плетется в порядке, обозначенном натуральными числами. Используются аксиомы ОРК.5—7.

Отметим, что форма верхней половины стандартного блока однозначно определяется информацией на ленте в начальный момент времени. Это следует из того, что верхняя часть стандартного блока согласно аксиомам МТ представляет собой развернутую во времени картину работы машины M. Но работа машины однозначно определяется ее программой, а также информацией на ленте в начальный момент времени. Развернутое доказательство этого утверждения, ввиду его громоздкости, здесь не приводится. Тем более, что идея этого доказательства вполне очевидна.

Пусть $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ — блоки некоторых моделей. Назовем эти блоки *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие между точками (т. е. E-классами) этих блоков, сохраняющее предикаты языка

$$\mathscr{L} = \{P^2, L^2, E^2, R^2, S^2, B^1, H^1, J^1, O^1\} \cup \mathscr{L}_3 \cup \mathscr{L}_4. \qquad (2.1)$$

Легко проверить, что согласно аксиомам все предикаты языка (2.1) корректно определены на E-классах.

Доказанное выше утверждение о единственности стандартного блока можно сформулировать следующим образом.

Лемма 2.1. *При заданных значениях предикатов A_0 и A_1 на R-цепи, содержащей точку O, стандартный блок (если он существует) определен однозначно, с точностью до изоморфизма.*

Приступаем, наконец, к аксиомам *пятой ступени.* Эта ступень (транслятор) базируется на множестве, выделяемом предикатом W.

ТРН.1. Класс $[a]_E$ содержит W-элементы тогда и только тогда, когда выполнено $K(a)$.

ТРН.2. Вне W предикат D определен тривиально.

ТРН.3. Для каждого $x \in W$ существует единственный элемент y такой, что xDy.

ТРН.4. Для каждого $y \in W \backslash (J \cup Ш)$ существует ровно два элемента z таких, что zDy.

ТРН.5А. Если класс $[x]_E$ не является точкой исполнения команды с делением клетки ленты, то $xDy \to xSy$.

ТРН.5Б. Если класс $[x]_E$ является точкой исполнения команды с делением клетки ленты, а z, z_1, z_2 — элементы, такие что xSz и z_1RzRz_2, тогда $xDy \to (yEz_1 \vee yEz_2)$.

ТРН.6. Предикат U выделяет E-класс, который является R-последователем S-последователя точки O (рис. 2, A).

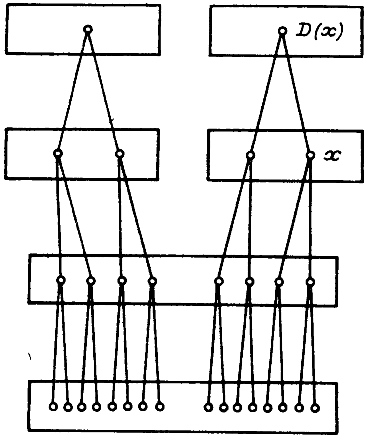


Рис. 6.

Последняя аксиома теории F_M^* будет приведена в § 5. А сейчас займемся изучением ее подтеории, определяемой аксиомами КРК, ОРК, МТ, ТРН. Указанную подтеорию будем обозначать через F_M.

Согласно ТРН.2, 3 предикат D можно считать операцией на множестве W. Поэтому вместо записи xDy будем использовать запись $y = D(x)$. Из аксиом следует, что D-связи имеют форму бинарного перевернутого дерева (рис. 6), при этом D-циклы невозможны по аксиомам ТРН.5А, 5Б.

Назовем *компонентой* минимальное непустое подмножество $\varkappa \subseteq W$, замкнутое относительно D-образов и D-прообразов. Из ТРН.1 с использованием аксиом предшествующих ступеней получаем, что $W \subset B$, поэтому любая компонента расположена в верхней части модели. Из аксиом ТРН.5А, 5Б следует, что каждая компонента расположена в пределах одного блока.

Для характеризации положения компоненты в блоке введем следующее понятие, определенное в терминах четвертой ступени. Назовем *K-путем* блока $\mathfrak{B}$ произвольную непустую совокупность $\mathscr{K}$ его K-трасс, удовлетворяющую условиям:

(а) Любой L-класс, проходящий через $\mathfrak{B}$, пересекает не более чем одну K-трассу из $\mathscr{K}$;

(б) Если в результате выполнения команды с делением клетки K-трасса η блока $\mathfrak{B}$ делится на две K-трассы ζ_1 и ζ_2, то $\eta \in \mathscr{K} \leftrightarrow \zeta_1 \in \mathscr{K} \vee \vee \zeta_2 \in \mathscr{K}$.

Из определения следует, что любой K-путь неограниченно продолжается вверх. Снизу K-путь неограничен, или же обрывается на J-точке, или на Ш-точке. Каждая компонента необходимо располагается по какому-либо K-пути, причем по одному K-пути может проходить много компонент. Возможен также случай, когда в модели по некоторому K-пути не пройдет ни одной компоненты (например, в случае, когда в стандартном блоке имеется 2^ω различных K-путей, а модель — счетная).

На рис. 6 схематично изображены части двух компонент в окрестности точки исполнения команды с делением клетки ленты. Прямоугольники изображают множества W-элементов внутри E-классов, удовлетворяющих K.

Снизу компонента будет ограниченной или же неограниченной в соответствии с тем, каков K-путь, определяемый этой компонентой. Отметим, что в стандартном блоке все компоненты будут ограниченными снизу. Так как вверх K-путь неограничен, то любая компонента содержит в каждом E-классе, который она пересекает, бесконечное множество элементов.

§ 3. ОДНОБЛОЧНЫЕ МОДЕЛИ

В этом параграфе мы получим условия непротиворечивости теории F_M. С этой целью изучим модели, состоящие из одного стандартного блока, которые будем называть *одноблочными*.

Устройство третьей ступени и аксиома МТ.4 обеспечивают то, что в начальный момент информация $\delta_i \in \{0, 1\}$, $i < \omega$, размещена в ячейках $Я_0$, $Я_1$, $Я_2$, ..., как это показано на рис. 7. Здесь и далее *ячейкой* будем называть клетку или группу клеток ленты с информацией специального назначения. Простой расчет показывает, что ячейка $Я_i$ находится на расстоянии $i^2 + i + 1$ слева от точки O.

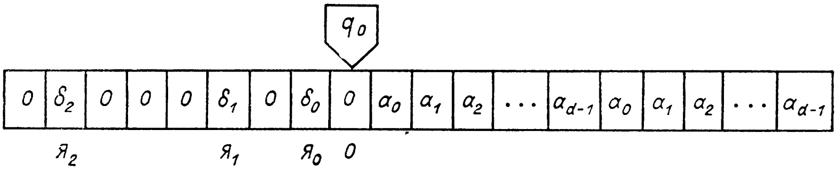


Рис. 7.

Так как линия шума строится независимо от работы машины, то мы можем предполагать, что в начальный момент лента неограничена в обе стороны и содержит в правой части периодически повторяющуюся последовательность символов, как это изображено на рис. 7.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная модель теории F_M. Рассмотрим начальный момент работы машины M (рис. 7), соответствующий стандартному блоку этой модели. Положим

$$\Delta = \{i \mid \text{в ячейке } Я_i \text{ записан символ } 1\}.$$

Указанное множество Δ, определяемое моделью $\mathfrak{M}$, будем обозначать через $\mathrm{Oracle}(\mathfrak{M})$. Будем говорить также, что в модели $\mathfrak{M}$ на R-цепи слева от точки O размещена *информация оракула.*

Пусть $\Delta \subseteq N$. Назовем *Δ-вычислением* работу машины M начиная из положения, показанного на рис. 7, где информация на левой половине ленты определяется множеством Δ следующим образом:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \notin \Delta. \\ 1, & \text{если } i \in \Delta, \end{cases}$$

Через $\mathrm{Nonstop}(M)$ обозначим множество всех $\Delta \subseteq N$ таких, что Δ-вычисление на машине M не приводит к останову.

Основные зависимости между введенными понятиями описываются следующей леммой.

Лемма 3.1. *Пусть* $M \in \mathcal{M}$, *тогда*

(а) *Для любой модели* $\mathfrak{M}$ *теории* F_M *выполняется* $\mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}) \in \mathrm{Nonstop}(M)$.

(б) *Для любого* $\Delta \in \mathrm{Nonstop}(M)$ *существует модель* $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M$, *состоящая из одного лишь стандартного блока, такая что* $\mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}) = \Delta$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M$, $\Delta = \mathrm{Oracle}(\mathfrak{M})$. Согласно аксиомам МТ стандартный блок модели $\mathfrak{M}$ представляет собой развернутое во времени Δ-вычисление на машине M. Тогда в силу МТ.14 имеем $\Delta \in \mathrm{Nonstop}(M)$.

Докажем второе утверждение. Пусть $\Delta \in \mathrm{Nonstop}(M)$. Развернув Δ-вычисление на машине M во времени, мы можем построить верхнюю половину стандартного блока, удовлетворяющего всем аксиомам МТ, но пока еще не связанного ни с какой моделью. После этого «приклеим» нижнюю половину, поставим полученный блок на каркас и вложим в каждый его K-путь по одной компоненте. В итоге получим нужную модель. □

Следствие 3.2. (а) $\mathrm{Nonstop}(M) = \{\mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M\}$.

(б) *Теория F_M непротиворечива тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Nonstop}(M) \neq \varnothing$.

§ 4. СТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ В ЦЕЛОМ

Вначале получим описание всех возможных типов блоков.

Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольный блок модели $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M$. Через Σ, где Σ есть одна из букв O, K, Ш, Г, C, Λ, обозначим условие, что блок $\mathfrak{B}$ имеет хотя бы одну Σ-точку. Например, условие O означает, что $\mathfrak{B}$ — стандартный блок. Введем еще три альтернативных условия:

В — блок целиком расположен в верхней части,

Н — блок целиком расположен в нижней части,

ВН — блок содержит J-точки.

Установим некоторые зависимости.

Лемма 4.1. (а) *ВН* & Г $\to O$.

(б) *ВН* & Ш $\to O$.

(в) *ВН* & $\Lambda \to O$.

(г) *Если* $d > 2$, *то* Ш & Г $\to O$.

(д) *ВН* & $C \to K$.

(е) $\Lambda \to C$.

(ж) Ш $\to K$.

Доказательство. (а) Предположим, что блок $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям *ВН* и Г. Двигаясь по Г-трассе вниз, мы, не выходя за пределы блока $\mathfrak{B}$, достигнем точки O.

(б), (в) — доказываются аналогично.

(г) Предположим, что блок $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям Ш и Г, причем $d > 2$. Справа от линии шума по МТ.6 не может быть K-точек, поэтому R-S-связи в этой части блока по аксиоме МТ.8 имеют форму простой сетки. Отсюда вытекает, что Г-трасса не может оказаться правее линии шума. Действительно, предположим противное. Согласно МТ.9 «коэффициент наклона» Г-трассы по отношению к R-S-сети равен 1/2 или $-1/2$, а по МТ.5 «коэффициент наклона» линии шума равен $1/d$, причем $d > 2$. Поэтому, двигаясь по Г-трассе вверх, мы неизбежно встретимся с линией шума, в противоречие с аксиомой МТ.15. Таким образом, мы доказали, что Г-трасса должна находиться слева от линии шума. Двигаясь вниз, мы необходимо дойдем до обрыва Г-трассы, что даст нам точку O.

(д) Предположим, что блок $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям *ВН* и C. Рассмотрим C-точку u этого блока. S-цепь, идущая вверх от u, должна состоять из C-точек вплоть до стыка с верхней частью. Применяя аксиому ОРК.8, найдем в блоке $\mathfrak{B}$ точку $v \in K$.

(е) Следует из аксиомы ОРК.1.

(ж) Следует из аксиом МТ.3, 5. □

Лемма 4.2. *Если блок $\mathfrak{B}$ содержит более одной точки исполнения команд, то $\mathfrak{B}$ — стандартный блок.*

Доказательство. Возьмем в блоке $\mathfrak{B}$ два L-класса l_0 и l_1 с условием, что эти классы содержат точки исполнения команд u_0 и u_1, причем расстояние t от l_0 до l_1 минимально возможное для блока $\mathfrak{B}$ (см. рис. 8).

Из минимальности t следует, что в промежутке между l_0 и l_1 нет точек исполнения команд. Поэтому K-трассы, проходящие через точки u_0 и u_1, различны, следовательно, они не могут неограниченно продолжаться вниз. Согласно МТ.6 обрыв K-трасс вниз возможен в трех слу-

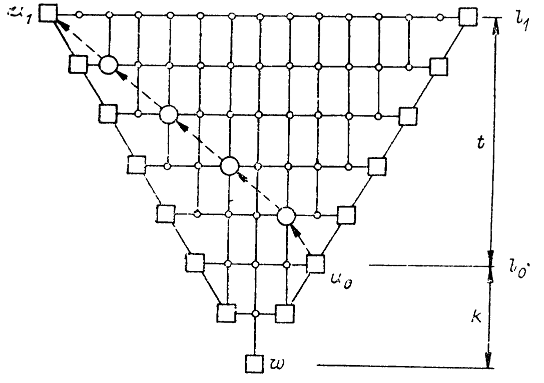


Рис. 8.

чаях. В случаях (а), (б), указанных в этой аксиоме, блок будет стандартным по лемме 4.1. Случай (в) невозможен, так как он противоречит минимальности t. Действительно, на рис. 8 представлен случай, когда расстояние k до ближайшей предшествующей точки w исполнения команды максимально при данном t, но даже в этом случае $t = 2k + 1$ (в действительности между точками w и u_0 должна быть еще одна точка исполнения команды). $\square$

Назовем *типом блока* его полное описание в терминах условий

$$BH,\ B,\ H,\ O,\ K,\ \text{Ш},\ \Gamma,\ C,\ \Lambda.$$

В табл. 1 приведены все возможные типы блоков при условии $d > 2$. В дальнейшем будем считать, что это условие выполнено. Символ 1 в графе таблицы означает, что соответствующее условие выполнено, символ 0 — ложно, незаполненная графа означает, что условие ложно из тривиальных соображений.

Типы блоков обозначены буквами $Б_0$, $Б_1$, ..., $Б_{11}$. Так, например, тип $Б_6$ имеет описание B, K, $\neg$Ш, $\neg\Gamma$, условия O, C, Λ предполагаются ложными (их ложность вытекает из условия B). Невозможность других типов следует из леммы 4.1.

Теперь коснемся параметров Δ, δ, ν, i, j, используемых в табл. 1. Запись $Б_0(\Delta)$ означает тип изоморфизма стандартного блока модели $\mathfrak{M}$, такой что Oracle $(\mathfrak{M}) = \Delta$. Согласно леммам 2.1, 3.1 блок с такими условиями определен в точности тогда, когда $\Delta \in$ Nonstop (M). Блок типа $Б_5$

Таблица 1. **Типы блоков**

Место блока	Условия						Обозначение типа	Название
	О	К	Ш	Г	С	Λ		
ВН	1	1	1	1	1	1	$Б_0(\Delta)$	Стандартный блок
ВН	0	1	0	0	1	0	$Б_1(\delta)$	Блок нестандартного куска ленты с битом информации
ВН	0	1	0	0	0	0	$Б_2$	Блок нестандартного куска ленты без информации
ВН	0	0	0	0	0	0	$Б_3$	Пустой блок на стыке верхней и нижней части
В		1	1	0			$Б_4$	Блок шума
В		1	0	1			$Б_5(\nu, i, j)$	Блок исполнения команды
В		1	0	0			$Б_6(i)$	Блок, пересеченный одной K-трассой
В		0	0	1			$Б_7(\nu, j)$	Блок движения головки
В		0	0	0			$Б_8$	Пустой блок в верхней части
Н					1	1	$Б_9$	Блок с Λ-линией, порождающей веер C-трасс
Н					1	0	$Б_{10}$	Блок, пересеченный одной C-трассой
Н					0	0	$Б_{11}$	Пустой блок в нижней части

Примечание. $\Delta \in$ Nonstop(M), $\sigma \in \{0,1\}$, $\nu\{L, R\}$, $0 \leqslant i < d$, $0 \leqslant j < e$.

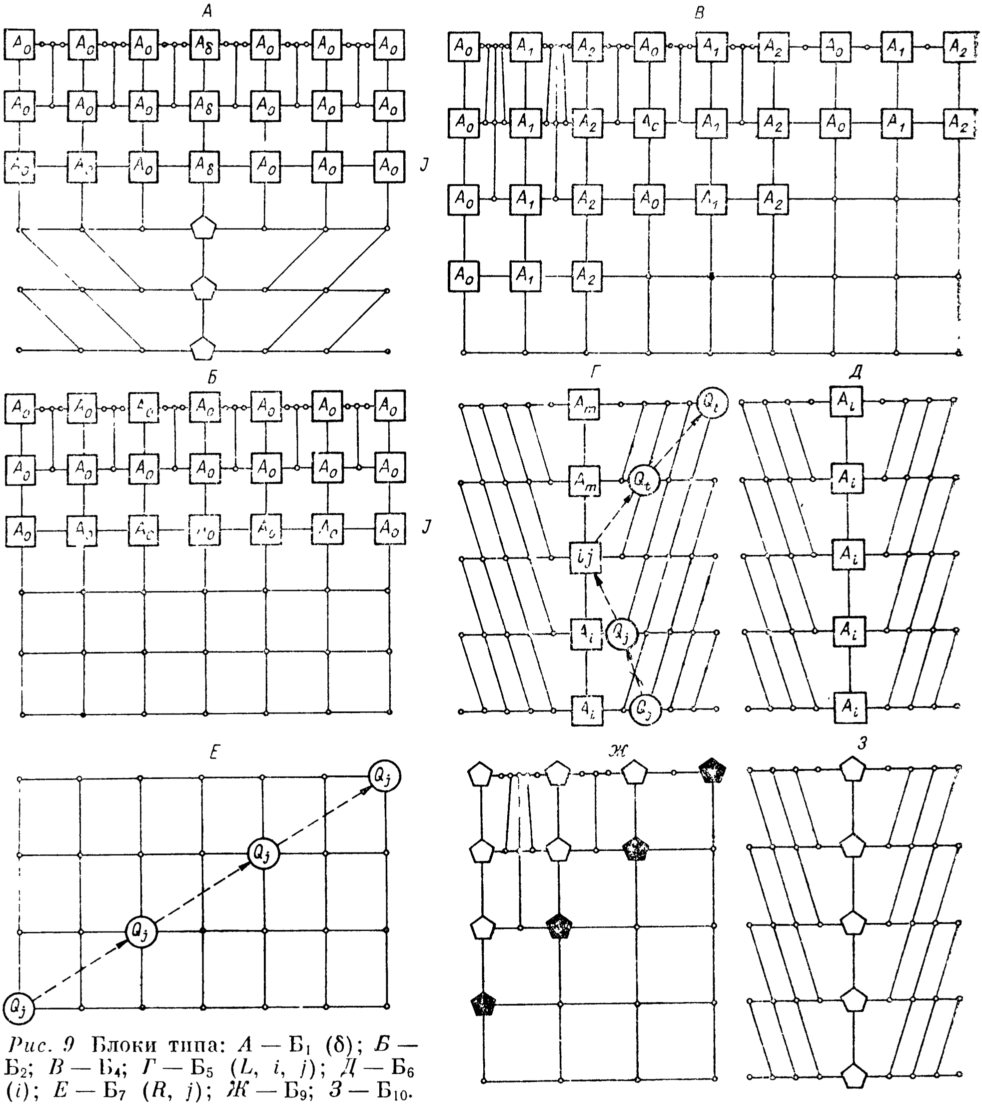


Рис. 9 Блоки типа: *А* — $Б_1$ (δ); *Б* — $Б_2$; *В* — $Б_4$; *Г* — $Б_5$ (L, i, j); *Д* — $Б_6$ (i); *Е* — $Б_7$ (R, j); *Ж* — $Б_9$; *З* — $Б_{10}$.

должен содержать точку исполнения команды. Так как условие O ложно для типа $Б_5$, то по лемме 4.2 в любом блоке такого типа должна быть ровно одна точка исполнения команды. На рис. 9, *А* — *З* показано устройство блоков всех типов, кроме стандартного и трех пустых типов. Эти рисунки показывают также смысл параметров δ, ν, i, j. Отметим, что аксиомой МТ.14 запрещены блоки $Б_5(\nu, i, j)$ такие, что к ситуации $a_i q_j$ неприменима ни одна из команд машины M.

Существование и единственность блоков типа $Б_0(\Delta)$ мы доказали выше. Существование блоков других типов, указанных в табл. 1, доказывается путем построения моделей, единственность доказывается методом плетения сетей. Мы опускаем детали. Таким образом, в табл. 1 представлены все возможные типы изоморфизма блоков (понятие изоморфизма блоков определено в § 2).

Приступим теперь к описанию моделей теории F_M в целом. Назовем *зоной* модели $\mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M$ совокупность $\mathfrak{C}$ блоков, расположенных в пределах одной P-цепи этой модели. Зону, пересекаемую L-классом J, назовем *стандартной*.

Таблица 2. **Типы зон**

Обозначение типа зоны	Типы блоков в зоне: существенные	Типы блоков в зоне: несущественные	Название зоны
$Z_0(\Delta)$	$Б_0(\Delta)$	$Б_1$, $Б_2$, $Б_3$	Стандартная зона
$Z'_В(\nu, i, j)$	$Б_4$, $Б_5(\nu, i, j)$	$Б_6$, $Б_8$	Зона в верхней части с точкой исполнения команды
$Z''_В(\nu, j)$	$Б_4$, $Б_7(\nu, j)$	$Б_6$, $Б_8$	Зона в верхней части без точки исполнения команды
$Z_Н$	$Б_9$	$Б_{10}$, $Б_{11}$	Зона в нижней части

Устройство зон различных типов описывается в табл. 2. В графе «Существенные» указаны типы блоков, которые должны быть в зоне ровно в одном экземпляре. Существование таких блоков вытекает из аксиом КРК.25, ОРК.3, МТ.5, 9. В графе «Несущественные» приведены типы блоков, которые могут быть в зоне в любом количестве.

Пусть $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ — зоны некоторых моделей. Назовем эти зоны *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие между точками (т. е. E-классами) этих зон, сохраняющее предикаты языка (2.1). Очевидно, что две зоны будут изоморфными, если они имеют одинаковый тип и, кроме того, если они содержат одинаковые наборы блоков несущественных типов.

В любой модели стандартная зона должна быть ровно одна, зоны других типов могут быть в любом количестве. Отметим, что модели, имеющие идентичные описания на языке типов блоков и зон, могут оказаться неизоморфными из-за различий в числе компонент.

§ 5. АКСИОМА НОРМАЛИЗАЦИИ

Перейдем к описанию последней аксиомы теории F^*_M. Основная роль этой аксиомы состоит в том, чтобы обеспечить модельную полноту теории. Предварительно введем ряд вспомогательных понятий.

Пусть $\nu \in \{L, R\}$, $0 \leqslant i < d$, $0 \leqslant j < e$, $\mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M$.

а) Назовем $\langle \nu, i, j\rangle$*-точкой* модели $\mathfrak{M}$ ее E-класс, который является точкой исполнения команды в ситуации $a_i q_j$ с дополнительным условием, что непосредственно перед исполнением команды головка движется в направлении ν.

б) Назовем $\langle \nu, j\rangle$*-точкой* модели $\mathfrak{M}$ ее точку, лежащую на участке Г-трассы с наклоном ν и отмеченную предикатом Q_j.

Будем придерживаться соглашения, что каждая $\langle \nu, i, j\rangle$-точка является $\langle \nu, j\rangle$-точкой.

в) Через J_k, $k < \omega$, обозначим L-класс, который является k-м P-последователем класса J.

г) Назовем *весом тройки* $\langle \nu, i, j\rangle$ *в модели* $\mathfrak{M}$ число

$$\|\langle \nu, i, j\rangle\|_{\mathfrak{M}} = \begin{cases} m, & \text{если множество } \langle \nu, i, j\rangle\text{-точек стандартного блока модели } \mathfrak{M} \text{ конечно, и последняя из них (считая по } P\text{-цепи), находится в классе } J_m. \\ \omega, & \text{если множество } \langle \nu, i, j\rangle\text{-точек стандартного блока модели } \mathfrak{M} \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

д) Подобным образом определяется число $\|\langle \nu, j\rangle\|_{\mathfrak{M}}$ — *вес пары* $\langle \nu, j\rangle$ *в модели* $\mathfrak{M}$.

Определение 1. Назовем машину M *нормальной*, если существует натуральное число n_M такое, что для любой тройки $\langle \nu, i, j\rangle$ выполнено одно из двух условий:

$$(\forall \mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M)\,\|\langle \nu, i, j\rangle\|_{\mathfrak{M}} < n_M, \tag{5.1}$$

$$(\forall \mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M)\,\|\langle \nu, i, j\rangle\|_{\mathfrak{M}} = \omega. \tag{5.2}$$

Будем называть тройку $\langle \nu, i, j\rangle$ *конечно* или же *бесконечно реализуемой* в соответствии с тем, какой из случаев, (5.1) или (5.2), имеет место.

Утверждения следующей леммы достаточно очевидны.

Лемма 5.1. *Пусть* $0 \leqslant j < e$, $\nu \in \{L, R\}$, $\mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M$, n — *произвольное натуральное число, тогда*

(*а*) *если* $(\forall i < d)\,\|\langle \nu, i, j\rangle\|_{\mathfrak{M}} < n$, *то* $\|\langle \nu, j\rangle\|_{\mathfrak{M}} < n$;

(*б*) *если* $(\exists i < d)\,\|\langle \nu, i, j\rangle\|_{\mathfrak{M}} = \omega$, *то* $\|\langle \nu, j\rangle\|_{\mathfrak{M}} = \omega$.

Из леммы вытекает, что если M — нормальная машина, то для любой пары $\langle \nu, j\rangle$ выполняется одно из двух условий:

$$(\forall \mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M)\,\|\langle \nu, j\rangle\|_{\mathfrak{M}} < n_M, \tag{5.3}$$

$$(\forall \mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M)\,\|\langle \nu, j\rangle\|_{\mathfrak{M}} = \omega. \tag{5.4}$$

Будем говорить, что пара $\langle \nu, j\rangle$ является *конечно* или же *бесконечно реализуемой* в соответствии с тем, какой из случаев, (5.3) или (5.4), имеет место для этой пары.

В случае, когда M — нормальная машина, определим следующую аксиому, которую будем называть аксиомой нормализации:

НОРМ. В каждом случае, когда тройка $\langle \nu, i, j\rangle$ является конечно реализуемой, за пределами классов J_k, $k = 0, 1, \ldots, n_M$, не должно быть $\langle \nu, i, j\rangle$-точек. То же самое требуется для каждой конечно реализуемой пары.

Присоединяя к F_M аксиому НОРМ, получим теорию F^*_M. Отметим, что для эффективного построения аксиомы нормализации достаточно знать величину n_M и список всех конечно реализуемых троек.

Аксиома нормализации запрещает в моделях нестандартные зоны следующих типов:

$Z'_B(\nu, i, j)$ *в случае конечно реализуемой тройки* $\langle \nu, i, j\rangle$,

$Z''_B(\nu, j)$ *в случае конечно реализуемой пары* $\langle \nu, j\rangle$.

Вместе с тем аксиома нормализации не оказывает влияния на стандартную зону. Это позволяет доказать следующий факт:

Лемма 5.2. *Если модель* $\mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M$ *состоит из одного стандартного блока, то* $\mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F^*_M$.

Доказательство. Легко видеть, что НОРМ является верным утверждением о стандартном блоке любой модели $\mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F_M$. □

Следствие 5.3. *Утверждения леммы 3.1 и следствия 3.2 в случае, когда* M — *нормальная машина, останутся верными при замене* F_M *на* F^*_M

§ 6. СОВЕРШЕННЫЕ МОДЕЛИ

В этом параграфе разрабатывается теоретико-модельная техника исследования теории F^*_M.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная модель теории F_M^* мощности α. Назовем модель $\mathfrak{M}$ *совершенной над множеством* $V \subset |\mathfrak{M}|$, если выполнены условия:

(6.1) Модель $\mathfrak{M}$ имеет α зон типа $Z'_B(\nu, i, j)$, не пересекающихся с V, для каждой бесконечно реализуемой тройки $\langle \nu, i, j\rangle$.

(6.2) Модель $\mathfrak{M}$ имеет α зон типа $Z''_B(\nu, j)$, не пересекающихся с V, для каждой бесконечно реализуемой пары $\langle \nu, j\rangle$.

(6.3) Модель $\mathfrak{M}$ имеет α зон типа Z_H, не пересекающихся с V.

(6.4) В зоне типа Z_0 модель $\mathfrak{M}$ имеет по α блоков, не пересекающихся с V, каждого из типов $Б_1(0)$, $Б_1(1)$, $Б_2$, $Б_3$.

(6.5) В каждой зоне в верхней части модель $\mathfrak{M}$ имеет по α блоков, не пересекающихся с V, каждого из типов $Б_6(0)$, $Б_6(1)$, $\ldots$, $Б_6(d-1)$, $Б_8$.

(6.6) В каждой зоне в нижней части модель $\mathfrak{M}$ имеет α блоков, не пересекающихся с V, типов $Б_{10}$ и $Б_{11}$.

(6.7) Каждый K-путь модели $\mathfrak{M}$ содержит по α компонент, не пересекающихся с V.

Непосредственно из определения вытекает свойство:

Лемма 6.1. *Если $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M^*$, $V_0 \subset V \subset |\mathfrak{M}|$, и модель $\mathfrak{M}$ является совершенной над V, то $\mathfrak{M}$ будет совершенной над V_0.*

Модель, совершенную над пустым множеством, будем называть *совершенной моделью. Если* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ и модель $\mathfrak{N}$ является совершенной над $|\mathfrak{M}|$, то будем называть $\mathfrak{N}$ *совершенным расширением модели* $\mathfrak{M}$.

Введем обозначения:

$\mathbf{K}(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons$ семейство всех K-путей модели $\mathfrak{M}$,

$\mathbf{K}_0(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons$ семейство всех K-путей стандартного блока модели $\mathfrak{M}$,

$k(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons$ мощность $\mathbf{K}(\mathfrak{M})$,

$k_0(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons$ мощность $\mathbf{K}_0(\mathfrak{M})$.

Лемма 6.2. *Для любой модели $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M^*$ выполняются соотношения*

(а) $\omega \leqslant k_0(\mathfrak{M}) \leqslant 2^\omega$;

(б) $k_0(\mathfrak{M}) \leqslant k(\mathfrak{M}) \leqslant \max\{k_0(\mathfrak{M}), \overline{\overline{\mathfrak{M}}}\}$;

(в) *если* $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \omega$, *то* $k(\mathfrak{M}) = k_0(\mathfrak{M})$;

(г) *если* $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \geqslant 2^\omega$, *то* $k(\mathfrak{M}) \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$.

Доказательство. Утверждение (а) и первое неравенство в (б) очевидны. Чтобы доказать второе неравенство в (б), перечислим все K-пути в модели $\mathfrak{M}$. В стандартном блоке, по определению, имеется $k_0(\mathfrak{M})$ различных K-путей, в блоках типов $Б_1$, $Б_2$, $Б_4$ — счетное число, в $Б_5$ — один или два, в $Б_6$ — один, в блоках других типов нет K-путей. Пункты (в) и (г) являются следствиями двух предыдущих соотношений. □

Две следующие леммы устанавливают важнейшие свойства совершенных расширений. Предварительно дадим одно определение.

Определение 2. Назовем машину $M \in \mathscr{M}$ *допустимой*, если для любого $\Delta \in \mathrm{Nonstop}\,(M)$ множества Δ и $N \setminus \Delta$ являются бесконечными.

Класс нормальных допустимых машин из $\mathscr{M}$ будем обозначать в дальнейшем через $\mathscr{M}^*$.

Лемма 6.3. *Пусть $M \in \mathscr{M}^*$, тогда каждая модель $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F_M^*$ имеет элементарное совершенное расширение любой мощности $\alpha \geqslant \max\{k_0(\mathfrak{M}), \mathfrak{m}\}$.*

Доказательство. Возьмем произвольное элементарное расширение $\mathfrak{N}$ модели $\mathfrak{M}$ мощности α. Из леммы 6.2 следует, что $k(\mathfrak{N}) \leqslant \alpha$. Рассмотрим язык

$$\mathscr{L}^* = \mathscr{L}_M \cup \{c_a \mid a \in |\mathfrak{N}|\}.$$

Через $\mathfrak{N}^*$ обозначим естественное обогащение модели $\mathfrak{N}$ до языка $\mathscr{L}^*$. Наша цель сейчас — описать различные типы расширений модели $\mathfrak{N}$, необходимые для построения совершенной модели.

Для построения элементарного расширения $\mathfrak{N}' > \mathfrak{N}$ мощности α, в котором имеется хотя бы одна новая зона типа $Z'_B(\nu, i, j)$, указанного в (6.1), рассмотрим множество формул $\Sigma(x)$, утверждающее

а) x является $\langle\nu, i, j\rangle$-точкой,

б) $\neg xLc_a$ для всех $a \in |\mathfrak{N}|$.

Так как тройка $\langle\nu, i, j\rangle$ бесконечно реализуема, то множество $\Sigma(x)$ локально совместно с $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}^*)$. Элементарное расширение $\mathfrak{N}'$ модели $\mathfrak{N}^*$ мощности α, реализующее $\Sigma(x)$, будет искомой моделью. Подобным образом рассматриваются типы зон, указанные в (6.2), (6.3).

Предположим, что $\mathfrak{C}$ — зона модели $\mathfrak{N}$ типа Z_B. Для построения элементарного расширения $\mathfrak{N}' > \mathfrak{N}$ мощности α, которое в зоне $\mathfrak{C}$ имеет новый блок типа $\text{Б}_6(i)$, рассмотрим множество формул

$$\Sigma(x) = \{xLc_b\} \cup \{\neg xEc_a | a \in |\mathfrak{N}|\} \cup \{A_i(x)\} \cup p(x),$$

где $b \in \mathfrak{C}$, а $p(x)$ — множество формул, утверждающее, что R-S-связи в окрестности x имеют форму типа Б_6. Согласно описанию моделей в зоне $\mathfrak{C}$ модели $\mathfrak{N}$ имеется блок шума, в котором можно реализовать любую конечную часть множества $\Sigma(x)$. В качестве $\mathfrak{N}'$ можно взять элементарное расширение модели $\mathfrak{N}^*$ мощности α, реализующее $\Sigma(x)$. Подобным образом рассматриваются другие типы зон и блоков, указанные в (6.4)—(6.6). Отметим, что при рассмотрении блоков типа $\text{Б}_1(0)$ и $\text{Б}_1(1)$ используется допустимость машины M.

Рассмотрим теперь произвольный K-путь $\mathscr{K} \in \mathbf{K}(\mathfrak{N})$. Возьмем элемент $b \in |\mathfrak{N}|$, находящийся в $\mathscr{K}$. Построим следующее множество формул:

$$\dot\Sigma(x) = \{xEc_b\} \cup \{x \neq c_a | a \in |\mathfrak{N}|\} \cup$$
$$\cup \{D^k(x) \text{ находится в } \mathscr{K} | k < \omega\}.$$

Здесь $D^0(x) = x$, $D^{k+1}(x) = D(D^k(x))$. Так как всякий конечный участок пути $\mathscr{K}$ покрыт какой-либо компонентой модели $\mathfrak{N}$, то множество $\Sigma(x)$ локально совместно с теорией $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}^*)$. Элементарное расширение $\mathfrak{N}'$ модели $\mathfrak{N}^*$, реализующее $\Sigma(x)$, будет, очевидно, содержать новую компоненту, проходящую по $\mathscr{K}$.

Используя три вида расширений, описанные выше, можно построить элементарную цепь длины α, объединение которой будет элементарным совершенным расширением модели $\mathfrak{M}$ мощности α. □

Лемма 6.4. *Для любой машины $M \in \mathscr{M}^*$ справедливы утверждения*

(а) *Пусть $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\, F^*_M$, $\alpha \geqslant \max\{k_0(\mathfrak{M}), \overline{\overline{\mathfrak{M}}}\}$, тогда совершенное расширение модели $\mathfrak{M}$ мощности α определено однозначно с точностью до изоморфизма над $\mathfrak{M}$.*

(б) *Любые две совершенные модели $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \in \mathrm{Mod}\, F^*_M$ одной мощности с условием* $\mathrm{Oracle}(\mathfrak{N}_1) = \mathrm{Oracle}(\mathfrak{N}_2)$ *изоморфны.*

Доказательство. (а) Пусть $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ — произвольные совершенные расширения модели $\mathfrak{M}$, имеющие мощность α.

Устанавливая соответствие между зонами одинаковых типов, затем переходя к L-классам и блокам и, наконец, к E-классам этих моделей, мы построим в итоге биективное соответствие f между точками (т. е. E-классами) моделей $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$, обладающее свойствами:

А) *f сохраняет предикаты P, L, E, R, S, B, H, J, O, U, а также все предикаты из $\mathscr{L}_3 \cup \mathscr{L}_4$;*

Б) *$f([x]_E) = [x]_E$ для всех $x \in |\mathfrak{M}|$.*

После этого приступим к построению поэлементного отображения $h: \mathfrak{N}_1 \to \mathfrak{N}_2$, отдельно рассматривая части $X \cup Y$ и W этих моделей.

1. Отображение на множестве $X \cup Y$. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — модели теории квазиследования, полученные из моделей $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ огра-

ничением до множества $X \cup Y$. Легко видеть, что $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ являются расширениями модели $\mathfrak{A}$. Требуется построить изоморфизм

$$h^{(1)} : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2, \tag{6.8}$$

тождественный на $\mathfrak{A}$ и согласованный с отображением f между точками каркасов $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$. В данном случае можно использовать следующее свойство продолжения изоморфизмов:

Предложение [1, лемма 12]. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — модели теории QS, причем $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_2$. Пусть $h^* : \mathfrak{A}_1/_\sim \to \mathfrak{A}_2/_\sim$ — произвольный $\triangleleft$-изоморфизм фактор-моделей с условием, что $h^*([a]_\sim) = [a]_\sim$ для всех $a \in |\mathfrak{A}|$. Тогда h^* продолжается до изоморфизма $h : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$, тождественного на $|\mathfrak{A}|$.*

Это предложение и дает изоморфизм (6.8) с нужными свойствами.

2. Отображение на множестве W. Используя (6.7), построим биекцию

$$g : \mathbf{K}(\mathfrak{R}_1) \to \mathbf{K}(\mathfrak{R}_2), \tag{6.9}$$

тождественную на $\mathbf{K}(\mathfrak{M})$, такую, чтобы соответствующие компоненты проходили по соответствующим K-путям. Не составит труда переделать отображение (6.9) в поэлементное отображение $h^{(2)}$, тождественное на $|\mathfrak{M}|$ и сохраняющее D-связи.

Объединяя две построенные части $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$, получим изоморфизм $h : \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2$, тождественный на $|\mathfrak{M}|$. Этим доказана первая часть леммы.

Вторая часть доказывается по той же схеме, лишь с некоторыми упрощениями, связанными с тем, что отпадает необходимость заботиться о тождественности h на подмодели. Условие $\mathrm{Oracle}(\mathfrak{R}_1) = \mathrm{Oracle}(\mathfrak{R}_2)$ обеспечит изоморфизм стандартных блоков, необходимый на этапе построения функции f. □

Следствие 6.5. *Каждое совершенное расширение является элементарным расширением.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная модель теории F_M^*, $\mathfrak{R}$ — ее совершенное расширение мощности α. По лемме 6.3 модель $\mathfrak{M}$ имеет элементарное совершенное расширение $\mathfrak{R}'$ мощности α, а по лемме 6.4 модели $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ изоморфны над $\mathfrak{M}$. □

§ 7. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТЕОРИИ F_M^*.

Применим разработанную технику совершенных расширений для изучения свойств теории F_M^*.

Лемма 7.1. *Пусть $M \in \mathscr{M}^*$, тогда теория F_M^* модельно полна.*

Доказательство. Возьмем произвольные модели $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ теории F_M^* такие, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$. Для доказательства леммы достаточно показать, что $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2$. По лемме 6.3 модель $\mathfrak{M}_2$ имеет совершенное элементарное расширение $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \prec \mathfrak{R}.$$

Из леммы 6.1 следует, что $\mathfrak{R}$ будет совершенным расширением модели $\mathfrak{M}_1$. Тогда следствие 6.5 дает $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{R}$. В результате получаем $\mathfrak{M}_1 \preccurlyeq \mathfrak{M}_2$. □

Лемма 7.2. *Пусть $M \in \mathscr{M}^*$, тогда для любых моделей $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2 \in \mathrm{Mod}\, F_M^*$ выполняется*

$$\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2 \leftrightarrow \mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}_1) = \mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}_2).$$

Доказательство. Импликация $\to$ очевидна. Обратно, предположим, что $\mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}_1) = \mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}_2)$. Положим

$$\alpha = \max\{k_0(\mathfrak{M}_1),\ k_0(\mathfrak{M}_2),\ \overline{\overline{\mathfrak{M}}}_1,\ \overline{\overline{\mathfrak{M}}}_2\}.$$

По лемме 6.3 модели $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ имеют элементарные совершенные расширения $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ мощности α. По лемме 6.1 получаем, что $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ — совершенные модели одной мощности, при этом

$$\text{Oracle}(\mathfrak{N}_1) = \text{Oracle}(\mathfrak{M}_1) = \text{Oracle}(\mathfrak{M}_2) = \text{Oracle}(\mathfrak{N}_2).$$

По лемме 6.4 имеем $\mathfrak{N}_1 \cong \mathfrak{N}_2$, отсюда $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$. □

Теперь мы имеем возможность описать все пополнения теории F_M^*. Для этого рассмотрим последовательность предложений, касающихся содержимого оракула

$$\Omega_i \rightleftharpoons \text{«\textit{В ячейке Я}}_i \text{ \textit{содержится единица}»}, \ i < \omega. \qquad (7.1)$$

Пусть Δ — произвольное подмножество N. Обозначим

$$F_M^*[\Delta] \rightleftharpoons F_M^* \cup \{\Omega_i \mid i \in \Delta\} \cup \{\neg\, \Omega_j \mid j \in N \setminus \Delta\}.$$

Лемма 7.3. *Пусть $M \in \mathscr{M}^*$, тогда*

(а) *если $\Delta \in \text{Nonstop}(M)$, то теория $F_M^*[\Delta]$ полна;*

(б) *если $\Delta \notin \text{Nonstop}(M)$, то теория $F_M^*[\Delta]$ противоречива;*

(в) *предложения Ω_i, $i < \omega$, порождают алгебру Линденбаума теории F_M^*.*

Доказательство. Из определений следует, что для любой модели $\mathfrak{M}$ теории F_M^* выполняется

$$\mathfrak{M} \in \text{Mod}\, F_M^*[\Delta] \to \text{Oracle}(\mathfrak{M}) = \Delta.$$

Используя лемму 7.3 и следствие 5.3, получаем (а), (б). Пункт (в) является непосредственным следствием двух предыдущих пунктов. □

Охарактеризуем строение простых моделей. Предварительно дадим одно определение. Назовем K-путь $\mathscr{K}$ модели $\mathfrak{M}$ *конечнозвенным*, если $\mathscr{K}$ состоит из конечного числа K-трасс. В противном случае $\mathscr{K}$ назовем *бесконечнозвенным* K-путем.

Лемма 7.4. *Модель $\mathfrak{M}$ теории $F_M^*[\Delta]$ будет простой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(П.1) *$\mathfrak{M}$ — одноблочная модель;*

(П.2) *конечнозвенные K-пути модели $\mathfrak{M}$ содержат по одной компоненте;*

(П.3) *бесконечнозвенные K-пути модели $\mathfrak{M}$ не содержат компонент.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{M}$ — простая модель. Необходимость условия (П.1) очевидна. От противного докажем (П.2). Предположим, что по конечнозвенному K-пути $\mathscr{K}$ в модели $\mathfrak{M}$ проходит β компонент и $\beta \neq 1$. Случай $\beta = 0$ невозможен, поскольку последняя K-трасса из $\mathscr{K}$ не покрывалась бы в этом случае компонентами, в противоречие с ТРН.1. Следовательно, $\beta \geqslant 2$. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ модель, которая получается из $\mathfrak{M}$ выбрасыванием всех компонент, проходящих по $\mathscr{K}$, кроме одной. Тогда $\mathfrak{M}$ не вложима в $\mathfrak{M}_1$, что противоречит простоте $\mathfrak{M}$. Также от противного докажем (П.3). Предположим, что по бесконечнозвенному K-пути $\mathscr{K}$ в модели $\mathfrak{M}$ проходит хотя бы одна компонента. Так как $\mathscr{K}$ — бесконечнозвенный путь, то каждый конечный его участок покрыт компонентами других K-путей. Выбрасывая из $\mathfrak{M}$ все компоненты, проходящие по $\mathscr{K}$, получим модель $\mathfrak{M}_1$, в которую нельзя вложить $\mathfrak{M}$, что противоречит простоте этой модели.

Предположим теперь, что модель $\mathfrak{M}$ теории $F_M^*[\Delta]$ удовлетворяет условиям (П.1—3), и $\mathfrak{M}'$ — произвольная модель этой теории. Стандартные блоки этих моделей изоморфны по лемме 2.1. Кроме того, по любому конечнозвенному K-пути в модели $\mathfrak{M}'$ должна проходить хотя бы одна компонента. Это обеспечивает существование изоморфного вложения $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$. В силу модельной полноты оно будет элементарным. □

Непосредственно из доказанной леммы вытекает следующее условие существования простой модели.

Лемма 7.5. *Теория $F_M^*[\Delta]$ имеет простую модель тогда и только тогда, когда через любую K-точку блока* $Б_0(\Delta)$ *проходит хотя бы один конечнозвенный K-путь.*

Теперь исследуем насыщенные модели и тотальную трансцендентность.

Лемма 7.6. *Пусть $M \in \mathscr{M}^*$, $\Delta \in \mathrm{Nonstop}(M)$, тогда*

(а) *если блок* $Б_0(\Delta)$ *содержит счетное число K-путей, то теория $F_M^*[\Delta]$ является тотально трансцендентной;*

(б) *если блок* $Б_0(\Delta)$ *содержит несчетное число K-путей, то теория $F_M^*[\Delta]$ не тотально трансцендентна и не имеет счетной насыщенной модели.*

Доказательство. (а) Предположим, что выполнены все условия леммы. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная счетная модель теории $F_M^*[\Delta]$. По условию $k_0(\mathfrak{M}) = \omega$, тогда по лемме 6.3 модель $\mathfrak{M}$ имеет счетное элементарное совершенное расширение $\mathfrak{N}$. Достаточно показать, что каждый тип $p(x)$ над $\mathfrak{M}$ реализуется в $\mathfrak{N}$. Для этого реализуем тип p в некотором счетном элементарном расширении $\mathfrak{M}'$ модели $\mathfrak{M}$. Так как $k_0(\mathfrak{M}') = k_0(\mathfrak{M}) = \omega$, то по лемме 6.3 модель $\mathfrak{M}'$ имеет счетное элементарное совершенное расширение $\mathfrak{N}'$. Ясно, что тип p реализуется в $\mathfrak{N}'$. По лемме 6.1 $\mathfrak{N}'$ будет совершенным расширением модели $\mathfrak{M}$, тогда по лемме 6.4 модели $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ изоморфны над $\mathfrak{M}$. Следовательно, тип p реализуется в $\mathfrak{N}$.

(б) Снова предположим, что выполнены условия леммы. Пусть $\mathscr{K}$ — произвольный K-путь стандартного блока $Б_0(\Delta)$. Обозначим через $\mathscr{K}^*(x)$ множество формул, утверждающее, что $x \in (J \cup Ш) \cap W$ и компонента, порожденная элементом x, проходит по $\mathscr{K}$. Ясно, что объединение $\mathscr{K}_1^*(x) \cup \mathscr{K}_2^*(x)$ при $\mathscr{K}_1 \neq \mathscr{K}_2$ несовместно с $F_M^*[\Delta]$. Следовательно, теория $F_M^*[\Delta]$ имеет несчетное множество 1-типов, что и доказывает п. (б) леммы. □

Замечание. Пусть $M \in \mathscr{M}^*$, тогда теория $F_M^*[\Delta]$ будет суперстабильной при любом $\Delta \in \mathrm{Nonstop}(M)$.

Доказательство проводится так же, как в п. (а) леммы, с использованием утверждений (б), (г) леммы 6.2. □

Лемма 7.7. *Модель $\mathfrak{M}$ теории $F_M^*[\Delta]$ является счетной насыщенной в том и только в том случае, когда $\mathfrak{M}$ является счетной совершенной моделью.*

Доказательство. Достаточно очевидно, что счетная насыщенная модель удовлетворяет всем пунктам определения совершенной модели (см. § 6) для случая $\alpha = \omega$. Обратно, предположим, что $\mathfrak{M}$ — счетная совершенная модель теории $F_M^*[\Delta]$. Из условия (6.7) получаем, что $k_0(\mathfrak{M}) = \omega$, тогда по лемме 7.6 теория $F_M^*[\Delta]$ имеет счетную насыщенную модель $\mathfrak{M}'$. Так как $\mathfrak{M}'$ необходимо удовлетворяет определению совершенной модели, то $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ по лемме 6.4. □

§ 8. ДЕРЕВЬЯ

В этом параграфе мы опишем понятия, связанные с деревьями. Используемый вариант понятия дерева введен в работе автора [7]. Инструмент деревьев будет играть важную роль в конструкции конечно аксиоматизируемых теорий, содержащих вычисления машин Тьюринга.

Перейдем к определениям.

Полным бинарным деревом назовем частично упорядоченное множество $\mathscr{D}_0 = \langle N; \preccurlyeq \rangle$ формы, изображенной на рис. 10. Выше по указанным связям расположены бо́льшие относительно $\preccurlyeq$ элементы.

$$\left.\begin{aligned} L(x) &= 2x+1 \text{ — левый последователь элемента } x, \\ R(x) &= 2x+2 \text{ — правый последователь элемента } x. \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Деревом назовем всякое множество $\mathscr{D} \subseteq N$, удовлетворяющее условиям

Д1. $x \preccurlyeq y \mathbin{\&} y \in \mathscr{D} \to x \in \mathscr{D}$.

Д2. $L(x) \in \mathscr{D} \leftrightarrow R(x) \in \mathscr{D}$, *для всех* $x \in N$.

На рис. 11 изображены три примера деревьев. Два первые — конечные деревья, третье дерево — бесконечное.

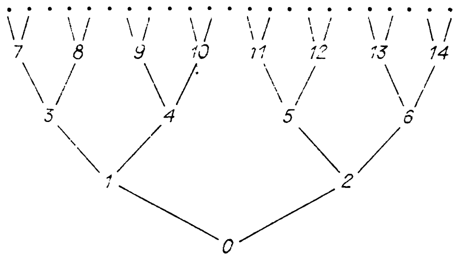


Рис. 10.

Элемент $x \in \mathscr{D}$ такой, что $L(x) \notin \mathscr{D}$, называется *тупиком* дерева $\mathscr{D}$. Дерево называется *атомным*, если над каждым его элементом есть хотя бы один тупик.

Цепью назовем множество $\pi \subseteq N$, удовлетворяющее условиям

Ц1. $x,\ y \in \pi \to x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

Ц2. $x \preccurlyeq y \mathbin{\&} y \in \pi \to x \in \pi$.

Множество всех максимальных цепей дерева $\mathscr{D}$ будем обозначать через $\Pi(\mathscr{D})$, а множество всех конечных максимальных цепей этого дерева — через $\Pi^{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$.

Для произвольного натурального числа n определим о. р. ф. $f_n(x)$ следующей схемой:

$$\begin{cases} f_n(0) = n, \\ f_n(L(x)) = L(f_n(x)), \\ f_n(R(x)) = R(f_n(x)), \end{cases}$$

где L и R определены формулами (8.1). Легко видеть, что функция f_n изоморфно отображает полное дерево в область $\{x \mid n \preccurlyeq x\}$ полного дерева.

Пусть $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ — деревья. Назовем их *прямой суммой* следующее дерево:

$$\mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2 \rightleftharpoons \{0\} \cup f_1(\mathscr{D}_1) \cup f_2(\mathscr{D}_2)$$

(легко показать, что так определенное множество действительно является деревом). Дерево $\mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2$ может быть получено путем прикрепления изоморфных копий слагаемых к тупикам трехэлементного дерева, изображенного на рис. 11, *б*.

Нам понадобится еще одна операция над деревьями. Назовем *прямой суммой последовательности деревьев* $\mathscr{D}_i$, $i < \omega$, следующее дерево:

$$\oplus \langle \mathscr{D}_i \mid i < \omega \rangle \rightleftharpoons \{0\} \cup \{2,\ 6,\ \ldots,\ k_n + 1,\ \ldots,\ n < \omega\} \cup$$
$$\cup f_1(\mathscr{D}_0) \cup f_5(\mathscr{D}_1) \cup \ldots \cup f_{k_n}(\mathscr{D}_n) \cup \ldots,$$

где $k_n = 2^{n+2} - 3$. Это дерево может быть получено путем прикрепления изоморфных копий деревьев $\mathscr{D}_i$ к последовательным тупикам дерева, изображенного на рис. 11, *в*.

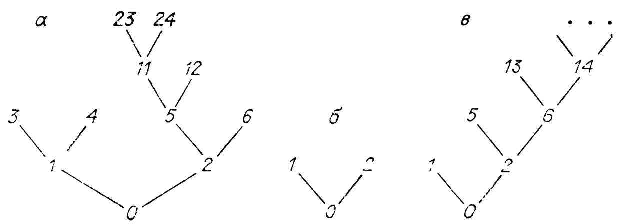


Рис. 11.

Изучим семейство всех максимальных цепей произвольного дерева $\mathscr{D}$. Пусть G — подмножество $\Pi(\mathscr{D})$. Цепь $\pi \in G$ назовем *изолированной в* G, если существует элемент $a \in \pi$

такой, что π — единственная цепь из G, проходящая через a. Через G' обозначим множество цепей $\pi \in G$, которые не являются изолированными в G. Индукцией по ординалам определим подмножества $\Pi_\alpha(\mathscr{D}) \subseteq \Pi(\mathscr{D})$ следующим образом:

а) $\Pi_0(\mathscr{D}) = \Pi(\mathscr{D})$,

б) $\Pi_{\alpha+1}(\mathscr{D}) = (\Pi_\alpha(\mathscr{D}))'$,

в) $\Pi_\gamma(\mathscr{D}) = \bigcap\limits_{\beta<\gamma} \Pi_\beta(\mathscr{D})$, *если* γ — *предельный ординал.*

Наименьшее α такое, что $\Pi_{\alpha+1}(\mathscr{D}) = \Pi_\alpha(\mathscr{D})$, назовем *рангом дерева* $\mathscr{D}$ и будем обозначать через $\operatorname{Rank} \mathscr{D}$. *Рангом цепи* $\pi \in \Pi(\mathscr{D})$ назовем ординал α, который обозначим через $\operatorname{Rank} \pi$, такой, что $\pi \in \Pi_\alpha(\mathscr{D}) \setminus \Pi_{\alpha+1}(\mathscr{D})$. Ясно, что в общем случае функция ранга будет частично определена на множестве $\Pi(\mathscr{D})$. Назовем $\mathscr{D}$ *суператомным деревом*, если функция ранга всюду определена на $\Pi(\mathscr{D})$. Другими словами, дерево $\mathscr{D}$ будет суператомным, если $\Pi_\alpha(\mathscr{D}) = \varnothing$ при некотором α.

Данное выше определение функции ранга предложено С. С. Гончаровым и Б. Н. Дроботуном.

Из определения легко выводится, что для любого ординала $\alpha < \operatorname{Rank} \mathscr{D}$ существуют цепи $\pi \in \Pi(\mathscr{D})$, имеющие ранг α. При этом выполнено соотношение

$$\operatorname{Rank} \mathscr{D} = \sup \{\operatorname{Rank} \pi \mid \pi \in \Pi(\mathscr{D}) \ \&\ \operatorname{Rank} \pi \ \textit{определено}\}. \tag{8.2}$$

Исследуем некоторые свойства функции ранга.

Лемма 8.1. *Для любого дерева $\mathscr{D}$ множество цепей $\pi \in \Pi(\mathscr{D})$, имеющих ранг, не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $\pi \in \Pi_\alpha(\mathscr{D}) \setminus \Pi_{\alpha+1}(\mathscr{D})$. Обозначим через $I(\pi)$ множество, состоящее из элементов, изолирующих цепь π в $\Pi_\alpha(\mathscr{D})$. Легко показать, что если цепи π_1 и π_2 имеют ранги, то $I(\pi_1) \cap I(\pi_2) = \varnothing$ при $\pi_1 \neq \pi_2$. Это вместе со счетностью множества N доказывает лемму. □

Лемма 8.2. *Ранг любого дерева является счетным ординалом. Если $\mathscr{D}$ — суператомное дерево, то $\operatorname{Rank} \mathscr{D}$ — непредельный ординал.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 8.1. Докажем второе утверждение. Предположим, что $\mathscr{D}$ — суператомное дерево. В силу (8.2) достаточно показать, что если γ — предельный ординал, такой что для любого $\beta < \gamma$ в $\Pi(\mathscr{D})$ есть цепи ранга β, то в $\Pi(\mathscr{D})$ найдется цепь ранга γ или больше. С этой целью выберем в $\Pi(\mathscr{D})$ последовательность цепей π_i, $i < \omega$, с условием, что

$$\sup \{\operatorname{Rank} \pi_i \mid i < \omega\} = \gamma.$$

Существует цепь $\pi^* \in \Pi(\mathscr{D})$, через каждый элемент которой проходит бесконечно много цепей из последовательности π_i. Так как $\mathscr{D}$ — суператомное дерево, то ранг цепи π^* определен. Применяя определение, получаем $\operatorname{Rank} \pi^* \geqslant \gamma$. □

Следующая теорема характеризует с разных сторон суператомные деревья.

Теорема 8.1. *Для любого дерева $\mathscr{D}$ равносильны следующие условия:*

(а) *Дерево $\mathscr{D}$ является суператомным.*

(б) *Множество $\Pi(\mathscr{D})$ не более чем счетно.*

(в) *Множество $\Pi(\mathscr{D})$ имеет мощность, меньшую чем 2^ω.*

(г) *Каждое счетное множество $G \subseteq \Pi(\mathscr{D})$ имеет изолированные цепи.*

(д) *Каждое множество $G \subseteq \Pi(\mathscr{D})$ имеет изолированные цепи.*

Доказательство проведем по схеме

$$(а) \to (б) \to (в) \to (г) \to (д) \to (а).$$

(а) $\to$ (б). Следует из леммы 8.1.

(б) $\to$ (в). Очевидно.

(в) $\to$ (г). От противного предположим, что существует счетное множество $G \subseteq \Pi(\mathscr{D})$, не имеющее изолированных цепей. Легко видеть, что множество $V = \cup \{\pi | \pi \in G\}$ является подмножеством $\mathscr{D}$ и удовлетворяет условиям

1) $x \preccurlyeq y \mathbin{\&} y \in V \to x \in V$,

2) $(\forall y \in V)\ (\exists z_1, z_2 \in V)(y \preccurlyeq z_1 \mathbin{\&} y \preccurlyeq z_2 \mathbin{\&} \neg(z_1 \preccurlyeq z_2) \mathbin{\&} \neg(z_2 \preccurlyeq z_1))$.

Поэтому среди подмножеств V имеется 2^ω бесконечных цепей, причем все они принадлежат $\Pi(\mathscr{D})$.

(г) $\to$ (д). Следует из того, что из любого непустого множества $G \subseteq \Pi(\mathscr{D})$, не имеющего изолированных цепей, можно выбрать счетное подмножество $G_0 \subseteq G$, в котором нет изолированных цепей.

(д) $\to$ (а). Вытекает из определений. □

Пусть λ — первый неконструктивный ординал. Отметим без доказательства, что если $\mathscr{D}$ — рекурсивно перечислимое суператомное дерево, то $\operatorname{Rank} \mathscr{D} < \lambda$. Отсюда следует, что если $\mathscr{D}$ — рекурсивно перечислимое дерево, то $\operatorname{Rank} \mathscr{D} \leqslant \lambda$.

§ 9. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Построение машины M, обеспечивающей заданные свойства теории F_M^*, связано с определенными трудностями. Прежде всего машина M должна «строить» определенную конфигурацию K-путей в стандартном блоке, используя при этом содержание оракула. Вместе с тем машина M должна быть нормальной и допустимой. Основная теорема, к которой мы сейчас перейдем, имеет своей целью облегчить применение конструкции $M \to F_M^*$. Предварительно дадим несколько определений.

W_s, $s < \omega$,— постовская нумерация всех р. п. множеств, W_s^A, $s < \omega$,— нумерация множеств, рекурсивно перечислимых относительно заданного множества $A \subseteq N$ [6, с. 85, 176]. Через $[B]_{\mathscr{D}}$ обозначим замыкание множества $B \subseteq N$ до дерева. Будем использовать обозначения

$$\mathscr{D}_s \rightleftharpoons [W_s]_{\mathscr{D}}, \quad s < \omega, \tag{9.1}$$

$$\mathscr{D}_s^A \rightleftharpoons [W_s^A]_{\mathscr{D}}, \quad s < \omega, \ A \subseteq N. \tag{9.2}$$

Через ε_k, $k < \omega$, обозначим табличное условие, утверждающее, что «множество содержит элемент k». *Табличным условием* (*tt-условием*) будем называть пропозициональную формулу, построенную из элементарных высказываний ε_k. Утверждение, что табличное условие τ истинно на множестве A, будем символически записывать в виде $A \models \tau$. Посредством τ_k, $k < \omega$, будем обозначать фиксированную геделевскую нумерацию всех tt-условий.

Еще одно специальное определение:

$$\mathscr{R}_m \rightleftharpoons \{A \subseteq N | (\forall k \in W_m) A \models \tau_k\}, \ m < \omega. \tag{9.3}$$

Теорема 9.1 (основная теорема). *Эффективно по заданной паре натуральных чисел $\langle m, s\rangle$ строятся конечно аксиоматизируемая модельно полная теория $F(m, s)$ языка с 17 бинарными предикатами и рекурсивная последовательность предложений Ψ_i, $i < \omega$, имеющие свойства:*

1. *Предложения Ψ_i, $i < \omega$, порождают алгебру Линденбаума теории $F(m, s)$.*

2. *Теория*

$$F(m, s)[A] \rightleftharpoons F(m, s) \cup \{\Psi_i | i \in A\} \cup \{\neg \Psi_j | j \in N \setminus A\}, \ A \subseteq N,$$

является непротиворечивой тогда и только тогда, когда $A \in \mathscr{R}_m$.

3. *При любом $A \in \mathscr{R}_m$ справедливы соотношения*

(А) *Теория* $F(m, s)$ $[A]$ *имеет простую модель* $\leftrightarrow$ *дерево* $\mathscr{D}_s^A$ — *атомное.*

(Б) *Простая модель теории* $F(m, s)[A]$, *если она существует, сильно конструктивизируема* $\leftrightarrow$ *множество* A *рекурсивно и семейство* $\Pi^{\mathrm{fin}}(\mathscr{D}_s^A)$ *вычислимо.*

(В) *Теория* $F(m, s)[A]$ *имеет счетную насыщенную модель* $\leftrightarrow$ *дерево* $\mathscr{D}_s^A$ *является суператомным.*

(Г) *Счетная насыщенная модель теории* $F(m, s)[A]$ *сильно конструктивизируема* $\leftrightarrow$ *множество* A *рекурсивно и семейство* $\Pi(\mathscr{D}_s^A)$ *вычислимо.*

(Д) *Теория* $F(m, s)[A]$ *тотально трансцендентна* $\leftrightarrow$ *дерево* $\mathscr{D}_s^A$ *является суператомным.*

(Е) *Ранг Морли теории* $F(m, s)[A]$ *равен*

$$\max\{17{,}1 + \mathrm{Rank}\,\mathscr{D}_s^A + \gamma\},$$

$$\text{где } \gamma = \begin{cases} 2, & \text{если дерево } \mathscr{D}_s^A \text{ суператомное,} \\ 0, & \text{если дерево } \mathscr{D}_s^A \text{ не является суператомным.} \end{cases}$$

Доказательство. Теория $F(m, s)$ будет иметь вид F_M^* для некоторой машины $M \in \mathscr{M}^*$. Доказательство теоремы проведем в три этапа. Вначале опишем вычисления, которые должна делать машина M, затем покажем, как можно построить такую машину, и, наконец, докажем, что полученная теория имеет все нужные свойства.

Будем использовать конкретную геделевскую нумерацию табличных условий, которую сейчас опишем. Это позволит упростить некоторые выкладки.

Как известно, штрих Шеффера, определяемый соотношением

$$\xi_1|\xi_2 \leftrightarrow \neg(\xi_1 \& \xi_2),$$

образует функционально полную систему [8, § 05, 24]. В качестве табличных условий будем использовать пропозициональные формулы, построенные из элементарных табличных условий ε_k, $k < \omega$, с помощью штриха Шеффера.

Каждому табличному условию τ припишем номер, который обозначим через $\mathrm{Nom}(\tau)$. А именно, положим

а) $\mathrm{Nom}(\varepsilon_k) = 2k$,

б) $\mathrm{Nom}(\tau_1|\tau_2) = 2c(\mathrm{Nom}(\tau_1), \mathrm{Nom}(\tau_2)) + 1$.

Здесь $c(x, y)$ — канторовская функция нумерации пар. Например, число 49 является номером тождественно ложного tt-условия. Через τ_k обозначается табличное условие, имеющее номер k.

Доказательству основной теоремы посвящены последующие три параграфа.

§ 10. ВЫЧИСЛЕНИЯ МАШИНЫ ТЬЮРИНГА

Пусть A — произвольное подмножество N. Следуя Х. Роджерсу [6, с. 149], обозначим

$$A^{tt} \rightleftharpoons \{k | A \models \tau_k\}.$$

Указанное множество называется *tt-степенью* заданного множества $A \subseteq N$.

Пусть $M \in \mathscr{M}^*$, $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}F_M^*$. Существует множество $A \subseteq N$ такое, что

$$\mathrm{Oracle}(\mathfrak{M}) = A^{tt} \tag{10.1}$$

тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{M}$ истинны все предложения следующего вида:

$$\Omega_n \leftrightarrow \Omega_i|\Omega_j,\ i,\ j < \omega,\ n = 2c(i, j) + 1. \tag{10.2}$$

П е р в ы м в ы ч и с л е н и е м машины M будет проверка истинности условий (10.2). Программа этой машины должна предусматривать анализ каждого из этих условий и останов в случае, если анализируемое условие окажется ложным. Истинность всех указанных условий будет гарантирована аксиомой МТ. 14.

Предложения Ψ_i, фигурирующие в формулировке основной теоремы, определим следующим образом:

$$\Psi_i = \Omega_{2i}, \ i < \omega, \tag{10.3}$$

где Ω_i определено в (7.1). Отметим, что, согласно нумерации tt-условий, предложение Ω_i соответствует табличному условию τ_i, а предложение Ψ_i соответствует элементарному табличному условию ε_i.

Следующее вычисление машины M направлено на выполнение п. 2 основной теоремы. Обозначим через R множество номеров тождественно истинных tt-условий. Очевидно, что R бесконечно и рекурсивно. Выберем число $\mu < \omega$ такое, что $W_\mu = W_m \cup R$. При этом, согласно определению (9.3), имеем $\mathcal{R}_\mu = \mathcal{R}_m$.

В т о р о е в ы ч и с л е н и е машины M будет заключаться в проверке истинности следующих предложений:

$$\Omega_i, \ i \in W_\mu. \tag{10.4}$$

В случае, если в этой последовательности будет обнаружено ложное условие, машина должна останавливаться. Аксиома МТ. 14 обеспечит выполнение всех условий.

Отметим, что замена W_m на бесконечное множество W_μ нужна для эффективного построения аксиомы нормализации.

Последнее вычисление машины M связано с построением некоторого дерева путем выполнения команд с делением клеток ленты. Сформулируем это более подробно.

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель теории F^*_M, w — точка стандартного блока модели $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая $K \& J$ или же расположенная на линии шума. Обозначим через $\mathbf{K}(\mathfrak{M}, w)$ множество точек стандартного блока, через которые проходят K-пути, начинающиеся с точки w. Определим отображение

$$h : \mathbf{K}(\mathfrak{M}, w) \to N$$

индуктивно следующим образом:

а) $h(w) = 0$,

б) $h(v) = h(u)$ — *если* $u, v \in \mathbf{K}(\mathfrak{M}, w)$, uSv, и u *не является точкой исполнения команды с делением клетки ленты,*

в) $\left.\begin{aligned} h(v_1) &= L(h(u)) \\ h(v_2) &= R(h(u)) \end{aligned}\right\}$ — *если* $u, v_1, v_2 \in \mathbf{K}(\mathfrak{M}, w)$, *и является точкой исполнения команды с делением клетки ленты, а* v_1, v_2 — *начала* K-*трасс, полученных в результате этого деления, причем* v_1 *находится слева от* v_2.

Грубо говоря, h отображает K-трассы из $\mathbf{K}(\mathfrak{M}, w)$ в элементы полного дерева таким образом, что деления K-трасс соответствуют ветвлениям в дереве. Длина K-трассы в расчет не берется: как следует из б), каждая K-трасса будет целиком отображена в единственный элемент полного дерева.

Нетрудно видеть, что множество $\mathcal{D}$ значений функции h является деревом. Будем говорить, что *дерево $\mathcal{D}$ вычисляется машиной M над точкой w*. Ясно, что построение этого дерева будет зависеть от содержимого оракула.

Т р е т ь е в ы ч и с л е н и е машины M будет состоять в построении дерева

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_s^A \oplus \mathcal{D}' \tag{10.5}$$

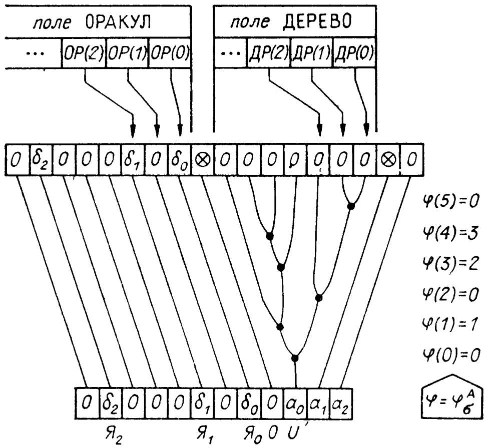


Рис. 12.

над точкой U (см. рис. 2, A) и тривиальных деревьев над другими точками стандартного блока.

Здесь предполагается, что s — параметр из формулировки основной теоремы, A — множество, связанное с содержимым оракула формулой (10.1), $\mathscr{D}'$ — дерево, изображенное на рис. 11, *в*.

Процесс вычисления дерева (10.5) представлен на рис. 12. В нижней части рисунка изображена лента в начальный момент времени (см. рис. 7). В верхней части изображена лента в процессе работы машины. Линии представляют K-трассы, ветвления — точки исполнения команд с делением клеток ленты (движение головки не показано). На этом же рисунке обозначены поля ОРАКУЛ и ДЕРЕВО и показана их прямая адресация, на которую мы будем ссылаться в дальнейшем.

Дерево (10.5) является, очевидно, рекурсивно перечислимым относительно A, поэтому найдется число $\sigma < \omega$ такое, что это дерево будет построено следующей последовательностью действий:

$$\textit{разделить клетку} \qquad \text{ДР}\left(\varphi_\sigma^A(t)\right), \quad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{10.6}$$

Здесь φ_z^A — нумерация функций, частично рекурсивных относительно A [6, с. 173]. Легко понять, что индекс σ может быть найден эффективно по заданному параметру s. По выбору σ имеем:

$$\text{функция } \varphi_\sigma^A \text{ всюду определена при любом } A \subseteq N, \tag{10.7}$$

$$0 \leqslant \varphi_\sigma^A(t) \leqslant t \text{ для всех } t < \omega,\ A \subseteq N. \tag{10.8}$$

На рис. 12 показаны результаты действий (10.6) для $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (в предположении, что функция φ_σ^A имеет заданные значения).

§ 11. ТЕХНИКА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Внешний алфавит машины M будет содержать 5 символов: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, которые будем отождествлять соответственно со следующими знаками: 0, 1, 0′, 1′, ⊗. Если a — один из символов ленты, то через a^k, $k < \omega$, будет обозначаться ряд, состоящий из $k+1$ символа a в последовательных клетках ленты. Последовательность 1^k0, которой предшествует символ 0, будем называть *числовой ячейкой со значением* k.

На рис. 13 приведена блок-схема программы машины M, а на рис. 14 представлены состояния ленты в моменты переходов между блоками, а также названия различных участков ленты. Отметим, что на этом рисунке показана разбивка ленты на поля; каждое поле включает определенное число клеток ленты. Например, поле Z содержит $i+1$ клетку, заполненную нулями.

Программа машины M состоит из трех блоков, выполняющих следующие функции: блок 1 — блок установки начальных значений, блок 2 — вычислительный, блок 3 — исполнительный.

Охарактеризуем назначение каждого обозначенного участка.

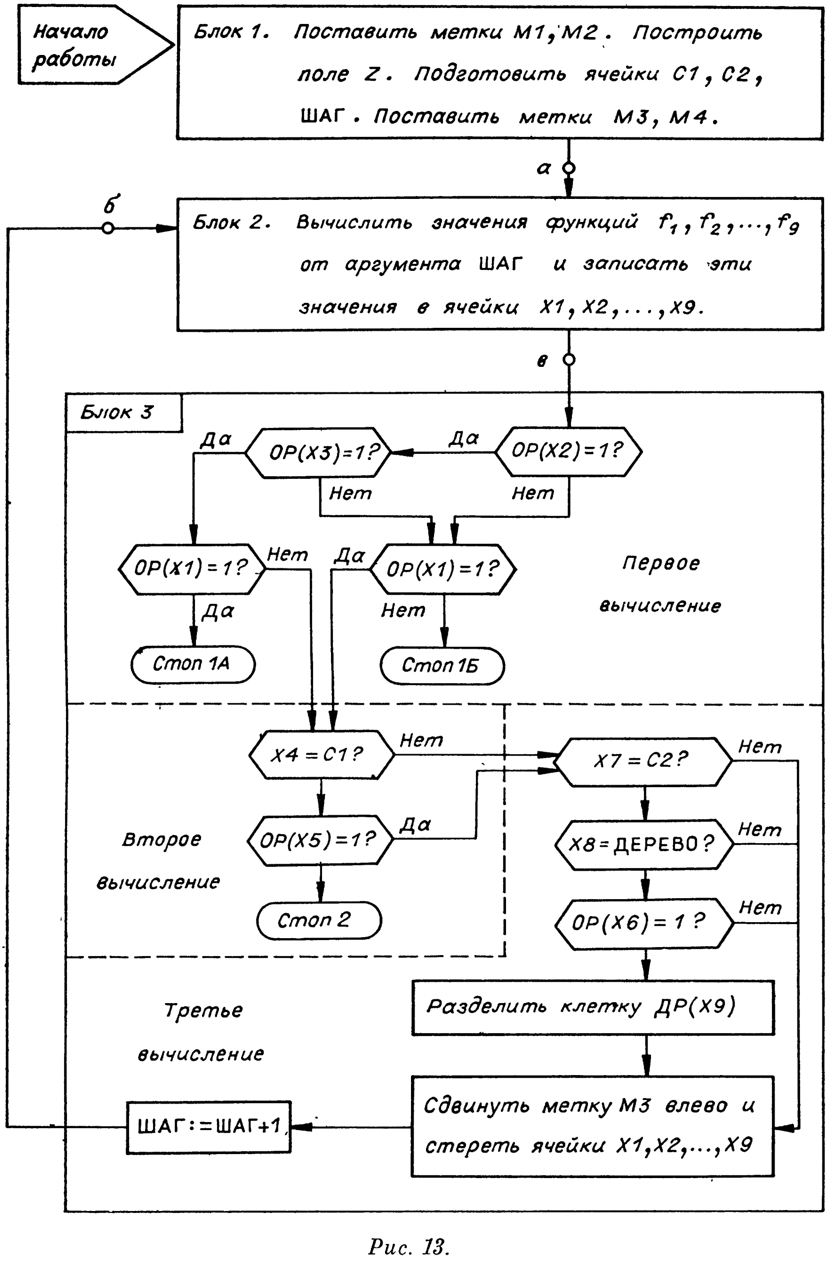


Рис. 13.

ОРАКУЛ — левая половина ленты, содержащая информацию оракула. Программа должна предусматривать, чтобы эта информация не портилась в процессе работы машины.

ДЕРЕВО — поле роста дерева (10.5). В процессе работы машины этот участок растет за счет исполнения команд машины M с делением клеток ленты.

$C1$, $C2$ — числовые ячейки, в которых хранятся параметры μ и σ, определенные в § 10. Эти ячейки формируются блоком 1 и сохраняются неизменными в течение всей последующей работы машины M.

ШАГ — числовая ячейка, координирующая весь процесс вычислений. Блок 1 устанавливает значение ШАГ = 0. После этого начинается беско-

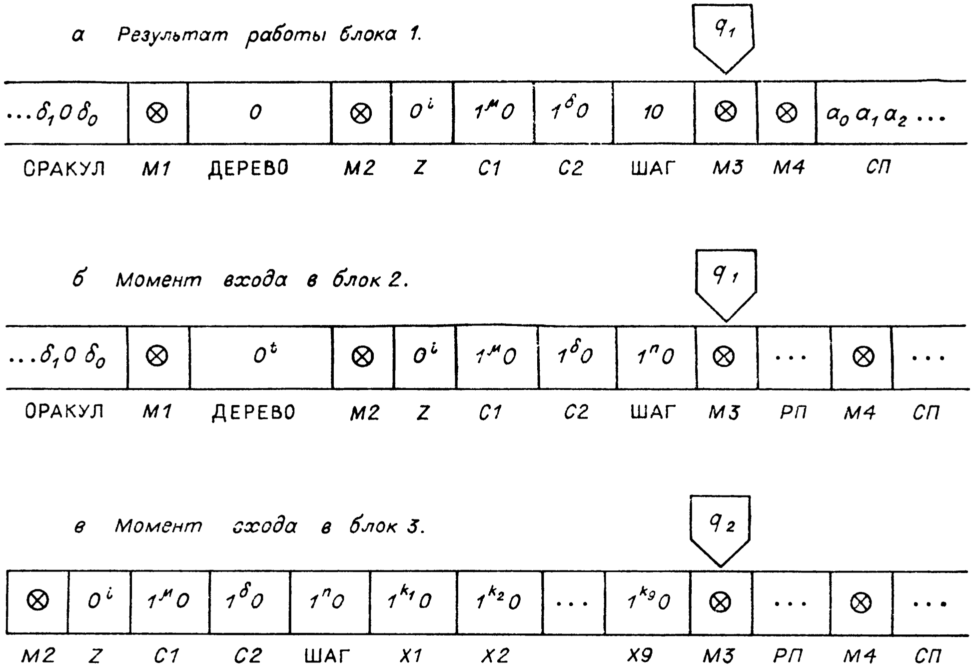


Рис. 14.

нечный цикл, на каждом витке которого последовательно работают блок 2 и блок 3. Будем называть этот цикл *глобальным*. При завершении очередного витка глобального цикла величина ячейки ШАГ увеличивается на 1 и начинается новый виток этого цикла.

$X1$, $X2$, ..., $X9$ — числовые ячейки, с помощью которых передается информация из блока 2 в блок 3. В первой половине витка глобального цикла блок 2 вычисляет значения девяти специально выбранных о. р. ф. f_1, f_2, ..., f_9 от аргумента ШАГ и записывает их в ячейки $X1, X2, \ldots, X9$. Во второй половине витка в работу включается блок 3, который надлежащим образом использует значения этих ячеек. На следующем витке глобального цикла то же повторяется для возросшего на 1 значения ячейки ШАГ, и т. д.

РП — рабочее поле блока 2.

СП — свободное поле, где в данный момент еще не побывала головка машины. Эта область содержит периодически повторяющуюся последовательность символов, построенную аксиомой шума.

$M1$, $M2$ — метки, ограничивающие участок ДЕРЕВО.

$M3$, $M4$ — метки, ограничивающие рабочее поле. Предполагается, что поле РП не содержит вхождений символа ⊗. Метка $M4$, ограничивающая поле РП справа, по мере необходимости сдвигается вправо, но не должна сдвигаться влево. Метка $M3$ может сдвигаться как вправо, так и влево.

Z — поле, состоящее из нулей. Его длина $i+1$, $i \geqslant 0$, выбирается с таким расчетом, чтобы в момент перехода из блока 1 в блок 2 участок СП начинался с символа a_0, как это показано на рис. 14, *а*.

Приступим теперь к выбору функций f_i, $1 \leqslant i \leqslant 9$. Предварительно отметим следующий факт (см. рис. 7 и 12):

$$\text{ячейка Я}_i \text{ совпадает с } \mathrm{ОР}(i^2+i),\ i < \omega. \tag{11.1}$$

В ы б о р f_1, f_2, f_3. Согласно блок-схеме первая часть блока 3 проверяет условие $\mathrm{ОР}(X1) = 1 \leftrightarrow [\mathrm{ОР}(X2) = 1 | \mathrm{ОР}(X3) = 1]$. Сравнивая это с (7.1), (10.2), (11.1), заключаем, что функции f_1, f_2, f_3 должны представлять адреса ячеек, относящихся к условиям (10.2). Таким образом, первое вычисление будет реализовано, если эти функции определить следующим образом:

$$f_1(n) = (2n+1)^2 + (2n+1),$$
$$f_2(n) = l^2(n) + l(n),$$
$$f_3(n) = r^2(n) + r(n).$$

Здесь l и r — функции нумерации пар.

Выбор f_4, f_5. Как видно из блок-схемы, вторая часть блока 3 приводит к останову в случае, если нарушено условие $X4 = \mu \to \mathrm{OP}(X5) = 1$. Следовательно, для проверки условий (10.4) достаточно определить функции f_4, f_5 следующим образом, используя вспомогательную функцию g:

$$\{\langle g(n), f_4(n)\rangle \mid n \in N\} = \{\langle x, y\rangle \mid x \in W_y\},$$
$$f_5(n) = g^2(n) + g(n).$$

Выбор f_6, f_7, f_8, f_9. Шаги (10.6) построения дерева (10.5) будут замедлены по отношению к шагам глобального цикла. Это связано с тем, что для вычисления значений $\varphi_\sigma^A(t)$ может потребоваться многократное обращение к оракулу. В качестве счетчика шагов при вычислении дерева будет использоваться текущая длина поля ДЕРЕВО. Так, приведенное на блок-схеме условие «$X8 =$ ДЕРЕВО?» имеет следующий смысл: «совпадает ли число единиц поля $X8$ с длиной поля ДЕРЕВО?». Очередной шаг (10.6) увеличивает на 1 длину поля ДЕРЕВО, тем самым происходит автоматический переход к следующему шагу построения дерева.

Согласно Х. Роджерсу [6, с. 173], существует о. р. ф. $\rho(x)$ такая, что для всех $x, y, z \in N$, $A \subseteq N$, имеет место

$$\varphi_x^A(y) = z \leftrightarrow (\exists u, v)\,[\langle y, z, u, v\rangle \in W_{\rho(x)} \mathbin{\&} D_u \subseteq A \mathbin{\&} D_v \subseteq N \backslash A].$$

Здесь D_n, $n < \omega$,— стандартная геделевская нумерация семейства всех конечных подмножеств N [6, с. 97].

Назовем четверку $\langle j, x, y, z\rangle$ *элементарной*, если существуют $u, v \in N$, при которых выполнены условия:

а) $\langle y, z, u, v\rangle \in W_{\rho(x)}$,

б) j является номером табличного условия, утверждающего, что $D_u \subseteq A \mathbin{\&} D_v \subseteq N \backslash A$. Легко видеть, что множество Э всех элементарных четверок является рекурсивно перечислимым.

Непосредственно из определения выводится следующее основное свойство этого множества:

$$\varphi_x^A(y) = z \leftrightarrow (\exists j)\,[\langle j, x, y, z\rangle \in Э \mathbin{\&} A \models \tau_j]. \tag{11.2}$$

Таким образом, элементарные четверки суть «кванты вычислений» для значений вида $\varphi_x^A(y)$; каждое такое значение, если оно определено, вычисляется элементарной четверкой.

Пусть j_0 — фиксированный номер тождественно ложного табличного условия. Например, можно получить $j_0 = 49$. Определим следующие множества:

$$Э' = \{\langle j_0, x, y, 0\rangle \mid x, y \in N\},$$
$$Э^* = Э \cup Э'.$$

Будем называть элементы множества Э′ *псевдоэлементарными четверками*. Легко видеть, что свойство (11.2) останется верным при замене Э на Э*:

$$\varphi_x^A(y) = z \leftrightarrow (\exists j)\,[\langle j, x, y, z\rangle \in Э^* \mathbin{\&} A \models \tau_j].$$

Выберем о. р. ф. f_6, f_7, f_8, f_9, используя вспомогательную функцию h, так, чтобы выполнялись условия:

(а) $\{\langle h(n), f_7(n), f_8(n), f_9(n)\rangle | n \in N\} = Э^*$;

(б) $f_6(n) = h^2(n) + h(n)$;

(в) в пересчете (а) каждый элемент из Э повторяется бесконечно много раз;

(г) если $m < n$, $h(m) \neq j_0$, $h(n) \neq j_0$, причем для любого i выполнено $m < i < n \to h(i) = j_0$, то $(\forall a < n)(\forall b < n)(\exists i)[m < i < n \mathbin{\&} f_7(i) = a \mathbin{\&} \mathbin{\&} f_8(i) = b]$.

Для выполнения условия (г) нужно в пересчет (а) после каждого элемента из Э включить достаточное количество элементов из Э′.

Согласно блок-схеме на каждом витке глобального цикла блок 2 через ячейки

$$X6,\ X7,\ X8,\ X9 \tag{11.3}$$

передает в блок 3 модифицированные элементарные и псевдоэлементарные ячейки. Суть модификации в том, что в ячейке $X6$ вместо номера tt-условия передается адрес ячейки, кодирующей это условие.

В целом вычисление дерева протекает следующим образом. Блок 2 через ячейки (11.3) посылает в блок 3 «кванты вычислений» для всевозможных значений вида $\varphi_x^B(y)$. Третья часть блока 3 ожидает благоприятной ситуации, когда полученный «квант» представляет собой вычисление для $\varphi_\sigma^A(t)$, где t — уменьшенная на 1 длина поля ДЕРЕВО. В этой ситуации ячейка $X9$, содержащая значение указанной функции, используется для выполнения очередного действия (10.6). Условия (10.7), (10.8), (в) обеспечивают успешное завершение каждого действия в последовательности (10.6).

Таким образом, имеем блок-схему программы машины M, которая выполняет все нужные вычисления. Покажем теперь, что, программируя согласно этой блок-схеме, можно получить допустимую нормальную машину, а также эффективно построить аксиому нормализации.

Допустимость машины M. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная модель теории F_M^*. Благодаря первому вычислению, множество Oracle ($\mathfrak{M}$) представляет собой A^{tt} при некотором $A \subseteq N$. Этим обеспечена допустимость машины.

Нормальность машины M. Это свойство обеспечивается особой формой блок-схемы. Основная идея состоит в следующем.

1) Команды блока 1 работают однократно.

2) Работа блока 2 не зависит от μ, σ и от содержимого оракула.

3) Блок 3 выполняет простейшие действия вида «сравнить две числовые ячейки», «проверить содержимое оракула в ячейке, адрес которой записан в данной числовой ячейке» и т. д. Эти действия можно организовать в виде челночных движений головки машины с использованием символов ленты 0′, 1′. При построении программы, реализующей такие операции, не составит труда проанализировать число исполнений каждой команды в процессе работы машины. При этом нужно учитывать тот факт, что вычисления по каждой ветви блока 3, кроме тех, которые ведут к останову, будут повторяться бесконечное множество раз. Отметим, что при анализе условия «$X4 = C1$?» в случае несовпадения этих ячеек может быть два разных подслучая: $X4 < C1$ и $X4 > C1$. Они ведут к некоторым различиям в исполнении команд. Однако не составит труда проверить, что каждый из указанных подслучаев будет повторяться бесконечно много раз. То же самое справедливо и для других ветвей блок-схемы. При доказательстве бесконечной повторяемости следующих двух случаев:

$$X7 = C2 \mathbin{\&} X8 > \text{ДЕРЕВО},$$

$$X7 = C2 \mathbin{\&} X8 = \text{ДЕРЕВО} \mathbin{\&} \text{OP}\,(X6) \neq 1$$

нужно использовать условие (г), а также очевидный факт, что псевдоэлементарная четверка не может увеличить длину поля ДЕРЕВО.

Легко понять, что, программируя по приведенной блок-схеме, можно эффективно построить аксиому нормализации.

§ 12. ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Докажем, что если положить $F(m, s) = F_M^*$, а предложения Ψ_i, $i < < \omega$, определить формулами (10.3), то будут выполнены все условия теоремы за исключением условия, утверждающего, что язык содержит 17 бинарных предикатов (легко подсчитать, что язык $\mathscr{L}_M$ теории F_M^* содержит 16 бинарных и $22 + d + e$ унарных предикатов).

Конечная аксиоматизируемость и эффективность построения аксиом являются прямыми следствиями конструкции. Модельную полноту дает лемма 7.1.

Перейдем теперь к проверке всех пунктов теоремы.

1. Достаточно показать, что при каждом $A \subseteq N$ теория $F(m, s)[A]$ полна, если она является непротиворечивой. Предположим, что эта теория непротиворечива. Первое вычисление машины M обеспечивает, что

$$\mathfrak{M} \in \operatorname{Mod} F(m, s)[A] \to \operatorname{Oracle}(\mathfrak{M}) = A^{tt}.$$

Используя лемму 7.2, получаем, что теория $F(m, s)[A]$ полна.

2. Предположим, что теория $F(m, s)[A]$ непротиворечива. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель этой теории. Благодаря первому вычислению имеем $\operatorname{Oracle}(\mathfrak{M}) = A^{tt}$. Так как второе вычисление не приводит к останову, то $W_\mu \subseteq \operatorname{Oracle}(\mathfrak{M})$. Учитывая, что $W_m \subseteq W_\mu$, получаем в итоге $W_m \subseteq A^{tt}$. Это означает, что на множестве A истинны табличные условия τ_i, $i \in W_m$, следовательно, $A \in \mathscr{R}_m$.

Обратно, предположим, что $A \in \mathscr{R}_m$. По определению на множестве А истинны табличные условия τ_i, $i \in W_m$. По выбору μ имеем, что на множестве A истинны все условия τ_i, $i \in W_\mu$, следовательно, $W_\mu \subseteq A^{tt}$. Пусть $\Delta = A^{tt}$. Из полученных соотношений следует, что Δ-вычисление на машине M не приведет к останову, поэтому $A^{tt} \in \operatorname{Nonstop}(M)$. Тогда по лемме 7.3 теория $F_M^*\left[A^{tt}\right]$ будет непротиворечивой. Осталось заметить, что $F(m, s)[A] \subseteq F_M^*\left[A^{tt}\right]$. Тем самым доказана непротиворечивость теории $F(m, s)[A]$.

Далее, рассматривая части п. 3, будем предполагать, что $A \in \mathscr{R}_m$.

3(А). Используя лемму 7.5, получаем, что теория $F(m, s)[A]$ имеет простую модель тогда и только тогда, когда в стандартном блоке, определяемом этой теорией, через каждую K-точку проходит хотя бы один конечнозвенный K-путь. Это эквивалентно тому, что через каждый элемент дерева (10.5) проходит конечная цепь, а это, в свою очередь, равносильно атомности дерева $\mathscr{D}_s^A$.

3(Б). Предположим, что простая модель $\mathfrak{M}$ теории $F(m, s)[A]$ сильно конструктивизируема. Из разрешимости этой теории следует рекурсивность множества A. Имея конструктивизацию модели $\mathfrak{M}$, можно устроить пересчет всех компонент этой модели, а это, с учетом леммы 7.4, дает вычислимость семейства всех конечнозвенных K-путей, начинающихся с точки U. Отсюда получается вычислимость семейства $\Pi^{\text{fin}}\left(\mathscr{D}_s^A\right)$.

Предположим теперь, что множество A рекурсивно, дерево $\mathscr{D}_s^A$ — атомное и семейство его конечных цепей вычислимо. Нетрудно видеть, что семейство $\Pi^{\text{fin}}(\mathscr{D}^*)$ также будет вычислимым. Пусть ν — его вычислимая нумерация. Так как это семейство состоит из максимальных цепей дерева, то ν — негативная нумерация. Отсюда следует [9, с. 57], что семейство $\Pi^{fin}(\mathscr{D}^*)$ имеет однозначную вычислимую нумерацию ν'. Используя рекурсивность множества A, атомность дерева (10.5) и нумерацию ν', можно построить конструктивную модель $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ теории $F(m, s)[A]$, удовлетворяющую условиям (П. 1—3) леммы 7.4. Из модельной полноты следует, что ν_0 — сильная конструктивизация.

3(В, Д). Согласно основной конструкции число K-путей в стандартном блоке $Б_0$, определяемом теорией $F(m, s)[A]$, равно

$$k(Б_0) = \max\{\omega, \overline{\overline{\Pi(\mathscr{D}_s^A)}}\}.$$

Если $\mathscr{D}_s^A$ —суператомное дерево, то, используя теорему 8.1, получаем, что $k(Б_0) = \omega$. Тогда по лемме 7.6 теория $F(m, s)[A]$ является тотально трансцендентной и, как следствие, имеет счетную насыщенную модель. Если же дерево $\mathscr{D}_s^A$ не является суператомным, то $k(Б_0) = 2^\omega$, тогда по лемме 7.6 теория $F(m, s)[A]$ не имеет счетной насыщенной модели и не тотально трансцендентна.

3 (Г). Предположим, что счетная насыщенная модель $\mathfrak{M}$ теории $F(m, s)[A]$ является сильно конструктивизируемой. Из разрешимости этой теории следует рекурсивность множества A. Далее, по лемме 7.7 модель $\mathfrak{M}$ будет совершенной. Перечисляя компоненты этой модели, берущие начало в U, мы, благодаря (6.7), вычислим семейство всех K-путей, начинающихся с точки U. Переходя от K-путей к соответствующим цепям дерева, получим вычислимость семейства $\Pi(\mathscr{D}^*)$, а поэтому и $\Pi(\mathscr{D}_s^A)$.

Теперь предположим, что A рекурсивно и семейство $\Pi(\mathscr{D}_s^A)$ вычислимо. Из вычислимости вытекает счетность этого семейства, тогда по теореме 8.1 дерево $\mathscr{D}_s^A$ будет суператомным. Следовательно, теория $F(m, s)[A]$ имеет счетную насыщенную модель $\mathfrak{M}$. Используя рекурсивность множества A, а также вычислимость семейства $\pi(\mathscr{D}_s^A)$, можно построить конструктивную совершенную модель $(\mathfrak{M}_0, \nu_0)$ теории $F(m, s)[A]$. Из модельной полноты следует, что ν_0 — сильная конструктивизация. По лемме 7.7 модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_0$ изоморфны, отсюда следует, что $\mathfrak{M}$ является с. к. моделью.

3 (Е). Мы будем придерживаться системы понятий, принятой в книге [10, § 31]. В приводимом здесь доказательстве опущены отдельные громоздкие выкладки рутинного характера. При желании они могут быть восстановлены.

Теорию $F(m, s)[A]$ для краткости будем обозначать через T. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель теории T. Через $\mathfrak{M}^*$ обозначим естественное обогащение этой модели до языка

$$\mathscr{L}^* = \mathscr{L}_M \cup \{c_a | a \in |\mathfrak{M}|\}.$$

Обозначим через T^* теорию модели $\mathfrak{M}^*$, а через $C_k\mathfrak{M}$ — стоуновское пространство k-типов над $\mathfrak{M}^*$. Вместо $S_1\mathfrak{M}$ будем писать $S\mathfrak{M}$.

Ранг (по Морли) типа $p \in S\mathfrak{M}$ будем обозначать через $\mathrm{Rank}\, p$. Назовем *рангом формулы* $\varphi(x)$ языка $\mathscr{L}^*$ следующий ординал:

$$\mathrm{Rank}\,\varphi \rightleftharpoons \sup\{\mathrm{Rank}\,p | p \in S\mathfrak{M} \,\&\, \varphi \in p \,\&\, \mathrm{Rank}\,p \text{ определено}\}.$$

Непосредственно из определений вытекают свойства

$$\alpha_T = \mathrm{Rank}\,(x = x);$$

$$\mathrm{Rank}\,(\varphi \vee \psi) = \max\{\mathrm{Rank}\,\varphi, \mathrm{Rank}\,\psi\};$$

$$\textit{если } T^* \vdash \varphi \leftrightarrow \psi, \textit{ то } \mathrm{Rank}\,\varphi = \mathrm{Rank}\,\psi.$$

Таким образом, в силу аксиомы КРК.1 для определения α_T достаточно вычислить ранги следующих двух формул:

$$\varphi_0(x) = X(x) \vee Y(x), \;\; \varphi_1(x) = W(x). \tag{12.1}$$

Для доказательства п. (Е) основной теоремы достаточно доказать следующее утверждение

Лемма 12.1. (а) $\operatorname{Rank}\varphi_0 = 17$.

(б) $\operatorname{Rank}\varphi_1 = \max\{5, 1 + \operatorname{Rank}\mathscr{D}_s^A + \gamma\}$, где γ *определено в формулировке основной теоремы.*

Доказательство. В качестве $\mathfrak{M}$ возьмем счетно насыщенную модель теории T, которая является универсальной областью для T [10, § 31]. По лемме 31.3 из указанной книги в стоуновском пространстве $S\mathfrak{M}$ ранг Морли будет совпадать с рангом Кантора — Бендиксона. Это даст нам реальный метод вычисления рангов типов. Приступим непосредственно к вычислению рангов.

(а) Пусть $\varphi(x)$ — произвольная формула языка $\mathscr{L}^*$ такая, что $T^* \vdash \vdash \varphi(x) \to \varphi_0(x)$. Тогда существует формула $\psi(x)$ такая, что $T^* \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, причем в формуле ψ все константы находятся в $X \cup Y$ и все кванторы релятивизованы по множеству $X \cup Y$. Сформулированное утверждение будем называть *принципом отделимости.* Доказательство этого принципа использует аксиоматику и основывается на модельной полноте. Мы опускаем детали.

Из принципа отделимости следует, что ранг формулы ψ_0 в теории T равен рангу формулы $x = x$ в теории $T_1 = T \restriction \varphi_0$. Язык $\mathscr{L}'$ теории T_1 получается из $\mathscr{L}_M$ выбрасыванием предикатов W, U, D.

Рассмотрим теорию T_2, которая получается из T_1 заменой теории квазиследования на обычное отношение следования без циклов. Соответственно из языка нужно выбросить все предикаты языка теории квазиследования, кроме $\lhd$.

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — модель теории T, которая является универсальной областью этой теории, и пусть $\mathfrak{M}_2$ — соответствующая ей модель теории T_2. Так как элементы в моделях теории квазиследования характеризуются четырьмя координатами, то пространства $S\mathfrak{M}_1$ и $S_4\mathfrak{M}_2$ имеют одинаковый ранг Кантора — Бендиксона. Прямые вычисления показывают, что ранг пространства $S_4\mathfrak{M}_2$ равен 17.

(б) Сначала рассмотрим случай, когда $\mathscr{D}_s^A$ является суператомным деревом ранга $\beta > 1$. Тогда и дерево (10.5) будет, очевидно, суператомным того же ранга:

$$\operatorname{Rank}\mathscr{D}^* = \beta.$$

Пусть $\mathfrak{N}$ — совершенное расширение модели $\mathfrak{M}$, определенной ранее. Если $c \in |\mathfrak{N}|$, то через p_c обозначим тип элемента c над моделью $\mathfrak{M}^*$. Так как все типы над $\mathfrak{M}^*$ реализуются в $\mathfrak{N}$, то стоуновское пространство формулы φ_1 допускает следующее представление:

$$S\mathfrak{M} \restriction W = \{p_c \mid c \in |\mathfrak{N}| \mathbin{\&} W(c)\}. \tag{12.2}$$

Введем функцию ранга на множестве K-путей модели $\mathfrak{N}$. Пусть $G \subseteq \subseteq \mathbf{K}(\mathfrak{N})$, $\mathscr{K} \in G$. Назовем путь $\mathscr{K}$ *изолированным* в G, если в модели $\mathfrak{N}$ имеется точка v такая, что $\mathscr{K}$ — единственный путь из G, проходящий через v. Через G' обозначим множество K-путей из G, которые не являются изолированными в G.

Определим индукцией по ординалам:

а) $\mathbf{K}_0(\mathfrak{N}) = \mathbf{K}(\mathfrak{N})$,

б) $\mathbf{K}_{\alpha+1}(\mathfrak{N}) = (\mathbf{K}_\alpha(\mathfrak{N}))'$,

в) $\mathbf{K}_\gamma(\mathfrak{N}) = \bigcap\limits_{\beta<\gamma} \mathbf{K}_\beta(\mathfrak{N})$, если γ — *предельный ординал.* Скажем, что путь $\mathscr{K}$ имеет ранг α, символически $\operatorname{Rank}\mathscr{K} = \alpha$, если $\mathscr{K} \in \mathbf{K}_\alpha(\mathfrak{N}) \setminus \mathbf{K}_{\alpha+1}(\mathfrak{N})$. Легко показать, что функция ранга на $\mathbf{K}(\mathfrak{N})$ согласована с функцией ранга на $\Pi(\mathscr{D}^*)$. А именно, если путь $\mathscr{K}$ начинается с точки U и соответствует цепи $\pi \in \Pi(\mathscr{D}^*)$, то $\operatorname{Rank}\mathscr{K} = \operatorname{Rank}\pi$. Если же $\mathscr{K}$ не проходит через точку U, то $\operatorname{Rank}\mathscr{K} = 0$.

Пусть c — произвольный W-элемент из $\mathfrak{N}$. Обозначим через $\mathscr{K}[c]$ путь, по которому проходит компонента, порожденная c. Положим

$$\operatorname{Rank}(c) = \begin{cases} -1, \text{ если } c \in |\mathfrak{M}|, \\ \operatorname{Rank} \mathscr{K}[c], \text{ если } c \in |\mathfrak{N}| \setminus |\mathfrak{M}|. \end{cases}$$

Прежде чем приступить к описанию функции ранга в пространстве (12.1), введем одно понятие, связанное с работой машины M. Напомним, что по определению каждая $\langle \nu, i, j \rangle$-точка является $\langle \nu, j \rangle$-точкой.

В соответствии с § 11 можем считать, что в каждый момент работы машины в поле ДЕРЕВО имеется не более одной клетки, отмеченной символом $0'$. Остальные клетки этого поля должны быть отмечены символом 0. Напомним, что 0 отождествляется с a_0, а $0'$ отождествляется с a_2.

Назовем пару $\langle \nu, j \rangle$ *особенной,* если в стандартном блоке имеется бесконечное множество L-классов, которые содержат $\langle \nu, j \rangle$-точку и одновременно содержат клетку в поле ДЕРЕВО, отмеченную предикатом A_2.

Пусть $\langle \nu_t, j_t \rangle$, $t = 0, 1, \ldots, k$,— список всех особенных пар. Определим формулы

$$\psi(z) = \bigvee_{t=0}^{k} (z \text{ является } \langle \nu_t, j_t \rangle\text{-точкой}),$$

$$\theta(x) = A_0(x) \vee [A_2(x) \,\&\, (\exists\, z)(xLz \,\&\, \psi(z))].$$

Табл. 3 характеризует ранги всех типов пространства (12.2). Дадим некоторые комментарии. Через $\Sigma_n(m)$ будем обозначать клетку этой таблицы, расположенную на пересечении строки Σ_n и столбца, отмеченного (внизу) номером m. Любой тип p_c пространства (12.2) будет отнесен к определенной клетке этой таблицы. Найти эту клетку можно по описанию в верхней части таблицы.

Через Σ_α, $-1 \leqslant \alpha \leqslant \beta + 1$, обозначим множество типов, относящихся к клеткам строки Σ_α указанной таблицы. Ранги типов пространства (12.2)

Таблица 3. **Классификация типов над моделью $\mathfrak{M}$**

Обозначение классов типов	Место расположения константы $c \in \lvert\mathfrak{N}\rvert$, реализующей тип p_c над моделью $\mathfrak{M}$						
	В одном из блоков модели $\mathfrak{M}$. Константа удовлетворяет условию:	За пределами блоков модели $\mathfrak{M}$					
		В зоне, пересекающей модель $\mathfrak{M}$		В зоне, которая не пересекается с $\mathfrak{M}$			
				Константа удовлетворяет формуле $\Theta(x)$		Константа удовлетворяет формуле $\neg\Theta(x)$	
		z_0	z_B	z'_B	z''_B	z'_B	z''_B
Σ_{-1}	$\operatorname{Rank}(c) = -1$						
Σ_0	$\operatorname{Rank}(c) = 0$						
Σ_1	$\operatorname{Rank}(c) = 1$	$Б_1$	$Б_6$	$Б_4$		$Б_4$, $Б_5$	
Σ_2	$\operatorname{Rank}(c) = 2$	$Б_2$			$Б_4$	$Б_6$	$Б_4$
Σ_3	$\operatorname{Rank}(c) = 3$						$Б_6$
. . .	. . .						
Σ_α	$\operatorname{Rank}(c) = \alpha$						
. . .	. . .						
$\Sigma_{\beta-1}$	$\operatorname{Rank}(c) = \beta - 1$						
Σ_β				$Б_5$, $Б_6$			
$\Sigma_{\beta+1}$					$Б_6$		
	1	2	3	4	5	6	7

описываются соотношением $p \in \Sigma_\alpha \leftrightarrow \mathrm{Rank}\, p = 1 + \alpha$. Его можно доказать индукцией по α, используя определение ранга по Кантору — Бендиксону.

Отметим, что если тип p относится к клетке $\Sigma_2(2)$, то в каждой его окрестности имеется бесконечное множество типов, относящихся к клетке $\Sigma_1(2)$. Будем говорить, что *клетка* $\Sigma_2(2)$ *делится клеткой* $\Sigma_1(2)$. Как правило, клетки таблицы делятся вышележащими клетками (в том же столбце). Исключения из этого правила отражены в нижеследующей таблице:

Клетки таблицы	$\Sigma_1(2, 3, 4, 6)$	$\Sigma_2(5)$	$\Sigma_2(7)$	$\Sigma_\beta(4)$	$\Sigma_{\beta+1}(5)$
Делятся клетками	$\Sigma_0(1)$	$\Sigma_1(4)$	$\Sigma_1(6)$	$\Sigma_{\beta-1}(1)$	$\Sigma_\beta(4)$

Согласно табл. 3 наибольший ранг $1+\beta+1$ имеют типы, относящиеся к клетке $\Sigma_{\beta+1}(5)$. Следовательно, ранг формулы $\varphi_1(x)$ равен $1+\beta+2$.

В случае, если $\mathrm{Rank}\, \mathscr{D}_s^A \leqslant 1$, дерево $\mathscr{D}^*$ будет суператомным ранга 1. В таком случае табл. 3 будет содержать строки от Σ_{-1} до Σ_3, это даст $\mathrm{Rank}\, \varphi_1 = 5$.

В том случае, когда дерево $\mathscr{D}_s^A$ не является суператомным, из табл. 3 нужно убрать две последние строки: относящиеся к ним типы не будут иметь ранга. Ранг будет неопределенным также для типов p_c таких, что c находится в одном из блоков модели $\mathfrak{M}$, причем $\mathrm{Rank}\,(c)$ неопределен. В указанном случае получаем $\mathrm{Rank}\, \varphi_1 = \max\{5, \mathrm{Rank}\, \mathscr{D}_s^A\}$. □

Тем самым п. 3(E) полностью доказан.

Язык теории F_M^* содержит 16 бинарных и $22+d+e$ унарных предикатов. Не составит труда заменить все унарные предикаты одним дополнительным бинарным предикатом с сохранением всех свойств, указанных в теореме.

Этим завершается доказательство основной теоремы.

§ 13. СВЕДЕНИЕ К МАЛОМУ ЯЗЫКУ

Назовем язык $\mathscr{L}$ *богатым*, если $\mathscr{L}$ содержит хотя бы один предикатный или функциональный символ арности два или больше. Стандартные методы, восходящие к Л. Кальмару [8, с. 263, 433], позволяют свести теорию F_M^* к любому конечному богатому языку.

Теорема 13.1 ($\mathscr{L}$-вариант основной теоремы). *Пусть $\mathscr{L}$ — конечный богатый язык. Эффективно по заданной паре натуральных чисел $\langle m, s\rangle$ строятся конечно аксиоматизируемая модельно полная теория $F^{\mathscr{L}}(m, s)$ языка $\mathscr{L}$ и рекурсивная последовательность $\psi_i^{\mathscr{L}}$, $i<\omega$, предложений языка $\mathscr{L}$, имеющие свойства, указанные в пп.* 1, 2, 3 (А — Д) *основной теоремы, с заменой $F(m, s)$ на $F^{\mathscr{L}}(m, s)$, а Ψ_i — на $\psi_i^{\mathscr{L}}$. Пункт 3(E) изменится следующим образом:*

(E) *Ранг Морли теории $F^{\mathscr{L}}(m, s)[A]$ равен* $\max\{33, 1+\mathrm{Rank}\, \mathscr{D}_s^A+\gamma\}$, *где γ определено в основной теореме.*

Доказательство. Достаточно расмотреть лишь случай, когда язык $\mathscr{L}$ содержит только один бинарный предикат. Будем для определенности считать, что $\mathscr{L} = \{Q^2\}$.

Будем сводить к языку $\mathscr{L}$ теорию F_M^* языка $\mathscr{L}_M$, построенную в доказательстве основной теоремы. По произвольной модели $\mathfrak{M}$ теории F_M^* определим новую модель $\hat{\mathfrak{M}}$ языка $\mathscr{L}$ следующим образом. Положим

$$|\hat{\mathfrak{M}}| = X \cup Y \cup W \cup N \cup I. \tag{13.1}$$

Здесь X, Y, W — подмножества $|\mathfrak{M}|$, определимые соответствующими предикатами, N — множество, равномощное $X \cup Y$, I — конечное множество, содержащее $38+d+e$ элементов. Будем считать, что множества (13.1) попарно не пересекаются.

Обозначим элементы множества I следующими символами:

$$I=\{c_0,\ c_1,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{21+d+e},\ b_0,\ b_1\ \ldots,\ b_{13}\}. \tag{13.2}$$

Зафиксируем биекцию $f: N\to(X\cup Y)^2$. Определим с ее помощью предикат Q на множестве $|\widehat{\mathfrak{M}}|$ так, чтобы выполнялись следующие соотношения.

(а) $Q(x,\ x)\leftrightarrow x\in I$.

(б) На множестве I предикат Q задает отношение линейного порядка, соответствующее расположению (13.2).

(в) $Q(c_0,\ x)\ \&\ x\notin I\leftrightarrow x\in|\mathfrak{M}|$.

(г) $Q(c_1,\ x)\ \&\ x\notin I\leftrightarrow x\in N$.

(д) Если $a\in N$ и $f(a)=\langle x,\ y\rangle$, то полагаем

$$Q(x,\ a)\ \&\ \neg Q(a,\ x)\ \&\ Q(a,\ y)\ \&\ \neg Q(y,\ a).$$

(е) Пусть U_i, $0\leqslant i\leqslant 21+d+e$,— нумерация всех унарных предикатов языка $\mathscr{L}_M$, полагаем $Q(a_i,\ x)\ \&\ x\in|\mathfrak{M}|\leftrightarrow U_i(x)$.

(ж) Пусть B_i, $0\leqslant i\leqslant 12$,— нумерация всех бинарных предикатов языка $\mathscr{L}_M$, исключая два предиката: $E\in\mathscr{L}_2$ и $D\in\mathscr{L}_5$ (см. § 2). Если $a\in N$ и $f(a)=\langle x,\ y\rangle$, то полагаем $Q(b_i,\ a)\leftrightarrow B_i(x,\ y)$.

(з) Для $x,\ y\in|\mathfrak{M}|$ полагаем

$$Q(x,\ y)\ \&\ Q(y,\ x),\ \text{если}\ \mathfrak{M}\vDash E(x,\ y),$$

$$Q(x,\ y)\ \&\ \neg Q(y,x),\ \text{если}\ \mathfrak{M}\vDash D(x,\ y).$$

(и) Во всех других случаях предикат Q должен быть ложным.

Из условий (а), (б) следует, что каждый элемент множества I является формульным в модели $\widehat{\mathfrak{M}}$. В силу условий (в), (г) формульными будут множества $|\mathfrak{M}|$ и N. По построению имеем:

(к) $f(a)=\langle x,\ y\rangle\leftrightarrow a\in N\ \&\ Q(x,\ a)\ \&\ Q(a,\ y)$,

(л) $U_i(x)\leftrightarrow x\in|\mathfrak{M}|\ \&\ Q(a_i,\ x)$,

(м) $B_i(x,\ y)\leftrightarrow(\exists\, a\in N)Q(b_i,\ a)\ \&\ f(a)=\langle x,\ y\rangle$,

(н) $E(x,\ y)\leftrightarrow x,\ y\in|\mathfrak{M}|\ \&\ Q(x,\ y)\ \&\ Q(y,\ x)$,

(о) $D(x,\ y)\leftrightarrow x,\ y\in|\mathfrak{M}|\ \&\ Q(x,\ y)\ \&\ \neg Q(y,\ x)$.

Таким образом, модель $\mathfrak{M}$ формульно определима в модели $\widehat{\mathfrak{M}}$ на формульном множестве.

Через $F^{\mathscr{L}}(m,s)$ обозначим теорию языка $\mathscr{L}$, аксиомы которой утверждают, что модель имеет вид $\widehat{\mathfrak{M}}$ для некоторой модели $\mathfrak{M}$ теории F^*_M. Теория F^*_M интерпретируется в теории $F^{\mathscr{L}}(m,s)$, при этом все формулы в правых частях соотношений (к) — (о) можно представить как в виде $\forall$-формул, так и в виде $\exists$-формул языка $\mathscr{L}$. Отсюда легко вывести, что теория $F^{\mathscr{L}}(m,s)$ модельно полна. В качестве предложений $\psi_i^{\mathscr{L}}$ нужно взять интерпретации предложений Ψ_i в теории $F^{\mathscr{L}}(m,s)$.

Пусть $A\in\mathscr{R}_m$. Обозначим теорию $F^{\mathscr{L}}(m,s)[A]$ через T. Рассмотрим в этой теории четыре формулы

$$\varphi_0'(x)\leftrightarrow X(x)\vee Y(x),\ \varphi_1'(x)\leftrightarrow W(x),$$

$$\varphi_2'(x)\leftrightarrow x\in I,\ \varphi_3'(x)\leftrightarrow x\in N.$$

Имеем

$$\alpha_T=\max\{\operatorname{Rank}\varphi_i'\,|\,i=0,1,2,3\}. \tag{13.3}$$

Легко видеть, что ранги формул φ_0' и φ_1' совпадают с рангами соответствующих формул (12.1) в теории $F(m,\ s)[A]$. Далее, $\operatorname{Rank}\varphi_2'=1$. Для вычисления $\operatorname{Rank}\varphi_3'$ заметим, что формульно определимая функция f нумерует пары элементов из $X \cup Y$ посредством элементов множества N. Поэтому ранг формулы φ_3' равен рангу формулы от двух переменных

$$\psi(x,\ y) = \varphi_0(x)\ \&\ \varphi_0(y)$$

в теории $F(m,\ s)[A]$. Отсюда $\operatorname{Rank}\varphi_3' = \operatorname{Rank} S_8\mathfrak{M}_2$, где модель $\mathfrak{M}_2$ определена в доказательстве основной теоремы. Прямые вычисления дают $\operatorname{Rank} S_8\mathfrak{M}_2 = 33$. Подставляя вычисленные значения в (13.3), получим нужное выражение.

Нетрудно проверить все остальные пункты. □

Таким образом, мы доказали основную теорему и ее $\mathscr{L}$-вариант. Перейдем теперь к выводу конкретных результатов, используя эти теоремы.

§ 14. СУЩЕСТВОВАНИЕ КОНЕЧНО АКСИОМАТИЗИРУЕМЫХ ТЕОРИЙ

Обозначим через $\mathfrak{B}$ булеву алгебру, элементами которой являются классы эквивалентных табличных условий, а операции индуцированы пропозициональными связками. Очевидно, что $\mathfrak{B}$ является счетной безатомной булевой алгеброй, свободно порожденной элементарными табличными условиями ε_i, $i < \omega$. Алгебра $\mathfrak{B}$ имеет естественную конструктивизацию ν, определяемую геделевской нумерацией табличных условий.

Из пп. 1, 2 основной теоремы следует, что алгебра Линденбаума теории $F(m,\ s)$ рекурсивно изоморфна фактор-алгебре $\mathfrak{B}/\mathscr{F}_m$, где $\mathscr{F}_m$ — фильтр, порожденный множеством $\{\tau_i \mid i \in W_m\}$. Нетрудно видеть, что каждый рекурсивно перечислимый фильтр алгебры $\mathfrak{B}$ имеет вид $\mathscr{F}_m$ для некоторого $m < \omega$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 14.1. *Для любой рекурсивно перечислимой теории T существует конечно аксоматизируемая теория F такая, что алгебры Линденбаума теорий T и F рекурсивно изоморфны.*

Этот результат анонсирован У. Ханфом [11], первое опубликованное доказательство содержится в работе автора [12].

Следующая общая теорема касается полных теорий.

Теорема 14.2. *Пусть $\mathscr{D}$ — произвольное рекурсивно перечислимое дерево. Эффективно по его р. п. индексу может быть построена полная, модельно полная, конечно аксиоматизируемая теория $F(\mathscr{D})$ в языке с одним бинарным предикатом, имеющая следующие свойства.*

(а) *Теория $F(\mathscr{D})$ имеет простую модель $\leftrightarrow$ дерево $\mathscr{D}$ является атомным.*

(б) *Простая модель теории $F(\mathscr{D})$, если она есть, сильно конструктивизируема $\leftrightarrow$ семейство $\Pi^{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ вычислимо.*

(в) *Теория $F(\mathscr{D})$ имеет счетную насыщенную модель $\leftrightarrow$ дерево $\mathscr{D}$ является суператомным.*

(г) *Счетная насыщенная модель теории $F(\mathscr{D})$ сильно конструктивизируема $\leftrightarrow$ семейство $\Pi(\mathscr{D})$ вычислимо.*

(д) *Теория $F(\mathscr{D})$ тотально трансцендентна $\leftrightarrow$ дерево $\mathscr{D}$ является суператомным.*

(е) *Ранг Морли теории $F(\mathscr{D})$ равен*

$$\max\{33,\ 1 + \operatorname{Rank}\mathscr{D} + \gamma\},$$

где $\gamma = \begin{cases} 2, & \text{если дерево } \mathscr{D} \text{ суператомное,} \\ 0, & \text{если дерево } \mathscr{D} \text{ не является суператомным.} \end{cases}$

Доказательство. Пусть m — рекурсивно перечислимый индекс множества номеров tt-условий вида $\neg\,\varepsilon_k$, $k < \omega$. По определению имеем

$\mathscr{R}_m = \{\varnothing\}$. По основной теореме теория $F(m, s)$ будет полной при любом s, поскольку единственным ее пополнением будет $F(m, s)[\varnothing]$. Выберем теперь s так, чтобы дерево $\mathscr{D}_s^{\varnothing}$ совпадало с заданным деревом $\mathscr{D}$. В качестве $F(\mathscr{D})$ возьмем теорию $F^{\mathscr{L}}(m, s)$, где $\mathscr{L}$ — язык, содержащий один бинарный предикат. Основная теорема и ее $\mathscr{L}$-вариант обеспечивают все нужные свойства этой теории. □

Доказанная теорема доводит результаты работы [13] до случая конечно аксиоматизируемых теорий. Приведем несколько ее конкретных применений.

Теорема 14.3. *Существует полная конечно аксиоматизируемая тотально трансцендентная теория, у которой простая модель и счетная насыщенная модель не являются конструктивизируемыми.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{D}$ — построенное в [13] р. п. суператомное дерево, для которого семейства $\Pi(\mathscr{D})$ и $\Pi^{\mathrm{fin}}(\mathscr{D})$ не вычислимы. Нужными свойствами обладает теория $F(\mathscr{D})$, так как в силу модельной полноты всякая конструктивная модель этой теории должна быть с. к. моделью. □

Доказанная теорема решает вопросы работ автора [12, 16].

Теорема 14.4. *Для любого конструктивного ординала $\beta \geqslant 1$ существует полная конечно аксиоматизируемая тотально трансцендентная теория T ранга Морли $\alpha_T = \beta + 3$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\beta \geqslant \omega$. Свойства, указанные в теореме, имеет теория $F(\mathscr{D})$, где $\mathscr{D}$ — р. п. суператомное дерево ранга $\beta + 1$. Построение такого дерева описывается в § 17 настоящей работы.

Теперь рассмотрим случай $\beta < \omega$. Теория квазиследования с тремя координатами, описанная в [1], имеет ранг Морли 4. Применяя стандартные приемы повышения ранга, можно построить ω_1-категоричную полную конечно аксиоматизируемую теорию любого конечного ранга $\alpha \geqslant 4$. □

Отметим результат Дж. Сакса [14] о том, что $\alpha_T < \lambda$ для любой разрешимой тотально трансцендентной теории T, здесь λ — первый неконструктивный ординал. Возникает естественный вопрос: существует ли полная конечно аксиоматизируемая тотально трансцендентная теория ранга $\beta + n$, где $n \in \{1, 2\}$, а β — предельный конструктивный ординал, или же $\beta = 0$?

Теорема 14.5. *Существует полная конечно аксиоматизируемая теория T ранга Морли $\alpha_T = \lambda$.*

Доказательство. Рассмотрим дерево $\mathscr{D} = \oplus \langle \mathscr{D}_i | i < \omega \rangle$, где $\mathscr{D}_i$ определено в (9.1). Достаточно очевидно, что $\mathscr{D}$ — рекурсивно перечислимое дерево и $\mathrm{Rank}\,\mathscr{D} = \lambda$. Следовательно, нужные свойства имеет теория $F(\mathscr{D})$. □

Автор имеет пример полной конечно аксиоматизируемой теории T с $\alpha_T = \omega_1$, это усиливает результат А. Х. Лахлана [15]. Возникает интересный вопрос: существует ли полная конечно аксиоматизируемая (или даже разрешимая) теория T такая, что $\lambda < \alpha_T < \omega_1$?

§ 15. НЕСКОЛЬКО ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Введем несколько определений и понятий, которые будут использоваться в дальнейшем при исследовании сложности разных классов предложений.

Через $\mathscr{L}(\Phi)$ обозначим язык формулы Φ, т. е. совокупность всех предикатных и функциональных символов, входящих в Φ. С каждым предложением Φ свяжем теорию $[\Phi]$ языка $\mathscr{L}(\Phi)$, которая определяется предложением Φ как аксиомой. Свойства теории $[\Phi]$ будут приписываться формуле Ф. Например, утверждение, что формула Ф является полной и тотально трансцендентной, означает, что указанные свойства имеет теория [Ф]. Будем придерживаться соглашения, что понятие «полнота» подразумевает «непротиворечивость», а «тотальная трансцендентность» подразумевает «полноту».

Если $A \subseteq N$, $\Sigma \subseteq \mathscr{P}(N)$, то запись $A \approx \Sigma$ будет означать, что $A \in \Sigma$ и A является m-полным в Σ.

Стандартные обозначения: $\mathscr{L}$ — фиксированный конечный богатый язык, Φ_i, $i < \omega$,— гёделевская нумерация всех предложений языка $\mathscr{L}$, $\mathrm{Mod}\,\mathscr{L}$ — класс моделей языка $\mathscr{L}$. Через $\mathfrak{B}_k(T)$ будем обозначать алгебру Линденбаума теории T формул со свободными переменными $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

§ 16. ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ

Эффективность построения теории $F^{\mathscr{L}}(m, s)$ позволяет использовать основную теорему и ее вариант для оценки сложности разных классов предложений.

Сначала приведем теорему, доказанную в [12].

Теорема 16.1. *$\{n | \Phi_n$ полна и имеет простую модель$\} \approx \Pi_3^0$.*

Естественно, что отказ от условия полноты повышает сложность:

Теорема 16.2. *$\{n | \Phi_n$ имеет простую модель$\} \approx \Sigma_1^1$.*

Доказательство. Утверждение, что Φ_n имеет простую модель, равносильно существованию полной теории T такой, что $\Phi_n \in T$ и все алгебры $\mathfrak{B}_k(T)$, $k < \omega$, являются атомными. Это дает верхнюю оценку Σ_1^1. Для оценки снизу рассмотрим эталонное Σ_1^1-множество

$$E = \{s | (\exists \text{ бесконечное } A \subseteq N)(\forall t) R(s, \mathrm{Nom}\{x \in A | x < t\})\},$$

где R — подходящее рекурсивное отношение, а $\mathrm{Nom}\,X$ — канонический индекс конечного множества X. Представление Σ_1^1-множеств в такой форме легко получается из представления с квантором по функциям [6, с. 483] путем кодирования всюду определенных функций $f: N \to N$ бесконечными множествами $A \subseteq N$.

По заданным $s < \omega$ и $A \subseteq N$ построим дерево $\mathscr{D}$, имеющее вид $\oplus\langle \mathscr{D}_i | i < \omega\rangle$, где последовательность $\mathscr{D}_i$ определим таким образом:

$$\mathscr{D}_0 = \begin{cases} \{0\}, \text{ если } (\forall t) R(s, \mathrm{Nom}\{x \in A | x < t\}), \\ N, \text{ если } (\exists t) \neg R(s, \mathrm{Nom}\{x \in A | x < t\}). \end{cases}$$

$$D_k = \begin{cases} \{0, 1, \ldots, 2t\}, \text{ если } \{x \in A | x > k\} \text{ непусто, и } t \text{ — минимальный} \\ \text{элемент этого множества,} \\ N, \text{ если } \{x \in A | x > k\} = \varnothing, \end{cases}$$

$$\text{при } k > 0.$$

Дерево $\mathscr{D}$ строится эффективно по заданным s и A, поэтому согласно s-m-n-теореме [6] существует о. р. ф. $f(x)$ такая, что $\mathscr{D} = \mathscr{D}^A_{f(s)}$.

Если A — конечное, то при некотором $k > 0$ дерево $\mathscr{D}_k$ будет полным, поэтому дерево $\mathscr{D}^A_{f(s)}$ не может быть атомным. Если же A — бесконечное, то все деревья $\mathscr{D}_k$, $k > 0$, будут атомными, поэтому в указанном случае атомность дерева $\mathscr{D}$ определяется слагаемым $\mathscr{D}_0$. В итоге получаем

$$s \in \mathrm{E} \leftrightarrow (\exists \text{ бесконечное } A \subseteq N)\ \mathscr{D}^A_{f(s)} \text{ — атомное} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists A \subseteq N)\ \mathscr{D}^A_{f(s)} \text{ — атомное.} \qquad (16.1)$$

Выберем m такое, что $\mathcal{R}_m = \mathcal{P}(N)$, и рассмотрим теорию $F(m, f(s))$. Из (16.1) по основной теореме получаем, что эта теория имеет простую модель в том и только в том случае, когда $s \in E$. Применяя $\mathcal{L}$-вариант основной теоремы, получаем

$$s \in \mathrm{E} \leftrightarrow F^{\mathcal{L}}(m, f(s)) \text{ имеет простую модель} \tag{16.2}$$

Теория в (16.2) строится эффективно по s, поэтому существует о. р. ф. $h(x)$ такая, что $F^{\mathcal{L}}(m, f(s)) = \Phi_{h(s)}$. Комбинируя это с (16.2), получаем окончательно

$$s \in E \leftrightarrow \Phi_{h(s)} \text{ имеет простую модель.}$$

Это дает необходимую нижнюю оценку. □

В дальнейшем, получив соотношение вида (16.2), даже без верхнего индекса $\mathcal{L}$, будем считать доказательство законченным. Опускаемый конец доказательства может быть легко восстановлен.

Теорема 16.3. $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathcal{L} \mid \mathfrak{M}$ — *простая модель*$\} \approx \Pi^1_1$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что указанное множество рекурсивно изоморфно дополнению множества из теоремы 16.2. Это дает необходимую оценку. □

Теорема 16.4. (а) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathcal{L} \mid \mathfrak{M}$ — *простая модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *разрешима*$\} \approx \Pi^0_4$.

(б) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathcal{L} \mid \mathfrak{M}$ — *простая модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *конечно аксиоматизируема*$\} \approx \Pi^0_4$.

Доказательство. Задача сводится, очевидно. к установлению следующих оценок:

$$\{n \mid \Phi_n \text{ имеет разрешимое пополнение с простой моделью}\} \approx \Sigma^0_4. \tag{16.3}$$

$$\{n \mid \Phi_n \text{ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение с простой моделью}\} \approx \Sigma^0_4. \tag{16.4}$$

Число n принадлежит множеству (16.4) тогда и только тогда, когда существует предложение Ψ языка $\mathcal{L}$ такое, что (формула $\Phi_n \& \Psi$ полна и имеет простую модель). По теореме 16.1 условие в скобках описывается префиксом $\forall\exists\forall$. В целом получена оценка Σ^0_4. Аналогично получается верхняя оценка для (16.3).

Для нижних оценок используем эталонное Σ^0_4-полное множество, определенное в [6, с. 423]:

$$E_4 = \{n \mid W_n \text{ содержит конечное число р. п. индексов бесконечных множеств}\}.$$

Опишем процесс построения некоторого дерева $\mathcal{D}$, зависящий от двух параметров:

$$s \in N, \quad A \subseteq N. \tag{16.5}$$

Через W^t_k обозначим конечную часть k-го множества в постовской нумерации, вычисленную к моменту t; предполагается, что $W^t_k \subseteq W^{t+1}_k$. Будем строить двойную последовательность $\mathcal{D}^t_i$, $i, t < \omega$, конечных деревьев.

Шаг $t = 0$. Полагаем $\mathcal{D}^0_i = \{0\}$, $i < \omega$.

Шаг $t > 0$.

Случай 1. $\{0, 1, \ldots, t\} \cap A = \varnothing$. Полагаем

$$\mathcal{D}^t_i = \begin{cases} \{0, 1, \ldots, 2t\}, & \text{если } i = 0, \\ \mathcal{D}^{t-1}_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Случай 2. $\{0, 1, \ldots, t\} \cap A$ непусто, и k — наименьший элемент этого множества. Полагаем

$$\mathscr{D}_i^t = \begin{cases} \{0, 1, \ldots, 2t\}, \text{ если } k < i < t \;\&\; i \in W_s^t \;\&\; W_i^t \neq W_i^{t-1}, \\ \mathscr{D}_i^{t-1} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг t закончен.

Положим

$$\mathscr{D}_i = \bigcup \{\mathscr{D}_i^t \mid t < \omega\}, \; i < \omega,$$
$$\mathscr{D} = \oplus \langle \mathscr{D}_i \mid i < \omega \rangle.$$

Нетрудно видеть, что дерево $\mathscr{D}$ строится эффективно по параметрам (16.5), поэтому существует о. р. ф. $f(x)$ такая, что

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}_{f(s)}^A \text{ для всех } s \in N, \; A \subseteq N.$$

При $A = \varnothing$ дерево $\mathscr{D}$ не может быть атомным, поскольку дерево $\mathscr{D}_0$ будет полным. При $A = \{k\}$ дерево $\mathscr{D}$ будет атомным в том и только в том случае, когда множество $W_s \cap \{k+1, \; k+2, \; \ldots, \; k+n, \; \ldots\}$ не содержит р. п. индексов бесконечных множеств.

Пусть m — фиксированный р. п. индекс совокупности номеров tt-условий вида

$$i \in A \to j \notin A, \;\; i, \; j \in N, \; i \neq j.$$

По выбору m выполняется

$$\mathscr{R}_m = \{\varnothing, \; \{0\}, \; \{1\}, \; \ldots, \; \{n\}, \; \ldots; \; n \in N\}.$$

Процесс построения дерева $\mathscr{D}$ обеспечивает следующее соотношение:

$$s \in E_4 \leftrightarrow (\exists A \in \mathscr{R}_m) \text{ дерево } \mathscr{D}_{f(s)}^A \text{ — атомное.}$$

Применяя основную теорему, получаем в итоге

$s \in E_4 \leftrightarrow F(m, \; f(s))$ имеет разрешимое пополнение с простой моделью,

$s \in E_4 \leftrightarrow F(m, \; f(s))$ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение с простой моделью.

Последняя эквивалентность следует из того, что при любом $A \in \mathscr{R}_m \setminus \{\varnothing\}$ теория $F(m, \; f(s))[A]$ является конечно аксиоматизируемой. □

Теорема 16.5. (а) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая простая модель*$\} \approx \Pi_4^0$.

(б) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая простая модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *конечно аксиоматизируема*$\} \approx \Pi_4^0$.

Доказательство. Достаточно получить следующие оценки:

$$\{n \mid \Phi_n \text{ имеет с. к. простую модель}\} \approx \Sigma_4^0. \tag{16.6}$$

$$\{n \mid \Phi_n \text{ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение с простой с. к. моделью}\} \approx \Sigma_4^0. \tag{16.7}$$

Как известно, простая модель полной разрешимой теории (если она есть) является сильно конструктивизируемой тогда и только тогда, когда вычислимо семейство всех главных типов этой теории [13, 16]. Отсюда следует, что Φ_n имеет с. к. простую модель в том и только в том случае, когда существуют полная разрешимая теория T и вычислимое семейство S типов этой теории такие, что

1) $\Phi_n \in T$;

2) каждый тип из S является главным;

3) любая выполнимая в T формула φ принадлежит некоторому типу из S.

Детальная формализация дает префикс формы Σ_4^0. Аналогично рассматривается (16.7).

Приступим теперь к нижним оценкам. Будем использовать Σ_4^0-полное множество E_4, определенное в доказательстве теоремы 16.4. В работе [12, теорема 4.4] описан процесс построения дерева, зависящий от одного параметра s, который дает в итоге о. р. ф. $f(s)$ такую, что

а) для любого s дерево $\mathscr{D}_{h(s)}$ является атомным,

б) семейство $\Pi^{\text{fin}}(\mathscr{D}_{f(s)})$ вычислимо $\leftrightarrow s \in E_4$.

Используя теорему 12.2, получаем:

$s \in E_4 \leftrightarrow F(\mathscr{D}_{h(s)})$ имеет с. к. простую модель,

$s \in E_4 \leftrightarrow F(\mathscr{D}_{h(s)})$ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение с простой с. к. моделью. □

§ 17. ЭТАЛОННЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ Π_1^1 И ДЛЯ Σ_2^1

В этом параграфе опишем эталонные множества в терминах суператомных деревьев.

По заданному кортежу натуральных чисел

$$\varkappa = \langle n_0, n_1, \ldots, n_{s-1}\rangle \tag{17.1}$$

построим бесконечную цепь $\pi_\varkappa$ следующим образом: начиная с 0 делаем $n_0 + 1$ шагов вправо, затем $n_1 + 1$ шагов влево, затем $n_2 + 1$ шагов вправо и так далее до последнего элемента кортежа, после этого делаем очередной «поворот» и делаем ω шагов в одном направлении. Шаг влево от a означает переход к $L(a)$, шаг вправо — переход к $R(a)$, где L и R определены формулами (8.1). Отметим, что пустому кортежу по определению соответствует крайняя правая цепь.

Пусть $(\mathfrak{A}, \nu)$ — конструктивный линейный порядок. Определим с его помощью следующее множество кортежей:

$$K(\mathfrak{A}, \nu) \rightleftharpoons \{\langle n_0, n_1, \ldots, n_{s-1}\rangle | \nu(n_0) > \nu(n_1) > \ldots > \nu(n_{s-1})\}.$$

Через $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ обозначим наименьшее дерево, содержащее множество

$$\cup \{\pi_\varkappa | \varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu)\}. \tag{17.2}$$

Ясно, что р. п. индекс этого дерева находится эффективно по номеру характеристической функции, представляющей отношение $<_\mathfrak{A}$ в нумерации ν.

Легко видеть, что дерево $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ получается путем добавления L-последователей и R-последователей к множеству (17.2). Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\text{Если } x \in \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu) \setminus \cup\{\pi_\varkappa / \varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu),\\ \text{то } x \text{ является тупиком дерева } \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu).\end{gathered} \tag{17.3}$$

Лемма 17.1. *Пусть $(\mathfrak{A}, \nu)$ — конструктивный линейный порядок, тогда*

(а) *дерево $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ является суператомным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ — полный порядок;*

(б) *если $\mathfrak{A}$ — полный порядок, то семейство $\Pi(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu))$ вычислимо;*

(в) *если $\mathfrak{A}$ — полный порядок ординального типа α, а нумерация ν удовлетворяет условию*

$$(\forall x \in \mathfrak{A}) \nu^{-1}(x) \ \textit{бесконечно}, \tag{17.4}$$

то $\operatorname{Rank} \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu) = 1 + \alpha + 1$.

Доказательство. (а) Предположим, что $\mathfrak{A}$ не является полным порядком. Тогда найдется строго убывающая последовательность

$$\nu(n_0) > \nu(n_1) > \ldots > \nu(n_s) > \ldots \tag{17.5}$$

Возьмем произвольную ее подпоследовательность

$$\nu(n_{i_0}) > \nu(n_{i_1}) > \ldots > \nu(n_{i_s}) > \ldots \tag{17.6}$$

По бесконечному кортежу $\varkappa \quad \langle n_{i_s} | s < \omega \rangle$ построим цепь π с бесконечным числом поворотов аналогично тому, как это определялось для конечного кортежа (17.1). Так как каждая конечная часть цепи π в силу (17.3) содержится в некоторой цепи $\pi_\varkappa$, $\varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu)$, то $\pi \subseteq \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$. Очевидно, что разные последовательности (17.6) дадут разные цепи π, отсюда семейство $\Pi(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu))$ содержит 2^ω цепей. По теореме 8.1 получаем, что дерево $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ не является суператомным.

Обратно, предположим, что дерево $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ не суператомное. По теореме 8.1 семейство $\Pi(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu))$ несчетное, поэтому найдется бесконечная цепь $\pi \subseteq \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ с бесконечным числом поворотов. В силу (17.3) каждая конечная часть цепи π должна входить в одну из цепей $\pi_\varkappa$, $\varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu)$. Поэтому повороты этой цепи определяют бесконечный кортеж $\langle n_i | i < \omega \rangle$ с условием (17.5). Следовательно, порядок $\mathfrak{A}$ не является полным

(б) Предыдущие рассуждения показывают, что в случае, когда $\mathfrak{A}$ — полный порядок, ни одна из цепей $\pi \subseteq \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ не может иметь бесконечного числа поворотов. Поэтому цепями $\pi_\varkappa$, $\varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu)$, исчерпываются все бесконечные цепи указанного дерева. По построению $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$ является рекурсивным, отсюда следует вычислимость семейства его конечных цепей. В итоге имеем вычислимость семейства $\Pi(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu))$.

(в) Для $\varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu)$, $\varkappa = \langle n_0, n_1, \ldots, n_{s-1} \rangle$, обозначим через $\delta(\varkappa)$ ординальный тип множества $\mathfrak{A} \restriction \{\nu(n_{s-1}) > y\}$. Для пустого кортежа $\varkappa$ по определению положим $\delta(\varkappa)$ равным ординальному типу α множества $\mathfrak{A}$.

Индукцией по β, используя условие (17.4), можно показать, что

$$\Pi_\beta(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)) = \begin{cases} \Pi(\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)) \text{ при } \beta = 0, \\ \{\pi_\varkappa \,|\, \varkappa \in K(\mathfrak{A}, \nu) \mathbin{\&} 1 + \delta(\varkappa) \geqslant \beta\} \text{ при } \beta > 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\operatorname{Rank} \mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu) = 1 + \alpha + 1$. □

Далее предполагается, что последовательность деревьев $\mathscr{D}_s$, $s < \omega$, определена формулой (9.1). Положим

$$H = \{s | \text{ дерево } \mathscr{D}_s \text{ является суператомным}\},$$

$$H^* = \{s \text{ семейство } \Pi(\mathscr{D}_s) \text{ вычислимо}\}.$$

Отметим, что $H^* \subseteq H$.

Лемма 17.2. *Множества H и H^* являются Π_1^1-полными.*

Доказательство. Используя п. (г) теоремы 8.1, получаем верхнюю оценку Π_1^1 для множества H. Верхняя оценка для H^* легко выводится из определения этого множества. Для нижних оценок возьмем эталонное Π_1^1-множество, определенное в [6, с. 285]:

$$W = \{s \,|\, \varphi_s^{(2)} \text{является характеристической функцией вполне упорядочения некоторого множества натуральных чисел}\}.$$

конструктивные порядки, мы построим вычислимую последовательность
Переделывая стандартными методами характеристические функции в $(\mathfrak{A}_s, \nu_s)$, $s < \omega$, конструктивных линейных порядков такую, что будет выполнено соотношение

$$s \in W \leftrightarrow \mathfrak{A}_s \text{ — вполне упорядочение}.$$

По s-m-n-теореме существует о. р. ф. $f(x)$ такая, что для всех s выполнено $\mathscr{D}(\mathfrak{A}_s, \nu_s) = \mathscr{D}_{f(s)}$. Используя лемму 17.1, получаем

$$s \in W \leftrightarrow \text{дерево } \mathscr{D}_{f(s)} \text{ является суператомным.}$$

Это дает необходимую оценку снизу для множества H. Используя теорему 8.1 и лемму 17.2, получаем

$$s \in W \leftrightarrow \text{семейство } \Pi(\mathscr{D}_{f(s)}) \text{ вычислимо.}$$

Это дает нижнюю оценку Π_1^1 для множества H^*. □

Далее предполагается, что дерево $\mathscr{D}_s^A$ определено соотношением (9.2). Обозначим

$$H^2 = \{s \mid (\exists A \subseteq N) \text{ дерево } \mathscr{D}_s^A \text{ является суператомным}\}.$$

Лемма 17.3. *Множество H^2 является Σ_2^1-полным.*

Доказательство. Верхняя оценка получается непосредственно из определения. Для нижней оценки возьмем эталонное Σ_2^1-полное множество, определенное в [6, с. 532]:

$$T^2 = \{s \mid (\exists A \subseteq N)\, \psi_s^A \text{ — характеристическая функция, определяющая функциональное дерево с конечными путями}\}.$$

Переделывая характеристические функции в упорядочение Клини — Брауэра соответствующих функциональных деревьев [6, с. 506], а затем переходя к бинарным деревьям, используя релятивизованную по A процедуру переделки $(\mathfrak{A}, \nu)$ в $\mathscr{D}(\mathfrak{A}, \nu)$, мы по s-m-n-теореме определим о. р. ф. $f(s)$ такую, что для всех $s \in N$, $A \subseteq N$, построенное дерево совпадает с $\mathscr{D}_{f(s)}^A$. В итоге получаем необходимую оценку снизу:

$$s \in W \leftrightarrow (\exists A \subseteq N) \text{ дерево } \mathscr{D}_{f(s)}^A \text{ является суператомным.} \quad \square$$

§ 18. СЧЕТНЫЕ НАСЫЩЕННЫЕ МОДЕЛИ

В этом параграфе мы, придерживаясь схемы § 15, изучим счетные насыщенные модели.

Теорема 18.1. $\{n \mid \Phi_n$ *полна и имеет счетную насыщенную модель*$\} \approx \Pi_1^1$.

Доказательство. Число n принадлежит указанному в теореме множеству в том и только в том случае, когда Φ_n полна и все алгебры $\mathfrak{B}_k(\Phi_n)$ суператомны. Это дает кванторный префикс формы Π_1^1. Для нижней оценки возьмем множество H из леммы 17.2. По теореме 13.1 имеем

$$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s) \text{ полна и имеет счетную насыщенную модель.}$$

Это дает нужную оценку снизу. □

Теорема 18.2. $\{n \mid \Phi_n$ *имеет счетную насыщенную модель*$\} \approx \Sigma_2^1$.

Доказательство. Предложение Φ_n имеет счетную насыщенную модель тогда и только тогда, когда существует полная теория T, содержащая Φ_n, такая, что все алгебры $\mathfrak{B}_k(T)$ суператомны. Это дает кванторный префикс формы Σ_2^1. Для нижней оценки используем множество H^2 из леммы 17.3. Выберем число m такое, что $\mathscr{R}_m = \mathscr{P}(N)$. По основной теореме имеем

$$s \in H^2 \leftrightarrow F(m, s) \text{ имеет счетную насыщенную модель.} \quad \square$$

Теорема 18.3. $\mathrm{Th}\,\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ *— счетная насыщенная модель*$\} \approx \Pi_2^1$.

Доказательство. Непосредственно из предыдущей теоремы. □

Теорема 18.4. (а) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *счетная насыщенная модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *разрешима*$\} \approx \Sigma_1^1$.

(б) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *счетная насыщенная модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *конечно аксиоматизируема*$\} \approx \Sigma_1^1$.

Доказательство. Достаточно получить оценки

$\{n \mid \Phi_n$ *имеет разрешимое пополнение со счетной насыщенной моделью*$\} \approx$
$\approx \Pi_1^1$. (18.1)

$\{n \mid \Phi_n$ *имеет конечно аксиоматизируемое пополнение со счетной насыщенной моделью*$\} \approx \Pi_1^1$. (18.2)

Верхние оценки достаточно очевидны. Для нижних оценок используем множество H из леммы 17.2. По теореме 14.2 имеем:

$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет разрешимое пополнение со счетной насыщенной моделью,

$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение со счетной насыщенной моделью. □

Теорема 18.5. (а) $\mathrm{Th}\,\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая счетная насыщенная модель*$\} \approx \Sigma_1^1$.

(б) $\mathrm{Th}\,\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L} \mid \mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая счетная насыщенная модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *является конечно аксиоматизируемой*$\} \approx \Sigma_1^1$.

Доказательство. Достаточно получить следующие оценки:

$\{n \mid \Phi_n$ *имеет с. к. счетную насыщенную модель*$\} \approx \Pi_1^1$. (18.3)

$\{n \mid \Phi_n$ *имеет конечно аксиоматизируемое пополнение со счетной насыщенной с. к. моделью*$\} \approx \Pi_1^1$. (18.4)

Согласно критерию М. Морли [17], счетная насыщенная модель полной разрешимой теории будет сильно конструктивизируемой тогда и только тогда, когда вычислимо семейство всех типов этой теории. Отсюда получаем, что Φ_n имеет с. к. счетную насыщенную модель тогда и только тогда, когда существуют разрешимая теория T, содержащая Φ, и вычислимое семейство S типов этой теории такие, что каждый тип теории T содержится в S. Формализация дает кванторный префикс с единственным функциональным квантором «каждый тип». Точно так же получается верхняя оценка для (18.4).

Для нижних оценок используем множество H^* из леммы 17.2. В силу теоремы 14.2 имеем:

$s \in H^* \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет с. к. счетную насыщенную модель,

$s \in H^* \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет конечно аксиоматизируемое пополнение со счетной насыщенной с. к. моделью. □

§ 19. ТОТАЛЬНО ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ТЕОРИИ

Последний параграф посвящен оценкам сложности классов предложений, связанных с понятием тотальной трансцендентности.

Теорема 19.1. $\{n \mid \Phi_n$ *полна и тотально трансцендентна*$\} \approx \Pi_1^1$.

Доказательство. Как известно, тотальная трансцендентность равносильна ω-стабильности. Отсюда следует, что число n принадлежит указанному в теореме множеству тогда и только тогда, когда теория

(Φ_n) полна, и для каждой счетной модели $\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\Phi_n$ алгебра Линденбаума $\mathfrak{B}_1(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, |\mathfrak{M}|))$ является суператомной. Это условие имеет префикс формы Π_1^1. Для нижней оценки используем множество H из леммы 17.2. Применяя теорему 14.2, получаем

$$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s) \text{ полна и тотально трансцендентна. } \square$$

Теорема 19.2. $\{n|\Phi_n$ *имеет тотально трансцендентное пополнение*$\} \approx \Sigma_2^1$.

Доказательство. Верхняя оценка достаточно очевидна. Для нижней оценки используем множество H^2 из леммы 17.3. Выберем число m такое, что $\mathscr{R}_m = \mathscr{P}(N)$. По основной теореме имеем:

$$s \in H^2 \leftrightarrow F(m, s) \text{ имеет тотально трансцендентное пополнение. } \square$$

Теорема 19.3. $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L}|$ *теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *тотально трансцендентна*$\} \approx \Pi_2^1$.

Доказательство. Непосредственно из предыдущей теоремы. $\square$

Теорема 19.4. (а) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L}|$ *теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *тотально трансцендентна и разрешима*$\} \approx \Sigma_1^1$.

(б) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L}|$ *теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *тотально трансцендентна и конечно аксиоматизируема*$\} \approx \Sigma_1^1$.

Доказательство. Достаточно получить следующие оценки:

$$\{n|\Phi_n \text{ имееет разрешимое тотально трансцендентное пополнение}\} \approx \Pi_1^1. \tag{19.1}$$

$$\{n|\Phi_n \text{ имеет конечно аксиоматизируемое тотально трансцендентное пополнение}\} \approx \Pi_1^1. \tag{19.2}$$

Верхние оценки очевидны. Для нижних оценок используем множество H из леммы 17.2. Применяя теорему 14.2, получаем

$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет разрешимое тотально трансцендентное пополнение.

$s \in H \leftrightarrow F(\mathscr{D}_s)$ имеет конечно аксиоматизируемое тотально трансцендентное пополнение. $\square$

Теорема 19.5. (а) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L}|\mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *тотально трансцендентна*$\} \approx \Sigma_1^1$.

(б) $\mathrm{Th}\{\mathfrak{M} \in \mathrm{Mod}\,\mathscr{L}|\mathfrak{M}$ — *сильно конструктивизируемая модель и теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ *конечно аксиоматизируема и тотально трансцендентна*$\} \approx \Sigma_1^1$.

Доказательство. Непосредственно из оценок (19.1), (19.2), полученных в предыдущей теореме. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все результаты работы первоначально были получены на основе тотально трансцендентного квазиследования — QST, что отражено в заметке [2]. Впоследствие идею теории QST удалось усовершенствовать, это привело к примеру ω_1-категоричного квазиследования — QS, описанному в [1]. Замена QST на QS не увеличивает возможности конструкции, а лишь упрощает некоторые детали, связанные с техникой совершенных расширений.

В теориях F_{M}^* на множестве $U \cap W$ интегрируются теории с одноместными предикатами, описанные в работе [13]. Это позволяет переносить результаты, полученные для таких теорий, на конечно аксиоматизируемые теории.

Сформулируем одну естественную проблему, связанную с конечно аксиоматизируемыми теориями.

Проблема. Какова сложность множества

$$C_1 = \{n \mid \Phi_n \text{ полна и } \omega_1\text{-категорична}\}?$$

Нетрудно показать, что указанное множество находится в интервале $\varnothing^{(1)} \leqslant_m C_1 \leqslant_m \varnothing^{(3)}$.

В заключение автор выражает искреннюю признательность чл.-кор. АН СССР Ю. Л. Ершову за постоянную помощь и моральную поддержку. Хотелось бы отметить также работы Р. Л. Вота [18] и У. Ханфа [19], побудившие автора заниматься интерпретациями машин Тьюринга в конечно аксиоматизируемых теориях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Перетятькин М. Г.** Пример ω_1-категоричной полной конечно аксиоматизируемой теории.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 3, с. 314—347.
2. **Перетятькин М. Г.** О конечно аксиоматизируемых полных теориях.— В кн.: V Всесоюзная конференция по математической логике (тезисы). Новосибирск, изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1979, с. 119.
3. **Перетятькин М. Г.** Сложность некоторых классов предложений.— Там же, с. 120.
4. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука. 1980.
5. **Кейслер Г., Чен Ч. Ч.** Теория моделей. М.: Мир, 1977.
6. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
7. **Перетятькин М. Г.** Сильно конструктивные модели и нумерации булевой алгебры рекурсивных множеств.— Алгебра и логика, 1971, т. 10, № 5. с. 535—557.
8. **Чёрч А.** Введение в математическую логику. Т. 1. М.: ИЛ, 1960.
9. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
10. **Сакс Дж.** Теория насыщенных моделей. М.: Мир, 1976.
11. **Hanf W.** The Boolean algebra of logic.— Bull. Amer. Math. Soc., 1975, v. 31, № 3, p. 587—589.
12. **Перетятькин М. Г.** Вычисления на машинах Тьюринга о конечно аксиоматизируемых теориях.— Алгебра и логика, 1981, т. 20. № 4, с. 456—502.
13. **Гончаров С. С., Нуртазин А. Т.** Конструктивные модели полных разрешимых теорий.— Алгебра и логика, 1972, т. 12, № 2, с. 125—142.
14. **Sacks G. E.** Effective bounds on Morley rank.— Fundam. Math., 1979, v. 103, № 2, p. 111—121.
15. **Lachlan A. H.** The transcendental rank of a theory.— Pacific J. Math., 1971, v. 27, p. 119—122.
16. **Harrington L.** Recursively presented prime models.— J. Symbolic Logic, 1974, v. 39, № 2, p. 305—309.
17. **Morley M.** Decidable models.— Israel J. Math., 1976, v. 25, № 3—4, p. 233—240.
18. **Vaught R. L.** Sentences true in all constructive models.— J. Symbolic Logic, 1961, v. 25, № 1, p. 39—58.
19. **Hanf W.** Model theoretic methods in the study of elementary logic.— In: Symposium on the theory of Models. Amsterdam: North — Holland Publishing Co., 1965, p. 132—165.

ОБ ИНДЕКСНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ИЕРАРХИИ КЛИНИ — МОСТОВСКОГО

В. Л. СЕЛИВАНОВ

В работе изучаются семейства рекурсивно перечислимых множеств (рпм), индексные множества которых находятся в иерархии Клини — Мостовского [1, гл. 14].

В § 1, который для этой статьи является вспомогательным, описаны довольно общие схемы построения иерархий, аналогичных известным иерархиям Клини — Мостовского и Ершова. Основную роль играют при этом теоретико-нумерационные соображения. Все необходимые нам сведения из теории нумераций содержатся в [2]. Некоторые замечания этого параграфа могут представить и определенный вспомогательный интерес.

В § 2 вводится и изучается естественная иерархия семейств рпм, возникающая из класса всех вполне перечислимых семейств рпм. Изучен вопрос о возможности описания семейств рпм, индексные множества которых принадлежат данному классу иерархии Клини — Мостовского, в терминах вполне перечислимых семейств. Изучена связь введенной иерархии с арифметической иерархией классов множеств из [1, гл. 15].

В § 3 вводится и изучается «малая» иерархия семейств рпм, возникающая из класса всех вполне перечислимых семейств. Изложение тесно связано с содержанием работ [3—5]. Отметим, что для § 2 и 3 существенное значение имеют определения и результаты работы [6]. В § 4 приведены замечания о распространении полученных результатов.

§ 1

Если X, Y — множества, φ — отображение из X в Y, то значение функции φ на элементе $x\in X$ обозначаем (в зависимости от контекста) одним из символов $\varphi(x)$, φx, φ_x. Символ $\operatorname{dom}\varphi$ обозначает область определения, $\operatorname{rng}\varphi$ — область значений функции φ, $\varphi(X')$ — образ множества $X'\subseteq X$, $\varphi^{-1}(Y')$ — прообраз множества $Y'\subseteq Y$ при отображении φ. $\mathscr{P}(X)$ обозначает семейство всех подмножеств X, $H(X)$ — множество всех нумераций множества X, т. е. множество всех отображений из множества натуральных чисел N в X. Иногда удобно рассматривать множество $H_\xi(X)$ всех отображений из данного множества $\xi\subseteq N$ в X, которые отождествляются с ξ-последовательностями элементов из X.

Фиксируем до конца параграфа произвольное множество ε. С каждым семейством $A\subseteq\mathscr{P}(\varepsilon)$ можно, используя теоретико-множественные операции $\cup$, $\cap$, $^-$, $\setminus$ на $\mathscr{P}(\varepsilon)$, связать другие семейства. В первой части этого параграфа приведем некоторые из таких способов порождения новых семейств, встречающиеся в дескриптивной теории множеств. Во второй части опишем конструктивные аналоги этих способов, которые затем используем для построения иерархий. Все результаты весьма просты, а многие из них известны, поэтому подробные доказательства не приводятся.

Символом A^c обозначаем семейство всех множеств вида $\overline{\alpha}$, $\alpha\in A$. Будем называть семейство A *σ-замкнутым* относительно объединения (пересечения), если объединение (пересечение) любого (не более чем) счетного подсемейства семейства A принадлежит A.

Пусть $\Sigma(A)$ $(\Pi(A))$ есть семейство подмножеств ε, являющихся объединениями (пересечениями) любых счетных подсемейств семейства A. Очевидно, что если $\varnothing\in A$ $(\varepsilon\in A)$, то

$$\Sigma(A)\left\{\bigcup_x \nu_x \mid \nu\in H(A)\right\}\quad\left(\Pi(A)=\left\{\bigcap_x \nu_x \mid \nu\in H(A)\right\}\right).$$

В дальнейшем предполагаем, что $\varnothing$, $\varepsilon\in A$ (в приложениях это обычно выполняется). Приведем некоторые свойства введенных на $\mathscr{P}(\mathscr{P}\varepsilon)$ операций $A\to\Sigma(A)$, $A\to\Pi(A)$.

1. $A\subseteq\Sigma(A)$, $A\subseteq B\Rightarrow\Sigma(A)\subseteq\Sigma(B)$, $\Sigma(\Sigma A)\subseteq\Sigma(A)$ для любых A, $B\subseteq\mathscr{P}(\varepsilon)$, и аналогичные соотношения выполнены для отображения $A\to\Pi(A)$. Отсюда следует, что $\Sigma(A)$ $(\Pi(A))$ есть наименьшее σ-замкнутое относительно объединения (пересечения) семейство, содержащее семейство A.

2. $(\Sigma A)^c=\Pi(A^c)$, $(\Pi A)^c=\Sigma(A^c)$.

3. Если A замкнуто относительно конечных пересечений (объединений), то таково же и $\Sigma(A)$ $(\Pi(A))$.

Определим по индукции последовательность семейств $\Sigma_n(A)$, $\Pi_n(A)$ $(n \in N)$: $\Sigma_0(A) \rightleftharpoons \Pi_0(A) \rightleftharpoons A$, $\Sigma_{n+1}(A) \rightleftharpoons \Sigma(\Pi_n A)$, $\Pi_{n+1}(A) \rightleftharpoons \Pi(\Sigma_n A)$.

4. Введенные семейства упорядочены по включению следующим образом (включение обозначено стрелкой):

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma_1(A) \arrow[r] \arrow[ddr] & \Pi_2(A) \arrow[r] \arrow[ddr] & \Sigma_3(A) \arrow[r] \arrow[ddr] & \cdots \\
\Sigma_0(A)=\Pi_0(A) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & \Pi_1(A) \arrow[r] \arrow[uur] & \Sigma_2(A) \arrow[r] \arrow[uur] & \Pi_3(A) \arrow[r] \arrow[uur] & \cdots
\end{tikzcd}$$

5. Для всякого $n \geqslant 1$ имеем: $\Sigma_n(A) = \left\{ \bigcup\limits_{k_1} \bigcap\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \nu \langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle \,\middle|\, \nu \in H(A) \right\}$ (здесь $\bigcup\limits_{k_1} \bigcap\limits_{k_2} \ldots$ — чередующаяся последовательность, $\square$ обозначает $\cup$ при нечетном n и $\cap$ при четном, $\langle\ \ \rangle$ — канторовская нумерация) и, аналогично, $\Pi_n(A) = \left\{ \bigcap\limits_{k_1} \bigcup\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \nu \langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle \,\middle|\, \nu \in H(A) \right\}$.

Кроме того, очевидно, что можно «объединять» конечные последовательности одинаковых операций. Например, если $\nu \in H(A)$, то множество $\bigcap\limits_{k_1} \bigcap\limits_{k_2} \bigcup\limits_{k_3} \bigcup\limits_{k_4} \bigcup\limits_{k_5} \nu \langle k_1, \ldots, k_5 \rangle$ принадлежит семейству $\Pi_2(A)$.

6. Если $A^c \subseteq A$, то $(\Sigma_n A)^c = \Pi_n(A)$, $(\Pi_n A)^c = \Sigma_n(A)$ для всякого $n \in N$.

7. При $n \geqslant 2$ семейства $\Sigma_n(A)$, $\Pi_n(A)$, $\Sigma_n(A) \cap \Pi_n(A)$ являются решетками относительно $\cup$, $\cap$, а если $A^c \subseteq A$, то $\Sigma_n(A) \cap \Pi_n(A)$ есть булева алгебра относительно $\cup$, $\cap$, $^-$.

Замечание 1. Построенную классификацию можно известным образом продолжить по бесконечным ординалам.

Приведем теперь замечания о построении «малой» иерархии. Изложение тесно связано с [4].

Пусть семейство $A \subseteq \mathscr{P}(\varepsilon)$ является булевой алгеброй (и тогда все семейство $\Sigma_n(A) \cap \Pi_n(A)$, $n \geqslant 0$, являются булевыми алгебрами), n — фиксированное число $\geqslant 0$, $B \subseteq \Sigma_n(A) \cap \Pi_n(A)$ — σ-замкнутое относительно объединения семейство, содержащее ε (например, эти условия выполняются при $n \geqslant 2$, $B = \Sigma_{n-1}(A)$). Исходя из семейства B, построим некоторый класс семейств.

Пусть $(\xi;\ \preccurlyeq)$ — счетный линейный порядок с четностью (можно считать, что $\xi \subseteq N$, что и будем делать), ξ_0 — множество всех четных, ξ_1 — множество всех нечетных относительно порядка $\preccurlyeq$ элементов ξ. Определим число $i(\xi)$, называемое *четностью порядка* $\xi : i(\xi)$ равно 0, если порядок ξ содержит наибольший элемент и этот элемент четный, и 1 в противном случае. Если $i \in \{0, 1\}$, то $\tilde{i}$ обозначает 1 при $i = 0$ и 0 в противном случае.

С порядком ξ свяжем два отображения S_ξ, P_ξ из $H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$ в $\mathscr{P}\varepsilon$, определенные так: если $\nu \in H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$, $i = i(\xi)$, то

$$S_\xi(\nu) \rightleftharpoons \bigcup_{x \in \xi_i} \Big(\nu_x \setminus \bigcup_{y < x} \nu_y\Big), \quad P_\xi(\nu) \rightleftharpoons \bigcup_{x \in \xi_{\tilde{i}}} \Big(\nu_x \setminus \bigcup_{y < x} \nu_y\Big) \cup \Big(\varepsilon \setminus \bigcup_{x \in \xi} \nu_x\Big)$$

(выражение «$y < x$» означает, конечно, «$y \in \xi$, $y \preccurlyeq x$, $y \neq x$»). Иногда вместо $S_\xi(\nu)$, $P_\xi(\nu)$ удобно использовать обозначения $S_\xi\{\nu_x\}$, $P_\xi\{\nu_x\}$, где $\{\nu_x\}_{x \in \xi}$ — другое обозначение ξ-последовательности $\nu \in H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$. В § 3 нам понадобятся два довольно специфических свойства операций S_ξ, P_ξ, которые удобно сформулировать здесь. Доказательство ввиду простоты не приводим.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha \in H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$, $\beta \subseteq \varepsilon$, $\beta \cap \left(\bigcup\limits_{x\in\xi} \alpha_x\right) = \varnothing$. *Тогда*

$$S_\xi\{\alpha_x \cup \beta\} = \begin{cases} S_\xi\{\alpha_x\}, & \text{если } i(\xi)=1 \text{ или } \xi \text{ не имеет наименьшего элемента,} \\ S_\xi\{\alpha_x\}\cup\beta & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$P_\xi\{\alpha_x \cup \beta\} = \begin{cases} P_\xi\{\alpha_x\}, & \text{если } i(\xi)=1 \text{ и } \xi \text{ имеет наименьший элемент,} \\ P_\xi\{\alpha_x\}\setminus\beta & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть* ψ_k $(k\in N)$ — *последовательность взаимно однозначных отображений из множества* ε *в некоторое множество* ε' *такая, что* $k\neq l \Rightarrow \operatorname{rng}\psi_k \cap \operatorname{rng}\psi_l = \varnothing$. *Тогда для всякой последовательности* $\{\nu_{\langle k,x\rangle}\}_{k\in N,\, x\in\xi}$ *элементов из* $\mathscr{P}\varepsilon$ *имеем*:

$$S_\xi\left\{\bigcup_k \psi_k(\nu_{\langle k,x\rangle})\right\} = \bigcup_k \psi_k(S_\xi\{\nu_{\langle k,x\rangle}\}) \ (\psi_k(\nu_{\langle k,x\rangle}) \text{ — образ}),$$

$$P_\xi\left\{\bigcup_k \psi_k(\nu_{\langle k,x\rangle})\right\} = \bigcup_k \psi_k(P_\xi\{\nu_{\langle k,x\rangle}\}) \cup \left(\varepsilon \setminus \bigcup_k \operatorname{rng}\psi_k\right).$$

Определим семейства множеств $\Sigma_{(\xi)}$, $\Pi_{(\xi)}$:

$$\Sigma_{(\xi)} \rightleftharpoons \{S_\xi(\nu)\,|\,\nu\in H_\xi(B)\},\quad \Pi_{(\xi)} \rightleftharpoons \{P_\xi(\nu)\,|\,\nu\in H_\xi(B)\}.$$

Очевидно, если ограничиться только монотонными ξ-последовательностями $\{\nu_x\}_{x\in\xi}$, т. е. такими, что $x \preccurlyeq y \Rightarrow \nu_x \subseteq \nu_y$, то придем к тем же классам $\Sigma_{(\xi)}$, $\Pi_{(\xi)}$.

Следующие два свойства вытекают из условий на семейства A и B.

8. $\Sigma_{(\xi)} \cup \Pi_{(\xi)} \subseteq \Sigma_n(A)$ для всякого порядка ξ.

9. Если $(\xi;\ \preccurlyeq)$ вполне упорядочено, то $P_\xi(\nu) = \overline{S_\xi(\nu)}$ для всякого $\nu \in H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$, $\Pi_{(\xi)} = \Sigma^c_{(\xi)}$, $\Sigma_{(\xi)} \cup \Pi_{(\xi)} \subseteq \Sigma_n(A) \cap \Pi_n(A)$.

Пусть $(\zeta;\ \preccurlyeq)$ — другой счетный линейный порядок с четностью, и $(\xi;\ \preccurlyeq)$ вкладывается в $(\zeta;\ \preccurlyeq)$. Последнее означает существование функции h: $\xi \to \zeta$ такой, что для всех x, $y \in \xi$, $i \leqslant 1$ выполняются соотношения $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow hx \preccurlyeq hy$, $x \in \xi_i \Leftrightarrow hx \in \zeta_i$. При этих условиях найдется такое отображение $H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon) \to H_\zeta(\mathscr{P}\varepsilon)$, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[rr] \arrow[dr, "S_\xi"'] & & H_\zeta(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[dl, "S_\zeta"] \\ & \mathscr{P}\varepsilon & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[rr] \arrow[dr, "P_\zeta"'] & & H_\zeta(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[dl, "P_\zeta"] \\ & \mathscr{P}\varepsilon & \end{tikzcd}$$

коммутативны. Действительно, достаточно ξ-последовательности $\{\nu_x\}_{x\in\xi}$ поставить в соответствие ζ-последовательность $\{\nu'_z\}_{z\in\zeta}$, определенную так: $\nu'_z \rightleftharpoons \bigcup\limits_{hx\leqslant z} \nu_x$ при $i(\xi)=i(\zeta)$ и $\nu'_z \rightleftharpoons \bigcup\limits_{hx<z} \nu_x$ при $i(\xi)\neq i(\zeta)$. Из очевидного соотношения $\nu \in H_\xi(B) \Rightarrow \nu' \in H_\zeta(B)$ вытекает такое свойство.

10. Если ξ вкладывается в ζ, то $\Sigma_{(\xi)} \subseteq \Sigma_{(\zeta)}$, $\Pi_{(\xi)} \subseteq \Pi_{(\zeta)}$.

Определим по данному порядку ξ новый порядок ξ' следующим образом. Пусть g — общерекурсивная функция (орф), взаимно однозначно отображающая N на $N\setminus\{0\}$. Полагаем $\xi' \rightleftharpoons g(\xi) \cup \{0\}$. Порядок $\preccurlyeq'$ на ξ' определим так: если x, $y \in g(\xi)$, то $x \prec' 0$ и $x \preccurlyeq' y$ тогда и только тогда, когда $g^{-1}(x) \preccurlyeq g^{-1}(y)$ относительно порядка на ξ. Доказательство предложения 7 из [4, § 3] показывает, что найдется отображение $H^\xi(\mathscr{P}\varepsilon) \to H_{\xi'}(\mathscr{P}\varepsilon)$, для которого диаграммы

$$\begin{tikzcd} H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[rr] \arrow[dr, "S_\xi"'] & & H_{\xi'}(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[dl, "P_{\xi'}"] \\ & \mathscr{P}\varepsilon & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[rr] \arrow[dr, "P_\xi"'] & & H_{\xi'}(\mathscr{P}\varepsilon) \arrow[dl, "S_{\xi'}"] \\ & \mathscr{P}\varepsilon & \end{tikzcd}$$

коммутативны, причем это отображение переводит $H_\xi(B)$ в $H_{\xi'}(B)$. Отсюда и из свойства 10 вытекает следующее.

11. Если существует функция h, вкладывающая ξ в ζ, и такая, что $\exists z \in \zeta \forall x \in \xi (hx \prec z)$, то $\Sigma_{(\xi)} \cup \Pi_{(\xi)} \subseteq \Sigma_{(\zeta)} \cap \Pi_{(\zeta)}$.

Во второй части параграфа приведем конструктивные аналоги введенных классификаций. Основную роль при этом играют замечательные свойства классических нумерованных множеств $\mathbf{\Pi} = (\Pi, \pi)$, образованного семейством всех рпм Π и нумерацией Поста π, и $\mathbf{K} = (K, \varkappa)$, образованного семейством всех частично рекурсивных функций (чрф) K и нумерацией Клини $\varkappa$. Аналогом семейства $A \subseteq \mathscr{P}(\varepsilon)$ будет при этом нумерация $\alpha \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$, аналогом отношения включения семейств $A \subseteq B$ $(A,\ B \subseteq \mathscr{P}\varepsilon)$ — отношение сводимости нумераций $\alpha \leqslant \beta$ $(\alpha,\ \beta \in H(\mathscr{P}\varepsilon))$. Если $\alpha \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$, то α^c обозначает нумерацию, определенную соотношением $\alpha^c(n) \rightleftharpoons \overline{\alpha(n)}$.

Пусть α — фиксированная нумерация из $H(\mathscr{P}\varepsilon)$. С нумерацией α свяжем две новые нумерации $\Sigma^0(\alpha)$, $\Pi^0(\alpha)$, определенные так:

$$(\Sigma^0\alpha)\, n \rightleftharpoons \bigcup_{x \in \pi n} \alpha_x,\ (\Pi^0\alpha)\, n \rightleftharpoons \bigcap_{x \in \pi n} \alpha_x.$$

Нетрудно проверить, что нумерация $\Sigma^0\alpha$ $(\Pi^0\alpha)$ полная с особым объектом $\varnothing(\varepsilon)$.

Будем говорить, что нумерация $\alpha \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$ *замкнута относительно объединения*, если существует орф u, удовлетворяющая для любых $x, y \in N$ соотношению $\alpha_x \cup \alpha_y = \alpha_{u\langle x,\, y\rangle}$, и что нумерация α *σ-замкнута относительно объединения (пересечения)*, если $\Sigma^0\alpha \leqslant \alpha$ $(\Pi^0\alpha \leqslant \alpha)$.

Отметим простое, но существенное свойство нумерации $\Sigma^0\alpha$ $(\Pi^0\alpha)$, показывающее, что в случае $\varnothing \in \operatorname{rng}\alpha$ $(\varepsilon \in \operatorname{rng}\alpha)$ класс нумераций $\{\nu \in H(\mathscr{P}\varepsilon) \mid \nu \leqslant \Sigma^0\alpha\}$ $(\{\nu \in H(\mathscr{P}\varepsilon) \mid \nu \leqslant \Pi^0\alpha\})$, т. е. класс всех последовательностей, вычислимых относительно $\Sigma^0\alpha$ $(\Pi^0\alpha)$, полностью определяется классом $\{\mu \in H(\mathscr{P}\varepsilon) \mid \mu \leqslant \alpha\}$ всех последовательностей, вычислимых относительно α. А именно, для выполения соотношения $\nu \leqslant \Sigma^0\alpha$ $(\nu \leqslant \Pi^0\alpha)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала нумерация $\mu \leqslant \alpha$ такая, что $\nu_x = \bigcup\limits_y \mu\langle x, y\rangle$ $\left(\nu x = \bigcap\limits_y \mu\langle x, y\rangle\right)$ для любого $x \in N$.

На самом деле покажем, что это свойство выполняется эффективно, т. е. существуют морфизмы $\varphi \to \varphi'$, $\varphi \to \varphi''$ нумерованного множества $\mathbf{K}$ в себя такие, что если φ есть орф, то φ' — также орф и $(\Sigma^0\alpha)\,\varphi(x) = \bigcup\limits_y \alpha\varphi'\langle x, y\rangle$ $\left((\Pi^0\alpha)\,\varphi(x) = \bigcap\limits_y \alpha\varphi'\langle x, y\rangle\right)$ и φ'' есть орф, удовлетворяющая соотношению $\bigcup\limits_y \alpha\varphi\langle x, y\rangle = (\Sigma^0\alpha)\,\varphi''(x)$ $\left(\bigcap\limits_y \alpha\varphi\langle x, y\rangle = (\Pi^0\alpha)\,\varphi''(x)\right)$.

Для определения φ' выберем число m, для которого $\varnothing = \alpha_m$ $(\varepsilon = \alpha_m)$, и выберем такой способ перечисления по шагам $\{\pi_x^s\}$ нумерации π, что множество $\pi_x^s \setminus \pi_x^{s-1}$ при любых x, s содержит не более одного элемента. Функцию φ' определим так:

$$\varphi'\langle x, s\rangle \rightleftharpoons \begin{cases} \text{не определена, если } x \notin \operatorname{dom}\varphi, \\ m, \text{ если } x \in \operatorname{dom}\varphi \text{ и } \pi^s_{\varphi(x)} \setminus \pi^{s-1}_{\varphi(x)} \neq 0, \\ y, \text{ если } x \in \operatorname{dom}\varphi \text{ и } \pi^s_{\varphi(x)} \setminus \pi^{s-1}_{\varphi(x)} = \{y\}. \end{cases}$$

Функцию φ'' определим как любую орф, удовлетворяющую соотношению $\pi_{\varphi''(x)} = \{\varphi(x, y) \mid y \in N\}$.

Проверка того, что функции φ' и φ'' удовлетворяют сформулированным условиям, тривиальна.

В частности, из сказанного выше следует, что при $\varnothing \in \operatorname{rng}\alpha$ $(\varepsilon \in \operatorname{rng}\alpha)$ $\operatorname{rng}(\Sigma^0\alpha) = \left\{\bigcup\limits_x \mu_x \mid \mu \leqslant \alpha\right\}$ $\left(\operatorname{rng}(\Pi^0\alpha) = \left\{\bigcap\limits_x \mu_x \mid \mu \leqslant \alpha\right\}\right)$. В дальнейшем предполагается, что $\varnothing$, $\varepsilon \in \operatorname{rng}\alpha$.

Отметим еще ряд свойств введенных операций $\alpha \to \Sigma^0\alpha$, $\alpha \to \Pi^0\alpha$.

1^0. $\alpha \leqslant \Sigma^0\alpha$, $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \Sigma^0\alpha \leqslant \Sigma^0\beta$, $\Sigma^0(\Sigma^0\alpha) \leqslant \Sigma^0\alpha$ для любых $\alpha, \beta \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$, и аналогичные свойства выполнены для операции $\alpha \to \Pi^0\alpha$.

Действительно, легко видеть, что орф f, удовлетворяющая соотношению $\pi_{f(n)} = \{n\}$, сводит α к $\Sigma^0\alpha$ и $\Pi^0\alpha$; если орф g сводит α к β, то орф $\tilde{g}$, удовлетворяющая соотношению $\pi_{\tilde{g}(n)} = g(\pi_n)$, сводит $\Sigma^0\alpha$ к $\Sigma^0\beta$ и $\Pi^0\alpha$ к $\Pi^0\beta$; орф h, удовлетворяющая соотношению $\pi_{h(n)} = \bigcup\limits_{x \in \pi n} \pi_x$, сводит $\Sigma^0(\Sigma^0\alpha)$ к $\Sigma^0\alpha$ и $\Pi^0(\Pi^0\alpha)$ к $\Pi^0\alpha$.

Свойство 1^0 показывает, что $\Sigma^0\alpha$ ($\Pi^0\alpha$) есть наименьшая нумерация над α, σ-замкнутая относительно $\cup$ ($\cap$).

2^0. $(\Sigma^0\alpha)^c = \Pi^0(\alpha^c)$, $(\Pi^0\alpha)^c = \Sigma^0(\alpha^c)$.

3^0. Если α замкнута относительно пересечения (объединения), то такова же и $\Sigma^0\alpha$ ($\Pi^0\alpha$).

Действительно, если орф f представляет пересечение (объединение) в нумерации α, т. е. $\alpha_x \cap \alpha_y = \alpha_{f\langle x, y\rangle}$ ($\alpha_x \cup \alpha_y = \alpha_{f\langle x, y\rangle}$), то орф $\tilde{f}$, удовлетворяющая соотношению $\pi_{\tilde{f}\langle m,n\rangle} = f(\pi_m \times \pi_n)$, представляет пересечение (объединение) в нумерации $\Sigma^0\alpha$ ($\Pi^0\alpha$).

Определим нумерации σ_n^0, π_n^0 и семейства $\Sigma_n^0 \Pi_n^0$, ($n \in N$): $\sigma_0^0 \rightleftharpoons \pi_0^0 \rightleftharpoons \alpha$, $\sigma_{n+1}^0 \rightleftharpoons \Sigma^0(\pi_n^0)$, $\pi_{n+1}^0 \rightleftharpoons \Pi^0(\sigma_n^0)$, $\Sigma_n^0 \rightleftharpoons \operatorname{rng} \sigma_n^0$, $\Pi_n^0 \rightleftharpoons \operatorname{rng} \pi_n^0$. Нумерацию σ_n^0 (π_n^0) называем *канонической нумерацией семейства* Σ_n^0 (Π_n^0).

4^0. Введенные нумерации упорядочены по сводимости следующим образом (сводимость обозначена стрелкой):

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \sigma_1^0 \arrow[r] \arrow[ddr] & \pi_2^0 \arrow[r] \arrow[ddr] & \sigma_3^0 \arrow[r] \arrow[ddr] & \cdots \\
\sigma_0^0 = \pi_0^0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & \pi_1^0 \arrow[r] \arrow[uur] & \sigma_2^0 \arrow[r] \arrow[uur] & \pi_3^0 \arrow[r] \arrow[uur] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Следующее свойство доказывается простой индукцией по n с использованием свойства нумераций $\Sigma^0\alpha$, $\Pi^0\alpha$, отмеченного перед п. 1^0.

5^0. Для любого $n \geqslant 1$ и любой нумерации $\nu \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$ имеем: $\nu \leqslant \sigma$ ($\nu \leqslant \pi_n^0$) тогда и только тогда, когда найдется нумерация $\mu \leqslant \alpha$, такая что $\nu x = \bigcup\limits_{k_1} \bigcap\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \mu\langle x, k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle$ $\left(\nu x = \bigcap\limits_{k1} \bigcup\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \mu\langle x, k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle\right)$ для всех $x \in N$, и это свойство выполняется эффективно. В частности, $\Sigma_n^0 = \left\{ \bigcup\limits_{k_1} \bigcap\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \mu\langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle \mid \mu \leqslant \alpha \right\}$, $\Pi_n^0 = \left\{ \bigcap\limits_{k1} \bigcup\limits_{k_2} \ldots \mathop{\square}\limits_{k_n} \mu\langle k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle \mid \mu \leqslant \alpha \right\}$.

Кроме того, как и в свойстве 5, можно «склеивать» одинаковые операции. Например, если $\mu \leqslant \alpha$, то множество $\bigcup\limits_{k_1} \bigcup\limits_{k_2} \bigcap\limits_{k_3} \bigcup\limits_{k_4} \bigcup\limits_{k_5} \mu\langle k_1, \ldots, k_5\rangle$ принадлежит Σ_3^0.

6^0. Если $\alpha^c \leqslant \alpha$, то нумерация $(\sigma_n^0)^c$ эквивалентна нумерации π_n^0, а нумерация $(\pi_n^0)^c$ — нумерации σ_n^0 для всех $n \geqslant 0$. В частности, $(\Sigma_n^0)^c = \Pi_n^0$.

7^0. При $n \geqslant 2$ нумерации σ_n^0, π_n^0 замкнуты относительно $\cup$, $\cap$, а если $\alpha^c \leqslant \alpha$, то $\Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$ есть эффективная булева алгебра.

Эффективность понимается в следующем смысле. Назовем $\Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$-*индексом* множества $\tau \in \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$ любое число $\langle x, y\rangle$ такое, что $\tau = \sigma_n^0(x) = \pi_n^0(y)$. Операцию $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_m)$, действующую на $\Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$, считаем эффективной, если по любым индексам множеств $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$ эффективно находится некоторый индекс множества $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_m)$.

Перейдем к конструктивному аналогу малой иерархии. Пусть нумерация $\alpha \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$ замкнута относительно $\cup$, $\cap$, $^-$ (и тогда все семейства

$\Sigma_n \cap \Pi_n^0$, $n \geqslant 0$, являются эффективными булевыми алгебрами), n — фиксированное число $\geqslant 0$, и $\beta \in H(\mathscr{P}\varepsilon)$ — такая σ-замкнутая относительно объединения нумерация, что $\beta \leqslant \sigma_n^0$, $\beta \leqslant \pi_n^0$, $\varepsilon \in \operatorname{rng}\beta$ (например, эти условия выполняются при $n \geqslant 2$, $\beta = \sigma_{n-1}^0$).

Пусть $\alpha \in L_0$ — номер рекурсивного линейного порядка с четностью $(\xi; \preccurlyeq)$ (напомним, что все неопределяемые здесь понятия, касающиеся иерархии Ершова, содержатся в [4]). Свяжем с числом a семейства множеств $\Sigma_{(a)}$, $\Pi_{(a)}$ и некоторые их нумерации $\sigma_{(a)}$, $\pi_{(a)}$, которые будем называть *каноническими*. Обозначим через $J_\xi(\beta)$ класс всех ξ-последовательностей $\nu \in H_\xi(\mathscr{P}\varepsilon)$ таких, что $\nu \leqslant \beta$ (последнее означает существование чрф φ такой, что $\operatorname{dom}\varphi = \xi$ и $\nu_x = \beta\varphi(x)$ для всех $x \in \xi$). Положим $\Sigma_{(a)} \rightleftharpoons \{S_\xi(\nu) \mid \nu \in J_\xi(\beta)\}$, $\Pi_{(a)} \rightleftharpoons \{P_\xi(\nu) \mid \nu \in J_\xi(\beta)\}$. Как вытекает из известных результатов теории нумераций, из полноты нумерации β следует, что класс $J_\xi(\beta)$ имеет главную вычислимую относительно β нумерацию β' (вычислимость β' означает, что для некоторой чрф φ, $\operatorname{dom}\varphi = N \times \xi$, выполняется соотношение $\beta'_m(x) = \beta_{\varphi\langle m,x\rangle}$ $(m \in N,\ x \in \xi)$). Это позволяет определить нумерации $\sigma_{(a)}$ и $\pi_{(a)}$ так: $\sigma_{(a)}m \rightleftharpoons S_\xi(\beta'_m)$, $\pi_{(a)}m \rightleftharpoons P_\xi(\beta'_m)$. Из того, что нумерация β' полная с особым объектом $\{\iota_x\}_{x\in\xi}$, $\iota_x = \varnothing$, следует, что нумерация $\sigma_{(a)}$ $(\pi_{(a)})$ полная с особым объектом $\varnothing$ (ε). Из сказанного выше вытекает такое описание вычислимых относительно $\sigma_{(a)}$ $(\pi_{(a)})$ нумераций.

Для любого $a \in L_0$ имеем: $\nu \leqslant \sigma_{(a)}$ $(\nu \leqslant \pi_{(a)})$ тогда и только тогда, когда найдется такая нумерация $\mu \leqslant \beta'$, что $\nu_m = S_\xi(\mu_m)$ $(\nu_m = P_\xi(\mu_m))$, причем если g — орф, сводящая ν к $\sigma_{(a)}$ $(\pi_{(a)})$, то в качестве μ надо взять нумерацию $\beta' g$.

З а м е ч а н и е 2. Как и в [4], можно сначала показать, что семейство всех вычислимых монотонных ξ-последовательностей является r-подмножеством нумерованного множества $J_\xi(\beta)$, а затем определить каноническую нумерацию, используя главную вычислимую нумерацию всех вычислимых монотонных ξ-последовательностей. Полученные так нумерации будут изоморфны построенным.

Из определений и условий, наложенных на α и β, вытекает следующее.

8°. Для всякого $a \in L_0$ имеем $\sigma_{(a)} \leqslant \sigma_n^0$, $\pi_{(a)} \leqslant \sigma_n^0$. В частности, $\Sigma_{(a)} \cup \Pi_{(a)} \subseteq \Sigma_n^0$.

9°. Если $a \in W_0$, то $\sigma_{(a)}^c = \pi_{(a)}$, $\sigma_{(a)} \oplus \pi_{(a)} \leqslant \sigma_n^0$, $\sigma_{(a)} \oplus \pi_{(a)} \leqslant \pi_n^0$ ($\oplus$ — прямая сумма нумераций). В частности, $\Sigma_{(a)}^c = \pi_{(a)}$, $\Sigma_{(a)} \cup \Pi_{(a)} \subseteq \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$.

Пусть теперь $(\zeta; \preccurlyeq)$ — другой рекурсивный линейный порядок с четностью номера $b \in L_0$ и $a \prec\!\!\prec_0 b$. В этом случае, очевидно, отображение из $H_\xi(\mathscr{P}_\varepsilon)$ в $H_\zeta(\mathscr{P}_\varepsilon)$, определенное перед свойством 10 (точнее, сужение этого отображения на класс $J_\xi(\beta)$), является морфизмом из нумерованного множества $J_\xi(\beta)$ с нумерацией β' в нумерованное множество $J_\zeta(\beta)$. Отсюда получаем следующее свойство.

10°. Если a, $b \in L_0$, $a \prec\!\!\prec_0 b$, то $\sigma_{(a)} \leqslant \sigma_{(b)}$, $\pi_{(a)} \leqslant \pi_{(b)}$. В частности, $\Sigma_{(a)} \subseteq \Sigma_{(b)}$, $\Pi_{(a)} \subseteq \Pi_{(b)}$.

Так же устанавливается аналог свойства 11.

11°. Если a, $b \in L_0$, $a \prec\!\!\prec_0 b$, то $\sigma_{(a)} \oplus \pi_{(a)} \leqslant \sigma_{(b)}$, $\sigma_{(a)} \oplus \pi_{(a)} \leqslant \pi_{(b)}$. В частности, $\Sigma_{(a)} \cup \Pi_{(a)} \subseteq \Sigma_{(b)} \cap \Pi_{(b)}$.

З а м е ч а н и е 3. Когда в дальнейшем будем говорить о семействе $\Sigma_{(a)}$ $(a \in L_0)$ как о нумерованном множестве, будем подразумевать нумерованное множество $(\Sigma_{(a)}, \sigma_{(a)})$. Нумерации, сводящиеся к $\sigma_{(a)}$, будем также называть *вычислимыми* $\Sigma_{(a)}$-*последовательностями,* или даже просто $\Sigma_{(a)}$-последовательностями. То же относится к семействам $\Pi_{(a)}$, Σ_n^0, Π_n^0 и их каноническим нумерациям.

З а м е ч а н и е 4. Полная аналогия между неконструктивным и конструктивным случаями наводит на мысль, что оба они являются частными случаями некоторой более общей схемы построения иерархий. Такую схему действительно нетрудно сформулировать, но мы не будем здесь этим заниматься.

§ 2

В начале этого параграфа приведем простые замечания об индексных множествах (т. е. множествах вида $\pi^{-1}(A)$, $A \subseteq \Pi$) и Q-сводимости, а затем обратимся к вопросу о том, как описать строение семейств рпм, индексные множества которых принадлежат данному классу иерархии Клини — Мостовского, в терминах вполне перечислимых семейств рпм.

Пусть (Δ, δ) — нумерованное множество, составленное семейством всех конечных подмножеств N и сильно вычислимой нумерацией δ этого семейства. Применив схему из § 1 к нумерации $\alpha = \delta \oplus \delta^c$ семейства $\Delta \cup \Delta^c$ всех конечных множеств и их дополнений, получим последовательность нумераций σ_n^0, π_n^0 и семейств Σ_n^0, Π_n^0 $(n \in N)$ (очевидно, что на самом деле нумерации σ_1^0, π_2^0, σ_3^0, ... можно получить из одной нумерации δ, а нумерации π_1^0, σ_2^0, π_3^0, ... — из нумерации δ^c). Используя свойство 5^0 из § 1 и известные свойства иерархии Клини — Мостовского [1, с. 393, 394], легко проверить, что при $n \geqslant 1$ нумерации σ_n^0, π_n^0 изоморфны каноническим нумерациям соответствующих классов иерархии Клини — Мостовского, а значит, Σ_n^0, Π_n^0 $(n \geqslant 1)$ есть просто классы этой иерархии (таким образом, единственное отличие от определенной обычным способом иерархии состоит в классе Σ_0^0).

Хорошо известна [1, § 14.8] связь иерархии Клини — Мостовского со сводимостью по Тьюрингу и m-сводимостью. Имеется также некоторая связь этой иерархии с Q-сводимостью. Напомним, что множество α Q-сводится к множеству β $(\alpha \leqslant_Q \beta)$, если существует орф f, удовлетворяющая для всякого x соотношению $x \in \alpha \Leftrightarrow \pi_{f(x)} \subseteq \beta$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Для принадлежности множества семейству* Π_n^0 $(n \geqslant 1)$ *необходимо и достаточно, чтобы оно Q-сводилось к некоторому* Σ_{n-1}^0*-множеству.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточности достаточно проверить, что из $\alpha \in \Pi_n^0$, $\beta \leqslant_Q \alpha$ следует $\beta \in \Pi_n^0$. Если орф f осуществляет Q-сводимость β к α, то имеем $x \in \beta \Leftrightarrow \forall y(y \in \pi_{f(x)} \Rightarrow y \in \alpha)$, откуда сразу следует $\beta \in \Pi_n^0$.

Докажем необходимость. Пусть β — любое множество из Π_n^0, α — Σ_{n-1}^0-полное множество. Достаточно доказать, что $\beta \leqslant_Q \alpha$. Поскольку $\beta \in \Pi_n^0$, то $\beta = \bigcap\limits_x \nu_x$ для некоторой Σ_{n-1}^0 -последовательности множеств $\{\nu_x\}$. Поскольку α является Σ_{n-1}^0 -полным, Σ_{n-1}^0 -последовательность $\{\nu_x\}$ равномерно m-сводится к α, т. е. существует орф g, удовлетворяющая для любых x, $y \in N$ соотношению $y \in \nu_x \Leftrightarrow g\langle x, y\rangle \in \alpha$. Имеем: $y \in \beta \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall x(y \in \nu_x) \Leftrightarrow \forall x(g\langle x, y\rangle \in \alpha)$. Отсюда следует, что любая орф h, удовлетворяющая соотношению $\pi_{h(y)} = \{g\langle x, y\rangle \mid x \in N\}$, осуществляет Q-сводимость β к α. Предложение доказано.

Как известно, множество α S-сводится к множеству β, если и только если $\overline{\alpha} \leqslant_Q \overline{\beta}$ (конечно, $\overline{\alpha} = N \setminus \alpha$).

С л е д с т в и е 1. *Для принадлежности множества семейству* Σ_n^0 $(n \geqslant 1)$ *необходимо и достаточно, чтобы оно S-сводилось к некоторому* Π_{n-1}^0*-множеству.*

Следствие 2. *Для того чтобы множество α имело тьюрингову степень $\leqslant o^{(n)}$ $(n \in N)$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого Σ_n^0-множества β выполнялись соотношения $\alpha \leqslant_Q \beta$, $\alpha \leqslant_S \bar{\beta}$.*

В [6] было введено отношение предпорядка $\leqslant_M$ на $\mathscr{P}(\Pi)$, названное *сводимостью морфизмами*, которое является аналогом m-сводимости для нумерованного множества $\mathbf{\Pi}$. Если A, $B \subseteq \Pi$, то говорим, что семейство A *M-сводится* к семейству B $(A \leqslant_M B)$, если найдется такой морфизм $\Phi : \mathbf{\Pi} \to \mathbf{\Pi}$, что $A = \Phi^{-1}(B)$ (конечно, это определение применимо к любому нумерованному множеству).

Отметим некоторую связь Q-сводимости с M-сводимостью. Всякому множеству $\alpha \subseteq N$ сопоставим семейство $P_\alpha \rightleftharpoons \{\sigma \in \Pi \mid \sigma \subseteq \alpha\}$. Легко проверить, что для любых α, $\beta \subseteq N$ выполняются соотношения $\alpha \leqslant_Q \beta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P_\alpha \leqslant_M P_\beta \Leftrightarrow \pi^{-1}(P_\alpha) \leqslant_m \pi^{-1}(P_\beta)$. Легко видеть также, что множество $\pi^{-1}(P_\alpha)$ является цилиндрификацией множества α относительно Q-сводимости. В сделанных замечаниях содержится следующее утверждение.

Предложение 2. 1) *Отображение $\alpha \to P_\alpha$ есть эквивалентность предупорядоченного множества $(\mathscr{P}(N); \leqslant_Q)$ на некоторый подобъект предупорядоченного множества $(\mathscr{P}(\Pi); \leqslant_M)$.*

2) *Отображение $\alpha \to \pi^{-1}(P_\alpha)$ (точнее, сужение этого отображения на семейства Π_n^0) есть морфизм из нумерованного множества Π_n^0 $(n \geqslant 1)$ в себя, причем если α — Σ_{n-1}^0-полное множество, то $\pi^{-1}(P_\alpha)$ — Π_n^0-полное множество.*

Отсюда вытекает следующее замечание, указывающее просто описываемую последовательность индексных Π_n^0 -полных множеств, см. [1, с. 421].

Следствие 3. *Пусть $\{\gamma_n\}_{n \in N}$ — последовательность множеств, определенная так: $\gamma_0 \rightleftharpoons N$, $\gamma_{n+1} \rightleftharpoons \pi^{-1}(P_{\bar{\gamma}_n})$. Тогда γ_n есть Π_n^0-полное множество для любого $n \geqslant 1$.*

Обратимся теперь к вопросу о том, как устроены семейства рпм, принадлежащие классам $\widehat{\Sigma}_n^0 \rightleftharpoons \{X \subseteq \Pi \mid \pi^{-1}(X) \in \Sigma_n^0\}$ (определение классов $\widehat{\Pi}_n^0$ аналогично). Введем некоторые, необходимые для дальнейшего определения. *Базисными открытыми семействами* называем семейства рпм вида $D_\gamma \rightleftharpoons \{\alpha \in \Pi \mid \gamma \subseteq \alpha\}$, где γ — конечное множество $(\gamma \in \Delta)$. *Канонической нумерацией* класса $\mathscr{D}$ всех базисных открытых семейств назовем нумерацию $D : N \to \mathscr{D}$, определенную так: $D_n \rightleftharpoons D_{\delta(n)}$ (δ — нумерация семейства Δ). Используя определения из § 1, введем следующие классы и нумерации: $\mathscr{S} \rightleftharpoons \Sigma(\mathscr{D})$ будем называть *классом всех открытых семейств*, $\mathscr{S}^0 \rightleftharpoons \mathrm{rng}(\Sigma^0 D)$ — *классом всех эффективно открытых семейств*. Нумерацию $\Sigma^0 D$ будем называть *канонической нумерацией класса* $\mathscr{S}^0$ (напомним, что эта нумерация σ-замкнута относительно объединения). Пусть, далее, $\mathscr{B}$ — булева алгебра, порожденная классом $\mathscr{S}$ внутри булевой алгебры $\mathscr{P}(\Pi)$, $\mathscr{B}^0$ — булева алгебра, порожденная классом $\mathscr{S}$ внутри $\mathscr{P}(\Pi)$, B^0 — каноническая нумерация класса $\mathscr{B}^0$, индуцированная нумерацией $\Sigma^0 D$ (она получается из нумерации термов; очевидно, что $(B^0)^c \leqslant B^0$, см. § 1).

Теорема Райса [1, § 14.8, теорема XIV] решает поставленную выше задачу об описании семейств из $\widehat{\Sigma}_n^0$ для $n = 0,1$: $\widehat{\Sigma}_0^0 = \{\varnothing, \Pi\}$, $\widehat{\Sigma}_1^0 = \mathscr{S}^0$. Мы изучим вопрос о возможности описания семейств из $\widehat{\Sigma}_n^0$ $(n \geqslant 2)$ в терминах эффективно открытых семейств. Поскольку класс эффективно открытых семейств снабжен канонической нумерацией $\Sigma^0 D$, то естественно ожидать, что простое структурное описание $\widehat{\Sigma}_n^0$ -семейств в терминах эффективно открытых семейств привело бы к некоторой «хорошей» индуцированной нумерации класса $\widehat{\Sigma}_n^0$. В соответствии с этим в приводимой ниже теореме 1 мы решим вопрос о том, имеет ли семейство всех индексных множеств из Σ_n^0 главную Σ_n^0-вычислимую нумерацию. Однако сначала приведем необходимые для дальнейшего определения и свойства операций U_i^j $(i, j \leqslant 1)$, введенных в [6].

Определим для всякого $m \geqslant 1$ четыре операции U_i^j $(i, j \leqslant 1)$ из $\mathscr{P}(\mathscr{P}N)^{m+1}$ в $\mathscr{P}(\mathscr{P}N)$. Пусть $\{\rho_0, \ldots, \rho_m\}$ — разбиение множества N на непересекающиеся бесконечные рекурсивные множества, a_k — наименьший элемент в ρ_k, g_k — орф, взаимно однозначно отображающая N на $\rho_k \setminus \{a_k\}$ $(k \leqslant m)$. Полагаем:

$$F \rightleftharpoons \{\alpha \subseteq N / (\exists_k \leqslant m)(\alpha \subseteq \rho_k \wedge a_k \notin \alpha)\}, \quad G_k \rightleftharpoons \{\alpha \subseteq N | a_k \in \alpha \subseteq \rho_k\} \ (k \leqslant m),$$

$$G \rightleftharpoons \bigcup_{k \leqslant m} G_k, H \rightleftharpoons \overline{F \cup G}, F' \rightleftharpoons F \cap \Pi, G_k' \rightleftharpoons G_k \cap \Pi, \ G' \rightleftharpoons G \cap \Pi, H' \rightleftharpoons H \cap \Pi.$$

Для всякого $k \leqslant m$ определим оператор перечисления Ψ_k следующим образом: $\Psi_k(\alpha) \rightleftharpoons \{a_k\} \cup g_k(\alpha)$, $\alpha \subseteq N$. Очевидно, Ψ_k есть изоморфизм булевых алгебр $\mathscr{P}(N)$ и G_k, причем Ψ_k сохраняет многие свойства множеств (например, сохраняет все семейства Σ_n^0, Π_n^0). Отображение, переводящее семейство $A \subseteq \mathscr{P}(N)$ в образ $\Psi_k(A)$, сохраняет многие свойства семейств множеств, например классы $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}^0$. Для § 3 существенно отметить, что если $A \in \mathscr{S}^0$, то $\Psi_k(A) \cup H' \in \mathscr{S}^0$. Сужение отображения Ψ_k на семейство Π будем обозначать Ψ_k' (очевидно, Ψ_k' есть морфизм из Π в G_k' со стандартной нумерацией).

Операции U_i^j определим для любых $A_0, \ldots, A_m \subseteq \Pi$ (на самом деле можно брать любые $A_0, \ldots, A_m \subseteq \mathscr{P}(N)$, только вместо H', F', Ψ_k' надо в приводимых соотношениях взять H, F, Ψ_k) соотношениями:

$$U_0^0(A_0, \ldots, A_m) \rightleftharpoons \bigcup_{k \leqslant m} \Psi_k'(A_k), U_0^1(A_0, \ldots, A_m) \rightleftharpoons U_0^0 A_0, \ldots, A_m) \cup H',$$

$$U_1^0(A_0, \ldots, A_m) \rightleftharpoons U_0^0(A_0, \ldots, A_m) \cup F', \ U_1^1(A_0, \ldots, A_m) \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons U_0^0(A_0, \ldots, A_m) \cup H' \cup F'.$$

Аналогичным образом определяются операции $U_i^j(A_0, A_1, \ldots)$ для бесконечных последовательностей семейств $\{A_k\}_{k \in N}$. В этом случае надо взять разбиение N на бесконечные рекурсивные множества $\{\rho_k\}_{k \in N}$ такое, что последовательность прямых пересчетов множеств ρ_k вычислима, и заменить в определениях «$k \leqslant m$» на «$k \in N$». Существенно отметить, что в этом случае $\{\Psi_k\}_{k \in N}$ есть вычислимая последовательность операторов перечисления. Поэтому если $\{A_k\}_{k \in N}$ есть вычислимая (относительно нумерации $\Sigma^0 D$) последовательность семейств из $\mathscr{S}^0$, то $\{\Psi_k'(A_k) \cup H'\}$ —также вычислимая $\mathscr{S}^0$-последовательность; если $\{A_k\}$ есть $\mathscr{B}^0$-последовательность, то и $\{\Psi_k'(A_k)$ есть $\mathscr{B}^0$-последовательность.

Докажем теперь первую теорему.

Теорема 1. 1) *Семейство всех индексных множеств из Σ_n^0 является r-подмножеством нумерованного множества Σ_n^0 при $n = 1$, $n \geqslant 3$.*

2) *Семейство всех индексных множеств из Σ_2^0 не имеет Σ_2^0-вычислимой нумерации.*

Доказательство. 1) Пусть $n = 1$. Определим отображение $\Phi: \Sigma_1^0 \to \Sigma_1^0$ следующим образом. Пусть d — орф, сводящая нумерацию δ к нумерации π. Для данного $\alpha \in \Sigma_1^0$ положим $\Phi(\alpha) \rightleftharpoons \pi^{-1}\left(\bigcup_{d(n) \in \alpha} D_n\right)$.

Очевидно, Φ есть морфизм из нумерованного множества Σ_1^0 в себя. Из теоремы Райса следует, что если β есть индексное множество, то $\Phi(\beta) = \beta$. Это показывает, что $\operatorname{rng} \Phi$ состоит в точности из всех индексных множеств, входящих в Σ_1^0, причем $\Phi(\Phi_\alpha) = \Phi_\alpha$ для любого $\alpha \in \Sigma_1^0$, что и требовалось.

Пусть теперь $n \geqslant 3$. С каждым множеством α свяжем семейство $C_\alpha \rightleftharpoons \{\pi_x | x \in \alpha\}$. Определим операцию Φ на Σ_n^0 соотношением $\Phi(\alpha) \rightleftharpoons \pi^{-1}(C_\alpha)$. Имеем $y \in \Phi(\alpha) \Leftrightarrow \pi_y \in C_\alpha \Leftrightarrow \exists_x (x \in \alpha \wedge \pi_x = \pi_y)$. Так как $n \geqslant 3$ и «$\pi_x = \pi_y$» есть Π_2^0-отношение, Φ есть морфизм из нумерованного множества Σ_n^0 в себя. Если β — индексное множество, т. е. $\beta = \pi^{-1}(B)$ для некоторого $B \subseteq \Pi$, то очевидно, что $C_\beta = B$ и потому $\Phi(\beta) = \beta$. Это означает, что $\mathrm{rng}\Phi$ состоит в точности из всех индексных множеств, входящих в Σ_n^0, причем $\Phi(\Phi\alpha) = \Phi\alpha$ для любого $\alpha \in \Sigma_n^0$, что и требовалось.

Вместо доказательства утверждения 2) докажем более сильный факт: существует эффективная процедура, которая по каждой Σ_2^0-последовательности индексных множеств $\{\alpha_k\}_{k \in N}$ выдает индексное множество $\beta \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$, не принадлежащее этой последовательности (это означает продуктивность семейства индексных множеств из $\Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$ в некотором сильном смысле). Фиксируем эффективный относительно o' способ перечисления по шагам $\{\alpha_k^t\}$ последовательности $\{\alpha_k\}$. Пусть F', H', G_k' $(k \in N)$ — последовательность семейств из определения операций U_i^j. Очевидно, все эти семейства лежат в $\mathscr{B}^0$, поэтому можно выбрать эффективные относительно o' способы перечисления по шагам $\{\tau^s\}$ множества $\tau \rightleftharpoons \pi^{-1}(F' \cup H')$ и $\{\sigma_k^s\}$ последовательности множеств $\{\sigma_k\}, \sigma_k \rightleftharpoons \pi^{-1}(G_k')$. Пусть, наконец, h — орф, сводящая последовательность рекурсивных множеств $\{\rho_k\}$ к нумерации π, $\rho_k = \pi_{h(k)}$.

Остается построить по шагам индексное множество β, отличающееся от всех α_k, и такое, что как β, так и $\bar\beta$ рекурсивно перечислимы относительно o'. Приведем эффективные относительно o' инструкции для вычисления конечных множеств β^s, γ^s на шаге s с таким расчетом, чтобы получить $\beta = \bigcup_s \beta^s, \bar\beta = \bigcup_s \gamma^s$.

Положим $\beta^{-1} \rightleftharpoons \gamma^{-1} \rightleftharpoons \varnothing$. На шаге $s \geqslant 0$, $s = \langle k, t \rangle$, возможны следующие случаи.

Случай 1. $h(k) \notin \alpha_k^t$.

Полагаем $\beta^s \rightleftharpoons \beta^{s-1} \cup \sigma_k^s$, $\gamma^s \rightleftharpoons \gamma^{s-1} \cup \tau^s$.

Случай 2. $h(k) \in \alpha_k^t \setminus \alpha_k^{t-1}$.

Перечисляя множество α_k, находим (первое в этом процессе) число x_k такое, что $d(x_k) \in \alpha_k$, $\delta(x_k) \in G_k'$, $\delta(x_k) \notin \{\pi_y | y \in \beta^{s-1}\}$ (напомним, что d — орф, сводящая δ к π). Такое число x_k существует, так как в силу леммы 3 из [7] всякое семейство $A \in \hat\Sigma_2^0$, содержащее бесконечное множество ξ, содержит бесконечно много конечных подмножеств этого множества, включающих фиксированное конечное множество $\theta \subseteq \xi$ (в данном случае семейство A_k, для которого $\alpha_k = \pi^{-1}(A_k)$, содержит множество ρ_k, $\theta = \{a_k\}$). Полагаем $\beta^s \rightleftharpoons \beta^{s-1} \cup \{y \in \sigma_k^s | \pi_y \neq \delta(x_k)\}$, $\gamma^s \rightleftharpoons \gamma^{s-1} \cup \tau^s \cup \{y \leqslant s | \pi_y = \delta(x_k)\}$.

Случай 3. Не имеют места случаи 1 и 2.

Множества β^s, γ^s определим так же, как в конце случая 2 (число x_k будет уже определено на некотором шаге $s' < s$, $s' = \langle k, t' \rangle$).

Приведенные инструкции эффективны относительно o', так как отношение «$\pi_y = \delta_x$» эффективно относительно o'. Поэтому множества $\beta \rightleftharpoons \bigcup_s \beta^s$, $\gamma \rightleftharpoons \bigcup_s \gamma^s$ принадлежат Σ_2^0. Из определения множеств β^s, γ^s очевидно, что $\beta \cap \gamma = \varnothing$, $\beta \cup \gamma = N$, поэтому $\beta \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$. То, что β есть индексное множество, тоже очевидно из определения β^s, γ^s. Остается проверить, что $\beta \neq \alpha_k$ для всякого $k \in N$. Возможны два случая: $h(k) \notin \alpha_k$ (т. е. множество ρ_k не принадлежит тому семейству $A_k \subseteq \Pi$, для которого $\alpha_k = \pi^{-1}(A_k)$), и $h(k) \in \alpha_k$ (т. е. $\rho_k \in A_k$). В первом случае на всех шагах s, $s = \langle k, t \rangle$, выполняется случай 1 инструкций и потому $\pi^{-1}(G'_k)=\sigma_k \subseteq \beta$. В частности, множество ρ_k из G'_k принадлежит тому семейству $B\subseteq\Pi$, для которого $\beta=\pi^{-1}(B)$. Поэтому $h(k)\in\beta\setminus\alpha_k$, $\beta\neq\alpha_k$. Если $h(k)\in\alpha_k$, то на том шаге $s=\langle k, t\rangle$, для которого $h(k)\in\alpha_k^t\setminus\alpha_k^{t-1}$, будет определено число x_k. Очевидно, $\delta(x_k)\in A_k$. Из построения множеств β^s, γ^s на последующих шагах $s'>s$, $s'=\langle k, t'\rangle$, очевидно, что $\delta(x_k)\notin B$, и потому $d(x_k)\in\alpha_k\setminus\beta$, $\alpha_k\neq\beta$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Классы* $\widehat{\Sigma}_n^0$ $(n=1,\ n\geqslant 3)$ *можно снабдить такими нумерациями (будем называть их каноническими), что нумерованное множество* $\widehat{\Sigma}_n^0$ *будет ретрактом нумерованного множества* Σ_n^0.

Теорема 1 показывает, что трудно рассчитывать на получение простого описания семейств из $\widehat{\Sigma}_2^0$ в терминах эффективно открытых семейств, но можно попытаться найти такое описание для семейств из $\widehat{\Sigma}_n^0$ при $n\geqslant 3$. Как искать такое описание? Наиболее естественный путь — построить, следуя п. 4°, § 1, иерархию семейств рпм, исходя из канонической нумерации класса $\mathscr{S}^0$. Поскольку эта иерархия и иерархия Клини — Мостовского строятся по единой схеме и $\mathscr{S}^0=\widehat{\Sigma}_1^0$, естественно ожидать тесной связи между классами $\widehat{\Sigma}_n^0$ и классами этой новой иерархии. Однако очевидно, что это не так: в полученную таким способом иерархию войдут лишь такие семейства рпм A, что из $\alpha\in A$, $\beta\in\Pi$, $\alpha\subseteq\beta$ следует $\beta\in A$, а для семейств из $\widehat{\Sigma}_n^0$ $(n\geqslant 2)$ это, конечно не так. Поэтому модифицируем нашу идею следующим образом. Построим иерархию семейств исходя не из канонической нумерации класса $\mathscr{S}^0$, а из канонической нумерации B^0 класса $\mathscr{B}^0$ (определения см. перед теоремой 1). Классы этой иерархии обозначаем $\widetilde{\Sigma}_n^0, \widetilde{\Pi}_n^0$ $(n\geqslant 1)$. Таким образом, каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}_1^0$ — это $\Sigma^0(B^0)$, каноническая нумерация класса $\widetilde{\Pi}_3^0$ — это $\Pi^0\Sigma^0\Pi^0(B^0)$ и т. д. Поскольку $(B^0)^c\leqslant B^0$, из 6°, § 1, следует $(\widetilde{\Sigma}_n^0)^c = \widetilde{\Pi}_n^0$, $(\widetilde{\Pi}_n^0)^c=\widetilde{\Sigma}_n^0$ $(n\geqslant 1)$. Положим еще $\widetilde{\Sigma}_0^0 \rightleftarrows \mathscr{S}^0$, $\widetilde{\Pi}_0^0\rightleftarrows(\widetilde{\Sigma}_0^0)^c$ (в определении $\widetilde{\Sigma}_0^0$ мы отступаем от обозначений § 1). Все классы $\widetilde{\Sigma}_n^0, \widetilde{\Pi}_n^0$ $(n\geqslant 0)$ снабжены каноническими нумерациями.

Поскольку иерархия $\widetilde{\Sigma}_n^0$ построена по той же схеме, что и иерархия Клини — Мостовского, а M-сводимость является аналогом m-сводимости, естественно ожидать связи между иерархией $\widetilde{\Sigma}_n^0$ и M-сводимостью, аналогичной связи иерархии Клини — Мостовского с m-сводимостью.

Теорема 2. *Для всякого* $n\in N$ *существует семейство* $V_n\subseteq\Pi$ *такое, что* $\widetilde{\Sigma}_n^0=\{X\subseteq\Pi\mid X\leqslant_M V_n\}$, $\widetilde{\Pi}_n^0=\{X\subseteq\Pi\mid X\leqslant_M \overline{V}_n\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что из $A\in\widetilde{\Sigma}_n^0$, $B\leqslant_M A$ следует $B\in\widetilde{\Sigma}_n^0$ и аналогично для $\widetilde{\Pi}_n^0$. Это доказывается индукцией по n. Пусть Φ — морфизм в $\mathbf{\Pi}$ в себя, для которого $B=\Phi^{-1}(A)$. Если $n=0$, т. е. A эффективно открыто, то непосредственно очевидно, что $B\in\widetilde{\Sigma}_0^0$. Ясно, кроме того, что отображение $(A,\ \Phi)\to\Phi^{-1}(A)$ есть морфизм из произведения нумерованных множеств $\widetilde{\Sigma}_0^0\times\mathbf{\Phi}$ в $\widetilde{\Sigma}_0^0$, где $\mathbf{\Phi}$ — множество всех морфизмов из $\mathbf{\Pi}$ в $\mathbf{\Pi}$ с главной вычислимой нумерацией. Далее, если $A\in\mathscr{B}^0$, то $\Phi^{-1}(A)\in\mathscr{B}^0$, причем $(A,\ \Phi)\to\Phi^{-1}(A)$ есть морфизм из $\mathscr{B}^0\times\mathbf{\Phi}$ в $\mathscr{B}^0$. Если $A\in\widetilde{\Sigma}_1^0$, то $A=\bigcup\limits_x A_x$ для некоторой $\mathscr{B}^0$-последовательности семейств $\{A_x\}$. Но тогда, очевидно, $\Phi^{-1}(A)=\bigcup\limits_x\Phi^{-1}(A_x)$, причем в силу сделанного замечания последовательность $\{\Phi^{-1}(A_x)\}$ вычислима относительно $\mathscr{B}^0$, т. е. $\Phi^{-1}(A)\in\widetilde{\Sigma}_1^0$, причем $(A,\ \Phi)\to\Phi^{-1}(A)$ есть, очевидно, морфизм из $\widetilde{\Sigma}_1^0\times\mathbf{\Phi}$ в $\widetilde{\Sigma}_1^0$. Индукционный шаг рассматривается аналогично.

Остается показать, что в каждом классе $\widetilde{\Sigma}_n^0$ $(n \geqslant 0)$ имеется наибольшее по M-сводимости семейство. При $n=0$ это понятно: любое эффективно открытое семейство, отличное от $\varnothing$ и Π, является наибольшим по M-сводимости в $\widetilde{\Sigma}_0^0$. Пусть $n>0$ и A — каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}_n^0$. Положим $V_n \rightleftharpoons U_0^0(A_0, A_1, \ldots)$ (можно брать операцию U_i^j с любыми $i, j \leqslant 1$). Очевидно, что морфизм Ψ_k' осуществляет M-сводимость A_k к V_n для любого $k \in N$, поэтому остается проверить, что $V_n \in \widetilde{\Sigma}_n^0$. По определению $V_n = \bigcup\limits_k \Psi_k'(A_k)$, а из сказанного перед теоремой 1 следует, что отображение $X \to \Psi_k'(X)$ сохраняет все классы $\widetilde{\Sigma}_n^0, \widetilde{\Pi}_n^0$ $(n \geqslant 1)$, причем $\{\Psi_k'(A_k)\}$ есть $\widetilde{\Sigma}_n^0$- -последовательность. Теорема доказана.

Следствие 5 (теорема об иерархии). $\widetilde{\Sigma}_n^0 \not\subseteq \widetilde{\Pi}_n^0$ $(n \in N)$.

В приводимой ниже теореме 3 мы изучим вопрос о связи между классами $\widetilde{\Sigma}_n^0$ и $\widehat{\Sigma}_{n+1}^0$ $(n \in N)$, но сначала приведем два вспомогательных утверждения. Последовательность семейств рпм $\{A_x\}$ называем Σ_n^0 *-последовательностью,* если последовательность множеств $\{\pi^{-1}(A_x)\}$ сводится к канонической нумерации семейства Σ_n^0, аналогично для Π_n^0.

Предложение 3. *Для принадлежности семейства рпм классу* $\widehat{\Sigma}_n^0$ $(n \geqslant 3)$ *необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в виде объединения некоторой* Π_{n-1}^0- *последовательности конечных семейств.*

Доказательство. Очевидно, что если $\{A_k\}$ — Σ_n^0 -последовательность семейств, то $\bigcup\limits_k A_k$, принадлежит $\widehat{\Sigma}_n^0$, поэтому достаточность проверять не нужно. Докажем необходимость. Пусть $A \in \widehat{\Sigma}_n^0$, $n \geqslant 3$. Тогда $\pi^{-1}(A) = \bigcup\limits_k \alpha_k$ для некоторой Π_{n-1}^0- -последовательности множеств $\{\alpha_k\}$. Положим $\beta_{\langle k, s\rangle} \rightleftharpoons \{x \leqslant s | x \in \alpha_k\}$. Очевидно, $\{\beta_{\langle k,s\rangle}\}$ — Π_{n-1}^0- последовательность конечных множеств и $\pi^{-1}(A) = \bigcup\limits_{k,s} \beta_{\langle k,s\rangle}$. Положим $A_{\langle k, s\rangle} \rightleftharpoons \{\pi_x | x \in \beta_{\langle k, s\rangle}\}$. Имеем $y \in \pi^{-1}(A_{\langle k, s\rangle}) \Leftrightarrow \pi_y \in A_{\langle k, s\rangle} \Leftrightarrow (\exists x \leqslant s)(x \in \alpha_k \wedge \pi_y = \pi_x)$. Поскольку «$\pi_y = \pi_x$» есть Π_2^0 -отношение и $n \geqslant 3$, заключаем, что $\{A_{\langle k, s\rangle}\}$ есть Π_{n-1}^0- последовательность семейств. Очевидно, что $A = \bigcup\limits_{k,s} A_{\langle k,s\rangle}$. Предложение доказано.

Следствие 6. *Для принадлежности семейства рпм классу* $\widehat{\Sigma}_n^0$ $(\widehat{\Pi}_n^0)$ *при* $n \geqslant 3$ *необходимо и достаточно, чтобы оно представлялось в виде объединения (пересечения) некоторой* $\Pi_{n-1}^0(\Sigma_{n-1}^0)$ *-последовательности семейств рпм.*

Семейство рпм A назовем *аппроксимируемым*, если для всякого $\alpha \in A$ найдется конечное множество $\gamma \subseteq \alpha$ такое, что для любого $\beta \in \Pi$ из $\gamma \subseteq \beta \subseteq \alpha$ следует $\beta \in A$. Следующее утверждение ввиду его простоты приведем без доказательства.

Предложение 4. 1) *Семейство рпм аппроксимируемо тогда и только тогда, когда оно принадлежит классу* $\Sigma(\mathscr{B})$.

2) *Если семейства рпм* A, B *принадлежат классу* $\Sigma(\mathscr{B}) \cap \Pi(\mathscr{B})$ *и* $A \cap \Delta = B \cap \Delta$, *то* $A = B$.

Следствие 7. 1) *Всякое семейство из* $\widetilde{\Sigma}_1^0$ *аппроксимируемо.*

2) *Если* $A, B \in \widetilde{\Sigma}_1^0 \cap \widetilde{\Pi}_1^0$, $A \cap \Delta = B \cap \Delta$, *то* $A = B$.

Изучим теперь связь между классами $\widetilde{\Sigma}_n^0$ и $\widehat{\Sigma}_{n+1}^0$.

Теорема 3. 1) *При* $n=0$, $n \geqslant 2$ *канонические нумерации классов* $\widetilde{\Sigma}_n^0$ и $\widehat{\Sigma}_{n+1}^0$ *изоморфны. В частности,* $\widetilde{\Sigma}_n^0 = \widehat{\Sigma}_{n+1}^0$.

2) $\widetilde{\Sigma}_1^0 \subseteq \widehat{\Sigma}_2^0$, $\widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0 \not\subseteq \widetilde{\Sigma}_1^0 \cup \widetilde{\Pi}_1^0$.

Доказательство. 1) При $n=0$ утверждение есть следствие теоремы Райса. Для доказательства того, что каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}_n^0$ сводится к канонической нумерации класса $\widehat{\Sigma}_{n+1}^0$ при $n \geqslant 2$ и что $\widetilde{\Sigma}_1^0 \subseteq \widehat{\Sigma}_2^0$, достаточно (в силу теоремы 1) проверить, что отображение $A \to \pi^{-1}(A)$ есть морфизм из $\widetilde{\Sigma}_n^0$ в Σ_{n+1}^0 при $n \geqslant 0$. При $n=0$ это очевидно. Если $n \geqslant 1$, то (см. 5°, § 1) семейство $A \in \widetilde{\Sigma}_n^0$ представимо в виде $A = \bigcup\limits_{k_1} \bigcap\limits_{k_2} \dots \underset{k_n}{\Box} B_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle}$, где $\{B_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle}\}$ — $\mathscr{B}^0$-последовательность семейств. Очевидно, что „$x \in \pi^{-1}(B_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle})$" является как Σ_2^0-, так и Π_2^0-отношением, откуда по тому же свойству 5° получаем, что множество $\pi^{-1}(A) = \bigcup\limits_{k_1} \bigcap\limits_{k_2} \dots \underset{k_n}{\Box} \pi^{-1}(B_{\langle k_1, \dots, k_n \rangle})$ принадлежит Σ_{n+1}^0.

Докажем, что если $A \in \widehat{\Sigma}_{n+1}^0$, $n \geqslant 2$, то $A \in \widetilde{\Sigma}_n^0$. Это проверяется по индукции. Пусть $n=2$, $A \in \widehat{\Sigma}_3^0$.

Докажем вспомогательное утверждение: если $\{\alpha_m\}_{m \in N}$ — Σ_1^0-последовательность множеств, то последовательность семейств $\{A_{\langle m, x \rangle}\}$, определяемая соотношением

$$A_{\langle m, x \rangle} \rightleftharpoons \begin{cases} \varnothing \text{ при } x \notin \alpha_m, \\ \{\pi_x\} \text{ при } x \in \alpha_m, \end{cases}$$

является $\widetilde{\Pi}_1^0$- последовательностью. Для доказательства достаточно (см. 5°, § 1) построить $\mathscr{B}^0$-последовательность семейств $\{B_{\langle m, x, s \rangle}\}$ таким образом, что $A_{\langle m, x \rangle} = \bigcap\limits_s B_{\langle m, x, s \rangle}$. Семейство $B_{\langle m, x, s \rangle}$ будет иметь вид $(P_{\langle m, x, s \rangle} \setminus Q_{\langle m, x, s \rangle}) \cup R_{\langle m, x, s \rangle}$ для подходящих $\widetilde{\Sigma}_0^0$-последовательностей P, Q, R. Положим $Q_{\langle m, x, s \rangle} \rightleftharpoons D_{\{s\}}$,

$$P_{\langle m, x, s \rangle} \rightleftharpoons \begin{cases} \varnothing \text{ при } x \notin \alpha_m, \\ D_{\pi_x^s} \text{ при } x \in \alpha_m, \end{cases} \qquad R_{\langle m, x, s \rangle} \rightleftharpoons \begin{cases} \varnothing \text{ при } s \notin \pi_x, \\ P_{\langle m, x, s \rangle} \text{ при } s \in \pi_x \end{cases}$$

(напомним, что $D_\gamma = \{\alpha \in \Pi \mid \gamma \subseteq \alpha\}$, $\gamma \in \Delta$). Проверим соотношение $A_{\langle m, x \rangle} = \bigcap\limits_s B_{\langle m, x, s \rangle}$. Если $x \notin \alpha_m$, то $A_{\langle m, x \rangle} = \varnothing$, $B_{\langle m, x, s \rangle} \subseteq P_{\langle m, x, s \rangle} = \varnothing$ для любого s, поэтому $A_{\langle m, x \rangle} = \bigcap\limits_s B_{\langle m, x, s \rangle}$. Пусть $x \in \alpha_m$. Надо доказать, что $\{\pi_x\} = \bigcap\limits_s B_{\langle m, x, s \rangle}$. Проверим, что $\pi_x \in B_{\langle m, x, s \rangle}$ для всякого s. Возможны два случая: $s \notin \pi_x$ и $s \in \pi_x$. В первом случае $\pi_x \in P_{\langle m, x, s \rangle} \setminus Q_{\langle m, x, s \rangle} \subseteq B_{\langle m, x, s \rangle}$, во втором $\pi_x \in P_{\langle m, x, s \rangle} = R_{\langle m, x, s \rangle} \subseteq B_{\langle m, x, s \rangle}$. Остается доказать, что если рпм α принадлежит $B_{\langle m, x, s \rangle}$ при любом s, то $\alpha = \pi_x$. Поскольку $B_{\langle m, x, s \rangle} \subseteq P_{\langle m, x, s \rangle}$, то $\alpha \in P_{\langle m, x, s \rangle}$ для любого s, т. е. $\pi_x^s \subseteq \alpha$ для любого s, откуда $\pi_x \subseteq \alpha$. Проверим, наконец, что $\alpha \in \pi_x$. Пусть $s \in \alpha$. Тогда из $\alpha \in B_{\langle m, x, s \rangle}$ следует $\alpha \in R_{\langle m, x, s \rangle}$, а это возможно лишь при условии $s \in \pi_x$. Вспомогательное утверждение доказано.

Вернемся к доказательству теоремы. Если $A \in \widehat{\Sigma}_3^0$, то $\pi^{-1}(A) = \bigcup\limits_k \bigcap\limits_m \alpha_{\langle k, m \rangle}$ для некоторой Σ_1^0- последовательности множеств $\{\alpha_{\langle k, m \rangle}\}$. Согласно доказанному утверждению, последовательность семейств

$$A_{\langle k, m, x \rangle} \rightleftharpoons \begin{cases} \varnothing \text{ при } x \notin \alpha_{\langle k, m \rangle}, \\ \{\pi_x\} \text{ при } x \in \alpha_{\langle k, m \rangle} \end{cases}$$

есть $\widetilde{\Pi}_1^0$-последовательность. Из 5°, § 1, следует, что семейство $\bigcup\limits_{k,x} \bigcap\limits_m A_{\langle k, m, x \rangle}$ принадлежит $\widetilde{\Sigma}_2^0$. Но, как легко видеть, $A = \bigcup\limits_{k,x} \bigcap\limits_m A_{\langle k, m, x \rangle}$, что доказывает базис индукции. Из доказательства вытекает, что на самом деле каноническая нумерация класса $\widehat{\Sigma}_3^0$ **сводится к канонической нумерации класса** $\widetilde{\Sigma}_2^0$, а поэтому и каноническая нумерация класса $\widehat{\Pi}_3^0$ сводится к канонической нумерации класса $\widetilde{\Pi}_2^0$.

Предположим, что утверждение доказано для числа $n \geqslant 2$ и докажем его для $n+1$. Если $A \in \widehat{\Sigma}_{n+2}^0$, то, согласно следствию 5, семейство A можно представить в виде $\bigcup\limits_k A_k$ для некоторой $\widehat{\Pi}_{n+1}^0$ -последовательности семейств $\{A_k\}$. По индукционному предположению, $\{A_k\}$ есть $\widetilde{\Pi}_n^0$-последовательность, но тогда $A \in \widetilde{\Sigma}_{n+1}^0$ по определению класса $\widetilde{\Sigma}_{n+1}^0$. 1) доказано.

Докажем 2). Соотношение $\widetilde{\Sigma}_1^0 \subseteq \widehat{\Sigma}_2^0$ уже доказано. Построим пример семейства $A \in \widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_0^2$ такого, что как A, так и $\bar{A}$ не являются аппроксимируемыми (согласно следствию 6 это более точное утверждение, чем $A \notin \widetilde{\Sigma}_1^0 \cup \widehat{\Pi}_1^0$). Заметим сначала, что достаточно построить пример семейства $B \in \widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0$, не являющегося аппроксимируемым. Действительно, если B построено, то семейство $A \rightleftharpoons U_0^0(B, \overline{B})$ принадлежит $\widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0$ (см. [6, § 5, свойство 3]), причем как A, так и $\overline{A} = U_1^1(\overline{B}, B)$ не являются аппроксимируемыми. Обратимся поэтому к построению неаппроксимируемого семейства из $\widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0$. Утверждаем, что достаточно построить семейство $X \in \widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0$, имеющее вид $X = \{\xi_0, \xi_1, \ldots\}$, где $\xi_0 \subset \xi_1 \subset \ldots$ — последовательность конечных множеств, для которой множество $\bigcup\limits_x \xi_x$ рекурсивно перечислимо. Тогда, очевидно, $\overline{X}$ будет неаппроксимируемым.

Пусть $\gamma_0 \subset \gamma_1 \subset \ldots$ — некоторая вполне рекурсивная в нумерации $\delta: N \to \Delta$ последовательность конечных множеств. Определим семейства $A_0 \rightleftharpoons \{\gamma_0\}$, $A_1 \rightleftharpoons \{\gamma_1, \gamma_2\}$, $A_2 \rightleftharpoons \{\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\}$, $\ldots$. Семейство A_n будем обозначать $\{\alpha_n^0, \ldots, \alpha_n^n\}$ (в нем $n+1$ элементов). Семейство X будет содержать ровно по одному множеству из каждого A_n. Введем множество $\varepsilon_n \rightleftharpoons \left\{x < n \mid \pi_x \notin \bigcup\limits_{k<n} A_k\right\}$ (в нем не более n элементов). Пусть k — наименьшее число $\leqslant n$ такое, что α_n^k отличается от всех π_x, $x \in \varepsilon_n$. Именно это множество α_n^k мы и возьмем в качестве элемента из X. Легко видеть, что множество $\delta^{-1}(X)$ рекурсивно относительно O', т. е. $\delta^{-1}(X) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$. Из определения X вытекает соотношение $\pi_n \in X \Leftrightarrow \pi_n \in (A_0 \cup \ldots \cup A_n) \cap X$, которое вместе с соотношением $\delta^{-1}(X) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$ показывает, что $\pi^{-1}(X) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$. Итак, $\pi^{-1}(\overline{X}) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$, $\overline{X}$ неаппроксимируемо. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 8. *При* $n \geqslant 2$ *нумерованное множество* $\widetilde{\Sigma}_n^0$ *вместе с морфизмами* $A \to \pi^{-1}(A)$ *из* $\widetilde{\Sigma}_n^0$ в Σ_{n+1}^0 *и* $\alpha \to \{\pi_x | x \in \alpha\}$ *из* Σ_{n+1}^0 в $\widetilde{\Sigma}_n^0$ *является ретрактом нумерованного множества* Σ_{n+1}^0.

З а м е ч а н и е 1. С теоремами 1, 3 интересно сравнить теорему 2 из [8], которая показывает, что семейства из $\widehat{\Sigma}_2^0$ описываются через семейства из $\widehat{\Sigma}_2^0 \cap \widehat{\Pi}_2^0$, а именно (приводим уточненную формулировку): для принадлежности семейства A классу $\widehat{\Sigma}_2^0$ необходимо и достаточно, чтобы оно представлялось в виде $\bigcup\limits_x A_x$ для некоторой последовательности семейств рпм $\{A_x\}$, являющейся одновременно Σ_2^0- и Π_2^0 -последовательностью.

З а м е ч а н и е 2. Несмотря на то, что $\widetilde{\Sigma}_1^0 \neq \widehat{\Sigma}_2^0$, класс $\widetilde{\Sigma}_1^0$ содержит многие семейства из $\widehat{\Sigma}_2^0$. Например, легко понять, что если $A \subseteq \Delta$, то условия $A \in \widehat{\Sigma}_2^0$, $A \in \widetilde{\Sigma}_1^0$, $\delta^{-1}(A) \in \Sigma_2^0$ эквивалентны.

В заключение параграфа изучим связь введенной иерархии $\widetilde{\Sigma}^0_n$ с арифметической иерархией семейств множеств $\Sigma^{(s)}_n$, $\Pi^{(s)}_n$, определенной в [1, гл. 15]. Поскольку мы говорим только о семействах рпм, будем рассматривать «след» иерархии $\Sigma^{(s)}_n$ на семействе П. Классы этой новой иерархии обозначим так: $\Sigma^s_n \rightleftharpoons \Sigma^{(s)}_n \cap \Pi$, $\Pi^s_n \rightleftharpoons \Pi^{(s)}_n \cap \Pi$. Заметим, что иерархия Σ^s_n (и иерархия $\Sigma^{(s)}_n$) также может быть определена по схеме § 1. Пусть $\mathscr{B}'$ — булева алгебра, порожденная классом $\mathscr{D}$ всех базисных открытых семейств (см. определения перед теоремой 1) внутри $\mathscr{P}(\Pi)$, и B' — каноническая нумерация класса $\mathscr{B}'$, порожденная канонической нумерацией класса $\mathscr{D}$ (очевидно, $(B')^c \leqslant B'$). Отметим, что $\mathscr{B}'$ совпадает с классом всех открыто-замкнутых множеств в некоторой естественной топологии на П, см. [1, с. 435, 436]. Можно показать, что канонические нумерации классов Σ^s_n, Π^s_n $(n \in N)$ изоморфны нумерациям с соответствующими индексами, возникающим из B' по схеме 4°, § 1, см. [1, упражнение 15—8].

Предложение 5. 1) *Для всякого* $n \geqslant 1$ *каноническая нумерация класса* Σ^s_n (Π^s_n) *сводится к канонической нумерации класса* $\widetilde{\Sigma}^0_n$ $(\widetilde{\Pi}^0_n)$. В частности, $\Sigma^s_n \subseteq \widetilde{\Sigma}^0_n$ $(\Pi^s_n \subseteq \widetilde{\Pi}^0_n)$.

2) *Для всякого* $n \geqslant 0$ *каноническая нумерация класса* $\widetilde{\Sigma}^0_n$ $(\widetilde{\Pi}^0_n)$ *сводится к канонической нумерации класса* Σ^s_{n+1} (Π^s_{n+1}). *В частности,* $\widetilde{\Sigma}^0_n \subseteq \Sigma^s_{n+1}$ $(\widetilde{\Pi}^0_n \subseteq \Pi^s_{n+1})$.

3) $\widetilde{\Sigma}^0_n \nsubseteq \Pi^s_{n+1}$, $\widetilde{\Pi}^0_n \nsubseteq \Sigma^s_{n+1}$ *для всякого* $n \geqslant 0$.

Доказательство. 1) Пусть $n = 1$. Каноническая нумерация класса Σ^s_1 есть $\Sigma^0(B')$, а каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}^0_1$ есть $\Sigma^0(B^0)$, где B^0 — индуцированная нумерация булевой алгебры, порожденной классом $\widetilde{\Sigma}^0_0$. Очевидно, что $B' \leqslant B^0$, поэтому $\Sigma^0(B') \leqslant \Sigma^0(B^0)$ по свойству 1° из § 1. Случай $n > 1$ рассматривается тривиальной индукцией с использованием того же свойства 1°.

2) Пусть $n = 0$. Нумерация класса $\widetilde{\Sigma}^0_0$ — это $\Sigma^0(D)$, а класса Σ^s_1 — это $\Sigma^0(B')$. Но $D \leqslant B'$, поэтому $\Sigma^0(D) \leqslant \Sigma^0(B')$. Пусть теперь $n = 1$. Из $\Sigma^0(D) \leqslant \Sigma^0(B')$ следует, что $\Sigma^0(D)$ сводится к каноническим нумерациям классов Σ^s_2, Π^s_2. Отсюда следует, что и B^0 сводится к нумерациям классов Σ^s_2, Π^s_2 (так как $\Sigma^s_2 \cap \Pi^s_2$ есть эффективная булева алгебра, см. 7°, § 1). Свойство 1° показывает, что каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}^0_1$ сводится к канонической нумерации класса Σ^s_2. Случай $n > 1$ рассматривается тривиальной индукцией.

3) Произвольному $\alpha \subseteq N$ сопоставим семейство рпм $F_\alpha \rightleftharpoons \{\varnothing, \{x\} \mid x \in \alpha\}$. Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Для всякого* $n \geqslant 0$ *отображение* $\alpha \to F_\alpha$ *есть морфизм из нумерованного множества* Π^0_{2n+1} *в нумерованное множество* $\widetilde{\Pi}^0_{2n}$ *и из нумерованного множества* Σ^0_{2n+2} *в* $\widetilde{\Sigma}^0_{2n+1}$.

Рассмотрим случай $n = 0$. То, что $\alpha \to F_\alpha$ есть морфизм из Π^0_1 в $\widetilde{\Pi}^0_0$, вытекает из теоремы Райса. Пусть $\alpha \in \Sigma^0_2$. Тогда $\alpha = \bigcup\limits_x \alpha_x$ для некоторой Π^0_1-последовательности множеств $\{\alpha_x\}$. По доказанному последовательность семейств $\{F_{\alpha_x}\}$ есть $\widetilde{\Pi}^0_0$-последовательность. Отсюда получаем, что семейство $F_\alpha = F_{\bigcup\limits_x \alpha_x} = \bigcup\limits_x F_{\alpha_x}$ принадлежит $\widetilde{\Sigma}^0_1$, причем $\alpha \to F_\alpha$ есть морфизм из Σ^0_2 в $\widetilde{\Sigma}^0_1$. При $n > 0$ доказательство аналогичное, с использованием очевидных равенств $F_{\bigcup\limits_x \alpha_x} = \bigcup\limits_x F_{\alpha_x}$, $F_{\bigcap\limits_x \alpha_x} = \bigcap\limits_x F_{\alpha_x}$.

Лемма 2. *Для всякого* $n \geqslant 0$ *отображение* $A \to \delta^{-1}(A)$ (*напомним, что* δ — *нумерация конечных множеств*) *является морфизмом из нумеро-*

ванного множества Σ_n^s *в нумерованное множество* Σ_n^0, *а также из* Π_n^s *в* Π_n^0 (*здесь считаем, что* $\Sigma_0^0 = \Pi_0^0 = \Sigma_1^0 \cap \Pi_1^0$).

Пусть $n = 0$. То, что $\delta^{-1}(A)$ рекурсивно при $A \in \Sigma_0^s = \mathscr{B}'$, очевидно из определения класса $\mathscr{B}'$. Если $A \in \Sigma_{n+1}^s$, то $A = \bigcup\limits_x A_x$ для некоторой Π_n^s-последовательности $\{A_x\}$. По индукции $\{\delta^{-1}(A_x)\}$ есть Π_n^0-последовательность множеств. Поэтому множество $\delta^{-1}(A) = \bigcup\limits_x \delta^{-1}(A_x)$ принадлежит Σ_{n+1}^0.

Вернемся к доказательству предложения. Пусть α_n $(n \geqslant 0)$ — Σ_n^0-полное множество. При четном n семейство $F_{\bar\alpha_{n+1}}$ принадлежит $\widetilde\Pi_n^0$, поскольку $\bar\alpha_{n+1} \in \Pi_{n+1}^0$ (лемма 1). В то же время $F_{\bar\alpha_{n+1}} \notin \Sigma_{n+1}^s$, ибо в противном случае получили бы $\bar\alpha_{n+1} \in \Sigma_{n+1}^0$ по лемме 2, что противоречит Σ_{n+1}^0- полноте множества α_{n+1}. Итак, $F_{\bar\alpha_{n+1}} \in \widetilde\Pi_n^0 \setminus \Sigma_{n+1}^s$. Аналогично доказывается, что при нечетном n семейство $F_{\alpha_{n+1}}$ принадлежит $\widetilde\Sigma_n^0 \setminus \Pi_{n+1}^s$. Предложение доказано.

§ 3

В этом параграфе мы несколько глубже изучим строение семейств из $\widetilde\Sigma_1^0 \cap \widetilde\Pi_1^0$, построив для этого иерархию семейств рпм, аналогичную иерархии Ершова. Для классов $\widetilde\Sigma_0^0, \widetilde\Sigma_1^0, \widetilde\Pi_1^0$ удовлетворяются все условия, которые позволяют построить малую иерархию (см. § 1). Действительно, класс $\widetilde\Sigma_1^0 \cap \widetilde\Pi_1^0$ является эффективной булевой алгеброй (так как нумерация B^0 замкнута относительно $\cup$, $\cap$, $^-$), каноническая нумерация класса $\widetilde\Sigma_0^0$ является σ-замкнутой относительно объединения и сводится к каноническим нумерациям классов $\widetilde\Sigma_1^0$, $\widetilde\Pi_1^0$, $\varnothing$, $\Pi \in \widetilde\Sigma_0^0$.

Схема из § 1 позволяет каждому $a \in L_0$, являющемуся номером рекурсивного линейного порядка с четностью $(\xi; \preccurlyeq)$, сопоставить классы $\widetilde\Sigma_{(a)}$, $\widetilde\Pi_{(a)}$. Очевидно, если $\xi = \varnothing$, то $\widetilde\Sigma_{(a)} = \{\varnothing\}$, если ξ одноэлементно, то $\widetilde\Sigma_{(a)} = \widetilde\Sigma_0^0$, если ξ двухэлементно, то $\widetilde\Sigma_{(a)}$ есть совокупность всех разностей эффективно открытых семейств и т. д.

Из общих замечаний 8°, 9° из § 1 вытекают некоторые иерархические свойства классов $\widetilde\Sigma_{(a)}$, $\widetilde\Pi_{(a)}$ $(a \in L_0)$. На самом деле имеет место некоторое уточнение свойства 9°, аналогичное предложению 3 из [4, § 3]: если $a \in W_0^{**}$, то $A \in \widetilde\Sigma_{(a)} \Leftrightarrow \bar A \in \widetilde\Pi_{(a)}$, и канонические нумерации классов $\widetilde\Sigma_{(a)}$, $\widetilde\Pi_{(a)}$ сводятся к каноническим нумерациям классов $\widetilde\Sigma_1^0$, $\widetilde\Pi_1^0$, в частности, $\widetilde\Sigma_{(a)} \cup \widetilde\Pi_{(a)} \subseteq \widetilde\Sigma_1^0 \cap \widetilde\Pi_1^0$. Это вытекает из следующего очевидного замечания: ξ-последовательность семейств $\{A_x\}_{x\in\xi}$ является $\widetilde\Sigma_0^0$-вычислимой тогда и только тогда, когда ξ-последовательность множеств $\{\pi^{-1}(A_x)\}_{x\in\xi}$ Σ_1^0-вычислима.

Имеется некоторая связь иерархии $\widetilde\Sigma_{(a)}$ с иерархией Ершова, классы которой обозначаем, следуя [4], через $\Sigma_{(a)}^{-1}$, $\Pi_{(a)}^{-1}$.

Предложение 1. *Для всякого* $a \in L_0$ *отображение* $A \to \pi^{-1}(A)$ *является морфизмом из нумерованного множества* $\widetilde\Sigma_{(a)}$ $(\widetilde\Pi_{(a)})$ *в нумерованное множество* $\Sigma_{(a)}^{-1}$ $(\Pi_{(a)}^{-1})$.

Это предложение легко следует из приведенного выше описания $\widetilde\Sigma_0^0$-вычислимых ξ-последовательностей семейств. Действительно, пусть $A \in \widetilde\Sigma_{(a)}$, $A = S_\xi\{C_x\}$, где $\{C_x\}_{x\in\xi}$ — $\widetilde\Sigma_0^0$-вычислимая ξ-последовательность.

Тогда $\{\pi^{-1}(C_x)\}_{x\in\xi}$ есть Σ_1^0-вычислимая последовательность множеств. Имеем

$$\pi^{-1}(A)=\pi^{-1}(S_\xi\{C_x\})=\pi^{-1}\Big(\bigcup_{x\in\xi_i}C_x\setminus\bigcup_{y<x}C_y\Big)=\bigcup_{x\in\xi_i}\Big(\pi^{-1}(C_x)\setminus$$
$$\setminus\bigcup_{y<x}\pi^{-1}(C_y)\Big)=S_\xi\{\pi^{-1}(C_x)\}\in\Sigma_{(a)}^{-1},$$

и аналогично для $\widetilde{\Pi}_{(a)}$ (i — четность ξ, см. § 1).

Имеется связь иерархии $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$ с M-сводимостью, аналогичная связи иерархии Ершова с m-сводимостью.

Теорема 1. *Для всякого $a\in L_0$ существуют семейства* рпм V_a, V_a' *такие, что* $\widetilde{\Sigma}_{(a)}=\{X\subseteq\Pi\,|\,X\leqslant_M V_a\}$, $\widetilde{\Pi}_{(a)}=\{X\subseteq\Pi\,|\,X\leqslant_M V_a'\}$.

Доказательство. Проверим сначала, что из $A\in\widetilde{\Sigma}_{(a)}$, $B\leqslant_M A$ следует $B\in\widetilde{\Sigma}_{(a)}$. Пусть Φ — морфизм из Π в себя, для которого $B=\Phi^{-1}(A)$, и $\{C_x\}_{x\in\xi}$ — та $\widetilde{\Sigma}_0^0$ -вычислимая ξ-последовательность, для которой $A=S_\xi\{C_x\}$. Имеем

$$B=\Phi^{-1}(S_\xi\{C_x\})=\Phi^{-1}\Big(\bigcup_{x\in\xi_i}\Big(C_x\setminus\bigcup_{y<x}C_y\Big)\Big)=$$
$$=\bigcup_{x\in\xi_i}\Big(\Phi^{-1}(C_x)\setminus\bigcup_{y<x}\Phi^{-1}(C_y)\Big)=S_\xi\{\Phi^{-1}(C_x)\}.$$

Поскольку $\{\Phi^{-1}(C_x)\}_{x\in\xi}$ есть, очевидно, $\widetilde{\Sigma}_0^0$ - вычислимая ξ-последовательность, получаем $B\in\widetilde{\Sigma}_{(a)}$. Для $\widetilde{\Pi}_{(a)}$ доказательство аналогично. Легко понять, что на самом деле отображение $(A,\Phi)\to\Phi^{-1}(A)$ есть морфизм из произведения нумерованных множеств $\widetilde{\Sigma}_{(a)}\times\mathbf{\Phi}$ $(\widetilde{\Pi}_{(a)}\times\mathbf{\Phi})$, где $\mathbf{\Phi}$ — множество всех морфизмов из Π в себя с главной вычислимой нумерацией, в $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$ $(\widetilde{\Pi}_{(a)})$.

Остается показать, что в классе $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$ $(\widetilde{\Pi}_{(a)})$ есть наибольшее по отношению $\leqslant_M$ семейство $V_a(V_a')$. Здесь опять используем операции U_i^j, описанные в § 2 перед теоремой 1. Пусть A — каноническая нумерация класса $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$ $(\widetilde{\Pi}_{(a)})$. Пусть j равно 0, если $i(\xi)=1$ или ξ не имеет наименьшего элемента, и 1 в противном случае (j' равно 1, если $i(\xi)=1$ и ξ имеет наименьший элемент, и 0 в противном случае). Утверждаем, что в качестве V_a (V_a') можно взять семейство $U_0^j(A_0,A_1,\ldots)(U_1^{j'}(A_0,A_1,\ldots))$. Поскольку A_k M-сводится к каждому $U_l^m(A_0,A_1,\ldots)$ посредством морфизма Ψ_k', надо лишь убедиться, что $V_a\in\widetilde{\Sigma}_{(a)}$ $(V_a'\in\widetilde{\Pi}_{(a)})$. Согласно определению нумерации A существует $\widetilde{\Sigma}_0^0$- вычислимая последовательность семейств $\{B_{\langle k,x\rangle}\}_{k\in N,\,x\in\xi}$ такая, что $A_k=S_\xi\{B_{\langle k,x\rangle}\}$ $(A_k=P_\xi\{B_{\langle k,x\rangle}\})$ при любом $k\in N$. Положим $C_x\rightleftarrows\bigcup_{k\in N}\Psi_k'(B_{\langle k,x\rangle}\cup H'$ для любого $x\in\xi$. Согласно замечаниям перед теоремой 1, § 2, ξ-последовательность $\{C_x\}_{x\in\xi}$ является $\widetilde{\Sigma}_0^0$-вычислимой. Поэтому достаточно проверить, что $V_a=S_\xi\{C_x\}$ $\big(V_a'=P_\xi\{C_x\}\big)$.

Из леммы 2, § 1, следуют такие равенства:

$$S_\xi\Big\{\bigcup_k\Psi_k'(B_{\langle k,x\rangle})\Big\}=\bigcup_k\Psi_k'(S_\xi\{B_{\langle k,x\rangle}\})=\bigcup_k\Psi_k'(A_k)$$
$$\Big(P_\xi\Big\{\bigcup_k\Psi_k'(B_{\langle k,x\rangle})\Big\}=\bigcup_k\Psi_k'(P_\xi\{B_{\langle k,x\rangle}\})\cup\Big(\Pi\setminus\bigcup_k\operatorname{rng}\Psi_k'\Big)=$$
$$=\bigcup_k\Psi_k'(A_k)\cup\Big(\Pi\setminus\bigcup_k G_k'\Big)=\bigcup_k\Psi_k'(A_k)\cup F'\cup H',\ \text{так как}\ \operatorname{rng}\ \Psi_k'=G_k'\Big).$$

Используя эти соотношения и лемму 1 из § 1, получим:

$$S_\xi\{C_x\} = S_\xi\Big\{\bigcup \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle}) \cup H'\Big\} = \begin{cases} S_\xi\Big\{\bigcup\limits_k \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle})\Big\} \text{ при } j=0, \\ S_\xi\Big\{\bigcup\limits_k \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle}\Big\} \cup H' \text{ при } j=1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \bigcup\limits_k \Psi'_k(A_k) & \text{при } j=0, \\ \bigcup\limits_k \Psi'_k(A_k) \cup H' & \text{при } j=1 \end{cases} = U_0^j(A_0, A_1, \ldots) = V_a$$

$$\left(P_\xi\{C_x\} = P_\xi\Big\{\bigcup\limits_k \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle}) \cup H'\Big\} = \begin{cases} P_\xi\Big\{\bigcup\limits_k \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle})\Big\} & \text{при } j'=1, \\ P_\xi\Big\{\bigcup\limits_k \Psi'_k(B_{\langle k,x\rangle})\Big\} \setminus H' & \text{при } j'=0 \end{cases} = \right.$$

$$\left. = \begin{cases} \bigcup\limits_k \Psi'_k(A_k) \cup F' \cup H' & \text{при } j'=1, \\ \bigcup\limits_k \Psi'_k(A_k) \cup F' & \text{при } j'=0 \end{cases} = U_1^{j'}(A_0, A_1, \ldots) = V'_a \right).$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1 (теорема об иерархии). $\widetilde{\Sigma}_{(a)} \notin \widetilde{\Pi}_{(a)}$ $(a \in W_0^{**})$.

С л е д с т в и е 2. *Если* $a \in W_0^{**}$, $i = i(\xi)$, $\{A_k\}_{k\in N}$ — $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$-*вычислимая* ($\widetilde{\Pi}_{(a)}$-*вычислимая*) *последовательность семейств, то* $U_0^{\bar{i}}(A_0, A_1, \ldots) \in \widetilde{\Sigma}_{(a)}$ $(U_1^i(A_0, A_1, \ldots) \in \widetilde{\Pi}_{(a)})$.

В следующей теореме мы опишем строение семейств из $\widetilde{\Sigma}_{(a)} \cap \widetilde{\Pi}_{(a)}$ для $a \in W_0^{**}$, но сначала докажем простое вспомогательное предложение. Если a, $b \in L_0$, b — номер рекурсивного линейного порядка с четностью $(\zeta; \preccurlyeq)$, то запись $b \sqsubset a$ по определению означает, что существует орф, изоморфно отображающая $(\zeta; \preccurlyeq)$ на некоторый собственный начальный сегмент порядка $(\xi; \preccurlyeq)$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Для всякого* $a \in L_0$ *если* $A \in \widetilde{\Sigma}_{(a)}$, $\varnothing \in A$, *то найдется такое* $b \in L_0$, *что* $b \sqsubset a$, $A \in \widetilde{\Pi}_{(b)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{B_x\}_{x\in\xi}$ — $\widetilde{\Sigma}_0^0$-вычислимая ξ-последовательность семейств, для которой $A = \bigcup\limits_{x\in\xi_i}\Big(B_x \setminus \bigcup\limits_{y<x} B_y\Big)$, $i \rightleftharpoons i(\xi)$. Поскольку $\varnothing \in A$, найдется такое $x \in \xi_i$, что $\varnothing \in B_x$. Но семейство B_x открыто, поэтому $B_x = \Pi$. Определим рекурсивный линейный порядок $(\eta; \preccurlyeq)$ следующим образом: $\eta \rightleftharpoons \{y \in \xi \mid y \prec x\}$, порядок $\preccurlyeq$ есть сужение на множество η порядка $\preccurlyeq$, имеющегося на ξ (очевидно, номер b порядка $(\eta; \preccurlyeq)$ находится эффективно по a и $b \sqsubset a$). Из $x \in \xi_i$ очевидно, что четность j порядка η противоположна четности порядка ξ, т. е. $j = \bar{i}$. Имеем

$$A = \bigcup_{y\in\eta_i}\Big(B_y \setminus \bigcup_{z<y} B_z\Big) \cup \Big(\Pi \setminus \bigcup_{y\in\eta} B_y\Big) =$$

$$= \bigcup_{y\in\eta_{\bar{j}}}\Big(B_y \setminus \bigcup_{z<y} B_z\Big) \cup \Big(\Pi \setminus \bigcup_{y\in\eta} B_y\Big) = P_\eta\{B_y\},$$

причем η-последовательность $\{B_y\}_{y\in\eta}$ является $\widetilde{\Sigma}_0^0$-вычислимой. Это и означает, что $A \in \widetilde{\Pi}_{(b)}$, $b \sqsubset a$. Предложение доказано.

В качестве очевидного следствия получаем следующее.

Т е о р е м а 2. $\widetilde{\Sigma}_{(a)} \cap \widetilde{\Pi}_{(a)} = \bigcup\limits_{b\sqsubset a}(\widetilde{\Sigma}_{(b)} \cup \widetilde{\Pi}_{(b)})$ *для любого* $a \in W_0^{**}$.

Действительно, включение $\bigcup_{b=a}(\widetilde{\Sigma}_{(b)} \cup \widetilde{\Pi}_{(b)}) \subseteq \widetilde{\Sigma}_{(a)} \cap \widetilde{\Pi}_{(a)}$ установлено для более общего случая в п. 11°, § 1, так как, очевидно, $b = a \Rightarrow b \prec\prec\prec_0 a$ для любых a, $b \in L_0$. Пусть теперь $A \in \widetilde{\Sigma}_{(a)} \cap \widetilde{\Pi}_{(a)}$. Поскольку $a \in W_{\bullet}^{**}$, то и $\bar{A} \in \widetilde{\Sigma}_{(a)} \cap \widetilde{\Pi}_{(a)}$. Но очевидно, что либо $\varnothing \in A$, либо $\varnothing \in \bar{A}$. По предложению 2 в первом случае получаем $A \in \bigcup_{b=a} \widetilde{\Pi}_{(b)}$, а во втором — $\bar{A} \in \bigcup_{b=a} \widetilde{\Pi}_{(b)}$, т. е. $A \in \bigcup_{b=a} \widetilde{\Sigma}_{(b)}$. Теорема доказана.

Для иерархии Ершова выполняется важное равенство $\bigcup_{a \in W_0} \Sigma_{(a)}^{-1} = \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$, причем на самом деле достаточно ограничиться такими $a \in W_0$, что $|a| = \omega$ [4]. Имеет ли место аналогичное равенство для иерархии $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$? Прежде чем ответить на этот вопрос, приведем одно простое вспомогательное предложение, дающее некоторое структурное свойство семейств из $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$ для $a \in W_0$.

Последовательность рпм $\{\alpha_n\}_{n \in N}$ назовем *цепью* для семейства рпм A, если $\alpha_n \subseteq \alpha_{n+1}$, $\alpha_{2n} \in A$, $\alpha_{2n+1} \in \bar{A}$ для любого $n \in N$.

Предложение 3. *Пусть* $(\xi; \preccurlyeq)$ — *произвольное вполне упорядоченное множество. Если семейство рпм A представимо в виде $S_\xi\{B_x\}$ для некоторой ξ-последовательности семейств рпм $\{B_x\}_{x \in \xi}$, причем $x \in \xi$, $\alpha \in B_x$, $\alpha \subseteq \beta$, $\beta \in \Pi \Rightarrow \beta \in B_x$, то A не имеет цепей.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $\{\alpha_n\}$ — цепь для семейства A. Так как $\alpha_0 \in A = \bigcup_{x \in \xi_i}\left(B_x \setminus \bigcup_{y < x} B_y\right)(i = i(\xi))$, то $\alpha_0 \in B_{x_0}$ для некоторого $x_0 \in \xi_i$. Поскольку $\alpha_0 \subseteq \alpha_1$, то $\alpha_1 \in B_{x_0}$. Но $\alpha_1 \notin A$, поэтому должно существовать такое $x_1 \prec x_0$, что $\alpha_1 \in B_{x_1}$. Тогда и $\alpha_2 \in B_{x_1}$, так как $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$. Но $\alpha_2 \in A$, поэтому найдется такое $x_2 \preccurlyeq x_1$, $x_2 \in \xi_i$, что $\alpha_2 \in B_{x_2}$. Итак, свойства множеств α_0, α_1, α_2 позволили построить элементы x_0, $x_2 \in \xi_i$, $x_2 \prec x_0$. Поскольку цепь $\{\alpha_n\}$ бесконечна, то, продолжая это рассуждение, получим бесконечную последовательность $x_0 \succ x_2 \succ x_4 \succ \ldots$ элементов из ξ_i. Противоречие с полной упорядоченностью $(\xi; \preccurlyeq)$. Предложение доказано.

Следствие 3. *Семейства из $\bigcup_{a \in W_0} \widetilde{\Sigma}_{(a)}$ не имеют цепей.*

Теорема 3. $\bigcup_{a \in W_0} \widetilde{\Sigma}_{(a)} \subset \widetilde{\Sigma}_1^0 \cap \widetilde{\Pi}_1^0$.

Доказательство. Поскольку включение $\bigcup_{a \in W_0} \widetilde{\Sigma}_{(a)} \subseteq \widetilde{\Sigma}_1^0 \cap \widetilde{\Pi}_1^0$ уже доказано, обратимся к построению семейства рпм A такого, что $A \in (\widetilde{\Sigma}_1^0 \cap \widetilde{\Pi}_1^0) \setminus \left(\bigcup_{a \in W_0} \widetilde{\Sigma}_{(a)}\right)$.

Пусть σ — простое множество, т. е. рпм с бесконечным дополнением $\bar{\sigma} = \{c_0 < c_1 < \ldots\}$, не содержащим бесконечных рекурсивно перечислимых подмножеств. Положим $\alpha_n \rightleftharpoons \{c_k | k \leqslant n\}$ $(n \in N)$, $A \rightleftharpoons \{\alpha_{2n} | n \in N\}$. Поскольку, очевидно, последовательность $\{\alpha_n\}$ является цепью для A, то $A \notin \bigcup_{a \in W_0} \widetilde{\Sigma}_{(a)}$ по следствию 3. Остается проверить, что $A \in \widetilde{\Sigma}_1^0 \cap \widetilde{\Pi}_1^0$.

Из рекурсивной перечислимости множества σ следует, что $\delta^{-1}(A) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$ (напомним, что δ — нумерация семейства Δ всех конечных множеств). Согласно замечанию 2 из § 2 отсюда следует $A \in \widetilde{\Sigma}_1^0$. Пусть $B \rightleftharpoons \{\alpha \in \Pi | \alpha \subseteq \bar{\sigma}\}$, $C \rightleftharpoons \{\alpha \in \Pi | \alpha \nsubseteq \bar{\sigma}\}$. В силу простоты σ получаем $B \subseteq \Delta$, и поэтому $\bar{A} = C \cup (\Delta \setminus A)$. Но очевидно, что $C \in \widetilde{\Sigma}_0^0$, а поскольку $\delta^{-1}(A) \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$, то $\delta^{-1}(\Delta \setminus A) = \overline{\delta^{-1}(A)} \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$ и $\Delta \setminus A \in \widetilde{\Sigma}_2^0$ согласно замечанию 2 из § 2. Отсюда следует, что $\overline{A}\in\widetilde{\Sigma}_1^0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Автору кажется, что должно выполняться равенство $\bigcup\limits_{a\in W_0^{**}}\widetilde{\Sigma}_{(a)}=\widetilde{\Sigma}_1^0\cap\widetilde{\Pi}_1^0$, но доказательство получить пока не удалось.

По любому $a\in L_0$ можно эффективно найти $a'\in L_0$, являющееся номером рекурсивного линейного порядка с четностью $(\xi'; \preccurlyeq')$, получающегося из $(\xi; \preccurlyeq)$ «добавлением наибольшего элемента 0» (см. § 1; напомним, что g — орф, отображающая ξ на $\xi'\setminus\{0\}$). В [5] показано, что имеется естественная операция (m-скачок), позволяющая получить $\Sigma_{(a')}^{-1}$- универсальное (относительно m-сводимости) множество из $\Sigma_{(a)}^{1-}$ универсального. Аналогичное имеет место для иерархии $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$.

Предложение 4. *Пусть $a\in L_0$, A — такое семейство рпм, что к нему M-сводится любое семейство из $\widetilde{\Pi}_{(a)}$. Тогда любое семейство из $\widetilde{\Sigma}_{(a')}$ M-сводится к $U_0^j(A, X)$ для всех $j\leqslant 1$, $X\subseteq\Pi$.*

Доказательство. Пусть $B\in\widetilde{\Sigma}_{(a')}$ и $\{C_z\}_{z\in\xi'}$ — $\widetilde{\Sigma}_0^0$-вычислимая ξ'-последовательность, для которой $B=S_{\xi'}\{C_z\}$. Надо доказать, что $B\leqslant_M U_0^j(A, X)$. Из определения ξ' следует равенство

$$B=\bigcup_{x\in\xi_{\bar{i}}}\Big(C_{g(x)}\setminus\bigcup_{y<x}C_{g(y)}\Big)\cup\Big(C_0\setminus\bigcup_{x\in\xi}C_{g(x)}\Big)\;(i=i(\xi)=\overline{i(\xi')}).$$

Рассмотрим семейство

$$D\rightleftharpoons\bigcup_{x\in\xi_{\bar{i}}}\Big(C_{g(x)}\setminus\bigcup_{y<x}C_{g(y)}\Big)\cup\Big(\Pi\setminus\bigcup_{x\in\xi}C_{g(x)}\Big).$$

Очевидно, что $D\in\widetilde{\Pi}_{(a)}$, поэтому $D\leqslant_M A$. Пусть $\Phi:\Pi\to\Pi$ — морфизм, M-сводящий D к A, т. е. $\alpha\in D\Leftrightarrow\Phi(\alpha)\in A$ для всех $\alpha\in\Pi$. Определим морфизм $\Phi':\Pi\to\Pi$ так:

$$\Phi'(\alpha)\rightleftharpoons\begin{cases}\varnothing, \text{ если } \alpha\notin\bigcup\limits_{z\in\xi'}C_z,\\ \Psi_0'\Phi(\alpha) \text{ в противном случае}\end{cases}$$

(морфизм Ψ_0' определен перед теоремой 1, § 2). Морфизм Φ' осуществляет M-сводимость B к $U_0^j(A, X)$. Действительно, если $\alpha\notin\bigcup\limits_{z\in\xi'}C_z$, то $\alpha\notin B$ и $\Phi'(\alpha)=\varnothing\notin U_0^j(A, X)$. Если же $\alpha\in\bigcup\limits_{z\in\xi'}C_z$, то из $g(x)\prec'0$ ($x\in\in\xi$) следует, что

$$\alpha\in B\Leftrightarrow\alpha\in D\Leftrightarrow\Phi(\alpha)\in A\Leftrightarrow\Phi'(\alpha)=\Psi_0^j\Phi(\alpha)\in U_0^j(A, X).$$

Предложение доказано.

Следствие 4. *Если $a\in W_0^{**}$, V_a — универсальное по M-сводимости семейство в $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$, $i=i(\xi)$, то семейства $V_{a'}$ и $U_0^i(V_a,\overline{V}_a)$, а также семейства $\overline{V_{a'}}$ и $U_1^i(\overline{V}_a, V_a)$ эквивалентны по отношению $\leqslant_M$.*

Действительно, следствие 2 показывает, что $U_0^i(V_a,\overline{V}_a)\in\widetilde{\Sigma}_{(a')}$, $U_1^i(\overline{V}_a, V_a)\in\widetilde{\Pi}_{(a')}$, а предложение 4 — что всякое семейство из $\widetilde{\Sigma}_{(a')}$ M-сводится к $U_0^i(V_a,\overline{V}_a)$.

Следствие 5. *Если $a\in W_0^{**}$, то $U_0^i(V_a,\overline{V}_a)\leqslant_M U_0^{\bar{1}}(V_a, \overline{V}_a)$ и $U_1^i(\overline{V}_a, V_a)\leqslant_M U_1^{\bar{i}}(\overline{V}_a, V_a)$.*

Следствие 5 вместе со свойством дискретности операций U_i^j по отношению к M-сводимости, установленным в [6, § 3], дает такое утверждение.

Следствие 6. *Пусть $a\in W_0^{**}$. Для любого $X\subseteq\Pi$ имеем:*
1) если $V_a\leqslant_M X$ и $\overline{V}_a\leqslant_M X$, то либо $V_{a'}\leqslant_M X$, либо $\overline{V}_{a'}\leqslant_M X$;

2) *если* $X \leqslant_M V_{a'}$ *и* $X \leqslant_M \overline{V}_{a'}$, *то либо* $X \leqslant_M V_a$, либо $X \leqslant_M \overline{V}_a$.

Классы $\widetilde{\Sigma}_{[a]}$, $\widetilde{\Pi}_{[a]}$ для $a \in \mathbf{O}$ ($\mathbf{O}$ — клиниевская система обозначений для ординалов) определяются по аналогии с классами $\Sigma^{-1}_{[a]}, \Pi^{-1}_{[a]}$ иерархии Ершова [4]. Определим индукцией по системе $\mathbf{O}$ последовательность семейств $\{S_a\}_{a \in \mathbf{O}}$:

1) если $a = 1$, то $S_a \rightleftharpoons \varnothing$;

2) если $a = 2^b$ и a четно в $\mathbf{O}$ (т. е. a четно в линейном порядке $\{x \in \mathbf{O} \mid x \leqslant_{\mathbf{O}} a\}$), то $S_a \rightleftharpoons U^0_0(S_b, \overline{S}_b)$;

3) если $a = 2^b$ и a нечетно в $\mathbf{O}$, то $S_a \rightleftharpoons U^1_0(S_b, \overline{S}_b)$;

4) если $a = 3 \cdot 5^e$, то $S_a \rightleftharpoons U^0_0(\{S_b\}_{b <_{\mathbf{O}} a})$ («$b <_{\mathbf{O}} a$» означает «$b \in \mathbf{O}$, $b <_{\mathbf{O}} a$», $U^0_0(\{S_b\}_{b<_{\mathbf{O}} a})$ — сокращенное обозначение для семейства $U^0_0(A_0, A_1, \ldots)$, где A_x есть пустое семейство при $x \not<_{\mathbf{O}} a$ и семейство S_a при $x <_{\mathbf{O}} a$).

Следующее предложение является уточнением одного результата из [6, § 5] о связи операций U^j_i с операцией m-скачка. Напомним, что в [5] определена $\mathbf{O}$-последовательность множеств $\{\Xi_a\}_{a \in \mathbf{O}}$ такая, что Ξ_a m-универсально в $\Sigma^{-1}_{[a]}$ для любого $a \in \mathbf{O}$. Приведем это определение (с модификацией при $a = 1$):

1) если $a = 1$, то $\Xi_a \rightleftharpoons \varnothing$;

2) если $a = 2^b$, то $\Xi_a \rightleftharpoons \mathrm{mj}(\Xi_b)$;

3) если $a = 3 \cdot 5^e$, то $\Xi_a \rightleftharpoons \{\langle b, x\rangle \mid b <_{\mathbf{O}} a \wedge x \in \Xi_b\}^{\mathrm{pт}}$.

Предложение 5. *Для всякого* $a \in \mathbf{O}$ *множества* Ξ_a *и* $\pi^{-1}(S_a)$ *рекурсивно изоморфны.*

Доказательство. Из следствия 2 вытекает, что $S_a \in \widetilde{\Sigma}_{[a]}$ для всякого $a \in \mathbf{O}$. Отсюда получаем $\pi^{-1}(S_a) \in \Sigma^{-1}_{[a]}$ по предложению 1, поэтому $\pi^{-1}(S_a) \leqslant_m \Xi_a$. Соотношение $\Xi_a \leqslant_m \pi^{-1}(S_a)$ докажем индукцией по $a \in \mathbf{O}$.

Для $a = 0$ утверждение очевидно, так как $S_a = \varnothing$, $\Xi_a = \varnothing$.

Пусть $a = 2^b$ и соотношение $\Xi_b \leqslant_m \pi^{-1}(S_b)$ уже установлено. Свойство 6) из [6, § 5] показывает, что $\mathrm{mj}(\pi^{-1}(S_b)) \leqslant_m \pi^{-1}(U^j_0(S_b, \overline{S}_b))$ для любого $j \leqslant 1$, откуда получаем

$$\Xi_a = \mathrm{mj}(\Xi_b) \leqslant_m \mathrm{mj}(\pi^{-1}(S_b)) \leqslant_m \pi^{-1}(S_a).$$

Пусть, наконец, $a = 3 \cdot 5^e$. По индукции считаем, что существует вычислимая последовательность орф $\{g_b\}_{b <_{\mathbf{O}} a}$ такая, что g_b осуществляет m-сводимость Ξ_b к $\pi^{-1}(S_b)$ для любого $b <_{\mathbf{O}} a$. Пусть f — любая орф, удовлетворяющая для всех $y \in N$, $y = \langle t, z\rangle$ соотношению:

$$\pi_{f(y)} = \begin{cases} \varnothing, \text{ если } t \notin \operatorname{dom} \varkappa_z \text{ или } t \in \operatorname{dom} \varkappa_z \wedge \varkappa_z(t) \notin \{\langle b, x\rangle \mid b <_{\mathbf{O}} a \wedge x \in N\}; \\ \Psi'_b(\pi g_b(x)) \text{ в противном случае, где } b <_{\mathbf{O}} a \text{ и } x \in N \text{ таковы,} \end{cases}$$

$$\text{что } \varkappa_z(t) = \langle b, x\rangle$$

(здесь $\varkappa$ — нумерация Клини, Ψ'_b — морфизм из определения операций U^j_i перед теоремой 1, § 2). Утверждаем, что f осуществляет m-сводимость множества Ξ_a к $\pi^{-1}(S_a)$. Действительно, если выполняется условие из первой строчки определения $\pi_{f(y)}$, то $y \notin \Xi_a$ по определению Ξ_a и операции pm-цилиндрификации, и $\pi_{f(y)} = \varnothing \notin U^0_0(\{S_b\}_{b <_{\mathbf{O}} a}) = S_a$, т. е. $y \notin \Xi_a$ и $f(y) \notin \pi^{-1}(S_a)$. Если же выполняется условие второй строчки определения $\pi_{f(y)}$, то имеем $y \in \Xi_a \Leftrightarrow x \in \Xi_b \Leftrightarrow g_b(x) \in \pi^{-1}(S_b) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \pi g_b(x) \in S_b \Leftrightarrow \pi_{f(y)} = \Psi'_b(\pi g_b(x)) \in U^0_0(\{S_b\}_{b <_{\mathbf{O}} a}) = S_a \Leftrightarrow f(y) \in \pi^{-1}(S_a)$. Предложение доказано.

Следствие 7. *Пусть* $a \in \mathbf{O}$, V_a — *универсальное по* M-*сводимости семейство в* $\Sigma_{[a]}$. *Тогда множество* $\pi^{-1}(V_a)$ *универсально по* m-*сводимости в* $\Sigma_{[a]}^{-1}$.

Действительно, $\pi^{-1}(V_a) \in \Sigma_{[a]}^{-1}$ по предложению 1, и m-универсальное в $\Sigma_{[a]}^{-1}$ множество Ξ_a m-сводится к $\pi^{-1}(V_a)$, ибо $\Xi_a \leqslant_m \pi^{-1}(S_a)$ и $S_a \leqslant_M V_a \Rightarrow \pi^{-1}(S_a) \leqslant_m \pi^{-1}(V_a)$.

Из следствия 5, теоремы 1 из [6, § 3] и свойства 6) из [6, § 5] вытекает следующее утверждение, являющееся распространением одного из утверждений основного результата работы [9].

Следствие 8. *Пусть* V_a — M-*универсальное семейство в* $\widetilde{\Sigma}_{[a]}$ ($a \in \mathbf{O}$), V_{2^a} — M-*универсальное семейство в* $\widetilde{\Sigma}_{[2^a]}$. *Тогда для всякого* $X \subseteq \Pi$ имеем:

1) *если* $\pi^{-1}(V_a) \leqslant_m \pi^{-1}(X)$ и $\overline{\pi^{-1}(V_a)} \leqslant_m \pi^{-1}(X)$, *то либо* $\pi^{-1}(V_{2^a}) \leqslant_m \pi^{-1}(X)$, *либо* $\overline{\pi^{-1}(V_{2^a})} \leqslant_m \pi^{-1}(X)$;

2) *если* $\pi^{-1}(X) \leqslant_m \pi^{-1}(V_{2^a})$ *и* $\pi^{-1}(X) \leqslant_m \overline{\pi^{-1}(V_{2^a})}$, *то либо* $\pi^{-1}(X) \leqslant_m \pi^{-1}(V_a)$, *либо* $\pi^{-1}(X) \leqslant_m \overline{\pi^{-1}(V_a)}$.

Замечание 2. Следствие 4 показывает, что если $a \in \mathbf{O}$ есть обозначение конечного ординала, т. е. $|a|_{\mathbf{O}} < \omega$, то семейство S_a M-универсально в $\widetilde{\Sigma}_{[a]}$. Однако можно показать, что S_a не является M-универсальным в $\widetilde{\Sigma}_{[a]}$ при $|a|_{\mathbf{O}} \geqslant \omega$.

В заключение сделаем несколько замечаний о малой иерархии семейств рпм по конечным ординалам, классы которой, следуя [3], будем обозначать так: $\widetilde{\Sigma}_n^{-1}$, $\widetilde{\Pi}_n^{-1}$ ($n \in N$). Очевидно, $\widetilde{\Sigma}_0^{-1} = \{\varnothing\}$, $\widetilde{\Sigma}_{2n+1}^{-1}$ есть класс всех семейств рпм, представимых в виде $A_0 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup \ldots, \cup (A_{2n} \backslash A_{2n-1})$ для некоторой $2n+1$-последовательности $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{2n}$ эффективно открытых семейств, $\widetilde{\Sigma}_{2n+2}^{-1}$ есть класс всех семейств, представимых в виде $(A_1 \backslash A_0) \cup \ldots \cup (A_{2n+1} \backslash A_{2n})$ для некоторой $2n+2$-последовательности $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{2n+1}$ эффективно открытых семейств, $\widetilde{\Pi}_n^{-1}$ есть класс всех дополнений до семейств из $\widetilde{\Sigma}_n^{-1}$. Очевидно, $\bigcup_{n \in N} \widetilde{\Sigma}_n^{-1}$ есть булева алгебра, порожденная классом всех эффективно открытых семейств. Через Σ_n^{-1} ($n \in N$) обозначаем классы «конечной» иерархии Ершова, получающейся по этой же схеме из семейства множеств Π (единственное отличие от описания в [3] состоит в классе Σ_0^{-1}).

Следующее утверждение до некоторой степени двойственно предложению 2.

Предложение 6. *Пусть* $A \subseteq \Pi$, $N \in A$. *Тогда для всякого* $n \in N$ *из* $A \in \widetilde{\Sigma}_{2n+2}^{-1}$ *следует* $A \in \widetilde{\Sigma}_{2n+1}^{-1}$ *и из* $A \in \widetilde{\Pi}_{2n+1}^{-1}$ *следует* $A \in \widetilde{\Pi}_{2n}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $A \in \widetilde{\Sigma}_{2n+2}^{-1}$. По определению $\widetilde{\Sigma}_{2n+2}^{-1}$, $A = (B_1 \backslash B_0) \cup \ldots \cup (B_{2n+1} \backslash B_{2n})$ для некоторой последовательности $B_0 \subseteq \ldots \subseteq B_{2n+1}$ эффективно открытых семейств. По условию, $N \in A$. Очевидно, это может быть лишь в случае $N \notin B_0$. Поскольку B_0 открыто, отсюда следует $B_0 = \varnothing$. Получили, что $A = C_0 \cup (C_2 \backslash C_1) \cup \ldots \cup (C_{2n} \backslash C_{2n-1})$, где $C_k \rightleftharpoons B_{k+1}$, т. е. $A \in \widetilde{\Sigma}_{2n+1}^{-1}$. Случай $A \in \widetilde{\Pi}_{2n+1}^{-1}$ рассматривается аналогично. Предложение доказано.

Из предложений 2 и 6 вытекает такое утверждение, параллельное теореме 5 из [9].

Следствие 9. *Для любых* $A \subseteq \Pi$, $n \in N$ *имеем*:

1) *если* $A \in \widetilde{\Sigma}_n^{-1} \setminus \widetilde{\Pi}_{n-1}^{1}$ *то* $\varnothing \notin A$.

2) *если* $A \in (\widetilde{\Sigma}_{2n+2}^{-1} \setminus \widetilde{\Sigma}_{2n+1}^{-1}) \cup (\widetilde{\Pi}_{2n+1}^{-1} \setminus \widetilde{\Pi}_{2n}^{-1})$, *то* $N \notin A$.

Замечание 3. Пусть V_n — M-универсальное семейство в $\widetilde{\Sigma}_n^{-1}$ ($n \in N$). Легко понять, что M-степени семейств $\{V_n, \overline{V}_n | n \leqslant 2\}$ образуют начальный сегмент в частично упорядоченном множестве всех M-степеней. Из доказательства предложения 1 из [10] следует, что для $n = 3$ это не так: имеется бесконечно много M-степеней, сводящихся к M-степени семейства V_3.

Замечание 4. Естественно поставить вопрос о связи между классами $\widetilde{\Sigma}_n^{-1}$ и $\widehat{\Sigma}_n^{-1} \rightleftharpoons \{X \subseteq \Pi | \pi^{-1}(X) \in \Sigma_n^{-1}\}$ $(n \in N)$. Если для иерархии $\widetilde{\Sigma}_n^0$ имеется тесная связь между классами $\widetilde{\Sigma}_n^0$ и $\widehat{\Sigma}_{n+1}^0$, то в данном случае связь очень слабая: в теореме 6 из [7] доказано, что $\widehat{\Sigma}_2^{-1} \not\subseteq \bigcup_{n \in N} \widetilde{\Sigma}_n^{-1}$.

§ 4

Тривиально проверяется, что все результаты этой статьи, полученные для нумерованного множества **П**, справедливы также и для нумерованного множества **K** (доказательства почти дословно совпадают с приведенными, а некоторые утверждения из § 3 доказываются даже проще). Вообще, кажется правдоподобным, что полученные результаты справедливы для некоторого класса нумерованных множеств, описываемого в теоретико-нумерационных терминах.

Мы рассматривали семейства рпм, однако можно было рассматривать произвольные подсемейства семейства $\mathscr{P}(N)$. Определения даются с очевидными изменениями (так, «$\alpha \in \Pi$» во всех определениях надо заменить на «$\alpha \subseteq N$»). Например, класс $\mathscr{D}^*$ базисных открытых семейств состоит из всех семейств вида $D_\gamma^* \rightleftharpoons \{\alpha \subseteq N \mid \gamma \subseteq \alpha\}$, где $\gamma \in \Delta$. Применив к этому классу $\mathscr{D}^*$ схемы из § 1, получим некоторые иерархии семейств множеств Σ_n^*, Π_n^*, $\Sigma_{(a)}^*, \Pi_{(a)}^*$ $(n \in N,\ a \in L_0)$. При этом, очевидно, $\widetilde{\Sigma}_n^0 = \Sigma_n^* \cap \Pi$, $\widetilde{\Sigma}_{(a)} = \Sigma_{(a)}^* \cap \Pi$. Результаты статьи, касающиеся свойств иерархий $\widetilde{\Sigma}_n^0$, $\widetilde{\Sigma}_{(a)}$, справедливы и для этих расширенных иерархий (доказательства получаются очевидными модификациями приведенных, при этом надо учесть замечания из конца § 3 [6]).

Быть может, представляет интерес изучение семейств из $\widetilde{\Sigma}_n^0 \cap \widetilde{\Pi}_n^0$ $(n \geqslant 2)$ посредством построения малой иерархии, возникающей из класса $\widetilde{\Sigma}_{n-1}^0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
2. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
3. **Ершов Ю. Л.** Об одной иерархии множеств I.— Алгебра и логика, 1968, т. 7, № 1, с. 47—73.
4. **Ершов Ю. Л.** Об одной иерархии множеств II.— Алгебра и логика, 1968, т. 7, № 4, с. 15—47.
5. **Ершов Ю. Л.** Об одной иерархии множеств III.— Алгебра и логика, 1970, т. 9, № 1, с. 34—51.
6. **Селиванов В. Л.** О структуре степеней неразрешимости индексных множеств.— Алгебра и логика, 1979, т. 18, № 4, с. 463—480.
7. **Селиванов В. Л.** Несколько замечаний о классах рекурсивно перечислимых множеств.— Сиб. мат. журн., 1978, т. 13, № 1, с. 153—160.
8. **Ишмухаметов Ш. Т., Кузьмина Т. М.** О семействах рекурсивно перечислимых множеств.— В кн.: Материалы V Всесоюз. конференции по математической логике. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1979, с. 57.
9. **Hay L.** A discrete chain of degrees of index sets.— J. Symbolic Logic, 1972, v. 37, N 1, p. 139—144.
10. **Селиванов В. Л.** Об индексных множествах вычислимых классов конечных множеств.— В кн.: Алгоритмы и автоматы. Казань: Казанский ун-т, 1978. с. 95—99.

К ТЕОРИИ СИНТЕЗА ПРОГРАММ

Н. Н. НЕПЕЙВОДА, Д. И. СВИРИДЕНКО

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в языках программирования начинают занимать все большее место дескриптивные структуры, зачастую вытесняя чисто алгоритмические [1, 2]. Кроме того, сама форма представления алгоритмических структур претерпела большие изменения в связи с появлением структурного программирования и осознанием того, что алгоритм существует не сам по себе, а лишь как выражение наших мыслей о разумных способах преобразования некоторой информации [3]. Языки программирования становятся, как это принято сейчас говорить, языками спецификаций алгоритмов, имея в виду модально-повествовательный характер таких спецификаций вместо императивов алгоритмических языков. На наш взгляд, «... рост относительной стоимости программирования и отладки в общей стоимости применения ЭВМ» [4] не есть главная причина такого развития. Скорее причины кроются в необходимости приобщения к ЭВМ как можно большего числа пользователей, для которых чисто «алгоритмический стиль мышления» не всегда является привычным, а также желание выделить в программистской деятельности творческие элементы, оставив рутинные операции машине.

Так или иначе, возникает задача перехода от описания задания, в котором существенное место занимают дескриптивные элементы и алгоритмическая сущность которых неочевидна, к чисто алгоритмическому, которое уже может быть воспринято ЭВМ и выполнено ею. Такую задачу будем называть *задачей синтеза программ*. Примерами задач синтеза могут служить вопросно-ответные системы, решатели задач, генераторы отчетов, трансляторы таблиц решений, системы управления базами данных (СУБД), пакеты прикладных программ и т. п. [5].

Развитие программирования позволяет считать задачу синтеза программ весьма актуальной. Однако имеющиеся подходы к ее анализу показывают нетривиальность такой задачи. В связи с этим возникает необходимость глубокого теоретического исследования задачи синтеза и соответственно создания *теории синтеза программ*.

Первые две работы, посвященные теоретическому исследованию задачи синтеза программ, относятся к началу 70-х годов [6, 7], хотя исследования в области логики построения алгоритмов начались намного раньше. Обе эти работы резко отличаются друг от друга и фактически предопределили два различных пути дальнейших исследований. В основу работы З. Манна и Р. Уолдингера [6] был положен тот факт, что богатый набор методов и приемов синтеза программ по их описанию дает практика программирования. Они продемонстрировали возможность синтеза циклических и рекурсивных программ. Недавно появившаяся работа [8] как бы подводит итог почти десятилетних исследований в этом направлении, которое мы будем называть *эвристическим*.

Другая работа, статья Р. Констейбла [7], указала на возможность иного подхода — назовем его *логическим*. Констейбл отметил, что задача синтеза программ имеет самое непосредственное отношение к интуиционизму, поскольку если на описание задания смотреть как на теорему соответствующей конструктивной теории, то возможность существования требуемого текста программы следует из теоремы Клини о существовании реализации. Необходимо отметить, что еще в 1968 г. А. А. Марков во вводной лекции курса «Конструктивная математическая логика» обосновал возможность и целесообразность применения конструктивной логики к программированию. Одновременно им были глубоко проанализированы те черты традиционной конструктивной математики, которые мешают ее приложениям, и была намечена программа работ в данном направлении. К сожалению, это выступление осталось неопубликованным.

Оба эти подхода, логический и эвристический, представляют собой крайние варианты решения *дедуктивной* задачи синтеза. Другие подходы к данной задаче фактически являлись либо модификациями одного из вышеуказанных, либо попыткой учесть сильные стороны каждого из них [8—22]. Из-за того, что зачастую сама задача ставится в операционных терминах, возникают еще два подхода к синтезу: *трансформационный* и *индуктивный*, реализирующие переход от одних функциональных спецификаций к другим. Так, трансформационный [23] реализует переход от вычислимости к вычислениям, от абстрактной функциональной спецификации к конкретной. Индуктивный подход [24—30] реализует обратный переход: от вычислений к вычислимости, от конкретных примеров действия программы к алгоритму. Отметим, что оба эти подхода в последнее время приобрели заметную дедуктивную окраску. В дальнейшем речь будет идти о дедуктивной задаче синтеза, а точнее — о логическом подходе к ее решению.

§ 2. ЗАДАЧА СИНТЕЗА ПРОГРАММ

Назначение программы — служить инструментом решения задачи. Поэтому естественно предварительно проанализировать понятие «задачи» и процесса ее решения.

Задача предполагает прежде всего существование определенной *цели* и необходимость поиска средств ее достижения. Будем называть процесс нахождения такого средства *решением* задачи, а само найденное средство — *реализацией*. Полная формулировка задачи включает в себя следующие компоненты:

а) характеристику природы *исходных данных* и соотношений между ними;

б) характеристику *результатов*, их взаимосвязи и связи с исходными данными;

в) описание *средств*, при помощи которых должна быть построена реализация; это описание, в свою очередь, распадается на описание исходных операций, их взаимосвязи и наших знаний о них, допустимых способов их композиции;

г) *предписания*, ограничивающие класс программ, которые могут служить реализацией решения, путем навязывания нам структуры будущего решения, методов, которые должны быть использованы и т. д.;

д) *ограничения*, накладывающиеся на ресурсы либо полностью запрещающие их использование; ресурсами могут быть время, память, спецпроцессоры и т. п.

Наиболее традиционный случай — когда части г) и д) отсутствуют и часть в) задается некоторой *вычислительной обстановкой*, т. е. конструктивной (в традиционном смысле [31]) формальной теорией T в языке (пополненного) исчисления предикатов, снабженной библиотекой стандартных процедур, реализующих конструктивные аксиомы. В этом случае задаче можно соотнести следующую цель:

«для каждого набора значений исходных данных, удовлетворяющих некоторым требованиям, найти набор значений неизвестных переменных, удовлетворяющих заданным требованиям, а также условию, характеризующему связь между исходными данными и неизвестными».

В языке исчисления предикатов эта цель может быть формализована так:

«Доказать предложение ψ в теории T, где ψ имеет вид

$$\psi = \forall \bar{x}(A(\bar{x}) \Rightarrow \exists \bar{y} B(\bar{x}, \bar{y})),$$

$\bar{x}$, $\bar{y}$ — конечные наборы переменных».

Однако речь идет не просто о демонстрации того, что формула ψ выполняется на некоторой модели $\mathfrak{A}$, а о конструировании алгоритма f, который по набору значений $[\bar{x}] \in |\mathfrak{A}|^n$, для которого верно $A([\bar{x}])$, вычисляет такое значение $f([\bar{x}]) \in |\mathfrak{A}|^m$, что выполняется условие $B([\bar{x}], f([\bar{x}]))$. Такая постановка, как легко убедиться, в точности соответствует понятию реализуемости в интуиционистской логике. В том случае, когда интерпретацию типов данных можно считать нумерованными множествами [32], мы можем дать следующее определение реализуемости, копирующее идею определения Клини [33] для арифметики.

Пусть $\mathfrak{N}$ — совокупность нумерованных множеств, замкнутая относительно прямой суммы и прямого произведения. Предположим также, что для любых $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathfrak{N}$ существует главная вычислимая нумерация семейства морфизмов $\mathrm{Mor}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Примером такой совокупности $\mathfrak{N}$ может служить λ-модель C^*_{20} (см. [32]).

Пусть L — язык исчисления предикатов. Сопоставим каждой формуле A некоторое нумерованное множество $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}$ и отношение $p \vDash A$ («p подтверждает A»), где $p \in \mathfrak{A}$. Сопоставление определим индуктивно:

1. Для каждой элементарной формулы A множество $\mathfrak{A}$ и отношение $p \vDash A$ считается заданным.

2. Если C имеет вид $A_1 \& \ldots \& A_n$, то сопоставим ей нумерованное множество $L = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$ и $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle \vDash C \rightleftharpoons \forall_i \leqslant n(p_i \in \mathfrak{A}_i \Rightarrow \Rightarrow p_i \vDash A_i)$.

3. Если C имеет вид $A_1 \vee \ldots \vee A_n$, то сопоставим ей нумерованное множество $L = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$ (прямая сумма), где для каждых $i \neq j$ $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{A}_j = \varnothing$ и

$$p \vDash C \rightleftharpoons \exists i \leqslant n(p \in \mathfrak{A}_i \& p \vDash A_i)$$

4. Если C имеет вид $(A \Rightarrow B)$, то сопоставим ей нумерованное множество L, состоящее из всех вычислимых морфизмов из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, $L = \mathrm{Mor}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, снабженное главной вычислимой нумерацией, и

$$p \vDash C \rightleftharpoons \forall p' \in \mathfrak{A}(p' \vDash A \to p(p') \vDash B).$$

5. Если C имеет вид $\neg A$, то сопоставим этой формуле $L = \{\bot\}$ и

$$\bot \vDash A \rightleftharpoons \neg \exists p \in \mathfrak{A}(p \vDash A).$$

6. Если $C = \forall x A(x)$, то сопоставим ей $L = \mathrm{Mor}(V, \mathfrak{A})$, где V — множество значений переменной x, и

$$p \vDash \forall x A(x) \rightleftharpoons \forall v \in V(p(v) \vDash A(v)).$$

7. Если $C = \exists x A(x)$, то $L = V \times \mathfrak{A}$ и

$$\langle v, p \rangle \vDash \exists x A(x) \rightleftharpoons p \vDash A(v).$$

Если функция f может быть представлена в терминах некоторого алгоритмического языка, то это представление и является искомой *программой — реализацией*. Задача синтеза предполагает нахождение такой программы конструктивно. Поэтому ставится следующая задача:

«Указать тот класс ситуаций, в которых возможно эффективное нахождение программы — реализации формулы ψ».

Заметим, что прежде всего формула ψ должна быть выполнимой на модели $\mathfrak{A}$. Синтаксической гарантией выполнимости предложения является его доказательство в некоторой теории T, при этом такая гарантия в определенных случаях может быть эффективной. Если, кроме того, потребовать *конструктивность* теории T, то тогда мы будем иметь в своем распоряжении алгоритм, строящий по любому доказательству формулы ψ другой алгоритм, являющийся реализацией этой теоремы. Другими словами, здесь имеют место два результата, являющиеся непосредственным обобщением теорем Клини — Нельсона [33, 34] и Минца [35] на случай «нумерованных реализаций», устанавливающих существование реализации доказуемой формулы и эквивалентность получаемых реализаций для разных понятий реализуемости.

Сами по себе эти принципиальные результаты, которые обобщены также для анализа и для теории множеств [36, 37], недостаточно конструктивны для практического синтеза программ. Во-первых, уже для арифметики получается слишком высокая оценка сложности извлекаемого алгоритма (ε_0-рекурсивные функции). Во-вторых, в традиционных формализациях структура доказательства дает лишь отдаленное представление о действии извлекаемого алгоритма. Однако даже такая постановка задачи была принята некоторыми исследователями [9—11] как базис конкретных разработок. Но, как показывает анализ указанных работ, на этом пути возникли существенные трудности. Традиционное понятие конструктивности оказалось слишком общим и слишком узким для задачи синтеза программ. Узость объясняется сильной ориентацией на теорию чисел и привязкой к нумерациям объектов, т. е. к конкретному представлению данных. Чаще всего нам важны лишь некоторые свойства действий над данными. Кроме того, при таком подходе нельзя учесть ограничения на ресурсы, предписания и такие распространенные ситуации, как наличие операций, изменяющих «мир».

Учитывая эти обстоятельства, укажем более адекватную точку зрения на исходные понятия — языка, интерпретации, логики и т. д. Так, для нас недостаточно понимать логику как исчисление. Формальные конструкции имеют ценность лишь постольку, поскольку они имеют интерпретацию. Таким образом, на первом плане должны быть семантические вопросы. В то же время легче поддаются полному, конечному и эффективному решению как человеком, так и машиной синтаксические проблемы, а значит, естественно решать семантические проблемы, предварительно сформулировав их как синтаксические. Поэтому в дальнейшем будем придерживаться следующего методологического принципа: *синтаксическая правильность текстов, записанных на формальном языке, должна убедительно гарантировать семантическую.*

Поскольку здесь речь идет о некотором подходе к анализу проблемы синтеза программ, приводимые ниже определения схематичны, поэтому содержат такие общие понятия, как, например, «простыми средствами» и т. п., которые обретают точный смысл при конкретизации ситуации.[1)]

Определение 1. *Язык* — это разрешимое простыми средствами множество конечных слов некоторого алфавита, называемых *формулами*, образующихся применением конечного числа неукорачивающих *правил порождения.*

Последнее означает, что любая достаточно сложная формула может быть просто разбита на составные части.

Определение 2. *Интерпретированный язык* — это язык вместе с заданным классом возможных интерпретаций, где каждая интерпретация предполагает множество степеней достоверности. Определено отношение «формула A со степенью достоверности α подтверждается в интерпретации e» такое, что степень достоверности A доста-

---

1) Так, например, под «простыми средствами» в различных ситуациях можно понимать алгоритмы полиномиальной или экспоненциальной сложности или, скажем, примитивно рекурсивные или общерекурсивные и т. п.

точно просто и однозначно определяется степенями достоверности ее компонент.

Например, для обычной классической логики множество степеней достоверности для каждой интерпретации есть {0, 1}, в то время как для многих программных логик это множество состоит из множеств путей в программе [38].

О п р е д е л е н и е 3. *Логика* — это пара ⟨интерпретированный язык, исчисление⟩ такая, что отношение P — вывод формулы A из $A_1, \ldots, A_n$ по правилам логики» разрешимо простыми средствами и в любой интерпретации степень достоверности заключения правильно построенного вывода ненамного меньше степени достоверности посылок.

В классической логике истинность формул при выводе сохраняется, а в программной — область истинности заключения есть пересечение областей истинности посылок.

Однако не все логики нас устраивают в качестве инструмента. Прежде всего потребуем, чтобы каждый шаг рассуждения имел е с т е с т в е н н у ю и н т е р п р е т а ц и ю, так как в противном случае структура доказательства не дает нам полного представления о структуре строящегося объекта. Далее, подтверждение заключения должно р а в н о м е р н о зависеть от подтверждений посылок, т. е. должно существовать эффективное правило сборки реализации заключения из реализаций посылок. Заметим, что требование п о л н о т ы относительно выбранной семантики мы на логику не накладываем. Полнота — это приятная дополнительная особенность.

О п р е д е л е н и е 4. *Теория* есть тройка ⟨алфавит, логика, множество аксиом⟩.

О п р е д е л е н и е 5. *Текст программы* — это конечная комбинация заданных исходных предписаний при помощи фиксированного конечного множества правил их соединения, где и предписания, и правила их комбинирования есть конструкции некоторого фиксированного языка.

Конкретизируя «кто» и «как» должен выполнять указанные предписания, мы приходим к следующим понятиям.

О п р е д е л е н и е 6. *Алгоритмический язык* — это разрешимое простыми средствами множество текстов программ вместе с категорией интерпретаций, в которой выделены класс допустимых интерпретаций исходных предписаний и совокупность функторов, одно-однозначно сопоставленных правилам сочленения предписаний.

Согласно этому определению действие (семантика) программы понимается как морфизм, составленный регулярным и равномерным образом из морфизмов, реализующих исходные предписания, из которых состоит текст программы.

О п р е д е л е н и е 7. Логика (теория) L называется *конструктивной относительно алгоритмического языка* ALG, если выполнены следующие требования.

а) Каждой логической связке сопоставлен фактор, преобразующий объекты, являющиеся интерпретациями аргументов этой связки. В этом случае будем говорить, что задана иерархия типов данных и каждой формуле A соответствует тип данных $\underline{a}$ (формула A типа $\underline{a}$), являющийся объектом категории.

Предположим, что имеется «пустой» тип данных *empty*.

б) Каждой формуле типа $\underline{empty}$ (*дескриптивной формуле*) сопоставлено условие на объекты категории интерпретаций, степень выполнения которого считается степенью ее достоверности.

в) Каждой формуле типа, отличного от $\underline{\mathrm{empty}}$ (*конструктивной формуле*), сопоставлено условие на объектах данного типа; объект, удовлетворяющий данному условию в той или иной степени, считается реализацией формулы той же степени достоверности.

г) Каждому доказательству конструктивной формулы эффективно сопоставляется текст программы языка ALG, действие которой представляет реализацию указанной формулы и конструирование данной реализации базируется на реализациях конструктивных посылок (аксиом), используемых в доказательстве.

Отметим, что в этом определении все преобразования естественны в том смысле, что определяются индукцией по построению объектов и сводятся к сопоставлению правилу построения функтора комбинирования. Все упоминаемые в определении условия могут быть расплывчаты в смысле [39] — это наиболее типичный случай.

Пример. Рассмотрим обычную гильбертовскую формулировку позитивного импликативного исчисления [40]:

Схемы аксиом:

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C));$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)).$$

Правило вывода:

$$\frac{A,\ A \Rightarrow B}{B}.$$

Каждой формуле сопоставим тип $\underline{\mathrm{ob}}$ (обы в смысле [41]). Программы будут комбинациями переменных и исходных обов K, S по правилам комбинаторной логики. Правило вывода соответствует правилу конверсии, схемы аксиом — исходным обам:

$$Sabc = (ac)(bc),$$

$$Kab = a.$$

Рассмотрим вывод $A \Rightarrow C$ из $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow C$ и построим соответствующий ему комбинатор, осуществляющий композицию двух функций:

$$\frac{(((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))) \quad \# S \# \qquad (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \quad \# S \#}{((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \quad \# SS \#}$$

$$\frac{(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \quad \# K \# \qquad (A \Rightarrow B) \quad \# y \#}{(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \quad \# Ky \#}$$

$$\frac{((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \quad \# SS \# \qquad (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \quad \# Ky \#}{(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \quad \# SS(Ky) \#}$$

$$\frac{(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \quad \# K \# \qquad (B \Rightarrow C) \quad \# x \#}{(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \quad \# Kx \#}$$

$$\frac{(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \quad \# SS(Ky) \# \qquad (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \quad \# Kx \#}{(A \Rightarrow C) \quad \# SS(Ky)(Kx) \#}.$$

Комбинатор $SS(Ky)(Kx)$, где x — реализация $(B \Rightarrow C)$, y — реализация $(A \Rightarrow B)$, является искомым. Действительно, применим его к реализации A:

$$(SS(Ky)(Kx))a = ((S(Kx))(Ky)(Kx))a = S(Kx)(Ky(Kx))a =$$

$$= S(Kx)ya = ((Kx)a)(ya) = x(y(a)),$$

т. е. получили реализацию C, что и требовалось доказать.

Отметим, что в примере дескриптивных формул не было. Все формулы считались конструктивными и все наши доказательства транслировались непосредственно в текст программы на соответствующем алгоритмическом языке.

§ 3. ПОСТРОЕНИЯ, СВЯЗИ И ПРИЗНАКИ

Рассмотрим в качестве содержательной иллюстрации вышесформулированных определений так называемый логический подход к программированию [42—46].

Цель излагаемых ниже теоретических построений — создание инструмента логического конструирования вычислительных программ из готовых подпрограмм. Другими словами, требуется создание теории пакетов программ для вычислительных задач. При этом предполагается, что

— спецификации задаются в описательной форме;

— нас интересуют лишь достаточно простые программы, являющиеся в некотором смысле простыми комбинациями имеющихся подпрограмм;

— знание об имеющихся программах допускает точную формализацию на языке логики предикатов;

— синтезируемые программы могут содержать циклы либо на самом верхнем уровне, либо внутри стандартных подпрограмм (это предположение весьма радикальное, но сложившаяся практика конструирования пакетов программ ему не противоречит);

— ограничения на объем требуемой памяти и время работы программы не являются существенными [1].

Таким образом, центральная наша задача — синтез достаточно хороших программ без циклов над заданной совокупностью абстрактных типов данных, стандартных подпрограмм и знаний о них (вычислительной обстановкой). Отметим, что чисто алгебраический подход к задаче синтеза явно игнорирует последнюю составляющую — знание. Однако необходимо учитывать следующее: ни одним свойством программы мы не сможем воспользоваться, если его не знаем, и в то же время объем знаний о стандартных подпрограммах обычно крайне ограничен. Последнее обстоятельство играет положительную роль. Это фактически один из аспектов концепции модульного программирования — ограничивать информацию о модуле, которая доступна снаружи.

В данном параграфе приводится доказательство одного результата, очерчивающего важный класс разрешимых конструктивных теорий. По пути формулируются многие понятия, являющиеся центральными в индуцируемой логическим подходом новой технике формализации.

Для достижения конструктивности логики необходимо обеспечить естественное соответствие между правилами вывода и операторами алгоритмического языка. С этой целью формализация естественного вывода [47] была несколько перестроена [43]. В результате получившаяся формализация оказалась гораздо ближе к обычным человеческим рассуждениям. Кроме того, она оказалась лучше и с точки зрения машинного поиска доказательства.

Система состоит из трех конструктивных правил вывода.

Правило применения процедуры. Как уже было сказано, функциональная формула

$$\forall \bar{x}((\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n) \Rightarrow \exists \bar{y}(\mathfrak{B}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{B}_k))$$

---

[1] Это соглашение будет значительно ослаблено в дальнейших работах.

выражает описание процедуры. Для получения нужных результатов на вход процедуры необходимо подать конкретные значения аргументов и подтверждение их правильности, т. е. возможности применимости процедуры. Отсюда приходим к следующему правилу вывода:

$$\forall x_1 \ldots x_m(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \Rightarrow \exists y_1 \ldots y_l(\mathfrak{B}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{B}_k))$$

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1(t_1,\ldots,t_m)\\ \vdots\\ \mathfrak{A}_n(t_1,\ldots,t_m)\end{array}\right\}
\begin{array}{l}t_1,\ldots,t_m \text{ — конкретные значения аргументов;}\\ \\ \mathfrak{A}_i \text{ — условия корректности значений и аргументы высших}\\ \qquad\text{типов}\end{array}\\
\hline
\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}_1(t_1,\ldots,t_m,c_1,\ldots,c_l)\\ \vdots\\ \mathfrak{B}_k(t_1,\ldots,t_m,c_1,\ldots,c_l)\end{array}\right\}
\begin{array}{l}c_i \text{ — обозначения полученных результатов;}\\ \\ \mathfrak{B}_i \text{ — условия связи «вход-выход».}\end{array}
\end{array}$$

Здесь c_i — новые вспомогательные константы, обозначающие промежуточные результаты. В процессе вывода нам абсолютно безразлично, с помощью какой функции они получены, важно лишь наличие требуемых условий. Поэтому и выбран нарочито безличный способ отметки построенных значений.

Правило описания процедуры. Данное правило вводит предположение, а затем его устраняет. Чтобы доказать функциональную формулу, необходимо указать способ построения $\bar{y}$ по $\bar{x}$, используя имеющиеся у нас средства, и его обоснование. Необходимо вывести $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{A}$ при помощи итерационного процесса применения правил вывода (в том числе, возможно, и правил описания процедуры). Это заставляет нас ввести понятие *вспомогательного вывода*, начинающегося с объявления временно истинных некоторых фактов и заканчивающегося результатами:

$$\begin{array}{l}
]\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n;\, x_1,\ldots,x_m \text{ — произвольны\} «допустим, что } \mathfrak{A}_i \text{ истинны и \ldots»}\\
\left|\begin{array}{l}\qquad\vdots\\ \qquad\mathfrak{B}_1(t_1,\ldots,t_l)\\ \qquad\vdots\\ \qquad\mathfrak{B}_k(t_1,\ldots,t_l)\end{array}\right\}\text{«По правилам вывода получаем \ldots»}\\
\hline
\forall x_1,\ldots,x_m(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_n \Rightarrow \exists y_1 \ldots y_l(\mathfrak{B}_1(y_1,\ldots,y_l) \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{B}_k(y_1 \ldots, y_l)))
\end{array}$$

Заметим, что интерпретация правил вывода, применяемых к формулам, в которых $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$ элементарны, требует лишь наличия функций объектов и операции композиции. Если же применять эти правила к формулам произвольной логической сложности, то необходимо уметь строить иерархии функционалов конечных типов [48—50]. В дальнейшем по мере того, как будут сниматься ограничения на вид синтезируемых программ, понадобятся пространства функционалов более сложной природы. В частности, кажется правдоподобным, что в случае снятия ограничения на циклы адекватными моделями могут оказаться так называемые *аппликативные А-пространства* [51, 52].

Правило разбора случаев. Для того чтобы воспользоваться либо имеющимися с самого начала, либо уже доказанными классификациями, мы должны разобрать по отдельности каждый из получившихся случаев. Соответственно, чтобы доказать классификацию, необходимо для каждого из появляющихся случаев подобрать такие условия его истинности, которые в сумме покрывали бы все возможности, т. е. опять-таки подобрать классификацию. В этом явное преимущество интуиционистской логики, поскольку в ней отсутствуют формулы вида $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$. Отсюда приходим к следующему правилу вывода, двойственному самому себе:

$$\begin{array}{c}
\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n\} \text{ исходная классификация} \\
\begin{array}{l|l}
\neg & \mathfrak{A}_1 \quad \ldots \\
 & \vdots \\
 & \mathfrak{B}_{i_1}(t_1^1, \ldots, t_k^1)
\end{array}
\quad
\begin{array}{l|l}
\neg & \mathfrak{A}_n \\
 & \vdots \\
 & \mathfrak{B}_{i_m}(t_1^m, \ldots, t_k^m)
\end{array} \\
\hline
\mathfrak{B}_1(c_1, \ldots, c_k) \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_l(c_1, \ldots, c_k).
\end{array}$$

Здесь каждое $\mathfrak{B}_{i_j}$ есть либо один из членов выводимой дизъюнкции, либо ложь. Отметим, что некоторые $\mathfrak{B}_i$ могут получаться по нескольку раз, другие ни разу.

Данное правило требует для своей реализации булевых значений, если $\mathfrak{A}_i$ элементарны, и конструкций типа прямой суммы в общем случае [39].

Подробнее все эти правила вывода вместе с примерами доказательства рассмотрены в [43].

Запись $\mathfrak{B}(\bar{x})$ означает, что в любой предикат из $\mathfrak{B}$ входят все переменные из вектора $\bar{x}$, $\mathfrak{B}(\tilde{\bar{x}})$ — что в любой предикат из $\mathfrak{B}$ входит хотя бы одна переменная из вектора $\bar{x}$. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами) — конъюнкции элементарных формул; A, B, C, ... — исходные предикаты. Выделим следующие классы формул:

а) *факт* — формула вида $\mathfrak{A}(\bar{c})$ или $\mathfrak{A}(\bar{c})$, где $\bar{c}$ — вектор констант;

б) *связь* — формула вида $\forall\bar{x}(\mathfrak{A}(\bar{\bar{x}}) \Rightarrow \mathfrak{B}(\bar{\bar{x}}))$;

в) *классификация* — формула вида

$$\forall\bar{x}(\mathfrak{A}(\bar{x}) \Rightarrow \mathfrak{B}_1(\bar{\bar{x}}) \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_n(\bar{\bar{x}}));$$

г) *опровержение* — формула вида $\forall\bar{x}(\mathfrak{A}(\bar{x}) \Rightarrow \neg\mathfrak{B}(\bar{\bar{x}}))$;

д) *построение* — формула вида $\forall\bar{x}(\mathfrak{A}(\bar{x})\,\&\,\mathscr{V} \Rightarrow \exists\bar{y}\mathfrak{B}(\bar{x}, \tilde{\bar{\bar{y}}}))$, где $\mathscr{V}$ — конъюнкция (возможно, пустая) построений (здесь $\bar{y}$ — результаты построения, $\bar{x}$ — аргументы, $\mathscr{V}$ — процедуры-параметры);

е) *гиперпостроение* — формула вида

$$\forall\bar{x}(\mathfrak{A}(x)\,\&\,\mathscr{V} \Rightarrow [(\exists\bar{y}_1(\mathfrak{B}_1(\bar{x}, \tilde{\bar{\bar{y}}}_1)\,\&\,\mathfrak{C}_1(\tilde{\bar{\bar{y}}}_1)) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee (\exists\bar{y}_n(\mathfrak{B}_n(\bar{x}, \tilde{\bar{\bar{y}}}_n)\,\&\,\mathfrak{C}_n(\tilde{\bar{\bar{y}}}_n)))],$$

где $\mathscr{V}$ и $\mathfrak{C}_i$ — конъюнкции (возможно, простые) гиперпостроений;

ж) *признак 1-го рода* — формула вида

$$\forall\bar{x}((\mathfrak{A}(\bar{x}) \Rightarrow \mathfrak{B}(\bar{x})) \Rightarrow \mathfrak{C}(\bar{\bar{x}}));$$

з) *признак 2-го рода* — формула вида

$$\forall\bar{x}(\forall\bar{y}(\mathfrak{A}(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \mathfrak{B}(\bar{\bar{x}});$$

и) *признак 3-го рода* — формула вида $\forall\bar{x}, \bar{y}(\mathfrak{A}(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \mathfrak{B}(\bar{\bar{x}}))$ (здесь $\bar{y}$ — непустой вектор).

Эти классы формул естественно появляются при анализе процесса извлечения программы из доказательства. Будем называть перечисленные выше формулы *стандартными*. Назовем сумму логических длин, входящих в некоторый вывод формул, *длиной* этого вывода.

Теорема 1. *По любой интуиционистской теории T эффективно можно построить такое ее консервативное расширение T', что*

i) все аксиомы T' стандартны;

ii) если дан вывод $\mathfrak{R}$ в T, то он с увеличением длины не более чем в три раза и сохранением извлекаемой программы эффективно может быть перестроен в вывод $\mathfrak{R}$ в T';

iii) если $\mathfrak{A}$ — формула сигнатуры теории T' и дан вывод $\mathfrak{A}$ в T', то с увеличением длины не более чем в три раза этот вывод можно перестроить в вывод формулы $\mathfrak{A}$ в теории T с сохранением извлекаемой программы.

Теорема доказывается последовательной заменой сложных подформул в аксиомах на новые предикаты и добавлением аксиом — определений для них. Она демонстрирует реальную возможность ограничиться при формализации только аксиомами указанных выше видов — это не испортит ни доказательства, ни извлекаемые из них программы.

Таким образом, задача построения программы из подпрограмм формализуется как задача поиска вывода в интуиционистской логике формулы — построения из аксиом некоторой элементарной теории, описывающей наши исходные функции, предикаты и знания о них.

Заметим, что при всей рутинности своего доказательства эта теорема заставляет обратить внимание на одно интересное обстоятельство. Иногда можно вводить построения, которым не соответствуют реализованные подпрограммы. Но это возможно лишь в том случае, когда эти построения являются «тупиковыми»: они не должны быть существенно использованы при доказательстве реально требующихся программ. Другими словами, предикаты исходного языка можно делить не только на вычислимые и теоретические, но и на внешние предоставляемые пользователю и внутренние (вводимые для наших собственных нужд).

Для задачи синтеза программ особый интерес представляют те теории, в которых проблема выводимости построений разрешима. Примером может служить так называемая беспризнаковая теория.

Определим количество входных переменных в построении $\forall\bar{x}(\mathfrak{A}(\bar{x})\ \&\ \&\mathscr{V} \Rightarrow \exists\bar{y}(\mathfrak{B}(\bar{x},\ \bar{y})))$ следующим образом: «количество элементов в наборе $\bar{x}$ + сумма числа элементов в наборах — результатах построений из $\mathscr{V}$». Построение назовем *несокращающимся*, если в любом предикате из $\mathfrak{B}$ количество различных переменных не меньше, чем количество входных переменных построения, и все посылки — построения его посылок — построений также несокращающиеся.

О п р е д е л е н и е 8. Стандартизованная теория T *беспризнаковая*, если она не содержит гиперпостроений, не являющихся построениями, и признаков и, кроме того, все ее построения несокращающиеся.

Т е о р е м а 2. *Проблема выводимости для построений, в которых все члены из $\mathscr{V}$ несокращающиеся, разрешима в любой конечной беспризнаковой теории.*

З а м е ч а н и е. Отметим, что под сокращающее построение можно легко замаскировать признак 3-го рода. А именно, если дана аксиома — признак $\forall(\bar{x},\ \bar{y}(\mathfrak{A}(\bar{x},\ \bar{y}) \Rightarrow \mathfrak{B}(\bar{\bar{x}}))$, то достаточно заменить в $\mathfrak{B}$ все предикаты $P(\bar{x})$ на $P'(\bar{x},\ a)$ и аксиому — на формулу $\forall\bar{x},\ \bar{y}(\mathfrak{A}(\bar{x},\ \bar{y}) \Rightarrow \Rightarrow \exists a\mathfrak{B}(\bar{x},\ a))$. Поэтому теория без признаков, но содержащая сокращающие построения, может оказаться неразрешимой даже относительно теорем вида $\exists\bar{x}\mathfrak{B}(\bar{x})$. В частности, такой пример легко построить в классе теорий полугрупп с неразрешимой проблемой тождества.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем проверять выводимость в теории, сводя ее к проверке выводимости конъюнкций «обобщенных фактов», включающих метапеременные, из аксиом теории и допущений. При этом константы, аксиомы, допущения, метапеременные и цели классифицируются по уровням. Уровни будут образовывать дерево, и при доказательстве факта уровня σ или при унификации переменной уровня σ можно использовать лишь объекты уровней $\leqslant \sigma$. Несокращающий характер построений, используемых в теории, приведет к тому, что на каждом шаге поиска вывода количество метапеременных может быть меньше либо оставаться прежним, что, в свою очередь, дает возможность проверять только конечное число существенно различных выводимостей.

Чтобы реализовать эту схему, докажем ряд лемм.

Лемма 1. *Если в нормализованном выводе построения в теории без гиперпостроений и признаков 2-го рода встретилось правило — описание процедуры, то его заключение — это либо доказываемое построение, либо малая посылка правила применения процедуры с некоторым построением, т. е. процедурный параметр доказываемого построения.*

Доказательство. В нормализованном выводе заключение правила — описания процедуры не может выступать одновременно как главная посылка правила применения процедуры. Следовательно, возможны только случаи, указанные в лемме.

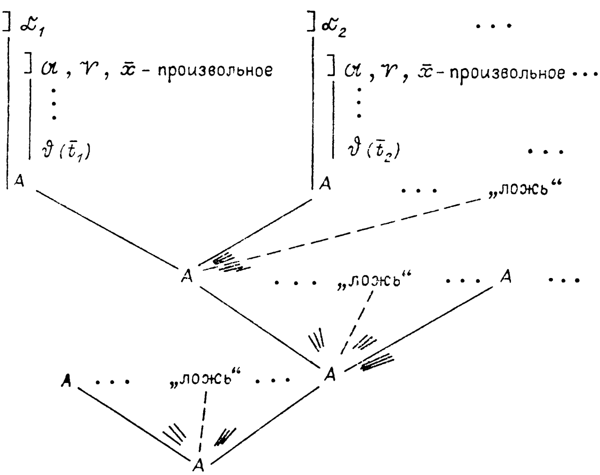
Лемма 2. *Нормализованные доказательства построений в теории без гиперпостроений можно модифицировать без увеличения длины таким образом, чтобы все доказуемые построения были заключениями правил описания процедуры.*

Доказательство. Построение может быть доказано, по свойству подформульности, лишь при помощи правила разбора случаев или правила описания процедуры. Правило разбора случаев в этом случае (опять-таки по свойству подформульности и нормализованности) имеет вид:

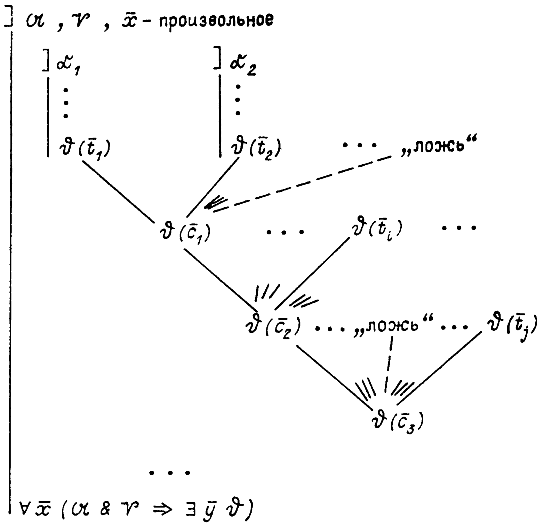
$$\mathfrak{B}_1(t) \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_k(\bar{t}) \text{ — заключение некоторой классификации}$$

$$\frac{\begin{array}{l|l}]\,\mathfrak{B}_1(\bar{t}) \quad \ldots &]\,\mathfrak{B}_k(\bar{t}) \\ \vdots & \vdots \\ \forall\bar{x}(\mathfrak{A}(\bar{x}) \,\&\, \mathfrak{D} \Rightarrow \exists\bar{y}\mathfrak{D}(\bar{x},\bar{y})) \text{ или «ложь»} & \forall\bar{x}(\mathfrak{A}(\bar{x}) \,\&\, \mathfrak{D} \Rightarrow \exists\bar{y}\mathfrak{D}(\bar{x},\bar{y})) \text{ или «ложь»} \end{array}}{A \leftrightharpoons \forall\bar{x}(\mathfrak{A}(\bar{x}) \,\&\, \mathfrak{D} \Rightarrow \exists\bar{y}\mathfrak{D}(\bar{x},\bar{y})).}$$

Отсюда можно построить дерево вывода для каждого из предков построения, имеющих тот же вид, что и доказуемое построение, такое, что заключительные вершины этого дерева соответствуют правилам описания процедуры, а остальные — правилам разбора случаев. Например,



Здесь пунктиром помечены случаи, исключенные ввиду того, что в результате были получены противоречия. Перестроим теперь этот участок вывода следующим образом:



Здесь $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$, ... — наборы вспомогательных констант. Длина вывода при такой перестройке не меняется.

В дальнейшем, говоря «применение построения, связи, признака, опровержения», мы будем иметь в виду их использование как главной посылки правила применения процедуры, а «применение классификации» — как главной посылки правила разбора случаев (возможно, после выделения заключения, используя правило применения процедуры).

Лемма 3. *Нормализованное доказательство факта, связи, признака 1-го или 2-го рода в теории без гиперпостроений, признаков 3-го рода и опровержений не может содержать применений построений.*

Доказательство. После применения построения в любом его заключении имеется хотя бы одна вспомогательная константа. Применение связей, признаков 1-го и 2-го рода, классификаций к посылкам, не содержащим терм t, обязательно содержит терм t. Правило описания процедуры, примененное как последнее правило в выводе нужной теоремы, также не избавляет нас от вспомогательных констант.

Следующая лемма является непосредственным следствием только что доказанной.

Лемма 4. *Факт в теории без опровержений, гиперпостроений и признаков 3-го рода имеет нормализованное доказательство, состоящее лишь из фактов и их дизъюнкций.*

Следствием лемм 3 и 4 является

Лемма 5. *Если в беспризнаковой теории в нормализованном доказательстве факта встретилось применение построения, то это произошло в отбрасываемой из-за противоречия альтернативе разбора случаев.*

Лемма 6. *Проблема выводимости для фактов в теории без опровержений, гиперпостроений и признаков разрешима.*

Доказательство. Достаточно заменить все переменные в связях и классификациях всеми возможными комбинациями констант и рассмотреть проблему выводимости в конечной пропозициональной теории, полученной добавлением для соответствующих подстановок аксиом — фактов.

Рассмотрим теперь проблему выводимости для построений в теории, состоящей лишь из построений и фактов (ПФ-теория).

Лемма 7. *В ПФ-теории факт выводим в том и только в том случае, когда он является аксиомой.*

Следствие леммы 4.

Введем в рассмотрение так называемые m-секвенции, конструкция которых аналогична секвенциям, введенным в работе [53]. Пусть задано дерево уровней T. Его элементы будем обозначать σ, σ_1, σ_2, ..., τ, τ_1, ... Для каждого уровня σ через $\overset{\sigma}{*}_1, \ldots, \overset{\sigma}{*}_n, \ldots$ будем обозначать метапеременные соответствующего уровня.

Определение 9. Совокупность двух конечных списков: списка посылок $\langle \sigma_1 A_1, \sigma_2 A_2, \ldots \rangle$ и списка результатов $\langle \tau_1 B_1, \tau_2 B_2, \ldots \rangle$, где $A_1, \ldots, B_1, \ldots$ — формулы, снабженные индексом уровня, причем входящие в них константы и метапеременные также снабжены уровнями и уровни констант должны быть меньше уровня формул, куда они входят, а уровни метапеременных — меньше уровня формул из списка результатов и строго меньше формул из списка посылок, называется *m-секвенцией*.

Пример. *Пусть дано дерево уровней*:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\sigma_1 \arrow[dr, dash] & & \sigma_2 \arrow[dl, dash] & \\
& \sigma_3 \arrow[dr, dash] & & \sigma_4 \arrow[dl, dash] \\
& & \sigma_5 &
\end{tikzcd}$$

Тогда $\langle \sigma_1 P\left(\overset{\sigma_5}{*_1}, \overset{\sigma_3}{*_2}, \overset{\sigma_5}{c}\right), \sigma_2 \forall x, y\left(Q\left(x, \overset{\sigma_3}{*_3}, \overset{\sigma_2}{c_1}\right) \Rightarrow \exists z H\left(\overset{\sigma_3}{c_2}, x, y, z\right)\right) \rangle$, $\langle \sigma_4 R\left(\overset{\sigma_5}{*_4}, \overset{\sigma_5}{c}\right), \sigma_2 H\left(\overset{\sigma_3}{c_2}, \overset{\sigma_2}{*_5}, \overset{\sigma_2}{*_4}, \overset{\sigma_2}{*_6}\right) \rangle$ — m-секвенция.

Если в результатах m-секвенции есть построение

$$\sigma \forall \bar{x}(A_1 \& \ldots \& A_n \& \mathscr{V}_1 \& \ldots \& \mathscr{V}_k \Rightarrow \exists \bar{y}(B_1 \& \ldots \& B_l)), \qquad (*)$$

то можно

а) ввести новый уровень σ_1, непосредственно следующий за σ;

б) добавить в список посылок $\sigma_1 A_1, \ldots, \sigma_1 A_n, \sigma_1 \mathscr{V}_1, \ldots, \sigma_1 \mathscr{V}_k$, а в список результатов $\sigma_1 B_1 (\bar{*}^{\sigma_1}), \ldots, \sigma_1 B_l (\bar{*}^{\sigma_1})$, где $\bar{*}^{\sigma_1}$ — набор новых метапеременных, заменяющий $\bar{y}$;

в) пометить элементы набора $\bar{x}$ уровнем σ_1 и объявить их константами этого уровня;

г) изъять формулу $(*)$ из списка результатов.

Такое преобразование m-секвенции назовем *подъемом на уровень*. Другое преобразование, называемое *унификацией*, определяется следующим образом:

если в посылках m-секвенции есть построение $(*)$, то

а) выбираем среди заключений факты $\sigma_1 B'_{i_1}, \ldots, \sigma_k B'_{i_k}$ с предикатами, входящими в заключение построения $(*)$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \geqslant \sigma$;

б) находим такие подстановки констант и метапеременных вместо $\bar{x}$ и различных метапеременных для $\bar{y}$, отличных от используемых для постановки вместо $\bar{x}$, что после их осуществления B_{i_1} совпадает с $B'_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ — с B'_{i_k};

в) проверяем, чтобы метапеременные, использованные в $B'_{i_1}, \ldots, B'_{i_k}$ вместо $\bar{y}$, не входили ни в какие другие формулы заключения;

г) вычеркиваем из списка результатов $B'_{i_1}, \ldots, B'_{i_k}$, а из списка посылок все формулы, включающие метапеременные, использованные для постановки вместо $\bar{y}$;

д) добавляем в список результатов формулы $\tau_1 A_1, \ldots, \tau_1 A_n, \tau_1 \mathscr{V}_1, \ldots, \tau_1 \mathscr{V}_k$, где τ_1 — максимум из σ и уровней объектов, использованных для подстановки вместо $\bar{x}$.

Кроме этих двух операций над m-секвенциями определим еще одну — *подстановку*:

если в посылках m-секвенции есть факты (возможно, и с метапеременными), то можно проделать следующие преобразования:

а) найти для факта σA из списка посылок в списке результатов факты $\sigma_1 A_1, \ldots, \sigma_n A_n$ с тем же предикатом;

б) найти такую подстановку констант или метапеременных вместо метапеременных из $A, A_1, \ldots, A_n$, чтобы уровень подставляемого был не больше уровня метапеременных и чтобы A совпала с $A_1, \ldots, A_n$.

в) вычеркнуть $A_1, \ldots, A_n$ из списка результатов, а найденную подстановку осуществить повсюду в m-секвенции.

Лемма 8. *Построение $\mathfrak{A}$ выводимо в ПФ-теории T тогда и только тогда, когда m-секвенция $(\langle T^0\rangle, \langle\mathfrak{A}^0\rangle)$, где T^0, $\mathfrak{A}^0$ — результаты пометки всех констант и формул уровнем 0, сводима конечным числом применений операций подъема на уровень, унификации и подстановки к m-секвенции вида $(\langle T'\rangle, \varnothing)$.*

Доказательство данной леммы состоит в рутинной проверке согласованности правил преобразования m-секвенций с правилами вывода.

Лемма 9. *Если T — беспризнаковая ПФ-теория и $\mathfrak{A}$ — построение вида (*) с несокращающимися посылками, то в любой m-секвенции, полученной преобразованиями m-секвенции $S_1 = (\langle T^0, 1A_1, \ldots, 1A_n, 1\mathscr{V}_1, \ldots \ldots, 1\mathscr{V}_k\rangle, \langle 1B_1(\overline{*}^1), \ldots, 1B_l(\overline{*}^1)\rangle)$, которая в свою очередь получена из m-секвенции $S_0 = (\langle T^0\rangle, \langle\mathfrak{A}_0\rangle)$ применением операции подъема на уровень (здесь 1 — уровень, непосредственно следующий за 0), содержится не больше метапеременных, чем в S_1.*

Доказательство. При унификации количество метапеременных может только понизиться из-за того, что построения в посылках S_1 — несокращающиеся и выделяются из них при унификации в посылки опять-таки несокращающиеся построения. При операции подъема на уровень число метапеременных может вновь увеличиваться по сравнению с предыдущей m-секвенцией, но не более чем до количества, которое предшествовало унификации, выделявшей построение — результат. Правило подстановки новых метапеременных не производит.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 10. *Если в m-секвенции S посылки уровня σ имеют вид $A_1, \ldots, A_n$, а посылки уровня $\sigma' > \sigma$ — $A_1', \ldots, A_n'$ отличаются от $A_1, \ldots \ldots, A_n$ лишь взаимно однозначной заменой констант уровня σ на константы уровня σ' и других констант уровней σ, σ' в S нет, то без изменения выводимости можно из S удалить $A_1', \ldots, A_n'$, а в списке результатов заменить константы уровня σ' на соответствующие константы уровня σ.*

Итак, что же можно сказать об операциях унификации и подъема на уровень? При унификации не увеличивается ни число метапеременных, ни количество констант. При подъеме на уровень количество метапеременных не превышает определенной границы (устанавливаемой по той предшествующей m-секвенции без построений в списке результатов, из которой получилась данная), но число констант может увеличиваться. Единственный случай, когда число констант увеличивается одновременно с сохранением того же числа метапеременных — это применение построения вида

$$\forall \bar{x}_1(\mathfrak{A}_1 \Rightarrow \exists \bar{y}_1\mathfrak{B}_1) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \forall \bar{x}_k(\mathfrak{A}_k \Rightarrow \exists \bar{y}_k\mathfrak{B}_k) \Rightarrow \exists \bar{y}\mathfrak{C}).$$

Однако при повторном применении такого построения (это может оказаться необходимым) новые константы уже могут быть устранены как избыточные (лемма 10). Таким образом, верна

Лемма 11. *Для любой m-секвенции S, все посылки которой — факты или несокращающиеся построения, а результаты — только факты,* *число применений операций, при которых количество метапеременных не изменяется, равномерно ограничено.*

Из этой леммы легко следует справедливость утверждения теоремы для ПФ-теорий. Добавление связей к ПФ-теории фактически не меняет доказательства теоремы, поскольку операция унификации позволяет свести его к предыдущему случаю.

Появление классификаций делает необходимым добавить еще одну операцию — *унификацию классификации вида*

$$\sigma\forall x(A \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_k).$$

Операция заключается в следующем:

находим такие различные $\sigma_1 \geqslant \sigma$, $\tau_1, \ldots, \tau_k$, что $\tau_1, \ldots, \tau_k$ непосредственно следуют за σ_1 и что единственными результатами уровней $\tau_1, \ldots, \tau_k$ являются $\tau_1 B_1', \ldots, \tau_k B_k'$, унифицируемые с $B_1, \ldots, B_k$.

Уровень A после унификации будет σ_1. Доказательство конечности процесса сведения остается без существенного изменения (добавляются только шаги вида: раздробления σB на $\sigma_1 B, \ldots, \sigma_k B$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ — новые уровни, непосредственно следующие за σ).

Добавление опровержений в совокупности с классификациями приводит к появлению опровергнутых вариантов, т. е. с точки зрения извлечения программы — бездействующих частей вывода. Остановить процесс разрастания количества метапеременных удается лишь при помощи приема, использованного в лемме 10. Если некоторое опровержение дважды применено на уровнях $\sigma < \sigma_1$, то его следы на уровне σ можно вычеркнуть. Итак, теорема доказана.[1]

Заметим, что теорема может быть обобщена на случай теорем с признаками 1-го и 2-го рода, а также для теорий с гиперпостроениями, если соответствующим образом сформулировать понятие несокращаемости. Кроме того, в теореме можно заменить локальное условие несокращаемости, которое является очень сильным, на глобальное условие следующего вида.

Предикат P назовем *непосредственно зависящим от Q в теории T*, если P является членом заключения некоторой аксиомы, куда Q входит позитивно в посылку. Транзитивное замыкание этого отношения назовем *отношением зависимости* в теории T.

Требование. Для любого предиката P из заключения построения число переменных, входящих в него, должно быть не меньше суммы числа переменных, входящих в зависящие от него предикаты посылки.

Есть основания считать, что данное требование является необходимым и достаточным.

§ 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы не касались многих важных методологических и теоретических вопросов. Среди них можно отметить задачу соотношения проблемы синтеза с проблемами верификации, оптимизации и модификации программ. Заметим, что чисто алгоритмический подход к этим проблемам страдает определенными недостатками. Наиболее естественным, на наш взгляд, является сочетание алгоритмического и логического подходов. При этом возникает проблема освоения логическим подходом полезных приемов, разработанных, например, в трансформационном программировании. Интерес представляет и проблема установления правильности исходных подпрограмм. Здесь естественно возникает взаимо-

[1] Формулировки теорем 1, 2 были приведены в [45].

связь логического и индуктивного подходов. Осталась в стороне и задача практической реализации поиска вывода и связанные с ней вопросы оптимизации извлекаемых программ, вложения в приведенной формализм понятия абстрактного типа данных и постановка проблемы синтеза соответствующих программ. И наконец, не обсуждалась проблема обобщения логического подхода на другие классы задач, отличных от вычислительных. Как эти, так и многие другие актуальные проблемы теории синтеза программ ждут своего решения.

Авторы признательны Ю. Л. Ершову за внимание и заинтересованность, проявленные к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Непейвода Н. Н., Свириденко Д. И.** Программирование с логической точки зрения. Новосибирск: Б. и., 1981.— (Препринт ИМ СО АН СССР; Т — 1).
2. **Непейвода Н. Н., Свириденко Д. И.** Логическая точка зрения на программирование. Новосибирск: Б. и., 1981.— (Препринт ИМ СО АН СССР; Т — 2).
3. **Ichbian J. D., Heliard J. C., Roubine O. e. a.** Rationale for design of the ADA programming language.— SIGPLAN Notices, 1979, v. 14, N 6, part A, B, p. 400.
4. **Тыугу Э. X.** Синтез программ (обзор).— В кн.: Методы математической логики в проблемах искусственного интеллекта и систематическое программирование: Тезисы докладов Всесоюз. конференции. Ч. 2. Вильнюс, 1980, с. 70—89.
5. **Тамм Б. Г., Тыугу Э. X.** Пакеты программ.— Изв. АН СССР. Сер. «Техническая кибернетика», 1977, № 5, с. 111—124.
6. **Manna Z., Waldinger R. J.** Towards automatic program synthesis.— Communications of the ACM, 1971, v. 14, N 3, p. 151—165.
7. **Constable R. J.** Constructive mathematics and automatic program writers.— In: Proceeding of IFIP congress, Ljubljana. Amsterdam, North-Holland, 1971, p. 229—233.
8. **Manna Z., Waldinger R. J.** Synthesis: Dreams → Programs.— IEEE Trans. on Software Eng., 1979, v. SE — 5, N 4, p. 294—328.
9. **Degli Antoni G., Miglioli P., Ornaghi M.** The synthesis of programs in an intuitunistic frame. Milan: S. n., 1974.
10. **Miglioli P., Ornaghi M.** A calculus to build up correct program.— In: Mathematical Foundations of Computer Science, 1977. Proceeding 6th symposium. Lect. Notes in Comp. Sci., v. 53, Berlin — N. Y.: Springer-Verlag, 1977, p. 398—409.
11. **Miglioli P., Ornaghi M.** A purely logical computing model: the open proofs as programs. Milan: S. n., 1979.
12. **Balzer R. M., Goldman N., Wile D.** Informality in program specifications.— In: Proceeding 5th International Joint Conference on Artifical Intelligence. Cambridge, MIA, 1977, p. 389—397.
13. **Barstow D.** A knowledge-based system for automatic program construction.— In. Proceeding 5th International Joint Conference on Artificial Intelligence. Cambridge, MIA, 1977, p. 382—388.
14. **Плакс Т. П.** Синтез параллельных программ на вычислительных моделях.— Программирование, 1977, № 4, с. 55—63.
15. **Buchanan J. R., Luckham D. C.** On automating the constracting of Programs.— Artificial Intelligence Lab., Stanford Univ., Stanford, CA, Tech. Rep., May, 1974.
16. **Manna Z., Waldinger R. J.** The synthesis of structure — changing programs.— In: Proceeding 3rd International Conference on Software Eng., May 10—12, 1978, Atlanta, Georgia, USA. IEEE Computer Society — ACM, p. 175—187.
17. **Manna J., Waldinger R. J.** Knowledge and reasoning in programs synthesis.— Artificial Intelligence J., 1975, v. 6, N 2, p. 175—208.
18. **Ulrich J. W., Moll R.** Program synthesis by analogy.— SIGPLAN Notices, 1977, v. 12, N 8, p. 22—28.
19. **Tyugu E. H.** A programming system with automatic program synthesis.— In: Methods of Algorithmic Language Implementation. Lect. Notes in Comp. Sci., v. 47, Berlin — N. Y.: Springer-Verlag, 1977, p. 251—267.
20. **Darlington J.** Application of program synthesis.— In: Proceeding IRIA symposium on Proving and Improving Programs. Are-et-Senans (Franc), S. n., 1975, p. 133—144.
21. **Darlington J., Burstall R. M.** A system which automatically improves programs.— Acta Informatica, 1976, v. 6, N 1, p. 41—60.
22 **Darlington J.** A synthesis of several sorting algorithms.— Acta Informatict, 1978, v. 11, N 1, p. 1—30.
23. **Ершов А. П.** Трансформационный метод в технологии программирования.— В кн.: Тезисы докладов I Всесоюз. конференции «Технология программирования». Киев: Б. и., 1979, с. 12—26.

24. **Барздинь Я. М.** Замечания о синтезе программ по историям их работы.— Уч. зап. Латвийск. ун-та, 1974, т. 210, с. 145—151.
25. **Барздинь Я. М., Бичевский Я. Я., Калниньш А. А.** Построение полной системы примеров для проверки корректности программ.— Уч. зап. Латвийск. ун-та, 1974, т. 210, с. 152—187.
26. **Калниньш А. А., Бичевский Я. Я., Барздинь Р. М.** Разрешимые и неразрешимые случаи проблемы построения полной системы примеров.— Уч. зап. Латвийск. ун-та, 1974, т. 210, с. 188—205.
27. **Барздинь Я. М.** Индуктивный вывод автоматов. функций и программ.— In: Proceeding, International Congress Math., Vancouver, v. 2, 1974, S. 1, 1975, с. 455—460.
28. **Biermann A. W.** Approaches to automatic programming.— In: Advances in computers, v. 15, N — 4. N. Y. Academic-Press, 1976, p. 1—63.
29. **Biermann A. W., Krishnaswamy R.** Constructing programs from example computations.— IEEE Trans. Seftware Eng., 1976, v. SE — 2, N 5, p. 141—153.
30. **Hardy S.** Synthesis of LISP functions from examples.— Advance Papers of the 4th International Joint Conf. on Artificial Intelligence. Cambridge, MIT, 1975, p. 240—245.
31. **Заславский И. Д.** Симметрическая конструктивная логика. Ереван: Б. и., 1978.
32 **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций. М.: Наука. 1977.
33. **Kleene S. C.** Realizability: retrospective sur vey.— In: Cambridge Summer school in mathematical logic. Lecture Notes in Math., v. 337. Berlin — N. Y.: Springer — Verlag, 1973, p. 95—112.
34. **Клини С., Весли Р.** Основания интуиционистской математики. М.: Наука, 1978.
35. **Минц Г. Е.** О Е-теоремах.— Зап. науч. сем. Ленинград. отд. МИ АН СССР, т. 40, Л.: Наука, 1974, с. 110—118.
36. **Troelstra A. S.** Notes on intuitionistic second order aritmetic.— In: Cambridge Summer school in mathematical Logic. Lecture Notes in Math., v. 337. Berlin — N. Y.: Springer — Verlag, 1973, p. 171—184.
37. **Myhill J.** Constructive set theory.— J. Symbolic Logic, 1975, v. 40, N 3, p. 347—382.
38. **Pratt V. R.** Semantical consideration on Floyd — Hoare Logic.— Cambridge, MIT, 1976. 40 p.— (Project MAC, TR — 168).
39. **Непейвода Н. Н.** Применение теории доказательств к задаче построения правильных программ.— Кибернетика, 1979, № 2, с. 43—48.
40. **Гильберт Д., Бернайс П.** Основания математики. М.: Наука, 1979.
41. **Curry H. B., Feys R., Graig W.** Combinatory Logic, v. 1, 2. Amsterdam: North-Holland Company, 1958.
42 **Непейвода Н. Н.** Соотношение между правилами естественного вывода и правилами алгоритмических языков высокого уровня.— Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 3, с. 526—529.
43 **Непейвода Н. Н.** О построении правильных программ.— Вопросы кибернетики, 1978, № 46, с. 81—113.
44 **Непейвода Н. Н.** Об одном методе построения правильной программы из правильных подпрограмм.— Программирование, 1979, № 1, с. 11—21.
45. **Nepeivoda N. N.** The logical approach to programming.— In: Lecture notes in Computer Science, 122. Berlin a. o., 1981, p. 261—289.
46. **Nepeivoda N. N.** A proof-theoretical comparison of program Synthesis and program vertification.— In: 6th International congress of Logic, methodology and philosophy of science (Abstracts), sections 1—4. Hannover. S. n., 1979, p. 7—11.
47. **Смирнов В. А.** Формальный вывод и логические исчисления. М.: Наука, 1972.
48. **Ершов Ю. Л.** Вычислимые функционалы конечных типов.— Алгебра и логика, 1972, т. 11, № 4, с. 367—437.
49. **Ершов Ю. Л.** Всюду определенные непрерывные функционалы.— Алгебра и логика, 1972, т. 11, № 4, с. 656—665.
50. **Ершов Ю. Л.** Теория А-пространств.— Алгебра и логика, 1973, т. 12, № 4, с. 369—416.
51. **Свириденко Д. И.** Некоторые вопросы математической семантики языков программирования.— В кн.: Вычислительные системы, № 67. Новосибирск: Б. и., 1976, с. 93—105.
52. **Свириденко Д. И.** Об одном классе моделей λ-исчисления без типов.— В кн.: Тезисы докладов IV Всесоюз. конференции по математической логике. Кишинев: Штиинца, 1976, с. 131.
53. **Маслов С. Ю.** Исчисления с монотонными выводами.— Зап. науч. сем. Ленинград. отд. МИ АН СССР, т. 88, Л.: Наука, 1979, с. 90—105.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Труды Института математики СО АН СССР. Т. 2

Ответственный редактор *Сергей Львович Соболев*
Утверждено к печати Институтом математики СО АН СССР

Редактор издательства *В. Н. Дятлов*
Художественный редактор *Т. Ф. Каминина*
Технический редактор *Н. М. Остроумова*
Корректоры *З. Ф. Бухалова, И. А. Литвинова*

ИБ № 23108

Сдано в набор 20.07.81. Подписано к печати 27.09.82. МН 05241. Формат $70\times108^1/_{16}$. Бумага типографская № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 15,4. Усл. кр.-отт. 15,9. Уч.-изд. л. 16,3. Тираж 3450. Заказ № 664. Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

УДК 517.15

Предельно эквивалентные конструктивизации. **Гончаров С. С.** — В кн.: Математическая логика и теория алгоритмов. Новосибирск: Наука, 1982.

Доказано. что алгоритмическая размерность модели, имеющей неавтоэквивалентные, но предельно автоэквивалентные конструктивизации, бесконечна. Указаны применения этой теоремы в теории вычислимых нумераций. Библиогр. 15.

УДК 519.4

Строение решеток квазимногообразий. **Горбунов В. А., Туманов В. И.** — В кн.: Математическая логика и теория алгоритмов. Новосибирск: Наука, 1982.

Предложен алгебраический подход к изучению квазимногообразий алгебраических систем, основанный на использовании языка подпрямых произведений и надпрямых пределов. Установлено соответствие между «внутренним» строением квазимногообразий и строением алгебраических решеток. Это позволило найти точное представление решеток квазимногообразий в виде решеток алгебраических множеств свободных систем счетного ранга. Библиогр. 22.

УДК 517.1

Интерполяционная теорема Линдона в модальных логиках. **Максимова Л. Л.** — В кн.: Математическая логика и теория алгоритмов. Новосибирск: Наука, 1982.

Рассматривается интерполяционное свойство Линдона для модальных систем. Построены нормальные расширения $S4$, в которых верна теорема Крейга, но не верна теорема Линдона. Показано, что интерполяционным свойством Линдона обладают некоторые известные предикатные модальные системы. Библиогр. 12.

УДК 517.1

Классификация степенных нильпотентных групп по элементарным свойствам. **Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.** — В кн.: Математическая логика и теория алгоритмов. Новосибирск: Наука, 1982.

По модулю проблемы изоморфизма получена полная классификация по элементарным свойствам (свойствам, которые могут быть записаны на языке узкого исчисления предикатов) нильпотентных Q-групп конечного ранга. Эта классификация и результаты Р. А. Саркисяна о разрешимости проблемы изоморфизма в классе таких групп позволили доказать алгоритмическую разрешимость проблемы элементарной эквивалентности для нильпотентных Q-групп конечного ранга. Получен ряд результатов о связях между степенными и абстрактными изоморфизмами для нильпотентных k-групп, где k — поле нулевой характеристики. Все результаты о нильпотентных Q-группах справедливы в соответствующих формулировках и для рациональных алгебр Ли в силу известной связи, установленной А. И. Мальцевым, между категориями нильпотентных Q-групп и рациональных нильпотентных алгебр Ли. Библиогр. 10.

УДК 517.1

Конечно аксиоматизируемые тотально трансцендентные теории. **Перетятькин М. Г.** — В кн.: Математическая логика и теория алгоритмов. Новосибирск: Наука, 1982.

В статье описывается один общий метод построения конечно аксиоматизируемых теорий, основанный на интерпретации работы машины Тьюринга. С его помощью доказывается ряд теорем, касающихся конечно аксиоматизируемых теорий. Ил. 14. Табл. 4. Библиогр. 19.

УДК 517.11 : 518.5

Об индексных множествах в иерархии Клини — Мостовского. **Селиванов В. Л.** — В кн.: Математическая логика и теория алгоритмов. Новосибирск: Наука, 1982.

Изучается и вводится естественная иерархия семейств рекурсивно перечислимых множеств. Изучен вопрос о возможности описания семейств рекурсивно перечислимых множеств, индексные множества которых принадлежат данному классу иерархии Клини — Мостовского, в терминах вполне перечислимых семейств. Библиогр. 10.

УДК 510.25 : 510.66 : 510.68

К теории синтеза программ. **Непейвода Н. Н., Свириденко Д. И.** — В кн.: Математическая логика и теория алгоритмов. Новосибирск: Наука. 1982.

Исследуется задача перехода от описания задания для ЭВМ, в котором существенное место занимают дескриптивные элементы, алгоритмическая сущность которых не очевидна, к чисто алгоритмическому, которое уже может быть воспринято ЭВМ и выполнено ею. Предлагаемый подход к решению этой задачи основан на возможности эффективного извлечения из доказательства теоремы, представляющей входное задание для ЭВМ, нужного текста программы, реализующей данное задание.

В качестве адекватного формализма для точной постановки и дальнейшего анализа проблемы синтеза программ предлагается рассматривать соответствующим образом модифицированные конструктивные логики. Указан вид теорий, в которых наиболее естественно формализуется задача синтеза программ. Выделен также класс теорий, в которых задача синтеза программ разрешима. Обсуждаются проблемы, решение которых позволило бы говорить о создании развитой теории синтеза программ. Ил. 2. Библиогр. 53.

ISSN 0208-0060

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ, ТОМ 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ