АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Отделение математики

С.Л.Соболев

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
С. В. УСПЕНСКИЙ

МОСКВА «НАУКА»
1989

УДК 518

Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций / С. Л. Соболев.— М.: Наука, 1989.— 254 с.— ISBN 5-02-000052-3.

В монографии последовательно изложена теория наиболее известных функциональных пространств, в частности пространств обобщенных функций. В них подробно исследованы операции обобщенного дифференцирования, вопросы различных нормировок, получены интегральные представления. Для пространств W_p^l с весом доказаны теоремы вложения, исследованы вопросы плотности финитных функций, стабилизация на бесконечности, подробно изучены основные операции над обобщенными функциями. При определении обобщенных функций использованы аксиоматика и свойства линейных пространств сходимости. Исследование нормированных пространств функций проводится без использования понятия равенства почти всюду, что позволяет математически строго рассмотреть следы интегрируемых функций на многообразиях меньших размерностей.

Книга предназначена для специалистов в области математического анализа, дифференциальных уравнений и прикладной математики, может также служить в качестве специального курса для студентов старших курсов.

Ил. 7. Библиогр. 53 назв.

Selected questions of the theory of functional spaces and generalized functions / S. L. Sobolev.— M.: Nauka, 1989.— 254 p.— ISBN 5-02-000052-3.

The theory of the most well-known functional spaces and especially spaces of generalized functions is presented. Operations of generalized differentiation, questions of various normalizations are investigated in detail for these spaces. Integral representations are also obtained. For the weight spaces W_p^l embedding theorems are proved, density of finite functions and the property of stabilization at infinity are investigated. Basic operations on generalized functions are also studied in detail. The definition of a generalized function given uses axioms and properties of linear spaces of convergence. The investigation of normed function spaces is carried out without use of the notion of the equality almost everywhere, which alows us to study the traces of integrable functions on manifolds of smaller dimensions from the mathematically rigorous point of view.

The book is intended for mathematicians working in the fields of mathematical analysis, differential equations and applied mathematics. It can also be used as a special course for senior students.

Ill. 7. Ref. 53.

Рецензенты:

академики С. М. НИКОЛЬСКИЙ, Ю. Г. РЕШЕТНЯК

С $\dfrac{1602070000\text{-}521}{055(02)\text{-}89}$ 70-89, кн. 2

ISBN 5-02-000052-3

ОТ РЕДАКТОРА

Имя Сергея Львовича Соболева хорошо известно широкому кругу математиков как одного из создателей теории обобщенных функций, глубоко изменившей облик современной математики. Связанные с его именем такие понятия, как обобщенное решение, обобщенная производная, теоремы вложения, пространства W_p^l стали общепринятыми.

Настоящая монография и посвящена изложению этих вопросов. Автор монографии не стремился рассмотреть современное состояние теории функциональных пространств обобщенных функций (это, видимо, и невозможно). Цель монографии в другом — изложить основные идеи, которые позволяют от классического анализа перейти к понятию обобщенных функций, изучить в простейших ситуациях методы исследования различных функциональных пространств, в частности теоремы вложения для пространств типа W_p^l.

Основные результаты и сами доказательства, помещенные в монографию, принадлежат С. Л. Соболеву, что дает возможность непосредственно познакомиться с идеями и методами автора. Изложение материала во многом не является традиционным. Так полные пространства интегрируемых функций введены без обращения к понятию равенства почти всюду, при определении обобщенных функций использована аксиоматика и свойства линейных пространств сходимости. Глубине изложения материала во многом содействуют многочисленные примеры, помещенные в монографию.

Книга создана на основе шести глав монографии С. Л. Соболева «Введение в теорию кубатурных формул» (М.: Наука, 1974), переработанных С. Л. Соболевым совместно с его учеником В. Л. Васкевичем.

Коротко о содержании. В гл. I изложены сведения о пространствах L_p и родственных им. В гл. II исследованы операции обобщенного дифференцирования, взятия первообразной, отношение градиентного мажорирования. Здесь же рассмотрен вопрос о представлении финитных функций в виде сумм специального вида (в так называемой финитной дивергентной форме). Определены также пространства $W_p^{(l)}$ и изучены различные способы их нормировок. В гл. III исследованы весовые пространства функций, заданных во всем R^n. Охарактеризовано их поведение на бесконечности, получены теоремы вложения и теорема о плотности финитных функций в этих пространствах. В гл. IV доказаны основная теорема вложения $W_p^{(l)}(\Omega)$ в C в случае, когда область Ω звездна относительно некоторого шара, а также теорема о следах. Привлечен разнообразный технический аппарат: интегральные представления функций из $W_p^{(l)}(\Omega)$, свойства интегралов с потенциальной мажорантой. Как пример применения теорем вложения рассмотрен вопрос о замыкании финитных в Ω функций. В гл. V аксиоматически введены линейные пространства сходимости, а затем и обобщенные функции. Изучены основные операции над ними, в частности свертка и произведение. В гл. VI преобразование Фурье на финитных функциях расширено до преобразования на пространствах обобщенных функций.

О нумерации. Формулы внутри каждой главы обозначены двойным номером, первая часть в котором обозначает параграф, а затем через точку следует порядковый индекс формулы внутри параграфа. Ссылка на формулу, внешнюю к какой-либо главе, осуществляется тройным номером. Римская цифра в нем указывает на главу, в которой формула приведена, а смысл последующего двойного индекса из арабских цифр с точкой — прежний. Аналогично даны ссылки на следствия и замечания. Теоремы и леммы обозначены двойным номером: римская цифра — номер главы, а через точку — порядковый номер внутри главы.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1974 г. вышла в свет моя книга «Введение в теорию кубатурных формул». Исследования, входящие в нее, существенно используют идеи, методы и разнообразные факты современного анализа, в частности теории функциональных пространств и теории обобщенных функций.

В первых главах этой книги, носящих вспомогательный характер, мною были изложены некоторые разделы функционального анализа, результаты которых использовались в основных главах. Это изложение в большинстве случаев носит завершенный характер и превосходит рамки сведений, которые необходимы для чтения глав о кубатурных формулах. Они имеют значительно более широкое применение, чем теория кубатурных формул.

Эти разделы функционального анализа интенсивно развиваются и в настоящее время. Они представляют собою мощный аппарат исследования в области теории уравнений с частными производными, математической физики, численного анализа, теории функций и в других разделах современной математики.

Использование функциональных пространств, теорем вложения и обобщенных функций, начатое в основном в 30-е годы, преобразило облик теории уравнений с частными производными, создало ее новый язык, новые постановки задач и новые подходы к их исследованию. Поэтому при переиздании монографии мне представилось целесообразным выделить эти разделы в самостоятельную книгу, которая может быть предложена в качестве спецкурса для студентов-математиков старших курсов университетов, аспирантов и научных сотрудников.

При подготовке настоящего издания эти разделы подверглись существенной переработке. В них внесены многочисленные дополнения и изменения. Данная книга в определенной мере дополняет гл. I моей монографии «Некоторые применения функционального анализа в математической физике», содержащую специальные вопросы функционального анализа, знание которых необходимо всем математикам, занимающимся исследованиями дифференциальных уравнений и их приложениями, а также физикам, механикам, исследователям в области технических наук, использующим дифференциальные уравнения. Третье издание книги «Некоторые применения функционального анализа в математической физике», существенно переработанное и дополненное, снабженное списком литературы по рассматриваемым там вопросам, а также примечаниями библиографического характера, вышло в свет в 1988 г.

Я выражаю глубокую благодарность профессору С. В. Успенскому за компетентное редактирование книги, несомненно способствовавшее ее улучшению.

Я глубоко благодарен В. Л. Васкевичу за его большую помощь в работе над рукописью.

Я также признателен Г. В. Демиденко, В. Г. Перепелкину, Т. П. Рожковской, Д. Л. Ткачеву, П. М. Филатову, Г. А. Шмыреву за их участие в подготовке рукописи.

С. Л. Соболев

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К КНИГЕ «ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ»

Хорошо известно, какому преобразованию подверглись в наше время классические разделы математики под влиянием наплыва новых идей и методов, главным образом связанных с функциональным анализом. В первую очередь эти идеи коснулись теории дифференциальных уравнений: обыкновенных и в частных производных. Вслед за тем в круг владений новой математики втягивается и теория вычислений, которую сейчас так же невозможно себе представить без банаховых пространств, как и без электронных вычислительных машин.

Методы приближения функций, представляющие собою самое сердце вычислительной математики, превратились — и это было неизбежно — в методы приближения в функциональных пространствах. Часто это — пространства функций, у которых производные заданного порядка l суммируемы локально или тотально вместе со своей p-й степенью. Свойства таких пространств, соотношения вложения между ними оказываются полезными при рассмотрении самых разных вопросов: они позволяют изучать решения краевых задач для уравнений в частных производных, с их помощью строятся оценки погрешности в численных методах.

Вычисления на сетках рассматриваются сейчас как вычисления с элементарными функционалами. Эти функционалы в современном понимании суть интегралы, содержащие обобщенные функции.

Понятие обобщенной функции, давно употреблявшееся в неявной, а в теоретической физике и в явной форме, вошло уже в 30-е годы в своем отчетливом виде в аппарат современной математики и, в частности, в теорию уравнений с частными производными. В настоящий момент обобщенные функции — полноправный элемент численного анализа. Вместе с обобщенными функциями в арсенал средств вычислительной математики включилось и преобразование Фурье обобщенных функций, а также другие современные средства анализа.

Именно к этому кругу идей относится и настоящая монография, трактующая классический вопрос о формулах приближенного интегрирования функций.

Проблема оптимизации формулы интегрирования в современном понимании выглядит как проблема отыскания минимума нормы функционала погрешности этой формулы. Этому вопросу и посвящена настоящая монография.

В основу монографии положены собственные исследования автора.

Первоначально эта книга возникла как отпечатанный на ротапринте курс лекций по теории кубатурных формул, прочитанный автором в Новосибирском государственном университете в 1965—66 гг. При подготовке ее к печати автору показалось полезным привести в ней и весь разнообразный вспомогательный материал из различных разделов анализа и других областей математики. Таким образом возникли первые главы этой книги, носящие подготовительный характер.

Кое-где материал, изложенный в этих главах, выходит за пределы того, что сегодня нужно в теории кубатурных формул. Это сделано в целях придания соответствующим главам большей законченности, значительно облегчающей окончательное понимание. Но в то же время книга не стала сколько-нибудь полным курсом теории обобщенных функций или теорем вложения. Тот и другой вопросы ограничены в книге довольно тесными рамками.

С. Л. Соболев

ГЛАВА I

ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ И НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Принцип двойственности и пространства L_p

В настоящей книге речь в основном идет о теоремах вложения функциональных пространств и некоторых близких вопросах.

Понятия и результаты первой главы уже хорошо изложены во многих источниках, и если некоторая часть этой книги все же занята их описанием, то это вызвано желанием автора систематически построить нужную теорию на несколько иной базе, чем это делается обычно.

Автор попытался избежать некоторых сложных конструкций, связанных с теорией суммируемых по Лебегу функций, а именно тех построений, в которых говорится о классах эквивалентных функций, отличающихся своими значениями на множествах нулевой меры. Это неудобно прежде всего тем, что в приложениях теории приходится иметь дело со следами суммируемых функций на многообразиях меньшей размерности. В рамках классических представлений определить эти следы можно, лишь пользуясь сложными конструкциями, совершенно чуждыми по духу всему рассматриваемому вопросу.

Руководящей идеей в построении теории нужных нам пространств служит идея двойственности. Поясним на примере, что мы под этим понимаем.

Вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в евклидовом пространстве R^n можно рассматривать как функцию дискретного переменного j: $j = 1, 2, \ldots, n$. В пространстве с обычным скалярным произведением

$$(a, x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

каждому вектору $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ соответствует линейный функционал, определяемый равенством

$$a(x) = (a, x).$$

Это хорошо известная двойственность между элементами пространства R^n и линейными функционалами на нем. При переходе от R^n к функциональным пространствам бесконечной размерности принцип двойственности усложняется. Поясним это на примере пространства функций, заданных в некоторой области Ω.

Пусть эта область обладает кусочно-гладкой границей, т. е. границей, состоящей из конечного числа кусков гладких многообразий. Это значит, что в соответствующей координатной системе такой кусок выражается уравнением

$$x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

с непрерывно дифференцируемой несколько раз функцией φ.

На протяжении всей книги, если не будет оговорено противное, мы будем и далее предполагать, что области именно таковы.

Рассмотрим банахово пространство $C(\Omega)$ непрерывных ограниченных функций, заданных в замыкании области $\overline{\Omega}$. В этом пространстве существует обычная норма

$$\| \varphi \mid C \| = \sup_{\Omega} |\varphi(x)| < \infty.$$

Аналогом скалярного произведения здесь служит интеграл от произведения функций. Всякая непрерывная функция $\psi(x)$, заданная в $\overline{\Omega}$, со сходящимся интегралом

$$\int_{\Omega} |\psi(x)| \, dx < \infty \tag{1.1}$$

определяет линейный непрерывный функционал вида

$$(l, \varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \psi(x) \, dx. \tag{1.2}$$

(Если область $\overline{\Omega}$ ограничена, то любая непрерывная функция $\psi(x)$ условию (1.1) удовлетворяет автоматически.) Однако обратное уже неверно. Существуют линейные непрерывные функционалы из $C^*(\overline{\Omega})$, для которых представление (1.2) невозможно. В противоположность тому, что было в R^n, пространство функционалов оказывается шире, чем множество непрерывных функций с абсолютно сходящимся интегралом.

Для того чтобы сохранить формулу, выражающую линейные функционалы с помощью скалярного произведения (1.2), а это для нас важно, следует пополнить пространство непрерывных функций новыми «идеальными элементами». Этот прием на протяжении книги мы будем проводить с разной степенью общности и различными путями.

В настоящей главе мы рассмотрим построение таких идеальных элементов, которые мы будем называть функциями, суммируемыми с некоторой степенью $p \geqslant 1$.

Непрерывную функцию $\psi(x)$ будем называть суммируемой на Ω со степенью $p \geqslant 1$, если она имеет конечную L_p-норму, т. е.

$$\| \psi \mid L_p \| = \left\{ \int_{\Omega} |\psi|^p \, dx \right\}^{1/p} < \infty.$$

(У ограниченной области Ω норма $\| \psi \mid L_p \|$ непрерывной на $\overline{\Omega}$ функции ψ конечна автоматически.)

Назовем последовательность

$$\{\psi_k(x)\} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

непрерывных функций фундаментальной в $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, *если она удовлетворяет условию Коши*: $\forall \varepsilon > 0$

$$\left\{\int_{\Omega} |\psi_k(x) - \psi_l(x)|^p\, dx\right\}^{1/p} = \| \psi_k - \psi_l \,|\, L_p \| < \varepsilon \tag{1.3}$$

при $k, l > N(\varepsilon)$.

Любая фундаментальная последовательность функций $\{\psi_k(x)\}$ с конечной L_p-нормой определяет последовательность функционалов

$$(l_k, \varphi) = \int \psi_k(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

сходящуюся на любой функции $\varphi(x)$ из C с ограниченной $L_{p'}$-нормой, где $1/p + 1/p' = 1$.

Предельный функционал от φ может и не выражаться через скалярное произведение φ на непрерывную функцию, как, например, для последовательности

$$\psi_k(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} kx \quad \text{при} \quad \bar{\Omega} = \{x : -1 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

Предельный функционал этой последовательности имеет вид

$$(l, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\, dx - \int_{-1}^0 \varphi(x)\, dx. \tag{1.4}$$

Его обычно обозначают символом $(\operatorname{sgn} x, \varphi(x))$. Интегралом вида (1.2) с непрерывной ψ этот функционал выражен быть не может.

Соотнесем предельному функционалу фундаментальной последовательности

$$(l, \varphi) = \lim_{k \to \infty} \int \psi_k(x)\, \varphi(x)\, dx$$

некоторую идеальную функцию $\psi_\infty(x)$. Через эту функцию мы будем символически записывать функционал (l, φ) в интегральной форме

$$(l, \varphi) = \int_{\Omega} \psi_\infty(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{1.5}$$

Функционал (1.4) выражается через «идеальную функцию» $\operatorname{sgn} x$.

Нормы членов фундаментальной последовательности образуют сходящуюся последовательность. В самом деле, из аксиомы треугольника (неравенство Минковского) получим

$$\| \psi_k \| \leqslant \| \psi_l \| + \| \psi_k - \psi_l \|,$$

$$\| \psi_l \| \leqslant \| \psi_k \| + \| \psi_k - \psi_l \|.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших k и l разность

$|\,\|\psi_k\| - \|\psi_l\|\,|$ будет сколь угодно мала. Это позволяет определить норму элемента ψ_∞ равенством

$$\lim_{k\to\infty} \|\psi_k \mid L_p\| = \|\psi_\infty \mid L_p\|.$$

Тем самым мы построили пространство с нормой. Обозначим его L_p. Предельным переходом устанавливается, что и для введенных идеальных элементов L_p справедливы неравенства Гёльдера и Минковского.

а) Неравенство Гёльдера. *Пусть* $\mu(x)$ — *неотрицательная мера Радона—Стилтьеса на* Ω *и*

$$1 < p_j < \infty, \quad j = 1, 2; \quad 1/p_1 + 1/p_2 = 1.$$

Тогда

$$\left|\int_\Omega \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,d\mu(x)\right| \leqslant \left[\int_\Omega |\varphi_1(x)|^{p_1}\,d\mu(x)\right]^{1/p_1} \times \\ \times \left[\int_\Omega |\varphi_2(x)|^{p_2}\,d\mu(x)\right]^{1/p_2}. \tag{1.6}$$

Индукцией это неравенство легко распространить на любое конечное число сомножителей.

б) Неравенство Минковского. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $\mu(x)$ и $\nu(x)$ — *две неотрицательные меры Радона — Стилтьеса соответственно на* Ω *и* Q. *Тогда*

$$\left\{\int_\Omega \left[\int_Q |\varphi(x, y)|\,d\nu(y)\right]^p d\mu(x)\right\}^{1/p} \leqslant \int_Q \left[\int_\Omega |\varphi(x, y)|^p\,d\mu(x)\right]^{1/p} d\nu(y). \tag{1.7}$$

в) Обратное неравенство Минковского. *Пусть* $0 < p \leqslant 1$, $\mu(x)$ *и* $\nu(y)$ — *неотрицательные меры Радона—Стилтьеса на* Ω *и* Q *соответственно. Тогда*

$$\int_Q \left[\int_\Omega |\varphi(x, y)|^p\,d\mu(x)\right]^{1/p} d\nu(y) \leqslant \left\{\int_\Omega \left[\int_Q |\varphi(x, y)|\,d\nu(y)\right]^p d\mu(x)\right\}^{1/p}. \tag{1.8}$$

Полезно отметить, что если в качестве $\nu(y)$ взять меру, сосредоточенную в конечном числе точек $y^{(1)}, \ldots, y^{(k)} \in Q$ и такую, что $\nu(y^{(j)}) = 1$ для всех $j = 1, \ldots, k$, то из интегральных неравенств Минковского мы получим неравенства для сумм:

$$\left[\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^k |\varphi_j(x)|\right)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leqslant \sum_{j=1}^k \left(\int_\Omega |\varphi_j(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} \tag{1.9}$$

при $1 \leqslant p < \infty$ и

$$\sum_{j=1}^k \left(\int_\Omega |\varphi_j(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^k |\varphi_j(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \tag{1.10}$$

при $0 < p \leqslant 1$.

Расширим класс фундаментальных последовательностей. Будем называть фундаментальной последовательность $\{\psi_k\}$ элементов L_p, для которой выполнено условие (1.3).

Теорема I.1. *Фундаментальная последовательность из L_p имеет предел, который, в свою очередь, принадлежит L_p.*

Таким образом, присоединение к элементам L_p фундаментальных последовательностей с тем же «свойством Коши» не дает никаких новых предельных элементов, сверх полученных ранее.

Теорема I.1 означает, что пространство L_p из построенных нами элементов оказывается полным, т. е. банаховым.

Доказательство. Каждый элемент $\psi^{(l)}$ фундаментальной последовательности, состоящей из построенных нами элементов L_p, сколь угодно мало отличается по норме от некоторой приближающей его непрерывной функции $\psi_k^{(l)}$. Выберем l и m настолько большими, чтобы иметь

$$\| \psi^{(l)} - \psi^{(m)} \mid L_p \| < \varepsilon/3,$$

и пусть

$$\| \psi_{k_l}^{(l)} - \psi^{(l)} \mid L_p \| < \varepsilon/3, \qquad \| \psi_{k_m}^{(m)} - \psi^{(m)} \mid L_p \| < \varepsilon/3,$$

тогда

$$\| \psi_{k_l}^{(l)} - \psi_{k_m}^{(m)} \mid L_p \| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{\psi_{k_l}^{(l)}\}$, $l = 1, 2, \ldots$, фундаментальна. Элементарно устанавливается, что предел этой последовательности и является пределом $\psi^{(l)}$.

Доказанная теорема устанавливает по существу то обстоятельство, что множество непрерывных функций всюду плотно в построенных функциональных пространствах $L_p(\Omega)$. Поскольку любая непрерывная функция, как известно, сколь угодно хорошо приближается функциями, неограниченно дифференцируемыми, следовательно, всюду плотным оказывается и множество неограниченно дифференцируемых функций. В дальнейшем мы будем пользоваться доказанным свойством дифференцируемых функций для распространения на все пространство различных операторов, определенных на множестве непрерывных или непрерывно дифференцируемых функций.

Теорема I.2. *Пусть X и Y — полные нормированные пространства. Всякий линейный непрерывный оператор A_0 из $X_0 \subset X$ в Y допускает единственное линейное непрерывное расширение A на замыкание $\overline{X}_0 \subset X$, при этом $\| A_0 \| = \| A \|$.*

В классическом понимании символу $\chi_\infty(x)$ можно придать определенный смысл. Хорошо известно, что, рассматривая интеграл (1.5) как интеграл Лебега, можно сопоставить символу $\psi_\infty(x)$ бесконечное множество эквивалентных друг другу измеримых функций точки. Эти функции попарно отличаются на множестве лебеговой меры нуль.

Значения $\psi_\infty(x)$ в точках любого множества нулевой меры остаются при этом совершенно произвольными. Поскольку мы, вообще говоря, не приписываем $\psi_\infty(x)$ никаких значений в какой-либо точке, такой неоднозначности для нас не возникает.

Сделаем одно исключение. Если существует непрерывная (или кусочно-непрерывная) функция $\psi(x)$, через которую функционал (l, φ) может быть записан в интегральной форме (1.2), то эту непрерывную функцию, которая является единственной, мы будем рассматривать как функцию точки, т. е. $\psi(x)\colon \overline{\Omega} \to R$. *В этом случае мы будем говорить, что $\psi(x)$ допускает непрерывную (или кусочно-непрерывную) точечную локализацию.*

При разных p пространства L_p, разумеется, будут различны. Очевидно, что чем больше p, тем уже соответствующее пространство (при ограниченной области Ω):

$$L_{p_1} \subset L_{p_2} \quad \text{при} \quad p_1 > p_2.$$

Для ограниченной области Ω, помимо L_p, нам будет удобно ввести еще одно пространство, которое мы будем обозначать L_∞. Сравним нормы произвольной непрерывной функции в L_p и L_q, где $p > q \geqslant 1$. Обозначим $p/q = r$. Поскольку $r > 1$, мы имеем по неравенству Гёльдера:

$$\|\psi \mid L_q\| = \left\{\int\limits_\Omega |\psi|^q\,dx\right\}^{1/q} \leqslant \left\{\left[\int\limits_\Omega (|\psi|^q)^r\,dx\right]^{1/r}\left[\int\limits_\Omega dx\right]^{1-1/r}\right\}^{1/q} =$$

$$= \left\{\int\limits_\Omega |\psi|^p\,dx\right\}^{1/p} |\Omega|^{1/q-1/p} = \|\psi \mid L_p\|\,|\Omega|^{1/q-1/p},$$

где $|\Omega|$ обозначает объем Ω. Таким образом,

$$\|\psi \mid L_q\|\,|\Omega|^{-1/q} \leqslant \|\psi \mid L_p\|\,|\Omega|^{-1/p}.$$

Этот результат формулируется в виде теоремы.

Теорема I.3. *Величина $\|\psi \mid L_p\|\,|\Omega|^{-1/p}$ возрастает с увеличением p.*

Каждая последовательность $\{\psi_k(x)\}$, фундаментальная в некотором L_p, будет, следовательно, фундаментальной во всех L_q, где $1 \leqslant q \leqslant p$. Пусть теперь последовательность такова, что для ее элементов величина $\|\psi_k \mid L_p\|\,|\Omega|^{-1/p}$ остается ограниченной для всех p и, кроме того,

$$\|\psi_k - \psi_l \mid L_p\|\,|\Omega|^{-1/p} < \varepsilon \quad \text{при} \quad k, l > N(\varepsilon)$$

для всех p одновременно. Предельный элемент ψ_∞ этой последовательности, выражающий функционал

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \varphi(x)\,\psi_k(x)\,dx = \int\limits_\Omega \varphi(x)\,\psi_\infty(x)\,dx,$$

мы будем считать элементом $L_\infty(\Omega)$ и положим

$$\|\psi_\infty \mid L_\infty\| = \sup_q \left\{\int |\psi_\infty|^q\,dx\right\}^{1/q} |\Omega|^{-1/q}.$$

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, то ее норма в $L_\infty(\Omega)$ выражается формулой

$$\|\varphi \mid L_\infty\| = \max |\varphi(x)|.$$

Пространство L_∞ мы будем иногда называть пространством ограниченных функций, обозначая в нем норму элементов привычным символом

$$\|\varphi \mid L_\infty\| = \text{v. m.} |\varphi| \equiv \text{vrai max} (|\varphi|).$$

Тем самым пространство L_∞ является изометрическим расширением пространства C, поскольку в него входят и разрывные функции, например $\operatorname{sgn} x$.

Пространства $L_p(\Omega)$, $p > 1$, образуют шкалу, и для ограниченной области Ω имеют место вложения

$$L_1(\Omega) \supset L_p(\Omega) \supset L_q(\Omega) \supset L_\infty(\Omega) \supset C(\Omega) \quad \text{при} \quad p < q.$$

Если $\|\Omega\|$ не ограничена, эти соотношения теряют силу.

§ 2. Операции над функциями из L_p

На функции, суммируемые со степенью p, естественно переносятся многие операции, выполнимые с непрерывными функциями. В частности, на L_p легко распространить сложение, умножение на постоянную или на заданную непрерывную функцию. Далее, для двух функций $\chi(x)$ и $\psi(x)$ из L_p определим две новых функции из L_p, которые обозначим через $\max(\chi(x), \psi(x))$ и $\min(\chi(x), \psi(x))$. Пусть $\{\chi_k(x)\}$ и $\{\psi_k(x)\}$ — последовательности непрерывных функций, сходящихся в L_p к $\chi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно. Тогда полагаем

$$\max(\psi(x), \chi(x)) = \lim_{k\to\infty} \max(\psi_k(x), \chi_k(x)),$$

$$\min(\psi(x), \chi(x)) = \lim_{k\to\infty} \min(\psi_k(x), \chi_k(x)).$$

Чтобы доказать корректность такого определения, установим фундаментальность последовательностей, стоящих в этих равенствах под знаком предела. Положим

$$\Delta = \max(\psi_k, \chi_k) - \max(\psi_l, \chi_l).$$

Функция Δ либо равна одной из разностей $(\psi_k - \psi_l)$, $(\chi_k - \chi_l)$, либо по абсолютной величине меньше какой-то из них. Следовательно, всегда

$$|\Delta| \leqslant |\psi_k - \psi_l| + |\chi_k - \chi_l|.$$

Применив к правой части неравенство треугольника в L_p, получим

$$\left\{\int_\Omega |\Delta|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int_\Omega |\psi_k - \psi_l|^p dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_\Omega |\chi_k - \chi_l|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Переходя здесь к пределу по k, l, видим, что последовательность $\{\max(\chi_k, \psi_k)\}$ действительно фундаментальна. Аналогично рассматривается случай функции $\min(\chi, \psi)$.

Положим еще

$$\psi^+(x) = \max(0, \psi(x)) \quad \text{и} \quad \psi^-(x) = \min(0, \psi(x))$$

и введем функцию

$$|\psi| = \psi^+ - \psi^-.$$

Все эти три функции являются элементами того же L_p, что и $\psi(x)$.

Если $\max(\varphi, \psi) = \varphi$, то мы будем говорить, что $\varphi \geqslant \psi$.

Нетрудно, убедиться, что если $\psi(x) \geqslant 0$, то при $\varphi(x) \geqslant 0$

$$\int_\Omega \varphi(x)\psi(x)\,dx \geqslant 0.$$

Пусть функция $\psi(x)$ непрерывна и неотрицательна на ограниченной области. Рассмотрим функции

$$\psi_k(x) = \min(k\psi(x), 1), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Покажем, что последовательность $\psi_k(x)$ фундаментальна во всех L_p. В самом деле, разность $\psi_k(x) - \psi_l(x)$, где $k > l$, будет неотрицательной неубывающей функцией значка k, так как $k\psi(x)$ всюду не меньше $l\psi(x)$. Очевидно, $\psi_k(x) - \psi_l(x) \leqslant 1$. Функция $\psi_k(x) - \psi_l(x)$ отлична от нуля только в точках, где $0 < \psi(x) \leqslant \leqslant 1/l$. Поэтому

$$\int_\Omega |\psi_k(x) - \psi_l(x)|^p\,dx \leqslant \operatorname{mes}\left\{x : 0 < \psi(x) < \frac{1}{l}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_\Omega |\psi_k(x) - \psi_l(x)|^p\,dx < \varepsilon \quad \text{при} \quad k, l > N(\varepsilon),$$

т. е. фундаментальность $\{\psi_k(x)\}$. Обозначим

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = \lim_{k\to\infty} \min[k\psi(x), 1] = \operatorname{sgn}\psi(x).$$

Для $\psi(x)$ произвольного знака положим

$$\operatorname{sgn}\psi(x) = \operatorname{sgn}\psi^+(x) - \operatorname{sgn}[-\psi^-(x)].$$

Из функции $\operatorname{sgn}\psi(x)$ получается еще одна нужная нам функция, именно функция $\iota_{\Omega^*}(x)$ — индикатор области Ω^*. Пусть Ω^* — открытое множество, такое, что $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$. *Назовем* $\chi_{\Omega^*}(x)$ *функцию, определенную равенством*

$$\chi_{\Omega^*}(x) = d(x, \overline{\Omega} \setminus \Omega^*), \quad x \in \overline{\Omega},$$

где $d(x, F)$ *обозначает расстояние от точки* x *до замкнутого множества* F. *Положим*

$$\iota_{\Omega^*}(x) = \operatorname{sgn}\chi_{\Omega^*}(x).$$

На основании сказанного выше функция $i_{\Omega^*}(x)$ будет элементом всех L_p, в том числе и L_∞.

Неотрицательную функцию $\psi(x)$ из L_p можно возвести в любую степень q: $1 \leqslant q \leqslant p$. Поясним, что это значит. Установим, что для всякой последовательности непрерывных функций $\psi_k(x)$, сходящейся к $\psi(x)$ в L_p, последовательность $\psi_k^q(x)$ будет фундаментальной в L_r, где $r = p/q$. Можно считать, что $\psi_k(x) \geqslant 0$. имеем по теореме Лагранжа.

$$|\psi_k^q - \psi_l^q| \leqslant q\,|\psi_k - \psi_l|\,\xi^{q-1},$$

где $\xi = \psi_k + \psi_l$. Оценим норму разности $\psi_k^q - \psi_l^q$ в L_r, применяя неравенство Гёльдера

$$\begin{aligned}\|\psi_k^q - \psi_l^q \mid L_r\|^r &= \int |\psi_k^q - \psi_l^q|^r\,dx \leqslant \int |\psi_k - \psi_l|^r\, q^r \xi^{(q-1)r}\,dx \leqslant \\ &\leqslant q^r \left\{\int |\psi_k - \psi_l|^{rq}\,dx\right\}^{1/q} \left\{\int \xi^{q/(q-1)(q-1)r}\,dx\right\}^{(q-1)/q} = \\ &= q^r\,\|\psi_k - \psi_l \mid L_p\|^r\,\|\xi \mid L_p\|^{(q-1)/qp}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\|\psi_k^q - \psi_l^q \mid L_r\| \leqslant q\,\|\psi_k - \psi_l \mid L_p\|\,\|\psi_k + \psi_l \mid L_p\|^{q-1}. \tag{2.1}$$

Из (2.1) сразу следует фундаментальность ψ_k^q, а следовательно, возможность возведения ψ в любую степень q, $1 \leqslant q < p$. Таким образом, если m — целое число, $1 \leqslant m \leqslant p$, то произвольную функцию ψ из L_p можно возвести в степень m, положив по определению

$$\psi^m = \lim_{k\to\infty} \psi_k^m.$$

Пусть $\psi(x) \in L_p$; $\chi(x) \in L_q$, где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leqslant 1, \qquad 1 \leqslant p, \qquad 1 \leqslant q, \qquad 1 \leqslant r.$$

Тогда можно построить произведение функций ψ и χ:

$$\psi\chi = \lim_{k\to\infty} \psi_k \chi_k.$$

Это произведение будет элементом L_r, причем имеет место неравенство

$$\|\psi\chi \mid L_r\| \leqslant \|\psi \mid L_p\|\,\|\chi \mid L_q\|. \tag{2.2}$$

Установим неравенство (2.2) вначале для непрерывных функций для случая

$$r \geqslant 1, \qquad \infty > p > 1, \qquad \infty > q > 1.$$

По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned}\|\chi\psi \mid L_r\| &= \left[\int |\chi\psi|^r\,dx\right]^{\frac{1}{r}} \leqslant \left[\int |\chi|^q\,dx\right]^{\frac{r}{q}\cdot\frac{1}{r}} \left[\int |\psi|^p\,dx\right]^{\frac{r}{p}\cdot\frac{1}{r}} = \\ &= \|\chi \mid L_q\|\,\|\psi \mid L_p\|.\end{aligned}$$

Если одно или оба p и q бесконечны, то вместо неравенства Гёльдера нужно использовать ограниченность одной или обеих соответствующих норм. Пусть теперь ψ_k и χ_k — две фундаментальные последовательности:

$$\lim_{k\to\infty}\psi_k=\psi, \qquad \lim_{k\to\infty}\chi_k=\chi.$$

Из (2.2) непосредственно получается, что произведение $\psi_k\chi_k$ будет фундаментальной последовательностью в L_r. Действительно имеем

$$(\psi_k\chi_k-\psi_l\chi_l)=\chi_k(\psi_k-\psi_l)+\psi_l(\chi_k-\chi_l).$$

Пользуясь (2.2), получим

$$\|\psi_k\chi_k-\psi_l\chi_l\mid L_r\|\leqslant\|\chi_k\mid L_q\|\,\|\psi_k-\psi_l\mid L_p\|+$$
$$+\|\psi_l\mid L_p\|\,\|\chi_k-\chi_l\mid L_q\|.$$

Отсюда следует наше утверждение и вместе с тем существование предела $\psi_k\chi_k$, суммируемого со степенью r.

Пусть функция $\psi(x)$ непрерывна в области Ω, и пусть Ω^* — ограниченная подобласть Ω, лежащая вместе со своей границей внутри Ω: $\overline{\Omega}^*\subset\Omega$. Функции $\psi(x)$ мы будем соотносить две функции: сужение $\psi(x)$ на область Ω^* и срезку функции $\psi(x)$ на Ω^*. *Сужением* $\psi(x)$, *как обычно, будем называть функцию* $\psi_{\Omega^*}(x)$, *заданную в* $\overline{\Omega}^*$ *и во всех точках* $\overline{\Omega}^*$ *совпадающую с* $\psi(x)$.

Срезкой $\psi(x)$ *на* $\overline{\Omega}^*$ *будем называть функцию*

$$\psi_{\Omega^*}(x)=\iota_{\Omega^*(x)}\psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\in\Omega^*;\\ 0, & x\notin\Omega^*.\end{cases}$$

Срезка $\psi(x)$ будет элементом L_∞ и, вообще говоря, не будет принадлежать C.

Обе операции, и сужения, и срезки, переносятся на произвольный элемент L_p. Пусть $\psi_k(x)$ — последовательность непрерывных функций в Ω (не обязательно в $\overline{\Omega}$), и пусть в некоторой области $\overline{\Omega}^*$ эта последовательность фундаментальна в L_p и определяет там некоторый элемент $\psi\in L_p(\Omega^*)$. (Это будет так, например, если $\psi_k(x)$ фундаментальна в $L_p(\Omega)$.) Этот элемент мы и будем называть сужением $\psi(x)$ на Ω^*.

Иногда для срезки мы будем писать условно

$$\iota_{\Omega^*(x)}\psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\in\overline{\Omega};\\ 0, & x\notin\overline{\Omega}^*,\end{cases}\tag{2.3}$$

хотя правая часть (2.3) точечного смысла, вообще говоря, не имеет. Любая срезка $\psi(x)$ на $\overline{\Omega}^*$ может быть, очевидно, продолжена нулем на все пространство R^n.

Может случиться, что сужение $\varphi(x)$ на какое-либо подмножество окажется непрерывной функцией, как, например, sgn x непрерывна при $x \neq 0$. Не вызовет недоумения, если мы в таких случаях будем писать, например,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Ниже нам будут полезны пространства функций, обладающих нужными свойствами лишь локально. *Пространством* $C_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *будем называть множество непрерывных функций в* Ω *и скажем, что последовательность* $\{\psi_k\}$ *сходится в* $C_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *если она сходится в пространстве* $C(\overline{\Omega}^*)$ *для любого ограниченного множества* $\overline{\Omega}^*$, $\overline{\Omega}^* \subset \Omega$. *Будем говорить, что последовательность фундаментальна в* $C_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *если она фундаментальна в* $C(\overline{\Omega}^*)$ *для всех таких* $\overline{\Omega}^*$.

Аналогично, пространство $L_{p,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *состоит из функций, принадлежащих* $L_p(\overline{\Omega}^*)$ *для любого ограниченного множества* $\overline{\Omega}^*$, $\overline{\Omega}^* \subset \Omega$. *Сходимость* $\{\psi_k(x)\}$ *в* $L_{p,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *определяется как сходимость в* $L_p(\overline{\Omega}^*)$ *для любого ограниченного множества* $\overline{\Omega}^*$, $\overline{\Omega}^* \subset \subset \Omega$. Пространства $L_{p,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ не банаховы. Отметим еще, что сходимость в $L_p(\Omega^*)$ сужений $\psi_k(x)$ на $\overline{\Omega}^*$ равносильна сходимости срезок $\psi_k(x)$ на $\overline{\Omega}^*$.

§ 3. Равномерная выпуклость. Непрерывность по сдвигу

Пусть X — банахово пространство. Любой шар $B_A = \{\varphi \in X \mid \|\varphi\| \leqslant A\}$ — выпуклое множество. Это значит, что если φ_1, φ_2 принадлежат B_A, то при любом μ, таком, что $0 \leqslant \mu \leqslant 1$,

$$\|\mu\varphi_1 + (1-\mu)\varphi_2\| \leqslant A. \tag{3.1}$$

Наше утверждение сразу следует из неравенства:

$$\|\mu\varphi_1 + (1-\mu)\varphi_2 \mid \overline{X}\| \leqslant \mu\|\varphi_1 \mid \overline{X}\| + (1-\mu)\|\varphi_2 \mid \overline{X}\|,$$

которое представляет собой очевидное следствие аксиомы треугольника. В частности, если $\|\varphi_1 \mid \overline{X}\| = \|\varphi_2 \mid \overline{X}\| = 1$, то

$$\|\mu\varphi_1 + (1-\mu)\varphi_2 \mid \overline{X}\| \leqslant 1. \tag{3.2}$$

Если при любых μ из промежутка $0 < \mu < 1$ неравенство (3.2) выполняется в строгом смысле, то говорят, что сфера в $\overline{X}$ строго выпукла.

Если при $\|\varphi_1 \mid \overline{X}\| = \|\varphi_2 \mid \overline{X}\| = 1$ справедливо более сильное неравенство

$$\left\|\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \mid X\right\| \leqslant \eta\left(\left\|\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} \mid \overline{X}\right\|\right),$$

где $\eta(\xi)$ — некоторая невозрастающая функция, удовлетворяющая условию: $0 < \eta(\xi) < 1$ при $0 < \xi < 1$, то говорят, что единичная сфера в $\overline{X}$ равномерно выпукла. Из теоремы Пифагора следует, что в евклидовом пространстве R^n единичная сфера равномерно выпукла, ибо при $\| \varphi_1 \| = \| \varphi_2 \| = 1$

$$\left\| \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \,\Big|\, R^n \right\| = \sqrt{1 - \left\| \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right\|^2}.$$

Справедлива теорема.

Т е о р е м а I.4 (Кларксон). *При* $1 < p < \infty$ *пространства* L_p *имеют равномерно выпуклую единичную сферу.*

Теорема I.4 вытекает из одного интересного неравенства, которое будет нами доказано позже (см. § 10).

Пусть $r \geqslant \max(p, p')$, где $1 < p < \infty$ и, как обычно, $1/p + 1/p' = 1$, а φ и ψ — два элемента из L_p. Тогда

$$\left(\left\| \frac{\varphi + \psi}{2} \,\Big|\, L_p \right\|^r + \left\| \frac{\varphi - \psi}{2} \,\Big|\, L_p \right\|^r \right)^{1/r} \leqslant \left(\frac{\| \varphi \mid L_p \|^{r'} + \| \psi \mid L_p \|^{r'}}{2} \right)^{1/r'}. \tag{3.3}$$

Это неравенство является обобщением так называемых неравенств Кларксона.

Покажем, как из неравенства (3.3) вытекает теорема I.4. Пусть $\| \varphi \mid L_p \| = \| \psi \mid L_p \| = 1$. Тогда в силу (3.3)

$$\left\| \frac{\varphi + \psi}{2} \,\Big|\, L_p \right\|^p + \left\| \frac{\varphi - \psi}{2} \,\Big|\, L_p \right\|^p \leqslant 1,$$

откуда следует нужная нам оценка с $\eta(\xi) = (1 - \xi^p)^{1/p}$.

Нетрудно убедиться, в том, что ни в L_1, ни в L_∞ сфера не является строго выпуклой. В самом деле, пусть

$$\Omega = \{x\colon -1 \leqslant x \leqslant 1\},$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(-x)) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\| \varphi_1 \mid L_1 \| = \| \varphi_2 \mid L_1 \| = 1, \qquad \left\| \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \,\Big|\, L_1 \right\| = 1.$$

Значит, (3.2) выполнено не строго.

Положим далее

$$\bar{\Omega}_1 = \{x\colon 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

$$\varphi_1(x) = {}^1/_2 [1 + \operatorname{sgn}({}^2/_3 - x)] = \begin{cases} 1, & x < {}^2/_3; \\ 0, & x > {}^2/_3; \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = {}^1/_2 [1 + \operatorname{sgn}(x - {}^1/_3)] = \begin{cases} 0, & x < {}^1/_3; \\ 1, & x > {}^1/_3. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=\begin{cases} {}^1/_2, & x<{}^1/_3;\\ 1, & {}^1/_3<x<{}^2/_3;\\ {}^1/_2, & x>{}^2/_3,\end{cases}$$

и, значит,

$$\left\|\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\,\Big|\, L_\infty\right\|=1,\qquad \|\varphi_1\,|\,L_\infty\|=\|\varphi_2\,|\,L_\infty\|=1.$$

Таким образом, для норм в L_∞ неравенство (3.2) снова выполнено не строго.

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с «носителем» различных функций. *Носителем непрерывной функции* $\operatorname{Supp}\varphi(x)$ *называется любое замкнутое множество, вне которого функция* $\varphi(x)$ *обращается в нуль. Минимальным носителем* $\operatorname{supp}\varphi(x)$ *называется замыкание множества точек, где* $\varphi(x)$ *отлична от нуля.* Очевидно, что минимальный носитель — это пересечение всех ее носителей. *Функции с ограниченным минимальным носителем мы будем называть финитными.*

Пусть, далее, $\varphi(x)$ суммируема со степенью p, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Предположим, что существует такое замкнутое множество F, что для любой финитной непрерывной функции $\psi(x)$

$$\int\limits_\Omega \varphi(x)\,\psi(x)\,dx=0,$$

как только $\operatorname{supp}\psi(x)\cap F=\phi$. Для непрерывных $\varphi(x)$ множество F служит носителем $\varphi(x)$. Пересечение всех таких F — минимальный носитель $\varphi(x)$. Мы будем называть F, обладающее этим свойством, носителем суммируемой функции $\varphi(x)$. Пересечение всех таких F назовем минимальным носителем $\varphi(x)$. Функции $\varphi(x)$ с ограниченным носителем будем называть финитными. Иногда будем условно говорить, что $\varphi(x)=0$ при $x\notin F$.

Можно было бы определить пространство $L_{p,\,\mathrm{loc}}$ *как множество идеальных элементов, с помощью которых выражаются в интегральной форме*

$$(l,\varphi)=\int\psi_l(x)\,\varphi(x)\,dx$$

функционалы над финитными функциями $\varphi(x)$.

Читатель может самостоятельно выполнить все необходимые построения.

Важным свойством функций, непрерывных в замкнутой области, является доказанная Кантором непрерывность по сдвигу. Напомним это свойство. Как известно, функцию $\psi(x)$, непрерывную на ограниченном замкнутом множестве F, можно продолжить с сохранением непрерывности на все R^n без увеличения ее нормы в $C(R^n)$ и притом так, чтобы она обращалась в нуль во всех точках R^n, удаленных от F на расстояние, большее заданного числа h. Часто мы будем называть такую продолженную функцию финитным продолжением $\psi(x)$. Пусть $\psi_h(x)$ — финитное продолжение $\psi(x)$.

Теорема I.5. (Кантор). *Для любой функции $f(x)$, непрерывной и финитной в R^n, существует положительная неубывающая функция $\delta(\varepsilon, f)$ такая, что $\delta(0, f) = 0$, которую мы будем называть модулем непрерывности функции f и которая обладает свойством*

$$| f(x + \Delta) - f(x) | \leqslant \varepsilon \tag{3.4}$$

при произвольном $|\Delta| < \delta(\varepsilon, f)$.

Свойство финитных функций, доказанное Кантором, называют *равномерной непрерывностью.* Для функций $f(x)$, заданных и непрерывных в замкнутой ограниченной области Ω, равномерной непрерывностью обладают ее финитные продолжения.

В терминах функциональных пространств неравенство (3.4) удобно записать в виде

$$\| f(x + \Delta) - f(x) \mid C \| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad |\Delta| < \delta(\varepsilon, f).$$

В случае, если носитель $f(x)$ неограничен, теорема сохраняет силу при условии, если к R^n присоединить точку $x = \infty$ и считать f непрерывной, если выполнено еще неравенство

$$| f(x) - f(\infty) | < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x| > 1/\delta(\varepsilon, f).$$

Доказательство читатель легко воспроизведет сам. Заметим, что если функция $\delta(\varepsilon)$ удовлетворяет условиям теоремы Кантора, то и всякая неубывающая функция $\delta_1(\varepsilon \mid f)$, где $0 < \delta_1 < \delta$, также будет удовлетворять этим условиям.

Определим операцию сдвига аргумента у функции $\psi(x) \in \in L_p(R^n)$. Для непрерывных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеем

$$\int \varphi(x) \psi(x + \Delta) \, dx = \int \varphi(x - \Delta) \psi(x) \, dx.$$

Это равенство в случае суммируемой $\psi(x)$ возьмем за определение левой части при заданной правой, т. е. за определение функции $\psi(x + \Delta)$. Очевидно, все элементарные формулы со сдвигом аргумента для $\psi(x)$, верные для $\psi \in C$, остаются справедливыми и для $\psi(x) \in L_p$.

Мы покажем, что теорема Кантора в соответствующей формулировке переносится на все пространства L_p.

Теорема I.6. *Для $1 \leqslant p < \infty$ для любого финитного элемента $f \in L_p(R^n)$ существует такая положительная неубывающая функция $\delta(\varepsilon)$, что*

$$\| f(x + \Delta) - f(x) \mid L_p \| \leqslant \varepsilon \quad \textit{при} \quad |\Delta| < \delta(\varepsilon).$$

Ввиду важности этой теоремы приведем ее доказательство, не опирающееся на существование точечных значений у функций $f(x)$.

Подсчитаем норму приращения $f(x+\Delta)-f(x)$. Мы будем иметь, по неравенству Минковского,

$$\|f(x+\Delta)-f(x)\mid L_p\| \leqslant \|f_k(x+\Delta)-f_k(x)\mid L_p\| + \\ + \|f_k(x+\Delta)-f(x+\Delta)\mid L_p\| + \|f_k(x)-f(x)\mid L_p\|. \quad (3.5)$$

При k, настолько большом, чтобы второе и третье слагаемое были каждое меньше $\varepsilon/3$, и затем Δ, настолько малом, чтобы первое слагаемое было также меньше $\varepsilon/3$, правая часть (3.5) оказывается меньше ε. Теорема доказана.

Пример:

$$f(x) = \iota_\Omega(x)$$

показывает, что для L_∞ предложение теряет силу.

Сделаем одно полезное замечание.

Пусть последовательность $\{\psi_k\}$ *сходится в* L_p *к предельной функции* $\psi_\infty(x)$. *Тогда для последовательности* $\{\psi_k\}$ *существует общая функция* $\delta(\varepsilon)$, *удовлетворяющая условиям теоремы* I.1.

Действительно, мы имеем

$$\|\psi_k(x+\Delta)-\psi_k(x)\mid L_p\| = \|\psi_k(x+\Delta)-\psi_\infty(x+\Delta)\mid L_p\| + \\ + \|\psi_k(x)-\psi_\infty(x)\mid L_p\| + \|\psi_\infty(x+\Delta)-\psi_\infty(x)\mid L_p\|.$$

При достаточно большом $k > N$ два первых слагаемых правой части малы. При достаточно малом Δ мало и третье слагаемое. Следовательно, при заданном ε, начиная с некоторого k, левая часть меньше ε, как только $\Delta < \delta(\varepsilon/3)$. Выберем теперь

$$\delta^{(N)}(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \ldots, \delta_N(\varepsilon)).$$

При

$$|\Delta| < \delta^{(N)}(\varepsilon), \quad \|\psi_k(x+\Delta)-\psi_k(x)\mid L_p\| < \varepsilon, \\ k = 1, 2, \ldots,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Средние функции

Каждый элемент $\psi(x)$ из пространств L_p или C является по определению линейным функционалом над пространством непрерывных функций и выражается как предел некоторой фундаментальной последовательности непрерывных функций. Разумеется, выбор такой фундаментальной последовательности неоднозначен. В случае, когда $\Omega = R^n$, мы укажем, некоторый стандартный способ построения такой приближающей последовательности, с помощью так называемого оператора усреднения. В соответствие любой функции $\psi(x) \in L_p$, мы приведем последовательность $\psi_h(x)$ функций, зависящих от параметра h таких, что

$$\|\psi_h(x)-\psi(x)\mid L_p\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Опишем этот оператор.

Рассмотрим непрерывную функцию $\sigma(x, y \mid h)$ двух переменных точек, определенную в $R^n \times R^n$, зависящую от скалярного параметра h, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\operatorname{supp} \sigma(x, y \mid h) \subset \{x, y\colon |x - y| < Kh\},$$

$$0 \leqslant \sigma(x, y \mid h) \leqslant Kh^{-n},$$

$$\int \sigma(x, y \mid h)\, dy = 1.$$

Пусть $f(x)$ задана при $x \in R^n$. Рассмотрим интеграл

$$f_h(x) = \int \sigma(x, y \mid h) f(y)\, dy. \tag{4.1}$$

Этот интеграл будем называть средней функцией для $f(x)$, а оператор $Y_c : f(x) \to f_h(x)$ — оператором усреднения.

Теорема I.7. *Пусть $f(x) \in \overset{0}{C}(R^n)$ (это означает, что $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ для x, $\|x\| \geqslant N(\varepsilon)$). Тогда*

$$\lim_{h \to 0} f_h(x) = f(x) \quad \text{в} \quad C(R^n).$$

Иными словами,

$$\| f_h(x) - f(x) \mid C \| < \varepsilon,$$

как только $h < \delta(\varepsilon \mid f)$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$f_h(x) - f(x) = \int \sigma(x, y \mid h) [f(x) - f(y)]\, dy,$$

где x — фиксированная точка из R^n. Интеграл (4.1) распространен по области $|x - y| \leqslant Kh$. Поскольку $f(x)$ равномерно непрерывна, значит, при достаточно малом h:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

и

$$|f_h(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \int \sigma(x, y \mid h)\, dy = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Пусть $f(x) \in L_p$. Тогда средняя функция $f_h(x)$ с фиксированным h удовлетворяет неравенству

$$|f_h(x)| \leqslant K_1 h^{-n/p} \| f(x) \mid L_p \|. \tag{4.2}$$

Действительно, оценивая интеграл

$$f_h(x) = \int \sigma(x, y \mid h) f(y)\, dy$$

по неравенству Гёльдера, будем иметь

$$|f_h(x)| \leqslant \Big\{ \int\limits_{|x-y| \leqslant Kh} |f(y)|^p\, dy \Big\}^{1/p} \Big\{ \int\limits_{|x-y| \leqslant Kh} (Kh^{-n})^{p'}\, dy \Big\}^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \| f(x) \mid L_p \| [K_1^{p'} h^{-np'+n}]^{1/p'} = K_1 h^{-n/p} \| f(x) \mid L_p \|.$$

Таким образом, для $f(x) \in L_p$ норма средней функции в C оценивается через $\| f(x) \mid L_p \|$.

Поведение средней функции в L_p определяется теоремой.

Теорема I.8. *Для всякой $f(x) \in L_p(R^n)$ средняя функция $f_h(x)$ при $h \to 0$ стремится к $f(x)$ в L_p, т. е. справедливо неравенство*

$$\| f_h(x) - f(x) \mid L_p \| < \varepsilon, \tag{4.3}$$

как только $h < \delta(\varepsilon \mid f)$, где $\delta(\varepsilon \mid f)$ — некоторая заданная в R_+ положительная неубывающая функция, такая, что $\delta(0 \mid f) = 0$.

Установим сначала неравенство (4.3) для непрерывных функций. Мы будем иметь, пользуясь свойствами ядра усреднения

$$| f_h(x) - f(x) | \leqslant K h^{-n} \int\limits_{|x-y| \leqslant Kh} | f(x) - f(y) | \, dy.$$

Заменим в этом неравенстве переменные интегрирования, полагая $y = x + z$. Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} | f_h(x) - f(x) | &\leqslant K h^{-n} \Big[\int\limits_{|z| < Kh} | f(x+z) - f(x) |^p \, dz \Big]^{1/p} \times \\ &\times \Big\{ \int\limits_{|z| < Kh} dz \Big\}^{1/p'} \leqslant K_1 h^{-n+n/p'} \Big[\int\limits_{|z| < Kh} | f(x+z) - f(x) |^p \, dz \Big]^{1/p} = \\ &= K_1 h^{-n/p} \Big[\int\limits_{|z| < Kh} | f(x+z) - f(x) |^p \, dz \Big]^{1/p} \end{aligned}$$

или, возводя в степень p,

$$| f_h(x) - f(x) |^p \leqslant K_1^p h^{-n} \int\limits_{|z| \leqslant Kh} | f(x+z) - f(x) |^p \, dz.$$

Интегрируя еще раз по x, будем иметь

$$\begin{aligned} \int\limits_{x \in R^n} | f_h(x) - f(x) |^p \, dx &\leqslant K_1^p h^{-n} \iint\limits_{\substack{|z| < Kh \\ x \in R^n}} | f(x+z) - f(x) |^p \, dz \, dx = \\ &= K_1^p h^{-n} \int\limits_{\substack{|z| \leqslant Kh \\ x \in R^n}} \Big[\int | f(x+z) - f(x) |^p \, dx \Big] dz. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл будет меньше ε^p, как только $Kh < \delta(\varepsilon \mid f)$. Откуда

$$\int\limits_{x \in R^n} | f_h(x) - f(x) |^p \, dx \leqslant K^p h^{-n} \int\limits_{|z| \leqslant Kh} \varepsilon^p \, dz \leqslant K_2 \varepsilon^p,$$

т. е.

$$\| f_h(x) - f(x) \mid L_p \| \leqslant K_2^{1/p} \varepsilon. \tag{4.4}$$

Выбор h зависит, как легко видеть, только от функции $\delta(\varepsilon \mid f)$.

Из неравенства (4.4) для непрерывных функций следует такое же неравенство для произвольных элементов L_p, что и требовалось доказать.

Ниже нам будет удобно пользоваться средними функциями с ядром σ, зависящим от разности $x - y$,

$$\sigma(x, y \mid h) = \sigma(x - y \mid h).$$

Будем говорить, что норма $\| \cdot \mid \overline{X} \|$ *функций, заданных в* R^n, *однородна, если для любого вектора* z

$$\| f(x - z) \mid \overline{X} \| = \| f(x) \mid \overline{X} \|.$$

Теорема I.9. *Однородная норма средней функции с ядром* σ, *зависящим от разности аргументов, не превосходит нормы исходной функции*

$$\| f_h(x) \mid \overline{X} \| \leqslant \| f \mid \overline{X} \|. \tag{4.5}$$

Доказательство. Из формулы (3.1) индукцией для N функций вытекает оценка

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} \mu_j \varphi_j(x) \mid \overline{X} \Big\| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \mu_j \| \varphi_j(x) \mid \overline{X} \|,$$

где $\sum\limits_{j=1}^{N} \mu_j = 1$, $\mu_j \geqslant 0$, и, значит, в частности, в силу однородности нормы $\| \cdot \mid \overline{X} \|$

$$\Big\| \sum_{j=1}^{N} \mu_j f(x - z_j) \mid \overline{X} \Big\| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \mu_j \| f(x) \mid \overline{X} \| = \| f(x) \mid \overline{X} \|. \tag{4.6}$$

Средняя функция $f_h(x)$ с ядром, зависящим от разности $(x - y)$, записывается в виде

$$f_h(x) = \int \sigma(x - y/h) f(y)\, dy = \int \sigma(\xi/h) f(x - \xi)\, d\xi.$$

Заменяя интеграл справа интегральной суммой, применяя к ней оценку (4.6) и переходя к пределу, получим (4.5).

Теорема доказана.

Заметим, что в качестве $\sigma(x, y \mid h)$ *можно взять функцию, допускающую некоторое количество ограниченных производных и даже бесконечно дифференцируемую. Тогда средняя функция, построенная с помощью этого ядра, будет дифференцируемой столько раз, сколько существует производных у* $\sigma(x, y \mid h)$. Укажем один из способов построения $\sigma(x, y \mid h)$. Введем непрерывную функцию одного переменного $\omega(\xi)$, $-\infty < \xi < +\infty$, с помощью формулы

$$\omega(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \geqslant 3/4; \\ 1/2 - 1/2 \operatorname{th} \dfrac{|\xi| - 1/2}{(|\xi| - 1/4)(3/4 - |\xi|)}, & 1/4 < |\xi| \leqslant 3/4; \\ 1, & |\xi| \leqslant 1/4; \end{cases} \tag{4.7}$$

и положим

$$\sigma(x, y \mid h) = h^{-n}\omega\left(\frac{\|x-y\|}{h}\right).$$

Читатель легко проверит, что все условия, наложенные на ядро усреднения, при таком выборе будут выполнены. Функция $\omega(\xi)$ обладает еще некоторыми свойствами, которые будут нам полезны в дальнейшем.

1. У функции $\omega(\xi)$ существуют непрерывные производные всех порядков.

2. В промежутке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$:

$$\omega(\xi) + \omega(1-\xi) = 1.$$

3. Справедливо равенство

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \omega(\xi - \beta) = 1, \tag{4.8}$$

доказываемое элементарно.

Формулу типа (4.8) *часто называют разложением единицы.* Она переносится на пространство R^n. Пусть ξ — n-мерный вектор и

$$\omega(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \omega(\xi_j).$$

Легко устанавливается формула

$$\sum_{\beta} \omega(\xi - \beta) = 1,$$

где суммирование распространяется на все целочисленные значения β_j, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Как обычно, будем называть компактным замкнутое множество из L_p, в любой бесконечной части которого содержится сходящаяся последовательность.

Условия компактности множества $\mathfrak{M} \subset L_p$ дает следующая

Теорема I.10 (М. Рисс). *Для того чтобы замкнутое множество $\mathfrak{M} \subset L_p$ было компактным, необходимо и достаточно выполнение трех свойств:*

1. *Равномерная ограниченность $\mathfrak{M}$ по норме*

$$\exists A : \varphi \in \mathfrak{M} \Rightarrow \|\varphi \mid L_p\| < A.$$

2. *Равностепенная непрерывность элементов $\mathfrak{M}$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, \mathfrak{M}) > 0$ такое, что для всех Δ: $|\Delta| \leqslant \delta$ и любой функции φ из $\mathfrak{M}$ имеет место*

$$\|\varphi(x+\Delta) - \varphi(x) \mid L_p\| \leqslant \varepsilon.$$

3. *Равномерная интегрируемость. Это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать ограниченную область Ω_ε, для которой*

$$\|\varphi \mid L_p(R^n \setminus \Omega_\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon$$

при всех φ из $\mathfrak{M}$.

§ 5. Пространства со смешанной нормой

В дальнейшем важную роль играет понятие пространства со смешанной нормой. Приведем здесь некоторые необходимые нам сведения и результаты теории таких пространств. Пусть непрерывная функция $f(z)$ определена в бицилиндрической области

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \overline{\Omega}_z = \overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y,$$

$$\overline{\Omega}_x \subset R^s, \qquad \overline{\Omega}_y \subset R^t,$$

причем $\overline{\Omega}_x$ и $\overline{\Omega}_y$ ограничены. Пусть даны два банаховых пространства: $\overline{X}$, состоящее из функций, заданных в $\overline{\Omega}_x$ и Y, состоящее из функций, заданных в $\overline{\Omega}_y$. Допустим, что оба эти пространства содержат все непрерывные функции, заданные в $\overline{\Omega}_x$ и соответственно в $\overline{\Omega}_y$. Будем рассматривать непрерывную функцию $f(z)$ как абстрактную функцию переменного $y \in \Omega_y$ со значениями в $\overline{X}$, т. е. $f(x, y)$: $\overline{\Omega}_y \to \overline{X}$. Составим выражение

$$\| \| f(x, y) \mid \overline{X} \| \mid Y \|.$$

Эту величину мы будем называть «смешанной нормой» в пространстве $Z = Y\overline{X}$ и записывать в виде

$$\| f \mid Y\overline{X} \|.$$

Покажем, что $\| f \mid Y\overline{X} \|$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. В самом деле, величина $\| f \mid Y\overline{X} \|$

1) однородна:

$$\| \lambda f \mid Y\overline{X} \| = \| \| \lambda f \mid \overline{X} \| \mid Y \| = \| \mid \lambda \mid \| f \mid \overline{X} \| \mid Y \| =$$
$$= \mid \lambda \mid \| \| f \mid \overline{X} \| \mid Y \| = \mid \lambda \mid \| f \mid Y\overline{X} \|;$$

2) удовлетворяет аксиоме треугольника, при $f = f_1 + f_2$

$$\| f \mid Y\overline{X} \| = \| \| f_1 + f_2 \mid \overline{X} \| \mid Y \| \leqslant$$
$$\leqslant \| [\| f_1 \mid \overline{X} \| + \| f_2 \mid X \|] \mid Y \| \leqslant$$
$$\leqslant \| \| f_1 \mid \overline{X} \| \mid Y \| + \| \| f_2 \mid \overline{X} \| \mid Y \| =$$
$$= \| f_1 \mid Y\overline{X} \| + \| f_2 \mid Y\overline{X} \|;$$

3) обращается в нуль только на нулевом элементе. Имеем

$$\| f \mid Y\overline{X} \| = \| \| f \mid \overline{X} \| \mid Y \| = 0 \Rightarrow \| f \mid \overline{X} \| = 0 \Rightarrow f = 0.$$

В качестве $\overline{X}$ и Y мы будем рассматривать пространства C и L_p. Определим пространство YX как пополнение пространства C непрерывных функций, добавлением идеальных элементов — пределов последовательностей непрерывных функций, фундаментальных по норме $\| \cdot \mid Y\overline{X} \|$. Можно показать, что пространство это будет полным, т. е. банаховым. Приведем два простейших примера пространств со смешанной нормой. Для удобства мы будем иногда обозначать пространства $L_p(y)$ и $C(y)$ через $\hat{L}_p$ и $\hat{C}$. Пусть

$$\overline{X} = C(\Omega_x), \qquad Y = C(\Omega_y).$$

Покажем, что пространство $\hat{C}_y C_x$ со смешанной нормой совпадает с пространством C_z функций двух переменных $z = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$. В самом деле, пусть $\varphi(x, y) = \varphi(z)$ непрерывна по z. Очевидно, что значения $\varphi(x, y)$ при фиксированном y будут непрерывны как функции от x. Установим, что норма разности

$$\| \varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2) \mid C_x \| = \max_x | \varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2) | < \varepsilon$$

при $| y_1 - y_2 | < \delta(\varepsilon)$. Но это является простым следствием теоремы Кантора, поскольку точки (x, y_1) и (x, y_2) в $R_x \times R_y$ находятся на расстоянии $| y_1 - y_2 |$ одна от другой. Значит, $\varphi(x, y)$ как абстрактная функция от y непрерывна в C_x, т. е.

$$C_z \subset \hat{C}_y C_x.$$

Покажем обратное. Пусть функция $\varphi(x, y)$ непрерывна по x при фиксированном y и непрерывна по y как абстрактная функция от y. Покажем, что эта функция непрерывна по совокупности аргументов x и y. Действительно,

$$\varphi(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - \varphi(x, y) =$$
$$= [\varphi(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - \varphi(x + \Delta x, y)] + [\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)].$$

В силу непрерывности абстрактной функции $\varphi(x, y)$ от y со значениями в C_x, при достаточно малом Δ_y $\max | \varphi(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - \varphi(x + \Delta x, y) |$ равномерно сколь угодно мал независимо от выбора Δx. Вторая скобка $[\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)]$ будет сколь угодно мала при достаточно малом Δx. Отсюда следует наше утверждение.

Вторым простым примером пространств со смешанной нормой является пространство $L_p(y)\, L_p(x)$ Покажем, что это пространство совпадает с пространством $L_p(z)$ и

$$\| \varphi \mid L_p(z) \| = \| \| \varphi \mid L_p(x) \| \mid L_p(y) \|. \tag{5.1}$$

В самом деле, фундаментальные последовательности в обоих пространствах совпадают, а, значит, совпадают и сами пространства. Но для непрерывных функций равенство (5.1) выражает сведение кратного интеграла к повторному:

$$\iint | \varphi(x, y) |^p \, dx \, dy = \int \left[\int | \varphi(x, y) |^p \, dx \right] dy,$$

и является очевидным.

Теорема I.11. *Если оба пространства $\overline{X}$ и Y состоят из функций, непрерывных по сдвигу, то и пространство $\hat{Y}\overline{X}$ также состоит из функций, непрерывных по сдвигу в норме $\hat{Y}\overline{X}$.*

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством теоремы о непрерывности по сдвигу элементов $L_p(y)$ при $1 \leqslant p < \infty$. Достаточно установить непрерывность по сдвигу в R^n любой непрерывной функции, обращающейся в нуль в точках, отстоящих от бицилиндрической области $\overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y$ больше чем на h, а затем приблизить

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

с помощью фундаментальной последовательности.

Заметим, что у фундаментальной последовательности в $\hat{L}_q L_p$ нормы промежуточного пространства $L_p(x)$ в свою очередь образуют фундаментальную последовательность.

Порядок вычисления норм, образующих смешанную норму, не безразличен. В случае, когда $p \neq q$, пространства $\hat{L}_q L_p$ и $L_p \hat{L}_q$ не совпадают. Между их нормами существует неравенство. При $q \geqslant p$

$$\| \varphi(x, y) \mid L_p \hat{L}_q \| \geqslant \| \varphi(x, y) \mid \hat{L}_q L_p \|. \tag{5.2}$$

Это неравенство влечет за собой вложение:

$$L_p \hat{L}_q \subset \hat{L}_q L_p.$$

Докажем (5.2) сначала для непрерывных функций.

Рассмотрим интеграл

$$\left\{ \int \left[\int |\varphi(x, y)|^p \, dx \right]^{q/p} dy \right\}^{1/q} = \| \varphi \mid \hat{L}_q L_p \|.$$

Пусть $q/p = r$, $r \geqslant 1$. Применим к этому интегралу неравенство Минковского. Мы получим, полагая $|\varphi(x, y)|^p = \psi(x, y)$:

$$\| \varphi \mid \hat{L}_q L_p \| \equiv \left\{ \int \left| \int \psi(x, y) \, dx \right|^r dy \right\}^{\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{p}} \leqslant \left\{ \int \left[\int \psi^r \, dy \right]^{1/r} dx \right\}^{1/p},$$

или, поскольку $\psi^r = |\varphi|^q$,

$$\| \varphi \mid \hat{L}_q L_p \| \leqslant \left[\int \left\{ \int |\varphi|^q \, dy \right\}^{p/q} dx \right]^{1/p} = \| \varphi \mid L_p \hat{L}_q \|,$$

а это и есть неравенство (5.2). Знак равенства имеет место лишь в случае, когда функция $\varphi(x, y)$ зависит только от одного переменного y.

При $q \geqslant p$ пространство $\hat{L}_q L_p$ в конечной области, очевидно, представляет собой подпространство $\hat{L}_p L_p = L_p(z)$. Элементы пространства $\hat{L}_q L_p$ непрерывны по сдвигу в смысле R^n. Это означает, что если $\psi(x, y) \in \hat{L}_q L_p$, то для финитного продолжения $\tilde{\psi}(x, y)$ функции $\psi(x, y)$ за область $\overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y$ справедливо утверждение

$$\| \tilde{\psi}(x + \Delta x, y + \Delta y) - \tilde{\psi}(x, y) \mid \hat{L}_q L_p \| < \varepsilon$$

при $\sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2} < \delta(\varepsilon)$.

В самом деле, как мы отметили выше, непрерывные функции $\psi_k(x, y)$ — элементы фундаментальной последовательности, определяющей $\psi(x, y)$, являются непрерывными по сдвигу в норме

$\hat{L}_q L_p$. В неравенстве

$$\begin{aligned}
&\| \tilde{\psi}(x+\Delta x, y+\Delta y) - \tilde{\psi}(x, y) \mid \hat{L}_q L_p \| \leqslant \\
&\quad \leqslant \| \psi_k(x+\Delta x, y+\Delta y) - \psi_k(x, y) \mid \hat{L}_q L_p \| + \\
&\quad + \| \tilde{\psi}(x+\Delta x, y+\Delta y) - \psi(x+\Delta x, y+\Delta y) \mid \hat{L}_q L_p \| + \\
&\quad + \| \psi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \psi_k(x+\Delta x, y+\Delta y) \mid \hat{L}_q L_p \| + \\
&\quad + \| \tilde{\psi}(x, y) - \psi(x, y) \mid \hat{L}_q L_p \| + \| \psi_k(x, y) - \\
&\quad - \psi(x, y) \mid \hat{L}_q L_p \|
\end{aligned}$$

слагаемые правой части, кроме первого, будут каждое меньше $\varepsilon/3$ при достаточно больших k, а при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ и фиксированном k будет меньше $\varepsilon/3$ и первое слагаемое, что и требовалось доказать.

Пространства со смешанной нормой двух переменных x и y суть частные случаи пространств со смешанной нормой функций нескольких переменных. Пусть $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}) \in \Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_N$ и каждому $x^{(j)}$ отвечает пространство $L^{(j)}_{q(j)}(x^{(j)})$ или $C^{(j)}(x^{(j)})$, где

$$\| \psi(x^{(j)}) \mid L^{(j)}_{p(j)}(x) \| = \left\{ \int |\psi|^{p(j)} \, d\mu_j(x^{(j)}) \right\}^{1/p(j)}.$$

Здесь μ_j — произвольная мера Стилтьеса—Радона, конечная в области Ω_j как функция переменного $x^{(j)}$.

Рассмотрим функцию N переменных

$$\varphi(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}).$$

Некоторые из этих переменных могут быть дискретными, что соответствует мере, сосредоточенной в изолированных точках. Определим пространство $\overline{X} = L^{(N)}_{p(N)} \ldots L^{(1)}_{p_1}$ с нормой

$$\begin{aligned}
&\| \varphi(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}) \mid L^{(N)}_{p_N} L^{(N-1)}_{p_{N-1}} \ldots L^{(1)}_{p_1} \| = \\
&\quad = \{ \| \ldots \| \varphi \mid L^{(1)}_{p_1} \| \mid L^{(2)}_{p_2} \| \mid \ldots \mid L^{(N)}_{p_N} \| \}, \qquad 1 < p_j < \infty.
\end{aligned}$$

Для пространств $\overline{X} = L^{(N)}_{p_N} L^{(N-1)}_{p_{N-1}} \ldots L^{(1)}_{p_1}$ справедливо неравенство

$$\left\{ \left\| \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \,\middle|\, \overline{X} \right\|^{r} + \left\| \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \,\middle|\, \overline{X} \right\|^{r} \right\}^{1/r} \leqslant \left\{ \frac{\| \varphi_1 \mid \overline{X} \|^{r'} + \| \varphi_2 \mid \overline{X} \|^{r'}}{2} \right\}^{1/r'}, \tag{5.3}$$

где $r \geqslant \max(p_j, p'_j)$, которое мы докажем в конце главы. Из этого неравенства, так же как и в случае L_p, следует

Теорема I.12. *Единичная сфера в пространстве $\overline{X} = L^{(N)}_{p_N} \ldots L^{(1)}_{p_1}$ равномерно выпукла.*

Для нас специальный интерес будет представлять пространства со смешанной нормой $\hat{C}L_p$ — замыкание по норме

$$\| f \mid \hat{C}L_p \| = \max_y \left[\int |\varphi(x, y)|^p \, dx \right]^{1/p}$$

множества непрерывных функций. Приведем несколько свойств этого пространства, часть которых мы уже доказали раньше.

1. *Пространство* $\hat{C}L_p$ *полное и непрерывные функции в нем всюду плотны.*

2. *Пространство* $\hat{C}L_p$ — *подпространство* $\hat{L}_qL_p$ *при любых* $q \geqslant 1$. *Вложение в* $\hat{L}_qL_p$ *определяется неравенством для норм*

$$\| f \mid \hat{C}L_p \| \geqslant \| f \mid \hat{L}_qL_p \| \, |\Omega_y|^{-1/q}.$$

Доказательство элементарно и мы предоставляем его читателю.

3. *Функция* $\psi(x, y) \in \hat{C}L_p(\overline{\Omega}_x \times \overline{\Omega}_y)$ *непрерывна по сдвигу в* R^n.

Доказательство этого свойства совпадает с доказательством непрерывности по сдвигу элементов $\hat{L}_qL_p$.

3°. Теорема I.13. *Для компактности множества* $\mathfrak{M} \subset \hat{C}L_p$, *равно как и для других пространств со смешанной нормой, необходимо и достаточно соблюдение двух условий:*

1) *равномерная ограниченность;*

2) *равностепенная непрерывность.*

Доказательство почти дословно совпадает с доказательством аналогичной теоремы для пространств L_p.

4. *Элементы* $\hat{C}L_p$ *при каждом значении* y *представляет собой функции от* x *из* $L_p(\Omega_x)$. *Абстрактная функция*

$$\varphi(x, y)\colon\ \Omega_y \to L_p(\Omega_x)$$

непрерывна по переменной y, *т. е.*

$$\| \, \| \tilde{\varphi}(x, y + \Delta y) - \tilde{\varphi}(x, y) \mid L_p \| \, \hat{C} \| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\Delta y| < \delta(\varepsilon).$$

Это утверждение есть прямое следствие непрерывности $\tilde{\varphi}(x, y)$ по сдвигу.

Справедливо и обратное утверждение.

5. *Абстрактная функция* $\psi(x, y)$ *переменного* y

$$\psi(x, y)\colon\ \Omega_y \to L_p(\Omega_x),$$

непрерывная по сдвигу по y, *т. е. такая, что*

$$\| \tilde{\psi}(x, y + \Delta y) - \tilde{\psi}(x, y) \mid L_p \| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\Delta y| < \delta(\varepsilon), \tag{5.4}$$

где $\tilde{\psi}(x, y)$ — *нулевое продолжение* $\psi(x, y)$ *по* x, *является элементом* $\hat{C}L_p$.

Доказательство. Задавшись положительным ε, покроем область Ω_y (по предположению ограниченную) конечным числом шаров $S(\varepsilon/3)$ радиуса $\varepsilon/3$ с центрами в точках

$$y_\varepsilon^{(1)}, y_\varepsilon^{(2)}, \ldots, y_\varepsilon^{(N)}.$$

При каждом $y = y_\varepsilon^{(j)}$ имеет место неравенство

$$\| \tilde{\psi}(x + \Delta x, y_\varepsilon^{(j)}) - \tilde{\psi}(x, y_\varepsilon^{(j)}) \mid L_p \| < \varepsilon/3,$$

как только $|\Delta x| \leqslant \delta^{(j)}(\varepsilon/3)$.

Выбрав δ_0 наименьшее из $\delta^{(j)}(\varepsilon/3)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $\delta_0 = \min \delta^{(j)}(\varepsilon/3)$, будем иметь:

$$\| \tilde{\psi}(x+\Delta x, y) - \tilde{\psi}(x, y) \mid L_p \| \leqslant \| \tilde{\psi}(x+\Delta x, y_\varepsilon^{(j)}) - \tilde{\psi}(x, y_\varepsilon^{(j)}) \mid L_p \| + \| \tilde{\psi}(x+\Delta x, y) - \tilde{\psi}(x+\Delta x, y_\varepsilon^{(j)}) \mid L_p \| + \| \tilde{\psi}(x, y) - \tilde{\psi}(x, y_\varepsilon^{(j)}) \mid L_p \|.$$

При $|y - y^{(j)}| < \delta(\varepsilon/3)$; $|\Delta x| < \delta_0(\varepsilon)$ правая часть последнего неравенства будет меньше ε и, значит, $\tilde{\psi}(x, y)$ равномерно непрерывна по сдвигу в Ω по отношению к $y \in \Omega_y$.

Построим для $\tilde{\psi}(x, y)$ среднюю функцию по x

$$\tilde{\psi}_h(x, y) = \int \sigma(x - t \mid h) \tilde{\psi}(t, y)\, dt,$$

Эта функция будет непрерывной по двум переменным при любом фиксированном h. Действительно,

$$\tilde{\psi}_h(x, y+\Delta y) - \tilde{\psi}_h(x, y) = \int \sigma(x - t \mid h)[\tilde{\psi}(t, y+\Delta y) - \tilde{\psi}(t, y)]\, dt.$$

При $|\Delta y| < \delta(\varepsilon)$ имеем

$$\| \tilde{\psi}(t, y+\Delta y) - \tilde{\psi}(t, y) \mid L_p(t) \| < \varepsilon$$

независимо от y. В силу (4.2) для средней функции для этой разности справедливо неравенство

$$| \tilde{\psi}_h(x, y+\Delta y) - \tilde{\psi}_h(x, y) | \leqslant K h^{-n/p} \varepsilon.$$

Это означает непрерывность по y, а значит, и по обеим переменным функции $\psi_h(x, y)$. Покажем, что при $h \to 0$ функция $\tilde{\psi}_h(x, y)$ приближает $\psi(x, y)$ в норме $\hat{C}L_p$. В самом деле, как и при выводе (4.4), имеем

$$\| \tilde{\psi}_h(x, y) - \tilde{\psi}(x, y) \mid L_p(x) \| \leqslant K \max_y \| \tilde{\psi}(x+\Delta x, y) - \tilde{\psi}(x, y) \mid L_p \|.$$

Следовательно, при $|\Delta x| < \delta(\varepsilon)$ $\| \tilde{\psi}_h(x, y) - \tilde{\psi}(x, y) \|$ сколь угодно мала равномерно по отношению к y. Отсюда и вытекает свойство 5.

В заключение этого параграфа рассмотрим два характерных примера функций из пространств со смешанной нормой.

Пример 1. Пусть $n = 3$ и область Ω — куб $|x_j| < 1$, $j = 1, 2, 3$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{-1/4}$. Эта функция принадлежит пространству со смешанной нормой

$$\varphi(x) \in \hat{C}(x_1) L_p(x_2, x_3) \quad \text{при любом} \quad p < 2.$$

При фиксированном x_1 она суммируема со степенью p и непрерывно зависит от x_1. Она же является элементом пространств

$$\varphi(x) \in \hat{C}(x_3) L_p(x_1, x_2)$$

при любом $p < 4$.

Мы привели пример разрывной функции $x \in R^3$, для которой можно говорить о ее естественной локализации, если исключить из области Ω прямую $x_1 = x_2 = 0$. Не всегда такая естественная локализация возможна. Рассмотрим пример.

Пример 2. Пусть $n = 2$, область Ω — квадрат $|x_j| \leqslant 1$; $j = 1, 2$. Перенумеруем все точки квадрата Ω, имеющие рациональные координаты:

$$x^{(k)} = (x_1^k, x_2^k), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и построим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{|x - x^{(k)}|^{1/3}}, \qquad x \neq x^{(k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Поскольку все слагаемые этого ряда положительны, его частные суммы стремятся в каждой точке x к некоторому значению $\varphi(x)$, быть может, равному ∞. В силу сходимости ряда из интегралов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_{\Omega} \frac{dx}{|x - x^{(k)}|^{1/3}} < \infty$$

значение $\varphi(x)$ конечно почти всюду, причем

$$\int_{\Omega} \varphi(x)\, dx < \infty.$$

Определим локализацию $\varphi_0(x)$, положив

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если} \quad x \neq x^{(k)}; \\ 0, & \text{если} \quad x = x^{(k)}. \end{cases}$$

В окрестности каждой рациональной точки $x^{(k)}$ локализация $\varphi_0(x)$ принимает неограниченные значения. Очевидно, что никаким исправлением на множестве 2-мерной меры нуль нельзя сделать эту функцию непрерывной ни в какой подобласти области Ω. Предпочтительных локализаций в смысле точечной непрерывности здесь нет.

Однако на прямых локализация $\varphi_0(x)$ непрерывна. Функция эта принадлежит $\hat{C}(x_1)\, L_p(x_2)$, где p — любое число, меньшее трех.

Пример 3. Пусть $n = 2$. Определим функцию $\varphi(x, y)$ равенством

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x\,|\ln x|\, y\, |\ln y|}}, & \text{если } 0 \leqslant x < 1/2,\ 0 < y < 1/2, \\ & 1/2\, x < y < 2x; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Эта функция имеет непрерывную локализацию на любой системе параллельных прямых: $y = kx + \eta$ при $k < 1/2$ или $k > 2$, в том числе на прямых $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, и не имеет такой локализации на системах прямых при $1/2 < k < 2$.

Доказательство проведем для системы прямых $y = x + \eta$ и для системы прямых $x = \text{const}$. В остальных случаях все оценки будут аналогичными, и читатель легко проведет доказательство сам.

При $0 \leqslant x \leqslant {}^1/_4$ (случаи $x \leqslant 0$ и $x > {}^1/_4$ не вызывают сомнений) имеем

$$\int_0^{1/2} \varphi(x, y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{x \ln|x|}} \int_{x/2}^{2x} \frac{dy}{\sqrt{y}\,|\sqrt{\ln y}\,|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\ln|x|}} \int_{x/2}^{2x} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{K}{\sqrt{|\ln|x||}}$$

и ясно, что

$$\lim_{x \to 0} \| \varphi(x, y) \mid L_1(y) \| = 0,$$

откуда следует непрерывность абстрактной функции $\varphi(x, y)$ по x со значениями в $L_1(y)$ в точке $x = 0$. Непрерывность в остальных точках очевидна.

На прямых $y = x + \eta$ при $\eta = 0$ имеем $\varphi(x, y) = \varphi(x, x) = 1/x\,|\ln x|$ и, следовательно, $\varphi(x, x+\eta)$ при $\eta = 0$ как функция от x не суммируема. При $\eta \to 0$ норма этой функции в L_1 растет неограниченно, так как иначе можно было бы перейти к пределу по $\eta \to 0$ под знаком интеграла и оказалось бы, что при $\eta = 0$ интеграл конечен.

Из этого примера видно, что непрерывная локализация суммируемой функции по всем независимым переменным порознь еще не обеспечивает возможности непрерывной $(n - 1)$-мерной локализации на плоскостях, не параллельных координатным осям.

§ 6. Линейные функционалы в L_p и пространствах со смешанной нормой

Мы будем рассматривать линейные функционалы в пространствах функций, заданных в ограниченных областях.

Теорема 1.14. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\psi(x) \in L_{p'}(\Omega)$. Тогда равенство*

$$(l, \varphi) = \int_\Omega \psi(x)\varphi(x)\, dx, \quad \varphi(x) \in L_p(\Omega) \tag{6.1}$$

определяет функционал l над L_p, норма которого при $1 \leqslant p < \infty$ равна $\| \psi \mid L_{p'} \|$.

Действительно, в силу неравенства Гёльдера, получим

$$|(l, \varphi)| = \left| \int_\Omega \psi(x)\varphi(x)\, dx \right| \leqslant \| \varphi \mid L_p \| \, \| \psi \mid L_{p'} \|.$$

Отсюда следует, что функционал (l, φ) ограничен и что

$$\| l \| \leqslant \| \psi \mid L_{p'} \|.$$

Доказательство обратного неравенства предоставляем читателю.

Теорема 1.15. *Произвольный линейный функционал l над L_p при $1 < p < \infty$ представим в виде* (6.1).

Мы проведем здесь доказательство этой известной теоремы, не пользуясь точечной локализацией функций.

По определению

$$\| l \| = \sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} (l, \varphi).$$

Следовательно, найдется такая последовательность $\{\varphi_k\}$ элементов пространства L_p, что $\| \varphi_k \| \leqslant 1$ и $\lim (l, \varphi_k) = \| l \|$. Такую последовательность мы назовем максимизирующей.

Для максимизирующей последовательности, очевидно,

$$\lim \| \varphi_k \| = 1.$$

Последовательность элементов $\{\varphi_{k,m} = (\varphi_k + \varphi_m)/2\}$ с двумя индексами, где φ_k — максимизирующая последовательность, также является, очевидно, максимизирующей. Поэтому

$$\lim_{k,\, m \to \infty} \left\| \frac{\varphi_k + \varphi_m}{2} \right\| = 1. \tag{6.2}$$

Из неравенства (3.3) вытекает, что

$$\| \varphi_k - \varphi_m \| \leqslant 2 \left(1 - \left\| \frac{\varphi_k + \varphi_m}{2} \right\|^r \right)^{1/r}.$$

В силу (6.2) и

$$\lim_{k,\, m \to \infty} \| \varphi_k - \varphi_m \| = 0,$$

а это означает, что максимизирующая последовательность фундаментальна.

Пространство L_p полно, поэтому найдется такой элемент $\varphi_0 \in \in L_p$, для которого

$$\lim \| \varphi_k - \varphi_0 \| = 0.$$

Ясно, что $\| \varphi_0 \| = 1$ и $(l, \varphi_0) = \| l \|$.

Докажем, что

$$(l, \varphi) = \| l \| \int [| \varphi_0 |^{p-1} \operatorname{sgn} \varphi_0] \varphi \, dx \tag{6.3}$$

для всех φ из L_p.

Составим функцию

$$y(\lambda) = \left(l, \frac{\varphi_0 + \lambda\varphi}{\| \varphi_0 + \lambda\varphi \|} \right).$$

Эта функция определена при всех λ, достаточно малых по абсолютной величине, и достигает максимума при $\lambda = 0$. Следовательно, если производная $y'(0)$ существует, то она равна нулю.

Вычисляя $y'(0)$ непосредственно, получим после простых выкладок:

$$y'(0) = \frac{(l, \varphi)}{\|\varphi_0\|} - \frac{(l, \varphi_0)}{\|\varphi_0\|^2} \frac{d}{d\lambda} \|\varphi_0 + \lambda\varphi\| \Big|_{\lambda=0} =$$

$$= (l, \varphi) - \|l\| \left(\frac{1}{p} \|\varphi_0 + \lambda\varphi\|^{1-p} \frac{d}{d\lambda} \int_\Omega |\varphi_0 + \lambda\varphi|^p \, dx \right) \Big|_{\lambda=0} =$$

$$= (l, \varphi) - \frac{\|l\|}{p} \frac{d}{d\lambda} \int_\Omega |\varphi_0 + \lambda\varphi|^p \, dx \Big|_{\lambda=0}. \tag{6.4}$$

Покажем, что

$$\frac{d}{d\lambda} \int_\Omega |\varphi_0 + \lambda\varphi|^p \, dx \Big|_{\lambda=0} = p \int_\Omega |\varphi_0|^{p-1} (\operatorname{sgn} \varphi_0) \, \varphi \, dx, \tag{6.5}$$

т. е. допустимо формальное дифференцирование под знаком интеграла.

Нам понадобится следующее неравенство, доказательство которого мы предоставляем читателю:

$$\left| \frac{|\varphi + \lambda\psi|^p - |\varphi|^p}{\lambda} - p |\varphi|^{p-1} (\operatorname{sgn} \varphi) \psi \right| \leqslant L\lambda^\alpha (|\varphi|^p + |\psi|^p), \tag{6.6}$$

где L не зависит от λ, φ, ψ; $\alpha = \min(p-1, 1)$, т. е. $\alpha > 0$.

Пусть $\{\varphi_0^k\}$ и $\{\varphi^{(k)}\}$ — последовательности непрерывных функций из L_p, сходящиеся соответственно к φ_0 и φ. Имеем при $\lambda \neq 0$

$$\left| \frac{\int_\Omega |\varphi_0 + \lambda\varphi|^p \, dx - \int_\Omega |\varphi_0|^p \, dx}{\lambda} - p \int_\Omega |\varphi_0|^{p-1} \operatorname{sgn} \varphi_0 \varphi \, dx \right| =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left| \frac{\int_\Omega |\varphi_0^{(k)} + \lambda\varphi^{(k)}|^p \, dx - \int_\Omega |\varphi_0^{(k)}|^p \, dx}{\lambda} - \right.$$

$$\left. - p \int_\Omega |\varphi_0^{(k)}|^{p-1} \operatorname{sgn} \varphi_0^{(k)} \varphi^{(k)} \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k \int_\Omega \left| \frac{|\varphi_0^{(k)} + \lambda\varphi^{(k)}|^p - |\varphi_0^{(k)}|^p}{\lambda} - \right.$$

$$\left. - p |\varphi_0^{(k)}|^{p-1} \operatorname{sgn} \varphi_0^{(k)} \varphi^{(k)} \right| dx \underset{(6.6)}{\leqslant}$$

$$\leqslant K\lambda^\alpha \sup_k (\|\varphi_0^{(k)} \mid L_p\|^p + \|\varphi^{(k)} \mid L_p\|^p) \leqslant K_1 \lambda^\alpha.$$ [1]

Итак, производная

$$\frac{d}{d\lambda} \int_\Omega |\varphi_0 + \lambda\varphi|^p \, dx \Big|_{\lambda=0}$$

[1] Номер формулы за знаком $\leqslant$ указывает на ее использование при выводе.

существует и выполнено равенство (6.5). Так как $y'(0) = 0$, то из равенств (6.5) и (6.4) вытекает справедливость тождества (6.3).

Таким образом, теорема доказана.

Т е о р е м а I.16. *Докажем теперь, что в пространстве $L_1(\Omega)$, где Ω — ограниченная область, общий вид линейного ограниченного функционала будет*

$$(l, \varphi) = \int \psi(x) \varphi(x)\, dx,$$

где $\psi(x) \in L_\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пространство L_1 содержит в себе все пространства L_p при $p > 1$. Следовательно, функционал (l, φ) при всяком $p > 1$ является линейным ограниченным функционалом и представим в виде

$$(l, \varphi) = \int \psi(x) \varphi(x)\, dx,$$

где функция $\psi(x) \in L_{p'}$, очевидно, одна и та же для всевозможных p. Покажем, что

$$\| \psi \,|\, L_{p'} \| \, | \Omega |^{-1/p'}$$

как функция от p' ограничена:

$$\| \psi \,|\, L_{p'} \| \, | \Omega |^{-1/p'} \leqslant \| l \,|\, L_1^* \|.$$

Для простоты предположим с самого начала, что $\| l \mid L_1^* \| = 1$ и $| \Omega | = 1$. Этого можно достичь умножением l на $1/\| l \|$ и изменением масштаба. Таким образом, общий случай сводится к этому.

Мы видели выше, что норма средних функций с положительным ядром, зависящим от разности, для любого элемента из $L_{p'}$ в любом $p' > 1$ не превосходит нормы самого элемента. Покажем, что средняя функция $\psi_h(x)$ не может ни в одной точке области Ω принимать значение большее единицы. В самом деле, если бы это случилось, то можно было бы указать шарик ω, в котором функция $\psi_h(x) \geqslant d > 1$. При этом норма ψ_h удовлетворяла бы неравенству

$$\| \psi_h(x) \,|\, L_{p'} \| > [d^{p'} | \omega |]^{1/p'} = d \, | \omega |^{1/p'}$$

и при достаточно большом p' была бы в свою очередь больше единицы, что противоречит нашему предположению.

Значит, $\| \psi \mid L_\infty \| \leqslant 1$, что и требовалось доказать.

С другой стороны, если бы оказалось $\| \psi \mid L_\infty \| < 1$, то все нормы в C средних функций ψ_h были бы меньше $\eta < 1$, и норма $\| l \|$ не могла бы равняться 1. Отсюда следует теорема.

Из теорем I.15 и I.16 вытекает, что пространство всех линейных функционалов над L_p, $1 \leqslant p < \infty$ совпадает с пространством $L_{p'}$. Таким образом, $L_p^* = L_{p'}$ при $1 \leqslant p < \infty$.

Далее, если $1 < p < \infty$, то находя сопряженное пространство к L_p^*, получим $(L_p^*)^* = L_p$, причем для любого функционала

$l \in (L_p^*)^* = L_{p'}^*$ найдется такой элемент $\sigma_l \in L_p$, что $(l, f) = (f, \sigma)$ для всех $f \in L_p^* = L_{p'}$.

Таким образом, нами установлена рефлексивность пространства L_p при $1 < p < \infty$ [2].

Эта рефлексивность может быть получена и другим способом. В курсах функционального анализа доказывается, что пространства с равномерно выпуклой единичной сферой рефлексивны. Таким образом, рефлексивность L_p вытекает, например, из неравенства (3.3).

В частном случае отсюда следует известная рефлексивность и даже самосопряженность L_2 — вещественного гильбертова пространства. В этом пространстве общий вид линейного функционала будет

$$(l, \varphi) = \int_\Omega \varphi\psi \, dx, \quad \text{где} \quad \varphi \in L_2.$$

В комплексном гильбертовом пространстве любой линейный функционал также записывается в виде скалярного произведения

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi\bar{\psi} \, dx,$$

где $\bar{\psi}$ — функция, комплексно-сопряженная к ψ.

Таким образом, в шкале пространств со строгим включением

$$L_1 \supset L_p \supset \ldots, \qquad \infty > p \geqslant 1,$$

пространства функционалов образуют шкалу

$$L_\infty \subset L_{p'} \subset \ldots, \quad 1 < p' \leqslant \infty,$$

также со строгим включением в обратном порядке. Пространство L_∞ является расширением C с той же самой нормой. Ни C, ни L_1 не являются рефлексивными равно как и L_∞, функционалы в котором — L_∞^* — мы рассматривать не будем.

Рассмотрим теперь функционалы в пространстве $\hat{L}_q L_p$ при $1 \leqslant q < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$.

Теорема I.17. *Произвольный линейный функционал в пространстве $\hat{L}_q L_p$, $1 < q$, $1 < p$, имеет вид*

$$(l, \varphi) = \iint \varphi(x, y)\, \psi_l(x, y) \, dx \, dy,$$

где $\psi_l \in \hat{L}_{q'} L_{p'}$.

Доказательство. Рассмотрим верхнюю грань функционала (l, φ) на единичной сфере $\hat{L}_q L_p$

$$\sup \frac{(l, \varphi)}{\| \varphi \mid \hat{L}_q L_p \|},$$

[2] Банахово пространство X называется рефлексивным, если для любого функционала $l \in X^{**}$ найдется такой элемент $\sigma \in X$, что $(l, f) = (f, \sigma)$ для любого функционала $f \in X^*$.

и пусть

$$\sup \frac{(l, \varphi)}{\| \varphi \mid \hat{L}_q L_p \|} = \lim_{k \to \infty} \frac{(l, \varphi_k)}{\| \varphi_k \mid \hat{L}_q L_p \|}.$$

Нормированная максимизирующая последовательность φ_k в силу равномерной выпуклости $\hat{L}_q L_p$ будет фундаментальной и, значит, стремится к определенному пределу

$$\lim \varphi_k = \varphi_0.$$

Рассмотрим функцию от λ

$$F(\lambda) = \frac{(l, \varphi_0 + \lambda\varphi)}{\| \varphi_0 + \lambda\varphi \mid \hat{L}_q L_p \|},$$

где φ — произвольный элемент $\hat{L}_q L_p$.

Нетрудно убедиться, что $F(\lambda)$ имеет производную по λ в точке $\lambda = 0$. Поскольку в этой точке функция $F(\lambda)$ имеет максимум, следовательно, $F'(0) = 0$.

Формальное дифференцирование, аналогичное тому, которое было проведено при доказательстве теоремы I.15, дает

$$F'(\lambda)|_{\lambda=0} = (l, \varphi) - (l, \varphi_0) \int \Big[\int | \varphi_0(x) |^{p-1} \operatorname{sgn} \varphi_0 \varphi \, dx \times$$
$$\times \| \varphi_0 \mid L_p(x) \|^{q-p} \Big] dy = (l, \varphi) - \| l \| \iint \psi_0(x, y) \varphi(x, y) \, dx \, dy,$$

где

$$\psi_0(x, y) = \| \varphi_0 \mid L_p \|^{q-p} | \varphi_0(x, y) |^{p-1} \operatorname{sgn} \varphi_0.$$

Покажем теперь, что функция $\psi_0(x, y)$ принадлежит $\hat{L}_{q'} L_{p'}$. В самом деле,

$$| \psi_0 |^{p'} = \| \varphi_0 \mid L_p \|^{(q-p)p'} | \varphi_0 |^p,$$

и в силу равенства $pp' - p - p' = 0$

$$\int | \psi_0 |^{p'} dx = \| \varphi_0 \mid L_p \|^{(q-p)p'+p} = \| \varphi_0 \mid L_p \|^{p'(q-1)}.$$

Таким образом,

$$\left\{ \int | \psi_0 |^{p'} dx \right\}^{1/p'} = \| \varphi_0 \mid L_p \|^{q-1}$$

и, значит,

$$\int \left[\left\{ \int | \psi_0 |^{p'} dx \right\}^{1/p'} \right]^{q'} dy = \int \| \varphi_0 \mid L_p \|^q dy = 1$$

и, далее,

$$\| \| \psi_0 \mid L_{p'} \| \mid L_{q'} \| = 1.$$

Откуда окончательно, считая

$$\psi_l(x) = \| l \| \psi_0(x),$$

получаем

$$(l, \varphi) = \int \psi_l(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

где $\psi_l(x) \in \hat{L}_{q'}L_{p'}$ и $\| \psi_l \mid \hat{L}_{q'}L_{p'} \| = \| l \|$.

Теорема доказана.

Рассмотрим еще линейные функционалы в $\hat{L}_1 L_p$.

Т е о р е м а I.18. *При* $1 < p < \infty$ *произвольный линейный функционал* l *над* $\hat{L}_1 L_p$ *имеет вид*

$$(l, \varphi) = \int \psi(z)\, \varphi(z)\, dz,$$

где $\psi(z) \in \hat{L}_\infty L_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$, $\varphi(z) \in \hat{L}_1 L_p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $q > 1$, тогда функционал l, очевидно, ограничен на пространстве $\hat{L}_q L_p$. По теореме I.17 найдется элемент $\psi_q(z)$ из $\hat{L}_{q'}L_{p'}$. Все элементы $\psi_q(z)$ определяют один и тот же функционал l на семействе расширяющихся пространств, и потому на самом деле зависимости от q в них нет. Иными словами, найдется элемент $\psi(z)$ из пересечения пространств $\hat{L}_{q'}L_{p'}$ по всем $q' > 1$ такой, что $\psi(z) = \psi_q(z)$ для любого $q > 1$. Далее следует рассуждать так же, как при доказательстве теоремы I.16. В частности, тем же приемом устанавливается, что функция $\| \psi(x, y) \mid L_{p'} \|$ ограничена по y, т. е. $\psi(z) \in \hat{L}_\infty L_{p'}$. Теорема доказана.

§ 7. Пространства со слабой сходимостью

В дальнейшем нам понадобится одно важное понятие функционального анализа, а именно понятие слабой сходимости последовательности функционалов.

Пусть X — банахово пространство. *Назовем последовательность элементов* $\{\psi_k\}$ *из* X^* *слабо сходящейся, если для любого* $\varphi \in X$ *существует предел числовой последовательности* (ψ_k, φ), *т. е. если* $\{\psi_k\}$ *сходится на каждом элементе* $\varphi \in X$.

Для пространств L_p, $1 < p < \infty$, слабая сходимость означает сходимость последовательности $\{(\psi_k, \varphi)\}$ для всех элементов $\varphi \in L_{p'}$, где $1/p + 1/p' = 1$.

Мы могли бы, следовательно, определить слабую сходимость в L_p как сходимость на всех элементах L_p^*.

Если пространство X не рефлексивно, то сходимость $\{\psi_k\} \in X^*$ на элементах X, вообще говоря, отличается от сходимости $\{\psi_k\} \in X^*$ на элементах X^{**}.

В курсах функционального анализа устанавливается для подобных случаев существование шкалы слабых сходимостей.

Для нашей цели будет достаточно рассмотрение лишь слабой сходимости $\{\psi_k\} \subset L_1$ на элементах C, т. е. наиболее слабого требования. Далее мы будем иметь дело лишь со сходимостью элементов из X^* на всем X и будем употреблять для нее термин «слабая сходимость».

Теория слабой сходимости не связана с точечной локализацией функций из L_p, и она изложена во многих руководствах и монографиях, но в целях полноты изложения мы повторим здесь доказательства основных фактов этой теории.

Пространство X называется слабо полным, если для любой слабо сходящейся последовательности его элементов $\{\varphi_k\}$ существует элемент $\varphi_0 \in X$, к которому она слабо сходится.

Легко показать, что существуют последовательности слабо сходящиеся, которые не являются сильно сходящимися, т. е. сходящимися по норме.

Пусть $n = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $\varphi_k(x) = \sin kx$.

Тогда числа $\int\limits_0^\pi \varphi_k(x)\,\psi(x)\,dx$ служат коэффициентами Фурье для функции $\psi(x)$ в промежутке $(0, \pi)$, и, следовательно, стремятся к нулю для любой $\psi(x) \in L_2$, в то время как

$$\|\varphi_k(x) \mid L_2(0, \pi)\| = \sqrt{\pi/2}.$$

Оказывается, что для всякой последовательности $\{\psi_k\} \in X^*$, сходящейся на всех элементах $\varphi \in X$, предельный функционал ψ_∞, определяемый равенством $(\psi_\infty, \varphi) = \lim\limits_{k\to\infty} (\psi_k, \varphi)$ есть элемент пространства X^*. Другими словами, пространство X^* полно относительно слабой сходимости. Действительно, функционал ψ_∞, очевидно, линеен. Его ограниченность вытекает из одной важной теоремы, принадлежащей Банаху и Штейнхаусу.

Напомним понятие о категориях множеств (Бэр). *Будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ элементов пространства X всюду плотно в X, если в каждом открытом подмножестве X содержатся элементы $\mathfrak{M}$. Будем далее говорить, что $\mathfrak{M}$ нигде не плотно в X, если в каждом открытом подмножестве X содержатся открытые множества, принадлежащие дополнению $\mathfrak{M}$, т. е. для любого шара S множество $S \setminus \mathfrak{M}$ не пусто.*

Очевидно, что замыкание нигде не плотного множества само является нигде не плотным, а замыкание всюду плотного множества — все пространство.

Объединение $\bigcup\limits_N \mathfrak{M}_N$ счетного числа нигде не плотных множеств называется множеством первой категории.

Множество не первой категории называется множеством второй категории.

Лемма 1.1. *Дополнение к множеству первой категории непусто.*

Заметим прежде всего, что объединение двух нигде не плотных множеств $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ будет в свою очередь нигде не плотным. Действительно, в множестве $\mathfrak{M}^{(1)} = X \setminus \mathfrak{M}_1$ найдется шар S_1 свободный от точек $\mathfrak{M}_1$. Поскольку $\mathfrak{M}_2$ нигде не плотно в этом шаре, значит, можно указать шар S_2 лежащий в S_1 даже вместе со своим замыканием, свободный уже и от точек $\mathfrak{M}_2$.

Индукцией доказывается, что и объединение любого конечного числа нигде не плотных множеств снова будет нигде не плотным. Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — множество 1-й категории, а $\{\mathfrak{M}_k\}$ — расширяющаяся последовательность нигде не плотных множеств, для которой

$$\mathfrak{M} = \bigcup_k \mathfrak{M}_k.$$

Для каждого из $\mathfrak{M}_k$ можно указать шар $S_k(\varepsilon_k, \varphi^{(k)}) \subset X \setminus \mathfrak{M}_k$ радиуса не более ε_k с центром $\varphi^{(k)}$, где $\{\varepsilon_k\}$ — убывающая последовательность, стремящаяся к нулю, причем каждый шар $S_{k+1}(\varepsilon_{k+1}, \varphi^{(k+1)})$ лежит вместе со своей границей внутри S_k: $S_{k+1} \subset S_k$. Но последовательность замкнутых шаров, лежащих каждый внутри предыдущего имеет хотя бы одну общую точку $\varphi^{(\infty)}$. Эта точка не принадлежит ни одному $\mathfrak{M}_k$ и, следовательно, не принадлежит и их объединению. Значит она — элемент $X \setminus \mathfrak{M}$, т. е. дополнение $\mathfrak{M}$ не пусто, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, между прочим, что дополнение к множеству первой категории является множеством второй категории.

Теорема I.19 (Банах—Штейнгауз). *У всякой последовательности $\{l_k\}$ функционалов $l_k \in X^*$, сходящейся слабо на X, последовательность норм ограничена.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что теорема будет установлена, если найдется шар $S \subset X$ и постоянная $j > 0$ такая, что $S \subset X_j$, где

$$X_j = \{\varphi \in X: \ |(l_k, \varphi)| \leqslant j \text{ для всех } k \geqslant 1\}.$$

Все множества X_j замкнуты в X и $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$.

По лемме I.1 хотя бы одно множество X_k не является нигде не плотным, тогда найдется такое открытое множество B, что любое его открытое непустое подмножество B_1 имеет с X_k общие точки. Выберем шар S, принадлежащий со своим замыканием B. Тогда $S \subset X_k$. Действительно, если предположить, что в S найдутся точки из $X \setminus X_k$, то непустое открытое множество

$$B_1 = S \cap (X \setminus X_k) \subset B$$

и не содержит точек из X_k, что противоречит определению множества B. Таким образом, утверждение теоремы доказано. Из теоремы Банаха—Штейнгауза следует слабая полнота пространства L_p, $1 \leqslant p < \infty$. Действительно, любая последовательность $\{\psi_k\}$, сходящаяся слабо в L_p, определяет функционал Φ_∞

$$(\Phi_\infty, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (\psi_k, \varphi), \qquad \varphi \in L_p,$$

$$\Phi_\infty(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1(\Phi_\infty, \varphi_1) + a_2(\Phi_\infty, \varphi_2),$$

а по этой теореме и ограниченный, т. е. снова линейный функционал.

Рассмотрим теперь, при каких условиях множество $\mathfrak{M} \subset L_p$ будет слабо компактным.

Приведем несколько предварительных сведений.

Пространство X называется сепарабельным, если среди его элементов существует счетное всюду плотное множество.

Т е о р е м а I.20. *Пространства C и L_p, $1 \leqslant p < \infty$, функций, заданных в замкнутой и ограниченной области Ω, сепарабельны.*

Докажем это для пространства L_p, $1 \leqslant p < \infty$. Сначала воспользуемся тем, что к элементам L_p можно приблизиться непрерывными функциями, а именно средними функциями для каждого элемента. Затем напомним, что непрерывные функции в ограниченной области могут быть приближены с помощью многочленов, и, наконец, используем то, что каждый многочлен с вещественными коэффициентами в ограниченной области сколь угодно мало отличается даже в $C(\Omega)$, а тем более в $L_p(\Omega)$ от некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Множество многочленов с рациональными коэффициентами — счетно. Поэтому возможность приближения такими многочленами доказывает теорему. Первый и третий шаги намеченного доказательства очевидны. Приведем доказательство возможности равномерного приближения непрерывных функций многочленами.

Для простоты положим, что $f(x)$ финитна и непрерывна с носителем в шаре $\{x \in R^n\colon |x| < 1/2\}$. Общий случай легко сводится к этому

Начнем со вспомогательной оценки. Рассмотрим интеграл

$$A(k) = \int\limits_{|\xi| \leqslant 1} (1 - |\xi|^2)^k \, d\xi.$$

Разобьем этот интеграл на два слагаемых

$$A(k) = \int\limits_{|\xi| \leqslant 1} (1 - |\xi|^2)^k \, d\xi = A^{(1)} + A^{(2)},$$

где

$$A^{(1)} = \int\limits_{|\xi| < \delta} (1 - |\xi|^2)^k \, d\xi, \qquad A^{(2)} = \int\limits_{\delta \leqslant |\xi| \leqslant 1} (1 - |\xi|^2)^k \, d\xi.$$

Покажем, что при любом $\delta < 1$ отношение $A^{(2)}/A^{(1)}$ стремится к нулю с ростом k. Оценим $A^{(1)}$ снизу. При достаточно большом k будем иметь $1/\sqrt{k} < \delta$. Обозначая $|\xi| = \rho$, получим

$$A^{(1)} \geqslant \int\limits_{|\xi| < 1\sqrt{k}} (1 - |\xi|^2)^k \, d\xi \geqslant V_n (1 - 1/k)^k \, k^{-n/2},$$

где V_n — объем единичного шара в R^n. Функция $(1 - 1/k)^k$

возрастает при увеличении k [3]. Таким образом,

$$A^{(1)} > k^{-n/2} V_n/4.$$

Интеграл $A^{(2)}$, очевидно, меньше, чем $V_n (1-\delta^2)^k$, и, значит, убывает экспоненциально. Окончательно

$$A^{(2)}/A^{(1)} < 4(1-\delta^2)^k k^{n/2}. \tag{7.1}$$

Неравенство (7.1) позволяет установить, что последовательность $(1-|\xi|^2)^k/A(k)$ является δ-образной. Рассмотрим многочлен от x:

$$P(x) = \frac{1}{A(k)} \int\limits_{|t|<1} (1-|t-x|^2)^k f(t)\,dt.$$

При $|x| < {}^1/_2$ в силу того, что $f(t) = 0$ при $|t| \geqslant {}^1/_2$, имеем

$$P(x) = \frac{1}{A(k)} \int\limits_{|x-t|<1} (1-|t-x|^2)^k f(t)\,dt.$$

Для разности $P(x) - f(x)$ получим

$$P(x) - f(x) = \frac{1}{A(k)} \int\limits_{|x-t|<1} (1-|t-x|^2)^k (f(t)-f(x))\,dt =$$

$$= \frac{1}{A(k)} \int\limits_{|x-t|<\delta} (1-|t-x|^2)^k (f(t)-f(x))\,dt +$$

$$+ \frac{1}{A(k)} \int\limits_{\delta\leqslant|x-t|\leqslant 1} (1-|t-x|^2)^k f(t)\,dt -$$

$$- \frac{1}{A(k)} \int\limits_{\delta\leqslant|x-t|\leqslant 1} (1-|t-x|^2)^k f(x)\,dt.$$

При достаточно малом δ первое слагаемое будет по абсолютной величине меньше чем $\varepsilon/3$ вследствие непрерывности $f(t)$. Второе и третье — каждое меньше, чем $\max|f(x)|\dfrac{A^{(2)}}{A^{(1)}}$, и в силу (7.1) будет также меньше $\varepsilon/3$. Окончательно,

$$|P(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теперь докажем теорему о слабой компактности множеств в сопряженном пространстве.

---

[3] Это следует из того, что

$$-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)^k = -k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = k\int\limits_{1-1/k}^{1} \frac{dz}{z}$$

представляет собой среднее арифметическое значение убывающей функции $1/z$ в промежутке $1-1/k \leqslant z \leqslant 1$ и при возрастании нижнего предела уменьшается.

Т е о р е м а I,21. *Для того чтобы множество* $\mathfrak{M} \subset X^*$ *было слабо компактным, необходимо, а если* X *сепарабельно, то и достаточно, чтобы* $\mathfrak{M}$ *было ограниченным в пространстве* X^*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В нем нуждается только достаточность (необходимость есть простое следствие теоремы I.19).

Пусть X — сепарабельное пространство. В X можно выбрать счетную плотную сеть, которую обозначим

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$$

Подберем также число $A > 0$ так, чтобы для всех l из $\mathfrak{M}$ было $\| l \mid X^* \| \leqslant A$.

Пусть $\{l_k\}$ — любая последовательность $\subset \mathfrak{M}$. Покажем, что из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Выделим сначала подпоследовательность $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots, l_k^{(1)}, \ldots$, сходящуюся на элементе φ_1, т. е. такую, что

$$\lim_{k\to\infty} |(l_k^{(1)}, \varphi_1)| = |(l_\infty^{(1)}, \varphi_1)| \neq \infty.$$

Из последовательности $\{l_k^{(1)}\}$ выделим теперь подпоследовательность $\{l_k^{(2)}\}$, сходящуюся на элементе φ_2. Повторяя этот процесс, получим серию последовательностей:

$$\begin{array}{l} l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots, l_k^{(1)}, \ldots, \\ l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \ldots, l_k^{(2)}, \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_1^{(s)}, l_2^{(s)}, \ldots, l_k^{(s)}, \ldots, \end{array}$$

где $l_k^{(j)}$ при $j \geqslant s$ и $k \to \infty$ сходится на элементе φ_s. Диагональная последовательность $l_k^{(k)}$ будет сходиться на всех элементах всюду плотного множества $\{\varphi_k\}$. Убедимся теперь, что она будет сходиться на всем X. В самом деле, пусть $\varphi \in X$. Выберем такой элемент $\varphi^* \in \{\varphi_k\}$, который отличается от φ по норме меньше чем на $\varepsilon/3A$, и пусть $|(l_s^{(s)}, \varphi^*) - (l_t^{(t)}, \varphi^*)| < \varepsilon/3A$ при всех s и $t > N(\varepsilon/3A)$. При этом

$$|(l_s^{(s)}, \varphi) - (l_t^{(t)}, \varphi)| \leqslant |(l_s^{(s)}, \varphi - \varphi^*)| + \\ + |(l_t^{(t)}, \varphi - \varphi^*)| + |(l_s^{(s)} - l_t^{(t)}, \varphi^*)| \leqslant \varepsilon.$$

Значит, последовательность $(l_k^{(k)}, \varphi)$ фундаментальна, т. е. сходится. Поскольку φ произвольно, наша теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Для слабой компактности множества* $\mathfrak{M}$ *из* L_p, *где* $1 < p \leqslant \infty$, *необходима и достаточна его ограниченность.*

Пространство C не является пространством всех функционалов над некоторым сепарабельным пространством. Определенное нами пространство L_1 также не включает в себя все функционалы над C с естественной нормой. Поэтому наше определение слабой компактности здесь невозможно и доказательство теоремы об условии слабой компактности здесь не проходит. В том, что ограниченные множества в этих пространствах могут не быть слабо компактными, убеждают простые примеры.

Пример. Последовательность функции $\{\operatorname{arctg} kx\} \subset C$ при $|x| < 1$ ограничена, но имеет пределом в L_∞ функцию $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$, не являющуюся элементом C.

Последовательность $f_n(x) = n/(n^2x^2 + 1) \in L_1$, ограничена в L_1, поскольку

$$\| f_n(x) \mid L_1 \| = \int_{-1}^{1} \frac{n\,dx}{n^2x^2+1} = \int_{-n}^{n} \frac{dz}{1+z^2} = 2 \operatorname{arctg} n < \pi,$$

но в L_1 предела не имеет.

Однако мы можем рассматривать слабую компактность в L_∞ некоторого множества элементов из C. А именно, для того чтобы множество $\mathfrak{M} \subset C$ было слабо компактным в L_∞, т. е. в любом своем бесконечном подмножестве содержало последовательность сходящуюся на элементах L_1, необходимо и достаточно, чтобы это множество было равномерно ограниченным. Это вытекает из указанного выше следствия теоремы I.21.

§ 8. Весовые пространства. Пространства функций, заданных в неограниченной области

До сих пор мы рассматривали пространства функций $L_p(\Omega)$ и $C(\Omega)$ в ограниченной области Ω с нормой

$$\| \varphi \mid L_p \| = \left\{ \int_\Omega |\varphi|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

Все основные результаты, полученные нами в этой главе, с небольшими изменениями остаются справедливыми и для пространств с нормой

$$\| \varphi \mid L_{p,\rho} \| = \| \varphi \mid L_p(\Omega, \rho) \| = \left\{ \int_\Omega |\varphi|^p \rho(x) \, dx \right\}^{1/p},$$

где $\rho(x)$ — весовая функция такая, что

$$0 < m \leqslant \rho \leqslant M.$$

Такие пространства мы будем называть весовыми.

Для наших целей достаточно ограничиться непрерывными или кусочно-непрерывными $\rho(x)$.

Мы перечислим нужные нам свойства весовых пространств, не повторяя доказательств, которые почти без изменений переносятся с пространств L_p на $L_{p,\rho}$.

Элементами $L_{p,\rho}$ мы будем считать линейные функционалы (l, φ), полученные расширением множества линейных функционалов вида

$$(l, \varphi) = \int \psi_k(x)\, \varphi(x)\, \rho(x)\, dx, \quad \text{где} \quad \psi_k \in C(\Omega).$$

Назовем последовательность $\{\psi_k\}$ фундаментальной в $L_{p,\rho}$, если

$$\left\{\int |\psi_k - \psi_l|^p \rho(x)\, dx\right\}^{1/p} < \varepsilon \quad \text{при } k, l > N(\varepsilon).$$

Функционалы, служащие пределом фундаментальных в $L_{p,\rho}$ последовательностей, будем называть элементами $L_{p,\rho}$. Такие функционалы определим равенством

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi_k(x)\, \varphi(x)\, \rho(x)\, dx = \int_\Omega \psi_\infty(x)\, \varphi(x)\, \rho(x)\, dx,$$

причем символ $\psi_\infty(x)$ в точке мы, как правило, не будем определять.

На элементы $\psi \in L_{p,\rho}$ переносятся с непрерывных функций те же элементарные операции, как и на $\psi \in L_p$, а именно:

1. $\max(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)$.

2. $\psi^+(x)$, $\psi^-(x)$ *и* $|\psi(x)|$.

3. φ^r, *где* r — *целое*, $r < p$ *и* $|\varphi|^q$, *где* $q \leqslant p$ — *произвольное вещественное число*;

4. $\psi_1 \psi_2$, *где* $\psi_1 \in L_{p_1,\rho}$; $\psi_2 \in L_{p_2,\rho}$;

$1/p_1 + 1/p_2 < 1 - 1/r$, $\psi_1, \psi_2 \in L_{r,\rho}$.

5. $\operatorname{sgn} \varphi$.

Срезка функций из $L_{p,\rho}$ *на область* $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ *и финитное продолжение* $L_{p,\rho}$ *на* R^n *или* Ω *(если* $\rho(x)$ *продолжена на все* R^n*) определяются, как и ранее.*

6. *Теоремы Колмогорова о непрерывности* $\psi(x)$ *по сдвигу, в пространстве с продолженным* $\rho(x)$ *и об условиях компактности множества* $\mathfrak{M} \subset L_{p,\rho}(\Omega)$ *при условии, что* $\rho(x + \Delta) \mid \rho(x)$ *ограничена.*

7. *Приближение* $\psi(x)$ *средними функциями* $\psi_h(x)$.

8. *Помимо* $L_{p,\rho}$ *строятся пространства со смешанной нормой* $\hat{L}_{q,\rho} L_{p_1\rho}$ *и* $\hat{C}_\rho L_{p,\rho}$:

$$\| \varphi \mid \hat{L}_{q,\rho} L_{p,\rho} \| = \| \, \| \varphi \mid L_{p,\rho} \| \mid \hat{L}_{q,\rho} \|,$$

где

$$\rho(y) = \int_{\Omega_x} \rho(x, y)\, dx.$$

9. *Линейные функционалы в весовых пространствах и в весовых пространствах со смешанной нормой выражаются формулами*

$$(l, \varphi) = \int_\Omega \psi_l(x)\, \varphi(x)\, \rho(x)\, dx$$

при $\varphi \in L_{p,\rho}(x)$, *где* $\psi_l \in L_{p',\rho}$, *и*

$$(l, \varphi) = \int_{\Omega_y} \left[\int_{\Omega_x} \psi_l(x, y)\, \varphi(x, y)\, \rho(x, y)\, dx\right] dy$$

при $\varphi(x, y) \in \hat{L}_{q,\rho}L_{p,\rho}$, *где* $\psi_l(x, y) \in \hat{L}_{q',\rho}L_{p',\rho}$ *при* $q' > 1$ *и* $\psi_l(x, y) \in L_{1,\rho}L_{p,\rho}$ *при* $\varphi(x, y) \in \hat{C}_\rho L_{p',\rho}$.

Доказательство этих свойств мы проводить не будем, они аналогичны случаям без веса (см. также [44]).

§ 9. Тензоры и тензорные поля

Мы будем в дальнейшем иметь дело с производными от функций нескольких переменных. Наборы всех таких производных заданного порядка l служат примером тензорных величин. Напомним вкратце несколько элементарных сведений по теории тензоров.

Тензоры суть направленные величины. Их удобно записывать с помощью наборов n^l чисел, называемых компонентами тензора, имеющих вид $a_{j_1, j_2, \ldots, j_l}$. Число l называется рангом тензора.

Тензоры 1-го ранга называются векторами. Элементы тензоров по разному выражаются в различных координатных осях и при линейной замене переменных в том пространстве, в котором тензор находится, его компоненты преобразуются по определенному закону, который мы напомним [4]. Начнем с примеров. Простейшим примером тензора 1-го ранга является координатный вектор, соединяющий начало координат с заданной точкой $x = \uparrow (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При однородной замене координат

$$y = Hx, \tag{9.1}$$

где $\det H \neq 0$, преобразование этого вектора как раз и дается формулой (9.1).

Произвольная направленная величина, выражаемая n компонентами

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n),$$

зависящими от выбора направления координатных осей и преобразующаяся по тому же закону, что и координатный вектор, т. е.

$$\zeta(H) = H\zeta(I),$$

где $\zeta(I)$ — исходное значение (т. е. значение при тождественном преобразовании координат) называется ковариантным вектором.

Градиент некоторой дифференцируемой функции n переменных в какой-либо точке $x = \zeta$

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$$

также является вектором.

---

[4] Выражений для тензора в криволинейных координатах мы здесь не касаемся.

По правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$\operatorname{grad}_y \varphi = \operatorname{grad}_x \varphi \cdot H^{-1},$$

где H^{-1} — матрица, обратная H.

Всякий вектор ζ, *выражаемый* n *компонентами* $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *и преобразующийся как* grad φ *по формуле*

$$\zeta (H) = \zeta (I) \cdot H^{-1},$$

называют контрвариантным вектором.

Ковариантный вектор мы записали в виде вектор-столбца, а контрвариантный как вектор-строку. В случае ортогональных матриц

$$H^{-1} = H^*$$

и поэтому

$$\zeta (H)^* = H \zeta (I)^*$$

Таким образом, в этом случае транспонированные контравариантные векторы преобразуются как ковариантные (и наоборот). Тем самым разница между ними исчезает.

Если рассматривать произвольные матрицы H, то различие в ковариантном и контрвариантном представлениях соответствует двум способам выражения вектора: проекциями на координатные оси и суммой составляющих, параллельных координатным осям. В ортогональных матрицах это одно и то же.

Важным свойством векторов как функций от значка является сохранение скалярного произведения. Пусть $\zeta (H)$ — контрвариантный вектор, а $\eta (H)$ — ковариантный. Произведение (в матричном смысле) имеет вид

$$\zeta (H)\, \eta (H) = \eta (I)\, H^{-1} H \zeta (I) = \eta (I)\, \eta (I)$$

и не зависит от матрицы H.

Т е о р е м а I.22. *Если при заданной функции* $\zeta (H) = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *и произвольном ковариантном векторе* $\eta (H)$ *скалярное произведение*

$$\zeta (H)\, \eta (H)$$

инвариантно, то $\zeta (H)$ *является контрвариантным вектором. Если при произвольном контрвариантном* $\zeta (H)$ *произведение не зависит от* H, *то* $\eta (H)$ — *ковариантный вектор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем систему уравнений для $\zeta (H)$ в виде

$$\zeta (H)\, H \eta (I) = \zeta (I)\, \eta (I)$$

и поставим вместо $\eta (I)$ поочередно столбцы матрицы H^{-1}. Выписывая эти столбцы подряд так, чтобы они образовали матрицу

H^{-1}, получим

$$\zeta(H) H H^{-1} = \zeta(H) = \zeta(I) H^{-1}.$$

Так же доказывается и обратное утверждение.

Пример тензоров второго ранга — диада:

$$\zeta = \xi\eta, \quad \zeta_{ij} = \xi_i \eta_j.$$

Диада состоит из n^2 специального вида элементов и преобразуется по очевидным правилам:

$$\zeta_{ij}(H) = \sum h_{il} h_{js} \zeta_{st}(I).$$

Аналогично определяются мультивекторы ранга l, состоящие из n^l элементов — произведений вида

$$\zeta_{k_1, k_2, \ldots, k_l}(H) = \zeta_{k_1}(H) \zeta_{k_2}(H) \ldots \zeta_{k_l}(H).$$

Мультивекторы ранга l и суммы любого числа таких мультивекторов преобразуются по той же формуле

$$a_{k_1 k_2 \ldots k_l}(H) = \sum \ldots \sum h_{k_1 j_1} h_{k_2 j_2} \ldots h_{k_l j_l} a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_l}(I). \qquad (9.2)$$

Справедлива теорема.

Т е о р е м а I.23. *Каждый тензор ранга l может быть представлен суммой конечного числа мультивекторов.*

В косоугольных координатах каждый тензор ранга l, вообще говоря, будет ко- или контрвариантным по разным значкам. Принято значки, по которым преобразование ковариантно, ставить внизу знака тензора, а те, по которым оно контрвариантно — вверху. Скалярное произведение тензора на другой тензор можно образовать по нескольким, а иногда по всем значкам. Принято для таких произведений не ставить знак суммы по значкам, по которым происходит суммирование, в случае, когда такие значки обозначены одной буквой.

В одном из множителей он стоит в ковариантной форме, а в другом — в контрвариантной.

Например, символ

$$a_{\alpha\beta} b^{\beta}_{\gamma} c^{\varepsilon}_{\delta}$$

обозначает некоторый тензор четвертого ранга.

Подобно, как это имеет место для векторов, необходимое и достаточное условие тензорности функции $a_{k_1 k_2 \ldots k_n}(H)$ состоит в том, чтобы ее скалярное произведение на любой мультивектор $b_{k_1 k_2 \ldots k_n}(H)$ было инвариантным. Читатель легко докажет справедливость этого условия, т. е. равносильность закона инвариантности скалярного произведения и свойства тензорности $a_{k_1 \ldots k_n}$.

В силу сказанного, часто удобно рассматривать вместо тензора a его скалярное произведение на мультивектор $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$ $\ldots, \xi^{(l)})$:

$$\Phi(a, \xi) = \sum a_{k_1 k_2 \ldots k_l} \xi^{(1)}_{k_1} \xi^{(2)}_{k_2} \ldots \xi^{(l)}_{k_l}.$$

Функция $\Phi(a, \xi)$ представляет собой полилинейную форму от l переменных. Задание этой формы в исходной координатной системе полностью равносильно заданию всех компонент тензора a, а преобразование этих компонент при замене координатных осей получается непосредственно, если каждое из переменных $\xi^{(j)}$ считать вектором, преобразующимся по обычным правилам.

Скалярное произведение тензора на его транспонированный

$$a_{k_1 k_2 \ldots k_n} a^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} = T^2(a)$$

мы будем называть главным квадратичным инвариантом тензора a:

$$T(a) = \Big(\sum_{1 \leqslant k_j \leqslant n} (a_{k_1 k_2 \ldots k_n})^2 \Big)^{1/2}.$$

Произвольный тензор a ранга l состоит из n^l компонент, которые могут иногда оказываться равными между собой. Важную роль для нас будут играть тензоры, у которых значение компоненты $a_k(H)$ не меняется при перестановке индексов внутри значка k. *Такие тензоры называются симметрическими.* Например, для тензора 2-го ранга в пространстве трех измерений условия симметричности имеют вид

$$a_{1,2} = a_{2,1}.$$

Для тензоров 3-го ранга условия симметричности запишутся в виде

$$a_{1,1,2} = a_{1,2,1} = a_{2,1,1}; \qquad a_{1,2,2} = a_{2,1,2} = a_{2,2,1}.$$

Из формулы (9.2) нетрудно усмотреть, что условия симметричности сохраняются при любом выборе координатных осей, и, значит, если они выполнены в какой-нибудь одной системе координат, они будут выполнены и в любой другой системе координат.

Если в исходной координатной системе I задать числа a_k, симметричные по k, и определить по формулам (9.2) числа $a_k(H)$ в произвольной координатной системе H, то получится симметричный тензор.

Каждая компонента симметрического тензора характеризуется тем, сколько раз α_1 среди ее индексов попадается единица, сколько раз α_2 — двойка и т. д. Таким образом, компоненты симметрического тензора ранга l можно определять вектором $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами, сумма которых равна l. Например, для тензоров 3-го ранга от двух переменных можно положить

$$a_{1,1,1} = \alpha_{3,0}, \qquad a_{2,2,2} = \alpha_{0,3}, \qquad a_{1,1,2} = a_{1,2,1} = a_{2,1,1} = \alpha_{2,1},$$

$$a_{1,2,2} = a_{2,1,2} = a_{2,2,1} = \alpha_{1,2}.$$

В общем виде будем записывать компоненты симметрического тензора как b_α или $b(\alpha)$.

Переменный вектор $k = \uparrow (k_1, k_2, \ldots, k_l)$ мы назвали мультииндексом или значком при компоненте тензора. При всевозможных перестановках компонент данного значка k мы получим некоторое множество значков $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(l)}$.

Подсчитаем, сколько имеется различных индексов среди всех перестановок данного значка k. Если все компоненты $k_1, k_2, \ldots$ $\ldots, k_l$ значка k различны, то каждая их перестановка дает новое значение $k^{(j)}$, и число различных $k^{(j)}$ равняется числу перестановок из l элементов, т. е. $l!$. Однако если среди компонент значка k α_1 компонент имеют значение 1, α_2 компонент—значение 2 и т. д. вплоть до компонент со значением α_l, то перестановки внутри каждого множества равных компонент не приводят к новым результатам. Таким образом, среди всех $l!$ перестановок одинаковыми оказываются

$$\alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!$$

штук, тогда как число различных значков $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(l)}$, отвечающих всем перестановкам компонент значка k, будет равно

$$\frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}.$$

Здесь через $|\alpha|$ обозначена сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Из этого подсчета следует, что каждой компоненте $b(k)$ симметрического тензора отвечает $|\alpha|!/\alpha!$ разных компонент, значения которых совпадают.

Подсчитаем теперь число различных векторов α таких, что $|\alpha| = l$. Рассмотрим с этой целью произведение геометрических прогрессий

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-t_k} = (1 + t_1 + t_1^2 + \ldots)(1 + t_2 + t_2^2 + \ldots)\ldots$$
$$\ldots(1 + t_n + t_n^2 + \ldots).$$

Очевидно, что справа получаются всевозможные произведения вида

$$t^\alpha = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \ldots t_n^{\alpha_n}$$

и притом каждое только по одному разу:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-t_k} = \sum_{\alpha} t^\alpha.$$

Полагая $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = \xi$, видим, что эта формула переходит в

$$\frac{1}{(1-\xi)^n} = \sum_{l=0}^{\infty} K(n, l)\,\xi^l, \tag{9.3}$$

где $K(n, l)$ обозначает число всех α, для которых

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = l.$$

С другой стороны, по известной формуле бинома Ньютона будем иметь

$$\frac{1}{(1-\xi)^n} = 1 + \frac{n}{1}\xi + \frac{n(n+1)}{2!}\xi^2 + \ldots + \frac{(n+l-1)!}{(n-1)!\,l!}\xi^l + \ldots \tag{9.4}$$

Сравнивая (9.3) и (9.4), получим

$$K(n, l) = \frac{(n+l-1)!}{(n-1)!\,l!}.$$

Число $K(n, l)$ равно числу всевозможных однородных одночленой степени l от n переменных. Число $M(n, l)$ всех одночленов степени не выше l от n переменных равно

$$\sum_{j=0}^{l} K(n, j) = M(n, l).$$

Это число можно найти непосредственно, если умножить каждый одночлен от n переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ степени j на ξ_0^{l-j}. Таким образом, видно, что между многочленами степени l от $n+1$ переменного и многочленами степени не выше l от n переменных существует взаимно однозначное соответствие. Значит,

$$M(n, l) = K(n+1, l) = \frac{(n+l)!}{n!\,l!}.$$

Для задания симметрических тензоров можно употреблять инвариантные формы степени l.

Предположим, что a — симметрический тензор, и подставим в форму Φ вместо $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(l)}$ один и тот же вектор ξ. Мы по лучим

$$\sum_{|\alpha|=l} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} a_\alpha \xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2} \ldots \xi^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=l} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Из этой формулы следует взаимно однозначное соответствие между формой $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и компонентами симметрического тензора a_α.Поэтому компоненты симметрического тензора представляют собой множество коэффициентов однородной формы степени l:

$$\Phi(\xi) = \sum_{|\alpha|=l} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} a_\alpha \xi^\alpha$$

и преобразуются как коэффициенты этой формы.

Тензор $a(x)$, заданный в $\overline{\Omega}$, образует тензорное поле. Кроме тензорных полей непрерывных, мы будем рассматривать еще тензорные поля, все компоненты которых суть элементы пространст-

а L_p. *Множество таких тензоров ранга* l *образуют пространство, которое мы обозначим через* $L_p^{\langle l\rangle}$. Норму в этом пространстве возьмем в виде

$$\| a \mid L_p^{\langle l\rangle} \| = \| T(x) \mid L_p \|,$$

где $T^2(x)$ — главный квадратичный инвариант тензора T. При этом, как легко проверить, аксиомы норм будут выполнены.

Каждый линейный функционал в $L_p^{\langle l\rangle}$ *над элементами* $a_{k_1, k_2, \ldots, k_l}(x \mid H) \in L_p^{\langle l\rangle}$ *представляется в виде*

$$(b, a) = \int (a(x \mid H), b(x \mid H))\, dx, \qquad (9.5)$$

где $b(x \mid H) = b^{(k_1, k_2, \ldots, k_l)}(x \mid H)$ — *тензор, принадлежащий* $L_{p'}^{\langle l\rangle}$, $1/p + 1/p' = 1$. *Таким образом,* $L_p^{\langle l\rangle}$ *при* $1 < p < \infty$ *рефлексивно. Интеграл* (9.5) *принято называть скалярным произведением тензоров* a *и* b.

Доказательство формулы (9.5) проводится в несколько этапов. Прежде всего устанавливается, что можно представить линейный функционал в виде суммы функционалов над каждой компонентой. Каждая из таких компонент должна представлять собою интеграл вида

$$\int b^{(k_1, k_2, \ldots, k_l)} a_{k_1 k_2 \ldots k_l}\, dx,$$

где первый множитель — элемент $L_{p'}$. Далее, по доказанному, из независимости интеграла (9.5) от выбора ортогональной координатной системы вытекает тензорность функции $b^{(k_1, k_2, \ldots, k_l)}$, что и завершает доказательство.

Примером непрерывного симметрического поля ранга l служит набор всех частных производных порядка l от данной l раз непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$

$$a_\alpha(x \mid H) = D_H^\alpha \varphi(x),$$

вычисленной в переменной координатной системе.

Действительно, при фиксированном $x \in \Omega$ этот набор образует симметрический числовой тензор, а это и обозначает тензорность поля производных.

Пространства тензорных полей, определенные таким образом, по своим свойствам почти не отличаются от пространств $L_p(\Omega)$. Эти пространства полны, а при $1 \leqslant p < \infty$ сепарабельны, и в них всюду плотны бесконечно дифференцируемые финитные тензорные поля. Пространство $L_\infty^{\langle l\rangle}$ содержит в качестве собственного подпространства совокупность $C^{\langle l\rangle}(\Omega)$ непрерывных в Ω симметрических тензорных полей $\{a_\alpha(x), \mid \alpha \mid = l\}$, у которых

$$\sup_{x \in \Omega} T(x) < \infty.$$

Далее, пространства тензорных полей при $1 < p < \infty$ имеют равномерно выпуклую единичную сферу и, следовательно, рефлексивны. Такая выпуклость следует из известных неравенств Кларксона.

Пусть переменные x и y изменяются соответственно на многообразиях Ω_x и Ω_y, снабженных мерами $\mu(x)$ и $\nu(y)$. Пусть $L_p(\Omega_x)$ и $L_q(\Omega_y)$ — пространства с нормами

$$\| \varphi(x) \mid L_p(\Omega_x) \| = \left[\int_\Omega | \varphi(x) |^p \, d\mu(x) \right]^{1/p},$$

$$\| \psi(y) \mid L_p(\Omega_y) \| = \left[\int_{\Omega_y} | \psi(y) |^q \, d\nu(y) \right]^{1/q},$$

причем $1 < p < \infty$ и $1 < q < \infty$.

Функции $\varphi(x, y)$, для которых конечна смешанная норма

$$\| (\| \varphi(x, y) \mid L_q(\Omega_y) \|) \mid L_p(\Omega_x) \|,$$

образуют банахово пространство Φ.

При $r \geqslant \max(p, q, p', q')$ имеет место неравенство

$$\left[\left\| \frac{\varphi + \psi}{2} \middle| \Phi \right\|^r + \left\| \frac{\varphi - \psi}{2} \middle| \Phi \right\|^r \right]^{1/r} \leqslant \left[\frac{\| \varphi \mid \Phi \|^{r'} + \| \psi \mid \Phi \|^{r'}}{2} \right]^{1/r'}.$$

Из этого неравенства следует равномерная выпуклость единичной сферы в любом пространстве со смешанной нормой рассмотренного типа.

В самом деле, пусть $\| \varphi \mid \Phi \| = \| \psi \mid \Phi \| = 1$. Тогда

$$\left\| \frac{\varphi - \psi}{2} \middle| \Phi \right\| \leqslant \left(1 - \left\| \frac{\varphi + \psi}{2} \middle| \Phi \right\|^r \right)^{1/r},$$

иными словами, если $\| (\varphi + \psi)/2 \mid \Phi \|$ близка к единице, т. е. если середина хорды, соединяющей φ и ψ, близка к единичной сфере, то длина хорды будет сколь угодно мала.

Рассмотрим пространства абстрактных функций переменного x, элементами которых служат конечномерные или бесконечномерные векторы $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x), \ldots)$.

Пусть сами эти векторы в каждой точке будут в свою очередь элементами весового пространства $l_q(a)$ с нормой

$$\| u \mid l_q(a) \| = \left(\sum_j a_j | u_j |^q \right)^{1/q}$$

и положительными весовыми коэффициентами.

В таком пространстве при $1 < q < \infty$ единичная сфера будет равномерно выпуклой.

Поскольку рассматриваемые нами пространства тензорных полей при $1 < p < \infty$ суть пространства со смешанной нормой такого типа, то единичная сфера в них равномерно выпукла и, следовательно, они рефлексивны, причем общий вид линейного функционала в них таков же, как и в пространствах $L_p(\Omega)$. Например, всякий линейный функционал γ в $L_p^{\langle l\rangle}$ при $1 < p < \infty$ можно представить в виде

$$(\gamma, \varphi) = \int \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} \varphi_\alpha(x) \psi_\alpha(x)\, dx,$$

где $\{\psi_\alpha(x) \mid |\alpha| = l\}$ — элемент пространства $L_{p'}^{\langle l\rangle}$ с нормой, равной норме функционала γ. Аналогичные представления имеют место для остальных пространств.

§ 10. Добавления

Доказательство неравенства (5.3).

Лемма I.2. При $1/2 < z < 1$ *функция*

$$\omega(p) = [z^p + (1 - z)^p]^{1/(p-1)}$$

возрастает в области $p > 1$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\lambda(p) = \ln [z^p + (1 - z)^p].$$

Очевидно, $\lambda(1) = 0$.

Производная $\lambda'(p)$ будет

$$\lambda'(p) = \frac{z^p \ln z + (1-z)^p \ln(1-z)}{z^p + (1-z)^p} = \mu(p) \ln \frac{z}{1-z} + \ln(1-z),$$

где

$$\mu(p) = \frac{z^p}{z^p + (1-z)^p} = \frac{1}{1 + ((1-z)/z)^p}.$$

Поскольку $(1 - z)/z < 1$, значит, $\mu(p)$ будет функцией возрастающей, а вместе с ней будет возрастать и $\lambda'(p)$, так как $\ln [z/(1 - z)] > 0$.

Функция

$$\ln \omega(p) = \frac{\lambda(p)}{p-1} = \frac{1}{p-1} \int_1^p \lambda'(p)\, dp.$$

Следовательно, $\ln \omega(p)$ представляет собою среднее арифметическое от возрастающей функции $\lambda(p)$ по расширяющемуся промежутку $(1, p)$ и, значит, тоже будет возрастающей функцией. Это значит, что возрастает и $\omega(p)$. Лемма доказана.

Лемма I.3. *Для любых чисел* φ *и* ψ *и* $r \geqslant 2$ *справедливо неравенство*

$$\left(\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^r + \left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^r\right)^{1/r} \leqslant \left|\frac{|\varphi|^{r'} + |\psi|^{r'}}{2}\right|^{r'}. \qquad (10.1)$$

Доказательство. Положим $p = r'$, тогда $1 \leqslant p \leqslant 2$. Легко видеть, что неравенство (10.1) достаточно доказать для случая $\varphi > \psi > 0$, что в дальнейшем и делается. Рассмотрим функцию

$$F(\varphi)=\left[\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}+\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{p-1}-\frac{1}{2}(\varphi^p+\psi^p).$$

Для доказательства леммы нам нужно установить, что $F(\varphi)\leqslant 0$. Очевидно, если $\varphi=\psi$, то $F(\varphi)=0$. Далее, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=\left[\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}+\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{(p-2)}\frac{p}{2}\left[\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}-1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}-1}\right]-\frac{p}{2}\varphi^{p-1}=\frac{p}{2}\varphi^{p-1}\left\{\left[\left(\frac{\varphi+\psi}{2\varphi}\right)^{\frac{p}{p-1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\varphi-\psi}{2\varphi}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{(p-2)}\left[\left(\frac{\varphi+\psi}{2\varphi}\right)^{\frac{1}{p-1}}+\left(\frac{\varphi-\psi}{2\varphi}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]-1\right\}.$$

Положим

$$\frac{\varphi+\psi}{2\varphi}=z>\frac{1}{2},\qquad \frac{p}{p-1}=p'\geqslant 2.$$

Тогда

$$\frac{\varphi-\psi}{2\varphi}=1-z,\qquad \frac{1}{p-1}=p'-1,\qquad p-2=-\frac{p'-2}{p'-1}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=\frac{p}{2}\varphi^{p-1}\left\{\left(\frac{[z^{p'-1}+(1-z)^{p'-1}]^{1/(p'-2)}}{[z^{p'}+(1-z)^{p'}]^{1/(p'-1)}}\right)^{p'-2}-1\right\}=$$

$$=\frac{p}{2}\varphi^{p-1}\left\{\left(\frac{\omega(p'-1)}{\omega(p')}\right)^{p'-2}-1\right\},$$

и по лемме I.2 в силу того, что $p'\geqslant 2$,

$$\partial F/\partial\varphi\leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $F(\varphi)$ — убывающая функция φ, а так как $F(\psi)=0$, то $F(\varphi)\leqslant 0$ при $\varphi>\psi>0$. Лемма I.3 доказана.

Лемма I.4. *Пусть Ω — многообразие с мерой $\mu(x)$, $\psi = L_q(\Omega)$, $1<q<\infty$, — пространство с нормой*

$$\|\varphi\mid\Psi\|=\left[\int\limits_{\Omega}|\varphi(x)|^q\,d\mu(x)\right]^{1/q}.$$

Для любого $r\geqslant\max(q,q')$ имеет место неравенство

$$\left[\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\mid\Psi\right\|^r+\left\|\frac{\varphi-\psi}{2}\mid\Psi\right\|^r\right]^{1/r}\leqslant\left[\frac{\|\varphi\mid\Psi\|^{r'}+\|\varphi\mid\Psi\|^{r'}}{2}\right]^{1/r'}.\tag{10.2}$$

Это неравенство при $q\leqslant 2$ и $r=q'$, а также при $q>2$ и $r=q$ принадлежит Кларксону.

Доказательство. Имеем (см. примеч. 1)

$$\left[\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\,\Big|\,\Psi\right\|^{r}+\left\|\frac{\varphi-\psi}{2}\,\Big|\,\Psi\right\|^{r}\right\}^{1/r}=$$

$$=\left\{\left[\int\limits_{\Omega}\left(\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{r}\right)^{q/r}d\mu\right]^{r/q}+\left[\int\limits_{\Omega}\left(\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{r}\right)^{q/r}d\mu\right]^{r/q}\right\}^{1/r}\leqslant \quad (1.10)$$

$$\leqslant\left[\int\limits_{\Omega}\left(\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{r}+\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{r}\right)^{q/r}d\mu\right]^{1/q}\leqslant \quad (10.1)$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_{\Omega}\frac{|\varphi|^{r'}+|\psi|^{r'}}{2}\Bigg)^{q/r'}d\mu\right\}^{1/q}\leqslant \quad (1.9)$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\Omega}|\varphi|^{q}d\mu\right)^{r'/q}+\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\Omega}|\psi|^{q}d\mu\right)^{r'/q}\right\}^{1/r'}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\left(\|\varphi\,|\,\Psi\|^{r'}+\|\psi\,|\,\Psi\|^{r'}\right)\right)^{1/r'}.$$

Неравенство (10.2) доказано.

Займемся теперь непосредственно доказательством неравенства (5.3).

Положим $\gamma_x(\varphi)=\|\varphi(x,y)\,|\,L_q(\Omega_y)\|$, тогда $\|\varphi\,|\,\Phi\|=\|\gamma_x(\varphi)\,|\,L_p(\Omega_x)\|$. Имеем (напомним, что $r\geqslant\max(p,q,p',q')$):

$$\left(\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\,\Big|\,\Phi\right\|^{r}+\left\|\frac{\varphi-\psi}{2}\,\Big|\,\Phi\right\|^{r}\right)^{1/r}=$$

$$=\left\{\left[\int\limits_{\Omega_x}\gamma_x^{p}\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)d\mu\right]^{r/p}+\left[\int\limits_{\Omega_x}\gamma_x^{p}\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)d\mu\right]^{r/p}\right\}^{1/r}\leqslant \quad (1.10)$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_{\Omega_x}\left[\gamma_x^{r}\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)+\gamma_x^{r}\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right]^{p/r}d\mu\right\}^{1/p}\leqslant \quad (10.2)$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_{\Omega_x}\left[\frac{\gamma_x^{r'}(\varphi)+\gamma_x^{r'}(\psi)}{2}\right]^{p/r'}d\mu\right\}^{1/p}\leqslant \quad (1.9)$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{2}\left[\int\limits_{\Omega_x}\gamma_x^{p}(\mu\varphi)\,d\mu\right]^{r'/p}+\frac{1}{2}\left[\int\limits_{\Omega_x}\gamma_x^{p}(\psi)\,d\mu\right]^{r'/p}\right\}^{1/r'}=$$

$$=\left(\frac{\|\varphi\,|\,\Phi\|^{r'}+\|\psi\,|\,\Phi\|^{r'}}{2}\right)^{1/r'}.$$

Неравенство (5.3) доказано.

Мы установили сейчас неравенство (5.3) для пространств со смешанной нормой, элементами которых являются функции двух переменных. Предлагаем читателю установить в качестве упражнения, что неравенство (5.3) сохраняет силу и для пространств со смешанной нормой, образуемой от функций нескольких переменных $\varphi(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(k)})$ последовательным вычислением нормы пространства $L_{p_1}(\Omega_{x^{(1)}})$, затем — нормы пространства $L_{p_2}(\Omega_{x^{(2)}})$ и т. д., причем следует взять $r\geqslant\max(p_1,\ldots,p_k,$ $p'_1,\ldots,p'_k)$.

ГЛАВА II

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПЕРВООБРАЗНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Обобщенные производные суммируемых функций

В функциональных пространствах, которые мы будем рассматривать, особо важны нормы, связанные с производными. Чтобы пространства с такими нормами были полны, необходимо расширить множество «дифференцируемых» функций, т. е. распространить оператор дифференцирования на функции, которые, вообще говоря, не имеют непрерывных производных. Как и раньше, это удается сделать, переходя от понимания производной как поточечного предела некоторого разностного отношения к ее пониманию как некоторого линейного функционала на пространстве бесконечно дифференцируемых функций, финитных в области Ω.

Расширение оператора дифференцирования, о котором пойдет речь, основано на обычной формуле интегрирования по частям. Пусть функция $\varphi(x)$ имеет в области Ω непрерывные производные порядка l, а $\psi(x)$ принадлежит $\mathring{C}^{(\infty)}(\Omega)$. Тогда для любого мультииндекса α, $|\alpha| = l$, получим, интегрируя по частям:

$$\int_{\Omega} D^{\alpha}\varphi(x)\,\psi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\varphi(x)\,D^{\alpha}\psi(x)\,dx. \tag{1.1}$$

Поверхностные интегралы пропадают из-за финитности функции ψ в Ω. Правая часть равенства (1.1) имеет смысл не только для гладких функций $\varphi(x)$, но и для локально суммируемых в Ω. Это замечание и позволяет определить обобщенную производную порядка α.

Пусть α — мультииндекс, а функции $\varphi(x)$, $\varphi_{\alpha}(x)$ локально суммируемы в Ω. Если для любой функции $\psi(x)$ из $\mathring{C}^{(\infty)}(\Omega)$ выполняется равенство

$$\int_{\Omega}\varphi_{\alpha}(x)\,\psi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\varphi(x)\,D^{\alpha}\psi(x)\,dx, \tag{1.2}$$

то назовем функцию $\varphi_{\alpha}(x)$ обобщенной производной порядка α от $\varphi(x)$ в Ω и обозначим ее $D^{\alpha}\varphi(x)$ [1].

Из (1.1) и (1.2) следует, что если функция $\varphi(x)$ имеет в каждой точке области Ω обычную производную порядка α, то она же имеет в Ω обобщенную производную порядка α, совпадающую как функционал на $\mathring{C}^{(\infty)}(\Omega)$ с обычной. Имея это в виду, будем далее часто писать просто «производная», а не «обобщенная производная».

---

[1] Ниже мы всегда предполагаем, что обобщенная производная и сама функция локально суммируемы и не оговариваем этого отдельно.

Если функция $\varphi(x)$ имеет в области Ω обобщенные производные порядка α и γ, причем $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, то, очевидно, для любой функции $\psi(x)$ из $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$ справедлива формула интегрирования по частям:

$$(-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} D^{\alpha}\varphi(x)\, D^{\beta}\psi(x)\,dx=(-1)^{|\gamma|}\int\limits_{\Omega} D^{\gamma}\varphi(x)\, D^{\delta}\psi(x)\,dx.$$

Помимо функций с непрерывными производными, в анализе встречаются еще функции, допускающие производные по каким-либо переменным, определенные почти всюду. Взаимосвязь между этим расширением оператора дифференцирования и обобщенным дифференцированием иллюстрируют следующие примеры.

П р и м е р 1. Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная функция одной переменной, заданная на промежутке $(0, 1)$ и имеющая там почти всюду производную в обычном смысле. Пусть, однако, эта функция не абсолютно непрерывна, тогда $\varphi(x)$ не имеет обобщенной производной первого порядка.

В самом деле, пусть существует локально суммируемая функция $\varphi_1(x)$ такая, что

$$\int\limits_0^1 (\varphi(x)\,\psi'(x)+\varphi_1(x)\,\psi(x))\,dx=0$$

для любой $\psi(x)$ из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(0, 1)$. Первообразная $\Phi(x)=\int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt$ в свою очередь обладает свойством

$$\int\limits_0^1 (\Phi(x)\,\psi'(x)+\varphi_1(x)\,\psi(x))\,dx=0$$

и, значит, для любой $\psi(x)$ из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(0, 1)$ имеет место:

$$\int\limits_0^1 [\Phi(x)-\varphi(x)]\,\psi'(x)\,dx=0. \tag{1.3}$$

Докажем, что разность $\chi(x)=\varphi(x)-\Phi(x)$ постоянна на $[0, 1]$. Пусть $x_0\in(0, 1)$, возьмем любое $h\in(0, 1)$, считая, что $2h\leqslant x_0\leqslant 1-2h$. Далее, для любой функции $\tau(x)$ из $\overset{\circ}{C}(x_0-h, x_0+h)$ имеет место

$$\int\limits_0^1 (\tau(x+h)-\tau(x))\,dx=0.$$

Поэтому существует функция $\psi(x)$ из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(0, 1)$ такая, что $\psi'(x)=$ $=\tau(x+h)-\tau(x)$ при x из $(0, 1)$. Учитывая это, а также (1.3), получим

$$\int_0^1 (\chi(x-h)-\chi(x))\,\tau(x)\,dx=\int_0^1 \chi(x)\,(\tau(x+h)-\tau(x))\,dx=$$
$$=\int_0^1 \chi(x)\,\psi'(x)\,dx=0.$$

Отсюда следует, что при всех x из $(x_0-h,\ x_0+h)$ $\chi(x-h)=\chi(x)$, т. е. $\chi(x)=\text{const}$, $\forall h$ в окрестности любой точки интервала $(0,\ 1)$ и в силу непрерывности $\chi(x)=a$ при всех $x\in(0,\ 1)$. Значит,

$$\varphi(x)=a+\int_0^x \varphi_1(t)dt,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

т. е. $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,\ 1]$, но это противоречит первоначальному выбору.

Пример 2. Пусть $n=2$, $Q=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ и $F(x_1,\ x_2)=f(x_1)+g(x_2)$, где f, g — непрерывные функции, не имеющие производной ни в одной точке $[0,\ 1]$. В этом случае производную второго порядка попросту нельзя определить. А вот обобщенная производная от $F(x_1,\ x_2)$ порядка $(1,\ 1)$ существует. В самом деле, пусть $\psi(x_1,\ x_2)$ принадлежит $\mathring{C}(Q)$, тогда, используя формулу Грина, получим

$$\int_Q F(x_1,x_2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\,dx=\int_Q\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(g(x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(f(x_1)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\right]dx=$$
$$=\int_{\partial Q}\left[g(x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cos(\widehat{nx_1})+f(x_1)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cos(\widehat{nx_2})\right]dS=0.$$

Интеграл по границе ∂Q равен нулю в силу финитности $\psi(x)$ в Q. Полученное равенство означает, согласно определению, что $F(x_1,\ x_2)$ имеет в Q обобщенную производную $\partial^2F/\partial x_1\partial x_2$, равную 0.

На этом примере видно также, что существование обобщенной производной порядка α вовсе не гарантирует существования производных промежуточных порядков β, $0\leqslant\beta\leqslant\alpha$. Позднее мы докажем, что если существуют все обобщенные производные порядка l от φ, то существуют и обобщенные производные всех порядков, меньших l.

Укажем несколько важных свойств обобщенных производных вытекающих непосредственно из определения.

Если в области Ω функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ имеют обобщенные производные порядка α, то и любая их линейная комбинация имеет обобщенную производную этого порядка и при этом

$$D^\alpha(a_1\varphi_1+a_2\varphi_2)=a_1D^\alpha\varphi_1+a_2D^\alpha\varphi_2. \tag{1.4}$$

Если в области Ω функция φ имеет обобщенную производную порядка α, т. е. $D^\alpha\varphi(x)=\psi(x)$, а функция $\psi(x)$ имеет обобщен-

ную производную порядка β, *т. е.* $D^{\beta}\psi(x) = \omega(x)$, *то функция* φ *имеет в* Ω *обобщенную производную порядка* $(\alpha + \beta)$ *и при этом* $D^{\alpha+\beta}\varphi(x) = \omega(x)$.

Если φ *финитна в* Ω, *то и* $D^{\alpha}\varphi$ *финитна в* Ω. *Вообще* $\operatorname{supp} D^{\alpha}\varphi \subset \operatorname{supp} \varphi(x)$.

В определенной обобщенной производной, на первый взгляд, кажется существенной роль области Ω, в которой функции заданы. Однако это совсем не так. Взаимосвязь обобщенных производных функции устанавливает следующая теорема.

Теорема II.1. *Пусть производная* $\varphi(x)$ *порядка* α *в области* Ω_1 *равна* $\varphi_{\alpha}^{1}(x)$, *а в области* Ω_2 — $\varphi_{\alpha}^{2}(x)$, *тогда в* $\Omega_1 \cap \Omega_2$ *функции* φ_{α}^{1}, φ_{α}^{2} *совпадают и существует производная* $\varphi(x)$ *порядка* α *в* $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Доказательство. Для любой функции $\psi(x)$, принадлежащей $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, справедливо:

$$\int\limits_{\Omega_1\cap\Omega_2} \varphi_{\alpha}^{1}(x)\,\psi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega_1} \varphi_{\alpha}^{1}(x)\,\psi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega_1} \varphi(x)\,D^{\alpha}\psi(x)\,dx =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega_2} \varphi(x)\,D^{\alpha}\psi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega_2} \varphi_{\alpha}^{2}(x)\,\psi(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega_1\cap\Omega_2} \varphi_{\alpha}^{2}(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Это и означает, что φ_{α}^{1} совпадает с φ_{α}^{2} в $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

Пусть ограниченная область Ω_0 вложена в $\Omega_1 \cup \Omega_2$ со своим замыканием. Найдем какие-нибудь две бесконечно дифференцируемые функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ такие, что $\operatorname{supp}\psi_i(x) \subset \Omega_i$, $i = 1, 2$, и $\psi_1(x) + \psi_2(x) = 1$ в Ω_0. Тогда локально суммируемая в $\Omega_1 \cup \Omega_2$ функция $\varphi_{\alpha}(x) = \psi_1(x)\,\varphi_{\alpha}^{1}(x) + \psi_2(x)\,\varphi_{\alpha}^{2}(x)$ является обобщенной производной порядка α от φ в Ω_0. В самом деле, пусть $\psi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega_0)$, тогда

$$\int\limits_{\Omega_0} \varphi_{\alpha}(x)\,\psi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega_1} \varphi_{\alpha}^{1}(x)\,\psi_1(x)\,\psi(x)\,dx + \int\limits_{\Omega_2} \varphi_{\alpha}^{2}(x)\,\psi_2(x)\,\psi(x)\,dx =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\,D^{\alpha}\left((\psi_1(x) + \psi_2(x))\,\psi(x)\right)dx =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\,D^{\alpha}\psi(x)\,dx.$$

Это и означает, что $\varphi_{\alpha} = D^{\alpha}\varphi$ в Ω_0.

Далее, построим такую последовательность расширяющихся ограниченных областей $\{\Omega_0^k\}_{k=1}^{\infty}$, замыкания которых вложены в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, что $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_0^k$. В каждой из них функция $\varphi(x)$ имеет производную $\varphi_{\alpha}^{k}(x)$ порядка α, причем в общей части любых двух областей Ω_0^k и Ω_0^l функции φ_{α}^{k} и φ_{α}^{l}, как уже доказано, совпадают. Тем самым $\varphi(x)$ имеет $D^\alpha\varphi$ во всем $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Теорема доказана.

Теорема II.2. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *имеет в области* Ω *обобщенную производную* $D^\alpha\varphi(x)$ *и* $\varphi_h(x) = \varphi(x) * h^{-h}\omega(x/h)$, *где* $\omega(\cdot)$ — *стандартное ядро усреднения, тогда в любой области* Ω_0, $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, *при достаточно малых* h *имеет место равенство*:

$$D^\alpha(\varphi_h)(x) = D^\alpha\varphi(x) * h^{-n}\omega(x/h). \tag{1.5}$$

Справедливость (1.5) доказывает следующая цепочка равенств:

$$D^\alpha\left(\int\limits_\Omega \varphi(y)\, h^{-n}\omega((x-y)/h)\, dy\right) = h^{-n}\int\limits_\Omega \varphi(y)\, D_x^\alpha(\omega((x-y)/h))\, dy =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} h^{-n}\int\limits_\Omega \varphi(y)\, D_y^\alpha(\omega((x-y)/h))\, dy =$$
$$= \int\limits_\Omega D^\alpha\varphi(y)\, h^{-n}\omega((x-y)/h)\, dy.$$

В последнем из них мы учли определение обобщенной производной и тот очевидный факт, что при $x \in \Omega_0$ и достаточно малых h носитель $h^{-n}\omega((x-y)/h)$ как функции от y вложен в Ω.

Приближение средними функциями позволяет переносить на обобщенные производные многие свойства обычного дифференцирования.

Теорема II.3. *Пусть функция* φ *имеет в области* Ω *все обобщенные производные порядка* l, *причем* $D^\alpha\varphi = 0$, $|\alpha| = l$. *Тогда* φ *допускает непрерывную локализацию в виде многочлена степени* $\leqslant(l-1)$.

Доказательство. Известно, что любая гладкая функция φ, удовлетворяющая в области Ω системе $D^\alpha\varphi = 0$, $|\alpha| = l$, является многочленом степени $\leqslant(l-1)$. (Впрочем, это утверждение несложно доказать индукцией по l.)

Пусть φ не обязательно гладкая функция, тогда образуем средние $\varphi_h(x)$. В любой ограниченной области Ω_0, $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, при достаточно малых h по теореме II.2 имеют место равенства: $D^\alpha\varphi_h = (D^\alpha\varphi)_h = 0$, $|\alpha| = l$. Но φ_h — гладкая функция, и поэтому φ_h совпадает на Ω_0 с некоторым многочленом $P_{l-1}^h(x)$ степени $\leqslant(l-1)$. Множество $\{P_{l-1}^{(h)}(x)\}$ фундаментально при $h \to 0$ в $L_1(\Omega_0)$, а значит, и в $\boldsymbol{P}_{l-1}$. Пусть $P_{l-1}(x) = \lim\limits_{h\to 0} P_{l-1}^{(h)}(x)$ в $\boldsymbol{P}_{l-1}$, тогда φ_h сходится к $P_{l-1}(x)$ в $L_1(\Omega_0)$, и потому этот многочлен совпадает с $\varphi(x)$ в смысле $L_1(\Omega_0)$. Теорема доказана.

Теорема II.4. *Пусть последовательность* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *функций,* l *раз непрерывно дифференцируемых в области* Ω, *слабо сходится к локально суммируемой функции* $\varphi(x)$ *в любом пространстве* $L_1(\Omega_0)$, *где* Ω_0 — *ограниченная область,* $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. *Пусть* α — *мультииндекс,* $|\alpha| = l$, $p > 1$[2] *и нормы* $\|D^\alpha\varphi_k(x) | L_p(\Omega_0)\|$

[2] Теорема II.4 при $p = 1$ перестает быть верной.

ограничены равномерно по k. Тогда функция φ имеет в Ω обобщенную производную порядка α, причем в любой ограниченной области Ω_0, $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, существует подпоследовательность $\{D^\alpha \varphi_{k_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$, слабо сходящаяся к $D^\alpha \varphi(x)$ в $L_p(\Omega_0)$.

Доказательство. Зафиксируем ограниченную область Ω_0, $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. Так как $p > 1$, то любой шар в $L_p(\Omega_0)$ слабо компактен (см. теоремы 1.10 и 1.21). Вспомнив, что по условию нормы $\| D^\alpha \varphi_k \mid L_p(\Omega_0) \|$ ограничены равномерно по k, выберем подпоследовательность $\{D^\alpha \varphi_{k_j}(x)\}$, слабо сходящуюся в $L_p(\Omega_0)$ к некоторой функции $\varphi_\alpha(x)$. Пользуясь формулой интегрирования по частям, получим для любой функции $\psi(x)$ из $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega_0} \psi(x) D^\alpha \varphi_{k_j}(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_0} D^\alpha \psi(x) \varphi_{k_j}(x)\, dx.$$

Переходя здесь к пределу при $j \to \infty$, получаем

$$\int_{\Omega_0} \psi(x) \varphi_\alpha(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega_0} D^\alpha \psi(x) \varphi(x)\, dx.$$

Это означает, что φ имеет в Ω_0 обобщенную производную φ_α.

Представим Ω в виде объединения последовательности расширяющихся ограниченных областей, в каждой из которых, как уже доказано, функция φ имеет производную $D^\alpha \varphi$. Теперь остается воспользоваться теоремой II.1. Теорема II.4 доказана.

Следствие 1.1. *Пусть функция φ локально суммируема в области Ω, образуем средние функции φ_h. Если $p > 1$ и для любой ограниченной области Ω_0, $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, нормы $\| D^\alpha \varphi_h \mid L_p(\Omega_0) \|$ ограничены равномерно по h, то φ имеет в Ω обобщенную производную $D^\alpha \varphi$.*

Перейдем к изучению набора всех обобщенных производных порядка l от функции $\varphi(x)$, вычисленных в переменной ортогональной системе координат H. Покажем, что набор $\{D_H^\alpha \varphi(x) \mid |\alpha| = l\}$ образует симметрическое тензорное поле ранга l.

Действительно, как доказано в § 9 гл. I, производные порядка l любой гладкой функции, и в частности средней функции $\varphi_h(x)$, образуют симметрическое тензорное поле ранга l. Поэтому для любого переменного финитного в Ω бесконечно дифференцируемого мультивектора $\xi_\alpha(x \mid H)$ интеграл

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} D_H^\alpha \varphi_h(x)\, \xi_\alpha(x \mid H)\, dx$$

не зависит от ортогональной матрицы H. Переходя здесь к пределу при $h \to 0$, получим, что интеграл

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} D_H^\alpha \varphi(x)\, \xi_\alpha(x \mid H)\, dx$$

также не зависит от H. Это доказывает тензорность набора $\{D^\alpha \varphi(x) \mid |\alpha| = l\}$.

В гл. I мы ввели пространства $L_p^{\langle l\rangle}(\Omega)$ тензорных полей $\{\chi_\alpha(x) \,||\, \alpha \,| = l\}$ с нормой

$$\| \chi_\alpha(x) \,|\, L_p^{\langle l\rangle}(\Omega) \| = \left\{ \int_\Omega \left[\sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} \,|\, \chi_\alpha(x) \,|^2 \right]^{p/2} dx \right\}^{1/p}.$$

Назовем тензор $\{\chi_\alpha(x) \,||\, \alpha \,| = l\}$ из $L_p^{\langle l\rangle}(\Omega)$ обобщенным градиентом порядка l, если для любой функции $\psi(x)$ из $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$ справедливы равенства:

$$\int_\Omega [D_k\psi(x)\,\chi_{\beta+\delta_j}(x) - D_j\psi(x)\,\chi_{\beta+\delta_k}(x)]\,dx = 0, \tag{1.6}$$

где $|\,\beta\,| = l - 1$, δ_j — вектор, имеющий j-й координатой единицу, а все остальные нули.

Множество всех обобщенных градиентов порядка l обозначим $L_p^{\langle l\rangle}(\Omega)$. Легко видеть, что $L_p^{\langle l\rangle}(\Omega)$ — замкнутое подпространство в $L_p^{\langle l\rangle}(\Omega)$. В § 2 мы докажем, что всякому тензору $\{\chi_\alpha(x) \,||\, \alpha \,| = l\}$ из $L_p^{(l)}(\Omega)$ соответствует некоторая «первообразная», т. е. такая локально суммируемая функция $\varphi(x)$, что при любом α, $|\,\alpha\,| = l$, $D^\alpha\varphi(x) = \chi_\alpha(x)$ в Ω. Это объясняет происхождение термина «обобщенный градиент».

§ 2. Первообразные функции

Одна из важных задач анализа состоит в восстановлении функции по ее производной, т. е. в отыскании первообразной. Две такие задачи для суммируемых функций n переменных мы решим в этом параграфе. Приведем их формулировки.

1. *Пусть α — мультииндекс, $|\,\alpha\,| = l$, и в области Ω из R^n задана функция $\varphi_\alpha(x)$. Найти функцию $\Phi(x)$, которая в Ω удовлетворяет уравнению*

$$D^\alpha\Phi(x) = \varphi_\alpha(x). \tag{2.1}$$

2. *Пусть для любого α порядка l задана некоторая функция $\varphi_\alpha(x)$. Выяснить, при каких условиях на $\{\varphi_\alpha \,||\, \alpha\,| = l\}$ существует функция $\Phi(x)$, удовлетворяющая системе уравнений*

$$D^\alpha\Phi(x) = \varphi_\alpha(x), \quad |\,\alpha\,| = l. \tag{2.2}$$

Будем пользоваться обозначениями:

$$\hat{x}_k = \uparrow (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n), \quad (x_k, \hat{x}_k) = x.$$

Теорема II.5. *Пусть $j \in \{1, \ldots, n\}$, $P_j = \{x : |\,x_j\,| < R,\ \hat{x}_j \in R^{n-1}\}$, $\overline{\Omega}$ — область, вложенная в P_j, и $\varphi(x)$ принадлежит $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда существует функция $\Phi(x)$ из $\hat{C}(x_j)\, L_p(\hat{x}_j)$, $x \in P_j$, удовлетворяющая уравнению*

$$D_j\Phi(x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.3}$$

При этом имеет место оценка:

$$\sup_{|x_j|\leqslant R} \| \Phi(x) \,|\, L_p(\hat{x}_j) \| \leqslant K \| \varphi \,|\, L_p(\Omega) \|, \tag{2.4}$$

где K не зависит от φ. Если Ω — параллелепипед вида $\{(x_j, \hat{x}_j) : |\, x_j \,| \leqslant R,\ \hat{x}_j \in \prod\limits_{k\neq j} [A_k, B_k]\}$, то разность любых двух решений (2.3) *из $\widehat{C}(x_j)\, L_p(\hat{x}_j)$ в Ω зависит только от $\hat{x}_j$ и принадлежит $L_p(\hat{x}_j)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения и выкладки проводятся одинаково для всех j от 1 до n, поэтому рассмотрим лишь случай $j = 1$. Пусть числа $a, b: -R < a < b < R$, где R — параметр, входящий в определение полосы P_1. Возьмем какую-нибудь функцию $\rho(t)$, которая непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, и такую, что $\rho(a) = 0$, $\rho(b) = 1$. Например, если $a = 0$, $b = 1$, то можно взять $\rho(t) = t$. При $t < a$ положим $\rho(t) = 1$, а при $t > b$ $\rho(t) = 0$. Таким образом, $\rho(t)$ кусочно-непрерывна на всем R^1, а точки a, b — ее точки разрыва. Продолжим $\varphi(x) \in L_p(\Omega)$ на все R^n, доопределив ее вне Ω нулем. За этим продолжением сохраним прежнее обозначение $\varphi(x)$. Если теперь $\varphi(x)$ — гладкая функция в R^n, то на ней определено значение следующего линейного оператора:

$$I\varphi(x_1, \hat{x}_1) = \int_a^{x_1} \varphi(t, \hat{x}_1)\, \rho(t)\, dt + \int_{x_1}^{b} \varphi(t, \hat{x}_1)\, (\rho(t) - 1)\, dt. \tag{2.5}$$

Положим $\Phi(x) = I\varphi(x)$, тогда, очевидно, $\Phi(x)$ непрерывно дифференцируема и $D_1\Phi(x) = \varphi(x)$. Пользуясь неравенством Гёльдера, получим при фиксированном x_1:

$$\left| \int_a^{x_1} \varphi(t, \hat{x}_1)\, \rho(t)\, dt \right|^p \leqslant \left(\int_a^{x_1} |\, \varphi(t, \hat{x}_1) \,|^p\, dt \right) \left(\int_a^{x_1} |\, \rho(t) \,|^{p'}\, dt \right)^{p/p'},$$

$$\left| \int_{x_1}^{b} \varphi(t, \hat{x}_1)\, (\rho(t) - 1)\, dt \right|^p \leqslant \left(\int_{x_1}^{b} |\, \varphi(t, \hat{x}_1) \,|^p\, dt \right) \left(\int_{x_1}^{b} |\, \rho(t) - 1 \,|^{p'}\, dt \right)^{p/p}.$$

Интегрируя эти неравенства по $\hat{x}_1$ из R^{n-1}, получаем

$$\sup_{|x_1|\leqslant R} \| I\varphi(x) \,|\, L_p(\hat{x}_1) \| \leqslant K \| \varphi \,|\, L_p \|, \tag{2.6}$$

т. е. $\Phi(x)$ действительно удовлетворяет (2.3). Таким образом, для функций $\varphi(x)$ из $\mathring{C}(\Omega)$ теорема доказана.

Расширим оператор I по непрерывности на все L_p. Пусть $\varphi(x)$ из L_p не обязательно гладкая. Образуем средние функции φ_h и положим $\Phi_h = I\varphi_h$. Из (2.6) следует, что $\{\Phi_h\}$ фундаментально в $\widehat{C}(x_1)\, L_p(\hat{x}_1)$ при $h \to 0$ и, значит, существует предел Φ из $\widehat{C}(x_1)\, L_p(\hat{x}_1)$. Положим $I\varphi = \Phi$ и докажем, что $\Phi(x)$ — искомая первообразная φ. Так как $D_1\Phi_h = \varphi_h \to \varphi$ в L_p, то для любой ограниченной области $\Omega_0 \subset P_1$ нормы $\| D_1\Phi_h \,|\, L_p(\Omega_0) \|$ ограничены сверху равномерно по h. Применив к множеству $\{\Phi_h\}$ теорему II.4, заключаем, что существует производная $D_1\Phi(x)$, удовлетворяющая и в этом случае равенству (2.3). Оценка (2.6), а значит, и (2.4) при этом сохраняется.

Пусть $\Omega = [-R, R] \times \prod_{k=2}^{n} [A_k, B_k]$ и функция $\Phi_*(x)$ из $\hat{C}(x_1) L_p(\hat{x}_1)$ в Ω удовлетворяет (2.3). Разность $\Phi(x) = \Phi_*(x) - I\varphi(x)$, очевидно, решает в Ω однородное уравнение: $D_1\Phi = 0$. Если $\Phi(x)$ один раз непрерывно по x_1 дифференцируема, то при всех $x \in \Omega$ имеет место

$$\Phi(x) = \int_a^b \Phi(t, \hat{x}_1) \rho'(t)\, dt. \tag{2.7}$$

Докажем (2.7). Определим две вспомогательные функции

$$K(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > b; \\ \rho(t), & \text{если } a \leqslant t \leqslant b; \\ 0, & \text{если } t < a; \end{cases}$$

$$\psi(t, \xi) = \begin{cases} K(t), & t < \xi; \\ -1 + K(t), & t > \xi. \end{cases}$$

Функция $K(t)$, очевидно, непрерывна, а $K'(t)$ — кусочно-непрерывна. Функция $\psi(t, \xi)$ при фиксированном ξ непрерывна во всех точках t, кроме $t = \xi$. При $t = \xi$ $\psi(t, \xi)$ имеет скачок: $\psi(\xi + 0, \xi) - \psi(\xi - 0, \xi) = -1$, и при $|x_1| \leqslant R$ $\psi(-R_1 x_1) = \psi(R_1 x_1) = 0$. Производная $\psi(t, \xi)$ по t равна при любом ξ производной $K'(t)$. Пользуясь этими свойствами, а также условием $D_1\Phi_1 = 0$, получим

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, \hat{x}_1) &= \Phi(x_1, \hat{x}_1)\psi(x_1 - 0, x_1) - \Phi(x_1, \hat{x}_1)\psi(x_1 + 0, x_1) = \\ &= \int_{-R}^{x_1} \frac{d}{dt}(\Phi(t, \hat{x}_1)\psi(t, x_1))\, dt + \int_{x_1}^{R} \frac{d}{dt}(\Phi(t, \hat{x}_1)\psi(t, x_1))\, dt = \\ &= \Big(\int_{-R}^{x_1} + \int_{x_1}^{R}\Big)\Big(\Phi(t, \hat{x}_1)\frac{d}{dt}\psi(t, x_1)\Big)\, dt = \int_{-R}^{R} \Phi(t, \hat{x}_1) K'(t)\, dt. \end{aligned}$$

Сосчитав теперь $K'(t)$, получим (2.7).

Обозначим правую часть (2.7) через $\Pi\Phi$. Имеет место оценка:

$$|\Pi\Phi(x)| \leqslant \Big\{\int_a^b |\Phi(t, \hat{x}_1)|^p\, dt\Big\}^{1/p} \Big\{\int_a^b |\rho'(t)|^{p'}\, dt\Big\}^{1/p'}.$$

Возводя обе части этого неравенства в степень p и интегрируя по $\hat{x}_1$, получим

$$\|\Pi\Phi | L_p(\hat{x}_1)\| \leqslant K \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \|\Phi(t, \hat{x}_1) | L_p(\hat{x}_1)\|. \tag{2.8}$$

Это неравенство позволяет расширить Π до ограниченного оператора из $\hat{C}(x_1) L_p(\hat{x}_1)$ в $L_p(\hat{x}_1)$. В самом деле, пусть Φ из $\hat{C}(x_1) L_p(\hat{x}_1)$ не гладкая функция. Образуем средние $\Phi_h(x)$. В силу (2.8) $\{\Pi\Phi_h(x)\}$ фундаментально в $L_p(\hat{x}_1)$ при $h \to 0$. Значит, в $L_p(\hat{x}_1)$ существует предел $\Pi\Phi_h$ при $h \to 0$, который мы и возьмем за значение $\Pi\Phi$. Ясно, что при таком расширении Π оценка (2.8) сохранится.

Если функция Φ из $\hat{C}(x_1) L_p(\hat{x}_1)$ не обязательно гладкая и $D_1\Phi = 0$ в Ω, то по-прежнему $\Phi = \Pi\Phi$, т. е. выполнено (2.7). Это равенство сразу получается переходом к пределу по $h \to 0$ в соответствующем равенстве для средних функций $\Phi_h = \Pi\Phi_h$, очевидно, справедливом, так как $\Phi_h(x)$ — гладкая функция и по теореме II.2 $D_1\Phi_h(x) = (D_1\Phi)_h(x) = 0$.

Таким образом, любая функция Φ из $\hat{C}(x_1) L_p(\hat{x}_1)$ в Ω такая, что $D_1\Phi = \varphi \in L_p(\Omega)$, разложима в сумму

$$\Phi = \Pi\Phi + I\varphi, \tag{2.9}$$

где I, Π — построенные ранее линейные операторы. Теорема II.5 доказана полностью.

Следствие 2.1. *Пусть ребра параллелепипеда Q_* из R^n параллельны координатным осям и функции Φ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ принадлежат $L_p(Q_*)$, $1 \leqslant p < \infty$, причем $D_j\Phi(x) = \varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда в любой области Ω, вложенной в Q_* и включающей в себя куб Q, имеет место*

$$\| \Phi \mid L_p(\Omega) \| \leqslant K \left\{ \left| \int\limits_Q \Phi(x)\, dx \right| + \sum_{k=1}^{n} \| \varphi_k \mid L_p(\Omega) \| \right\}, \tag{2.10}$$

где K не зависит от Φ.

Доказательство. Выберем полосы $P_1, \ldots, P_n \subset R^n$ таким образом, чтобы параллелепипед, получающийся их пересечением, содержал Q_*.

Рассмотрим операторы I, Π, построенные нами в предыдущей теореме, и взяв $a = 0$, $b = 1$, $\rho(t) = t$, переобозначим их через I_1 и Π_1. Уже доказано, что операторы $I_1 : L_p \to \hat{C}(x_1) L_p(\hat{x}_1)$ в P_1 и Π_1: $L_p \to L_p(\hat{x}_1)$ ограничены. Доопределив произвольную φ из $L_p(Q_*)$ нулем на все R^n, найдем на полученном элементе L_p значения $I_1\varphi$ и $\Pi_1\varphi$. Тем самым определены два ограниченных оператора I_1 и Π_1 из $L_p(Q_*)$ в $L_p(Q_*)$. Согласно формуле (2.9), исходная функция Φ разложима в сумму

$$\Phi = \Pi_1\Phi + J_1\varphi_1 \text{ в } Q_*.$$

Если область Ω вложена в Q_* и включает в себя единичный куб Q, то из определения I_1, Π_1 следуют оценки

$$\| \Pi_1\Phi \mid L_p(\Omega) \| \leqslant K \| \Phi \mid L_p(\Omega) \|,$$

$$\| I_1\varphi_1 \mid L_p(\Omega) \| \leqslant K \| \varphi_1 \| L_p(\Omega) \|.$$

Аналогичные рассуждения можно провести не только для направления x_1, но и для любого направления x_k. Тогда мы получим операторы I_k и Π_k, $k = 1, \ldots, n$, действующие ограниченно из $L_p(Q_*)$ в $L_p(Q_*)$, исходная функция Φ разложима в сумму:

$$\Phi = \Pi_k\Phi + I_k\varphi_k \text{ в } Q_*, \tag{2.11}$$

где $k = 1, \ldots, n$, и при этом выполнены неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\| \Pi_k\Phi \mid L_p(\Omega) \| \leqslant K \| \Phi \mid L_p(\Omega) \|, \\ &\| I_k\varphi_k \mid L_p(\Omega) \| \leqslant K \| \varphi_k \mid L_p(\Omega) \|. \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Далее, из (2.11) имеем

$$\begin{aligned} \Phi &= I_1\varphi_1 + \Pi_1\Phi = I_1\varphi_1 + \Pi_1(I_2\varphi_2 + \Pi_2\Phi) = \\ &= I_1\varphi_1 + \Pi_1 I_2\varphi_2 + \ldots + \Pi_1\Pi_2(I_3\varphi_3 + \Pi_3) = \\ &\ldots = I_1\varphi_1 + \Pi_1 I_2\varphi_2 + \ldots + \Pi_1 \\ &\ldots \Pi_{n-1} I_n\varphi_n + \Pi_1\Pi_2\ldots\Pi_n\Phi. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Учитывая, что $\Pi_1 \ldots \Pi_n\Phi = \int\limits_Q \Phi(x)\,dx$, получаем из (2.12) и (2.13) нужную нам оценку (2.10). Следствие доказано.

Чтобы построить функцию $\Phi(x)$, имеющую заданную производную $\varphi_\alpha(x)$ порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, т. е. $D^\alpha\Phi(x) = \varphi_\alpha(x)$, следует применить оператор интегрирования из теоремы II.5 α_1 раз по x_1, α_2 раз по $x_2, \ldots, \alpha_n$ раз по x_n. Функцию $\Phi(x)$ назовем обобщенной первообразной порядка α от $\varphi_\alpha(x)$. Таким образом, задача 1 о решении уравнения (2.1) нами решена.

При решении системы (2.2) нам удобно будет пользоваться различными проекторами в пространстве $L_p(Q)$, $1 \leqslant p < \infty$. Напомним некоторые определения. Пусть X — векторное пространство, U и V — два его подпространства. Говорят, что X разлагается в прямую сумму U и V, т. е. $X = U \oplus V$, если любой элемент $x \in X$ представим в виде $x = u + v$, где $u \in U$, $v \in V$, и если подпространства U и V имеют общим элементом только 0.

Разложение $x = u + v$ в этом случае, как легко видеть, единственно. Определим оператор Π формулой: $\Pi x = u$. Этот линейный оператор называют проектором X на U параллельно V. Множество его значений — подпространство U — называют пространством проекций. Оно характеризуется равенством $\Pi u = u$, т. е. его элементы инвариантны относительно Π. Подпространство V характеризуется условием $\Pi v = 0$ и называется пространством лучей проектора Π.

Рассмотрим еще проектор $\widehat{\Pi}$ пространства X на V параллельно U. Ясно, что $\widehat{\Pi} = I - \Pi$, где I —тождественный оператор в X.

Т е о р е м а II.6. *Линейный оператор* $\Pi : X \to X$ *является проектором тогда и только тогда, когда* $\Pi^2 = \Pi$.

Необходимость условия очевидна. Докажем достаточность. Пусть дан линейный оператор $\Pi : X \to X$ такой, что $\Pi^2 = \Pi$.

Тогда этому же условию удовлетворяет $\hat{\Pi} = I - \Pi$:

$$\hat{\Pi}^2 = (I - \Pi)^2 = (I - 2\Pi + \Pi^2) = I - \Pi = \hat{\Pi}.$$

Введем множества U и V как области значений Π и $\hat{\Pi}$. Ясно, что U, V — подпространства X и любой вектор x из X разложим в сумму: $x = \Pi x + \hat{\Pi} x$, где $\Pi x \in U$, $\hat{\Pi} x \in V$. Далее, если $W \in U \cap V$, то $w = \Pi x$ и $\Pi w = \Pi^2 x = \Pi x = w$. Точно так же $\hat{\Pi} w = w$. Поэтому $\Pi\hat{\Pi} w = w$, но $\Pi\hat{\Pi} = \Pi(I - \Pi) = \Pi - \Pi^2 = 0$. Теорема доказана.

Перейдем к задаче 2 о решении системы (2.2) в области Ω. Рассмотрим сначала случай, когда $l = 1$, т. е. когда система (2.2) имеет вид:

$$D_j\Phi(x) = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.14}$$

Известно, что если $\varphi_j(x)$ имеют непрерывные производные первого порядка по всем переменным, то необходимое и достаточное условие разрешимости (2.14) дают соотношения

$$D_j\varphi_k(x) = D_k\varphi_j(x), \quad k = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.15}$$

Нам удобно с помощью формулы интегрирования по частям записать (2.15) в эквивалентном виде:

$$\int_\Omega (\varphi_j(x)\, D_k\psi(x) - \varphi_k(x)\, D_j\psi(x))\, dx = 0, \tag{2.16}$$

$$k = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \psi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega).$$

Условия (2.16) имеют смысл для произвольных локально суммируемых в Ω функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$. Множество $\{\varphi_j(x) \mid j = 1, \ldots, n\}$ с условием (2.16) будем называть обобщенным градиентом первого порядка, или просто обобщенным градиентом, а решение $\Phi(x)$ системы (2.14) первообразной этого обобщенного градиента.

Систему (2.14) начнем решать в единичном кубе Q, вложенном в исходную область Ω.

Лемма II.1. *Пусть область Ω включает в себя замыкание куба $Q = \{x : 0 \leqslant x_j \leqslant 1,\ j = 1, \ldots, n\}$, а функции $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, принадлежат $L_p(\Omega)$ и удовлетворяют условию* (2.16). *Тогда существует функция $\Phi(x)$ из $L_p(Q)$ такая, что*

$$D_j\Phi(x) = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \quad x \in Q. \tag{2.17}$$

Разность любых двух решений системы (2.17) *постоянна в Q.*

Доказательство. Для построения решения системы (2.17) нам нужны $2n$ линейных операторов J_k, Π_k, $k = 1, \ldots, n$, построенных в следствии 2.1. Вспомним, что если $\varphi(x)$

определена и непрерывна в Q, то при $k = 1, \ldots, n$ справедливо:

$$J_k\varphi(x) = \int_0^{x_k} t\varphi(t, \hat{x}_k)\,dt + \int_1^{x_k} (1-t)\varphi(t, \hat{x}_k)\,dt, \quad x \in Q,$$

$$\Pi_k\varphi(x) = \int_0^1 \varphi(x_k, \hat{x}_k)\,dx_k, \quad x \in Q.$$

Отметим, что Π_k — проектор пространства $L_p(Q)$. Пусть теперь функции $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы в Q и удовлетворяют (2.15). Образуем по $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ новую функцию

$$J(\varphi) = (J_1\varphi_1 + \Pi_1 J_2\varphi_2 + \ldots + \Pi_1\Pi_2 \ldots \Pi_{n-1}J_n\varphi_n)(x),$$
$$x \in Q.$$

Положим $\Phi(x) = J(\varphi)$ и убедимся, что $\Phi(x)$ действительно решает систему (2.17). Имеем для любого k от 1 до n:

$$\begin{aligned} D_k\Phi = {} & D_kJ_1\varphi_1 + \ldots + D_k\Pi_1 \ldots \Pi_{k-2}J_{k-1}\varphi_{k-1} + \\ & + D_k\Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}J_k\varphi_k = J_1D_k\varphi_1 + \ldots + \\ & + \Pi_1 \ldots \Pi_{k-2}J_{k-1}D_k\varphi_{k-1} + \Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}D_kJ_k\varphi_k. \end{aligned}$$

Продолжим это равенство, пользуясь тем, что $D_kJ_k\varphi = \varphi$, а также условиями (2.15). Тогда получим

$$\begin{aligned} D_k\Phi = {} & J_kD_1\varphi_k + \ldots + \Pi_1 \ldots \Pi_{k-2}J_{k-1}D_{k-1}\varphi_k + \Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}\varphi_k = \\ & = J_kD_1\varphi_k + \ldots + \Pi_1 \ldots \Pi_{k-2}(J_{k-1}D_{k-1} + \Pi_{k-1})\,\varphi_k. \end{aligned}$$

Вспоминая, что для всех m от 1 до n $J_mD_m + \Pi_m = I$ (это есть не что иное, как операторная форма равенства (2.11)), и последовательно применяя это разложение при $m = k-1, k-2, \ldots \ldots, 1$, заключаем окончательно, что $D_k\Phi$ действительно равно φ_k.

Как уже отмечалось при выводе следствия 2.1, имеет место оценка

$$\| J(\varphi) \,|\, L_p(Q) \| \leqslant K \sum_{j=1}^{n} \| \varphi_j \,|\, L_p(Q) \|, \tag{2.18}$$

где K не зависит от φ. Отсюда заключаем, что оператор $J(\varphi)$ можно расширить по непрерывности на декартово произведение n пространств $L_p(Q)$, причем областью значений этого расширения будет $L_p(Q)^n$. Для произвольного φ из $L_p(Q)^n$ положим теперь $\Phi(x) = J(\varphi)$, тогда оценка (2.18) выполнена автоматически. Проверим, что при условии (2.16) $\Phi(x)$ решает систему (2.14).

Рассмотрим вектор-функцию $\varphi_h = (\varphi_{1,h}, \ldots, \varphi_{n,h})$, где

$$\varphi_{j,h}(x) = h^{-n}\int \omega(x-y)/h)\,\varphi_j(y)\,dy,$$

а $\omega(\cdot)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция. Сосчитаем разность $(D_k\varphi_{j,h} - D_j\varphi_{k,h})(x)$ при $x \in Q$. Пользуясь теоремой II.2, получаем

$$(D_k\varphi_{j,\,h} - D_j\varphi_{k,\,h})(x) = h^{-n}\int \omega\left(\frac{x-y}{h}\right)(D_k\varphi_j - D_j\varphi_k)(y)\,dy. \tag{2.19}$$

Так как $\bar{Q} \subset \Omega$, то при достаточно малых h supp $\omega\,((x-y)/h)$ ограничен равномерно по $x \in Q$. Применив к правой части (2.19) условие (2.16), получим

$$D_k\varphi_{j,\,h}(x) = D_j\varphi_{k,\,h}(x), \quad x \in Q.$$

Значит, функция $\Phi_h(x) = J(\varphi_h)$ является первообразной градиента φ_h. В силу (2.18) $\{\Phi_h\}$ сходится при $h \to 0$ к функции Φ. Далее, для любого j от 1 до n нормы $\| D_j\Phi_h \mid L_p(Q)\|$ ограничены равномерно по h. Значит, по теореме II.4, в Q существуют производные $D_j\Phi(x)$, $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие равенству

$$D_j\Phi(x) = \lim_{h\to 0} D_j\Phi_h(x) = \lim_{h\to 0}\varphi_{j,\,h}(x) = \varphi_j(x).$$

Таким образом, первообразная найдена и для негладких φ.

Пусть $\Phi_*(x) \in L_1(Q)$ — какое-нибудь решение системы (2.17). Воспользовавшись равенством (2.13), разложим Φ_* в сумму:

$$\Phi_*(x) = J(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) + \Pi\Phi_*(x), \quad x \in Q,$$

где

$$\Pi\Phi_*(x) = \int\limits_Q \Phi_*(x)\,dx.$$

Отсюда сразу следует, что разность любых двух первообразных φ действительно постоянна в Q. Лемма доказана.

Перейдем к решению системы (2.14) во всей области Ω.

Т е о р е м а II.7. *Пусть область Ω такова, что любой замкнутый контур стягивается в ней в точку. Если $\{\varphi_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ — обобщенный градиент в Ω, то существует функция $\Phi_* \in L_{1\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такая, что*

$$D_j\Phi_* = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Разность любых двух решений этой системы постоянна в Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В любом кубе Q, $\bar{Q} \subset \Omega$ можно описанным в лемме II.1 способом построить первообразную Φ, которая определяется с точностью до слагаемого, равного среднему значению Φ по Q. Если два куба Q^* и Q^{**} имеют общую часть, то Φ^* и Φ^{**} (соответствующие первообразные) отличаются на параллелепипеде $Q^* \cap Q^{**}$ на постоянную, ибо $D_j(\Phi^* - \Phi^{**}) = 0$ в $Q^* \cap Q^{**}$. Добавляя к Φ^{**} соответствующую константу, мы можем построить единую первообразную на $Q^* \cup Q^{**}$.

Фиксируем некоторый куб $Q_0 \subset \Omega$, $\bar{Q}_0 \subset \Omega$ с центром в точке $x^{(0)}$ и построим на нем первообразную $\Phi(x)$, такую, что

$$\int\limits_{Q_0} \Phi(x)\,dx = 0. \tag{2.20}$$

Соединим точку $x^{(0)}$ с произвольной точкой x области Ω кривой, лежащей внутри Ω, и покроем эту кривую цепочкой попарно пересекающихся кубиков. Продолжая первообразную вдоль этой цепочки, мы продолжим ее в окрестность точки x. Легко видеть, что продолжения вдоль любых путей, соединяющих x с $x^{(0)}$, дают одно и то же. Действительно, продолжение вдоль замкнутого пути в окрестность исходной точки $x^{(0)}$ приводит к прежней первообразной, так как этот путь можно разложить на малые замкнутые пути, каждый из которых накрывается замкнутым кубом, лежащим внутри Ω. Отсюда следует однозначность первообразной в области Ω, удовлетворяющей условию (2.20).

Согласно теореме II.3, разность любых двух первообразных действительно постоянна в Ω. Теорема доказана.

Перейдем к решению системы (2.2) в случае произвольного l. Напомним определение обобщенного градиента порядка l. Пусть набор функций $\{\varphi_\alpha(x) \mid |\alpha| = l\}$, локально суммируемых в области Ω, удовлетворяет для любой функции $\psi(x)$ из $\mathring{C}^{(\infty)}(\Omega)$ следующим интегральным равенствам:

$$\int_\Omega [D_k\psi(x)\,\varphi_{\beta+\delta_j}(x) - D_j\psi(x)\,\varphi_{\beta+\delta_k}(x)]\,dx = 0, \tag{2.21}$$

где $k,\ j \in \{1, \ldots, n\}$, $|\beta| = l - 1$, δ_j — вектор, у которого j-я координата равна 1, а остальные — нули. Такое множество $\{\varphi_\alpha(x) \mid |\alpha| = l\}$ назовем обобщенным градиентом порядка l, а решение $\Phi(x)$ системы (2.2) — первообразной этого обобщенного градиента.

Т е о р е м а II.8. *Пусть область Ω такова, что любой замкнутый контур стягивается в ней в точку, тогда любой обобщенный градиент порядка l имеет в Ω локально суммируемую первообразную. Разность двух любых первообразных одного и того же обобщенного градиента порядка l допускает непрерывную локализацию в виде многочлена степени $\leqslant l - 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование первообразной, имеющей все обобщенные производные порядка $\leqslant l$, докажем индукцией по l. Случай $l = 1$ уже рассмотрен в теореме II.7. Предположим, что любой обобщенный градиент порядка $\leqslant l - 1$ имеет первообразную с нужным свойством, и зададимся обобщенным градиентом $\{\varphi_\alpha(x) \mid |\alpha| = l\}$ порядка l.

Любому мультииндексу β, $|\beta| = l - 1$, сопоставим систему уравнений первого порядка в Ω:

$$D_j\Phi(x) = \varphi_{\beta+\delta_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.22}$$

Из (2.21) следует, что при фиксированном β набор $\{\varphi_{\beta+\delta_j}(x) \mid j = 1, \ldots, n\}$ является обобщенным градиентом первого порядка и потому имеет первообразную. Решение (2.22) мы обозначим $\varphi_\beta(x)$. Докажем, что φ_β — обобщенный градиент $l - 1$ порядка.

Пусть мультииндекс γ имеет порядок $l-2$, тогда имеем, пользуясь (2.22):

$$D_k\varphi_{\gamma+\delta_j}=\varphi_{\gamma+\delta_j+\delta_k},\quad D_j\varphi_{\gamma+\delta_k}=\varphi_{\gamma+\delta_k+\delta_j},\quad x\in\Omega,$$

т. е. на любой ψ из $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$ имеет место:

$$\int\limits_{\Omega}[D_k\psi\varphi_{\gamma+\delta_j}-D_j\psi\varphi_{\gamma+\delta_k}]\,dx=0.$$

Тем самым $\{\varphi_\beta(x) \mid |\beta|=l-1\}$ — обобщенный градиент порядка $l-1$ и, по индуктивному предположению, существует его первообразная $\Phi_*(x)$, имеющая в Ω все обобщенные производные до порядка $l-1$ включительно. Далее, при любом β, $|\beta|=l-1$, функция $D^\beta\Phi_*(x)=\varphi_\beta(x)$ и потому имеет все обобщенные производные первого порядка, причем

$$D_j(D^\beta\Phi_*)=D_j\varphi_\beta=\varphi_{\beta+\delta_j},\quad j=1,\ldots,n.$$

Отсюда следует, что Φ_* имеет также все обобщенные производные порядка l, причем $D^\alpha\Phi_*(x)=\varphi_\alpha(x)$. Тем самым $\Phi_*(x)$ — первообразная исходного обобщенного градиента и первое утверждение теоремы доказано.

Далее, согласно теореме II.3, разность любых двух первообразных обобщенного градиента порядка l действительно является многочленом степени $\leqslant l-1$. Теорема II.8 доказана полностью.

Следствие 2.2. *Если локально суммируемая в области Ω функция $\Phi(x)$ имеет в ней все обобщенные производные l-го порядка, то она же имеет в Ω обобщенные производные всех промежуточных порядков, т. е. $\leqslant l-1$.*

В самом деле, набор $\{D^\alpha\Phi(x) \mid |\alpha|=l\}$, как легко видеть, является обобщенным градиентом порядка l и, как отмечено при доказательстве теоремы II.8, найдется его первообразная $\Phi_*(x)$, имеющая все обобщенные производные порядка $\leqslant l$. Но $\Phi(x)$ отличается от $\Phi_*(x)$ лишь на полиномиальное слагаемое степени $\leqslant l-1$ и, значит, также обладает нужным свойством.

В заключение рассмотрим формулу обобщенного дифференцирования сложной функции.

Пусть $y=y(x)$ — взаимно однозначное отображение области $\Omega_x\subset R^n$ на область $\Omega_y\subset R^n$. Обратное отображение $x=x(y)$ запишем в покоординатном виде: $x_k=x_k(y)$, $k=1,\ldots,n$. Будем считать, что как прямое, так и обратное отображения имеют непрерывные производные первого порядка. В частности, функции $\max\limits_k|D_jx_k(y)|$ ограничены в любом компактном подмножестве Ω_y, а якобиан отображения $y=y(x)$ ограничен в любом компактном подмножестве Ω_x.

Пусть функция $\varphi(x)$ локально суммируема в Ω_x. Поставим ей в соответствие новую функцию $\hat\varphi(y)$, локально суммируемую в в Ω_y. Положим $\hat\varphi(y)=\varphi(x(y))$, если $\varphi(x)$ непрерывна. В общем случае продолжим $\varphi(x)$ нулем на все R^n и образуем средние функции $\varphi_h(x)$. Так как φ_h сходится к φ при $h \to 0$ в пространстве $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_x)$, то $\{\hat{\varphi}_h(y)\}$ фундаментальна в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_y)$. Обозначим предел $\hat{\varphi}_h(y)$ при $h \to 0$ через $\hat{\varphi}(y)$, тогда $\hat{\varphi}(y)$ локально суммируема в Ω_y. Переход от функции $\varphi(x)$ к $\hat{\varphi}(y)$ назовем заменой переменных.

Теорема II.9. *Если функция $\varphi(x)$ имеет в Ω_x все обобщенные производные первого порядка, то $\hat{\varphi}(y)$ также имеет все обобщенные производные первого порядка в области $\Omega(y)$ и при этом*

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y_j}(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x(y))\,\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y). \qquad (2.23)$$

Доказательство. Формула (2.23), очевидно, справедлива для непрерывно дифференцируемых функций. Образуем средние функции $\varphi_h(x)$, тогда для любой функции $\hat{\psi}(y)$ из $\overset{0}{C}{}^{(\infty)}(\Omega_y)$ справедливо

$$\int_{\Omega_y} \hat{\varphi}_h(y)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y_j}(y)\,dy = -\int_{\Omega_x}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_k}(x)\,\frac{\partial x_k}{\partial y}\,\psi(x)\left|\frac{D(y)}{D(x)}\right|dx. \qquad (2.24)$$

Здесь $\left|\dfrac{D(y)}{D(x)}\right|$ — якобиан отображения $y = y(x)$, $\psi(x) = \hat{\psi}(y(x))$. Из определения $\hat{\varphi}(y)$ следует, что $\hat{\varphi}_h(y)$ слабо сходится к $\hat{\varphi}(y)$ на любой непрерывной финитной в Ω_y функции. Поэтому

$$\lim_{h\to 0}\int_{\Omega_y}\hat{\varphi}_h(y)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y_j}(y)\,dy = \int_{\Omega_y}\hat{\varphi}(y)\,\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y_j}(y)\,dy.$$

Пусть в качестве ядра усреднения выбрано стандартное и x изменяется в ограниченном множестве $\Omega_{0,x} = \operatorname{supp}\psi(x)$. Тогда по теореме II.2 имеем при достаточно малых h:

$$\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_k}(x) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)_h(x).$$

Поэтому $\partial\varphi_h/\partial x_k$ сходится при $h \to 0$ к $\partial\varphi/\partial x$ в пространстве $L_1(\Omega_{0,x})$, а значит, и слабо сходится на любой непрерывной функции с носителем в $\Omega_{0,x}$. В частности,

$$\lim_{h\to 0}\int_{\Omega_x}\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_k}(x)\,\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y(x))\,\psi(x)\left|\frac{D(y)}{D(x)}\right|dx =$$

$$= \int_{\Omega_x}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)\,\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y(x))\,\psi(x)\left|\frac{D(y)}{D(x)}\right|dx.$$

Здесь k, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Функция

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)\,\frac{\partial x_k}{\partial y_j}(y(x)).$$

очевидно, локально суммируема в Ω_x. Поэтому $\hat{\varphi}_j(y)$ локально суммируема в Ω_y. Переходя в (2.24) к пределу при $h \to 0$, получаем

$$\int\limits_{\Omega_y} \hat{\varphi}(y) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y_j}(y)\, dy = -\int\limits_{\Omega_x} \varphi_j(x)\, \psi(x) \left| \frac{D(y)}{D(x)} \right| dx =$$
$$= -\int\limits_{\Omega_x} \hat{\varphi}_j(y)\, \hat{\psi}(y)\, dy.$$

По определению это и означает, что $\hat{\varphi}(y)$ имеет обобщенную производную $D_j\hat{\varphi}(y) = \hat{\varphi}_j(y)$. Теорема доказана.

Следствие 2.3. *Пусть функция $\varphi(x)$ имеет в области Ω_x все обобщенные производные первого порядка, тогда в любой ограниченной области $\Omega_{0,x}$, $\overline{\Omega}_{0,x} \subset \Omega_x$ справедливо неравенство*

$$\sum_i \left\| \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y_i} \right| L_p(\Omega_{0,y}) \Big\| \leqslant K \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right| L_p(\Omega_{0,x}) \Big\|,$$

где $\Omega_{0,y}$ — образ области $\Omega_{0,x}$ при отображении $y = y(x)$, $p \geqslant 1$. В области $\Omega_{0,y}$, цилиндрической по переменной y_1, функция $\hat{\varphi}(y)$ принадлежит пространству $\hat{C}(y_1) L_p(\hat{y}_1)$ и при этом

$$\| \hat{\varphi} \mid \hat{C}(y_1) L_p(\hat{y}_1) \| \leqslant$$
$$\leqslant K \left\{ \| \varphi \mid L_p(\Omega_{0,x}) \| + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| L_p(\Omega_{0,x}) \Big\| \right\}. \tag{2.25}$$

Пользуясь ограниченностью первых производных прямого и обратного отображений Ω_x на Ω_y, а также равенством (2.23), несложно убедиться, что

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y_i} \right| L_p(\Omega_{0,y}) \Big\| \leqslant C \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right| L_p(\Omega_{0,x}) \Big\|.$$

Оценку (2.25) получаем, применяя теорему II.5 к уравнению $D_1\Phi(y) = D_1\hat{\varphi}(y)$ в области $\Omega_{0,y} \subset R^n_y$.

§ 3. Представление функций в дивергентной форме

Пусть в области Ω из R^n задана некоторая функция $f(x)$. Нас будет интересовать при каких условиях на f и каким образом можно найти набор функций $\{F_\alpha(x) \,||\, \alpha \mid = l\}$, также определенных в Ω и таких, что

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=l} D^\alpha F_\alpha(x).$$

Это так называемая задача о представимости $f(x)$ в дивергентной форме l-го порядка.

Рассмотрим сначала случай $l = 1$, тогда требуется найти n неизвестных функций $F_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, с условием, что

$$\sum_{j=1}^{n} D_j F_j(x) = f(x). \tag{3.1}$$

Разумеется, в такой постановке задача не доопределена. Например, уже среди наборов вида

$$F_k = 0,\ k \neq j; \quad D_j F_j = f,$$

найдется n независимых решений. Потребуем дополнительно, чтобы $f(x)$ и $F_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, были финитными в Ω. Такая задача уже не всегда разрешима, а если все же разрешима, то, вообще говоря, не единственным образом.

Пример. Пусть

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} (x^2-1)^2(y^2-1)^2, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 1; \\ 0, & |x| \geqslant 1, \quad |y| \geqslant 1. \end{cases}$$

Положим $\partial\Phi/\partial x = -\varphi_2$, $\partial\Phi/\partial y = \varphi_1$. Функции φ_1 и φ_2 финитны и служат нетривиальным решением однородного уравнения $\partial\varphi_1/\partial x + \partial\varphi_2/\partial y = 0$. Отсюда следует неединственность решений и неоднородной задачи.

Задачу об отыскании финитных решений уравнения (3.1) будем называть задачей о представлении функции $f(x)$ в финитной дивергентной форме. Пусть функция $f(x)$ суммируема и финитна в Ω. Скажем, что $f(x)$ представима в финитной дивергентной форме, если существуют суммируемые функции $F_1(x), F_2(x), \ldots$ $\ldots, F_n(x)$ также финитные в Ω, и такие что:

а) функция F_j имеет производную $D_j F_j$ по x_j;

б) справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} D_j F_j(x). \tag{3.2}$$

Вообще, если набор суммируемых финитных в Ω функций $\{F_\alpha \mid |\alpha| = l\}$ таков, что:

а) функция $F_\alpha(x)$ имеет производную $D^\alpha F_\alpha$, $|\alpha| = l$;

б) справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=l} D^\alpha F_\alpha(x),$$

то будем говорить, что функция $f(x)$ представима в Ω в финитной дивергентной форме l-го порядка.

Необходимым условием представимости $f(x)$ в финитной дивергентной форме первого порядка в области Ω является равенство

$$\int_\Omega f(x)\,dx = 0. \tag{3.3}$$

Действительно, если имеет место представление (3.2), то, очевидно,

$$\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{supp} D_j F_j \subset \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{supp} F_j.$$

Накроем замкнутое множество $\bigcup\limits_{j=1}^{n} \operatorname{supp} F_j$ открытым G так, чтобы замыкание G лежало внутри Ω. Построим бесконечно дифференцируемую функцию $\psi(x)$, финитную в Ω и такую, что $\psi(x) = 1$ при $x \in G$. Тогда

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega \psi(x) f(x)\,dx = \int_\Omega \psi(x) \sum_{j=1}^{n} D_j F_j(x)\,dx =$$
$$= - \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega (D_j\psi) F_j(x)\,dx = 0,$$

ибо $D_j\psi = 0$ при $x \in \operatorname{supp} F_j$.

Покажем, что условие (3.3) является также и достаточным. Начнем со специального случая.

Лемма II.2. *Пусть функция f суммируема и финитна в области Ω и замкнутый параллелепипед Q с ребрами, параллельными координатным осям таков, что $\operatorname{supp} f \subset Q \subset \Omega$. Тогда функция $f(x)$, удовлетворяющая условию* (3.3), *представима в финитной дивергентной форме. Если функция $f(x)$ ограничена, то и функции $F_j(x)$ также можно выбрать ограниченными и притом так, чтобы*

$$\text{v. m. } |F_j(x)| \leqslant K \times \text{v. m. } |f(x)|, \tag{3.4}$$

где $j = 1, \ldots, n$; K зависит только от размеров носителя $f(x)$.

Доказательство. Пусть $Q = \prod\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$. Рассмотрим n финитных бесконечно дифференцируемых функций вещественной переменной n, таких, что

$$\operatorname{supp} \psi_k(u) \subset [a_k, b_k], \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(u)\,du = 1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Доопределим $f(x)$ нулем на все R^n. Введем операторы, действующие из L_1 в L_1 ограниченно:

$$\Pi_k f = \psi_k(x_k) \int f(t, \hat{x}_k)\,dt.$$

Легко видеть, что Π_k — проекторы, т. е. $\Pi_k^2 = \Pi_k$, и притом коммутирующие. Это следует из формулы

$$\Pi_j \Pi_k f = \psi_j(x_j)\,\psi_k(x_k) \int f(z_j, z_k, \hat{x}_{jk})\,dz_j\,dz_k,$$

где $\hat{x}_{jk} = \{x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\}$. Для финитных бесконечно дифференцируемых f эти соотношения очевидны, а для суммируемых получаются предельным переходом. (Проектор Π_j сохраняет бесконечную дифференцируемость и не выводит носитель за пределы Q.)

С помощью проекторов Π_k, $\hat{\Pi}_k$ разложим функцию f из L_1 в сумму:

$$f(x)=\hat{\Pi}_1 f+\Pi_1 f=\hat{\Pi}_1 f+\Pi_1(\hat{\Pi}_2 f+\Pi_2 f)=$$
$$=\hat{\Pi}_1 f+\Pi_1\hat{\Pi}_2 f+\ldots+\Pi_1\ldots\Pi_{n-1}\hat{\Pi}_n f+\Pi_1\ldots\Pi_n f. \quad (3.5)$$

Заметим теперь, что (3.3) равносильно равенству $\Pi_1 \ldots \Pi_n f = 0$. Вообще, равенство

$$\int f(x)\,dx_{j_1}\ldots dx_{j_r}=0$$

по некоторой части переменных равносильно условию

$$\Pi_{j_1}\Pi_{j_2}\ldots\Pi_{j_r}f=0.$$

Поэтому для функций, удовлетворяющих условию (3.3), справедливо разложение

$$f(x)=\hat{\Pi}_1 f(x)+\Pi_1\hat{\Pi}_2 f(x)+\ldots+\Pi_1\ldots\Pi_{n-1}\hat{\Pi}_n f(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

где $f_k(x) = \Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}\hat{\Pi}_k f(x)$. Каждая из функций $f_k(x)$ обладает тем свойством, что интеграл от нее по x_k равен нулю, ибо

$$\Pi_k f_k=\Pi_1\ldots\Pi_{k-1}(\Pi_k-\Pi_k^2)f=0.$$

Кроме того, функции $f_k(x)$ финитны в Ω и суммируемы. Положим

$$F_k(x)=\int_{-\infty}^{x_k} f_k(t,\hat{x}_k)\,dt.$$

Ввиду финитности f_k и условия $\Pi_k f_k = 0$ функция F_k финитна. По построению $D_k F_k = f_k$ на всем R^n. Носителем F_k служит параллелепипед Q, заключающий в себе носители f_k.

Из построения функций $F_k(x)$ следует также справедливость неравенства v. m. $|F(x)| \leqslant d(\operatorname{supp} f) \times$ v. m. $|f(x)|$. Лемма доказана.

Упражнение. Выразить в явном виде, через интегралы от $f(x)$ функции $f_k(x)$ и $F_k(x)$.

Задача решена в параллелепипеде. В произвольной же области Ω она сводится к уже решенной.

Лемма II.3. *Пусть $f(x)$ суммируема и финитна в области Ω. Тогда условие (3.3) достаточно для представимости f в финитной дивергентной форме. Если функция $f(x)$ ограничена, то представляющие функции $F_k(x)$ также можно выбрать ограниченными и притом так, чтобы выполнялось неравенство*

$$\underset{\Omega}{\text{v. m.}}\,|F_k(x)|\leqslant K\times\text{v. m.}\,|f(x)|, \quad (3.6)$$

где K — некоторая постоянная, зависящая только от носителя f.

Доказательство. Погрузим носитель функции f в произвольное ограниченное замкнутое связное множество F, расположенное в области Ω. Иными словами, среди носителей f выберем тот, который связан и лежит внутри Ω. Покроем область Ω кубической сеткой со столь малым шагом h, чтобы любой кубик со стороной $2h$, пересечение которого с F не пусто, лежал строго внутри области Ω. Покроем F кубиками нашей сетки, отбирая среди них те и только те, которые имеют непустое пересечение с F. Мы получим связное замкнутое множество, состоящее из кубиков: $Q_1 \cup \ldots \cup Q_N$, $N \geqslant 2$.

Расширим теперь каждый кубик полученной системы так, чтобы его центр оставался на месте, а сторона увеличилась до $3h/2$. Эти расширенные кубики $\hat{Q}_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, назовем «большими». Система больших кубиков и подавно покрывает F. Если исходные кубики Q_j, соседствующие друг с другом, имели всего лишь общую часть границы, то теперь большие соседствующие кубики обязательно перекрываются. У каждого из них имеется сердцевина, т. е. та его часть, которая принадлежит только ему самому и не покрывается соседними. К этой сердцевине обязательно относится концентрический большому кубик со стороной $h/2$. В силу связности системы больших кубиков та часть в каждом из них, которая покрыта соседями, в свою очередь заведомо содержит хотя бы один кубик со стороной $h/2$.

Перенумеруем теперь большие кубики, входящие в нашу систему так, чтобы при отбрасывании любого начального числа этих кубиков остающаяся система по-прежнему была связной.

Возьмем первый большой кубик $\hat{Q}_1$ нашей системы и построим на Ω функцию $f_1(x)$ с носителем в $\hat{Q}_1$, совпадающую с функцией $f(x)$ на сердцевине $\hat{Q}_1$. На части первого кубика, покрытой соседними, определим $f_1(x)$ как константу, чтобы при этом выполнялось условие ортогональности:

$$\int\limits_{\hat{Q}_1} f_1(x)\,dx = 0.$$

В остальных точках Ω положим $f_1(x) = 0$. Тогда разность $\hat{f}_1(x) = f(x) - f_1(x)$, очевидно, удовлетворяет двум условиям:

$$\operatorname{supp} \hat{f}_1(x) \subset \hat{Q}_2 \cup \ldots \cup \hat{Q}_N, \quad \int\limits_{\Omega} \hat{f}_1(x)\,dx = 0.$$

Дальнейшие построения проведем индукцией по k. Пусть найдены функции $f_k(x)$, $\hat{f}_k(x)$ такие, что

$$\begin{aligned} &\hat{f}_k(x) = \hat{f}_{k-1}(x) - f_k(x); \\ &\operatorname{supp} f_k(x) \subset \hat{Q}_k, \qquad \operatorname{supp} \hat{f}_k(x) \subset \hat{Q}_{k+1} \cup \ldots \cup \hat{Q}_N; \\ &\int\limits_{\Omega} f_k(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} \hat{f}_k(x)\,dx = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Построим функцию $f_{k+1}(x)$, приравняв ее $\hat{f}_k(x)$ в сердцевине

$\hat{Q}_{k+1}$, занулив вне $\hat{Q}_{k+1}$ и положив постоянной в оставшейся части $\hat{Q}_{k+1}$. Эту постоянную подбираем так, чтобы

$$\int_{\Omega} f_{k+1}(x)\, dx = 0.$$

Образуем разность $\hat{f}_{k+1}(x) = \hat{f}_k(x) - f_{k+1}(x)$, тогда, как несложно проверить, условия (3.7) выполнены и для номера $k+1$.

Этот процесс прервем при $k = N-1$. Согласно построению f_k, $\hat{f}_k$, $k = 1, \ldots, N$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + \ldots + f_{N-1} + \hat{f}_{N-1} = (f - \hat{f}_1) + (\hat{f}_1 - \hat{f}_2) + \ldots \\ \ldots + (\hat{f}_{N-2} - \hat{f}_{N-1}) + \hat{f}_{N-1} = f. \end{aligned} \tag{3.8}$$

В силу (3.7) каждая из функций $f_1, \ldots, f_{N-1}$ и $\hat{f}_{N-1}$ удовлетворяет условиям леммы II.2, поэтому каждую из них возможно представить в финитной дивергентной форме, причем для слагаемых в этом представлении будут выполнены оценки вида (3.4). Складывая найденные локальные дифергентные формы и локальные оценки, получим из (3.8) искомое представление функции $f(x)$ с оценкой (3.6). Лемма доказана.

Обратимся теперь к вопросу о представимости финитных функций в дивергентной форме l-го порядка.

Теорема II.10. *Функция f, суммируемая и финитная в в области Ω, представима*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=l} D^{\alpha} F_{\alpha}(x)$$

тогда и только тогда, когда f ортогональна полиномам степени $<l$, т. е.

$$\int_{\Omega} f(x)\, x^{\alpha}\, dx = 0, \quad |\alpha| \leqslant l-1. \tag{3.9}$$

Если $f(x)$ ограничена в Ω, то и $F_{\alpha}(x)$, $|\alpha| = l$, можно выбрать ограниченными и притом так, чтобы

$$\text{v. m.}\, |F_{\alpha}(x)| \leqslant K \times \text{v. m.}\, |f(x)|, \tag{3.10}$$

где K зависит лишь от размеров $\operatorname{supp} f$.

Доказательство. Установим необходимость условия (3.9). Накроем замкнутое множество $\bigcup_{|\alpha|=l} \operatorname{supp} F_{\alpha}$ открытым множеством G, $G \subset \Omega$, и построим какую-нибудь функцию $\psi(x)$ из $\dot{C}^{(\infty)}(\Omega)$, равную 1 при $x \in G$. Имеем для любого полинома степени $\leqslant (l-1)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) P(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x) P(x) \psi(x)\, dx = \int_{\Omega} P(x) \psi(x) \sum_{|\alpha|=l} D^{\alpha} F_{\alpha}(x)\, dx = \\ = (-1)^l \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=l} F_{\alpha}(x) D^{\alpha}(P(x)\psi(x))\, dx = 0. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулой интегрирования по частям, а также тем, что при $x \in \bigcup\limits_{|\alpha|=l} \operatorname{supp} F_\alpha(x)$

$$D^\alpha (P(x)\psi(x)) = D^\alpha (P(x)) = 0.$$

Достаточность установим индукцией по порядку l. Случай $l = 1$ рассмотрен в лемме II.3. Допустим, что для функции, ортогональных к полиномам степени $l - 2$ установлена представимость в дивергентной форме $(l - 1)$-го порядка. Пусть

$$\int\limits_\Omega f(x)\, x^\alpha\, dx = 0, \quad |\alpha| \leqslant l - 1. \tag{3.11}$$

Тогда по предположению индукции найдутся финитные в Ω функции $F_\gamma(x)$, такие, что

$$f(x) = \sum_{|\gamma|=l-1} D^\gamma F_\gamma(x). \tag{3.12}$$

Если $f(x)$ ограничена, то $F_\gamma(x)$ можно выбрать так, чтобы выполнялась оценка (3.10). Докажем, что при любом α, $|\alpha| = l - 1$, функция $F_\alpha(x)$ удовлетворяет условию $\int\limits_\Omega F_\alpha(x)\, dx = 0$.

Пользуясь (3.11) и формулой интегрирования по частям, получим при $|\alpha| = l - 1$:

$$0 = \int\limits_\Omega x^\alpha f(x)\, dx = \int\limits_\Omega x^\alpha \sum_{|\gamma|=l-1} D^\gamma F_\gamma(x)\, dx =$$
$$= (-1)^{l-1} \int\limits_\Omega \sum_{|\gamma|=l-1} F_\gamma(x)\, D^\gamma (x^\alpha)\, dx = (-1)^{l-1} \alpha! \int\limits_\Omega F_\alpha(x)\, dx.$$

Применив к каждой функции $F_\alpha(x)$ лемму II.3, получим:

$$F_\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} D_j (F_{\alpha,j}(x)), \tag{3.13}$$

где $F_{\alpha,j}(x)$, $j = 1, \ldots, n$, — суммируемые финитные в Ω функции. Если $F_\alpha(x)$ ограничена, то и $F_{\alpha,j}(x)$ выбираем ограниченными. Подставляя (3.13) в (3.12) и учитывая, что $D^\alpha D_j = D^{\alpha+\delta_j}$, получаем нужное нам представление. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Как правило, мы будем использовать только достаточность условия (3.9). Теорему II.10 мы распространим в гл. V на финитные обобщенные функции.

У п р а ж н е н и е. Доказать, что ортогональность к полиномам степени $< l$ суммируемой функции $f(x)$, финитной в Ω, равносильна ее представимости в дивергентной форме k-го порядка:

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha F_\alpha(x), \quad 1 \leqslant k \leqslant l,$$

где функции F_α ортогональны полиномам степени $\leqslant l - 1 - k$:

$$\int\limits_\Omega F_\alpha(x)\, x^\beta\, dx = 0, \quad |\alpha| = k, \quad |\beta| \leqslant l - 1 - k.$$

§ 4. Определение и нормировка пространства $W_p^{(l)}$

В гл. I мы ввели пространство $L_p^{\langle l\rangle}(\Omega)$, состоящее из симметрических тензорных полей, а в конце § 1 этой главы в $L_p^{\langle l\rangle}(\Omega)$ выделены подпространства, состоящие из обобщенных градиентов порядка l. Их мы обозначили символом $L_p^{(l)}(\Omega)$. Напомним, что *симметрический тензор* $\{\chi_\alpha(x) \mid |\alpha| = l\}$ *называется обобщенным градиентом порядка* l, *если выполнены равенства* (1.6).

Множество функций φ, *определенных в* R^n *и обладающих обобщенным градиентом* $\{D^\alpha\varphi \mid |\alpha| = l\}$, *принадлежащим* $L_p^{(l)}$, *назовем* $W_p^{(l)}$.

Ясно, что $W_p^{(l)}$ — векторное пространство. Любой многочлен степени $<l$, очевидно, принадлежит $W_p^{(l)}$. Пусть $\boldsymbol{P}_{l-1}$ — пространство таких многочленов и $\Pi : W_p^{(l)} \to \boldsymbol{P}_{l-1}$ — проектор на $\boldsymbol{P}_{l-1}$, т. е. $\Pi^2 = \Pi$. Сопоставим ему дополнительный проектор $\widehat{\Pi} = I - \Pi$. Множество Y, состоящее из функций вида $\widehat{\Pi}\varphi$, $\varphi \in W_p^{(l)}$, является пространством, которое мы будем иногда называть «пространством лучей». Очевидно, что $W_p^{(l)}$ разлагается в прямую сумму $\boldsymbol{P}_{l-1}$ и Y, т. е.

$$W_p^{(l)} = \boldsymbol{P}_{l-1} \oplus Y. \tag{4.1}$$

Скажем, что функции φ_1, φ_2 из $W_p^{(l)}$ эквивалентны, если $\varphi_1 - \varphi_2$ принадлежит $\boldsymbol{P}_{l-1}$. Это отношение разбивает $W_p^{(l)}$ на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из совокупности элементов $W_p^{(l)}$, отличающихся друг от друга на слагаемое — многочлен степени $<l$. Класс, соответствующий функции φ, обозначим кл φ. *Множество* $\{\text{кл } \varphi : \varphi \in W_p^{(l)}\}$, *наделенное векторной структурой, называют «фактор-пространством* $W_p^{(l)}$ *по* $\boldsymbol{P}_{l-1}$» *и обозначают* $W_p^{(l)}/\boldsymbol{P}_{l-1}$.

Пространства Y и $W_p^{(l)}/\boldsymbol{P}_{l-1}$ изоморфны. В самом деле, пусть ψ из Y, тогда найдется φ из $W_p^{(l)}$ такая, что $\psi = \widehat{\Pi}\varphi$. Сопоставим ψ элемент кл φ фактор-пространства. Тем самым определено отображение из Y в $W_p^{(l)}/\boldsymbol{P}_{l-1}$. Это отображение и есть искомый изоморфизм.

Пространства Y и $L_p^{(l)}$ также изоморфны. Функции φ из Y сопоставим обобщенный градиент $\{D^\alpha\varphi \mid |\alpha| = l\}$. Такое отображение, как следует из теоремы II.8, взаимно однозначно и потому является изоморфизмом.

Определим на φ из $W_p^{(l)}$ значение неотрицательного функционала:

$$\| \varphi \mid L_p^{(l)} \| = \left(\int \left(\sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}. \tag{4.1'}$$

Очевидно, что этот функционал конечен на $W_p^{(l)}$ и служит там полунормой. Пространство его нулей совпадает с $\boldsymbol{P}_{l-1}$, и поэтому на Y он является нормой.

Пусть функция $g(z_1, z_2)$ задает норму в R^2, тогда норму в $W_p^{(l)}$ можно определить формулой:

$$\| \varphi \mid W_p^{(l)} \| = g(\| \Pi\varphi \mid \boldsymbol{P}_{l-1} \|, \ \| \varphi \mid L_p^{(l)} \|).$$

Здесь $\| \cdot \mid \boldsymbol{P}_{l-1} \|$ — какая-нибудь норма в $\boldsymbol{P}_{l-1}$. В частности, если $g(z_1, z_2) = (z_1^p + z_2^p)^{1/p}$, то

$$\| \varphi \mid W_p^{(l)} \| = (\| \Pi\varphi \mid \boldsymbol{P}_{l-1} \|^p + \| \varphi \mid L_p^{(l)} \|^p)^{1/p}\text{[3]}.$$

Исследуем теперь вопрос об эквивалентности норм в $W_p^{(l)}$, соответствующим двум различным проекторам Π_1 и Π_2. Иными словами, выясним, когда существуют постоянные $m_1, m_2 > 0$ такие, что для любой функции φ из $W_p^{(l)}$ имеет место:

$$m_1 \| \varphi \mid W_p^{(l)} \|_1 \leqslant \| \varphi \mid W_p^{(l)} \|_2 \leqslant m_2 \| \varphi \mid W_p^{(l)} \|_1,$$

где $\| \cdot \mid W_p^{(l)} \|$ соответствует проектору Π_i, $i = 1, 2$. Поставим задачу в более общем виде.

Пусть X — линейное пространство, X_0 — конечномерное подпространство X с нормой $\| \cdot \mid X_0 \|$ и $X = X_0 \oplus Y$. Предположим, что на X задана некоторая полунорма $p(x)$, принимающая одинаковые значения на любых двух элементах X, отличающихся слагаемым из X_0. Ясно, что на элементах X_0 эта полунорма принимает нулевые значения. Предположим, что других нулей в X у $p(x)$ нет, тогда это норма на Y. Обозначим ее $\| \cdot \mid Y \|$.

Пусть теперь $\Pi : X \to X_0$ — проектор, а функция $g(z_1, z_2)$ задает норму в R^2. Будем говорить, что Π порождает норму $\| \cdot \mid X \|$ в X, если для любой φ из X

$$\| \varphi \mid X \| = g\ (\| \Pi\varphi \mid X_0 \|, \| \hat{\Pi}\varphi \mid Y \|).$$

Т е о р е м а II.11. *Два проектора* Π_1 *и* $\Pi_2 : X \to X_0$ *порождают эквивалентные нормы в* X *тогда и только тогда, когда существует постоянная* K *такая, что для всех* φ *из* X *выполнено*

$$\| (\Pi_1 - \Pi_2)\varphi \mid X_0 \| \leqslant K \| \varphi \mid Y \|. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай, когда проекторам Π_j, $j = 1, 2$, соответствуют нормы в X вида

$$\| \varphi \mid X \|_j = \| \Pi_j\varphi \mid X_0 \| + \| \varphi \mid Y \|, \quad j = 1, 2. \tag{4.3}$$

Это не ограничит общности, так как все нормы в R^2 эквивалентны между собой.

---

[3] По аналогичной схеме определяются пространства $W_p^{(l)}(\Omega)$ для области Ω, не совпадающей со всем R^n, и весовые пространства $W_p^{(l)}(\Omega, \rho)$. Во втором случае подынтегральное выражение в полунорме (4.1) включает в качестве сомножителя вес $\rho(x)$.

Докажем, что условие (4.2) достаточно для эквивалентности норм (4.3). Имеем

$$\begin{aligned}&\| \varphi \mid X \|_1 \leqslant \|(I - \Pi_2) \varphi \|_1 + \| \Pi_2\varphi \|_1 = \\ &= \| \Pi_1 (I - \Pi_2) \varphi \mid X_0 \| + \| (I - \Pi_2) \varphi \mid Y \| + \\ &+ \| \Pi_1\Pi_2\varphi \mid X_0 \| + \| \Pi_2\varphi \mid Y \|.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Воспользуемся тем, что норма $\| \cdot \mid Y \|$ по условию обращается в 0 на элементах X_0 и принимает одинаковые значения на любых двух элементах X, отличающихся друг от друга на слагаемое из X_0. Поэтому

$$\| \Pi_2\varphi \mid Y \| = 0, \qquad \| (I - \Pi_2) \varphi \mid Y \| = \| \varphi \mid Y \|.$$

Учитывая еще, что $\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2$, получим из (4.4)

$$\begin{aligned}&\| \varphi \mid X \|_1 \leqslant \| (\Pi_1 - \Pi_2) \varphi \mid X_0 \| + \| \varphi \mid Y \| + \| \Pi_2\varphi \mid X_0 \| \leqslant \\ &\leqslant \| (\Pi_1 - \Pi_2) \varphi \mid X_0 \| + \| \varphi \mid X \|_2 \leqslant (K + 1) \| \varphi \mid X \|_2.\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что условие (4.2) действительно достаточно для эквивалентности норм (4.3).

Пусть, наоборот, известно, что нормы (4.3) эквивалентны, и предположим, что (4.2) не имеет места. Тогда для любого k найдется функция φ_k из X, $\varphi_k \neq 0$ и такая, что

$$\|(\Pi_1 - \Pi_2) \varphi_k \mid X_0 \| \geqslant K \| \varphi_k \mid Y \|. \tag{4.5}$$

Положим $\psi_k = (I - \Pi_1) \varphi_k$, тогда $\Pi_1\psi_k = 0$ и $\| \psi_k \mid Y \| = \| \varphi_k \mid Y \|$, и, значит, $\| \psi_k \mid X \|_1 = \| \psi_k \mid Y \|$. Имея в виду это равенство, а также (4.5), оценим $\| \psi_k \mid X \|_2$. Имеем

$$\begin{aligned}&\| \psi_k \mid X \|_2 = \| \psi_k \mid Y \| + \| \Pi_2\psi_k \mid X_0 \| = \| \psi_k \mid Y \| + \\ &\quad + \| (\Pi_2 - \Pi_1) \psi_k \mid X_0 \| \geqslant (K + 1) \| \psi_k \mid Y \| = (K + 1) \| \psi_k \mid X \|_1.\end{aligned}$$

Это противоречит эквивалентности норм (4.3), и поэтому оценка (4.2) действительно имеет место. Теорема доказана.

Приведем примеры проекторов из $W_p^{(l)}$ в $\boldsymbol{P}_{l-1}$. Пусть α, β — мультииндексы, $|\alpha| < l$, $|\beta| \leqslant l$, и $L_{\alpha,\beta}(y)$ — финитные ограниченные функции. Рассмотрим линейный оператор

$$\Pi\varphi = \sum_{|\alpha|<l} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int \sum_{|\beta| \leqslant l} L_{\alpha,\beta}(y) D^\beta \varphi(y)\, dy. \tag{4.6}$$

Любая функция φ из $W_p^{(l)}$ имеет все обобщенные производные порядка l, а значит, и обобщенные производные всех порядков $< l$ (см. следствие 2.2). Поэтому правая часть (4.6) определена для всех φ из $W_p^{(l)}$.

Чтобы оператор Π был проектором, ядра $L_{\alpha,\beta}(y)$ должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Именно, Π — проектор тогда и только тогда, когда при всех γ, $|\gamma| < l$, выполнено:

$$\sum_{\beta \leqslant \gamma} \left(\int L_{\alpha,\beta}(y)\, y^{\gamma-\beta}\, dy \right) \frac{1}{(\gamma - \beta)!} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \gamma; \\ 1, & \alpha = \gamma. \end{cases} \tag{4.7}$$

Условия (4.7) легко получить, если сосчитать по формуле (4.6) значение Πx^{γ} и результат приравнять x^{γ}.

Теорема II.12. *Разность* Π *любых двух проекторов* Π_1 *и* Π_2 *вида* (4.6) *представима в виде*

$$\Pi\varphi = \sum_{|\alpha|<l} \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \int \sum_{|\beta|=l} H_{\alpha,\beta}(y)\, D^{\beta}\varphi(y)\, dy, \tag{4.8}$$

т. е. значение $\Pi\varphi$ *зависит лишь от производных порядка* l *функции* φ. *Функции* $H_{\alpha,\beta}(y)$ *финитны и ограничены.*

Доказательство. Пусть Π_1, Π_2 — два проектора типа (4.6), т. е.

$$\Pi_j\varphi = \sum_{|\alpha|<l} \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \int \sum_{|\beta|\leqslant l} L^{(j)}_{\alpha,\beta}(y)\, D^{\beta}\varphi(y)\, dy, \quad j=1,2.$$

Тогда $\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$ запишется следующим образом:

$$\Pi\varphi = \sum_{|\alpha|<l} \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \int \sum_{|\beta|\leqslant l} L_{\alpha,\beta}(y)\, D^{\beta}\varphi(y)\, dy,$$

где $L_{\alpha,\beta}(y) = L^{(1)}_{\alpha,\beta}(y) - L^{(2)}_{\alpha,\beta}(y)$ — ограниченные и финитные функции. Рассмотрим при каждом α, $|\alpha| < l$, следующий линейный оператор:

$$\Pi_{\alpha}\varphi = \sum_{|\beta|\leqslant l} \int L_{\alpha,\beta}(y)\, D^{\beta}\varphi(y)\, dy.$$

По условию значение Π на любом многочлене степени $< l$ равно нулю и $\Pi\varphi = \sum_{|\alpha|<l} (x^{\alpha}/\alpha!)\, \Pi_{\alpha}\varphi$. Поэтому $\Pi_{\alpha}(x^{\gamma})$ также равно нулю при всех γ, $|\gamma| < l$. Используя это свойство, найдем представление нужного типа для оператора Π_{α}. Перепишем его в виде:

$$\Pi_{\alpha}\varphi = \sum_{k=0}^{l} \Bigl(\sum_{|\beta|=k} \int L_{\alpha,\beta}(y)\, D^{\beta}\varphi(y)\, dy \Bigr) = \sum_{k=0}^{l} \Pi^{(0)}_{\alpha,k}\varphi. \tag{4.9}$$

Так как $\Pi_{\alpha}(1) = 0$, то $\Pi^{(0)}_{\alpha,0}(1) = 0$, т. е. функция $L_{\alpha,0}(y)$ ортогональна к постоянной. По лемме II.2 найдутся финитные ограниченные функции $Q^{(0)}_{\beta}(y)$, $|\beta| = 1$, такие, что

$$L_{\alpha,0}(y) = \sum_{|\beta|=1} D^{\beta} Q^{(0)}_{\beta}(y).$$

Поэтому

$$\Pi^{(0)}_{\alpha,0}\varphi = \int L_{\alpha,0}(y)\, \varphi(y)\, dy = \sum_{|\beta|=1} \int D^{\beta} Q^{(0)}_{\beta}(y)\, \varphi(y)\, dy =$$

$$= -\sum_{|\beta|=1} \int Q^{(0)}_{\beta}(y)\, D^{\beta}\varphi(y)\, dy.$$

Подставив это значение в (4.9), получим

$$\Pi_\alpha\varphi = \sum_{k=1}^{l} \Pi^{(1)}_{\alpha,k}\varphi,$$

где $\Pi^{(1)}_{\alpha,k} = \Pi^{(0)}_{\alpha,k}$ при $k > 1$, и

$$\Pi^{(1)}_{\alpha,1}\varphi = \sum_{|\beta|=1} \int (L_{\alpha,\beta}(y) - Q^{(0)}_\beta(y))\, D^\beta\varphi(y)\, dy.$$

Обозначим ядра, входящие в оператор $\Pi^{(1)}_{\alpha,k}$ через $L^{(1)}_{\alpha,\beta}(y)$, $|\beta| = 1$. Ясно, что они ограничены и финитны. Дальнейшие рассуждения проведем индукцией по порядку $k = |\beta|$. Предположим, что найдены операторы $\Pi^{(r)}_{\alpha,k}$, $r < l$, такие, что

$$\Pi^{(r)}_{\alpha,k}\varphi = \sum_{|\beta|=k} \int L^{(r)}_{\alpha,\beta}(y)\, D^\beta\varphi(y)\, dy,$$

$$\Pi_\alpha\varphi = \sum_{k=r}^{l} \Pi^{(r)}_{\alpha,k}\varphi,$$

где ядра $L^{(r)}_{\alpha,\beta}(y)$ финитны и ограничены. Пусть $\gamma : |\gamma| = r$, тогда $\Pi^{(r)}_{\alpha,r}x^\gamma = \Pi_\alpha x^\gamma = 0$. Иначе говоря, функция $L^{(r)}_{\alpha,\gamma}(y)$ ортогональна постоянной. По лемме II.2 найдем финитные ограниченные функции $Q^{(r)}_{\beta,\gamma}(y)$, $|\beta| = 1$, такие, что

$$L^{(r)}_{\alpha,\gamma}(y) = \sum_{|\beta|=1} D^\beta Q^{(r)}_{\beta,\gamma}(y).$$

Подставляя эти равенства в определение $\Pi^{(r)}_{\alpha,r}\varphi$, а затем интегрируя по частям (при этом поверхностных интегралов не возникает из-за финитности $Q^{(r)}_{\beta,\gamma}(y)$) и вводя необходимые новые обозначения, получим

$$\Pi_\alpha\varphi = \sum_{k=r+1}^{l} \Pi^{(r+1)}_{\alpha,k}\varphi = \sum_{k=r+1}^{l} \sum_{|\beta|=k} \int L^{(r+1)}_{\alpha,\beta}(y)\, D^\beta\varphi(y)\, dy.$$

В этом равенстве ядра $L^{(r+1)}_{\alpha,\beta}(y)$ ограничены и финитны. Рассматриваемый нами рекуррентный процесс прервется при $r = l$, т. е. когда значения $\Pi_\alpha\varphi$ будут выражены через значения обобщенных производных φ порядка l. Воспользовавшись выражением $\Pi\varphi$ через $\Pi_\alpha\varphi$, получим (4.8). Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Любые два проектора* Π_1, Π_2 *вида*

$$\Pi_j\varphi = \sum_{|\alpha|<l} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int \sum_{|\beta|\leq l} L^{(j)}_{\alpha,\beta}(y)\, D^\beta\varphi(y)\, dy, \quad j = 1, 2,$$

с финитными ограниченными ядрами $L^{(j)}_{\alpha,\beta}(y)$ *порождают в* $W^{(l)}_p$ *эквивалентные нормировки.*

Доказательство:

Возьмем в теореме II. 11 $X = W_p^{(l)}$, $X_0 = \boldsymbol{P}_{l-1}$, тогда условие (4.2) запишется в виде $\| (\Pi_1 - \Pi_2)\varphi \mid \boldsymbol{P}_{l-1} \| \leqslant k \| \varphi \mid L_p^{(l)} \|$.

Справедливость этого неравенства, а значит, и эквивалентность норм, легко получить, применяя к (4.8) неравенство Гёльдера. Следствие доказано.

Пусть Ω — ограниченная область. Оценим норму φ в $L_p(\Omega)$ через норму φ в $W_p^{(l)}$. Обозначим через c_α интеграл вида $\int\limits_\Omega D^\alpha\varphi(x)\,dx$. В силу (2.10) норма в $L_p(\Omega)$ каждой из производных $D^\alpha\varphi$, $|\alpha| < l$, допускает оценку через c_α и норму в L_p производных φ порядка на единицу больше, чем $|\alpha|$. Применяя эту оценку последовательно к производным порядка $l-1$, $l-2, \ldots, 0$, получим после несложных выкладок

$$\|\varphi \mid L_p(\Omega)\| \leqslant K\Big(\sum_{|\alpha|<l} |c_\alpha| + \|\varphi \mid L_p^{(l)}\|\Big). \tag{4.10}$$

С другой стороны, $\sum\limits_{|\alpha|<l} |c_\alpha|$ оценивается через норму в $\boldsymbol{P}_{l-1}$ проектора

$$\Pi\varphi = \sum_{|\alpha|<l} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int\limits_\Omega D^\alpha\varphi(y)\,dy.$$

Пользуясь этим, получаем из (4.10) важную оценку:

$$\|\varphi \mid L_p(\Omega)\| \leqslant K \|\varphi \mid W_p^{(l)}\|.$$

§ 5. Градиентная мажоранта

Пусть функция $\varphi(x)$ локально суммируема в области $\Omega \subset R^n$ и имеет в Ω все обобщенные производные первого порядка. Составим тензор $\{D_j\varphi(x) \mid j = 1, \ldots, n\}$ и вычислим его главный квадратичный инвариант

$$T(x \mid \varphi) = \Big(\sum_{j=1}^n (D_j\varphi(x))^2\Big)^{1/2}.$$

Всякую неотрицательную локально суммируемую функцию $\psi(x) \geqslant T(x \mid \varphi)$ *будем называть градиентной мажорантой* φ *в* Ω *и писать* $\varphi \lll \psi$.

Если $\varphi(x)$ обладает всеми обобщенными производными порядка l, а значит, и всеми обобщенными производными меньших порядков, то можно составить ее главные квадратичные инварианты

$$T_k(x \mid \varphi) = \Big(\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha\varphi(x)|^2\Big)^{1/2}.$$

В конце этого параграфа будет доказано, что

$$\varphi(x) \lll T_1(x \mid \varphi) \lll T_2(x \mid \varphi) \lll \ldots \lll T_l(x \mid \varphi). \tag{5.1}$$

Если обобщенные производные первого порядка функции $\varphi(x)$ суммируемы со степенью p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то можно построить градиентную мажоранту, суммируемую со степенью p. Таковой будет, например, главный квадратичный инвариант $T(x \mid \varphi)$.

Теорема II.13. *Пусть $x = f(y)$ — достаточно гладкое преобразование координат, переводящее область Ω_y в область Ω_x. Если функция $\varphi(x)$ обладает градиентной мажорантой $\psi(x)$ в области Ω_x, то функция $\hat{\varphi}(y) = \varphi(f, (y))$ обладает в области Ω_y градиентной мажорантой вида*

$$\hat{\psi}(y) = \psi(f(y)) \Big(\sum_{j=1}^{n} |D_j f(y)|^2\Big)^{1/2}.$$

Доказывается эта теорема простой выкладкой, и мы предоставляем это читателю.

Наличие градиентной мажоранты предполагает, по определению, наличие всех обобщенных производных первого порядка. В следствии 2.3 из теоремы II.9 показано, что в этом случае $\varphi(x)$ является $(n-1)$-непрерывной, т. е. допускает неполную непрерывную локализацию на любой системе гладких $(n-1)$-мерных поверхностей, гладко зависящих от параметра.

Дадим один удобный признак существования градиентной мажоранты.

Лемма II.4. *Пусть на множестве $\mathring{C}^{(\infty)}(\Omega)$ задан аддитивный и однородный функционал l, удовлетворяющий неравенству*

$$|(l, v)| \leqslant \int_{\Omega} \chi(x) |v(x)| \, dx, \qquad v \in \mathring{C}^{(\infty)}(\Omega), \tag{5.2}$$

в котором $\chi(x)$ — неотрицательная функция из $L_1(\Omega)$. Тогда l представим в виде

$$(l, v) = \int \sigma(x) v(x) \, dx, \qquad v \in \mathring{C}^{(\infty)}(\Omega), \tag{5.3}$$

где $\sigma(x) \in L_1(\Omega)$ и $|\sigma(x)| \leqslant \chi(x)$.

Доказательство. Рассмотрим весовое пространство $L_1(\Omega, \rho)$, где $\rho(x) = 1 + \chi(x)$. Очевидно, что $\mathring{C}^{(\infty)}(\Omega) \subset L_1(\Omega, \rho)$. В силу неравенства (5.2) функционал l ограничен на $\mathring{C}^{(\infty)}(\Omega)$ по норме пространства $L_1(\Omega, \rho)$ и допускает линейное продолжение $\hat{l}$ на все $L_1(\Omega, \rho)$. Функционал $\hat{l} \in L_1(\Omega, \rho)^*$, и, как показано в § 8 гл. I [4], найдется функция $\sigma(x)$ из $L_\infty(\Omega, 1/\rho)$ такая, что

$$(l, \Psi) = \int_{\Omega} \sigma(x) \Psi(x) \, dx, \qquad \Psi(x) \in L_1(\Omega, \rho).$$

В частности, имеет место (5.3). Наконец, из (5.2) и (5.3)

[4] В гл. I были введены весовые пространства с непрерывным весом ρ. Однако теорема об общем виде линейного функционала остается справедливой и в рассматриваемом нами случае.

вытекает, что $|\sigma(x)| \leqslant \chi(x)$, и, значит, $\sigma(x) \in L_1(\Omega)$. Лемма доказана.

Следствие 5.1. *Рассмотрим в качестве l функционал вида*

$$(l, v) = \int_\Omega \Phi(x) D^\alpha v(x)\, dx, \qquad v \in \overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega).$$

Пусть $\Phi(x)$ и $\chi(x)$ принадлежит $L_1(\Omega)$, причем $\chi(x) \geqslant 0$, и для любой функции $v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\left| \int_\Omega \Phi(x) D^\alpha v(x)\, dx \right| \leqslant \int_\Omega \chi(x) |v(x)|\, dx.$$

Тогда функция $\Phi(x)$ имеет обобщенную производную $D^\alpha \Phi_1 \in L_1(\Omega)$ и $|D^\alpha \Phi(x)| \leqslant \chi(x)$.

Лемма II.5. *Пусть функция $\Phi(x) \in L_1(\Omega)$ такова, что ее средние функции $\Phi_h(x)$ обладают семейством градиентных мажорант*

$$\Phi_h(x) \leqslant \Psi^{(h)}(x), \qquad \Psi^{(h)}(x) \in L_1(\overline{R}^n), \tag{5.4}$$

причем эти градиентные мажоранты сходятся в $L_1(R^n)$ к функции $\psi(x)$. Тогда $\Phi(x) \leqslant \Psi(x)$.

Доказательство. Убедимся сначала, что $\Phi(x)$ имеет обобщенные производные первого порядка. Имеем для любой $v(x)$ из $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(R^n)$:

$$\begin{aligned} \left| \int \Phi(x) D_j v(x)\, dx \right| &= \lim_{h\to 0} \left| \int \Phi_h(x) D_j v(x)\, dx \right| = \\ &= \lim_{h\to 0} \left| \int D_j \Phi_h(x) v(x)\, dx \right| \leqslant \\ &\leqslant \lim_{h\to 0} \int \Psi^{(h)}(x) |v(x)|\, dx = \int \Psi(x) |v(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из следствия 5.1 леммы II.4 вытекает, что существуют все обобщенные производные первого порядка функции $\Phi(x)$. По свойству средних функций $|\operatorname{grad} \Phi_h| \to |\operatorname{grad} \Phi(x)|$ в смысле $L_1(R^n)$. Переходя к пределу в (5.4), получим $\Phi(x) \leqslant \Psi(x)$. Лемма доказана.

Некоторые операторы в пространствах L_p сохраняют свойства градиентного мажорирования. Не останавливаясь на общих классах таких операторов, приведем несколько примеров, которые будут нам полезны в применениях.

Пример 1. Простым примером таких операторов служит оператор усреднения

$$\varphi_h(x) = \int \omega(y) \varphi(x + hy)\, dy,$$

где $\omega(y)$ — ядро усреднения, которое всюду в этом параграфе мы условимся считать однородным, неотрицательным и бесконечно дифференцируемым. Докажем, что из $\varphi \ll \psi$ следует, что $\varphi_h(x) \ll \psi_h(x)$. В самом деле, имеем

$$\operatorname{grad} \varphi_h(x) = \int \omega(y) \operatorname{grad} \varphi(x + hy)\, dy,$$

$$|\operatorname{grad} \varphi_h(x)| \leqslant \int \omega(y) |\operatorname{grad} \varphi(x + hy)|\, dy \leqslant \operatorname{grad} \psi_h(x).$$

Пример 2. Оператор $A(\varphi_1, \varphi_2) = \{|\varphi_1|^p + |\varphi_2|^p\}^{1/p}$ сохраняет отношение градиентной мажорантности.

Теорема II.14 *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in L_p(\Omega)$, $\psi_1, \psi_2 \in L_p(\Omega)$ *и* $\varphi_j(x) \ll \psi_j(x)$, *тогда при любом* $p : 1 \leqslant p \leqslant \infty$ *справедливо*

$$\{|\varphi_1|^p + |\varphi_2|^p\}^{1/p} \ll \{\psi_1^p + \psi_2^p\}^{1/p}. \tag{5.5}$$

Доказательство. При $1 < p < \infty$ имеем для непрерывно дифференцируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$

$$\operatorname{grad}\{|\varphi_1(x)|^p + |\varphi_2(x)|^p\}^{1/p} = [|\varphi_1(x)|^p + |\varphi_2(x)|^p]^{1/p-1} \times$$
$$\times \{|\varphi_1(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} \varphi_1 \operatorname{grad} \varphi_1 + |\varphi_2(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} \varphi_2 \operatorname{grad} \varphi_2\}.$$

Применяя неравенство Гёльдера к сумме в фигурных скобках, получим

$$|\operatorname{grad}[|\varphi_1(x)|^p + |\varphi_2(x)|^p]^{1/p}| \leqslant [|\varphi_1(x)|^p + |\varphi_2(x)|^p]^{-1/p'} \times$$
$$\times \{|\psi_1(x)|^p + |\psi_2(x)|^p\}^{1/p} [|\varphi_1(x)|^p + |\varphi_2(x)|^p]^{1/p'} =$$
$$= [|\psi_1(x)|^p + |\psi_2(x)|^p]^{1/p}.$$

Из этого неравенства следует, что $[\psi_1^p + \psi_2^p]^{1/p}$ действительно является градиентной мажорантой функции $[|\varphi_1(x)|^p + |\varphi_2(x)|^p]^{1/p}$ в случае непрерывно дифференцируемых $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, т. е.

$$[\psi_1^p + \psi_2^p]^{1/p} - |\operatorname{grad}[|\varphi_1|^p + |\varphi_2|^p]^{1/p}| \geqslant 0.$$

Пусть теперь $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(x)$ — два произвольных элемента $L_p(\Omega)$, причем $\varphi_j(x) \ll \psi_j(x)$. Приближая $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ средними функциями $\varphi_{1,h}(x)$, $\varphi_{2,h}(x)$, $\psi_{1,h}(x)$, $\psi_{2,h}(x)$, вычислим предел в $L_p(\Omega)$ неотрицательного выражения

$$[\psi_{1,h}^p + \psi_{2,h}^p]^{1/p} - |\operatorname{grad}[|\varphi_{1,h}|^p + |\varphi_{2,h}|^p]^{1/p}|.$$

Этот предел также неотрицателен, и, значит, для φ_1 и φ_2 справедливо неравенство

$$|\operatorname{grad}[|\varphi_1|^p + |\varphi_2|^p]^{1/p}| \leqslant [\psi_1^p + \psi_k^p]^{1/p}.$$

Таким образом, при $1 \leqslant p < \infty$ неравенство (5.5) справедливо. Пусть φ_1, φ_2 таковы, что оно справедливо для всех $p \geqslant 1$. Тогда, устремляя p к ∞, получим

$$|\operatorname{grad}[\max(|\varphi_1|, |\varphi_2|)]| \leqslant \max(\psi_1, \psi_2).$$

Теорема доказана.

По индукции этот результат распространяется на несколько слагаемых. Пусть $\varphi_j \in L_p$, $\psi_j \in L_p$, $\varphi_j \ll \psi_j$, тогда

$$[|\varphi_1|^p + \ldots + |\varphi_k|^p]^{1/p} \ll [\psi_1^p + \ldots + \psi_k^p]^{1/p}. \tag{5.6}$$

Пусть теперь $\varphi \ll \psi$, $\varphi_j = \varphi(x + z_j)$, $\alpha_j \geqslant 0$. Тогда из (5.6) получим

$$\{\alpha_1 |\varphi(x + z_1)|^p + \alpha_2 |\varphi(x + z_1)|^p + \ldots + \alpha_N |\varphi(x + z_N)|^p\}^{1/p} \ll$$
$$\ll \{\alpha_1 \psi(x + z_1)^p + \alpha_2 \psi(x + z_2)^p + \ldots + \alpha_N \psi(x + z_N)^p\}^{1/p}.$$

Увеличивая здесь число точек N и уменьшая $\alpha = \max \alpha_i$, легко получить

$$\left[\int_\Omega \alpha(z) |\varphi(x + z)|^p dz\right]^{1/p} \ll \left[\int_\Omega \alpha(z) \psi(x + z)^p dz\right]^{1/p}. \tag{5.7}$$

Меняя область интегрирования Ω и все $\alpha(z)$, получаем различные интегральные операторы, сохраняющие градиентное мажорирование.

Переходя к пределу в формуле (5.7) при $p \to \infty$ в случае, когда $\varphi \in L_\infty(\Omega)$ и $\psi \in L_\infty(\Omega)$, получим еще одну формулу:

$$\|\varphi(x - z)\alpha(z) \mid L_\infty(\Omega)\| \ll \|\psi(x - z)\alpha(z) \mid L_\infty(\Omega)\|,$$

из которой следует

$$\underset{\Omega}{\mathrm{v.m.}}\, \varphi(x - z) \ll \underset{\Omega}{\mathrm{v.m.}}\, \psi(x - z).$$

Пример 3. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат L_p, $1 \leqslant p < \infty$. Введем сферические координаты (r, θ):

$$r = |x| = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\Big)^{1/2}, \qquad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) = (x_1/r, \ldots, x_n/r).$$

Составим интегралы по единичной сфере σ:

$$\begin{aligned} \Phi_p(r) &= \left\{\int_\sigma |\varphi(r, \theta)|^p d\theta\right\}^{1/p}, \\ \Psi_p(r) &= \left\{\int_\sigma |\psi(r, \theta)|^p d\theta\right\}^{1/p}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Функции $\Phi_p(r)$ и $\Psi_p(r)$ понимаются здесь как элементы весового пространства $L_{p,\rho}(0, \infty)$ при $\rho(r) = r^{n-1}$.

Теорема II.15. *Если* $\varphi(x) \ll \psi(x)$, *то* $\Phi_p(r) \ll \Psi_p(r)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай гладких φ, ψ. Имеем

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial r}(r) = \left\{\int_\sigma |\varphi(r, \theta)|^p d\theta\right\}^{(1-p)/p} \int_\sigma |\varphi(r, \theta)|^{p-1} \operatorname{sign} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, d\theta.$$

Применяя ко второму интегралу неравенство Гёльдера, получим

$$\left|\frac{\partial\Phi_p}{\partial r}(r)\right| \leqslant \left\{\int\limits_\sigma |\varphi(r,\theta)|^p\, d\theta\right\}^{(1-p)/p} \left\{\int\limits_\sigma \left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p} \times$$
$$\times \left\{\int\limits_\sigma |\varphi(r,\theta)|^{(p-1)p'}\, d\theta\right\}^{1/p'} = \left\{\int\limits_\sigma \left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)\right|^p d\theta\right\}^{1/p}. \tag{5.9}$$

Здесь $1/p + 1/p' = 1$. Далее,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\theta_j,$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,\theta)\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \psi(r,\theta).$$

Подставляя эту оценку в (5.9), получим

$$\left|\frac{\partial\Phi_p}{\partial r}(r)\right| \leqslant \left\{\int\limits_\sigma |\psi(r,\theta)|^p\, d\theta\right\}^{1/p} = \Psi_p(r), \tag{5.10}$$

т. е. действительно $\Phi_p(r) \leqslant \Psi_p(r)$. Если φ, ψ — произвольные функции из L_p, то образуем средние функции φ_h, ψ_h, которым в свою очередь сопоставим функции $\Phi_p^{(h)}(r)$ и $\Psi_p^{(h)}(r)$ согласно равенствам (5.8). Заметим, что по теореме II.9 $\varphi(r,\theta)$ имеет все обобщенные производные первого порядка по r, θ_i. При $h \to 0$ функции $\Phi_p^h(r)$ сходятся к $\Phi_p(r)$, а $\Psi_p^h(r)$ — к $\Psi_p(r)$, причем сходимость равномерна на любом отрезке $[R_1, R_2]$, $0 < R_1 \leqslant R_2$. Это следует из оценки (2.25) и уже известных нам свойств средних функций. Далее, согласно теореме II.4, $\Phi_p(r)$ имеет обобщенную производную на любом отрезке $[R_1, R_2]$, $0 < R_1 \leqslant R_2$, причем производная $\Phi_p^{(h)}(r)$ сходится к производной $\Phi_p(r)$ при $h \to 0$ в пространстве $L_p(R_1, R_2)$.

В примере 1 этого параграфа доказано, что $\varphi_h \leqslant \psi_h$, и так как φ_h, ψ_h — гладкие, то для них справедливо отношение $\Phi_p^{(h)}(r) \leqslant \Psi_p^{(h)}(r)$. Переходя здесь к пределу по $h \to 0$, получим требуемое. Теорема доказана.

В заключение докажем неравенства (5.1). Пусть $\varphi_\alpha = D^\alpha\varphi(x)$, где $|\alpha| = l$. Из определения следует, что

$$\varphi_\alpha(x) \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |D_j\varphi_\alpha(x)|^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда и из (5.6) получаем

$$T_l(x\,|\,\varphi) = \left(\sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!}|\varphi_\alpha(x)|^2\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{|\alpha|=l} \frac{l!}{\alpha!} \sum_{j=1}^n |D_j\varphi_\alpha(x)|^2\right)^{1/2} = T_{l+1}(x\,|\,\varphi).$$

Тем самым неравенства (5.1) доказаны.

ГЛАВА III

ПЛОТНОСТЬ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Область существования весовых норм

Коренным вопросом теории функциональных пространств является вопрос о способах приближения произвольного элемента элементами некоторого подмножества, обладающего особо благоприятными свойствами. В частности, это вопрос о том, будут ли в некотором пространстве X всюду плотны элементы выбранного подмножества $Y \subset X$, удобного для приложений. В этой книге нас интересуют два случая.

1) *Приближение функций $\varphi(x)$ из пространства X бесконечно дифференцируемыми функциями.*

2) *Приближение функций $\varphi(x)$ из X, заданных в некоторой области Ω, функциями, финитными в Ω.*

Приведем несколько иллюстрирующих примеров.

Пример 1. Любая функция $\varphi(x)$ из $L_{p,\rho}$ с ограниченным весом ρ в силу теоремы I. 8 может быть со сколь угодно высокой точностью приближена функциями из $\mathring{C}^{(\infty)}(\Omega)$.

Пример 2. В пространстве тензорных полей $L_p^{\langle l\rangle}(\Omega, \rho)$, $1 \leqslant p < \infty$, финитные бесконечно дифференцируемые тензорные поля образуют плотное множество. Действительно, если тензорное поле $\varphi_k(x)$, $k \in Q$, умножить на индикатор ограниченного открытого множества, лежащего в Ω вместе со своим замыканием, а затем полученное тензорное поле усреднить, выбрав параметр усреднения h достаточно малым, то получится финитное бесконечно дифференцируемое тензорное поле. Читатель легко докажет этот факт, пользуясь соотношениями из § 9 гл. I, определяющими тензорные поля. Подобрав для любого $\varepsilon > 0$ область Ω^* так, чтобы

$$\| \varphi_k - i_{\Omega^*}\varphi_k \mid L_p^{\langle l\rangle}(\Omega, \rho) \| < \varepsilon/2,$$

где i_{Ω^*} — индикатор Ω^*, а затем взяв $h > 0$ так, чтобы

$$\| i_{\Omega^*}\varphi_k - (i_{\Omega^*}\varphi_k)_h \mid L_p^{\langle l\rangle}(\Omega, \rho) \| < \varepsilon/2,$$

получим

$$\| \varphi_k - (i_{\Omega^*}\varphi_k)_h \mid L_p^{\langle l\rangle}(\Omega, \rho) \| < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это доказывает плотность множества финитных бесконечно дифференцируемых тензорных полей в пространстве $L_p^{\langle l\rangle}(\Omega, \rho)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

Пример 3. Рассмотрим пространство $L_2^{\langle 1\rangle}(\Omega)$, элементы которого суть поля градиентов $(\varphi_{1,0}, \varphi_{0,1})$ первого порядка на плоскости ($n = 2$). За область Ω примем квадрат $\{x\colon |x_j| \leqslant 1, j = 1, 2\}$

Норма в $L_2^{\langle 1\rangle}(\Omega)$ выражается интегралом

$$\|(\varphi_{1,0}\varphi_{0,1})\,|\,L_2^{\langle 1\rangle}(\Omega)\|^2=\int\limits_\Omega(\varphi_{1,0}^2+\varphi_{0,1}^2)\,dx.$$

В этом пространстве имеются элементы, не приближаемые финитными. Докажем это. Пусть $\varphi_{1,0}=x_2$, $\varphi_{0,1}=x_1$. Вектор $\langle\varphi_{1,0},\varphi_{0,1}\rangle$ служит градиентом функции $\varphi(x)=x_1x_2$. Покажем, что к нему невозможно сколь угодно точно приблизиться в $L_2^{\langle 1\rangle}(\Omega)$ с помощью градиента, обращающегося в нуль вблизи границы Ω.

Предположим противное, т. е. что для любого $\varepsilon>0$ существует финитный в Ω обобщенный градиент $\langle\omega_{1,0}^\varepsilon(x),\ \omega_{0,1}^\varepsilon(x)\rangle$, такой что

$$\left(\int\limits_\Omega[(\varphi_{1,0}-\omega_{1,0}^\varepsilon)^2+(\varphi_{0,1}-\omega_{0,1}^\varepsilon)^2]\,dx_1\,dx_2\right)^{1/2}<\varepsilon \tag{1.1}$$

Градиент $\langle\omega_{1,0}^\varepsilon,\omega_{0,1}^\varepsilon\rangle$ можно считать гладким (иначе следует его усреднить). Пусть $\psi_\varepsilon(x)$ такова, что $\omega_{1,0}=D_1\psi_\varepsilon$, $\omega_{0,1}=D_2\psi_\varepsilon$. Из финитности $\langle\omega_{1,0}^\varepsilon,\omega_{0,1}^\varepsilon\rangle$ в Ω следует, что ψ_ε также можно считать финитной в Ω. Рассмотрим два интеграла

$$J(\varepsilon)=\int\limits_\Omega(\varphi_{1,0}\omega_{1,0}^\varepsilon+\varphi_{0,1}\omega_{0,1}^\varepsilon)\,dx_1\,dx_2=\int\limits_\Omega(x_2D_1\psi_\varepsilon+x_1D_2\psi_\varepsilon)\,dx_1\,dx_2,$$

$$J=\int\limits_\Omega(\varphi_{1,0}^2+\varphi_{0,1}^2)\,dx_1\,dx_2=8/3.$$

В силу (1.1) их разность удовлетворяет неравенству $|J(\varepsilon)-J|\leqslant J^{1/2}\varepsilon$. Тем самым предел $J(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to0$ равен $8/3\neq0$.

С другой стороны, применяя к $J(\varepsilon)$ формулу Грина и пользуясь финитностью $\psi_\varepsilon(x)$ в Ω, имеем

$$J(\varepsilon)=\int\limits_\Omega(x_2D_1\psi_\varepsilon+x_1D_2\psi_\varepsilon)\,dx_1\,dx_2=$$
$$=\int\limits_{\partial\Omega}(x_2\psi_\varepsilon(x)\cos\widehat{nx_1}+x_1\psi_\varepsilon(x)\cos\widehat{nx_2})\,d\Gamma=0.$$

Тем самым предел $J(\varepsilon)$ должен быть нулем. Полученное противоречие доказывает, что невозможно приблизить исходный градиент $\langle x_2,x_1\rangle$ в $L_2^{\langle 1\rangle}(\Omega)$ финитным обобщенным градиентом сколь угодно точно.

Первообразные функции служат удобным средством при изучении вопроса о плотности финитных элементов в пространствах градиентов. В областях со связной границей, например в R^n, каждому финитному градиенту отвечает некоторая финитная же первообразная. Поэтому в таких областях вопрос о плотности финитных градиентов сводится к приближению финитными первообразными.

В случаях, когда в данном пространстве $X(\Omega)$ финитные элементы не всюду плотны, замыкание множества таких элементов не будет совпадать с $X(\Omega)$, а образует собственное подпространство, которое мы будем обозначать через $\mathring{X}(\Omega)$.

Таким образом, цель наших исследований состоит в том, чтобы найти $\mathring{X}(\Omega)$ и посмотреть, в каких случаях $\mathring{X}(\Omega)$ совпадает с $X(\Omega)$, а в каких нет.

Рассмотрим прежде всего несколько примеров конкретных пространств. Будем пользоваться обозначением:

$$x^{\cdot} = \uparrow(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1), \qquad |x^{\cdot}| = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}.$$

Аналогично $\nu^{\cdot} = \uparrow(\nu, 1)$ и $|\nu^{\cdot}| = (1 + \nu^2)^{1/2}$.

Важную роль в дальнейшем играют некоторые нормировочные интегралы от функций $\varphi(x)$, заданных в R^n. Пусть $1 < p < \infty$. Рассмотрим интеграл

$$J_{p,\nu,\varkappa}(\varphi) = \int |\varphi|^p \, |x^{\cdot}|^{\nu p} [1 + \ln|x^{\cdot}|]^{-\varkappa p} \, dx,$$

где ν и $\varkappa$ — вещественные числа.

Весовое пространство $L_{p,\nu,\varkappa}$ состоит из функций $\varphi(x)$, для которых интеграл $J_{p,\nu,\varkappa}(\varphi)$ конечен. По определению,

$$\|\varphi \mid L_{p,\nu,\varkappa}\| = \|\varphi \mid L_{p,\nu,\varkappa}(R^n)\| =$$
$$= (J_{p,\nu,\varkappa}(\varphi))^{1/p} = \left(\int |\varphi|^p \, |x^{\cdot}|^{\nu p} [1 + \ln|x^{\cdot}|]^{-\varkappa p} \, dx\right)^{1/p}.$$

В этой главе нас будут интересовать два случая: $\varkappa = 0$ и $\varkappa = 1$, т. е. пространства $L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu,0}$ и $L_{p,\nu,1}$.

При больших значениях ν принадлежность к пространству $L_{p,\nu}$ влечет, очевидно, требование, чтобы функция $\varphi \in L_{p,\nu}$ достаточно быстро в среднем убывала на бесконечности. В этом смысле элементы $L_{p,\nu}$ сходны с финитными функциями. Наоборот, в случае отрицательных ν функции, заданные в R^n, могут там расти даже быстрее многочленов. Многочлен $P_l(x)$ степени $l < -(n/p + \nu)$ принадлежит $L_{p,\nu}$, а многочлены степени $-(\nu + n/p)$ принадлежат $L_{p,\nu,\varkappa}$ при $\varkappa > 1/p$.

Взамен параметра p мы часто будем пользоваться удобным параметром $\tau = n/p$ ($p = n/\tau$, $p\tau = n$). Для наглядности результатов введем плоскость с осями координат, по которым будем откладывать параметры ν и τ. Точку (ν, τ) назовем определяющим вектором или определяющей точкой нормы $\|\cdot \mid L_{p,\nu}\|$ или $\|\cdot \mid L_{p,\nu,1}\|$, или же интеграла $J_{p,\nu}(\varphi)$ или $J_{p,\nu,1}(\varphi)$. Нас интересует только замкнутая полоса $0 \leqslant \tau \leqslant n$ на этой плоскости (ибо при $\tau > n$ будет $p < 1$).

Будем для краткости писать также $J_{p,\nu}(\varphi)$ вместо $J_{p,\nu,0}(\varphi)$. Интегралы $J_{p,\nu}(\varphi)$ и $J_{p,\nu,1}(\varphi)$ назовем соответственно основным и вспомогательным.

При $p = \infty$ нормы $\| \varphi \mid L_{p, \nu} \|$ и $\| \varphi \mid L_{p, \nu, 1} \|$ определяются формулами

$$\| \varphi \mid L_{\infty, \nu} \| = \underset{R^n}{\text{v.m.}} \mid x^{\cdot} \mid^{\nu} \mid \varphi(x) \mid,$$

$$\| \varphi \mid L_{\infty, \nu, 1} \| = \underset{R^n}{\text{v.m.}} \mid x^{\cdot} \mid^{\nu} [1 + \ln \mid x^{\cdot} \mid]^{-\varkappa} \mid \varphi(x) \mid.$$

Для данной функции $\varphi \in L_{p, \mathrm{loc}}(R^n)$ рассмотрим множество точек (ν, τ) этой полосы, в которых норма $\| \varphi \mid L_{p, \nu} \|$ или $\| \varphi \mid L_{p, \nu, 1} \|$ конечна. Назовем его областью существования нормы, а при $p < \infty$ и областью существования соответствующего интеграла.

Строение и взаимосвязь областей существования норм описывается следующей серией лемм.

Лемма III.1. *Если для функции $\varphi(x)$, $x \in R^n$, в точке (ν_0, τ_0) конечна основная норма, то в этой же точке конечна и вспомогательная. При этом*

$$\| \varphi \mid L_{p_0, \nu_0, 1} \| \leqslant \| \varphi \mid L_{p_0, \nu_0} \|.$$

Если в точке (ν_0, τ_0) конечна вспомогательная норма $\varphi \mid L_{p_0, \nu_0, 1} \|$, то при любом $\nu < \nu_0$ конечна и основная $\varphi \mid L_{p_0, \nu} \|$. При этом

$$\| \varphi \mid L_{p_0, \nu} \| \leqslant K \| \varphi \mid L_{p_0, \nu_0, 1} \|,$$

где постоянная K зависит только от p_0, ν_0 и $\nu < \nu_0$.

Из леммы непосредственно видно, что область существования вспомогательного интеграла содержит в себе область существования основного (не считая точек границы).

Доказательство первого утверждения леммы при $\tau > 0$, т. е. при $p < \infty$, вытекает из очевидного неравенства $1 + \ln \mid x^{\cdot} \mid \geqslant 1$, выполняющегося во всем R^n.

Доказательство второго утверждения следует из неравенства

$$\mid x^{\cdot} \mid^{-\varepsilon p} \leqslant K (1 + \ln \mid x^{\cdot} \mid)^{-p},$$

которое также справедливо во всем R^n. Постоянная K зависит в нем только от $\varepsilon > 0$ и p.

При $\tau = 0$ утверждение леммы сразу же следует из определений норм в $L_{\infty, 0}$ и $L_{\infty, 0, 1}$.

Следствие 1.1. *Если в точке ν_0, τ_0 конечны основная или вспомогательная нормы, то всюду на горизонтальном луче $\{(\nu, \tau_0), \nu < \nu_0\}$ конечна основная норма.*

Таким образом, мы сравнили нормы $\| \varphi \mid L_{p, \nu} \|$ и $\| \varphi \mid L_{p, \nu, 1} \|$ при фиксированном $p = p_0$. Следующие леммы относятся к сравнению норм L_{ν_0, p_0} и $L_{\nu, p}$ при $p < p_0$, т. е. при $\tau > \tau_0$.

Лемма III.2. *Пусть для функции $\varphi(x)$ в точке (ν_0, τ_0), $\tau_0 = n/p$, конечна основная норма. Тогда во всех точках «косого» отрезка $\tau_0 \leqslant \tau < n$, $\nu + \tau = \nu_0 + \tau_0$ конечна вспомогательная* *норма, причем имеет место неравенство*

$$\| \varphi \mid L_{p,\nu,1} \| \leqslant K \| \varphi \mid L_{p_0,\nu_0} \|.$$

Доказательство. Пусть $\tau_0 > 0$, тогда при $\nu + \tau = \nu_0 + \tau_0$ имеем

$$J_{p,\nu,1}(\varphi) = J_{p,\nu_0+\tau_0-\tau,1}(\varphi) = \int |\varphi|^p |x^\cdot|^{(\nu_0+\tau_0-\tau)p} (1 + \ln|x^\cdot|)^{-p} dx =$$
$$= \int |\varphi|^p |x^\cdot|^{(\nu_0+\tau_0)p} (1 + \ln|x^\cdot|)^{-p} |x^\cdot|^{-n} dx.$$

Применим к этому интегралу неравенство Гёльдера с показателями $g = p_0/p > 1$ и $g' = p_0/(p_0 - p)$. Тогда

$$J_{p,\nu,1}(\varphi) \leqslant \left\{ \int [|\varphi| \; |x^\cdot|^{(\nu_0+\tau_0)}]^{p_0} |x^\cdot|^{-n} dx \right\}^{p/p_0} \times$$
$$\times \left\{ \int [1 + \ln|x^\cdot|]^{-pp_0/(p_0-p)} |x^\cdot|^{-n} dx \right\}^{(p_0-p)/p_0}$$

Заметим теперь, что при $1 \leqslant p \leqslant p_0$ будет $\frac{pp_0}{p_0 - p} = \frac{1}{1/p - 1/p_0} \geqslant \frac{1}{1 - 1/p_0} = p_0'$ и, значит,

$$J_{p,\nu,1}(\varphi) \leqslant [J_{p_0,\nu_0}(\varphi)]^{p/p_0} \left\{ \int [1 + \ln|x^\cdot|]^{-p_0'} |x^\cdot|^{-n} dx \right\}^{(p_0-p)/p_0}.$$

Интеграл во втором сомножителе сходится. Извлекая корни, получим окончательно

$$\| \varphi \mid L_{p,\nu,1} \| \leqslant K \| \varphi \mid L_{p_0,\nu_0} \|$$

при $\nu + \tau = \nu_0 + \tau_0$. Постоянная K зависит здесь только от p_0. При $\tau_0 = 0$ имеем

$$(J_{p,\nu,1}(\varphi))^{1/p} = \left\{ \int |\varphi|^p [|x^\cdot|^{\nu_0-n/p}]^p [1 + \ln|x^\cdot|]^{-p} dx \right\}^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \text{v.m.} [|\varphi| \; |x^\cdot|^{\nu_0}] \left\{ \int |x^\cdot|^{-n} [1 + \ln|x^\cdot|]^{-p} dx \right\}^{1/p} = K \| \varphi \mid L_{\infty,\nu_0} \|.$$

Лемма доказана.

Лемма III.3 (о выпуклости). *Области существования основной и вспомогательной норм являются выпуклыми множествами. Именно, если для функции φ точки (ν_1, τ_1) и (ν_2, τ_2) принадлежат области существования основной или вспомогательной нормы, то любая точка $(\nu_3, \tau_3) = \alpha(\nu_1, \tau_1) + \beta(\nu_2, \tau_2)$, $\alpha, \beta > 0$; $\alpha + \beta = 1$ также принадлежит области существования соответствующей нормы. При этом*

$$\| \varphi \mid L_{p_3,\nu_3} \| \leqslant \| \varphi \mid L_{p_1,\nu_1} \|^\alpha \| \varphi \mid L_{p_2,\nu_2} \|^\beta,$$
$$\| \varphi \mid L_{p_3,\nu_3,1} \| \leqslant \| \varphi \mid L_{p_1,\nu_1,1} \|^\alpha \| \varphi \mid L_{p_2,\nu_2,1} \|^\beta.$$

Доказательство.] Пусть сначала $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$, тогда имеем

$$\| \varphi \mid L_{p_3,\nu_3} \| = \left\{ \int |\varphi|^{p_3} |x^\cdot|^{\nu_3 p_3} dx \right\}^{1/p_3} =$$
$$= \left\{ \int |\varphi|^{(\alpha+\beta)p_3} |x^\cdot|^{(\alpha\nu_1+\beta\nu_2)p_3} dx \right\}^{1/p_3} =$$

$$= \left\{ \int (|\varphi| \, | x^{\cdot} |^{\nu_1})^{\alpha p_3} (|\varphi| \, | x^{\cdot} |^{\nu_2})^{\beta p_3} dx \right\}^{1/p_3} \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ \int |\varphi|^{p_1} | x^{\cdot} |^{\nu_1 p_1} dx \right\}^{\alpha/p_1} \left\{ \int |\varphi|^{p_2} | x^{\cdot} |^{\nu_2 p_2} dx \right\}^{\beta/p_2} =$$
$$= \| \varphi \mid L_{p_1, \nu_1} \|^{\alpha} \| \varphi \mid L_{p_2, \nu_2} \|^{\beta}.$$

Мы воспользовались здесь неравенством Гёльдера с показателями $q = p_1/\alpha p_3 > 1$ и $q' = p_2/\beta p_3 > 1$, что возможно в силу соотношения $\tau_3 = \alpha\tau_1 + \beta\tau_2$, $\tau_i = n/p_i$, $i = 1, 2$.

Аналогично доказывается в этом случае утверждение для вспомогательного интеграла. Впрочем, оно сразу же следует из утверждения для основного, если в нем заменить φ на $| \varphi | [1 + \ln | x^{\cdot} |]$.

Пусть теперь $\tau_1 = 0$, а $\tau_2 > 0$. Имеем $\tau_3 = \alpha\tau_1 + \beta\tau_2$, т. е. $\beta p_3 = p_2$. Далее,

$$\| \varphi \mid L_{p_3, \nu_3} \| = \left\{ \int (|\varphi| \, | x^{\cdot} |^{\nu_1})^{\alpha p_3} (|\varphi| \, | x^{\cdot} |^{\nu_2})^{\beta p_3} dx \right\}^{1/p_3} \leqslant$$
$$\leqslant [\underset{R^n}{\text{v. m.}} (|\varphi| \, | x^{\cdot} |^{\nu_1})]^{\alpha} \left\{ \int |\varphi|^{p_2} | x^{\cdot} |^{\nu_2 p_2} dx \right\}^{\beta/p_2} =$$
$$= \| \varphi \mid L_{\infty, \nu_2} \|^{\alpha} \| \varphi \mid L_{p_2, \nu_2} \|^{\beta}.$$

Аналогично рассматривается случай вспомогательных норм, а также случай $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Лемма доказана.

В дальнейшем важную роль для нас будут играть множества сходимости специального вида. Введем необходимое определение.

Пусть (ν_0, τ_0) — точка полосы $0 \leqslant \tau \leqslant n$, Δ — открытый, замкнутый или полуоткрытый промежуток, расположенный на отрезке $\{(\nu, \tau) : \nu + \tau = \nu_0 + \tau_0, \tau_0 \leqslant \tau \leqslant n\}$, а Γ — либо пустое множество, либо луч вида $\tau = \tau_0$, $\nu \leqslant \zeta$ или луч вида $\tau = \tau_0$, $\nu < \zeta$, где $\zeta \leqslant \nu_0$. Ординату нижнего конца промежутка Δ обозначим буквой η, а верхнего — буквой ξ. Заметим, что промежуток Δ может оказаться, в частности, пустым множеством или множеством, состоящим из одной точки.

Совокупность точек плоскости (ν, τ) вида

$$\{ (\nu, \tau) : \nu + \tau < \nu_0 + \tau_0, \; \tau_0 < \tau \leqslant n\} \cup \{ (\nu, \tau) \in \Delta \cup \Gamma\}$$

будем называть резцом и обозначать так: $\Lambda (\nu, \tau \mid \Delta, \Gamma)$.

Например, резец, у которого луч Γ открытый, а промежуток Δ содержит верхний конец, но не содержит нижнего, причем $\zeta < \nu_0$ и $\tau_0 < \eta < \xi < n$, выглядит так, как изображено на рис. 1.

Точка $A = (\nu_0, \tau_0)$ называется острием или вершиной резца, а промежуток Δ — кромкой резца. Множества

$$\{ (\nu, \tau) : \tau = n, \; \nu \leqslant \nu_0 + \tau_0 - n\},$$
$$\{ (\nu, \tau) : \nu \leqslant \nu_0; \; \tau = \tau_0\}$$

и

$$\{ (\nu, \tau) : \nu + \tau = \nu_0 + \tau_0; \; \tau_0 \leqslant \tau \leqslant n\}$$

назовем соответственно верхней, нижней и косой границами резца.

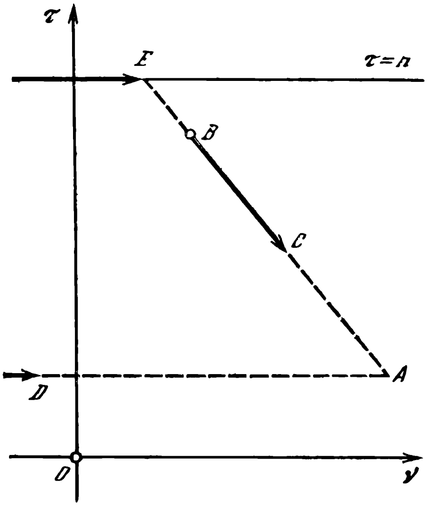

Рис. 1

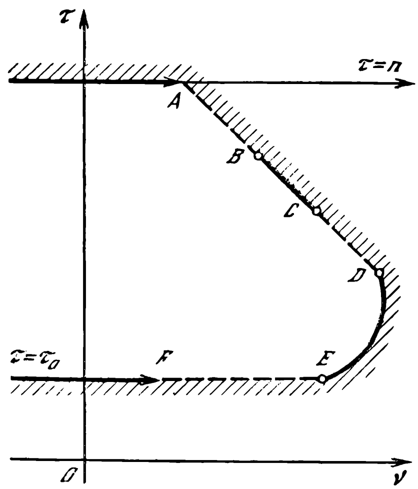

Рис. 2

Практически мы будем встречаться лишь со следующими типами резцов.

I т и п. Промежуток Δ не пустой и замкнутый, причем нижняя граница его совпадает с острием резца, а луч совпадает с нижней границей резца. Для резцов I типа будем употреблять сокращенный символ Δ $(\nu_0, \tau_0 \mid \xi)$, где ξ — ордината верхнего конца промежутка Δ.

II т и п. Промежуток Δ состоит из одной точки (ν_0, τ_0) (вершины резца), а луч Γ совпадает с нижней границей резца. Обозначение: Λ (ν_0, τ_0). Резец II типа является, очевидно, частным случаем резца I типа (промежуток Δ сводится к вершине резца).

III т и п. Промежуток Δ пуст, а луч Γ получается выбрасыванием вершины резца из нижней его границы. Обозначение: Λ $(\nu_0 - 0, \tau_0)$.

У п р а ж н е н и е. Построить функцию, для которой резец I типа Λ $(\nu_0, \tau_0 \mid \xi)$ служит областью существования ее нормы.

Полученные в леммах III.1—III.3 результаты сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а III.1. *Для того чтобы область, лежащая в полосе* $0 \leqslant \tau \leqslant n$, *была областью существования нормы функции* $\varphi(x)$ *из* $L_{p,\nu}$ *или из* $L_{p,\nu,1}$, *необходимо, чтобы она*

1) *была выпуклой;*

2) *вместе с любой принадлежащей ей точкой* (ν_0, τ_0) *содержала весь резец* Λ (ν_0,τ_0) *с острием в этой точке.*

Так как опорные прямые резца имеют «внешние» нормали, образующие с осью абсцисс углы, лежащие между $-\pi/2$ и $\pi/4$, то выпуклое множество, содержащее вместе с каждой точкой ν_0, τ_0 резец Λ (ν_0, τ_0), само не может обладать никакими опорными прямыми, кроме тех, у которых углы «внешних» нормалей с осью абсцисс лежат в промежутке $[-\pi/2, \pi/4]$.

Условия, которые мы перечислили, необходимы для областей существования основной и вспомогательной норм. Вопрос о том, каковы достаточные условия, т. е. для каких областей можно построить функцию именно с этой областью существования нормы, более сложный, и мы не будем на нем останавливаться

Стоит заметить еще одно обстоятельство. В тех случаях, когда областью существования нормы служит резец, из сходимости основного и вспомогательного интегралов в точке (ν_0, τ_0) не следует, вообще говоря, их сходимость ни в какой точке (ν_0, τ), кроме $\tau = \tau_0$. Это нетрудно объяснить. Дело в том, что при $p > p_0$ может утратиться локальная суммируемость функции $|\varphi(x)|^p$, а при $p < p_0$ интеграл $J_{p, \nu_0}(\varphi)$ может разойтись на бесконечности. Несложно построить пример функции $\varphi(x)$, для которой интеграл $J_{p, \nu_0}(\varphi)$ сходится лишь при $p = p_0$.

Мы видели выше, что особую роль на плоскости (ν, τ) играют прямые $\nu + \tau = \text{const}$. Прямую $\nu + \tau = 0$ мы выделим особо и по причинам, которые выяснятся ниже, назовем «опасной».

В общем случае область существования нормы на плоскости (ν, τ) имеет границу, состоящую из двух частей: луча, расположенного на прямой $\tau = n$, и выпуклой кривой, у которой нормали к опорным прямым образуют с осью ν угол, заключенный между $-\pi/2$ и $\pi/4$.

Строение множества точек области существования, расположенного на криволинейной части границы, исследовал М. М. Зарубин (см. [19—20]). Эти результаты здесь не приводятся.

Одна из возможных областей существования норм изображена на рис. 2. Ее граница, кроме луча, расположенного на прямой $\tau = n$, состоит из трех кусков: промежутка AD прямой $\nu + \tau = \text{const}$, выпуклой линии DE, у которой нормали к опорным прямым образуют с осью ν угол, заключенный между $-\pi/2$ и $\pi/4$, и луча $\tau = \tau_0$, $\nu < \nu_0$. На прямой AD ей может принадлежать отрезок BC, замкнутый, полуоткрытый или открытый. На линии DE норма существует на множестве, природы которого мы не касаемся. Наконец, на луче $\tau = \tau_0$, $\nu < \nu_0$ области сходимости принадлежит целый луч (открытый или замкнутый) с вершиной в точке F.

Упражнение. *Построить функцию, у которой область существования нормы представляет собой замкнутое множество, ограниченное прямыми* $\tau = \tau_0$, $\tau = n$ *и прямой, образующей с осью* ν *угол* α, *где* $0 < \alpha < 3\pi/4$.

§ 2. Теорема о выходе на постоянную

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, обладающую в R^n, $n > 1$, градиентной мажорантой $\psi(x)$. Введем в R^n сферические координаты (r, θ), связанные с декартовыми следующим равенством:

$$r = |x| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}, \qquad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) = x/r.$$

Функцию $\varphi(x(r, \theta)) = \varphi(r\theta_1, \ldots, r\theta_n)$ обозначим для краткости $\varphi(r, \theta)$. Нас будет интересовать поведение $\varphi(r, \theta)$ при $r \to \infty$ в том случае, когда функция $\psi(r, \theta)$ принадлежит весовым пространствам.

Теорема III.2. *Пусть* $n > 1$, $\tau = p/n$ *и* $\varphi(x) \ll \psi(x)$ *в* R^n. *Если* $\psi(x)$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

$$\begin{aligned} &1)\ \psi(x) \in L_{p,\nu} \cup L_{p,\nu,\varkappa}, \quad \tau + \nu > 1, \quad 1 \leqslant p < \infty; \\ &2)\ \psi(x) \in L_{p,\nu,\varkappa}, \quad \tau + \nu = 1, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad \varkappa < -1/p; \\ &3)\ \psi(x) \in L_{\infty,\nu}, \quad \nu > 1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

то найдется постоянная C *такая, что*

$$\lim_{r \to \infty} \left(\int_\sigma |\varphi(r, \theta) - C|^p \, d\theta \right)^{1/p} = 0.$$

Здесь σ — *сфера единичного радиуса в* R^n.

(Впервые эта теорема была доказана С. В. Успенским при $\varkappa = 0$, $1 < p < \infty$ [47].)

Доказательство. Во всех трех случаях рассуждения и выкладки проводятся одинаково, поэтому рассмотрим подробно лишь тот из них, в котором $\psi \in L_{p,\nu}$ и $\tau + \nu > 1$, $1 < p < \infty$.

Пользуясь неравенством Гёльдера, оценим при $1 \leqslant a < b$ следующий интеграл:

$$\int_\sigma \left| \int_a^b \psi(r, \theta) \, dr \right|^p d\theta \leqslant \int_\sigma \left(\int_a^b \psi(r, \theta)^p |r^{\cdot}|^{\nu p} r^{n-1} \, dr \right) d\theta \times \\ \times \left(\int_a^b |r^{\cdot}|^{-\nu p'} r^{(1-n)/(p-1)} \, dr \right)^{p-1}. \tag{2.2}$$

Второй множитель в этом неравенстве ограничен сверху равномерно по a, b; $a \geqslant 1$. В самом деле, так как

$$-\nu p' + (1 - n)/(p - 1) = -p' (\nu + \tau - 1/p) < -p'/p' = -1,$$

то при $1 \leqslant a \leqslant b$ имеет место

$$\int_a^b |r^{\cdot}|^{-\nu p'} r^{(1-n)/(p-1)} \, dr \leqslant \int_1^\infty r^{-(1+\varepsilon)} dr < +\infty,$$

где $\varepsilon > 0$. Поэтому из (2.2) следует

$$\int_\sigma \left| \int_a^b \psi(r, \theta) \, dr \right|^p d\theta \leqslant K \int_{a \leqslant |x| \leqslant b} |x^{\cdot}|^{\nu p} \psi(x)^p \, dx. \tag{2.3}$$

Пусть $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема. Так как $\varphi \ll \psi$ в R^n, то при $0 \leqslant r < \infty$, $|\theta| = 1$ имеем

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) \right| \leqslant \psi(r, \theta).$$

Отсюда и из (2.3) получаем

$$\int\limits_{\sigma} |\varphi(a, \theta) - \varphi(b, \theta)|^p \, d\theta = \int\limits_{\sigma} \Big| \int\limits_{a}^{b} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta)\, dr \Big|^p d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\sigma} \Big| \int\limits_{a}^{b} \psi(r, \theta)\, dr \Big|^p d\theta \leqslant K \, \| \psi \mid L_{p,\,\nu}(a \leqslant |x| \leqslant b) \|^p. \qquad (2.4)$$

Эта формула справедлива для любой φ, имеющей ψ градиентной мажорантой. В самом деле, по определению градиентной мажоранты функция $\varphi(x)$ имеет все обобщенные производные первого порядка. Учитывая, что переход о декартовых координат к сферическим (r, θ) является гладкой заменой, получим из следствия 2.3 гл. II, что $\varphi(r, \theta) \in \hat{C}(r)\, L_p(\sigma)$. Тем самым интеграл, стоящий первым в цепочке неравенств (2.4), действительно имеет смысл. Значит, (2.4) справедливо для всех $\varphi : \varphi \leqslant \psi$.

Из (2.4) следует, что при $r \to \infty$ семейство функций $\{\varphi(r, \theta) \in L_p(\sigma)\}$ фундаментально в $L_p(\sigma)$. В силу полноты $L_p(\sigma)$ в нем существует предел рассматриваемого семейства, т. е. такая функция $C(\theta) \in L_p(\sigma)$, что при $r \to \infty$

$$\| \varphi(r, \theta) - C(\theta) \mid L_p(\sigma) \| \to 0.$$

Устремив теперь в (2.4) верхний предел b к бесконечности, получим

$$\| \varphi(a, \theta) - C(\theta) \mid L_p(\sigma) \| \leqslant K \| \psi \mid L_{p,\nu}(|x| \geqslant a) \|. \qquad (2.5)$$

Покажем, что $C(\theta)$ не зависит от θ, т. е. постоянна.

Образуем средние функции $C_h(\theta)$ и $\varphi_h(r, \theta)$ по следующим формулам:

$$C_h(\theta) = \frac{1}{\varkappa h^{n-1}} \int\limits_{\sigma} C(\theta') \, \omega\Big(\frac{|\theta - \theta'|}{h}\Big) d\theta',$$

$$\varphi_h(r, \theta) = \frac{1}{\varkappa h^{n-1}} \int\limits_{\sigma} \varphi(r, \theta') \, \omega\Big(\frac{|\theta - \theta'|}{h}\Big) d\theta'. \qquad (2.6)$$

Здесь $h \in (0, 1)$, $\omega(\xi)$ — бесконечно дифференцируемое ядро усреднения (см. § 4 гл. I) и $\varkappa$ — положительная постоянная. Пусть $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, оценим $\Big\| \dfrac{\partial C_h(\theta)}{\partial \theta_j} \mid L_p(\sigma) \Big\|$. Пользуясь определением (2.6), неравенством Гёльдера и оценкой (2.5), получим

$$\int\limits_{\sigma} \Big| \frac{\partial}{\partial \theta_j}(\varphi_h(r, \theta) - C_h(\theta)) \Big|^p d\theta \leqslant \frac{1}{\varkappa^p h^{np}} \Big(\int\limits_{\sigma} |\varphi(r, \theta') -$$

$$- C(\theta')|^p d\theta' \Big) \times \int\limits_{\sigma} \Big(\int\limits_{\sigma} \Big| \omega'\Big(\frac{|\theta - \theta'|}{h}\Big) \Big|^{p'} d\theta' \Big)^{p/p'} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant K(h) \, \| \varphi(r, \theta) - C(\theta) \mid L_p(\sigma) \|^p \leqslant$$

$$\leqslant K(h) \, \| \psi \mid L_{p,\,\nu}(|x| \geqslant r) \|^p. \qquad (2.7)$$

Здесь $K(h)$ не зависит от r, $r \geqslant 1$. Далее,

$$\int_\sigma \left| \frac{\partial}{\partial \theta_j} \varphi_h(r, \theta) \right|^p d\theta \leqslant Cr^p \sum_{i=1}^n \int_\sigma \left| \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial x_i} \right|^p d\theta \leqslant Cr^p \int_\sigma |\psi(r, \theta)|^p d\theta,$$

$$\int_\sigma \left| \frac{\partial C_h(\theta)}{\partial \theta_j} \right|^p d\theta \leqslant K(h) \left[\int_\sigma \left| \frac{\partial \varphi_h}{\partial \theta_j}(r, \theta) \right|^p d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_\sigma \left| \frac{\partial}{\partial \theta_j} (\varphi_h(r, \theta) - C(\theta)) \right|^p d\theta \right].$$

Подставив во второе из этих неравенств первое и оценку (2.7), получим при любом $r \geqslant 1$:

$$\int_\sigma \left| \frac{\partial C_h(\theta)}{\partial \theta_j} \right|^p d\theta \leqslant Kr^p \int_\sigma |\psi(r, \theta)|^p d\theta + K \| \psi \|_{p, \nu}(|x| \geqslant r) \|^p. \tag{2.8}$$

Левая часть этого неравенства равна нулю. Предположим противное, тогда найдется такое число R, что при $r \geqslant R$

$$K \| \psi | L_{p, \nu}(|x| \geqslant r) \|^p \leqslant \frac{1}{2} \int_\sigma \left| \frac{\partial C_h(\theta)}{\partial \theta_j} \right|^p d\theta.$$

Для таких r получим из (2.8)

$$r^{-p} \int_\sigma \left| \frac{\partial C_h(\theta)}{\partial \theta_j} \right|^p d\theta \leqslant 2K \int_\sigma |\psi(r, \theta)|^p d\theta.$$

Домножим обе части этого неравенства на $r^{\nu p+n-1}$ и проинтегрируем по r, изменяющемуся от R до R_0, $R_0 > R$. В результате получим

$$\int_R^{R_0} r^{\nu p+n-1-p} dr \int_\sigma \left| \frac{\partial C_h(\theta)}{\partial \theta_j} \right|^p d\theta \leqslant K \int_R^{R_0} \int_\sigma \psi(r, \theta)^p d\theta (r^{\cdot})^{\nu p} r^{n-1} dr =$$

$$= K \| \psi | L_{p, \nu}(R \leqslant |x| \leqslant R_0) \|^p. \tag{2.9}$$

Так как $\nu p + n - 1 - p = (\nu + \tau) p - p - 1 > -1$, то

$$\int_R^{R_0} r^{\nu p+n-1-p} dr \geqslant \int_R^{R_0} \frac{1}{r} dr = \ln R_0 - \ln R.$$

Переходя в (2.9) к пределу при $R_0 \to \infty$, приходим к противоречию: правая часть остается ограниченной, а левая стремится к бесконечности. Следовательно, сделанное предположение неверно, т. е.

$$\int_\sigma \left| \frac{\partial C_h(\theta)}{\partial \theta_j} \right|^p d\theta = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тем самым $C_h(\theta)$ постоянна по θ. Обозначим ее через $A(h)$. При $h \to 0$ семейство $\{A(h) \mid h > 0\}$ фундаментально, так как

$$|A(h_2) - A(h_1)| \leqslant \frac{1}{|\sigma|} \left| \int\limits_{\sigma} (C_{h_2}(\theta) - C_{h_1}(\theta))\, d\theta \right| \leqslant$$
$$\leqslant K \left(\int\limits_{\sigma} |C_{h_2}(\theta) - C_{h_1}(\theta)|^p\, d\theta \right)^{1/p} \to 0, \quad h_1, h_2 \to 0.$$

Значит, существует постоянная $C = \lim\limits_{h \to 0} A(h)$. Вспоминая, что $\| C_h(\theta) - C(\theta) \mid L_p(\sigma) \| \to 0$ при $h \to 0$ [1], видим, что $C(\theta) = C$, т. е. постоянна. Теорема III.2 доказана полностью.

Мы установили, что в условиях теоремы III.2 функция $\varphi(r, \theta)$ стремится при $r \to \infty$ к постоянной как элемент $L_p(\sigma)$. Однако $\varphi(r, \theta)$ не обязана стремиться к этому пределу по всем направлениям.

Пример. Пусть $\nu + \tau > 1$ и $1 < \tau < n$. Рассмотрим последовательность $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ функций, определяемых равенствами

$$\varphi_k(x) = \chi(x \mid \uparrow c_k, \mu_k) = \omega(|x - \uparrow c_k| / \mu_k \mid \uparrow c_k|).$$

Здесь $\uparrow c_k = \uparrow ((c_1)^k, 0, \ldots, 0)$ — вектор, параллельный оси x_1, число $c_1 > 1$, число $\mu_k = (\mu_1)^k$, где $\mu_1 \in (0, 1)$, функция $\omega(\xi)$ — финитная бесконечно дифференцируемая с носителем в промежутке $|\xi| \leqslant 1$, $\omega(0) = 1$. Числа μ_1, c_1 подчиним неравенству

$$0 < \mu_1 < \min(1/c_1, 1/c_1^{\lambda}) < 1, \tag{2.10}$$

где $\lambda = (\nu + \tau - 1)/(\tau - 1) > 0$ в силу условий на ν, τ.

Носитель $\varphi_k(x)$, очевидно, лежит в шаре с центром в $\uparrow c_k$ и радиуса $R_k = \mu_k \mid \uparrow c_k \mid$. Ясно, что $R_k = (c_1\mu_1)^k \to 0$ при $k \to \infty$. Для точек x из носителя $\varphi_k(x)$ имеет место оценка $|x^{\cdot}| \leqslant A \mid \uparrow c_k \mid$, где постоянная A не зависит от номера k, $k \geqslant 1$. Пользуясь этим, а также ограниченностью производных функции $\omega(\xi)$, проведем выкладку:

$$\| \varphi_k \mid L^{(1)}_{p,\nu} \|^p = \| T_1(x \mid \varphi_k) \mid L_{p,\nu} \|^p =$$
$$= \int\limits_{|x - \uparrow c_k| \leqslant \mu_k |\uparrow c_k|} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \omega(|x - \uparrow c_k| / \mu_k \mid \uparrow c_k|) \right)^2 \right\}^{p/2} |x^{\cdot}|^{\nu p}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant A \mid \uparrow c_k|^{\nu p} (\mu_k \mid \uparrow c_k|)^{n-p} \int \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \omega(|y|) \right)^2 \right\}^{p/2} dy \leqslant$$
$$\leqslant K c_1^{k(\nu+\tau-1)p} \mu_1^{k(\tau-1)p} = K (c_1^{\lambda}\mu_1)^{(\tau-1)kp} = K q^{kp}. \tag{2.11}$$

Здесь K не зависит от номера k, $k \geqslant 1$, а $q < 1$ в силу (2.10).

[1] При доказательстве этого соотношения следует полагать, что $C(\theta)$ доопределена нулем на некоторой окрестности σ.

Рассмотрим $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)$. Для любого ограниченного множества Ω, очевидно, найдется номер k_0, начиная с которого пересечение Ω с носителем $\varphi_k(x)$ пусто. Поэтому ряд сходится поточечно в любой ограниченной области. Далее, из (2.11) следует

$$\|\varphi \mid L_{p,\nu}^{(1)}\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k \mid L_{p,\nu}^{(1)}\| \leqslant K \sum_{k=1}^{\infty} q^k < +\infty.$$

Таким образом, $\varphi \leqslant \psi = T_1(x \mid \varphi) \in L_{p,\nu}$. Вспомним, что радиус R_k шара, содержащего носитель φ_k, стремится к нулю при $k \to \infty$. Поэтому для любого луча θ, не совпадающего с полуосью $\uparrow x_i = \{x_1, 0, \ldots, 0\}$, $x_1 \geqslant 0$, существует предел $\varphi(r, \theta)$ при $r \to \infty$, равный, очевидно, нулю. Если же $\theta = (\theta_1, 0, \ldots, 0)$, то $\varphi(r, \theta)$ не имеет предела при $r \to \infty$.

Построенный пример легко обобщить, если вместо фиксированного направления (оси $\uparrow x_1$) взять конечное или счетное множество направлений и, построив контрпример для каждого из них, результаты просуммировать.

§ 3. Теоремы вложения при постоянном p

Получим серию лемм, необходимых для доказательства основной теоремы о плотности финитных функций из § 4. Всюду до конца главы будем предполагать, что $\tau = p/n$, $1 < p < \infty$.

Л е м м а III.4. *Пусть* $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, *причем* $\psi \in L_{p,\nu+1}$. *Если точка* (ν, τ) *лежит левее «опасной» прямой, т. е.* $\nu + \tau < 0$, *то* $\varphi \in L_{p,\nu}$ *и при этом справедлива оценка*

$$\|\varphi \mid L_{p,\nu}\| \leqslant K\Big[\Big|\int_{Q_2}\varphi(x)\,dx\Big|^p + \|\psi \mid L_{p,\nu+1}\|^p\Big]^{1/p}. \tag{3.1}$$

Здесь $Q_2 = \{x \in R^n \colon |x_j| \leqslant 1, j = 1, \ldots, n\}$ — *куб.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим произвольную функцию φ из $L_{p,\nu}$ в виде суммы $\varphi = \varphi^* + A$, где

$$A = \int_{Q_2}\varphi(x)\,dx, \qquad \int_{Q_2}\varphi^*(x)\,dx = 0. \tag{3.2}$$

При $\nu + \tau < 0$ любая постоянная, в частности A, лежит в $L_{p,\nu}$. Поэтому достаточно оценить $\|\varphi^* \mid L_{p,\nu}\|$. Разложим основной интеграл от φ^* в сумму интеграла по шару $|x| \leqslant 1$ и интеграла по внешности шара $|x| \geqslant 1$:

$$J_{p,\nu}(\varphi^*) = \bar{J}_{p,\nu}^{(1)}(\varphi^*) + J_{p,\nu}^{(1)}(\varphi^*). \tag{3.3}$$

Если ввести сферические координаты (r, θ), $|\theta| = 1$ и обозначить

$$\Phi_p^*(r) = \Big[\int_{\sigma}|\varphi^*(r, \theta)|^p\,d\theta\Big]^{1/p} \tag{3.4}$$

(σ — сфера в R^n единичного радиуса), то интегралы из (3.3) можно переписать в виде

$$\bar{J}^{(1)}_{p,\nu}(\varphi^*) = \int_0^1 |\Phi_p(r)|^p\, |r^{\cdot}|^{\nu p} r^{n-1}\, dr,$$
$$J^{(1)}_{p,\nu}(\varphi^*) = \int_1^\infty |\Phi_p^*(r)|^p\, |r^{\cdot}|^{\nu p} r^{n-1}\, dr. \tag{3.5}$$

Оценим их. Вес $|x^{\cdot}|^{\nu p}$ ограничен в шаре $|x| \leqslant 1$, а этот шар вложен в Q_2. Поэтому

$$\bar{J}^{(1)}_{p,\nu}(\varphi^*) \leqslant K \int_{|x|\leqslant 1} |\varphi^*(x)|^p\, dx \leqslant K \int_{Q_2} |\varphi^*(x)|^p\, dx.$$

Воспользуемся последовательно (II.2.10), (3.2) и условием, что $\varphi^* \lll \psi$, тогда получим

$$\int_{Q_2} |\varphi^*(x)|^p\, dx \leqslant K \int_{Q_2} |\psi(x)|^p\, dx \leqslant K \int |x^{\cdot}|^{(\nu+1)p}\, |\psi(x)|^p\, dx.$$

Таким образом, имеем оценку

$$\bar{J}^{(1)}_{p,\nu}(\varphi^*) \leqslant J_{p,\,\nu+1}(\psi). \tag{3.6}$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi_p(r) = \Big(\int_\sigma |\psi(r, \theta)|^p\, d\theta\Big)^{1/p}. \tag{3.7}$$

В примере 3 § 5 гл. II установлено, что из $\varphi^* \lll \psi$ вытекает отношение $\Phi_p^*(r) \lll \Psi_p(r)$. Поэтому

$$\Phi_p^*(r) \leqslant \Phi_p^*(1) + \int_0^r \Psi_p(t)\, dt.$$

Обозначив интеграл, стоящий в этом неравенстве справа, через $Q_p(r)$, подставим эту оценку в определение $J^{(1)}_{p,\nu}(\varphi^*)$. Получим

$$J^{(1)}_{p,\nu}(\varphi^*) \leqslant \int_1^\infty |\Phi_p^*(1) + Q_p(r)|^p\, |r^{\cdot}|^{\nu p} r^{n-1}\, dr.$$

Далее, так как $|\Phi_p^*(1) + Q_p(r)|^p \leqslant K(|\Phi_p^*(1)|^p + |Q_p(r)|^p)$ и $Q_p(r) \geqslant 0$, то

$$J^{(1)}_{p,\nu}(\varphi^*) \leqslant K\Big[\int_1^\infty |\Phi_p^*(1)|^p\, |r^{\cdot}|^{\nu p+n-1} dr + \int_1^\infty Q_p(r)^p\, |r^{\cdot}|^{\nu p+n-1} dr\Big]. \tag{3.8}$$

Для оценки второго слагаемого в (3.8) воспользуемся следующей леммой.

Лемма II.5 (Харди). *Пусть $f(t)$ — неотрицательная суммируемая функция, определенная на* $(0, \infty)$. *Если*

$$F(r)=\int_0^r f(t)\,dt, \quad \int_0^\infty t^{-\lambda}(tf(t))^p \frac{dt}{t} < +\infty, \tag{3.9}$$

где $\lambda > 0$, *то при* $b > 0$ *имеет место неравенство*

$$\int_0^b t^{-\lambda}F(t)^p \frac{dt}{t} \leqslant \left(\frac{p}{\lambda}\right)^p \int_0^b t^{-\lambda}(tf(t))^p \frac{dt}{t}. \tag{3.10}$$

Доказательство этой леммы дано в § 5 (следствие 5.1). Возьмем $\lambda = -(\nu+\tau)p$, $F(r) = Q_p(r)$, $f(t) = \psi_p(t)$. Из условия, что $\psi \in L_{p,\nu+1}$, следует (3.9). Поэтому

$$\int_1^\infty |Q_p(r)|^p (r^{\cdot})^{\nu p+n-1}dr \leqslant K\int_0^\infty Q_p(r)^p r^{-\lambda}\frac{dr}{r} \leqslant$$
$$\leqslant K\int_0^\infty r^{-\lambda}(r\psi_p(r))^p \frac{dr}{r} \leqslant KJ_{p,\nu+1}(\psi). \tag{3.11}$$

Рассмотрим теперь шар $B = \{x \in R^n : |x| \leqslant \sqrt{n}\}$, содержащий, очевидно, куб Q_2. Применим к φ^* неравенство (II.2.10), тогда, учитывая условие (3.2), получим

$$\|\varphi^{(*)} | L_p(B)\| \leqslant K\left(\left|\int_{Q_2}\varphi^*(x)\,dx\right| + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^n \|D_j\varphi^* | L_p(B)\|\right) = K\sum_{j=1}^n \|D_j\varphi^* | L_p(B)\|.$$

В сферических координатах шар B состоит из точек (r, θ) таких, что $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{n}$, $\theta \in \sigma$, и, в частности, содержит точку $(1, \theta)$, $\theta \in \sigma$. Имея это в виду и пользуясь полученной оценкой $\|\varphi^* | L_p(B)\|$, выводим из (II.2.25):

$$|\Phi_p^*(1)|^p \leqslant K\sum_{j=1}^n \|D_j\varphi^* | L_p(B)\|^p \leqslant K\int_{|x|\leqslant\sqrt{n}} T(x|\varphi^*)^p\,dx \leqslant$$
$$\leqslant K\int |x^{\cdot}|^{(\nu+1)p}\psi(x)^p\,dx \leqslant KJ_{p,\nu+1}(\varphi). \tag{3.12}$$

Собирая вместе оценки (3.8), (3.11) и (3.12), а также учитывая, что при $\nu p + n - 1 < -1$ интеграл $\int_1^\infty |r^{\cdot}|^{\nu p+n-1}dr$ сходится, получим, что $J^{(1)}_{p,\nu}(\varphi^*) \leqslant KJ_{p,\nu+1}(\psi)$.

Вместе с (3.3) и (3.6) это приводит к оценке

$$\| \varphi^* \mid L_{p,\nu} \| \leqslant K \| \psi \mid L_{p,\nu+1} \|.$$

Отсюда и из определения φ^* следует (3.1). Лемма доказана.

Лемма III. 6. *Пусть* $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, *причем* $\psi \in L_{p,\nu+1,1}$. *Если точка* (ν, τ) *лежит левее «опасной» прямой, т. е.* $\nu + \tau < 0$, *то* $\varphi \in L_{p,\nu,1}$ *и при этом справедлива оценка*

$$\| \varphi \,|\, L_{p,\nu,1} \| \leqslant K \left\{ \left| \int\limits_{Q_2} \varphi(x)\, dx \right|^p + \| \psi \,|\, L_{p,\nu+1,1} \|^p \right\}^{1/p}.$$

Здесь $Q_2 = \{x \in R^n : \ |x_j| \leqslant 1, j = 1, \ldots, n\}$ — *куб.*

Доказательство почти дословно повторяет вывод леммы III.4. Разница состоит лишь в том, что вместо леммы III.5 нужно воспользоваться следующей леммой:

Лемма III.7 (*Харди*). *Пусть* $f(t)$ — *неотрицательная суммируемая функция на* $(0, \infty)$. *Если*

$$F(r) = \int\limits_0^r f(t)\, dt, \qquad \int\limits_0^b t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t)\, [tf(t)]^p \frac{dt}{t} < \infty, \tag{3.13}$$

где $\lambda > 0$, $b > 0$, *то имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^b t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t)\, F(t)^p \frac{dt}{t} \leqslant K \int\limits_0^b t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t)\, (tf(t))^p \frac{dt}{t}. \tag{3.14}$$

Здесь K *не зависит от* f *и* b.

Доказательство (3.14) дано в § 5 (следствие 5.3).

Лемма III.8 *Пусть* $\varphi \leqslant \psi$, *причем* $\psi \in L_{p,\nu+1}$, *а точка* (ν, τ) *лежит на «опасной» прямой, т. е.* $\nu + \tau = 0$. *Тогда* $\varphi \in L_{p,\nu+1}$ *и при этом справедлива оценка*

$$\| \varphi \,|\, L_{p,\nu,1} \| \leqslant K \left\{ \left| \int\limits_{Q_2} \varphi(x)\, dx \right|^p + \| \psi \,|\, L_{p,\nu+1} \|^p \right\}^{1/p}.$$

Здесь $Q_2 = \{x \in R^n : |x_j| \leqslant 1, j = 1, \ldots, n\}$ — куб.

Доказательство почти не отличается от вывода леммы III.4. При оценке $J_{p,\nu,1}(\varphi^*)$ следует воспользоваться еще одной леммой, вытекающей из неравенства Харди.

Лемма III.9. *Пусть* $f(t)$ — *неотрицательная суммируемая функция на* $(0, \infty)$. *Если*

$$F(r) = \int\limits_1^r f(t)\, dt, \qquad \int\limits_1^\infty (tf(t))^p \frac{dt}{t} < \infty, \tag{3.15}$$

то имеет место неравенство

$$\int\limits_1^\infty \ln^{-p} t F(t)^p \frac{dt}{t} \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int\limits_1^\infty (tf(t))^p \frac{dt}{t}. \tag{3.16}$$

Эта лемма доказана в § 5 (следствие 5.2).

Рассмотрим, наконец, случай, когда $\nu+\tau>0$, а функция φ имеет градиентную мажоранту ψ из $L_{p,\nu+1}$. Вообще говоря, нельзя утверждать при этом, что $\varphi \in L_{p,\nu}$. Например, тождественная постоянная не лежит в $L_{p,\nu}$.

Лемма III.10. *Пусть* $\varphi \leqslant \psi$, *причем* $\psi \in L_{p,\nu+1}$. *Если точка* (ν, τ) *лежит правее «опасной» прямой, т. е.* $\nu+\tau>0$, *то найдется такая постоянная* c, *что* $\varphi^* = \varphi - c \in L_{p,\nu}$, *и при этом* $\| \varphi^* \mid L_{p,\nu} \| \leqslant K \| \psi \mid L_{p,\nu+1} \|$. *Постоянная* c *удовлетворяет условию*

$$\lim_{r\to\infty} \| \varphi(r, \theta) - c \mid L_p(\theta) \| = 0. \tag{3.17}$$

Доказательство. Функция φ, очевидно, удовлетворяет условию теоремы III.2, согласно которой постоянная c со свойством (3.17) действительно существует. Оценим интеграл $J_{p,\nu}(\varphi^*)$, разложив его в сумму по формуле (3.3)

$$J_{p,\nu}(\varphi^*) = \bar{J}^{(1)}_{p,\nu}(\varphi^*) + J^{(1)}_{p,\nu}(\varphi^*). \tag{3.18}$$

Промажорируем сначала второе слагаемое. Введем функции $\Phi_p^*(r)$ и $\Psi_p(r)$, связанные с φ^* и ψ равенствами (3.4), (3.7). Из (3.17) следует, что $\Phi_p^*(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Отсюда получаем

$$\Phi_p^*(r) = \int_r^\infty (\Phi_p^*(t))'\, dt.$$

Теперь нам потребуется следующая лемма.

Лемма III.11. *Пусть* $f(t)$ — *неотрицательная суммируемая функция, определенная на* $(1, \infty)$. *Если*

$$F(r) = \int_r^\infty f(t)\, dt, \qquad \int_1^\infty t^\lambda (tf(t))^p \frac{dt}{t} < +\infty,$$

где $\lambda > 0$, *то имеет место оценка*

$$\int_1^\infty t^\lambda F(t)^p \frac{dt}{t} \leqslant \left(\frac{p}{\lambda}\right)^p \int_1^\infty t^\lambda (tf(t))^p \frac{dt}{t}. \tag{3.19}$$

Эта лемма также доказана в § 5 (следствие 5.4).

Возьмем $F(t) = \Phi_p^*(t)$, $f(t) = (\Phi_p^*(t))'$, $\lambda = (\nu+\tau)p > 0$, тогда из условия, что $\Phi_p^*(r) \leqslant \Psi_p(r)$ и (3.19), получим

$$\int_1^\infty r^{(\nu+\tau)p} (r(\Phi_p^*(r))')^p \frac{dr}{r} \leqslant \int_1^\infty r^{(\nu+\tau)p} (r\Psi_p(r))^p \frac{dr}{r} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|x|\geqslant 1} \Psi_p(x)^p |x|^{(\nu+1)p} dx = \| \psi \mid L_{p,\nu+1}(|x| \geqslant 1) \|^p.$$

$$J^{(1)}_{p,\nu}(\varphi^*) \leqslant K \int_1^\infty \Phi_p^*(r)^p r^{\nu p+n-1} dr = K \int_1^\infty r^{(\nu+\tau)p} \Phi_p^*(r)^p \frac{dr}{r} \leqslant$$

$$\leqslant K \int_1^\infty r^{(\nu+\tau)p} (r (\Phi_p^* (r))')^p \frac{dr}{r} \leqslant K \| \psi \mid L_{p,\,\nu+1} (|x| \geqslant 1) \|^p.$$

Последнее неравенство перепишем по-иному:

$$\| (\varphi^*) \mid L_{p,\,\nu} (|x| \geqslant 1) \| \leqslant K \| \psi \mid L_{p,\,\nu+1} (|x| \geqslant 1) \|. \tag{3.20}$$

Промажорируем теперь $\bar{J}^{(1)}_{p,\,\nu} (\varphi^*)$. Пусть $R > 1$ и Q — куб, лежащий в шаровом слое $\{x \in R^n\colon 1 \leqslant |x| \leqslant R\}$, тогда

$$\bar{J}^{(1)}_{p,\,\nu} (\varphi^*) \leqslant \| \varphi^* \mid L_{p,\,\nu} (|x| \leqslant R) \|^p \leqslant K \| \varphi^* \mid L_p (|x| \leqslant R) \|^p.$$

Продолжим эту оценку, используя (II.2.10):

$$\bar{J}^{(1)}_{p,\,\nu} (\varphi^*) \leqslant K [| \Pi\varphi^* |^p + \| \varphi^* \mid L_p^{(1)} (|x| \leqslant R \|^p]. \tag{3.21}$$

Здесь $\Pi\varphi^* = \int\limits_Q \varphi^* (x)\, dx / |Q|$. Очевидно, что

$$\| \varphi^* \mid L_p^{(1)} (|x| \leqslant R) \| \leqslant K \| \psi \mid L_p (|x| \leqslant R) \| \leqslant \\ \leqslant K \| \psi \mid L_{p,\,\nu+1} (|x| \leqslant R) \|. \tag{3.22}$$

Далее, последовательно используя неравенство Гёльдера, вложение $Q \in \{x \in R^n\colon |x| \geqslant 1\}$, а также оценку (3.20), получим

$$| \Pi\varphi^* | \leqslant \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q | \varphi^* (x) |\, dx \leqslant \frac{1}{|Q|} \Big(\int\limits_Q | \varphi^* (x) |^p \, |x^{\cdot}|^{\nu p}\, dx \Big)^{1/p} \times \\ \times \Big(\int\limits_Q |x^{\cdot}|^{-\nu p'}\, dx \Big)^{1/p'} \leqslant K \| \varphi^* \mid L_{p,\,\nu} (Q) \| \leqslant \\ \leqslant K \| \varphi^* \mid L_{p,\,\nu} (|x| \geqslant 1) \| \leqslant K \| \psi \mid L_{p,\,\nu+1} (|x| \geqslant 1) \|. \tag{3.23}$$

Объединяя (3.20)—(3.23), имеем $\| \varphi^* \mid L_{p,\nu} \| \leqslant K \| \psi \mid L_{p,\,\nu+1} \|$. Лемма доказана.

§ 4. Плотность финитных функций в $W^{(l)}_{p,\,\nu}$

Рассмотрим в R^n функцию $\varphi (x)$, обобщенные производные порядка l которой принадлежат $L_{p,\nu}$. Множество всех таких функций, очевидно, образует векторное пространство, на любом элементе φ которого конечен следующий выпуклый функционал:

$$\| \varphi \mid L^{(l)}_{p,\,\nu} \| = \Big(\int |x^{\cdot}|^{\nu p} \, | T_l (x \mid \varphi) |^p \, dx \Big)^{1/p}. \tag{4.1}$$

Будем обозначать это пространство $W^{(l)}_{p,\,\nu}$. Совокупность функций φ из $W^{(l)}_{p,\,\nu}$, на которых функционал (4.1) зануляется, совпадает с пространством $\boldsymbol{P}_{l-1}$ полиномов степени $\leqslant (l-1)$. Пусть $\Pi : W^{(l)}_{p,\,\nu} \to \boldsymbol{P}_{l-1}$ — проектор, и $\| \cdot \mid P_{l-1} \|$ — какая-нибудь норма в $\boldsymbol{P}_{l-1}$. Определим норму произвольной φ из $W^{(l)}_{p\nu}$ равенством

$$\| \varphi \mid W^{(l)}_{p,\,\nu} \| = (\| \Pi\varphi \mid P_{l-1} \|^p + \| \varphi \mid L^{(l)}_{p,\,\nu} \|^p)^{1/p}.$$

Выберем П таким образом, чтобы $\Pi\varphi = 0$ для функций φ, равных нулю в шаре $|x| \leqslant 1$. Такие проекторы уже рассматривались в § 3 гл. II.

Лемма III.12. *Любую функцию* φ *из* $W^{(l)}_{p,\nu}$, *принадлежащую пересечению* $L^{(l-j)}_{p,\nu-j}$ *при* $j = 1, 2, \ldots, l$ *или пересечению* $L^{(l-j)}_{p,\nu-j,1}$ *при* $j = 1, 2, \ldots, l$, *можно сколько угодно точно приблизить финитной функцией из* $W^{(l)}_{p,\nu}$.

Доказательство. Определим сначала «срезывающую» функцию $\psi_\eta(r)$. Пусть $\eta > l$, $\omega(\cdot)$ — функция из $\mathring{C}^{(\infty)}(R)$, определенная равенством (I.4.7). Положим

$$\psi_\eta(r) = \begin{cases} \omega(\ln r/\ln\eta), & \text{если } \nu \geqslant 1; \\ 1, & \text{если } \nu < 1. \end{cases}$$

Функция $\psi_\eta(r)$ равна 1 при $r \leqslant \eta^{1/4}$, зануляется при $r \geqslant \eta^{3/4}$ и принимает значения между 0 и 1 при $\eta^{1/4} \leqslant r \leqslant \eta^{3/4}$.

Пусть φ принадлежит $W^{(l)}_{p,\nu}$ и $\|\varphi \mid L^{(l-j)}_{p,\nu-j,1}\| < +\infty$ при $j = 1, 2, \ldots, l$. Из леммы III.1 следует, что достаточно рассмотреть только этот случай. Докажем, во-первых, что произведение $\varphi_\eta(x) = \psi_\eta(|x|)\varphi(x)$ является финитным элементом $W^{(l)}_{p,\nu}$ и, во-вторых, что

$$\lim_{\eta\to\infty} \| D^\alpha(\varphi - \varphi_\eta) \mid L_{p,\nu}\| = 0, \quad |\alpha| = l. \tag{4.2}$$

Рассмотрим производные от функции $\psi_n(r)$. Имеем, очевидно, что $\psi^{(k)}_\eta(r) = 0$ при $r < \eta^{1/4}$ и при $r > \eta^{3/4}$. Далее, при $\eta^{1/4} \leqslant r \leqslant \eta^{3/4}$ имеет место оценка

$$\left| \psi^{(k)}_\eta(r) - \frac{(-1)^{k-1}}{r^k} \frac{(k-1)!}{\ln\eta} \omega'\left(\frac{\ln r}{\ln\eta}\right) \right| \leqslant K \frac{1}{r^k \ln^2\eta},$$

и, значит, при тех же r,

$$|\psi^{(k)}_\eta(r)| \leqslant \frac{K}{r^k \ln\eta} \leqslant \frac{K}{r^k(1+\ln r)}.$$

Здесь постоянная K не зависит от r, η. В частности, отсюда следует, что при $k = 1, 2, \ldots, l, l+1$

$$T_k(x \mid \psi_\eta) \leqslant K/(|x^\cdot|^k (1 + \ln|x^\cdot|)). \tag{4.3}$$

Пусть $|\alpha| = l$, тогда

$$D^\alpha\varphi_\eta = D^\alpha(\psi_\eta(|x|)\varphi(x)) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,\gamma!} D^\beta\varphi D^\gamma\psi_\eta.$$

Поэтому

$$\| D^\alpha\varphi_\eta \mid L_{p,\nu}\|^p \leqslant K \sum_{k=0}^{l} \int |x^\cdot|^{\nu p} |T_k(x \mid \psi_\eta)|^p |T_{l-k}(x \mid \varphi)|^p \, dx. \tag{4.4}$$

Учитывая, что $|\psi_\eta| \leqslant 1$, получим из (4.3) и (4.4)

$$\sum_{|\alpha|=l} \| D^\alpha \varphi_\eta \,|\, L_{p,\nu} \|^p \leqslant K \left[\| \varphi \,|\, L_{p,\nu}^{(l)} \|^p + \sum_{k=1}^{l} \| \varphi \,|\, L_{p,\nu-k,1}^{(l-k)} \|^p \right]. \quad (4.5)$$

Тем самым финитная функция φ_η действительно лежит в $W_{p,\nu}^{(l)}$. Проверим равенство (4.2). К функции $\varphi - \varphi_\eta = (1 - \psi_\eta)\varphi$ применим неравенство (4.4), тогда получим

$$\| D^\alpha (\varphi - \varphi_\eta) \,|\, L_{p,\nu} \|^p \leqslant K \int\limits_{r>\eta^{1/4}} |x^\cdot|^{\nu p} |T_l(x|\varphi)|^p \, dx +$$

$$+ K \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{r>\eta^{1/4}} |x^\cdot|^{(\nu-k)p} (1 + \ln |x^\cdot|)^{-1} |T_{l-k}(x|\varphi)|^p \, dx. \quad (4.6)$$

Функция φ принадлежит $L_{p,\nu}^{(l)}$ и всем пространствам $L_{p,\nu-k,1}^{(l-k)}$ при $k = 1, 2, \ldots, l$. Следовательно, правая часть (4.6) стремится к нулю при $\eta \to \infty$. Тем самым (4.2) доказано. Далее, функция $\varphi - \varphi_\eta$ обращается в нуль при $|x| \leqslant 1$ для достаточно больших η. Значит, согласно выбору проектора П, справедлива оценка

$$\| \varphi - \varphi_\eta \,|\, W_{p,\nu}^{(l)} \| \leqslant K \sum_{|\alpha|=l} \| D^\alpha (\varphi - \varphi_\eta) \,|\, L_{p,\nu} \|.$$

Отсюда и из (4.2) следует нужное. Лемма доказана.

Следствие 4.1. *Функцию* φ, *удовлетворяющую условиям леммы* III.12, *можно сколь угодно точно приблизить по норме* $W_{p,\nu}^{(l)}$ *финитной бесконечно дифференцируемой функцией.*

Рассмотрим для $\eta > 0$ среднюю функцию $(\varphi_\eta)_h$ и оценим $\| \varphi - (\varphi_\eta)_h \,|\, L_{p,\nu}^{(l)} \|$. Имеем

$$\| \varphi - (\varphi_\eta)_h \,|\, L_{p,\nu}^{(l)} \| \leqslant \| \varphi - \varphi_\eta \,|\, L_{p,\nu}^{(l)} \| + \| \varphi_\eta - (\varphi_\eta)_h \,|\, L_{p,\nu}^{(l)} \|. \quad (4.7)$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем $\eta > 1$ такое, чтобы норма разности $\varphi - \varphi_\eta$ в пространстве $L_{p,\nu}^{(l)}$ не превышала $\varepsilon/2$. Образуем для этого η и h среднюю функцию $(\varphi_\eta)_h$. По теореме о приближении средними функциями элементов весового пространства $L_{p,\nu}^{(l)}$, аналогичной теореме I.8, найдется h такое, что норма разности $\varphi_\eta -$ $- (\varphi_\eta)_h$ будет меньше, чем $\varepsilon/2$. Из (4.7) следует теперь, что $\| \varphi - (\varphi_\eta)_h \,|\, L_{p,\nu}^{(l)} \| \leqslant \varepsilon$. Но функция $(\varphi_\eta)_h$, очевидно, финитна и бесконечно дифференцируема. Следствие доказано.

Если в качестве срезывающей функции брать более простую, например $\omega(r/\eta)$, то сходимости произведения $\omega(r/\eta)\,\varphi(x)$ к $\varphi(x)$, вообще говоря, нет. Это подтверждает следующий пример. Пусть $n = 2$, $\varepsilon > 0$ и $\varphi(x) = (1 + \ln |x^\cdot|)^{1/2-\varepsilon}$. Нетрудно убедиться, что $\varphi(x)$ принадлежит $L_2^{(1)}$ и что

$$\sum_{j=1}^{2} \| (1 - \omega(r/\eta)) D_j \varphi(x) \,|\, L_2 \| \to 0$$

при $\eta \to \infty$. Значит, $D_j(\omega(r/\eta)\,\varphi(x))$ стремится к $D_j\varphi(x)$,

$j = 1, 2$, только в том случае, когда

$$\lim_{\eta\to\infty} \| \varphi(x)\,\omega'(|x|/\eta) \,|\, L_2 \| = 0. \tag{4.8}$$

Функция $\eta\omega'(r/\eta)$ знакопостоянна и ограничена снизу по модулю положительной константой равномерно на отрезке $(0{,}25 + \delta)\eta \leqslant |x| \leqslant (0{,}75 - \delta)\eta$, $0 < \delta < 0{,}25$. По теореме о среднем, получим

$$\| \varphi\omega'(r/\eta) \,|\, L_2 \|^2 \geqslant K \int\limits_{(0{,}25+\delta)\eta}^{(0{,}75-\delta)\eta} ((\ln r)^{1/2-\varepsilon})^2\, r\, dr/\eta^2 \geqslant K (\ln \eta)^{1-2\varepsilon}.$$

Если $\varepsilon < 1/2$, то правая часть этого неравенства стремится к бесконечности при $\eta \to \infty$, и потому (4.8) не может иметь места.

Разобьем пространства $W^{(l)}_{p,\nu}$ на три класса в зависимости от значений ν, p. В каждом из этих классов замыкание $\mathring{W}^{(l)}_{p,\nu}$ множества финитных функций обладает своими свойствами. Прежде чем формулировать теорему, обозначим через $\boldsymbol{P}^*_{l-1,\,s}$ пространство полиномов степени выше $s-1$, но ниже l. Размерность $\boldsymbol{P}^*_{l-1,\,s}$ вычисляется по формуле:

$$\dim \mathbf{P}^*_{l-1,\,s} = \frac{(n+l-1)!}{(n-1)!\, l!} - \frac{(n+s-1)!}{(n-1)!\, s!}$$

Теорема III.3.1. *Если $\nu + \tau < 1$, $\tau = n/p$, то $W^{(l)}_{p,\nu}$ совпадает с замыканием множества финитных функций $\mathring{W}^{(l)}_{p,\nu}$.*

2. *Если $\nu + \tau > l$, то пространство $W^{(l)}_{p,\nu}$ разбивается в прямую сумму:*

$$W^{(l)}_{p,\nu} = \mathring{W}^{(l)}_{p,\nu} \oplus \mathbf{P}_{l-1}.$$

3. *Если $1 \leqslant \nu + \tau \leqslant l$, то пространство $W^{(l)}_{p,\nu}$ разбивается в прямую сумму вида*

$$W^{(l)}_{p,\nu} = W^{(l)}_{p,\nu} \oplus \mathbf{P}^*_{l-1,\,l-s},$$

где $s = [\nu + \tau]$.

Доказательство. Пусть $\nu + \tau < 1$, тогда любая функция φ из $W^{(l)}_{p,\nu}$ и все ее производные порядка $l - 1$ удовлетворяют условиям леммы III.4. Последовательно применяя эту лемму к производным φ порядка $l-1$, $l-2$, ..., 1, получим, что $D^\alpha\varphi \in L_{p,\,\nu+|\alpha|-l}$, где $|\alpha| = 0, 1, \ldots, l$. Из леммы III.12 следует теперь, что φ можно сколь угодно точно приблизить финитным элементом $W^{(l)}_{p,\nu}$. Случай 1 доказан.

Пусть $\nu + \tau > l$. Разложим произвольную функцию φ из $W^{(l)}_{p,\nu}$ в сумму

$$\varphi(x) = \varphi^*_l(x) + \sum_{|\alpha| \leqslant l-1} a_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}, \tag{4.9}$$

где $\varphi_l^*(x)$ принадлежит всем $L_{p,\nu-k}^{(l-k)}$ при любом $k=0, 1, \ldots, l$. Чтобы получить (4.9), построим по индукции l функций $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_l^*$. Пусть $|\alpha| = l-1$, тогда $D^\alpha\varphi \leqslant T_l(x \mid \varphi)$, причем по условию $T_l(x \mid \varphi)$ принадлежит $L_{p,\nu}$ и $\tau+\nu \geqslant l > 1$. По теореме III.2 найдется постоянная a_α такая, что

$$\lim_{r\to\infty} \| D^\alpha \varphi(r, \theta) - a_\alpha \mid L_p(\sigma) \| = 0. \tag{4.10}$$

Здесь (r, θ) — полярные координаты в R^n. Положим

$$\varphi_1^* = \varphi - \sum_{|\alpha|=l-1} a_\alpha x^\alpha/\alpha!$$

Так как $\varphi \in L_{p,\nu}^{(l)}$, то и $\varphi_1^* \in L_{p,\nu}^{(l)}$. В силу (4.10) производные φ_1^* порядка $(l-1)$ исчезают на бесконечности. Значит, по лемме III.10, φ_1^* принадлежит $L_{p,\nu-1}^{(l-1)}$. Предположим, что для некоторого $k < l$ построена функция φ_k^*, принадлежащая всем $L_{p,\nu-j}^{(l-j)}$ при $j=0, 1, \ldots, k$. Функцию φ_{k+1}^* построим по формуле

$$\varphi_{k+1}^* = \varphi_k^* - \sum_{|\alpha|=l-k-1} a_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}, \tag{4.11}$$

где a_α, $|\alpha| = l-k-1$ удовлетворяют условию

$$\lim_{r\to\infty} \| D^\alpha \varphi_k^*(r, \theta) - a_\alpha \mid L_p(\sigma) \| = 0. \tag{4.12}$$

Существование a_α с таким свойством вытекает из теоремы III.2. Нужно заметить только, что при $|\alpha| = l-k-1$ $D^\alpha\varphi_k^* \leqslant$ $\leqslant T_{l-k}(x \mid \varphi) \in L_{p,\nu-k}$ и что $\nu - k + \tau > l - k \geqslant 1$. Все производные порядка $\geqslant l-k$ от φ_{k+1}^* совпадают с соответствующими производными от φ_k^*. Поэтому φ_{k+1}^* принадлежит пространствам $L_{p,\nu-j}^{(l-j)}$ при $j=0, 1, \ldots, k$. Кроме того, $\varphi_{k+1}^* \in L_{p,\nu-k-1}^{(l-k-1)}$. Это следует из (4.12) по лемме III.10.

Последняя из постро(енных функций φ_l^* удовлетворяет (4.9), что легко следует из 4.11). По построению φ_l^* принадлежит одновременно всем $L_{p,\nu)}^{(l-k}$ь(при $k=0, 1, \ldots, l$. Поэтому из леммы III.12 имеем,что $\varphi_l^* \in {}^{-}W_{p,\nu}^{l)}$. Тем самым в случае 2 теорема доказана.

Пусть теперь $1 \leqslant \nu+\tau \leqslant l$ и $\nu+\tau \notin \{1, \ldots, l\}$. Любую функцию φ из $W_{p,\nu}^{(l)}$ представим в виде

$$\varphi = \varphi_s^* + \sum_{l-s\leqslant|\alpha|\leqslant l-1} a_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}, \tag{4.13}$$

где φ_s^* принадлежит одновременно всем $L_{p,\nu-j}^{(l-j)}$ при $j=0, 1, \ldots, l$. Из леммы III.12 следует, что $\varphi_s^* \in \mathring{W}_{p,\nu}^{(l)}$. Чтобы найти φ_s^* с нужными свойствами, рассмотрим множество функций

$$\varphi_k^* = \varphi_{k-1}^* - \sum_{|\alpha|=l-k} a_\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!}, \quad k=1, 2, \ldots, s. \tag{4.14}$$

Здесь φ_0^* по определению совпадает с φ. Коэффициенты a_α, $l-s \leqslant \leqslant \|\alpha\| \leqslant l-1$, можно выбрать так, чтобы функция φ_k^* лежала в пересечении всех $L_{p,\nu-j}^{(l-j)}$ при $j=0, 1, \ldots, k$. Это утверждение доказывается, как и в случае 2, индукцией по k с использованием теоремы III.2 и леммы III.10. Покажем, что φ_s^* принадлежит также любому $L_{p,\nu-j}^{(l-j)}$ при $j=s+1, \ldots, l$. Пусть $\|\alpha\| = = l-s-1$, тогда $D^\alpha\varphi_s^* \leqslant T_{l-s}(x\,|\,\varphi) \in L_{p,\nu-s}$. При этом $\tau + +\nu+s-1<0$ по выбору s. Значит, выполнены условия леммы III.4, и потому $D^\alpha\varphi_s^*$ лежит в $L_{p,\nu-j}$ при $j=s+1$. Аналогично проверяется, что $\varphi_s^* \in L_{p,\nu-j}$ для $j=s+2, \ldots, l$.

Остается заметить, что равенство (4.13) следует из (4.14), и тем самым теорема доказана и в этом случае.

Пусть, наконец, $\nu+\tau \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Функцию φ из $W_{p,\nu}^{(l)}$ разложим по формуле (4.13). Методом, которым доказан предыдущий случай, несложно установить, что φ_s^* лежит в пересечении пространств $L_{p,\nu-j}^{(l-j)}$ при $j=0, 1, \ldots, s-1$. Однако воспользоваться леммой III.10, чтобы оценить $\|\varphi_s^* \| L_{p,\nu-s}^{(l-s)}\|$, теперь уже нельзя, ибо при сделанном предположении $\nu-s+\tau=0$. Тем не менее оценку производных φ_s^* порядка $(l-s)$ все же можно получить. Из леммы III.8 следует, что $\varphi_s^* \in L_{p,\nu-s,1}^{(l-s)}$.

Далее, пусть $|\alpha| = l-s-1$, тогда $D^\alpha\varphi_s^* \leqslant T_{l-s}(x|\,\varphi^{s*}) \in \in L_{p,\nu-s,1}$. Учитывая еще, что $\nu-s-1+\tau=-1<0$, получим из леммы III.6, что $D^\alpha\varphi_s^* \in L_{p,\nu-s-1,1}$. Аналогичные рассуждения показывают, что φ_s^* лежит в пересечении пространств $L_{p,\nu-j,1}^{(l-j)}$ при $j=s, s+1, \ldots, l$. Из леммы III.12 заключаем, что $\varphi_s^* \in \mathring{W}_{p,\nu}^{(l)}$. Теорема доказана полностью.

Следствие 4.2. *Финитные градиенты образуют в $L_{p,\nu}^{\langle l\rangle}(R^n)$ плотное множество.*

В самом деле, пусть $\{D^\alpha\varphi \mid |\alpha| = l\}$ какой-нибудь градиент из $L_{p,\nu}^{\langle l\rangle}(R^n)$. Тогда из теоремы III.3 следует, что всегда отыщется первообразная φ_s^* этого градиента, лежащая одновременно в $L_{p,\nu}^{(l)}$ и всех $L_{p,\nu-j,1}^{(l-j)}$ при $j=1, 2, \ldots, l$. Отыскав по лемме III.12 финитное приближение к φ_s^* в пространстве $W_{p,\nu}^{(l)}$, возьмем от него градиент порядка l. Этот градиент, очевидно, и будет искомым.

Между пространствами $W_{p,\nu_1}^{(l)}$ и $W_{p,\nu_2}^{(l)}$ при условии, что $\tau + +\nu_1$, $\tau+\nu_2 \notin \{1, 2, \ldots, l\}$, существует интересная взаимосвязь.

Теорема III.4. *Пусть* $\nu_1+\tau_1 \notin \{1, 2, \ldots, l\}$, *и* $\varphi_1 \in \in \mathring{W}_{p_1,\nu_1}^{(l)}$, *тогда функция*

$$\varphi_2(x) = |x'|^{\nu_1-\nu_2}\varphi_1(x) \tag{4.15}$$

лежит в $\mathring{W}_{p,\nu_2}^{(l)}$, *причем выполнено неравенство*

$$\|\varphi_2 \,|\, W_{p,\nu_2}^{(l)}\| \leqslant K \|\varphi_1 \,|\, W_{p,\nu_1}^{(l)}\|. \tag{4.16}$$

Доказательство. Пусть $|\alpha| = m$, $0 \leqslant m \leqslant l$, тогда

$$D^{\alpha}\varphi_2(x) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\,\gamma!} D^{\beta}(|x^{\cdot}|^{\nu_1-\nu_2}) D^{\gamma}\varphi_1(x).$$

Так как $|D^{\beta}(|x^{\cdot}|^{\nu_1-\nu_2})| \leqslant K|x^{\cdot}|^{\nu_1-\nu_2-|\beta|}$, где K не зависит от x, то

$$|x^{\cdot}|^{\nu_2-l+m} T_m(x\,|\,\varphi_2) \leqslant K \sum_{k=0}^{m} |x^{\cdot}|^{\nu_1-l+m-k} T_{m-k}(x\,|\,\varphi_1).$$

Отсюда легко следует, что

$$\| T_m(x\,|\,\varphi_2)\,|\,L_{p,\,\nu_2-l+m}\|^p \leqslant K \sum_{s=0}^{m} \| T_s(x)\,|\,\varphi_1)\,|\,L_{p_1,\,\nu_1-l+s}\|^p. \tag{4.17}$$

В доказательстве теоремы III.3 установлено, что для $\nu_1 + \tau \notin \notin \{1, 2, \ldots, l\}$ функция φ_1 лежит в пересечении пространств $L^{(s)}_{p,\,\nu_1-l+s}$ при $s = 0, 1, \ldots, l$, причем

$$\| \varphi_1\,|\,L^{(s)}_{p,\,\nu_1-l+s}\| \leqslant K \|\varphi_1\,|\,W^{(l)}_{p,\,\nu_1}\|. \tag{4.18}$$

Отсюда и из (4.17) следует, что функция φ_2 лежит в пересечении $L^{(m)}_{p,\,\nu_2-l+m}$ при $m = 0, 1, \ldots, l$. По лемме III.12 получаем, что $\varphi_2 \in \mathring{W}^{(l)}_{p,\,\nu_2}$, причем

$$\|\varphi_2\,|\,W_{p,\,\nu_2}\| \leqslant K \sum_{m=0}^{l} \|\varphi\,|\,L^{(m)}_{p,\,\nu_2-l+m}\|.$$

Отсюда, из (4.17) и (4.18) получаем (4.16). Теорема доказана.

Следствие 4.3. *Пусть* $\nu_1 + \tau$ *и* $\nu_2 + \tau \notin \{1, 2, \ldots, l\}$, *тогда пространства* $\mathring{W}^{(l)}_{p,\,\nu_1}$ *и* $W^{(l)}_{p,\,\nu_2}$ *изоморфны между собой. Их изоморфизм задается равенством* (4.15).

§ 5. Неравенство Харди

В этом параграфе мы докажем леммы, использованные при выводе теорем вложения из § 3 этой главы.

Теорема III.5. *Пусть* $f(t)$ — *неотрицательная функция при* $t \in [0, b]$, $f(t) \in L_p(0, b)$, $b > 0$, $1 < p < \infty$. *Если*

$$F(r) = \int_0^r f(t)\,dt,$$

то имеет место неравенство

$$\int_0^b t^{-p} F(t)^p\,dt \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^b f(t)^p\,dt. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть ξ — число из $(0, b)$, т. е. $0 < \xi < b$. Тогда получим, используя неравенство Гёльдера,

$$\int_\xi^b t^{1-p} F(t)^{p-1} f(t)\, dt \leqslant \left(\int_\xi^b (t^{1-p}F(t)^{p-1})^{p'}\, dt\right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left(\int_\xi^b f(t)^p\, dt\right)^{1/p} = \left(\int_\xi^b t^{-p}F(t)^p\, dt\right)^{1/p'} \left(\int_\xi^b f(t)^p\, dt\right)^{1/p}. \tag{5.2}$$

Таким образом, начальный интеграл в этом неравенстве конечен. Далее, пользуясь формулой интегрирования по частям, получим

$$\int_\xi^b t^{-p} F(t)^p\, dt = -\frac{1}{p-1}\int_\xi^b F(t)^p\, d(t^{1-p}) =$$

$$= \frac{\xi^{1-p}F(\xi)^p}{p-1} - \frac{b^{1-p}F(b)^p}{p-1} + \frac{p}{p-1}\int_\xi^b t^{1-p}F(t)^{p-1} f(t)\, dt.$$

Используя (5.2) и условие, что $b > 0$, $F(b) \geqslant 0$, $p > 1$, оценим правую часть последнего равенства. Получим

$$(p-1)\int_\xi^b t^{-p}F(t)^p\, dt \leqslant \xi^{1-p}F(\xi)^p + p\left(\int_\xi^b t^{-p}F(t)^p\, dt\right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left(\int_\xi^b f(t)^p\, dt\right)^{1/p},$$

или, переходя к пределу при $\xi \to 0$,

$$\left(\int_0^b t^{-p}F(t)^p\, dt\right)^{1/p'} \left((p-1)\left(\int_0^b t^{-p}F(t)^p\, dt\right)^{1/p} - p\left(\int_0^b f(t)^p\, dt\right)^{1/p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\xi\to 0} \xi^{1-p}F(\xi)^p.$$

Обозначим,

$$A = \left(\int_0^b t^{-p}F(t)^p\, dt\right)^{1/p}.$$

Если $A = 0$, то неравенство (5.1) очевидно. Будем считать, что $A > 0$, тогда

$$A\left[(p-1)\left(\int_0^b t^{-p}F(t)^p\, dt\right)^{1/p} - p\left(\int_0^b f(t)^p\, dt\right)^{1/p}\right] \leqslant \lim_{\xi\to 0} \xi^{1-p}F(\xi)^p. \tag{5.3}$$

Оценим правую часть этого неравенства. Имеем, используя неравенство Гёльдера:

$$F(\xi)^p \leqslant \left(\int_0^\xi f(t)\,dt\right)^p \leqslant \int_0^\xi f(t)^p\,dt \left(\int_0^\xi d\xi\right)^{p-1} = \xi^{p-1}\int_0^\xi f(t)^p\,dt.$$

Тем самым $\xi^{1-p}F(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$, и, следовательно, из (5.3) получим (5.1). Теорема доказана.

Лемма III.13. *Пусть $f(t)$, $\chi(t)$ — неотрицательные функции на (a, c), причем $\chi'(t) > 0$, $\chi(a) = 0$ и*

$$F(\nu) = \int_a^r f(t)\,dt, \qquad \int_a^c f(t)^p \chi'(t)^{1-p}\,dt < \infty.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\int_a^c \frac{\chi'(t)}{\chi(t)^p} F(t)^p\,dt \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^c f(t)^p \chi'(t)^{1-p}\,dt. \tag{5.4}$$

Доказательство. Проведем замену переменных так, чтобы оказаться в условиях теоремы III.5. Пусть $z = \chi(t)$, $t = \chi^{-1}(z)$. Функция $\chi(t)$ монотонна на $[a, c]$ и потому взаимно однозначно отображает $[a, c]$ на $[0, b]$, где $b = \chi(c) > 0$. Положим

$$f_1(z) = f(\chi^{-1}(z))/\chi'(\chi^{-1}(z)).$$

Ясно, что $f_1(z) \geqslant 0$ при $z \in [0, b]$. Проверим, что $f_1(z) \in L_p(0, b)$. Имеем

$$\int_0^b f_1(z)^p\,dz = \int_a^c (f(t)/\chi'(t))^p \chi'(t)\,dt = \int_a^c f(t)^p \chi'(t)^{1-p}\,dt. \tag{5.5}$$

Последний интеграл конечен по условию. Пусть $F_1(y) = F(\chi^{-1}(y))$, тогда

$$F_1(y) = \int_a^{\chi^{-1}(y)} f(t)\,dt = \int_0^y [f(\chi^{-1}(z))/\chi'(\chi^{-1}(z))]\,dz = \int_0^y f_1(z)\,dz.$$

Применив к $f_1(z)$, $F_1(y)$ теорему III.5, получим

$$\int_0^b y^{-p} F_1(y)^p\,dy \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^b f_1(z)^p\,dz. \tag{5.6}$$

Сделав в интеграле слева замену $y = \chi(t)$, получим

$$\int_0^b y^{-p} F_1(y)^p\,dy = \int_a^c \chi(t)^{-p} F(t)^p \chi'(t)\,dt.$$

Отсюда, из (5.5) и (5.6) следует (5.4). Лемма доказана.

С л е д с т в и е 5.1. *Пусть $f(t)$ — неотрицательная функция на $(0, c)$, $c > 0$, причем*

$$F(r) = \int_0^r f(t)\,dt, \qquad \int_0^c t^{-\lambda} (tf(t))^p \frac{dt}{t} < \infty,$$

где $\lambda > 0$. Тогда имеет место оценка

$$\int_0^c t^{-\lambda} F(t)^p \frac{dt}{t} \leqslant \left(\frac{p}{\lambda}\right)^p \int_0^c t^{-\lambda} (tf(t))^p \frac{dt}{t}. \tag{5.7}$$

Положим $\chi(t) = t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ при $t \in [0, c]$, $\alpha = \lambda/(p-1) - 1$. Так как $p > 1$, $\lambda > 0$, то $\alpha + 1 > 0$. При этом

$$\int_0^c f(t)^p \chi'(t)^{1-p}\,dt = \int_0^c t^{\alpha(1-p)} f(t)^p\,dt = \int_0^c t^{-\lambda} (tf(t))^p \frac{dt}{t},$$

$$\int_0^c \frac{\chi'(t)}{\chi(t)^p} F(t)^p\,dt = \left(\frac{\lambda}{p-1}\right)^p \int_0^c t^{-\lambda} F(t)^p \frac{dt}{t}.$$

Тем самым (5.7) совпадает с (5.4) при данном $\chi(t)$. Следствие доказано.

С л е д с т в и е 5.2. *Пусть $f(t)$ — неотрицательная функция на $(1, \infty)$,*

$$F(r) = \int_1^r f(t)\,dt, \qquad \int_1^\infty (tf(t))^p \frac{dt}{t} < +\infty.$$

Тогда имеет место оценка

$$\int_1^\infty (\ln^{-p} t) F(t)^p \frac{dt}{t} \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_1^\infty (tf(t))^p \frac{dt}{t}. \tag{5.8}$$

Положим $\chi(t) = \ln t$ при $t \in [1, \infty)$. Тогда

$$\int_1^\infty f(t)^p \chi'(t)^{1-p}\,dt = \int_1^\infty (tf(t))^p \frac{dt}{t},$$

$$\int_1^\infty \frac{\chi'(t)}{\chi(t)^p} F(t)^p\,dt = \int_1^\infty \ln^{-p} t F(t)^p \frac{dt}{t}.$$

Тем самым (5.8) совпадает с (5.4) при данном $\chi(t)$. Следствие доказано.

С л е д с т в и е 5.3. *Пусть $f(t)$ — неотрицательная функция на $[0, c]$, $c > 0$, причем*

$$F(r) = \int_0^r f(t)\,dt, \qquad \int_0^c t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t)(tf(t))^p \frac{dt}{t} < \infty,$$

где $\lambda > 0$. *Тогда имеет место оценка*

$$\int_0^c t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t) F(t)^p \frac{dt}{t} \leqslant K \int_0^c t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t)(tf(t))^p \frac{dt}{t}, \tag{5.9}$$

где K *не зависит от* f *и* c.

Положим $\mu = \lambda/(p-1) > 0$, $\chi(t) = t^\mu \ln^{p'}(2+t)/\mu$, $p' = p/(p-1)$. Тогда при $t \geqslant 0$

$$\chi'(t) = t^{\mu-1} \ln^{p'}(2+t)\left\{1 + \frac{p'}{\mu} \ln^{-1}(2+t) \frac{t}{2+t}\right\} = \\ = t^{\mu-1} \ln^{p'}(2+t)\, \nu(t),$$

где $\nu(t)$ обозначает функцию в фигурных скобках. Далее,

$$\frac{\chi'(t)}{\chi(t)^p} = \mu^p t^{-\mu(p-1)-1} \ln^{-p}(2+t)\, \nu(t) = \mu^p t^{-\lambda-1} \ln^{-p}(2+t)\, \nu(t).$$

Поэтому

$$\int_0^c f(t)^p \chi'(t)^{1-p}\, dt = \int_0^c t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t)(tf(t))^p \nu(t)^{1-p} \frac{dt}{t}. \tag{5.10}$$

Функция $\nu(t)$, очевидно, ограничена снизу при $t \geqslant 0$ положительной постоянной, которую мы обозначим m_1. Так как $1 - p < 0$, то из (5.10) получаем

$$\int_0^c f(t)^p (\chi'(t))^{1-p}\, dt \leqslant \left(\frac{1}{m_1}\right)^{1-p} \int_0^c t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t)(tf(t))^p \frac{dt}{t}. \tag{5.11}$$

Далее,

$$\int_0^c \frac{\chi'(t)}{\chi(t)^p} F(t)^p\, dt = \mu^p \int_0^c t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t) F(t)^p \nu(t) \frac{dt}{t} \geqslant \\ \geqslant \mu^p m_1 \int_0^c t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t) F(t)^p \frac{dt}{t}.$$

Пользуясь леммой III.13, получим отсюда и из (5.11):

$$\int_0^c t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t) F(t)^p \frac{dt}{t} \leqslant p^p \frac{m_1^{p-2}}{\lambda^p} \int_0^c t^{-\lambda} \ln^{-p}(2+t) \times (tf(t))^p \frac{dt}{t}.$$

Следствие доказано.

Следствие 5.4. *Пусть* $\varphi(u)$ — *неотрицательная функция при* $u \in (1/c, \infty)$, $c > 0$, *причем*

$$\Phi(r) = \int_r^\infty \varphi(u)\, du, \qquad \int_{1/c}^\infty u^\lambda (u\varphi(u))^p \frac{du}{u} < +\infty,$$

где $\lambda > 0$. Тогда имеет место оценка

$$\int_{1/c}^{\infty} u^{\lambda}\Phi(u)^{p}\,\frac{du}{u} \leqslant \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{p}\int_{1/c}^{\infty} u^{\lambda}(u\varphi(u))^{p}\,\frac{du}{u}. \tag{5.12}$$

Доказательство состоит в сведении (5.12) к следствию 5.1. Сделаем замену: $t = 1/u$, $f(t) = \varphi(1/t)/t^2$. Тогда $f(t)$ — неотрицательная функция на $(0, c)$ и при этом

$$\int_{0}^{c} t^{-\lambda}(tf(t))^{p}\,\frac{dt}{t} = \int_{1/c}^{\infty} u^{\lambda}(u\varphi(u))^{p}\,\frac{du}{u} < +\infty,$$

$$\Phi(r) = \int_{r}^{\infty}\varphi(u)\,du = -\int_{\infty}^{r} u^{2}\varphi(u)\,\frac{du}{u^{2}} = \int_{0}^{1/r} f(t)\,dt = F\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\int_{1/c}^{\infty} u^{\lambda}\Phi(u)^{p}\,\frac{du}{u} = \int_{0}^{c} t^{-\lambda}F(t)^{p}\,\frac{dt}{t}.$$

Таким образом, неравенство (5.12) следует из (5.7). Следствие доказано.

Следствие 5.5. *Пусть $\varphi(u)$ — неотрицательная функция при $u \in (0, 1)$, причем*

$$\Phi(v) = \int_{v}^{1}\varphi(u)\,du, \qquad \int_{0}^{1} u^{p}\varphi(u)^{p}\,\frac{du}{u} < \infty.$$

Тогда имеет место оценка

$$\int_{0}^{1} |\ln u|^{-p}\,\Phi(u)^{p}\,\frac{du}{u} \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p}\int_{0}^{1}(u\varphi(u))^{p}\,\frac{du}{u}. \tag{5.13}$$

Доказательство состоит в сведении (5.13) к следствию 5.2. Сделав замену $t = 1/u$, $f(t) = \varphi(1/t)/t^2$, видим, что $f(t) \geqslant 0$ для t из $(1, \infty)$ и при этом

$$\int_{1}^{\infty}(tf(t))^{p}\,\frac{dt}{t} = \int_{0}^{1}(u\varphi(u))^{p}\,\frac{du}{u} < \infty,$$

$$F(1/v) = \int_{1}^{1/v} f(t)\,dt = \int_{v}^{1} u^{2}\varphi(u)\,\frac{du}{u^{2}} = \Phi(v),$$

$$\int_{1}^{\infty} |\ln t|^{-p}F(t)^{p}\,\frac{dt}{t} = \int_{0}^{1} |\ln u|^{-p}\,\Phi(u)^{p}\,\frac{du}{u}.$$

Таким образом, неравенство (5.13) следует из (5.8).

Следствие 5.6. *Пусть $f(t)$ — неотрицательная функция на $[0, c]$, $0 < c < 1$, причем*

$$F(r)=\int_0^r f(t)\,dt, \qquad \int_0^c t^{-\lambda}\,|\ln t|^{-p}\,(tf(t))^p\,\frac{dt}{t}<\infty,$$

где $\lambda\,|\ln c| > p$. Тогда имеет место оценка

$$\int_0^c t^{-\lambda}\,|\ln t|^{-p}\,F(t)^p\,\frac{dt}{t}\leqslant K\int_0^c t^{-\lambda}\,|\ln t|^{-p}\,(tf(t))^p\frac{dt}{t}, \tag{5.14}$$

где K не зависит от f.

Доказательство. Положим $\mu = \lambda/(p-1) > 0$, $\chi(t) = t^{\mu}\,|\ln t|^{p'}/\mu$, $p' = p/(p-1)$. Тогда

$$\chi'(t)=t^{\mu-1}\,|\ln t|^{p'}\left\{1-\frac{p'}{\mu}\,|\ln t|^{-1}\right\}=t^{\mu-1}\,|\ln t|^{p'}\,\nu(t),$$

где $\nu(t)$ обозначает функцию в фигурных скобках. Несложно убедиться, что $\nu(t)$ монотонно убывает при $t \in (0, c)$, и потому для этих t справедливо

$$\nu(c)\leqslant\nu(t)\leqslant 1. \tag{5.15}$$

Далее,

$$\frac{\chi'(t)}{\chi(t)^p}=\mu^p t^{-\mu(p-1)-1}\,|\ln t|^{-p}\,\nu(t)=\mu^p t^{-\lambda-1}\,|\ln t|^{-p}\,\nu(t).$$

Отсюда получаем

$$\int_0^c f(t)^p\,\chi'(t)^{1-p}\,dt=\int_0^c t^{-\lambda}\left(\frac{tf(t)}{|\ln t|}\right)^p\nu(t)^p\,\frac{dt}{t}\leqslant\int_0^c t^{-\lambda}\left(\frac{tf(t)}{|\ln t|}\right)^p\frac{dt}{t},$$

$$\int_0^c\frac{\chi'(t)}{\chi(t)^p}\,F(t)^p\,dt\geqslant\nu(c)\,\mu^p\int_0^c t^{-\lambda}\,|\ln t|^{-p}\,F(t)^p\,\frac{dt}{t}. \tag{5.16}$$

Заметим теперь, что в наших обозначениях выполнены условия леммы III.13. Значит, справедливо неравенство (5.4). Учитывая еще, что при $\lambda\,|\ln c| > p$ число $\nu(c) > 0$, получим из (5.15)—(5.16) неравенство (5.14). Следствие доказано.

ГЛАВА IV

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Первая теорема об интегралах типа потенциала

В предыдущей главе мы установили две серии вложений для пространств $W^{(l)}_{p,\nu,\varkappa}$. Именно первая серия состоит из вложений

$$W^{(l)}_{p,\nu,\varkappa} \to W^{(l)}_{p,\nu^*,\varkappa}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \qquad \nu^* < \nu,$$

и

$$W^{(l)}_{p,\nu} \to W^{(l)}_{p^*,\nu+n(1/p-1/p^*),1}, \qquad 1 \leqslant p^* < p.$$

Заметим, что это — вложения пространств $W^{(l)}_{p,\nu,\varkappa}$ при постоянном l и переменных p, ν и $\varkappa$.

Вторая серия состоит из вложений

$$\mathring{W}^{(l)}_{p,\nu} \to \mathring{W}^{(l-1)}_{p,\nu-1}, \qquad \nu + \tau \neq 1;$$

$$\mathring{W}^{(l)}_{p,\nu} \to \mathring{W}^{(l)}_{p,\nu-1,1}, \qquad \nu + \tau = 1,$$

относящихся к одновременному изменению l и ν при сохранении p.

Для того чтобы рассмотреть вложения при изменении всех трех параметров l, p и ν, нам остается изучить еще одну серию теорем, относящихся к случаю, когда пространство $W^{(l)}_{p,\nu}$ изменяется при одновременном уменьшении l и ν и соответственно при увеличении p. Круг вопросов, связанных с этим, и составляет содержание данной главы. В частности, мы установим для функций из $W^{(l)}_{p,\mathrm{loc}}$ некоторые интегральные представления, позволяющие удобно исследовать все указанные пространства.

Теоремы, о которых будет идти речь, составляют главную часть того, что принято называть теоремами вложения. Из них мы получим попутно еще несколько свойств функций, относящихся к рассматриваемым пространствам.

Теоремы вложения, как мы увидим позднее, базируются на теоремах о так называемых интегралах типа потенциала.

В этом параграфе мы займемся первой из них — более простой. Рассмотрим интеграл

$$U(x) = \int_{R^n} \frac{\varphi(z)}{|x-z|^\lambda}\, dz, \qquad -\infty < \lambda < n. \tag{1.1}$$

Интеграл вида $\int\limits_{R^n} \varphi(z)\psi(x-z)\,dz$, где x и z суть n-мерные переменные, принято называть сверткой функций φ и ψ и обозначать символом $\varphi(x) * \psi(x)$. Поэтому

$$U(x) = \varphi(x) * |x|^{-\lambda}.$$

Будем называть эту свертку интегралом типа потенциала, а функцию $\varphi(x)$ — *его плотностью.* Мы будем считать, что $\varphi \in L_{p,\nu}$, $1 < p < \infty$, $-\infty < \nu < +\infty$. В дальнейшем нас будут интересовать следующие три случая.

0) Плотность $\varphi(z)$ финитна с носителем в ограниченной области Ω. Здесь все значения ν оказываются эквивалентными, и φ принадлежит $L_{p,\nu}$ сразу при всех ν: $-\infty < \nu < +\infty$. Поэтому можно считать просто, что $\varphi \in L_p(\Omega)$. Поведение φ на бесконечности не вносит при этом никаких ограничений на показатель λ, и интеграл типа потенциала при $\lambda < n$

$$U_0(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{\varphi(z)}{|x-z|^{\lambda}}\, dz$$

существует. При этом его надо понимать, вообще говоря, не как функцию точки, определенную при всех x, а как некоторую локально суммируемую функцию в смысле определения гл. I.

∞) Плотность φ имеет носителем все R^n. При этом «поведение» φ на бесконечности определяется показателем ν и существенно влияет на сходимость интеграла типа потенциала

$$U_\infty(x) = \int \frac{\varphi(z)}{|x-z|^{\lambda}}\, dz.$$

Показатель λ здесь нужно дополнительно ограничить снизу: $\lambda > n/p' - \nu$.

Случаи 0) и ∞) — это случаи «постоянных пределов» интегрирования — конечных или бесконечных. Нас интересует еще один случай — случай «переменных пределов».

A) Пусть носителем $\varphi(z)$ снова является все пространство R^n, но областью интегрирования служит шар переменного радиуса $|z| \leqslant \max(A|x|, 1)$, где A — произвольное число в промежутке $(1, \infty)$.

Положим

$$U_A(x) = \int\limits_{|z| \leqslant \max(A|x|, 1)} \frac{\varphi(z)}{|z-x|^{\lambda}}\, dz. \tag{1.2}$$

Этот интеграл уже не является сверткой $\varphi(x)$ с $|x|^{-\lambda}$, и, строго говоря, функцию $U_A(x)$ не следует причислять к потенциалам. Мы будем называть такой «потенциал» сокращенным.

Если формально положить $A = \infty$, то $u_A(x)$ перейдет в $U_\infty(x)$. Однако при $\varphi \in L_{p,\nu}$ сокращенный интеграл (1.2), в отличие от $U_\infty(x)$, сходится и для значений $\lambda \leqslant n/p' - \nu$.

Пример. Пусть $1 < p < \infty$; положим

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{|z|^{n/p}\,|\ln|z||}, & \text{если } |z| \leqslant 1/2, \\ 0, & \text{если } |z| > 1/2. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi \in L_p(\Omega)$, $\Omega = \{z\colon |z| \leqslant {}^1/_2\}$. Рассмотрим интеграл

$$U_0(x) = \int\limits_{|z| \leqslant {}^1/_2} \frac{\varphi(z)}{|z-x|^\lambda}\, dz.$$

При $\lambda < n/p'$ этот интеграл сходится в классическом смысле во всех точках x. При $\lambda = n/p'$ он расходится в точке $x = 0$. В остальных точках он сходится.

Это явление носит общий характер. Число n/p' разделяет две области значений показателя λ: 1) $-\infty < \lambda < n/p'$ и 2) $n/p' < \lambda < n$, в которых интегралы типа потенциала ведут себя поразному. *Поэтому будем называть число n/p' предельным показателем для плотностей φ из $L_{p,\nu}$.*

В допредельной области $\lambda < n/p'$ особенность ядра $|z-x|^{-\lambda}$ в интеграле (1.1) называется слабой, а в запредельной ($n/p' < \lambda < n$) — сильной.

В допредельной области интегралы $U(x)$ сходятся в любой точке и являются непрерывными функциями, в запредельной — могут иметься точки расходимости. В этой области функция $U(x)$ суммируема и не допускает, непрерывной локализации.

Эти две области λ рассматриваются соответственно в первой и второй теоремах об интегралах типа потенциала.

Теорема IV.1 (первая теорема об интегралах типа потенциала). *Пусть $\varphi \in L_{p,\nu}$, $1 < p < \infty$. В допредельной области $\lambda < n/p'$ для интегралов типа потенциала $U_0(x)$, $U_\infty(x)$ и $U_A(x)$ при любом x справедлива оценка*

$$|U(x)| \leqslant K \,\|\varphi \mid L_{p,\nu}(R^n)\| \begin{cases} |x^\bullet|^{-\lambda}, & \textit{если} \quad \nu p' > n; \\ |x^\bullet|^{-\lambda}(1+\ln|x^\bullet|)^{1/p'}, & \textit{если} \quad \nu p' = n; \\ |x^\bullet|^{-\lambda-\nu+n/p'}, & \textit{если} \quad \nu p' < n; \end{cases}$$

$$|x^\bullet| = (1+|x|^2)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Эти интегралы являются непрерывными функциями от x.

Докажем сначала оценку (1.3) для каждого из потенциалов U_0, U_∞ и U_A по отдельности.

0) Рассмотрим сначала $U_0(x)$ ($\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$). Как мы говорили, здесь $\varphi \in L_{p,\nu}$ при любом ν. Наилучшей из трех оценок (1.3) является первая, и поэтому достаточно установить именно ее. Применяя к $U_0(x)$ неравенство Гёльдера, получим

$$|U_0(x)| \leqslant \Big(\int\limits_\Omega |\varphi(z)|^p\, dz\Big)^{1/p} \Big(\int\limits_\Omega |z-x|^{-\lambda p'}\, dz\Big)^{1/p'} =$$

$$= \|\varphi \mid L_{p,\nu}(\Omega)\| \Big(\int\limits_\Omega |z-x|^{-\lambda p'}\, dz\Big)^{1/p'}.$$

Последний интеграл сходится при любом x, и его величина при $x \in \Omega$ не превосходит постоянной, а при больших x она эквивалентна $|x|^{-\lambda}$. Отсюда сразу же следует нужная оценка

$$|U_0(x)| \leqslant K \,\|\varphi \mid L_{p,\nu}\|\, |x^\bullet|^{-\lambda}.$$

∞) Рассмотрим теперь $U_\infty(x)$. Как мы видели, для сходимости этого интеграла необходимо дополнительное ограничение на λ:

$$\lambda > n/p' - \nu$$

(число ν при этом надо считать положительным, ибо $\lambda < n/p'$). Снова применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|U_\infty(x)| \leqslant \Big(\int\limits_{R^n} |\varphi(z)|^p |z^\bullet|^{\nu p} dz\Big)^{1/p} \Big(\int\limits_{R^n} |z-x|^{-\lambda p'} |z^\bullet|^{-\nu p'} dz\Big)^{1/p'} =$$
$$= \|\varphi \,|\, L_{p,\nu}(R^n)\| \Big(\int\limits_{R^n} |z-x|^{-\lambda p'} |z^\bullet|^{-\nu p'} dz\Big)^{1/p'}. \tag{1.4}$$

Последний интеграл сходится при любых x. Его ограниченность при ограниченных x очевидна. Пусть поэтому $|x| > 2$. Разобьем этот интеграл на два, взятые по областям $|z| \leqslant |x|/2$ и $|z| \geqslant |x|/2$. В первой области $|z-x| \leqslant 3|x|/2$ и $|z-x| \geqslant |x| - |z| \geqslant |x|/2$. Поэтому

$$\int\limits_{|z|\leqslant|x|/2} |z-x|^{-\lambda p'} |z^\bullet|^{-\nu p} dz \leqslant K|x|^{-\lambda p'} \int\limits_{|z|\leqslant|x|/2} |z^\bullet|^{-\nu p'} dz =$$
$$= K_1 |x|^{-\lambda p'} \int\limits_0^{|x|/2} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\nu p'/2}} dr \leqslant$$
$$\leqslant K_1 |x|^{-\lambda p'} \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \nu p' > n; \\ 1 + \ln|x|, & \text{если} \quad \nu p' = n; \\ |x|^{n-\nu p'}, & \text{если} \quad \nu p' < n. \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь была сделана замена $z = |z|\,\theta = r\theta$.

Во второй области $|z| \leqslant |z^\bullet| \leqslant \sqrt{2}\,|z|$. Поэтому, полагая $z = |x|\,\zeta$, $x = |x|\,\theta$, будем иметь

$$\int\limits_{|z|\geqslant|x|/2} |z-x|^{-\lambda p'} |z^\bullet|^{-\nu p'} dz \leqslant K \int\limits_{|z|\geqslant|x|/2} |z-x|^{-\lambda p'} |z|^{-\nu p'} dz =$$
$$= K|x|^{-\lambda p' - \nu p' + n} \int\limits_{|\zeta|\geqslant 1/2} |\zeta - \theta|^{-\lambda p'} |\zeta|^{-\nu p'} d\zeta, \tag{1.6}$$

причем последний интеграл сходится.

Сопоставляя неравенства (1.5) и (1.6), мы и получим нужную оценку (1.3) для $U_\infty(x)$.

A) Способ оценки $U_A(x)$ не отличается от способа оценки $U_\infty(x)$. Аналогично (1.4) будем иметь

$$|U_A(x)| \leqslant \|\varphi \,|\, L_{p,\nu}(R^n)\| \Big(\int\limits_{|z|\leqslant A|x|} |z-x|^{-\lambda p'} |z^\bullet|^{-\nu p'} dz\Big)^{1/p'}.$$

Далее, при $|x| \geqslant 2$,

$$\int\limits_{|z| \leqslant A|x|} |z-x|^{-\lambda p'} |z^{\bullet}|^{-\nu p'} dz =$$

$$= \int\limits_{|z| \leqslant |x|/2} |z-x|^{-\lambda p'} |z^{\bullet}|^{-\nu p'} dz +$$

$$+ \int\limits_{|x|/2 \leqslant |z| \leqslant A|x|} |z-x|^{-\lambda p'} |z^{\bullet}|^{-\nu p'} dz \leqslant$$

$$\leqslant K_1 |x|^{-\lambda p'} \int\limits_0^{|x|/2} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\nu p'/2}} dr +$$

$$+ K_2 |x|^{-\lambda p' - \nu p' + n} \int\limits_{1/2 \leqslant |\zeta| \leqslant A} |\zeta - \theta|^{-\lambda p'} |\zeta|^{-\nu p'} d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant K |x|^{-\lambda p'} \begin{cases} 1, & \text{если } \nu p' > n; \\ \ln|x|, & \text{если } \nu p' = n; \\ |x|^{n-\nu p'}, & \text{если } \nu p' < n, \end{cases}$$

ибо последний интеграл сходится.

Это и дает нужную оценку $U_A(x)$.

Таким образом, первая часть теоремы, т. е. оценка (1.3), доказана. Заметим, что только во втором из трех рассматриваемых случаев имеется ограничение на λ снизу. В случаях 0) и A) поэтому возможны и любые отрицательные значения λ, и значит, рост соответствующего потенциала на бесконечности. В случае ∞) число λ ограничено снизу: $\lambda > n/p' - \nu$, но и здесь при больших положительных ν число λ может оказываться отрицательным, а соответствующий потенциал может расти на бесконечности.

Установим теперь непрерывность сразу всех трех потенциалов U_0, U_∞ и U_A.

Усредним плотность φ. Как мы знаем (см. § 4 гл. I), последовательность $\varphi_h(x)$ сходится к $\varphi(x)$ в любом $L_{p,\nu}$.

Вместе с тем потенциал $U^{(h)}$, отвечающий непрерывной плотности φ_h, очевидно, непрерывен. В силу оценки (1.3) имеем

$$|U^{(h)}(x) - U(x)| \leqslant K \|\varphi - \varphi_h \mid L_{p,\nu}\|$$

в любой ограниченной области.

Поэтому последовательность $U^{(h)}(x)$ сходится к $U(x)$ равномерно, и значит, ее предел — потенциал $U(x)$ — непрерывен. Теорема доказана.

Как мы видим, при λ в допредельной области $\lambda < n/p'$ потенциалы U_0, U_∞ и U_A принадлежат пространству $C(\rho(x))$, где

$$\rho(x) = |x^{\bullet}|^{-\lambda} \begin{cases} 1, & \text{если } \nu p' > n; \\ (1+\ln|x^{\bullet}|)^{-1/p'}, & \text{если } \nu p' = n; \\ |x^{\bullet}|^{\nu - n/p'}, & \text{если } \nu p' < n, \end{cases}$$

причем $\|U(x) \mid C(\rho(x))\| \leqslant K \|\varphi \mid L_{p,\nu}\|$.

§ 2. Вторая теорема об интегралах типа потенциала

Введем понятие смешанного произведения трех функций. Оно определяется по аналогии со «сверточным» определением скалярного произведения двух функций.

Напомним, что

$$(\varphi(x), \psi(-x)) = \int\limits_{R^n} \varphi(y)\psi(-y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{R^n} \varphi(y)\psi(x-y)\,dy\,|_{x=0} = \varphi * \psi\,|_{x=0}.$$

Положим

$$(\varphi(x), \psi(x), \chi(x)) = \varphi(x) * \psi(x) * \chi(x)\,|_{x=0} =$$

$$= \int\limits_{R^n} \Big(\int\limits_{R^n} \varphi(z-y)\psi(y)\,dy \Big) \chi(-z)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{x+y+z=0} \varphi(x)\psi(y)\chi(z)\,dx\,dy.$$

Смешанное произведение есть скалярная величина, симметрично зависящая от всех трех функций.

Основой доказательства второй теоремы об интегралах типа потенциала служит следующая важная лемма, доказательство которой вынесено в § 9.

Лемма IV.1 (о смешанном произведении). *Пусть* $\varphi(z) \in L_p(R^n)$ *и* $\psi(x) \in L_r(R^s)$, *где* $1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$, $1/p + 1/r > 1$ *и* $s \leqslant n$. *Пусть, далее,*

$$\lambda = n + s - n/p - s/r = n/p' + s/r'.$$

Справедлива оценка

$$\left| \int\limits_{R^s} \int\limits_{R^n} \frac{\varphi(z)\psi(x)}{|z-x|^{\lambda}}\,dz\,dx \right| \leqslant K\,\|\varphi \,|\, L_p(R^n)\|\,\|\psi \,|\, L_r(R^s)\|, \tag{2.1}$$

где K — *постоянная, не зависящая от* φ *и* ψ.

В дальнейшем мы будем особенно часто пользоваться случаем, когда $s = n$.

Сформулируем теперь вторую теорему об интегралах типа потенциала. Ограничимся при этом случаем $\nu = 0$ и интегралом $U_\infty(x)$.

Введем предварительно два определения:

а) *пороговой размерностью* $s_{\text{пор}}$ *назовем наименьшее целое неотрицательное число* s, *удовлетворяющее неравенству*

$$s/p > \lambda - n/p',$$

т. е.

$$s_{\text{пор}} = \max(0, n + 1 + [p(\lambda - n)]), \tag{2.2}$$

где символом $[p(\lambda - n)]$ *обозначена целая часть числа* $p(\lambda - n)$;

б) *для любого* s *в промежутке* $s_{\text{пор}} \leqslant s \leqslant n$ *определим число* $q = q_s$ *равенством*

$$s/q = \lambda - n/p'. \tag{2.3}$$

Нам удобно будет в дальнейшем пользоваться также следующими обозначениями:

$${}_s x = \uparrow (x_1, x_2, \ldots, x_s), \qquad {}_s\hat{x} = \uparrow (x_{s+1}, \ldots, x_n).$$

Теорема IV.2 (вторая теорема об интегралах типа потенциала). *Пусть* $\varphi \in L_p(R^n)$. *В запредельной области* $n/p' < \lambda < n$ *при* $s_{\text{пор}} \leqslant s \leqslant n$ *функция* $U_\infty(x)$ *является* $(s, n-s)$*-непрерывной в смысле* $L_{q, \text{loc}}$, *т. е. допускает неполную непрерывную локализацию в смысле* $L_{q, \text{loc}}$ (см. § 5 гл. I) *на любом семействе гладких* s*-мерных многообразий, причем для любой ограниченной области* Ω_S *с конечным объемом на произвольном многообразии* S *этого семейства выполняется неравенство*

$$\| U_\infty(x) \mid L_q(\Omega_s) \| \leqslant K \| \varphi \mid L_p(R^n) \|. \tag{2.4}$$

Если S *является гиперплоскостью, то за* Ω_S *можно взять саму эту гиперплоскость.*

Доказательство. Докажем эту теорему сначала для случая, когда семейством многообразий служит семейство s-мерных гиперплоскостей. При этом достаточно взять семейство, получающееся сдвигами на всевозможные t из s-мерной координатной гиперплоскости $S : {}_s\hat{x} = 0$. Общий случай приводится к данному при помощи поворота осей.

Воспользуемся леммой о смешанном произведении. Пусть $\psi(x)$ — элемент пространства $L_{q'}(S)$, где x — точка гиперплоскости S. (Мы заменяем в лемме о смешанном произведении r на q'.) Построим интеграл

$$\int\limits_{S \times R_z^n} \frac{\varphi(z)\psi(x)}{|x - z|^\lambda}\, dz\, dx, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q'} > 1, \tag{2.5}$$

где $\lambda = n/p' + s/q$ $(s_{\text{пор}} \leqslant s \leqslant n)$, и воспользуемся неравенством (2.1). Из этого неравенства и следует, что интеграл (2.5) сходится и является линейным функционалом над $L_{q'}(S)$. Кроме того, из теоремы Фубини—Тоннели следует, что для почти всех $x \in S$ сходится интеграл

$$\int\limits_{R_z^n} \frac{\psi(x)\varphi(z)}{|x - z|^\lambda}\, dz = \psi(x) \int\limits_{R_z^n} \frac{\varphi(z)}{|x - z|^\lambda}\, dz,$$

а значит, и интеграл $U_\infty(x)$, причем выражение (2.5) является линейным функционалом над $L_{q'}(S)$.

По теореме об общем виде линейного функционала в пространстве $L_{q'}$, функция $U_\infty(x)$ должна быть элементом $L_q(S)$, причем, в силу того же неравенства (2.1),

$$\| U_\infty (x) \mid L_p (S) \| \leqslant K \| \varphi \mid L_p (R^n) \|. \tag{2.6}$$

Докажем теперь, что функция $U_\infty (x)$ допускает неполную непрерывную локализацию на семействе s-мерных гиперплоскостей.

Для этого воспользуемся известным свойством непрерывности в целом функций из $L_p (\Omega)$. Это свойство состоит в том, что

$$\lim_{t\to 0} \| f (x + t) - f (x) \mid L_p (\Omega) \| = 0, \tag{2.7}$$

какова бы ни была область Ω (в том числе и все пространство) и какова бы ни была функция $f (x)$ из $L_p (\Omega)$.

Положим $U (x \mid t) = U (x + t)$ и составим разность

$$U (x \mid t) - U (x \mid 0) = \int\limits_{R^n} \frac{\varphi (z + t) - \varphi (z)}{| x - z |^\lambda} dz.$$

Применяя к ней оценку (2.6) и пользуясь свойством (2.7), получим доказательство нашего утверждения.

Для случая гиперплоскостей теорема доказана.

Случай произвольного семейства гладких s-мерных многообразий сводится к случаю гиперплоскостей с помощью замены переменных. Сделаем такую замену переменных $x = F (\xi)$, чтобы семейство гиперплоскостей размерности s во вспомогательном пространстве Ξ^n перешло в данное гладкое семейство в пространстве R^n. При такой замене интеграл $U_\infty (x)$ примет вид

$$U_\infty (F (\xi)) = \int\limits_{\Xi^n} \frac{\varphi (F (\zeta))}{| F (\xi) - F (\zeta) |^\lambda} \left| \frac{D (z)}{D (\zeta)} \right| d\zeta.$$

При достаточной гладкости преобразования якобиан $K_1 < \left| \frac{D (z)}{D (\zeta)} \right| < K_2$, а разность $F (\xi) - F (\zeta)$ будет удовлетворять неравенству

$$m_1 \leqslant \frac{| F (\xi) - F (\zeta) |}{| \xi - \zeta |} \leqslant m_2.$$

Таким образом,

$$| U_\infty (F (\xi)) | \leqslant K \int\limits_{\Xi^n} \frac{\chi (\zeta)}{| \xi - \zeta |^\lambda} d\zeta,$$

где $\chi (\zeta)$ — некоторая функция из L_p. Используя это неравенство, сразу же получим оценку (2.4).

Неполная непрерывная локализация функции $U_\infty (x)$ может быть получена из аналогичного, несколько более сложного неравенства. Теорема доказана полностью.

З а м е ч а н и е 1. Мы ввели пороговую размерность $s_{\text{пор}}$ как наименьшее целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $s/p > \lambda - n/p'$. Оно однозначно определяется числами λ, n и p.

В классическом понимании из второй теоремы об интегралах типа потенциала следует, что интеграл $U_\infty(x)$ сходится всюду, кроме точек некоторого множества, имеющего s-мерную меру нуль на любом гладком s-мерном многообразии. Это множество зависит от функции φ.

Таким образом, интеграл типа потенциала дает почти готовую точечную локализацию функции $U_\infty(x)$.

Положим в точках особого множества потенциал $U_\infty(x)$ равным нулю. Тогда мы получим всюду определенную функцию точки, которая будет локализацией $U_\infty(x)$.

Замечание 2. В формулировке теоремы фигурировала суммируемость потенциала на области Ω_s с конечным объемом. Это связано со следующим обстоятельством. Гладкое s-мерное многообразие может бесконечное число раз возвращаться в данную область пространства. К числу таких многообразий относится, например, бесконечная лента, накручивающаяся на цилиндр. При движении по такой ленте к цилиндру потенциал не стремится к нулю, и интеграл по всей ленте расходится. Возможны и другие случаи, например когда лента, уходя на бесконечность, задерживается достаточно долго в конечной области пространства так, что интеграл от $U(x)$ успевает на каждой конечной части области возрасти на достаточно большую величину. Это может повлечь за собой то, что он будет расходящимся.

Если исключить подобные случаи из рассмотрения, ограничив разумным образом гладкие многообразия, то можно будет утверждать суммируемость потенциала $U_\infty(x)$ со степенью q по всему многообразию в целом.

§ 3. Непрерывность интегралов типа потенциала

Перейдем теперь к более детальному изучению непрерывности интегралов типа потенциала. Мы установим, что в допредельной области, т. е. при $\lambda < n/p'$, они обладают квалифицированной непрерывностью.

Это означает следующее. Мы покажем, что приращение потенциала $U(x) - U(y)$ всегда оценивается через некоторую степень $|x - y|^\beta$, $0 < \beta \leqslant 1$, и через норму плотности в соответствующем пространстве. Переменные x и y меняются при этом в некотором шаре $|x| < a$, $|y| < a$.

Отметим предварительно одно элементарное числовое неравенство. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ и $\mu \geqslant 0$. Отношение

$$\frac{a^\mu - b^\mu}{(a-b)(a+b)^{\mu-1}}$$

ограничено постоянной, зависящей только от μ. В самом деле, полагая $y = (a - b)/(a + b)$, мы приведем это отношение к виду

$$\frac{(1+y)^\mu - (1-y)^\mu}{2^\mu y}, \tag{3.1}$$

где $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Для любых неотрицательных μ функция (3.1) ограничена в промежутке $-1 \leqslant y \leqslant 1$ константой $K(\mu)$, зависящей только от μ. Итак,

$$|a^\mu - b^\mu| \leqslant K(\mu)\,|a-b|\,(a+b)^{\mu-1}.$$

Отсюда вытекает следующая простая оценка:

$$\left|\frac{1}{a^\lambda}-\frac{1}{b^\lambda}\right| \leqslant K(\lambda)\,|a-b| \begin{cases} \dfrac{(a+b)^{\lambda-1}}{a^\lambda b^\lambda}, & \text{если } \lambda > 0; \\ 0, & \text{если } \lambda = 0; \\ (a+b)^{-\lambda-1}, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

В основном нас будет интересовать случай положительного λ.

Нам понадобится в дальнейшем только тот случай, когда плотность $\varphi(z)$ финитна. Случай, когда $\varphi(z)$ не финитна, мы не рассматриваем.

Рассмотрим потенциал

$$U_0(x) = \int\limits_\Omega \frac{\varphi(z)}{|x-z|^\lambda}\,dz,$$

где Ω — некоторая ограниченная область n-мерного пространства, $\varphi(z) \in L_p(\Omega)$ и $\lambda < n$. Составим разность

$$U_0(x) - U_0(y) = \int\limits_\Omega \left\{\frac{1}{|x-z|^\lambda} - \frac{1}{|y-z|^\lambda}\right\} \varphi(z)\,dz.$$

В силу оценки (3.2) будем иметь при положительных λ

$$|U_0(x)-U_0(y)| \leqslant K\,|x-y| \int\limits_\Omega |\varphi(z)|\,\frac{[|x-z|+|y-z|]^{\lambda-1}}{|x-z|^\lambda\,|y-z|^\lambda}\,dz, \tag{3.3}$$

ибо

$$\big|\,|x-z| - |y-z|\,\big| \leqslant |x-y|.$$

При отрицательных λ получим неравенство

$$|U_0(x)-U_0(y)| \leqslant$$
$$\leqslant K(|\lambda|)\,|x-y| \int\limits_\Omega |\varphi(z)|\,(|x-z|+|y-z|)^{-\lambda-1}\,dz.$$

Вначале разберем случай отрицательных λ. Мы имеем

$$\int\limits_\Omega |\varphi(z)|\,(|x-z|+|y-z|)^{-\lambda-1}\,dz \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega |\varphi(z)|^p\,dz\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Omega [|x-z|+|y-z|]^{-(\lambda+1)p'}\,dz\right)^{1/p'}.$$

При $\lambda \leqslant -1$ второй множитель, очевидно, ограничен при ограниченных x и y. Если же $-1 < \lambda < 0$, то мы оценим этот интеграл, разбив область интегрирования на две части: $|x-z| \geqslant |y-z|$ и $|x-z| \leqslant |y-z|$.

Достаточно оценить интеграл по одной из них. В области $|x-z| \geqslant |y-z|$ справедливо неравенство $|x-z| \geqslant |x-y|/2$. Расширяя область интегрирования и переходя затем к полярным координатам с центром в точке x, будем иметь

$$\int\limits_{|y-z|\leqslant|x-z|,\, z\in\Omega} [|x-z|+|y-z|]^{-(\lambda+1)p'}\, dz \leqslant$$

$$\leqslant K \int\limits_{|x-y|/2\leqslant|x-z|,\, z\in\Omega} |x-z|^{-(\lambda+1)p'}\, dz \leqslant K \int\limits_{|x-y|/2}^{A} \rho^{n-1-(\lambda+1)p'}\, d\rho.$$

Но

$$\int\limits_{|x-y|/2}^{A} \rho^{n-1-(\lambda+1)p'}\, d\rho \leqslant K \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \lambda < n/p' - 1; \\ |\ln|x-y||, & \text{если} \quad \lambda = n/p' - 1; \\ |x-y|^{n-(\lambda+1)p'}, & \text{если} \quad \lambda > n/p' - 1. \end{cases}$$

Отсюда окончательно

$$|U_0(x) - U_0(y)| \leqslant K \| \varphi | L_p(\Omega) \| \times$$
$$\times \begin{cases} |x-y|, & \text{если} \quad \lambda < n/p' - 1; \\ |x-y|\, |\ln|x-y||^{1/p'}, & \text{если} \quad \lambda = n/p' - 1; \\ |x-y|^{n/p'-\lambda}, & \text{если} \quad \lambda > n/p' - 1. \end{cases}$$

Учитывая неравенство $\lambda \leqslant 0$, мы видим, что во всех трех случаях можно подобрать такой показатель β, $0 < \beta \leqslant 1$, при котором

$$|U_0(x) - U_0(y)| \leqslant K \| \varphi | L_p(\Omega) \| \, |x-y|^{\beta}. \tag{3.4}$$

Постоянная K зависит, в частности, от радиуса шара, в котором изменяются x и y.

Квалифицированная непрерывность $U_0(x)$ при $\lambda < 0$ доказана.

Переходим к случаю $\lambda > 0$. Функция

$$\frac{(|x-z|+|y-z|)^{\lambda-1}}{|x-z|^{\lambda}\, |y-z|^{\lambda}}, \qquad \lambda > 0,$$

служит мажорантным ядром, с помощью которого мы будем исследовать непрерывность потенциала $U_0(x)$ при $\lambda > 0$. Эта же мажоранта встретится нам и далее, когда мы будем заниматься собственно теоремами вложения. Полезно поэтому заранее изучить некоторые ее свойства. В следующей серии лемм мы изучаем свойства несколько более общей функции

$$\frac{(|x-z|+|y-z|)^{\nu_0}}{|x-z|^{\nu_1}\, |y-z|^{\nu_2}}.$$

Подставим в нее вместо z вектор $t = ({}_s t, 0)$, у которого последние $n - s$ компонент равны нулю.

Л е м м а IV.2. *Пусть числа ν_1 и ν_2 удовлетворяют неравенствам $\nu_j < s \leqslant n$, $j = 1, 2$, а число ν_0 произвольно.*

Интеграл

$$J_{\nu_0,\nu_1,\nu_2}(x,y)=\int\limits_{\Omega}\frac{(|x-t|+|y-t|)^{\nu_0}}{|x-t|^{\nu_1}|y-t|^{\nu_2}}\,d_s t,$$

где x и y ограничены, а Ω — ограниченная область на плоскости ${}_s\hat{t}=0$, удовлетворяет неравенству

$$J_{\nu_0,\nu_1,\nu_2}(x,y)\leqslant$$

$$\leqslant K\begin{cases}|x-y|^{\nu_0-\nu_1-\nu_2+s}, & \text{если}\quad \nu_0-\nu_1-\nu_2+s<0;\\ |\ln|x-y||, & \text{если}\quad \nu_0-\nu_1-\nu_2+s=0;\\ 1, & \text{если}\quad \nu_0-\nu_1-\nu_2+s>0,\end{cases}\tag{3.5}$$

где K зависит от показателей ν_0, ν_1, ν_2, от диаметра области Ω и от радиуса шара, ограничивающего x и y.

Подынтегральная функция имеет здесь две подвижных особенности x и y. Эти особенности могут по-разному располагаться относительно плоскости, по которой происходит интегрирование. При их сближении с этой плоскостью функция возрастает. Эта функция однородна по совокупности аргументов x, y и t со степенью однородности $\nu_0-\nu_1-\nu_2$, что позволяет изменением масштаба перевести точки x и y на единичное расстояние (раздвинуть особенности, если они были близки). Выберем начало координат в точке x и положим $t=x-\tau\,|x-y|$, тогда $x-t=\tau\,|x-y|$ и $y-t=-(x-y)+\tau\,|x-y|=(\tau-\theta)\,|x-y|$, где

$$\theta=\frac{x-y}{|x-y|}\text{ — единичный вектор.}$$

Очевидно, $d_s t=(-1)^s\,|x-y|^s d_s\tau$. После этой замены наш интеграл перепишется в виде

$$J_{\nu_0,\nu_1,\nu_2}(x,y)=|x-y|^{\nu_0-\nu_1-\nu_2+s}\int\limits_{\Omega(x,y)}\frac{(|\tau|+|\tau-\theta|)^{\nu_0}}{|\tau|^{\nu_1}|\tau-\theta|^{\nu_2}}\,d_s\tau=$$

$$=|x-y|^{\nu_0-\nu_1-\nu_2+s}Q_{\nu_0,\nu_1,\nu_2}(x,y),$$

где $\Omega(x,y)$ — область изменения нового переменного τ, лежащая в s-мерной плоскости

$${}_s\hat{\tau}={}_s\left(\widehat{\frac{x}{|x-y|}}\right)=\frac{{}_s\hat{x}}{|x-y|}\,.$$

Пусть R — максимальное расстояние между точками шара $|x|\leqslant a$, в котором заключены x и y, и точками области Ω. Область Ω лежит внутри шара радиуса R с центром в любой такой точке x. Поэтому s-мерная область $\Omega(x,y)$ заключена в n-мерном шаре радиуса $R/|x-y|$ с центром в начале координат:

$$\Omega(x,y)\subset\{\tau:|\tau|<R/|x-y|\}.$$

Область $\Omega(x,y)$ будет иметь различную величину в зависимости от $|x-y|$, и интеграл, взятый по этой области, нуждается в специфической оценке. Разобьем этот интеграл на две части условиями $|{}_s\tau| < 2$ и $|{}_s\tau| > 2$. Любая из областей $\Omega_1(x, y)$: $\tau \in \Omega(x, y)$, $|{}_s\tau| < 2$ и $\Omega_2(x, y): \tau \in \Omega(x, y)$, $|{}_s\tau| > 2$ может оказаться пустой.

Имеем

$$Q_{\nu_0, \nu_1, \nu_2} = Q^{(1)}_{\nu_0, \nu_1, \nu_2} + Q^{(2)}_{\nu_0, \nu_1, \nu_2}.$$

Первый из этих интегралов

$$Q^{(1)}_{\nu_0, \nu_1, \nu_2} = \int\limits_{\Omega_1(x, y)} \frac{(|\tau| + |\tau - \theta|)^{\nu_0}}{|\tau|^{\nu_1} |\tau - \theta|^{\nu_2}} \, d_s\tau$$

ограничен, ибо подынтегральная функция как функция n переменных τ ограничена везде, кроме окрестностей двух особых точек $\tau = 0$ и $\tau = \theta$; интеграл от нее по любой s-мерной плоскости, пересекающей шар $|\tau| < 2$, ограничен.

Во втором интеграле подынтегральная функция эквивалентна $|{}_s\tau|^{\nu_0 - \nu_1 - \nu_2}$, и поэтому второй интеграл оценивается следующим образом:

$$Q^{(2)}_{\nu_0, \nu_1, \nu_2} = \int\limits_{\Omega_2(x, y)} \frac{(|\tau| + |\tau - \theta|)^{\nu_0}}{|\tau|^{\nu_1} |\tau - \theta|^{\nu_2}} \, d_s\tau \leqslant$$

$$\leqslant K \int\limits_{2}^{R/|x-y|} |{}_s\tau|^{\nu_0 - \nu_1 - \nu_2 + s - 1} \, d\,|{}_s\tau| =$$

$$= K \begin{cases} \left| \ln \dfrac{R}{2|x-y|} \right|, & \text{если } \nu_0 - \nu_1 - \nu_2 + s = 0; \\ \left| |x - y|^{-\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 - s} - (R/2)^{-\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 - s} \right|, & \text{если } \nu_0 - \nu_1 - \nu_2 + s \neq 0. \end{cases}$$

В зависимости от знака показателя $-\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 - s$ во втором случае будет преобладать первое или второе слагаемое.

Возвращаясь к оценке $J_{\nu_0, \nu_1, \nu_2}(x, y)$, мы получим искомое неравенство (3.5). Лемма доказана.

Из этой леммы мы выведем леммы IV.3 и IV.4, аналогичные в некотором смысле первой и второй теоремам об интегралах типа потенциала.

Лемма IV.3. *Пусть функция $\varphi(z)$ принадлежит $L_p(\Omega)$. Пусть, кроме того, $\lambda < n/p'$ (допредельная область). Построим функцию двух переменных x и y*

$$\Psi(x, y) = \int\limits_{\Omega} \varphi(z) \frac{(|x - z| + |y - z|)^{\lambda - 1}}{|x - z|^{\lambda} |y - z|^{\lambda}} \, dz. \tag{3.6}$$

При $|x - y| < A$ для $\Psi(x, y)$ справедлива оценка

$$|\Psi(x, y)| \leqslant K |x - y|^{\beta}, \tag{3.7}$$

где β — некоторое число, такое, что $-1 < \beta \leqslant 0$, а постоянная K зависит от φ и A.

Доказательство. Непрерывность $\Psi(x, y)$ по переменным x и y всюду, кроме «диагонали» $x = y$, очевидна, в силу того, что каждая из особенностей $z = x$ и $z = y$ слабая.

Для оценки функции $\Psi(x, y)$ вблизи «диагонали» $x = y$ применим неравенство Гёльдера. Мы будем иметь

$$|\Psi(x, y)| \leqslant \| \varphi \mid L_p(\Omega) \| \left[\int\limits_{\Omega} \frac{(|x - z| + |y - z|)^{(\lambda-1)p'}}{|x - z|^{\lambda p'} |y - z|^{\lambda p'}} dz \right]^{1/p'}.$$

В силу оценки (3.5) (полагая в ней $s = n$), получим

$$|\Psi(x, y)| \leqslant K \| \varphi \mid L_p(\Omega) \| \times$$

$$\times \begin{cases} |x - y|^{n/p' - \lambda - 1} & \text{если} \quad \lambda > n/p' - 1; \\ |\ln|x - y||^{1/p'}, & \text{если} \quad \lambda = n/p' - 1; \\ 1, & \text{если} \quad \lambda < n/p' - 1. \end{cases}$$

Во всех трех случаях можно подобрать соответствующий показатель β и получить оценку (3.7), что и требовалось.

Сопоставляя (3.3) и (3.7), мы получаем квалифицированную непрерывность потенциала $U_0(x)$ при $0 < \lambda < n/p'$. Именно,

$$|U_0(x) - U_0(y)| \leqslant K \| \varphi \mid L_p(\Omega) \| \, |x - y|^{\gamma}, \tag{3.8}$$

где $0 < \gamma \leqslant 1$.

Мы рассмотрели интеграл (3.6) и изучили его свойства в допредельной области $\lambda < n/p'$. Перейдем теперь к аналогу второй теоремы об интегралах типа потенциала. Изучим интеграл (3.6) в запредельной области $n/p' < \lambda < n$. (Случай $\lambda = n/p'$ мы, как и ранее, не рассматриваем.)

Интеграл (3.6) похож на интегралы типа потенциала. При заданной паре точек x и y он, как и интеграл типа потенциала, может не иметь смысла (т. е. расходиться). Будем считать сначала, что $\varphi(z)$ — ограниченная непрерывная функция.

Лемма IV.4. *Интеграл*

$$Q(x, t) = \int\limits_{\Omega} \varphi(z) \frac{(|x + t - z| + |x - z|)^{\lambda-1}}{|x + t - z|^{\lambda} |x - z|^{\lambda}} dz$$

при постоянном векторе t представляет собою абстрактную функцию переменного ${}_s\hat{x}$ со значениями в $L_{q^*}(\Omega_s)$, где q^* — произвольное число, удовлетворяющее условию:

$$p < q^* < q \quad \text{и} \quad s/q = \lambda - n/p'.$$

Справедлива оценка

$$\| Q(x, t) \mid L_{q^*}(\Omega_s) \| \leqslant K \| \varphi \mid L_p(\Omega) \| \, |t|^{\beta}, \tag{3.9}$$

где $\beta > -1$, а область Ω_s ограничена.

Доказательство мы проведем для q^*, достаточно близкого к q. Если неравенство (3.9) будет установлено для некоторого показателя q^*, то оно тем самым будет доказано и для всех показателей между 1 и q^*, поскольку область Ω ограничена. Заметим сразу, кроме того, что предположение о непрерывности $\varphi(z)$, которое мы сделали вначале, несущественно. В самом деле, из неравенства (3.9) для непрерывных функций следует, путем предельного перехода, его справедливость и для любых $\varphi(z)$ из $L_p(\Omega)$, а вместе с тем и лемма в этом случае.

Положим $1/q^* + 1/p' = 1/\eta$ и $\lambda = s/q^* + n/p' - \varepsilon/\eta = (s - \varepsilon)/q^* + (n - \varepsilon)/p'$. Очевидно, что для q^*, достаточно близких к q, величина ε/η положительна и меньше единицы. Выражение для $|Q(x, t)|$ можно представить в виде

$$|Q(x,t)| \leqslant \int\limits_{\Omega} |\varphi|^{1-p/q^*} \left\{ |\varphi|^{p/q^*} \frac{(|x+t-z|+|x-z|)^{(s-(\varepsilon+\eta))/q^*}}{|x+t-z|^{(s-\varepsilon)/q^*}\,|x-z|^{(s-\varepsilon)/q^*}} \right\} \times$$
$$\times \left\{ \frac{(|x+t-z|+|x-z|)^{(n-(\varepsilon+\eta))/p'}}{|x+t-z|^{(n-\varepsilon)/p'}\,|x-z|^{(n-\varepsilon)/p'}} \right\} dz.$$

Пусть теперь

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{p}{q^*}\right), \qquad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{q^*}, \qquad \frac{1}{p_3} = \frac{1}{p'};$$

очевидно, $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 1$.

Применим теперь к оценке $Q(x, t)$ неравенство Гёльдера для произведения трех функций. Мы будем иметь

$$|Q(x,t)| \leqslant K \,\|\varphi \,|\, L_p(\Omega)\|^{1-p/q^*} \times$$
$$\times \left\{ \int\limits_{\Omega} |\varphi(z)|^p \frac{(|x+t-z|+|x-z|)^{s-(\varepsilon+\eta)}}{|x+t-z|^{s-\varepsilon}\,|x-z|^{s-\varepsilon}} dz \right\}^{1/q^*} \times$$
$$\times \left\{ \int\limits_{\Omega} \frac{(|x+t-z|+|x-z|)^{n-(\varepsilon+\eta)}}{|x+t-z|^{s-\varepsilon}\,|x-z|^{n-\varepsilon}} dz \right\}^{1/q'}.$$

Последний множитель правой части оценивается по лемме IV.2. Так как $\nu_0 - \nu_1 - \nu_2 + n = \varepsilon - \eta < 0$, то мы получим

$$|Q(x,t)| \leqslant K \,\|\varphi \,|\, L_p(\Omega)\|^{1-p/q^*} \,|t|^{(\varepsilon-\eta)/p'} \times$$
$$\times \left\{ \int\limits_{\Omega} |\varphi(z)|^p \frac{(|x+t-z|+|x-z|)^{s-(\varepsilon+\eta)}}{|x+t-z|^{s-\varepsilon}\,|x-z|^{s-\varepsilon}} dz \right\}^{1/q^*}.$$

Подсчитаем теперь величину нормы $\|Q(x, t) \,|\, L_{q^*}(\Omega_s)\|$ при фиксированном ${}_s\hat{x}$ прямым интегрированием:

$$\int\limits_{\Omega_s} |Q(x,t)|^{q^*} d_s x \leqslant K \,\|\varphi \,|\, L_p(\Omega)\|^{q^*-p} \,|t|^{(\varepsilon-\eta)q^*/p'} \times$$
$$\times \int\limits_{\Omega} |\varphi(z)|^p \left\{ \int\limits_{\Omega_s} \frac{(|(z-t-{}_s\hat{x})-{}_sx| + |(z-{}_s\hat{x})-{}_sx|)^{s-(\varepsilon+\eta)}}{|(z-t-{}_s\hat{x})-{}_sx|^{s-\varepsilon}\,|(z-{}_s\hat{x})-{}_sx|^{s-\varepsilon}} d_s x \right\} dz.$$

Внутренний интеграл снова оценивается по лемме VI.2, и мы получим после простой выкладки

$$\int\limits_{\Omega_s} | Q(x, t) |^{q^*} d_s x \leqslant K \| \varphi | L_p(\Omega) \|^{q^*-p} | t |^{(\varepsilon-\eta) q^*/p'} \| \varphi | L_p(\Omega) \|^p | t |^{\varepsilon-\eta},$$

и окончательно

$$\| Q(x, t) | L_{q^*}(\Omega_s) \| \leqslant K \| \varphi | L_p(\Omega) \| | t |^{(\varepsilon-\eta)(1/p'+1/q^*)} =$$
$$= K \| \varphi | L_p(\Omega) \| | t |^{\varepsilon/\eta-1}. \tag{3.10}$$

Поскольку $\varepsilon/\eta > 0$, наше утверждение доказано.

Сопоставляя неравенства (3.3) и (3.10), получаем квалифицированную непрерывность потенциала $U_0(x)$ при $n/p' < \lambda < n$:

$$\| U_0(x | t) - U_0(y | t) | L_{q^*}(\Omega_s) \| \leqslant K \| \varphi | L_p(\Omega) \| |x - y|^\beta, \tag{3.11}$$

где $0 < \beta < 1$ и $t = ({}_s t, 0) \in \Omega_s$ — s-мерный вектор.

Норма приращения потенциала оценена через норму плотности и расстояние между x и y. Для всех плотностей, лежащих внутри единичного шара, норма приращения равномерно стремится к 0 при сближении точек x и y. Итак, для всех λ, $-\infty < \lambda < n$ (кроме предельного показателя n/p'), установлена квалифицированная непрерывность потенциала $U_0(x)$.

Из доказанной нами квалифицированной непрерывности вытекает полная непрерывность оператора потенциала, т. е. оператора свертки с функцией $| x |^{-\lambda}$. Пусть по-прежнему Ω — ограниченная область в R^n, а функция $\varphi(x)$ задана в области Ω и продолжена нулем на все R^n. Пусть, далее, $\varphi \in L_p(R^n)$. Будем рассматривать значения потенциала $U_0(x) = \varphi(x) * | x |^{-\lambda}$, $-\infty < \lambda < n$, $\lambda \neq n/p'$ либо в самой области Ω, либо на сечении Ω какой-нибудь гиперплоскостью S достаточно большой размерности s $(s/p > \lambda - n/p')$.

Напомним, что при $\lambda < n/p'$ пространство плотностей $L_p(\Omega)$ преобразуется оператором потенциала в $C(\overline{\Omega})$ (см. первую теорему об интегралах типа потенциала). При $\lambda > n/p'$ (в силу второй теоремы об интегралах типа потенциала) пространство плотностей $L_p(\Omega)$ переходит в $L_q(\Omega_s)$. Однако квалифицированная непрерывность установлена нами лишь в $L_{q^*}(\Omega_s)$. Здесь $q^* < q$ (ибо $s/q^* > \lambda - n/p'$ и $s/q = \lambda - n/p'$). Поэтому в запредельной области мы установим полную непрерывность оператора потенциала как оператора, действующего из $L_p(\Omega)$ в пространство непрерывных абстрактных функций со значениями в $L_{q^*}(\Omega_s)$, которое мы будем обозначать через $CL_{q^*}(\Omega_s)$ при произвольном $q^* < q$[1]. Иными словами, при $\lambda < n/p'$ мы будем рассматривать $U_0(x) = \varphi(x) * | x |^{-\lambda}$ как обычную функцию от x, а при $n/p' < \lambda < n$ мы будем, как и раньше, вводить s-мерный вектор $t = ({}_s t, 0)$ и рассматривать

[1] Вообще через CX, где X — банахово пространство, мы будем обозначать банахово пространство абстрактных непрерывных в Ω функций со значениями в X.

потенциал $U_0(x+t)$ как абстрактную функцию переменного x со значениями — функциями от t, лежащими в $L_{q^*}(\Omega_s)$.

Теорема IV.3. *Интегральный оператор типа потенциала является вполне непрерывным оператором, т. е. преобразует произвольное множество плотностей $\mathfrak{M}$, ограниченное в $L_p(\Omega)$, в компактное множество в соответствующем пространстве $C(\overline{\Omega})$ или $CL_{q^*}(\Omega_s)$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно установить оценку нормы самого потенциала $U_0(x)$ и оценку нормы его разности $U_0(x+t)-U_0(x)$ при малых t через норму $\|\varphi \mid L_p(\Omega)\|$. Первая и вторая теоремы об интегралах типа потенциала как раз и говорят об ограниченности нормы потенциала числом $K\|\varphi \mid L_p(\overline{\Omega})\|$. Поэтому образ $U_0(\mathfrak{M})$ множества $\mathfrak{M}$ в пространстве $C(\overline{\Omega})$ или соответственно в $CL_{q^*}(\Omega_s)$ ограничен. Равностепенная непрерывность этого образа сразу же следует из неравенств (3.4), (3.8) и (3.11). В случае $-\infty<\lambda<n/p'$ оператор потенциала преобразует ограниченное множество $\mathfrak{M}$ в равностепенно непрерывное и ограниченное в метрике C. Полная непрерывность вложения в $C(\overline{\Omega})$ тем самым установлена.

Рассмотрим теперь случай $n/p'<\lambda<n$. В гл. I доказано, что равностепенная непрерывность вместе с ограниченностью норм в $CL_{q^*}(\Omega_s)$ необходима и достаточна для компактности множества образов $U_0(\mathfrak{M})$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Мы рассматривали полную непрерывность оператора вложения в пространство C и L_{q^*} на конечных областях Ω и Ω_s соответственно. Этот результат может быть перенесен на случай $\Omega=R^n$ или соответственно $\Omega_s=S$ с заменой «чистого» C или «чистого» L_{q^*} на весовые пространства $C(|x^{\cdot}|^{\nu})$ или $L_{q^*,\nu}(S)$. Вдумчивый читатель сумеет сам определить значения ν в обоих этих случаях. Доказательство соответствующей теоремы о полной непрерывности послужит ему хорошим упражнением.

Сделаем также замечание к теоремам об интегралах типа потенциала.

Замечание 2. Первая и вторая теоремы об интегралах типа потенциала употребляются в различных случаях, причем первая имеет в ряде вопросов особое значение. Поэтому мы начали именно с нее, дав ей прямое доказательство. Однако по сути дела она непосредственно вытекает из второй теоремы, являясь ее частным случаем.

В самом деле, если $\lambda<n/p'$, то на основании второй теоремы размерность многообразий, на которых интеграл типа потенциала имеет следы, может быть выбрана равной нулю. Таким образом, существование (ограниченность), а также непрерывность значений функции $U(x)=\varphi(x)*|x|^{-\lambda}$ в каждой точке (т. е. на нульмерном многообразии), составляющие содержание первой теоремы, непосредственно вытекают из второй.

§ 4. Интегралы с потенциальной мажорантой

Практически мы встретимся далее (см. § 5) не только с интегралами типа потенциала, но еще и с интегралами, имеющими более сложный вид. Именно, рассмотрим интеграл

$$V(x) = \int_{R^n} \mathcal{K}(x, z)\, \varphi(z)\, dz, \tag{4.1}$$

где ядро $\mathcal{K}(x, z)$ обладает следующими свойствами:

а) $\mathcal{K}(x, z)$ *непрерывно всюду по* x, *кроме точек «диагонали»* $x = z$;

б) *при любых* x *и* z *имеет место оценка*

$$|\mathcal{K}(x, z)| \leqslant C\, |x - z|^{-\lambda}. \tag{4.2}$$

(Постоянная C зависит, вообще говоря, от радиуса шара, в котором изменяются x и z ($|x| < a$, $|z| < a$ и $\lambda < n$).)

Такие интегралы мы будем называть интегралами с потенциальной мажорантой. Они обладают многими свойствами, роднящими их с потенциалами. Как и для «чистых» потенциалов, полезно рассмотреть три типа интегралов $V_0(x)$, $V_\infty(x)$ и $V_A(x)$ с соответствующими областями интегрирования. Сформулируем обобщения первой и второй теоремы об интегралах типа потенциала. При этом мы будем считать, что для «потенциалов» $V_\infty(x)$ и $V_A(x)$ оценка (4.2) ядер $\mathcal{K}(x, z)$ выполняется с одной и той же константой C во всем пространстве R^n.

Теорема IV.4. *Пусть* $\varphi(x) \in L_{p,\nu}$, $1 < p < \infty$. *В допредельной области* $\lambda < n/p'$ *для интегралов* $V_0(x)$, $V_\infty(x)$ *и* $V_A(x)$ *при любом* x *справедлива оценка*:

$$|V(x)| \leqslant$$
$$\leqslant K \|\varphi\,|\,L_{p,\nu}\| \begin{cases} |x^\cdot|^{-\lambda}, & \text{если} \quad \nu p' > n; \\ |x^\cdot|^{-\lambda}(1 + \ln|x^\cdot|)^{1/p'}, & \text{если} \quad \nu p' = n; \\ |x^\cdot|^{-\lambda-\nu+n/p'}, & \text{если} \quad \nu p' < n. \end{cases}$$

Интегралы $V_0(x)$, $V_\infty(x)$ *и* $V_A(x)$ *с потенциальной мажорантой являются непрерывными функциями* x.

Таким образом, в допредельной области интеграл с потенциальной мажорантой сходится при всех значениях x и дает готовую непрерывную локализацию.

Так же как и для «чистых» потенциалов, в случае «потенциалов» $V(x)$ мы ограничимся в следующей теореме значением $\nu = 0$ и интегралом $V_\infty(x)$. Как и раньше, при $s_{\text{пор}} \leqslant s \leqslant n$ число $q = q_s$ определяется равенством (2.3).

Теорема IV.5. *Пусть* $\varphi \in L_p(R^n)$. *В запредельной области* $n/p' < \lambda < n$ *при* $s_{\text{пор}} \leqslant s \leqslant n$ *и при выполнении на всем* R^n *оценки*

$$|\mathcal{K}(x, z)| \leqslant c\, |x - z|^{-\lambda}$$

функция $V_\infty(x)$ является $(s, n-s)$-непрерывной в смысле $L_{q,\,\mathrm{loc}}$, т. е. допускает неполную непрерывную локализацию в смысле $L_{q,\,\mathrm{loc}}$ на любом семействе гладких s-мерных многообразий, причем для любой ограниченной области Ω_s с конечной площадью на произвольном многообразии S этого семейства выполняется неравенство

$$\| V_\infty(x) \mid L_q(\Omega_s) \| \leqslant K \| \varphi \mid L_p(R^n) \|.$$

Если S является гиперплоскостью, то за Ω_s можно взять саму эту гиперплоскость.

Эти теоремы получаются из теорем IV.1 и IV.2 простым мажорированием ядер $\mathcal{K}(x, z)$ в интегралах $V(x)$.

В заключение этого параграфа отметим, что если ядро $\mathcal{K}(x, z)$ удовлетворяет дополнительному условию:

$$\text{в)}\quad |\mathcal{K}(x, z) - \mathcal{K}(y, z)| \leqslant K \frac{(|x-z| + |y-z|)^{\lambda-1}}{|x-z|^\lambda\, |y-z|^\lambda},$$

то интегралы с потенциальной мажорантой обладают свойством квалифицированной непрерывности. Более точно: если $\varphi \in L_p(R^n)$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$, то

1) в допредельной области $\lambda < n/p'$ имеет место неравенство

$$| V_0(x) - V_0(y) | \leqslant K \| \varphi \mid L_p(R^n) \| \, |x-y|^\beta, \tag{4.3}$$

где постоянная K зависит от радиуса шара, ограничивающего x и y ($|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$), β — число в промежутке $0 < \beta \leqslant 1$;

2) в запредельной области $n/p' < \lambda < n$ будем рассматривать интеграл

$$V(x+t) = \int \mathcal{K}(x+t, z)\, \varphi(z)\, dz$$

как абстрактную функцию аргумента x, значениями которой служат функции из $L_{q^*}(\Omega_s)$ аргумента $t \in \Omega_s$, где $1 \leqslant q^* < q$, а область Ω_s лежит на гиперплоскости S размерности s ($s_{\text{пор}} \leqslant s \leqslant n$), причем, как и раньше, число q определяется соотношением (2.3).

Имеет место неравенство

$$\| V(x+t) - V(y+t) \mid L_{q^*}(\Omega_s) \| < K \| \varphi \mid L_p(\Omega) \| \, |x - y|^\beta, \tag{4.4}$$

где $0 < \beta \leqslant 1$ и $t = ({}_st, 0) \in \Omega_s$.

Доказательство неравенств (4.3) и (4.4) дословно совпадает с доказательством их прототипов для «чистых» потенциалов.

Заметим, наконец, что для ядер $\mathcal{K}(x, z)$, обладающих свойствами а), б) и в), интегральный оператор (4.1) будет вполне непрерывен. Соответствующая теорема формулируется по образцу теоремы IV.3.

§ 5. Интегральные представления функций из $W_{p,\,\mathrm{loc}}^{(l)}(R^n)$

В гл. II, рассматривая пространство $W_p^{(l)}$, мы ввели оператор П, проектирующий его в пространство многочленов P_{l-1}. Это был простейший проектор с поочередным интегрированием по всем переменным (см. § 4 гл. II).

Мы займемся сейчас построением других проекционных формул, из которых можно будет получить новые выводы. Рассмотрим сначала функции одного переменного.

Пусть $\rho(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция одного переменного с не равным нулю интегралом:

$$\varkappa = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\,dt \neq 0.$$

Введем функцию

$$\chi_-(t) = \int_{-\infty}^{t} \rho(\tau)\,d\tau,$$

которая равна 0 левее $\operatorname{supp}\rho$ и $\varkappa$ правее $\operatorname{supp}\rho$. Положим, далее,

$$\psi(x, t) = \psi_-(x, t) = \frac{(t-x)^{l-1}}{(l-1)!}\chi_-(t).$$

Рассмотрим билинейную форму от двух функций ψ и φ

$$B(\psi, \varphi) = \frac{d^{l-1}\psi}{dt^{l-1}}\varphi - \frac{d^{l-2}\psi}{dt^{l-2}}\frac{d\varphi}{dt} + \ldots + (-1)^{l-1}\psi\frac{d^{l-1}\varphi}{dt^{l-1}}$$

и воспользуемся элементарным тождеством

$$\frac{d}{dt}B(\psi, \varphi) = \frac{d^l\psi}{dt^l}\varphi + (-1)^{l-1}\psi\frac{d^l\varphi}{dt^l},$$

справедливым для любой пары l раз непрерывно дифференцируемых функций ψ и φ. Подставляя сюда вместо $\psi(t)$ функцию $\psi_-(x, t)$ и интегрируя, получим

$$\varphi(x)\int_{-\infty}^{x}\rho(t)\,dt = B(\psi_-, \varphi)\Big|_{-\infty}^{x} =$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\frac{d^l\psi_-}{dt^l}(x, t)\,\varphi(t)\,dt + (-1)^{l-1}\int_{-\infty}^{x}\psi_-(x, t)\frac{d^l\varphi}{dt^l}\,dt.$$

Введем также функции

$$\chi_+(t) = -\int_{t}^{+\infty}\rho(\tau)\,d\tau \quad \text{и} \quad \psi_+(x, t) = \frac{(t-x)^{l-1}}{(l-1)!}\chi_+(t)$$

и получим по образцу предыдущей еще одну формулу:

$$\varphi(x)\int_0^\infty \rho(t)\,dt = B(\psi_+,\varphi)\Big|_x^\infty =$$

$$= \int_x^\infty \frac{d^l\psi_+}{dt^l}(x,t)\,\varphi(t)\,dt + (-1)^{l-1}\int_0^\infty \psi_+(x,t)\frac{d^l\varphi}{dt^l}\,dt. \tag{5.1}$$

Складывая эти формулы, получим

$$\varkappa\varphi(x) = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{L}(x,t)\,\varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^\infty \mathcal{K}(x,t)\frac{d^l\varphi}{dt^l}\,dt,$$

где

$$\mathcal{L}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial^l\psi_-}{\partial t^l}(x,t), & \text{если} \quad t < x; \\ \dfrac{\partial^l\psi_+}{\partial t^l}(x,t), & \text{если} \quad t > x; \end{cases}$$

$$\mathcal{K}(x,t) = (-1)^{l-1}\begin{cases} \psi_-(x,t), & \text{если} \quad t < x; \\ \psi_+(x,t), & \text{если} \quad t > x. \end{cases}$$

Ядро $\mathcal{L}(x, t)$ можно записать единой формулой

$$\mathcal{L}(x,t) = \frac{\partial^l}{\partial t^l}\left\{\frac{(t-x)^{l-1}}{(l-1)!}\int_{-\infty}^t \rho(\tau)\,d\tau\right\} =$$

$$= -\frac{\partial^l}{\partial t^l}\left\{\frac{(t-x)^{l-1}}{(l-1)!}\int_t^\infty \rho(\tau)\,d\tau\right\}$$

на всей оси t, $-\infty < t < \infty$. Эта функция является многочленом от x, коэффициенты которого суть бесконечно дифференцируемые финитные функции t, выражающиеся линейно через функцию $\rho(t)$ и ее производные:

$$\mathcal{L}(x,t) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{x^k}{k!}\mathcal{L}_k(t), \tag{5.2}$$

где

$$\mathcal{L}_k(t) = (-1)^k \frac{\partial^l}{\partial t^l}\left\{\frac{t^{l-1-k}}{(l-1-k)!}\int_{-\infty}^t \rho(\tau)\,d\tau\right\} =$$

$$= (-1)^k \sum_{j=0}^{l} \frac{l!}{j!\,(l-j)!}\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{t^{l-1-k}}{(l-1-k)!}\frac{\partial^{l-j}}{\partial t^{l-j}}\int_{-\infty}^t \rho(\tau)\,d\tau =$$

$$= (-1)^k \sum_{j=0}^{l-1-k} \frac{l!}{j!\,(l-j)!}\frac{t^{l-1-k-j}}{(l-1-k-j)!}\rho^{(l-1-j)}(t).$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$\mathscr{L}_k(t) = (-1)^k \sum_{j=0}^{l-1-k} \frac{l!}{(l-1-k-j)!\,(k+1+j)!} \frac{t^j}{j!} \rho^{(k+j)}(t). \qquad (5.3)$$

Ядро $\mathscr{K}(x, t)$ также можно записать единой формулой на всей оси $-\infty < t < \infty$:

$$\mathscr{K}(x, t) = (-1)^{l-1} \frac{(t-x)^{l-1}}{(l-1)!} \left\{ \int_{-\infty}^{t} \rho(\tau)\, d\tau - \frac{\varkappa}{2}(1 + \operatorname{sign}(t-x)) \right\}.$$

Она бесконечно дифференцируема по x и t всюду, кроме «диагонали» $x = t$. Используя разложение (5.2), получим окончательную формулу:

$$\varkappa\varphi(x) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{x^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{L}_k(t)\varphi(t)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{K}(x, t)\varphi^{(l)}(t)\, dt. \qquad (5.4)$$

Это и есть искомое обобщение формулы Маклорена. Формула (5.4) превращается в формулу Маклорена в пределе, когда носитель $\rho(x)$ стягивается в точку 0.

Найдем теперь аналогичное представление для функции многих переменных.

Построение такой формулы проведем усреднением по направлению θ семейства одномерных формул, зависящих от θ.

Пусть Ω — область в R^n, содержащая начало координат, и $C = C_\eta$ — шар радиуса η с центром в начале, целиком лежащий в Ω. *Будем считать, что Ω является звездной относительно C, т. е. что конус с вершиной в произвольной точке $x \in \Omega$, опирающийся на шар C, лежит целиком внутри Ω.* (Ограниченности Ω мы предполагать не будем, пока не сделано соответствующей оговорки.)

Мы будем рассматривать функции $\psi(x, y)$ двух n-мерных переменных, играющих разную роль. Введем следующее обозначение. Точку y будем определять направлением $\theta = \dfrac{y-x}{|y-x|}$ и расстоянием $r = |y - x|$ до точки x.

Любую функцию $\psi(x, y)$ будем заменять функцией

$$\psi^{\odot}(x; r, \theta) = \psi(x, x + r\theta) = \psi\left(x, x + |y-x| \frac{y-x}{|y-x|}\right).$$

Обратно, всякой функции $\psi^{\odot}(x; r, \theta)$ можно сопоставить функцию

$$\psi(x, y) = \psi^{\odot}\left(x; |y-x|, \frac{y-x}{|y-x|}\right)$$

двух n-мерных переменных.

Пусть $\omega(\xi)$ — стандартное одномерное ядро усреднения (см. § 4 гл. I). Введем сферическое ядро

$$v(y) = v(y \mid \eta) = \varkappa_0 \eta^{-n}\, \omega(|y|/\eta),$$

где постоянная $\varkappa_0$ выбрана так, чтобы $\int\limits_{R^n} v(y)dy = 1$. Функция $v(y \mid \eta)$ есть однородная функция степени $-n$ от переменных y и η. Носителем $v(y)$ служит шар C_η.

Из произвольной точки $x \in \Omega$ проведем луч, пересекающий шар. Пусть θ — направление этого луча. При t, пробегающем положительную полуось $0 \leqslant t < \infty$, точка $z = x + t\theta$ пробегает этот луч. Положим

$$\rho(t) = \rho^{\odot}(x; t, \theta) = v(x + t\theta)\, t^{n-1} = \varkappa_0 \eta^{-n} \omega\left(\frac{|x + t\theta|}{\eta}\right) t^{n-1}$$

и введем аналог функции χ_+:

$$\chi^{\odot}(x; r, \theta) = -\int\limits_r^\infty v(x + t\theta)\, t^{n-1}\, dt, \quad r = |x - y|.$$

Функция

$$\chi(x, y \mid \eta) = \chi^{\odot}(x; r, \theta \mid \eta) = \chi^{\odot}(x; r, \theta)$$

зависит от радиуса η шара C и является однородной функцией нулевой степени от трех переменных x, y и η, иначе говоря, при $k > 0$

$$\chi(kx, ky \mid k\eta) = \chi(x, y \mid \eta).$$

Действительно, делая замену $t = ku$, будем иметь

$$\chi(kx, ky \mid k\eta) = \chi^{\odot}(kx; kr, \theta \mid k\eta) = -\int\limits_{kr}^\infty v(kx + t\theta)\, t^{n-1}\, dt =$$

$$= -\int\limits_r^\infty v(k(x + u\theta))\, k^n u^{n-1}\, du = -\int\limits_r^\infty v(x + u\theta)\, u^{n-1}\, du,$$

ибо

$$v(ky \mid k\eta) = k^{-n} v(y \mid \eta).$$

Если принять за независимые переменные x, $y - x$ и η, то, очевидно, $\chi(x, y \mid \eta)$ будет однородной функцией нулевой степени и в этих переменных. В переменных x, $r = |y - x|$, $\theta = \frac{y - x}{|y - x|}$ функция $\chi^{\odot}$ будет однородной функцией нулевой степени от x, r и η:

$$\chi^{\odot}(kx; kr, \theta \mid k\eta) = \chi^{\odot}(x; r, \theta \mid \eta).$$

При заданном x функция $\chi(x, y \mid \eta)$ финитна по y. Ее носитель состоит из шара C_η и конической шапочки $\hat{C}_{\eta, x}$ с вершиной в точке x, опирающейся на этот шар. В этой конической шапочке, как ясно из самого определения, функция $\chi(x, y \mid \eta)$ не зависит от r:

$$\chi^{\odot}(x; r, \theta \mid \eta) = \chi^{\odot}(x; \theta \mid \eta), \quad y \in \hat{C}_{\eta, x}.$$

Наконец,

$$\frac{\partial}{\partial r}\chi^{\odot}(x; r, \theta) = r^{n-1}v(x + r\theta)$$

и

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\chi^{\odot}(x; r, \theta)\right| \leqslant Kr^{n-1}.$$

Введем теперь аналог ψ_{+}. Положим

$$\psi^{\odot}(x; r, \theta) = \psi_l^{\odot}(x; r, \theta) = \frac{r^{l-1}}{(l-1)!}\chi^{\odot}(x; r, \theta).$$

Пусть теперь $\varphi(x)$ есть l раз непрерывно дифференцируемая функция, заданная в области Ω. Рассмотрим функцию $\varphi(x + r\theta)$ и введем билинейную форму

$$B(\psi^{\odot}, \varphi) = \sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k \frac{\partial^{l-1-k}}{\partial r^{l-1-k}}\psi^{\odot}(x; r, \theta)\frac{\partial^k}{\partial r^k}\varphi(x + r\theta)\,[2].$$

В силу тождества

$$\frac{\partial}{\partial r}B(\psi^{\odot}, \varphi) = \frac{\partial^l}{\partial r^l}\psi^{\odot}(x; r, \theta)\varphi(x + r\theta) + $$
$$+ (-1)^{l-1}\psi^{\odot}(x; r, \theta)\frac{\partial^l}{\partial r^l}\varphi(x + r\theta)$$

получим

$$B(\psi^{\odot}, \varphi)\big|_{r=0}^{\infty} = \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial r}B(\psi^{\odot}, \varphi)\,dr =$$
$$= \int_0^{\infty}\frac{\partial^l}{\partial r^l}\psi^{\odot}(x; r, \theta)\varphi(x + r\theta)\,dr +$$
$$+ (-1)^{l-1}\int_0^{\infty}\psi^{\odot}(x; r, \theta)\frac{\partial^l}{\partial r^l}\varphi(x + r\theta)\,dr.$$

Легко проверить, что

$$B(\psi^{\odot}, \varphi)\big|_{r=\infty} = 0 \text{ и } B(\psi^{\odot}, \varphi)\big|_{r=0} = \varphi(x)\chi^{\odot}(x; 0, \theta).$$

Отсюда мы получаем аналог формулы (5.1):

$$\varphi(x)\chi^{\odot}(x; 0, \theta) = \int_0^{\infty}\frac{\partial^l}{\partial r^l}\psi^{\odot}(x; r, \theta)\varphi(x + r\theta)\,dr +$$
$$+ (-1)^{l-1}\int_0^{\infty}\psi^{\odot}(x; r, \theta)\frac{\partial^l}{\partial r^l}\varphi(x + r\theta)\,dr. \qquad (5.5)$$

---

[2] При построении билинейной формы $B(\psi^{\odot}, \varphi)$ можно считать φ продолженной на все R^n произвольным образом.

Проинтегрируем формулу (5.5) по всем направлениям θ на единичной сфере σ. Заменив при этом $r^{n-1}dr d\theta$ на dy и пользуясь тем, что $\int\limits_{R^n} v(y)dy = 1$, получим

$$\varphi(x)=\int\limits_0^\infty\int\limits_\sigma \frac{\partial^l}{\partial r^l}\psi^{\odot}(x; r, \theta)\cdot\varphi(x+r\theta)\,dr\,d\theta +$$
$$+(-1)^{l-1}\int\limits_0^\infty\int\limits_\sigma \psi^{\odot}(x; r, \theta)\frac{\partial^l}{\partial r^l}\varphi(x+r\theta)\,dr\,d\theta. \tag{5.6}$$

Преобразуем полученное выражение. Выкладка показывает, что

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial^l}{\partial r^l}\psi^{\odot}(x; r, \theta)=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(n+l-1)!}{(n+k)!\,(l-k-1)!\,k!}\,r^k\frac{\partial^k}{\partial r^k}v(x+r\theta). \tag{5.7}$$

В самом деле, пусть $l>1$ (случай $l=1$ тривиален, и мы предоставляем рассмотреть его читателю).

Равенство (5.7) коротко может быть переписано в виде

$$L_1 v(x+r\theta) = L_2 v(x+r\theta),$$

где L_1 и L_2 — линейные и однородные обыкновенные дифференциальные операторы по аргументу r порядка $l-1$, определенные на интервале $(0, \infty)$.

Рассмотрим на этом интервале функции r^{-n-j}, $1\leqslant j\leqslant l-1$, которые, очевидно, образуют линейно независимую систему.

Каждая из этих функций, как легко проверить, является решением дифференциального уравнения $L_1u=0$. Покажем, что это же утверждение остается справедливым и для уравнения $L_2u=0$.

Имеем, вычисляя L_2r^{-n-j} и пользуясь формулой бинома Ньютона для $(1-r^{-1})^{l-1}$,

$$r^{n+j}L_2r^{-n-j}=\frac{(n+l-1)!}{(n+j-1)!}\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(-1)^k(n+j+k-1)!}{(n+k)!\,(l-k-1)!\,k!}=$$
$$=(-1)^{j-1}\frac{(n+l-1)!}{(n+j-1)!\,(l-1)!}\frac{d^{j-1}}{dr^{j-1}}\left[r^{-n-1}\left(1-\frac{1}{r}\right)^{l-1}\right]\Bigg|_{r=1}=0.$$

Итак, уравнения $L_1u=0$ и $L_2u=0$ имеют одну и ту же фундаментальную систему решений r^{-n-j}, $1\leqslant j\leqslant l-1$, а так как, кроме того, в этих уравнениях коэффициенты при старших производных одинаковы, то, как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, совпадают все остальные коэффициенты, и равенство (5.7) доказано.

Далее, справедлива формула

$$r^k\frac{\partial^k}{\partial r^k}v(x+r\theta)=\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta!}(y-x)^\beta D^\beta v(y). \tag{5.8}$$

Действительно, при фиксированном θ имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} v(x+r\theta)=\sum_{i=1}^{n}\theta_i D_i v(x+r\theta)=\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i D_i\right) v(x+r\theta)$$

и

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k} v(x+r\theta)=\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i D_i\right)^k v(x+r\theta)=$$
$$=\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta!}\theta^\beta D^\beta v(x+r\theta)=\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta!}\theta^\beta D^\beta v(y).$$

Вспоминая, что $\theta=\frac{y-x}{|y-x|}=\frac{1}{r}(y-x)$ — вектор направляющих косинусов, получаем (5.8).

Сопоставляя теперь (5.7) и (5.8), получим формулу

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial^l}{\partial r^l}\psi^{\odot}(x;r,\theta)=\sum_{|\beta|<l}\frac{(n+l-1)!}{(n+|\beta|)!\,(l-1-|\beta|)!}\frac{(y-x)^\beta}{\beta!}D^\beta v(y)=$$
$$=\sum_{|\gamma|<l}\frac{x^\gamma}{\gamma!}\mathscr{L}_\gamma(y).$$

Здесь ядра $\mathscr{L}_\gamma(y)$ линейно выражаются через функцию $v(y)$ и ее производные:

$$\mathscr{L}_\gamma(y)=\sum_{|\delta|<l-|\gamma|}C_{\gamma\delta}y^\delta D^{\gamma+\delta}v(y)=$$
$$=(-1)^{|\gamma|}\sum_{|\delta|<l-|\gamma|}\frac{(n+l-1)!}{(n+|\gamma|-|\delta|)!\,(l-1-|\gamma|-|\delta|)!}\frac{y^\delta D^{\gamma+\delta}v(y)}{\delta!}. \tag{5.9}$$

При $n=1$ формула (5.9) переходит в (5.3). Как и сама функция $v(y)$, эти ядра — финитные бесконечно дифференцируемые функции с носителем в шаре $|y|\leqslant\eta$.

Мы можем теперь преобразовать первый член в формуле (5.6):

$$\int_0^\infty\int_\sigma\frac{\partial^l}{\partial r^l}\psi^{\odot}(x;r,\theta)\cdot\varphi(x+r\theta)\,dr\,d\theta=\sum_{|\beta|\leqslant l}x^\beta\int_{R^n}\mathscr{L}_\beta(y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Он представляет собой многочлен степени $l-1$ от переменного x. Коэффициенты этого многочлена $\int_{R^n}\mathscr{L}_\beta(y)\varphi(y)\,dy$ получаются интегрированием произведения $\varphi(y)$ на бесконечно дифференцируемые ядра, отличные от нуля только в шаре C.

Из построения ядер $\mathscr{L}_\beta(y)$ вытекает (см. (5.9)) характер их зависимости от радиуса η шара C. Именно,

$$\mathscr{L}_\beta(y)=\mathscr{L}_\beta(y\,|\,\eta)=\eta^{-n-|\beta|}\mathscr{L}_\beta\left(\frac{y}{\eta}\,\middle|\,1\right).$$

Перейдем к рассмотрению второго слагаемого в формуле (5.6). Имеем

$$\frac{\partial^l}{\partial r^l}\varphi(x+r\theta)=\sum_{|\alpha|=l}\frac{l!}{\alpha!}\theta^\alpha D^\alpha\varphi(y)=\sum_{|\alpha|=l}\frac{l!}{\alpha!}\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right)^\alpha D^\alpha\varphi(y).$$

Поэтому

$$(-1)^{l-1}\frac{1}{r^{n-1}}\psi_l^{\odot}(x;r,\theta)\frac{\partial^l}{\partial r^l}\varphi(x+r\theta)=\sum_{|\alpha|=l}\mathcal{K}_\alpha(x,y)\,D^\alpha\varphi(y),$$

где ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ даются формулой

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\alpha(x,y)&=\mathcal{K}_\alpha^{\odot}(x;r,\theta)=\\&=\frac{(-1)^l\,l!\,(y-x)^\alpha}{\alpha!\,|y-x|^n}\int_{|y-x|}^{\infty}v\left(x+t\frac{y-x}{|y-x|}\right)t^{n-1}\,dt=\\&=\frac{(-1)^{l-1}\,l!\,(y-x)^\alpha}{\alpha!\,|y-x|^n}\chi(x,y)=C_\alpha(y-x)^\alpha\frac{\chi(x,y)}{|y-x|^n}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Окончательно имеем

$$\varphi(x)=\sum_{|\beta|<l}x^\beta\int_{R^n}\mathcal{L}_\beta(y)\,\varphi(y)\,dy+\int_{R^n}\sum_{|\alpha|=l}\mathcal{K}_\alpha(x,y)\,D^\alpha\varphi(y)\,dy.\tag{5.11}$$

Тождество (5.11) является основным в наших дальнейших рассуждениях. Оно, очевидно, выполняется для всех функций $\varphi(x)\in W_{\text{loc}}^{(l)}(R^n)$. В этом можно убедиться с помощью предельного перехода. Мы будем пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned}&\Pi\varphi=\sum_{|\beta|<l}x^\beta\int_{R^n}\mathcal{L}_\beta(y)\,\varphi(y)\,dy,\\&\widehat{\Pi}\varphi=\int_{R^n}\sum_{|\alpha|=l}\mathcal{K}_\alpha(x,y)\,D^\alpha\varphi(y)\,dy.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Тождество (5.11) запишется при этом в виде

$$\varphi=\Pi\varphi+\widehat{\Pi}\varphi.\tag{5.13}$$

Легко видеть, что оператор $\widehat{\Pi}$ будет проектором. Действительно, так как $D^\alpha\Pi\varphi=0$ при $|\alpha|=l$, то в силу (5.12) и (5.13) будем иметь

$$\widehat{\Pi}\varphi=\widehat{\Pi}(\varphi-\Pi\varphi)=\widehat{\Pi}(\widehat{\Pi}\varphi)=\widehat{\Pi}^2\varphi.$$

Проекционным будет и оператор Π, поскольку

$$\Pi^2=(I-\widehat{\Pi})^2=I-2\widehat{\Pi}+\widehat{\Pi}^2=I-\widehat{\Pi}=\Pi.$$

Носителем функций $\mathcal{L}_\beta(y)$, как мы отмечали, служит шар C. Проектор Π определен поэтому независимо от области Ω, и построение его не требует звездности этой области. Если проектор

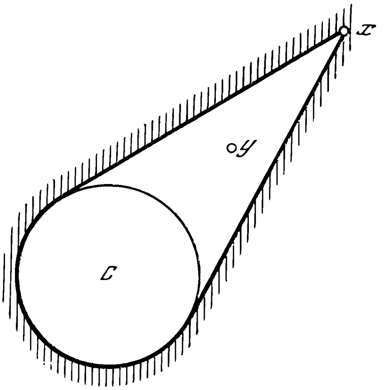

Рис. 3

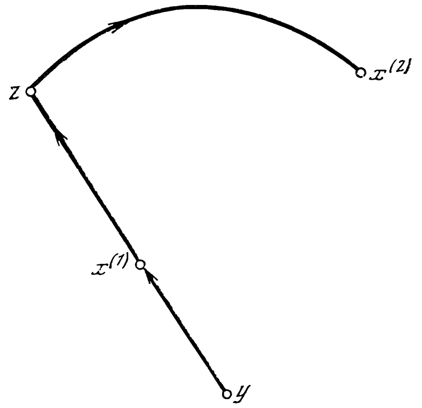

Рис. 4

$\widehat{\Pi}$ определять формулой $\widehat{\Pi} = I - \Pi$, то он также будет определен для функций, заданных в произвольной области, содержащей шар C. Однако явное представление $\widehat{\Pi}$ через ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ требует, чтобы Ω была звездной.

Ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ зависят, конечно, от радиуса η шара C. Иногда мы будем писать их в виде $\mathcal{K}_\alpha(x, y \mid \eta)$.

Легко получить, повторяя такие же рассуждения, семейство проекционных операторов, зависящих от произвольного шара $C_{z,\eta}$ радиуса η с центром в точке z. Ядра, дающие явные представления этих операторов, получатся, если в ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, y) = \mathcal{K}_\alpha(x, y \mid \eta)$, зависящие от двух переменных точек, подставить $x = x' + z$, $y = y' + z$ и положить

$$\mathcal{K}_\alpha(x', y' \mid z, \eta) = \mathcal{K}_\alpha(x' + z, y' + z \mid \eta).$$

Операторы такого типа, связанные с произвольным шаром, мы будем в дальнейшем обозначать символами $\Pi^\odot$ и $\widehat{\Pi}_\odot$.

Полезно установить несколько свойств ядер $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$, входящих в полученное представление (5.11).

1. Ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ *отличны от нуля только при y, лежащем в области, изображенной на рис.* 3. *Эта область состоит из точек самого шара C и из точек конической шапочки, т. е. той части конуса с вершиной в x, касающегося шара C, которая расположена между этим шаром и x.*

2. *Справедливо представление* (5.10) *ядер $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$. Из этого представления вытекает, в частности, что ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ как функции от x и y бесконечно дифференцируемы всюду, кроме «диагонали» $x = y$.*

3. *При ограниченных x и y ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ подчиняются оценке*

$$|\mathcal{K}_\alpha(x, y)| \leqslant A\, |x - y|^{l-n},$$

поскольку функция $\chi(x, y)$ ограничена. Постоянная A зависит от радиуса шара, в котором изменяются x и y.

4. *При ограниченных x и y градиент* $\operatorname{grad}_x \mathscr{K}_\alpha(x, y)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\operatorname{grad}_x \mathscr{K}_\alpha(x, y)| \leqslant A\,|x-y|^{l-n-1}. \tag{5.14}$$

Для доказательства (5.14) воспользуемся представлением (5.10) и сделаем в интеграле замену переменного $t = \tau\,|y-x|$, стабилизирующую нижний предел:

$$\mathscr{K}_\alpha(x, y) = -C_\alpha (y-x)^\alpha\,|y-x|^{-n} \int\limits_{|y-x|}^{\infty} v(x+t\theta)\, t^{n-1}\,dt =$$

$$= -C_\alpha (y-x)^\alpha \int\limits_{1}^{\infty} v(x+\tau(y-x))\,\tau^{n-1}\,d\tau.$$

Поскольку

$$|(y-x)^\alpha| \leqslant K\,|y-x|^l$$

и, очевидно,

$$|\operatorname{grad}_x (y-x)^\alpha| \leqslant K\,|y-x|^{l-1},$$

то достаточно оценить градиент второго сомножителя. Имеем

$$\operatorname{grad}_x \int\limits_1^\infty v(x+\tau(y-x))\,\tau^{n-1}d\tau = \int\limits_1^\infty \operatorname{grad}_x v(x+\tau(y-x))\,\tau^{n-1}\,d\tau =$$

$$= \int\limits_1^\infty (\operatorname{grad} v)(x+\tau(y-x))\,(1-\tau)\,\tau^{n-1}\,d\tau =$$

$$= |y-x|^{-n-1} \int\limits_{|y-x|}^{\infty} (\operatorname{grad} v)(x+t\theta)\,(|y-x|-t)\,t^{n-1}\,dt, \tag{5.15}$$

где использовано обозначение

$$(\operatorname{grad} v)(x+\tau(y-x)) = \operatorname{grad}_z v(z)\,\big|_{z=x+\tau(y-x)}.$$

При ограниченных x и y сомножитель $|y-x|-t$ не превосходит $t+K$, и поскольку интегрирование фактически ведется в конечных пределах, интеграл в (5.15) ограничен. Отсюда и вытекает (5.14).

5. *При ограниченных* $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ *и* y *имеют место оценки*:

а) *при* $n > l$

$$|\mathscr{K}_\alpha(x^{(1)}, y) - \mathscr{K}_\alpha(x^{(2)}, y)| \leqslant$$

$$\leqslant A\,|x^{(1)}-x^{(2)}|\,\frac{(|x^{(1)}-y|+|x^{(2)}-y|)^{n-l-1}}{(|x^{(1)}-y|\,|x^{(2)}-y|)^{n-l}}, \tag{5.16}$$

б) *при* $n = l$

$$|\mathscr{K}_\alpha(x^{(1)} - y) - \mathscr{K}_\alpha(x^{(2)}, y)| \leqslant$$

$$\leqslant A\,|x^{(1)}-x^{(2)}|\,\frac{(|x^{(1)}-y|+|x^{(2)}-y|)^{-1+\varepsilon}}{(|x^{(1)}-y|\,|x^{(2)}-y|)^{\varepsilon}}, \tag{5.17}$$

где ε *— сколь угодно малое положительное число*;

в) *при* $n < l$

$$|\mathcal{K}_\alpha(x^{(1)}, y) - \mathcal{K}_\alpha(x^{(2)}, y)| \leqslant$$
$$\leqslant A\,|x^{(1)} - x^{(2)}|\,(|x^{(1)} - y| + |x^{(2)} - y|)^{l-n-1}.$$

Мы получим эти оценки, интегрируя $\mathrm{grad}_x \mathcal{K}_\alpha(x, y)$ по некоторому пути, соединяющему $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. Если $n \geqslant l$, то при выборе пути мы стремимся сразу же отойти от опасной точки y — «полюса» ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$.

Пусть для определенности $|x^{(1)} - y| \leqslant |x^{(2)} - y|$. Продолжим вектор $x^{(1)} - y$ до точки z, такой, что $|z - y| = |x^{(2)} - y|$, а затем проведем в двумерной плоскости, содержащей точки y, $x^{(1)}$, z и $x^{(2)}$, дугу окружности с центром в точке y, соединяющую z и $x^{(2)}$.

В результате мы получим путь $\mathcal{L}(x^{(1)}, z, x^{(2)})$, соединяющий $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. (Этот путь показан на рис. 4.)

Мы разберем случай а) ($n > l$), предоставив читателю разбор случаев б) и в) [3]. Имеем, в силу оценки (5.14),

$$|\mathcal{K}_\alpha(x^{(1)}, y) - \mathcal{K}_\alpha(x^{(2)}, y)| =$$
$$= \left| \int\limits_{\mathcal{L}(x^{(1)}, z, x^{(2)})} (\mathrm{grad}_x \mathcal{K}_\alpha(x, y))\, dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathcal{L}(x^{(1)}, z, x^{(2)})} |\mathrm{grad}_x \mathcal{K}_\alpha(x, y)|\,|dx| \leqslant$$
$$\leqslant A \int\limits_{|x^{(1)}-y|}^{|x^{(2)}-y|} \frac{dr}{r^{n-l+1}} + \frac{A}{|x^{(2)} - y|^{n-l+1}} \mathcal{L} =$$
$$= A_1 \left[\frac{1}{|x^{(1)} - y|^{n-l}} - \frac{1}{|x^{(2)} - y|^{n-l}} \right] + \frac{A}{|x^{(2)} - y|^{n-l+1}} \mathcal{L},$$

где $\mathcal{L}$ — длина дуги z, $x^{(2)}$.

В силу неравенства (5.4) величина в квадратных скобках сразу же получает нужную оценку

$$\frac{1}{|x^{(1)} - y|^{n-l}} - \frac{1}{|x^{(2)} - y|^{n-l}} \leqslant$$
$$\leqslant K\,|x^{(1)} - x^{(2)}|\,\frac{[|x^{(1)} - y| + |x^{(2)} - y|]^{n-l-1}}{|x^{(1)} - y|^{n-l}\,|x^{(2)} - y|^{n-l}}.$$

Для оценки последнего слагаемого заметим, что для произвольной дуги $\mathcal{L}$ и соответствующей ей хорды H имеет место неравенство $\mathcal{L} \leqslant (\pi/2)H$ [4]. Если обозначить через 2φ угол, стягиваемый дугой $\widehat{z, x^{(2)}}$, то, поскольку $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ и поскольку

[3] При выводе неравенства (5.17) нужно использовать оценку:

$$|\mathrm{grad}_x \mathcal{K}_\alpha(x, y)| \leqslant A\,|x - y|^{-1-\varepsilon}.$$

[4] Действительно, длина дуги $\mathcal{L}$ не превосходит половину окружности с центром в середине хорды, проходящей через ее концы, т. е.

$$\mathcal{L} \leqslant \pi\,(H/2).$$

для таких φ справедлива оценка $(2/\pi)\varphi \leqslant \sin\varphi$ или $\varphi \leqslant (\pi/2)\sin\varphi$, имеем

$$\mathscr{L} = 2R\varphi \leqslant 2R\frac{\pi}{2}\sin\varphi = \pi R\frac{H}{2R} = \frac{\pi}{2}H,$$

где R — радиус соответствующей окружности.

Поэтому

$$\mathscr{L} \leqslant \frac{\pi}{2}|z - x^{(2)}| \leqslant \pi|x^{(1)} - x^{(2)}|,$$

ибо $^1/_2|z - x^{(2)}| \leqslant |x^{(1)} - x^{(2)}|$, как это сразу же следует из рассмотрения равнобедренного треугольника с вершинами в точках y, z и $x^{(2)}$.

Имеем

$$\frac{\mathscr{L}}{|x^{(2)} - y|^{n-l+1}} \leqslant K\frac{|x^{(1)} - x^{(2)}|}{|x^{(2)} - y|^{n-l+1}} \leqslant$$

$$\leqslant K|x^{(1)} - x^{(2)}|\frac{1}{|x^{(2)} - y|^{n-l}}\frac{[|x^{(1)} - y| + |x^{(2)} - y|]^{n-l-1}}{|x^{(2)} - y|^{n-l}} \leqslant$$

$$\leqslant K|x^{(1)} - x^{(2)}|\frac{[|x^{(1)} - y| + |x^{(2)} - y|]^{n-l-1}}{|x^{(1)} - y|^{n-l}|x^{(2)} - y|^{n-l}},$$

ибо $|x^{(2)} - y|$ эквивалентно $|x^{(1)} - y| + |x^{(2)} - y|$, поскольку $|x^{(1)} - y| \leqslant |x^{(2)} - y|$.

Оценка (5.16) доказана.

В заключение этого пункта сделаем некоторые общие замечания.

Проекционная формула (5.11) позволяет изучить качественные свойства функций, у которых производные порядка l интегрируемы со степенью p.

Эта важнейшая формула говорит о том, что любая такая функция представима в виде многочлена и суммы интегралов с потенциальной мажорантой, свойства которых мы подробно изучили. Мы могли бы теперь сразу же установить основные теоремы вложения по крайней мере для звездных областей. Однако нам удобнее предварительно разобрать вопрос о способах нормировки пространства $W_p^{(l)}(\Omega, \rho)$.

§ 6. Нормировка пространств $W_p^{(l)}(\Omega, \rho)$

Используем теперь шаровые проекционные операторы для изучения норм в пространствах $W_p^{(l)}(\Omega, \rho)$.

Пусть Ω — область, звездная относительно шара C, $\Pi^{\odot}$ и $\hat{\Pi}^{\odot}$ — соответствующие проекторы.

Обратимся к интегральному представлению (5.11)

$$\varphi(x) = \Pi^{\odot}\varphi(x) + \hat{\Pi}^{\odot}\varphi(x) =$$

$$= \sum_{|\beta|<l} x^{\beta}\int_{\Omega}\varphi(z)\mathscr{L}_{\beta}(z)\,dz + \sum_{|\alpha|=l}\int_{\Omega}\mathscr{K}_{\alpha}(x, z)\,D^{\alpha}\varphi(z)\,dz.$$

Эта формула была установлена для функций $\varphi(x) \in W^{(l)}_{\mathrm{loc}}(R^n)$.

Пусть теперь Ω — произвольная область, содержащая в себе шар C (не обязательно звездная относительно C). Построим по шару C проекционный оператор

$$\Pi^{\odot}\varphi = \sum_{|\beta|<l} x^{\beta} \int_{\Omega} \mathcal{L}_{\beta}(z)\,\varphi(z)\,dz.$$

Поскольку носители $\mathcal{L}_{\beta}(z)$ сосредоточены в шаре C, оператор $\Pi^{\odot}$ определен также на всех локально суммируемых функциях φ, заданных в Ω (независимо от звездности Ω). Оператор $\hat{\Pi}^{\odot}$ можно определить формулой

$$\hat{\Pi}^{\odot}\varphi = \varphi - \Pi^{\odot}\varphi.$$

При этом он также будет определен на всех φ, локально суммируемых в Ω (однако прямое представление $\hat{\Pi}^{\odot}$ через ядра $\mathcal{K}_{\alpha}(x, z)$ будет справедливо только в звездной относительно C части Ω^* области Ω и только для элементов из $W^{(l)}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$).

Введем теперь в пространстве $W^{(l)}_p(\Omega, \rho)$ шаровую норму, связанную с шаровым проектором $\Pi^{\odot}$:

$$\|\varphi \mid W^{(l)}_p(\Omega, \rho)\|^{\odot} = \|\varphi \mid W^{(l)}_p(\Omega, \rho), \Pi^{\odot}\| =$$
$$= \{\|\Pi^{\odot}\varphi \mid \boldsymbol{P}_{l-1}\|^p + \|\varphi \mid L^{(l)}_p(\Omega, \rho)\|^p\}^{1/p} \quad \text{при } 1 \leqslant p < \infty, \tag{6.1}$$

$$\|\varphi \mid W^{(l)}_{\infty}(\Omega, \rho)\|^{\odot} = \max\{\|\Pi^{\odot}\varphi \mid \boldsymbol{P}_{l-1}\|, \|\varphi \mid L^{(l)}_{\infty}(\Omega, \rho)\|\}. \tag{6.2}$$

Иногда эта нормировка при $\Omega = R^n$ оказывается более удобной в приложениях по сравнению с другими. Из результатов § 4 гл. II вытекает, что все шаровые нормы эквивалентны.

Введем еще одну норму в пространстве $W^{(l)}_p(\Omega, \rho)$, которую будем называть простейшей. Пусть E — ограниченная область, лежащая в Ω вместе со своим замыканием.

Положим

$$\|\varphi \mid W^{(l)}_p(\Omega, \rho)\|_E =$$
$$= \left\{\left|\int_E |\varphi|\,dx\right|^p + \|\varphi \mid L^{(l)}_p(\Omega, \rho)\|^p\right\}^{1/p} \quad \text{при } 1 \leqslant p < \infty, \tag{6.3}$$

$$\varphi \mid W^{(l)}_{\infty}(\Omega, \rho)\|_E = \max\left\{\int_E |\varphi|\,dx, \|\varphi \mid L^{(l)}_{\infty}(\Omega, \rho)\|\right\}. \tag{6.4}$$

Легко видеть, что это действительно нормы, ибо всеми свойствами полунормы эти выражения обладают и вдобавок они невырождены (если оба слагаемых в правой части равенств (6.3) или (6.4) одновременно обращаются в нуль, то функция φ является многочленом степени не выше $l - 1$, обращающимся в нуль на E. Но тогда $\varphi(x) \equiv 0$).

Т е о р е м а IV.6. *Для произвольной области Ω шаровая норма $\|\varphi \mid W^{(l)}_p(\Omega, \rho)\|^{\odot}$ и простейшая норма $\|\varphi \mid W^{(l)}_p(\Omega, \rho)\|_E$ экви-*

валентны при любом выборе шара $C \subset \Omega$ и области $E \subset \Omega$, определяющих эти нормы.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega, \rho) \|_E \leqslant K \| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega, \rho) \|^{\odot}. \tag{6.5}$$

Нам достаточно рассмотреть случай, когда $E \subset C$. Общий случай вытекает из возможности покрыть E конечным числом шаров, расположенных в Ω, и из эквивалентности норм, построенных с помощью любых двух шаров.

Разложим функцию φ в шаре C с помощью проектора $\Pi^{\odot}$:

$$\varphi = \Pi^{\odot}\varphi + \widehat{\Pi}^{\odot}\varphi.$$

В пределах шара C проектор $\widehat{\Pi}^{\odot}$ обладает явным представлением через ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, z)$, поэтому, в силу теоремы IV.5, мы имеем оценку

$$\int_C | \widehat{\Pi}^{\odot}\varphi | \, dz \leqslant K \| \varphi \mid L_p^{(l)}(\Omega, \rho) \|. \tag{6.6}$$

Далее, в силу эквивалентности любых двух норм в конечномерном пространстве, справедливо неравенство

$$\int_C | \Pi^{\odot}\varphi | \, dx \leqslant K \| \Pi^{\odot}\varphi \mid \boldsymbol{P}_{l-1} \|. \tag{6.7}$$

Из неравенств (6.6) и (6.7), а также включения $E \subset C$ вытекает, что

$$\int_E | \varphi | \, dx \leqslant K \| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega, \rho) \|^{\odot},$$

откуда и следует неравенство (6.5).

Докажем обратное неравенство

$$\| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega, \rho) \|^{\odot} \leqslant K \| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega, \rho) \|_E. \tag{6.8}$$

Мы можем считать, что $C \subset E$ (в силу эквивалентности любых двух шаровых норм) и что

$$\| p \mid \boldsymbol{P}_{l-1} \| = \int_C | p(x) | \, dx$$

(в силу эквивалентности любых двух норм в конечномерном пространстве).

Имеем

$$\int_C | \Pi^{\odot}\varphi | \, dx \leqslant \int_C | \varphi | \, dx + \int_C | \widehat{\Pi}^{\odot}\varphi | \, dx,$$

откуда, в силу включения $C \subset E$ и неравенства (6.6), получаем

$$\| \Pi^{\odot}\varphi \mid \boldsymbol{P}_{l-1} \| \leqslant K \left(\int_C | \varphi | \, dx + \| \varphi \mid L_p^{(l)}(\Omega, \rho) \| \right),$$

и неравенство (6.8), а с ним доказана и вся теорема.

Нами введена норма $\| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega, \rho) \|_E$ с помощью интегрирования по некоторой ограниченной области E, лежащей в области Ω вместе со своим замыканием. Это свойство области E является весьма существенным. Если, например, $E = \Omega = R^n$, то норма $\| \varphi \mid W_p^{(l)}(R^n, \rho) \|_E$ для любого многочлена $p(x) \in \in \boldsymbol{P}_{l-1}$, $p(x) \neq 0$, окажется уже бесконечной, и требование конечности такой нормы сужает пространство $W_p^{(l)}(R^n, \rho)$.

Рассуждения, приведенные в этом параграфе, позволяют нам раз и навсегда фиксировать тип проекционного оператора. Во всех случаях, если не оговорено обратное, мы будем считать, что нормировка пространства $W_p^{(l)}(\Omega, \rho)$ производится с помощью шарового проекционного оператора. Таким образом,

$$\| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega, \rho) \| = \| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega, \rho) \|^{\odot}$$

для любой области Ω (см. (6.1) и (6.2)).

§ 7. Теоремы вложения для конечных областей

Материал третьей и второй глав, а также первых шести параграфов данной главы подготовил нам возможность перейти к новому вопросу — к теоремам вложения.

За последние десятилетия теоремы такого типа получили широкое развитие в функциональном анализе и теории функций, дифференциальных уравнениях, вычислительной математике. В настоящее время сложилось целое направление в математическом анализе — теория вложений, которая интенсивно развивается. Начало этому направлению положили в первую очередь работы советских математиков [35, 37, 38, 29, 33, 24, 5, 26, 17], а также работы [3, 8, 15, 22, 31, 32, 27, 28, 48]. Подробную библиографию читатель найдет в монографиях [1, 4], [23, 25, 5, 46, 48, 28, 16, 45], а также в обзорной статье [6].

В данной книге мы приведем доказательства двух простейших теорем вложения, формулируемых в терминах пространства $W_p^{(l)}(\Omega)$ при целых l. Функциональные пространства с «производными дробного порядка» l мы рассматривать не будем.

Перед чтением дальнейшего рекомендуем читателю вновь обратиться к § 4 данной главы.

Докажем теперь основные теоремы вложения.

Пусть область Ω является объединением конечного числа ограниченных областей, звездных каждая относительно своего шара. Для областей, не удовлетворяющих этому условию, теоремы вложения усложняются.

Т е о р е м а IV.7 (первая основная теорема вложения). *При $lp > n$ всякая функция $\varphi(x)$ из $W_p^{(l)}(\Omega)$ непрерывна (т. е. имеет непрерывную локализацию) всюду в области Ω вплоть до границы. Справедливо неравенство*

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi(x)| = \| \varphi \mid C(\overline{\Omega}) \| \leqslant K \| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega) \|.$$

Иными словами, справедливо вложение

$$W_p^{(l)}(\Omega) \to C(\overline{\Omega}) \quad \textit{при} \quad l > n/p.$$

Здесь $\overline{\Omega}$ — *замыкание области* Ω, *а* $\| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega) \|$ — *какая-либо из эквивалентных норм, изученных в* § 6.

Доказательство. Проведем доказательство для случая области Ω, звездной относительно данного шара C. Общий случай отсюда сразу же следует. Для любой функции φ из $W_p^{(l)}(\Omega)$ мы имеем представление

$$\varphi(x) = \Pi^{\odot}\varphi + \hat{\Pi}^{\odot}\varphi, \tag{7.1}$$

в котором первое слагаемое $\Pi^{\odot}\varphi$ есть полином степени $l-1$, а второе — сумма интегралов с потенциальной мажорантой

$$\hat{\Pi}^{\odot}\varphi = \sum_{|\alpha|=l} \int_{\Omega} \mathscr{K}_{\alpha}(x, z) D^{\alpha}\varphi(z)\, dz. \tag{7.2}$$

В силу оценки

$$|\mathscr{K}_{\alpha}(x, z)| \leqslant C\, |x - z|^{l-n} \tag{7.3}$$

мы находимся в допредельной области $\lambda = n - l < n/p'$. Из первой теоремы об интегралах с потенциальной мажорантой вытекает, что $\hat{\Pi}^{\odot}\varphi$ будет непрерывной функцией всюду в Ω вплоть до границы. Поэтому $\varphi(x) = \Pi^{\odot}\varphi + \hat{\Pi}\varphi \in C(\overline{\Omega})$, т. е. $\varphi(x)$ имеет непрерывную локализацию на $\overline{\Omega}$.

При этом, в силу той же теоремы и в силу эквивалентности всех норм в пространстве полиномов, имеем

$$\| \varphi \mid C(\overline{\Omega}) \| = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi(x)| \leqslant \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\Pi^{\odot}\varphi| + \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\hat{\Pi}^{\odot}\varphi| \leqslant$$

$$\leqslant K\left(\| \Pi^{\odot}\varphi \mid \boldsymbol{P}_{l-1} \| + \| \varphi \mid L_p^{(l)}(\Omega) \|\right) \leqslant K_1 \| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega) \|.$$

Теорема доказана.

Поскольку нами рассматривается случай $\lambda = n - l$, то пороговая размерность определится (см. (2.2)) следующим образом:

$$s_{\text{пор}} = \max(0, 1 + [n - lp]).$$

Теорема IV.8 (вторая основная теорема вложения). *Пусть* $lp < n$, *и пусть* s — *целое число, удовлетворяющее неравенству* $s_{\text{пор}} \leqslant s \leqslant n$.

Определим число $q = q_s$ *равенством*

$$s/q = n/p - l, \qquad R^s \cap \Omega = \Omega_s.$$

Всякая функция $\varphi \in W_p^{(l)}(\Omega)$ *в любой гладкой системе координат является локально элементом пространства со смешанной нормой* $\hat{C}(\cdot)L_q(\cdot)$, *т. е. представляет собой непрерывную абстрактную функцию переменных* $y_{s+1}, \ldots, y_n$ *со значениями в* $L_q(y_1, \ldots, y_s)$.

Иначе говоря, $\varphi(x)$ является $(s, n-s)$-непрерывной, т. е. допускает неполную непрерывную локализацию в смысле $L_{q,\,\mathrm{loc}}$ на любом семействе гладких s-мерных многообразий, причем для любой ограниченной области Ω_s с конечной площадью на произвольном многообразии S этого семейства выполняется неравенство

$$\| \varphi \mid L_q(\Omega_s) \| \leqslant K \| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega) \|. \tag{7.4}$$

Доказательство. Как и в случае первой теоремы, доказательство проведем только для области Ω, звездной относительно C. По-прежнему имеем представление (7.1)—(7.2) и оценку (7.3), однако теперь мы находимся в запредельной области, ибо $n/p' < \lambda = n - l < n$. Из второй теоремы об интегралах с потенциальной мажорантой (теорема IV.5) сразу же следует оценка (7.4). Имеем

$$\| \varphi \mid L_q(\Omega_s) \| \leqslant \| \Pi^{\odot}\varphi \mid L_q(\Omega_s) \| + \| \widehat{\Pi}^{\odot}\varphi \mid L_q(\Omega_s) \| \leqslant$$
$$\leqslant K (\| \Pi^{\odot}\varphi \mid \boldsymbol{P}_{l-1} \| + \| \varphi \mid L_p^{(l)}(\Omega) \|) \leqslant K \| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega) \|.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорему IV.8 можно сформулировать так, чтобы пояснить название термина «теорема вложения». Для этого рассмотрим функцию $\varphi(x) \in W_{p,\nu}^{(l)}$ при $lp < n$. Ее можно трактовать как абстрактную функцию, заданную на каком-нибудь семействе многообразий, например на гиперплоскостях ${}_s\hat{x} = \mathrm{const}$ со значениями из $L_q(S)$. Докажем, что это возможно. Зафиксируем ${}_s\hat{x}^{(0)}$ и будем рассматривать как эквивалентные функции $\varphi({}_sx, {}_s\hat{x})$, значения которых при ${}_s\hat{x} = {}_s\hat{x}^{(0)}$ совпадают. Множество рассматриваемых нами функций распадается на классы эквивалентных функций. Каждый такой класс мы будем условно обозначать символом $\psi({}_sx) = \varphi({}_sx, {}_s\hat{x}^{(0)})$. Как обычно, функцию $\psi({}_sx)$ будем называть следом $\varphi(x)$. Множество этих следов обозначим через Tr.

В множестве следов определим норму по формуле

$$\| \psi({}_sx) \mid \mathrm{Tr} \| = \inf_{\Phi({}_s\hat{x},\ {}_sx(0)=\psi({}_sx)} \| \Phi(x) \mid W_p^{(l)}(\Omega) \|,$$

т. е. будем считать норму следа равной наименьшей среди норм представителей класса.

По доказанной нами теореме $\| \psi({}_sx) \mid L_q \| \leqslant k \| \psi({}_sx) \mid \mathrm{Tr} \|$. Следовательно, пространство следов с введенной нами нормой вложено в $L_q(S)$.

Мы рассматривали следы функций на гиперплоскостях ${}_s\hat{x} = \mathrm{const}$. Случай следов на какой-либо другой системе гладких многообразий сводится к рассмотренному при помощи замены переменных. В силу этого нам удобно говорить об операторе вложения. Определим оператор вложения еще одним способом. Рассмотрим $\varphi \in W_p^l(\Omega)$. Будем считать, что функция $\varphi({}_sx + y)$ определена для всех ${}_sx \in \Omega_s$, $y \in \Omega$. Эта функция является абстрактной функцией переменного $y \in \Omega$ со значениями в $L_q(\Omega_s)$.

Теорема IV.9 (В. И. Кондрашев). *Пусть* $lp < n$, $s_{\text{пор}} \leqslant s \leqslant n$, $s/q = n/p - l$ *и* $1 \leqslant q^* < q$.

Оператор g: $W_p^{(l)}(\Omega) \to CL_{q^*}(\Omega_s)$, *сопоставляющий* $\varphi(x)$ *абстрактную функцию переменного* y *по формуле*

$$g\varphi(x) = \varphi({}_sx + y),$$

вполне непрерывен.

Доказательство этой теоремы следует из критерия Рисса компактности множества в L_q (см. § 7 гл. I). Для любого ограниченного множества $\mathfrak{M}$ функций из $W_p^{(l)}(\Omega)$ множество их следов на Ω_s равномерно ограничено в $L_{q^*}(\Omega_s)$ (см. (7.4)).

В силу квалифицированной непрерывности интегралов с потенциальной мажорантой множество следов удовлетворяет в $L_{q^*}(\Omega_s)$ и второму требованию критерия Рисса — равномерной непрерывности при сдвигах. (Впрочем, для формального применения критерия Рисса надо предварительно распрямить многообразие S гладким преобразованием). Таким образом, оператор вложения g преобразует произвольное ограниченное множество в компактное. Теорема доказана.

Замечание (к теоремам вложения для конечной области). Теоремы вложения показывают, что произвольная функция φ из $W_p^{(l)}(\Omega)$ $(s, n-s)$-непрерывна для всех $s < n$, вплоть до пороговой размерности $s_{\text{пор}}$. Вместе с тем у функции φ существуют обобщенные производные $D^\alpha\varphi$, где $|\alpha| = l - k$, $k = 0, 1, \ldots, l$. Каждая такая производная сама служит элементом пространства $W_p^{(k)}(\Omega)$, и, значит, для нее можно ввести соответствующую пороговую размерность $s_{\text{пор}}^{(k)}$ как наименьшее целое неотрицательное число, удовлетворяющее неравенству $s_{\text{пор}}^{(k)} > n - kp$; очевидно, что $s_{\text{пор}} \leqslant s_{\text{пор}}^{(l)} \leqslant \ldots \leqslant s_{\text{пор}}^{(1)}$. Таким образом, производная $D^\alpha\varphi$, $|\alpha| = l - k$, $(s, n-s)$-непрерывна для всех $s \leqslant n$ вплоть до размерности $s_{\text{пор}}^{(k)}$.

Пусть S — гладкое многообразие размерности s, расположенное внутри или на границе области Ω.

Естественно поставить вопрос: производные каких порядков функции $\varphi(x) \in W_p^{(l)}(\Omega)$ «локализуемы» на многообразии S? Ответ здесь следующий (проверка предоставляется читателю).

На многообразии S размерности s, $s_{\text{пор}} \leqslant s \leqslant n$, «локализуемы» все производные $D^\alpha\varphi$ до порядка $l - [(n-s)/p] - 1$ включительно.

§ 8. Замыкание множества функций, финитных в конечной области

Рассмотрим в R^n ограниченную область Ω, полученную объединением конечного числа областей, звездных каждая относительно своего шара. Нас будет интересовать вопрос о замыкании

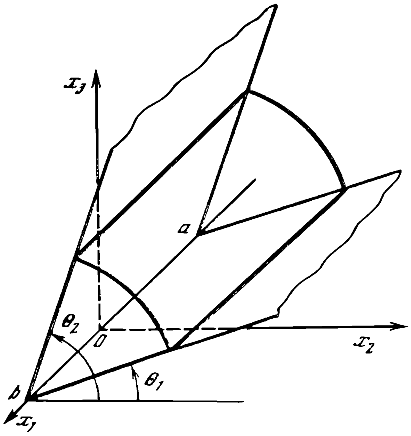

Рис. 5

множества $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$ в пространстве $W_p^{(l)}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Будем обозначать его, как и прежде, символом $\overset{\circ}{W}{}_p^{(l)}(\Omega)$. В примере из § 1 гл. III показано, что, вообще говоря, $\overset{\circ}{W}{}_p^{(l)}(\Omega)$ образует в $W_p^{(l)}(\Omega)$ собственное подпространство.

В основной теореме этого параграфа мы дадим необходимое и достаточное условие принадлежности $\varphi(x)$ пространству $\overset{\circ}{W}{}_p^{(l)}(\Omega)$. Нам понадобятся некоторые новые понятия и несколько оценок, необходимых для доказательства основной теоремы.

Произвольный вектор x из R^n разобьем, как и раньше, на две составляющих:

$$x = \uparrow({}_sx, {}_s\hat{x}), \qquad {}_sx = \uparrow(x_1, \ldots, x_s), \qquad {}_s\hat{x} = \uparrow(x_{s+1}, \ldots, x_n).$$

Число s — целое и $0 \leqslant s \leqslant n$. Положим

$$\rho = |{}_s\hat{x}| = \Big(\sum_{j=s+1}^{n} x_j^2\Big)^{1/2}, \qquad \theta = {}_s\hat{x}/\rho. \tag{8.1}$$

Таким образом, θ — $(n-s-1)$-мерное «угловое» переменное.

Назовем область $\widehat{\Omega}$ $(n-s)$-мерным углом в R^n, если $\widehat{\Omega}$ является прямым произведением конечной области ${}_s\Omega$ из R^s и конического множества K_Σ из R^{n-s} вида:

$$K_\Sigma = \{{}_s\hat{x} \in R^{n-s} : \rho = |{}_s\hat{x}| > 0,\ \theta = {}_s\hat{x}/\rho \in \Sigma\}.$$

Здесь Σ — область на единичной сфере в $(n-s)$-мерном пространстве. Область ${}_s\Omega$ в R^s называют s-мерной вершиной угла $\widehat{\Omega}$.

В качестве примера на рис. 5 изображен 2-мерный угол в пространстве R^3 с 1-мерной вершиной ${}_1\Omega = \{x_1 : a < x_1 < b\}$. В качестве Σ выбрана дуга единичной окружности $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Таким образом, $\widehat{\Omega}$ в этом случае — клин конечной толщины.

Пусть $\widehat{\Omega}$ — $(n-s)$-мерный угол в R^n, положим

$$l_s = l - 1 - [(n-s)/p].$$

В $W_p^{(l)}(\widehat{\Omega})$ выделим подмножество $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$ функций, которые:

1) обращаются в нуль при $\rho > 1/3$;

2) если $l_s \geqslant 0$, то обращаются в нуль вместе с производными до порядка l_s включительно при $\rho = 0$.

Выберем в $\widehat{\Omega}$ шар, лежащий в области $\rho > 1/3$, и построим соответствующий проекционный оператор $\Pi^{\odot}$. Норму в $W_p^{(l)}(\widehat{\Omega})$

зададим равенством

$$\| \varphi \,|\, W_p \ (\widehat{\Omega}) \| = (\| \varphi \,|\, L_p^{(l)} (\widehat{\Omega}) \|^p + \| \Pi^{\odot} \varphi \,|\, \boldsymbol{P}_{l-1} \|^p)^{1/p}.$$

Далее, существуют положительные постоянные K_1 и K_2 такие, что для любой функции из $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$ имеет место неравенство:

$$K_1 \int_{\widehat{\Omega}} T_l (x \,|\, \varphi)^p \, dx \leqslant \| \varphi \,|\, W_p^{(l)} (\widehat{\Omega}) \|^p \leqslant K_2 \int_{\widehat{\Omega}} T_l (x \,|\, \varphi)^p \, dx. \tag{8.2}$$

Здесь $T_l (x | \varphi)$ — главный квадратичный инвариант φ порядка l.

Пусть k — целое, $0 \leqslant k \leqslant l$ тогда для любой функции $\varphi (x)$ из $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$ определена следующая функция переменного ρ, $\rho \geqslant 0$:

$$\Phi_k (\rho) = \left\{ \int_{\Sigma} \int_{{}_s\Omega} T_k (({}_s x, \rho\theta) \,|\, \varphi)^p \, d\theta \, d_s x \right\}^{1/p}. \tag{8.3}$$

Здесь $T_k (x \mid \varphi)$ — главный квадратичный инвариант порядка k. Заметим, что для любого k от 0 до $l - 1$ функция $\Phi_{k+1} (\rho)$ служит градиентной мажорантой функции $\Phi_k (\rho)$, т. е.

$$\Phi_k (\rho) \leqslant \Phi_{k+1} (\rho). \tag{8.4}$$

Это отношение доказывается так же, как в примере 3 § 5 гл. II.

Переходя в интегралах из (8.2) от переменной x к переменным (x, ρ, θ) и пользуясь обозначением (8.3), перепишем неравенство (8.2) в виде:

$$K_1 \int_0^{\infty} \Phi_l (t)^p \, t^{n-s-1} \, dt \leqslant \| \varphi \,|\, W_p^{(l)} (\widehat{\Omega}) \| \leqslant K_2 \int_0^{\infty} \Phi_l (t)^p t^{n-s-1} dt. \tag{8.5}$$

Рассмотрим еще два интеграла, связанных с функцией $\varphi (x)$ из $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$ равенствами:

$$J_j (\varphi) = \int_0^{\infty} \Phi_j (t)^p \, t^{n-s-1+(j-l)p} \, dt,$$

$$J_{j,1} (\varphi) = \int_0^{\infty} \Phi_j (t)^p \, t^{n-s-1+(j-l)p} \, |\ln t|^{-p} \, dt,$$

$$j = 0, \ldots, l.$$

Лемма IV.5. *Для любой функции* φ *из* $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$ *имеют место неравенства*

$$J_{j,1} (\varphi) \leqslant K \| \varphi \,|\, W_p^{(l)} (\widehat{\Omega}) \|^p, \quad j = 0, \ldots, l, \tag{8.6}$$

где постоянная K *не зависит от* φ.

Доказательство. Пусть φ принадлежит $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$. Если $l = 0$, то (8.6) сразу следует из (8.5) и следующей очевидной оценки:

$$J_{0,1} (\varphi) \leqslant K J_0 (\varphi).$$

Будем считать далее, что $l \geqslant 1$. Пусть сначала $lp < n - s$. Тогда существует постоянная K такая, что для всех φ из $\mathfrak{M}(\hat{\Omega})$ имеет место неравенство

$$J_j(\varphi) \leqslant KJ_{j+1}(\varphi), \quad j = 0, \ldots, l-1. \tag{8.7}$$

Докажем (8.7) индукцией по j, убывающему от $(l-1)$ до 0. Пусть $j = l - 1$. Функция $\varphi(x)$ финитна при $\rho = |{}_s x| > {}^1/_3$ и поэтому функция $\Phi_{l-1}(\rho)$ также финитна при $\rho > {}^1/_3$. При этом справедливо:

$$0 \leqslant \Phi_{l-1}(\rho) = \int_\rho^\infty \Phi'_{l-1}(t)\,dt \leqslant \int_\rho^\infty f(t)\,dt \equiv F(\rho). \tag{8.8}$$

Здесь через $f(t)$ обозначена функция $|\Phi'_{l-1}(t)|$. В частности, $f(t)$ неотрицательна при t из $(0, \infty)$ и, в силу (8.4), $f(t) \leqslant \Phi_l(t)$. Поэтому

$$\int_0^\infty f(t)^p t^{n-s-1}\,dt \leqslant \int_0^\infty \Phi_l(t)^p t^{n-s-1}\,dt = J_l(\varphi) < \infty. \tag{8.9}$$

Сходимость последнего интеграла следует из (8.5). Положим $\lambda = n - s - p$. По условию, $n - s > lp \geqslant p$, т. е. $\lambda > 0$. Применив теперь к функциям $f(t)$ и $F(\rho)$ следствие 5.4 гл. III, получим

$$\int_0^\infty F(t)^p t^{n-s-p-1}\,dt \leqslant \left(\frac{p}{n-s-p}\right)^p \int_0^\infty f(t)^p t^{n-s-1}\,dt. \tag{8.10}$$

Из (8.8)—(8.10) следует, что

$$J_{l-1}(\varphi) = \int_0^\infty \Phi_{l-1}(t)^p t^{n-s-p-1}\,dt \leqslant \left(\frac{p}{n-s-p}\right)^p J_l(\varphi).$$

Тем самым неравенство (8.7) при $j = l - 1$ доказано. При всех остальных j, убывающих от $l - 2$ до 0, рассуждения почти дословно повторяются.

Вспомнив, что $\varphi(x) = 0$ при $\rho > {}^1/_3$, получим

$$\begin{aligned} J_j(\varphi) &= \int_0^{1/3} \Phi_j(t)^p t^{n-s-1+(j-l)p}\,dt, \\ J_{j,1}(\varphi) &= \int_0^{1/3} \Phi_j(t)^p t^{n-s-1+(j-l)p} |\ln t|^{-p}\,dt. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Отсюда и из неравенства $|\ln t| > 1$, справедливого для t из $(0, {}^1/_3]$, очевидно, следует, что

$$J_{j,1}(\varphi) \leqslant J_j(\varphi), \quad j = 0, \ldots, l. \tag{8.12}$$

Из (8.7), (8.5) и (8.12) получаем (8.6). Таким образом, случай $lp < n - s$ разобран.

Пусть теперь $lp = n - s$. Как и в предыдущем случае, доказывается существование постоянной $K > 0$ такой, что для всех φ из $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$ имеют место оценки (8.7) при $j = 1, \ldots, l - 1$. Однако оценить $J_0(\varphi)$ через $J_1(\varphi)$ уже не удается. В этом случае имеет место более слабая оценка:

$$J_{0,1}(\varphi) \leqslant KJ_1(\varphi). \tag{8.13}$$

Убедимся, что это действительно так. Сведем (8.13) к следствию 5.5 гл. III. Из равенства $lp = n - s$ и финитности $\Phi_0(\rho)$, $\Phi_1(\rho)$ при $\rho > 1/3$ следует, что

$$J_1(\varphi) = \int_0^1 \Phi_1(t)^p t^p \frac{dt}{t}, \quad J_{0,1}(\varphi) = \int_0^1 \Phi_0(t^p) \,|\ln t\,|^{-p} \frac{dt}{t}.$$

Рассуждая, как и раньше, получаем

$$\Phi_0(\rho) = \int_\rho^1 \Phi_0'(t)\,dt \leqslant \int_\rho^1 f(t)\,dt \equiv F(\rho). \tag{8.14}$$

Здесь через $f(t)$ обозначена функция $|\Phi_0'(t)|$. В частности, $f(t) \geqslant 0$ при t из $(0, 1)$ и, в силу (8.4), $f(t) \leqslant \Phi_1(t)$. Поэтому

$$\int_0^1 f(t)^p t^{p-1}\,dt \leqslant \int_0^1 \Phi_1(t)^p t^{p-1}\,dt = J_1(\varphi) < \infty. \tag{8.15}$$

По следствию 5.5 гл. III имеем

$$\int_0^1 |\ln t\,|^{-p} F(t)^p \frac{dt}{t} \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^1 f(t)^p t^p \frac{dt}{t}. \tag{8.16}$$

Из (8.14)—(8.16) получаем (8.13). Таким образом, случай $lp = n - s$ также разобран.

Пусть, наконец, $lp > n - s$. Так как $0 \leqslant s \leqslant n - 1$, то $0 \leqslant [(n - s)p] \leqslant l - 1$. Разберем случай, когда $[(n - s)/p] = 0$, т. е. $l_s = l - 1$. Проверим, что при таком предположении справедливы оценки (8.7). Как и раньше, докажем это индукцией по j, убывающему от $l - 1$ до 0. Сведем (8.7) к следствию 5.1 гл. III.

Пусть $j = l - 1$. Если $\varphi \in \mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$, то $D^\alpha \varphi\,|_{\rho=0} = 0$ для любого α: $|\,\alpha\,| \leqslant l - 1$. Отсюда следует, что функция $\Phi_{l-1}(\rho)$ зануляется при $\rho = 0$. Поэтому

$$\Phi_{l-1}(\rho) = \int_0^\rho \Phi_{l-1}'(t)\,dt \leqslant \int_0^\rho f(t)\,dt \equiv F(\rho). \tag{8.17}$$

Здесь через $f(t)$ обозначена функция $|\Phi_{l-1}(t)|$. В частности, $f(t) \geqslant 0$ при t из $(0, \infty)$ и, в силу (8.4), $f(t) \leqslant \Phi_l(t)$. Имеем, далее,

$$\int_0^\infty f(t)^p t^{n-s-1}\,dt \leqslant \int_0^\infty \Phi_l(t)^p t^{n-s-1}\,dt = J_l(\varphi) < \infty. \tag{8.18}$$

Положим $\lambda = p - (n - s)$. Так как $[(n-s)/p] = 0$, т. е. $0 \leqslant \leqslant (n-s)/p < 1$, то $\lambda > 0$. Применяя к $f(t)$, $F(t)$ неравенство (III.5.7) с выбранным показателем λ, получим

$$\int_0^\infty F(t)^p t^{n-s-1-p}\,dt \leqslant \left(\frac{p}{p-n+s}\right)^p \int_0^\infty f(t)^p t^{n-s-1}\,dt. \tag{8.19}$$

Из (8.17)—(8.19) следует

$$J_{l-1}(\varphi) = \int_0^\infty \Phi_{l-1}(t)^p t^{n-s-1-p}\,dt \leqslant \left(\frac{p}{p-n+s}\right)^p J_l(\varphi),$$

т. е. неравенство (8.7) при $j = l - 1$. При убывании j от $l-2$ до 0 оценки (8.7) получаются аналогично. Учитывая еще (8.12), видим, что и этот случай разобран.

Пусть $lp > n - s$, $1 \leqslant [(n-s)/p] \leqslant l - 1$ и $(n-s)/p$ не является целым числом. Тогда заведомо $0 \leqslant l_s \leqslant l - 2$ и $(n - - s)/p > [(n-s)/p]$. Оказывается, что и в этом случае справедливы оценки (8.7). Проверим это.

Пусть $j = l - 1$, тогда имеют место (8.8) и (8.9). Возьмем $\lambda = n - s - p$, тогда

$$\lambda = p\left(\frac{n-s}{p} - 1\right) > p\left(\left[\frac{n-s}{p}\right] - 1\right) \geqslant 0,$$

т. е. $\lambda > 0$. Применив к $f(t)$, $F(t)$ и выбранному λ неравенство (III.5.12), получим (8.7) при $j = l - 1$. Аналогичные рассуждения доказывают (8.7) для всех j, убывающих от $l - 2$ до номера $l_s + + 1$ включительно. Далее, при $l = l_s$ имеем по аналогии с (8.17)

$$\Phi_{l_s}(\rho) = \int_0^\rho \Phi'_{l_s}(t)\,dt \leqslant \int_0^\rho f(t)\,dt \equiv F(\rho), \tag{8.20}$$

где $f(t) = |\Phi'_{l_s}(t)| \geqslant 0$ и $f(t) \leqslant \Phi_{l_s+1}(t)$. Поэтому

$$\int_0^\infty f(t)^p t^{n-s-1-(l_s+1-l)p}\,dt \leqslant J_{l_s+1}(\varphi) < \infty. \tag{8.21}$$

Возьмем $\lambda = (l - l_s)p - (n - s)$, тогда

$$\lambda = p\left(l - l_s - \frac{n-s}{p}\right) = p\left(\left[\frac{n-s}{p}\right] + 1 - \frac{n-s}{p}\right) > 0.$$

Применив к $f(t)$, $F(t)$ и выбранному λ неравенство (III.5.7), а затем воспользовавшись (8.20) и (8.21), получим (8.7) при $j = l_s$. Аналогично следует рассуждать для всех j, убывающих от l_s до 0. Вспоминая опять неравенства (8.12), видим, что этот случай разобран до конца.

Рассмотрим, наконец, последнюю возможность, когда $lp > > n - s$ и $(n-s)/p$ — натуральное число $\leqslant l - 1$. (Отметим, что при $l = 1$ такой возможности нет.) В этом случае $l_s = l - 1 -$

$-(n-s)/p$ и $0 \leqslant l_s \leqslant l-2$. Повторяя почти дословно доказательство, проведенное при $lp < n-s$, удается найти постоянную K такую, что для любой φ из $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$ имеют место неравенства (8.7) при $j = l_s + 2, \ldots, l-1$. Согласно условию, $(n-s) + (l_s + 1 - l)p = 0$, и потому

$$J_{l_s+2}(\varphi) = \int_0^\infty (t\Phi_{l_s+2}(t))^p \frac{dt}{t}.$$

Далее, существует постоянная K такая, что для любой φ из $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$ имеет место:

$$J_{l_s+1,1}(\varphi) \leqslant K J_{l_s+2}(\varphi). \tag{8.22}$$

Это неравенство тем же приемом, что и (8.13), приводится к следствию 5.5 гл. III. Если j убывает от l_s до 0, то оказываются справедливыми следующие оценки:

$$J_{j,1}(\varphi) \leqslant K J_{j+1,1}(\varphi), \quad j = 0, \ldots, l_s. \tag{8.23}$$

Докажем их индукцией по j. При фиксированном j (8.23) сводится к неравенству (III.5.14). Пусть $j = l_s$, тогда из (8.11) получаем

$$J_{l_s,1}(\varphi) = \int_0^{1/3} |\ln t|^{-p} t^{-2p} (t\Phi_{l_s}(t))^p \frac{dt}{t}, \tag{8.24}$$

$$J_{l_s+1,1}(\varphi) = \int_0^{1/3} |\ln t|^{-p} t^{-p} (t\Phi_{l_s+1}(t))^p \frac{dt}{t}.$$

Так как φ из $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$, то $\Phi_{l_s}(0) = 0$ и

$$\Phi_{l_s}(r) = \int_0^r \Phi'_{l_s}(t)\, dt \leqslant \int_0^r f(t)\, dt \equiv F(r). \tag{8.25}$$

Здесь $f(t) = |\Phi'_{l_s}(t)| \geqslant 0$ и, в силу (8.4), $f(t) \leqslant \Phi_{l_s+1}(t)$. Имеем, далее,

$$\int_0^{1/3} t^{-p} |\ln t|^{-p} (tf(t))^p \frac{dt}{t} \leqslant J_{l_s+1,1}(\varphi) < \infty. \tag{8.26}$$

Интеграл $J_{l_s+1,1}(\varphi)$ конечен ввиду (8.22). Возьмем теперь $\lambda = p > 0$, $c = 1/3$, тогда $\lambda |\ln c| = p \ln 3 > p$. Тем самым выполнены все условия следствия 5.6 гл. III. Применив к $f(t)$, $F(t)$ и взятому λ неравенство (III.5.14) и пользуясь (8.24)—(8.26), получим

$$J_{l_s,1}(\varphi) \leqslant \int_0^{1/3} |\ln t|^{-p} t^{-p} F(t)^p \frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant K \int_0^{1/3} t^{-p} |\ln t|^{-p} (tf(t))^p \frac{dt}{t} \leqslant K J_{l_s+1,1}(\varphi),$$

т. е. неравенство (8.23) при $j = l_s$. Аналогичным образом это неравенство получается при $j = l_s - 1, \ldots, 0$.

Вспоминая еще оценки (8.12) и (8.22), видим, что и в этом случае имеет место (8.6). Лемма доказана.

Л е м м а IV.6. *Пусть* $\widehat{\Omega}$ — $(n - s)$-*мерный угол в* R^n *с* s-*мерной вершиной* Ω_s, $0 \leqslant s \leqslant n - 1$. *Любую функцию* φ *из* $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$ *можно сколь угодно точно приблизить в* $W_p^{(l)}(\widehat{\Omega})$ *функцией из* $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$, *финитной вблизи* ${}_s\Omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим «срезывающую» функцию $\psi_\eta(\rho)$, где $0 < \eta < 1$, $\rho \geqslant 0$. Пусть $\omega(\cdot)$ — функция из $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(R)$, определенная в § 4 гл. I. Положим

$$\psi_\eta(\rho) = \begin{cases} \omega\left(\dfrac{\ln\rho}{\ln\eta}\right), & \text{если} \quad \rho = |{}_s\hat{x}| \leqslant 1; \\ 1, & \text{если} \quad \rho = |{}_s x| > 1. \end{cases}$$

Функция $\psi_\eta(\rho)$ равна 1 при $\rho \geqslant \eta^{1/4}$, финитна при $\rho \leqslant \eta^{3/4}$ и принимает значения между 0 и 1 при $\eta^{3/4} \leqslant \rho \leqslant \eta^{1/4}$.

Пусть $\varphi(x)$ принадлежит $\mathfrak{M}(\widehat{\Omega})$, тогда произведение $\varphi_\eta(x) = \psi_\eta(|{}_s\hat{x}|)\,\varphi(x)$ финитно при $\rho \leqslant \eta^{3/4}$ и при $\rho > 1/3$. Докажем, во-первых, что φ_η принадлежит $W_p^{(l)}(\widehat{\Omega})$ и, во-вторых, что

$$\lim_{\eta\to 0} \| \varphi - \varphi_\eta \mid W_p^{(l)}(\widehat{\Omega}) \| = 0. \tag{8.27}$$

Оценим производные от функции $\psi_\eta(\rho)$. Очевидно, что $\psi_\eta^{(k)}(\rho) = 0$ при $\rho \leqslant \eta^{3/4}$ и $\rho \geqslant \eta^{1/4}$. Если же $\eta^{3/4} \leqslant \rho \leqslant \eta^{1/4}$, то имеет место неравенство

$$\left| \psi_\eta^{(k)}(\rho) - \frac{(-1)^{k-1}}{\rho^k} \frac{(k-1)!}{\ln\eta} \omega'\left(\frac{\ln\rho}{\ln\eta}\right) \right| \leqslant K \frac{1}{\rho^k |\ln\eta|^2}.$$

Значит, при $\rho \leqslant \eta^{1/4}$ справедливо:

$$|\psi_\eta^{(k)}(\rho)| \leqslant K \frac{1}{\rho^k |\ln\eta|} \leqslant K \frac{1}{\rho^k |\ln\rho|}.$$

Здесь постоянная K не зависит от ρ, η. Отсюда, в частности, следует, что для $k = 1, \ldots, l$ имеет место неравенство:

$$T_k(x \mid \psi_\eta) \leqslant K/\rho^k\, |\ln\rho|. \tag{8.28}$$

Пусть α: $|\alpha| = l$. Оценим норму в $L_p(\widehat{\Omega})$ производной $D^\alpha\varphi_\eta$. Имеем

$$D^\alpha\varphi_\eta = \psi_\eta D^\alpha\varphi + \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ |\gamma|>0}} \frac{\alpha!}{\beta!\,\gamma!} D^\beta\varphi D^\gamma\psi_\eta. \tag{8.29}$$

Учитывая, что $|\psi_\eta| \leqslant 1$, получим

$$\| \psi_\eta D^\alpha\varphi \mid L_p(\hat{\Omega}) \|^p \leqslant \int_{\hat{\Omega}} |D^\alpha\varphi(x)|^p\, dx. \tag{8.30}$$

Пусть $\beta+\gamma=\alpha$ и $|\gamma|>0$. Из финитности производных функции ψ_η при $\rho>\eta^{1/4}$ и из (8.28) следует

$$\| D^\beta \varphi D^\gamma \psi_\eta \mid L_p(\hat{\Omega})\|^p \leqslant K \int\limits_{\rho\leqslant\eta^{1/4}} |D^\beta\psi|^p \rho^{-|\gamma|p} |\ln\rho|^{-p}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant K\int\limits_0^\infty T_{|\beta|}(x\mid\varphi)^p \rho^{-(l-|\beta|)p}|\ln\rho|^{-p}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant K\int\limits_0^\infty \Phi_{|\beta|}(\rho)^p \rho^{n-s-1+(|\beta|-l)p}|\ln\rho|^{-p}\,d\rho. \tag{8.31}$$

Из (8.29)—(8.31) заключаем, что $\varphi_\eta(x)$ действительно принадлежит $W_p^{(l)}(\hat{\Omega})$.

Для любого α: $|\alpha|=l$, оценим норму в $L_p(\hat{\Omega})$ функции $D^\alpha(\varphi-\varphi_\eta)=D^\alpha((1-\psi_\eta)\varphi)$. Имеем

$$D^\alpha((1-\psi_\eta)\varphi)=(1-\psi_\eta)D^\alpha\varphi-\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\ |\gamma|>0}}\frac{\alpha!}{\beta!\,\gamma!}D^\beta\varphi D^\gamma\psi_\eta. \tag{8.32}$$

Учитывая, что $\psi_\eta\geqslant 0$ и $\psi_\eta=1$ при $\rho>\eta^{1/4}$, получим

$$\|(1-\psi_\eta)D^\alpha\varphi\mid L_p(\hat{\Omega})\|^p=\int\limits_\Omega|(1-\psi_\eta)D^\alpha\varphi|^p\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{\rho\leqslant\eta^{1/4}}|D^\alpha\varphi|^p\,dx. \tag{8.33}$$

В лемме IV.5 мы доказали, что интегралы $J_{j,1}(\varphi)$ при $j=0,\ldots$ $\ldots, l-1$ конечны. Конечен также интеграл $J_l(\varphi)$, что следует из (8.5). Учитывая это, а также (8.31)—(8.33), видим, что при $\eta\to 0$ выполнено равенство (8.27). Лемма IV.6 доказана.

Замечание 8.1. Если все производные гладкой функции $\varphi(x)$ из $\mathfrak{M}(\hat{\Omega})$ до порядка M включительно зануляются в какой-либо точке x_0 замыкания множества $\hat{\Omega}$, то и все производные срезанной функции $\varphi_\eta(x)$ до порядка M включительно также зануляются в x_0. Это сразу же следует из формулы дифференцирования произведения двух функций. В частности, $\operatorname{supp}\varphi_\eta(x)\subset\operatorname{supp}\varphi(x)$.

Замечание 8.2. Заключение леммы IV.6 остается справедливым для любой функции φ, производные которой до порядка l_s включительно обращаются в нуль при $\rho=|{}_s\hat{x}|=0$, а носитель по переменной $\rho=|{}_s\hat{x}|$ конечен. В самом деле, если $\varphi(x)$ финитна при $\rho>A$, то, сделав частичную замену переменных ${}_sy={}_sx$, ${}_s\hat{y}={}_s\hat{x}/(3A)$, перейдем к функции $\hat{\varphi}(y)=\varphi({}_sy,\ (3A)\,{}_s\hat{y})$. Угол $\hat{\Omega}_x$ при этом отобразится на угол $\hat{\Omega}_y$ с той же вершиной, а $\hat{\varphi}(y)$ будет элементом $\mathfrak{M}(\hat{\Omega}_y)$. Применив к $\hat{\varphi}(y)$ лемму IV.6 и совершая обратный переход к переменной x, получим нужное финитное приближение к функции $\varphi(x)$.

Напомним, что область Ω, в которой определены функции из рассматриваемых нами пространств $W_p^{(l)}(\Omega)$, получается объединением конечного числа ограниченных областей, звездных каждая относительно своего шара. Кроме того, будем считать, что граница Ω — кусочно-гладкая поверхность. Разъясним, что мы под этим понимаем.

Всякой ограниченной области Ω можно сопоставить набор из бесконечно дифференцируемых функций $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{M}$, каждая из которых принимает значения в интервале $(0, 1)$, а набор в целом удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{M} \chi_k(x) = 1, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{8.34}$$

Такой набор называют разложением единицы в $\overline{\Omega}$, а любую из функций $\chi_k(x)$ — его слагаемым. Отметим, что, увеличивая число M слагаемых, всегда можно добиться, чтобы диаметр любого из $\operatorname{supp} \chi_k(x)$ стал меньше наперед заданного числа.

Пусть Γ — граница области Ω и $F_j(x) = \operatorname{supp} \chi_j(x) \cap \overline{\Omega}$. Положим $\Gamma_j = \Gamma \cap F_j$. Если $\Gamma_j = \emptyset$, то соответствующее слагаемое $\chi_j(x)$ назовем внутренним, а при $\Gamma_j \neq \emptyset$ — приграничным. Сумму всех внутренних слагаемых данного разложения единицы обозначим $\chi_0(x)$, а все приграничные перенумеруем индексом j. Пусть j изменяется от 1 до N, тогда в соответствии с (8.34) имеем

$$\chi_0(x) + \sum_{j=1}^{N} \chi_j(x) = 1, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{8.35}$$

Предположим теперь, что Ω допускает такое разложение единицы (8.35), при котором носитель F_j в $\overline{\Omega}$ любого приграничного слагаемого $\chi_j(x)$, $j = 1, \ldots, N$, отображается заменой переменных

$$y = f_j(x), \quad x = g_j(y) \tag{8.36}$$

взаимно однозначно на подмножество $\hat{F}_j$ n-мерного многогранного угла $\overline{\Omega}_y^{(j)}$. Если при этом Γ_j переходит в часть границы $\overline{\Omega}_y^{(j)}$, а отображения (8.36) l раз непрерывно дифференцируемы на замыкании множеств F_j и $\hat{F}_j$ соответственно, $j = 1, \ldots, N$, то будем говорить, что область Ω имеет кусочно-гладкую границу.

Примером области с кусочно-гладкой границей служит любой ограниченный выпуклый многогранник в R^n.

Кусочно-гладкая граница Γ области Ω состоит из конечного числа гладких многообразий размерности $\leqslant (n-1)$. Будем обозначать число гладких компонент Γ размерности s через M_s, а сами эти компоненты как $\Gamma_s^{(k)}$, $k = 1, \ldots, M_s$. Ясно, что каждое из многообразий $\Gamma_s^{(k)}$ является объединением прообразов s-мерных граней одного или нескольких многогранников при каких-либо из отображений (8.36).

Перейдем, наконец, к основной теореме этого параграфа.

Теорема IV.10. *Пусть ограниченная область Ω имеет кусочно-гладкую границу, функция $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(l)}(\Omega)$ и*

$$s_{\text{пор}} \leqslant s \leqslant n-1, \quad lp \notin \{n, n+p, \ldots, n+l_s p\}. \tag{8.37}$$

Тогда на любой s-мерной части $\Gamma_s^{(j)}$ границы Ω производная $D^\alpha\varphi$, $|\alpha| \leqslant l_s$, локализуется как тождественно нулевая функция, т. е.

$$D^\alpha\varphi\,|_{\Gamma_s^{(j)}} = 0, \qquad |\alpha| \leqslant l_s, \qquad j = 1, \ldots, M_s. \tag{8.38}$$

Функция φ из $W_p^{(l)}(\Omega)$, удовлетворяющая условиям (8.38), *принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_p^{(l)}(\Omega)$.*

Отметим, что если $lp \leqslant 1$, то все параметры l_s при $0 \leqslant s \leqslant n-1$ отрицательны, и условия (8.38) по существу отсутствуют. В этом случае теорема утверждает, что пространства $W_p^{(l)}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^{(l)}(\Omega)$ совпадают.

Доказательство. Пусть $lp > n - s$, т. е. $l_s \geqslant 0$. Возьмем функцию φ из $\overset{\circ}{W}{}_p^{(l)}(\Omega)$ и проверим, что при условии (8.37) выполнено (8.38). Найдем последовательность $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset \overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$, сходящуюся к $\varphi(x)$ в $W_p^{(l)}(\Omega)$. Если $|\alpha| \leqslant l_s$, то обозначим $\psi = D^\alpha\varphi$, $\psi_k = D^\alpha\varphi_k$. Ясно, что $(\psi - \psi_k) \in W_p^{(l-|\alpha|)}(\Omega)$, причем

$$\|\psi - \psi_k \,|\, W_p^{(l-|\alpha|)}(\Omega)\| \leqslant K \|\varphi - \varphi_k \,|\, W_p^{(l)}(\Omega)\| \to 0,$$

когда k стремится к ∞. Пусть $|\alpha| < l - n/p$, тогда по теореме IV.7 функция $\psi - \psi_k$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и справедлива оценка:

$$\sup_{x \in \Gamma_s^{(j)}} |(\psi - \psi_k)(x)| \leqslant K \|\psi - \psi_k \,|\, W_p^{(l-|\alpha|)}(\Omega)\|. \tag{8.39}$$

Учитывая, что ψ_k финитна в окрестности $\Gamma_s^{(j)}$ и переходя в (8.39) к пределу при $k \to \infty$, видим, что $\psi \equiv 0$ на $\Gamma_s^{(j)}$.

Далее, в силу второго из условий (8.37) $|\alpha| \neq l - n/p$. Остается разобрать случай, когда $l - n/p < |\alpha| \leqslant l_s$. Оценим s снизу. Так как $|\alpha| \leqslant l_s$, то заведомо $|\alpha| < l - (n-s)/p$, т. е. $s > n - (l - |\alpha|)p$. Но s — неотрицательное целое число, и потому $s \geqslant 1 + [n - (l - |\alpha|)p]$. Таким образом, ψ принадлежит $W_p^{(l-|\alpha|)}(\Omega)$ и при этом

$$(l - |\alpha|)p < n, \quad 1 + [n - (l - |\alpha|)p] \leqslant s \leqslant n - 1. \tag{8.40}$$

Определим число q равенством

$$q = sp/(n - (l - |\alpha|)p).$$

Из оценки s снизу, имеющейся в (8.40), вытекает, что $q > 1$. Применим к ψ теорему IV.8, справедливость условий которой мы только что проверили. В результате получим, что на любом множестве $\Omega_\Gamma \subset \Gamma_s^{(j)}$ конечной площади функция ψ локализуется как элемент $L_q(\Omega_\Gamma)$. Далее, применяя к разности $(\psi-\psi_k)$ оценку (7.4), имеем

$$\| \psi-\psi_k \mid L_q(\Omega_\Gamma)\| \leqslant K \| \psi-\psi_k \mid W_p^{(l-|\alpha|)}(\Omega)\|. \tag{8.41}$$

Учитывая опять, что ψ_k финитна в окрестности Ω_Γ и переходя в (8.41) к пределу при $k \to \infty$, видим, что и в этом случае $\psi \equiv 0$ на $\Gamma_s^{(j)}$. Тем самым первое утверждение теоремы IV.10 доказано.

Из определения $W_p^{(l)}(\Omega)$ следует, что любую функцию φ этого пространства можно сколь угодно точно приблизить гладкой функцией в норме $W_p^{(l)}(\Omega)$. Поэтому второе утверждение теоремы достаточно доказать для гладких φ.

Итак, пусть φ — гладкая функция из $W_p^{(l)}(\Omega)$, удовлетворяющая условиям (8.38). Покажем сначала, что φ сколь угодно точно аппроксимируется финитной функцией из $W_p^{(l)}(\Omega)$. Области Ω с кусочно-гладкой границей соответствует разложение единицы (8.35). При этом в любой точке x из Ω справедливо равенство

$$\varphi(x)=\varphi(x)\chi_0(x)+\sum_{j=1}^{N}\varphi(x)\chi_j(x)=\varphi_0(x)+\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(x). \tag{8.42}$$

Если теперь для любого $\varepsilon>0$ и $j \in \{1,\ldots,n\}$ удастся найти функцию $\varphi_j^0(x)$ из $W_p^{(l)}(\Omega)$, финитную в Ω и такую, что $\| \varphi_j - \varphi_j^0 \mid W_p^{(l)}(\Omega)\| \leqslant \varepsilon/N$, то, очевидно, будем иметь

$$\Big\| \varphi(x)-\varphi_0(x)-\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^0(x) \mid W_p^{(l)}(\Omega)\Big\| \leqslant \varepsilon. \tag{8.43}$$

Так как $\operatorname{supp}\varphi_0(x) \subset \bar F_0 \subset \Omega$, то из (8.43) следует, что достаточно отыскать финитные приближения в $W_p^{(l)}(\Omega)$ функций $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,N$. Дальнейшие рассуждения проведем при $j=1$, ибо для всех остальных номеров доказательство дословно повторимо.

Произведение $\varphi_1(x)=\varphi(x)\chi_1(x)$ l раз непрерывно дифференцируемо, причем $\operatorname{supp}\varphi_1(x) \subset \bar F_1$. Дифференцируя φ_1 по формуле Лейбница, несложно убедиться, что $\varphi_1(x)$ также удовлетворяет условиям (8.38) и, кроме того,

$$\| \varphi_1 \mid W_p^{(l)}(F_1)\| \leqslant K \| \varphi \mid W_p^{(l)}(\Omega)\|,$$

где постоянная K не зависит от φ. Сделаем в F_1 гладкую замену переменных $y=f(x)$, $x=g(y)$, переводящую F_1 в ограниченную часть $\widehat F_1$ некоторого n-мерного многогранного угла $\widehat\Omega$ из пространства R_y^n. (Такая замена существует по условию.) Функцию $\hat\varphi_1(y)=\varphi_1(g(y))$, определенную в $\widehat F_1$, продолжим нулем на весь угол $\widehat\Omega$. Тогда, очевидно, $\hat\varphi_1(y)$ финитна в $\widehat\Omega$. Из формулы дифференцирования сложной функции и из условий (8.38) для функции $\varphi_1(x)$ следует, что на любой s-мерной грани $\widehat\Gamma_s^{(k)}$ угла $\widehat\Omega$ производная $D_y^\alpha\hat\varphi_1(y)$ равна 0 при $|\alpha| \leqslant l_s$. Далее, учитывая гладкость замены $y = f(x)$, получим, как и в следствии II.2.3, оценку:

$$\| \hat{\varphi}_1 \mid W_p^{(l)}(\hat{F}_1) \| \leqslant K_1 \| \varphi_1 \mid W_p^{(l)}(F_1) \|.$$

Пользуясь еще замечанием 8.2, видим, что к $\hat{\varphi}_1(y)$ применима лемма IV.6.

Теперь нам удобно ввести несколько новых обозначений. Занумеруем все M_1 граней угла $\hat{\Omega}$ так, чтобы с ростом номера k размерность $s = s(k)$ грани $\hat{\Gamma}_k$ не убывала. Таким образом, $\hat{\Gamma}_1$ будет 0-мерной вершиной угла $\hat{\Omega}$, $\hat{\Gamma}_2$ — 1-мерное ребро $\hat{\Omega}$, ..., $\hat{\Gamma}_{M_1}$ — $(n-1)$-мерная грань $\hat{\Omega}$.

Положим $\hat{\varphi}_{1,0}(y) = \hat{\varphi}_1(y)$, возьмем $\varepsilon_1 > 0$ и построим M, $M \geqslant M_1$, новых функций $\hat{\varphi}_{1,1}(y), \ldots, \hat{\varphi}_{1,M}(y)$ таким образом, чтобы для любого k от 1 до M выполнялись следующие условия:

$$\begin{gathered}
\operatorname{supp} \hat{\varphi}_{1,k}(y) \text{ вложен в } \operatorname{supp} \hat{\varphi}_{1,k-1}(y), \\
\hat{\varphi}_{1,k}(y) \text{ финитна вблизи } \hat{\Gamma}_1, \ldots, \hat{\Gamma}_k; \\
\| \hat{\varphi}_{1,k}(y) - \hat{\varphi}_{1,k-1}(y) \mid W_p^{(l)}(\hat{\Omega}_y) \| \leqslant \varepsilon_1, \\
D^{\alpha} \hat{\varphi}_{1,k}(y) |_{\hat{\Gamma}_m} = 0, \quad |\alpha| \leqslant l_{s(m)}, \quad m \geqslant k.
\end{gathered} \tag{8.44}$$

Из леммы IV.6 и замечаний 8.1 и 8.2 к ней вытекает, что функция $\hat{\varphi}_{1,1}(y)$, удовлетворяющая условиям (8.44) при $k = 1$, действительно существует.

Далее удобно рассуждать по индукции. Пусть $\hat{\varphi}_{1,k}(y)$ удовлетворяет условиям (8.44). Наметим коротко алгоритм, согласно которому можно провести индукционный шаг и построить $\hat{\varphi}_{1,k+1}(y)$.

Прежде всего найдем специальное разложение единицы для выпуклого многогранника, являющегося частью $\hat{\Omega}_y$ и содержащего $\operatorname{supp} \hat{\varphi}_1(y)$. Каждое из слагаемых такого разложения должно иметь носитель столь малых размеров, чтобы пересечение его с многогранником было изометрично какому-нибудь $(n-s)$-мерному углу. Затем, пользуясь формулой, аналогичной (8.42), можно разбить $\hat{\varphi}_{1,k}(y)$ в сумму локальных слагаемых, каждое из которых финитно вблизи $\hat{\Gamma}_1, \ldots, \hat{\Gamma}_k$ и удовлетворяет последнему из условий (8.44). Это позволяет применить к любому локальному слагаемому лемму IV.6 и тем самым аппроксимировать каждое из них функцией, финитной вблизи $\hat{\Gamma}_1, \ldots, \hat{\Gamma}_k, \hat{\Gamma}_{k+1}$. Складывая затем эти локальные приближения, найдем $\hat{\varphi}_{1,k+1}(y)$.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi_{1,M}(x) = \hat{\varphi}_{1,M}(f(x))$, определенную на множестве $F_1 \subset \Omega$. По построению $\hat{\varphi}_{1,M}(y)$ финитна вблизи границы угла $\hat{\Omega}_y$, состоящей из граней $\hat{\Gamma}_1, \ldots, \hat{\Gamma}_M$. Кроме того, носитель $\hat{\varphi}_{1,M}(y)$ конечен, ибо он содержится в $\hat{F}_1$. Значит, функция $\hat{\varphi}_{1,M}(x)$ отлична от нуля лишь на конечном множестве, лежащем строго внутри F_1. Продолжим ее нулем на все Ω и, учитывая гладкость обратного отображения $x = g(y)$, получим, как и в следствии II.2.3, оценку:

$$\| \varphi_{1,M} - \varphi_1 \mid W_p^{(l)}(\Omega) \| = \| \varphi_{1,M} - \varphi_1 \mid W_p^{(l)}(F_1) \| \leqslant$$
$$\leqslant K_2 \| \hat{\varphi}_{1,M} - \hat{\varphi}_1 \mid W_p^{(l)}(\hat{F}_1) \| \leqslant K_2 \| \hat{\varphi}_{1,M} - \hat{\varphi}_1 \mid W_p^{(l)}(\hat{\Omega}_y) \|. \tag{8.45}$$

Отсюда и из третьего свойства в (8.44) следует:

$$\| \varphi_{1,M} - \varphi_1 \mid W_p^{(l)}(\Omega) \| \leqslant$$
$$\leqslant K_2 \sum_{k=1}^{M} \| \hat{\varphi}_{1,k} - \hat{\varphi}_{1,k-1} \mid W_p^{(l)}(\hat{\Omega}_y) \| \leqslant MK_2\varepsilon_1.$$

Взяв теперь $\varepsilon_1 = \varepsilon/(MK_2N)$, построим финитную в Ω функцию $\varphi_1^0(x) = \varphi_{1,M}(x)$, приближающую $\varphi_1(x)$ в норме $W_p^{(l)}(\Omega)$ с точностью ε/N.

Аналогично находятся финитные в Ω функции $\varphi_j^0(x)$, $j = 2, \ldots, N$, каждая из которых приближает с точностью ε/N соответствующую функцию $\varphi_j(x)$ из равенства (8.42). Пусть теперь

$$\varphi^0(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{N} \varphi_j^0(x),$$

тогда $\varphi^0(x)$ финитна в Ω и в соответствии с (8.43) аппроксимирует исходный элемент φ из $W_p^{(l)}(\Omega)$ с точностью ε.

Далее, чтобы найти бесконечно дифференцируемое финитное приближение к $\varphi(x)$, образуем средние функции φ_h^0 с бесконечно дифференцируемым ядром усреднения. Так как $\varphi^0(x)$ отлична от нуля лишь на конечном множестве, лежащем строго внутри Ω, то φ_h^0 определена и финитна в Ω для достаточно малых h. Кроме того, при $h \to 0$ функция φ_h^0 стремится к φ^0 по норме $W_p^{(l)}(\Omega)$.

Теорема IV.10 доказана.

§ 9. Неравенство для смешанного тройного скалярного произведения

Неравенство (2.1) для функций одного переменного получили Харди и Литтлвуд на основе классической леммы Ф. Рисса. Для функций n переменных оно было установлено С. Л. Соболевым [36]. Дальнейшее обобщение его дано В. П. Ильиным [21]. Именно в форме В. П. Ильина оно здесь и приведено.

Пусть функция $\varphi(x)$, $x \in R^1$, непрерывна, неотрицательна и такова, что $\operatorname{mes}\{x\colon \varphi(x) > a\}$ конечна для любого $a > 0$. *Функцию* $\varphi^*(x)$ *назовем симметричным убывающим переупорядочением* $\varphi(x)$ *или кратко симметризацией* $\varphi(x)$, *если:*

1) $\varphi^*(x)$ *равноизмерима с* $\varphi(x)$, *т. е. при любом* $a > 0$

$$\operatorname{mes}\{x\colon \varphi^*(x) > a\} = \operatorname{mes}\{x : \varphi(x) > a\};$$

2) $\varphi^*(x)$ *зависит только от* $|x|$;

3) *если* $|x_1| \leqslant |x_2|$, *то* $\varphi^*(x_1) \geqslant \varphi^*(x_2)$.

Легко доказать, что функция $\varphi^*(x)$ существует, непрерывна на R^1 и однозначно определяется по функции $\varphi(x)$.

Пусть теперь $\varphi(x)$ — суммируемая на R^1 неотрицательная функция, а $\{\varphi_n(x)\}$ — последовательность неотрицательных непрерывных функций, сходящаяся к $\varphi(x)$ в $L_1(R^1)$. Тогда $\{\varphi_n^*(x)\}$ имеет предел $\varphi^*(x)$ в пространстве $L_1(R^1)$. Предельная функция $\varphi^*(x)$ не зависит от выбора $\{\varphi_n(x)\}$, сходящейся в $L_1(R^1)$ к $\varphi(x)$, и $\varphi^{**}(x) = \varphi^*(x)$. Чтобы это доказать, удобно воспользоваться неравенством

$$\| \varphi^* - \psi^* \mid L_1 \| \leqslant \| \varphi - \psi \mid L_1 \|,$$

справедливым для любой пары φ и ψ финитных неотрицательных непрерывных функций.

Пусть, наконец, $\varphi(x) \in L_{\text{loc}}(R^1)$. Будем говорить, что $\varphi(x)$ допускает симметризацию, если в пространстве $L_{\text{loc}}(R^1)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \{\varphi(x)\, \iota_{[-n,\, n]}(x)\}^*.$$

Этот предел мы обозначим через $\varphi^*(x)$ и, так же как и в случае непрерывных функций, будем называть симметризацией функции $\varphi(x)$.

Локально суммируемые функции, имеющие одну и ту же симметризацию, мы будем называть равноизмеримыми, а всякую функцию $\varphi(x)$, совпадающую с $\varphi^*(x)$, мы будем называть симметрично убывающей.

Т е о р е м а IV.11 (Ф. Рисс). *Пусть* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ — *три неотрицательных функции одного переменного, допускающие симметризацию. Тогда*

$$\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(x-y)\,dx\,dy \leqslant \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} \varphi_1^*(x)\,\varphi_2^*(y)\,\varphi_3^*(x-y)\,dx\,dy, \tag{9.1}$$

иначе говоря, интеграл в левой части неравенства (9.1) *среди всех троек функций* $\varphi_1^*(x)$, $\varphi_2^*(x)$, $\varphi_3^*(x)$, *равноизмеримых с* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, *достигает своего наибольшего значения на симметрично убывающих функциях.*

Для доказательства теоремы проведем сначала некоторые геометрические построения.

Рассмотрим три прямых на плоскости, образующих равносторонний треугольник с длиной стороны l.

На сторонах треугольника будем рассматривать точечные множества, точки которых будем обозначать с помощью координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, отсчитываемых на каждой стороне от ее середины в направлении положительного обхода треугольника (против часовой стрелки).

Рассмотрим произвольный вектор z. Сумма его проекций на три стороны треугольника будет всегда равна нулю. Действительно, эта сумма совпадает с суммой проекций трех векторов, параллельных сторонам треугольника на направление вектора, а последняя, как проекция замкнутой ломаной, равна нулю.

Возьмем произвольную точку x на плоскости и рассмотрим вектор, соединяющий центр треугольника с этой точкой. Проекции ξ_1, ξ_2, ξ_3 этого вектора на стороны треугольника будем называть координатами точки x. По доказанному эта сумма проекций равна нулю.

На каждой из трех прямых рассмотрим по множеству E_i, $i = 1, 2, 3$, состоящему из конечного числа отрезков.

Обозначим суммарную длину отрезков, входящих в множество E_i (меру E_i), через $2m_i$ и рассмотрим на каждой оси «сомкнутый» симметричный отрезок $E_i^* = \{\xi_i\colon \mid \xi_i \mid \leqslant m_i\}$.

Через $\mathscr{E}_i$ и $\mathscr{E}_i^*$ будем обозначать соответствующие полосы на плоскости:

$$\mathscr{E}_i = \{x : \xi_i = \xi_i(x) \in E_i\}, \quad i = 1, 2, 3,;$$
$$\mathscr{E}_i^* = \{x : \xi_i = \xi_i(x) \in E_i^*\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Введем, наконец, обозначения

$$\mathscr{E}_{ij} = \mathscr{E}_i \cap \mathscr{E}_j, \qquad \mathscr{E}_{123} = \mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2 \cap \mathscr{E}_3,$$
$$\mathscr{E}_{ij}^* = \mathscr{E}_i^* \cap \mathscr{E}_j^*, \qquad \mathscr{E}_{123}^* = \mathscr{E}_1^* \cap \mathscr{E}_2^* \cap \mathscr{E}_3^*.$$

Лемма IV.7 (Ф. Рисс). *Мера пересечения трех множеств $\mathscr{E}_i$ не превосходит меры пересечения трех множеств $\mathscr{E}_i^*$:*

$$\operatorname{mes} \mathscr{E}_{123} \leqslant \operatorname{mes} \mathscr{E}_{123}^*. \tag{9.2}$$

Доказательство. Для определенности положим

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3.$$

Вычислим меры $\mathscr{E}_{ij}$ и $\mathscr{E}_{ij}^*$. Поскольку $\mathscr{E}_{ij}$ состоит из параллелограммов с суммарным основанием $2m_j$ и суммарной высотой $\sqrt{3}m_i$, имеем

$$m_{ij} = m_{ij}^* = \left(2\sqrt{3}\right) m_i m_j.$$

Далее, при $m_1 \geqslant m_2 + m_3$ полоса $\mathscr{E}_1^*$ содержит внутри себя параллелограмм $\mathscr{E}_{23}^*$, ибо вершины этого параллелограмма имеют координаты $\xi_1 = \pm m_2 \pm m_3$. Поэтому

$$m_{123}^* = m_{23}^* = \left(2\sqrt{3}\right) m_2 m_3,$$

и, следовательно,

$$m_{123} \leqslant m_{23} = m_{23}^* = m_{123}^*.$$

Таким образом, при $m_1 \geqslant m_2 + m_3$ неравенство (9.2) доказано; будем поэтому считать, что $m_1 < m_2 + m_3$.

Пусть E — некоторое множество на вспомогательной оси ξ, состоящее из конечного числа отрезков. Эти отрезки показаны на рис. 6 жирными линиями. Обозначим через a и b (как и раньше) концевые точки множества E. Рассмотрим переменное множество

$E(t)$, которое получается из множества E отбрасыванием с каждого конца порции меры t.

Концевые точки множества $E(t)$ обозначим $a(t)$ и $b(t)$, ($a(0) = a$, $b(0) = b$).

Функции $a(t)$ и $b(t)$ будут, вообще говоря, разрывными, кусочно-линейными функциями. Пример таких функций изображен на рис. 6. В точках непрерывности имеем $a'(t) = 1$, $b'(t) = -1$.

Рассмотрим теперь переменные множества $E_i(t)$ и $E_i^*(t)$ на соответствующих осях ξ_i и построим по ним «полосовые» множества $\mathscr{E}_i(t)$ и $\mathscr{E}_i^*(t)$, а также $\mathscr{E}_{ij}(t)$, $\mathscr{E}_{ij}^*(t)$, $\mathscr{E}_{123}(t)$, $\mathscr{E}_{123}^*(t)$. Мы будем рассматривать промежуток изменения t от 0 до m_i, так как при $t \geqslant m_i$ множества $E_i(t)$ и $E_i^*(t)$ становятся пустыми.

По нашему определению,

$$\operatorname{mes} E_i(t) = \operatorname{mes} E_i^*(t) = 2(m_i - t).$$

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \operatorname{mes} \mathscr{E}_{123}^*(t) - \operatorname{mes} \mathscr{E}_{123}(t) = m_{123}^* - m_{123}.$$

Эта функция, по доказанному, неотрицательна в любой точке, такой, что

$$m_1 - t \geqslant (m_2 - t) + (m_3 - t),$$

т. е. при $t \geqslant t_0 = m_2 + m_3 - m_1 > 0$. Если мы покажем, что при меньших значениях t ее производная $f'(t)$ неположительная, то отсюда будет следовать, что и для любых t эта функция неотрицательна, и, значит, $f(0) \geqslant 0$.

Неположительность производной мы покажем геометрически, убедившись в том, что

$$\left| \frac{d}{dt} \operatorname{mes} \mathscr{E}_{123}^* \right| \geqslant \left| \frac{d}{dt} \operatorname{mes} \mathscr{E}_{123} \right|,$$

ибо обе производные здесь неположительны.

Рассмотрим теперь производную $\frac{d}{dt} \operatorname{mes} \mathscr{E}_{123} = \frac{d}{dt} m_{123}$ и установим ее геометрический смысл. На плоскости x прямые

$$\xi_i = a_i(t), \quad b_i(t), \quad i = 1, 2, 3,$$

ограничивают некоторый многоугольник, граница которого $\partial(t)$ состоит из отрезков этих прямых (число его сторон может быть любым от трех до шести).

Некоторые точки $\partial(t)$ являются одновременно точками границы $\mathscr{E}_{123}(t)$. Обозначим множество этих точек через $\varepsilon = \varepsilon(t)$. На рис. 7 они изображены жирной линией.

Приращение $m_{123}(t + \Delta t) - m_{123}(t)$ равно взятому с обратным знаком приращению площади фигуры $\mathscr{E}_{123}(t)$. Отсюда непосредственно видно, что

$$\frac{d}{dt} m_{123}(t) = - \operatorname{mes} \varepsilon(t),$$

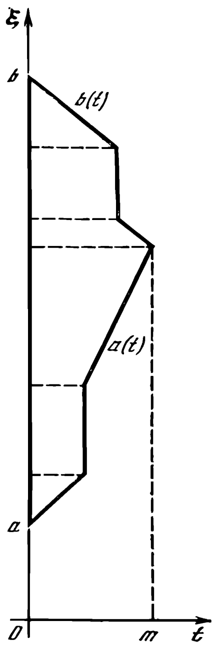

Рис. 6

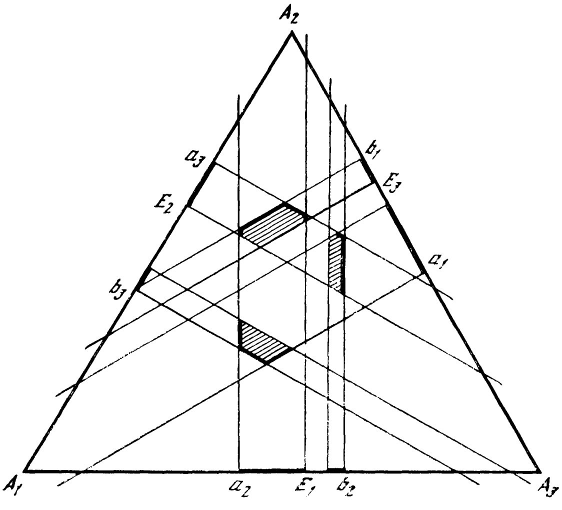

Рис. 7

где справа стоит сумма длин отрезков, из которых состоит $\varepsilon(t)$ (линейная мера $\varepsilon(t)$).

Выразим эту меру $\operatorname{mes}\varepsilon(t)$ через проекции $\text{пр}_j\,\varepsilon(t)$ на все три стороны треугольника. Множество $\partial(t)$, равно как и его часть ε, состоит из отрезков прямых, каждая из которых параллельна одной из биссектрис треугольника. Для любого множества σ, лежащего на такой прямой, мера его проекции на одну из сторон треугольника равна нулю, а мера проекции на каждую из двух других равна его мере, умноженной на $\sqrt{3}/2$. Поэтому

$$\operatorname{mes}\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{j=1}^{3}\operatorname{mes}\text{пр}_j\,\sigma. \tag{9.3}$$

Множество ε распадается на два множества ε_a и ε_b:

$$\varepsilon = \varepsilon_a \cup \varepsilon_b, \qquad \varepsilon_a \cap \varepsilon_b = \varnothing,$$

где ε_a состоит из отрезков, лежащих на прямых $\xi_j = a_j(t)$, а ε_b — из отрезков, лежащих на прямых $\xi_j = b_j(t)$.

Складывая равенства (9.3) для всех отрезков, принадлежащих ε_a, получим

$$\operatorname{mes}\varepsilon_a(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{j=1}^{3}\operatorname{mes}\text{пр}_j\,\varepsilon_a.$$

Поскольку $\text{пр}_j \varepsilon_a(t) \subset E_j(t)$, имеем

$$\operatorname{mes} \varepsilon_a(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{3} \operatorname{mes} E_j(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{3} (m_j - t).$$

Такое неравенство справедливо и для $\varepsilon_b(t)$. Поэтому

$$\frac{d}{dt} m_{123}(t) = -\operatorname{mes} \varepsilon(t) = -\operatorname{mes} \varepsilon_a(t) - \operatorname{mes} \varepsilon_b(t) \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{4}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{3} (m_j - t). \tag{9.4}$$

Применяя те же рассуждения к множествам E_1^*, E_2^*, E_3^*, видим, что в этом случае множество $\mathscr{E}_{123}^*(t)$ при $0 < t < t_0$ будет точно шестиугольником. Его граница $\partial^*(t)$ сводится к совокупности всех его шести сторон. Множество $\varepsilon^*(t)$ совпадает с $\partial^*(t)$.

Поэтому имеет место точное равенство

$$\frac{d}{dt} m_{123}^*(t) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{3} \operatorname{mes} E_j^*(t) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{3} (m_j - t). \tag{9.5}$$

Из (9.4) и (9.5) следует

$$\frac{d}{dt}(m_{123}^* - m_{123}) \leqslant 0,$$

и поскольку $m_{123}^*(t_0) - m_{123}(t_0) \geqslant 0$, имеем $m_{123}^* \geqslant m_{123}(t)$ при любых t, $0 < t < t_0$, что и доказывает лемму IV.7.

Следствие. *Рассмотрим на плоскости три конечных системы S_1, S_2, S_3 параллельных полос, идущих по трем различным направлениям.*

Сопоставим системе S_j параллельную ей полосу S_j^*, ширина которой равна суммарной ширине всех полос системы S_j, а ось проходит через начало координат. Положим

$$\mathscr{E}_{123} = S_1 \cap S_2 \cap S_3, \quad \mathscr{E}_{123}^* = S_1^* \cap S_2^* \cap S_3^*.$$

Справедливо неравенство

$$\operatorname{mes} \mathscr{E}_{123} \leqslant \operatorname{mes} \mathscr{E}_{123}^*.$$

Для доказательства достаточно заметить, что переход от S^j к S_j^* (симметризация) инвариантен при аффинных преобразованиях, а меры плоских множеств умножаются на постоянное число. Всегда можно подобрать такое аффинное преобразование, которое переводит любые три различных направления в направления, образующие между собой равные углы ($\pi/3$). В самом деле, любой треугольник деформацией сдвига, параллельной основанию, превращается в равнобедренный, а затем растяжением по высоте — в равносторонний. Следствие доказано.

Перейдем теперь к доказательству теоремы IV.11. Рассмотрим вначале случай, когда φ_1, φ_2 и φ_3 суть индикаторы множеств E_1, E_2 и E_3, состоящих из конечного числа отрезков (см. рис. 7).

Множество точек (x, y), где $\varphi_1(x) = 1$, образует систему S_1 полос, параллельных оси y; множество точек, где $\varphi_2(y) = 1$, образует систему S_2 полос, параллельных оси x, а множество тех точек (x, y), где $\varphi_3(x - y) = 1$, систему S_3 полос, параллельных биссектрисе $x = y$. Интеграл $\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(x-y)\,dxdy$ выражает меру $\mathscr{E}_{123}$. Симметризованные функции $\varphi_1^*(x)$, $\varphi_2^*(y)$ и $\varphi_3^*(x-y)$ характеризуют симметризованные полосы S_1^*, S_2^* и S_3^*. Наконец, $\mathscr{E}_{123}^* = \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} \varphi_1^*(x)\varphi_2^*(y)\varphi_3^*(x-y)\,dxdy$. В силу следствия имеем

$$\mathscr{E}_{123} \leqslant \mathscr{E}_{123}^*.$$

Пусть $\varphi(t)$ — кусочно-постоянная неотрицательная функция на отрезке $-a \leqslant t \leqslant a$. Рассмотрим множество E_c тех точек t, в которых $\varphi(t) \geqslant c$, где c — произвольное неотрицательное число. Это множество E_c представляет собой конечную систему отрезков, расширяющуюся при убывании c. Пусть $[-a, a] \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_r$ — все значения множества E_c. Функция $\varphi(t)$ однозначно представима в виде линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \omega_i(t), \tag{9.6}$$

где $\omega_i(t)$ — индикатор множества E_i.

Специфическая процедура разложения (9.6) обладает тем замечательным свойством, что она перестановочна с операцией симметризации, т. е.

$$\varphi^*(x) = \Big[\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \omega_k(x)\Big]^* = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \omega_k^*(x).$$

Читатель легко проверит это сам.

Применяя полученное разложение, легко установим, что неравенство (9.1) остается справедливым для кусочно-постоянных неотрицательных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$. Построив для каждой из них описанное разложение, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(x-y)\,dx\,dy = \\
&\quad = \sum_i\sum_j\sum_k \alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(2)}\alpha_k^{(3)} \int\limits_{R^1} \omega_i^{(1)}(x)\,\omega_j^{(2)}(y)\,\omega_k^{(3)}(x-y)\,dx\,dy \leqslant \\
&\quad \leqslant \sum_i\sum_j\sum_k \alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(2)}\alpha_k^{(3)} \int\limits_{R^1} \omega_i^{(1)*}(x)\,\omega_j^{(2)*}(y)\,\omega_k^{(3)*}(x-y)\,dx\,dy = \\
&\quad = \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} \varphi_1^*(x)\varphi_2^*(y)\varphi_3^*(x-y)\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Пусть теперь φ_1, φ_2, φ_3 — непрерывные неотрицательные функции, причем функции φ_1 и φ_2 финитны. Приближая их неотрицательными кусочно-постоянными функциями и переходя к пределу, установим теорему для непрерывных функций. Общий случай получается с помощью предельного перехода. Теорема доказана.

Перейдем теперь к доказательству основного неравенства (2.1). Мы проведем его в три шага: сначала для $n = s = 1$, затем для произвольного $n = s$ и, наконец, в общем случае $1 \leqslant s \leqslant n$, сводя каждый следующий к предыдущему.

Требование $1/p + 1/r > 1$ сохраняется на каждом шаге, показатель $\lambda = n + s - n/p - s/r = n/p' + s/r'$ зависит от размерностей n и s.

1-й шаг. Пусть $\varphi(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $\psi(y) \in L_r(-\infty, \infty)$, $1/p + 1/r > 1$, $\lambda = 1/p' + 1/r' < 1$.

В силу доказанной теоремы

$$J = \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} \frac{\varphi(x)\,\psi(y)}{|x-y|^{\lambda}}\,dx\,dy \leqslant \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} \frac{\varphi^*(x)\,\psi^*(y)}{|x-y|^{\lambda}}\,dx\,dy.$$

Опуская знак *, будем считать, что сами функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ являются в интеграле J симметрично убывающими.

Для такой функции $\varphi(x)$ имеет место оценка

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varphi(t)]^p\,dt = \int\limits_{0}^{\infty}[\varphi(t)]^p\,dt \geqslant \int\limits_{0}^{x}[\varphi(t)]^p\,dt \geqslant x\,[\varphi(x)]\,. \tag{9.7}$$

Аналогичная оценка справедлива для $\psi(y)$.

Интеграл J оценим по неравенству Гёльдера, пользуясь тем, что

$$1/(\lambda p') + 1/(\lambda r') = 1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} J = \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} &\left\{\frac{[\varphi(x)]^{p/(\lambda r')}\,[\psi(y)]^{1-r/(\lambda p')}}{|x-y|^{1/r'}}\left|\frac{y}{x}\right|^{-1/(\lambda p' r')}\right\}\times \\ &\times\left\{\frac{[\varphi(x)]^{1-p/(\lambda r')}\,[\psi(y)]^{r/(\lambda p')}}{|x-y|^{1/p'}}\left|\frac{x}{y}\right|^{-1/(\lambda p' r')}\right\}dx\,dy \leqslant \\ &\leqslant P^{1/(\lambda r')}Q^{1/(\lambda p')}, \end{aligned}$$

где

$$P = \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} \frac{[\varphi(x)]^{p}\,[\psi(y)]^{(1-\lambda)r}}{|x-y|^{\lambda}}\left|\frac{y}{x}\right|^{-1/p'}dx\,dy,$$

$$Q = \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} \frac{[\varphi(x)]^{(1-\lambda)p}\,[\psi(y)]^{r}}{|x-y|^{\lambda}}\left|\frac{x}{y}\right|^{-1/r'}dx\,dy,$$

ибо

$$\left(1 - \frac{r}{\lambda p'}\right)\lambda r' = r\left(\frac{\lambda r'}{r} - \lambda r' + 1\right) = r(1-\lambda),$$

и аналогично

$$(1-p/(\lambda r'))\lambda p' = p(1-\lambda).$$

Интегралы P и Q оценим, пользуясь (9.7):

$$P=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^p\left[\int_{-\infty}^{\infty}(|y|\,|\psi(y)|^r)^{1-\lambda}\frac{|y/x|^{-1/r}}{|1-y/x|^{\lambda}}\frac{1}{|x|}dy\right]dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^p\left\{\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(y)|^r dy\right]^{1-\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t|^{-1/r}}{|1-t|^{\lambda}}dt\right]\right\}dx\leqslant$$

$$\leqslant k\,\|\varphi\mid L_p\|^p\,\|\psi\mid L_r\|^{(1-\lambda)r},$$

и аналогично

$$Q\leqslant K\,\|\varphi\mid L_p\|^{(1-\lambda)p}\,\|\psi\mid L_r\|^r.$$

Отсюда окончательно:

$$J\leqslant K\,\|\varphi\mid L_p\|\,\|\psi\mid L_r\|.$$

Тем самым одномерный случай доказан.

2-й шаг. Пусть теперь $n=s$, $1/p+1/r>1$, $\varphi(x)\in L_p$, $\psi(y)\in L_r$, $\lambda=2n-n/p-n/r=n(1/p'+1/r')$. Оценим интеграл

$$J=\iint\frac{\varphi(x)\psi(y)}{|x-y|^{\lambda}}dx\,dy.$$

Пользуясь известным неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$|x-y|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}\geqslant\sqrt{n}\prod_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^{1/n}, \tag{9.8}$$

$$\iint\frac{\varphi(x)\psi(y)}{|x-y|^{\lambda}}dx\,dy\leqslant K\iint\frac{\varphi(x)\psi(y)}{\prod\limits_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^{\mu}}dx\,dy,$$

где $\mu=1/p'+1/r'$. Введем функцию $\varphi({}_jx)=\varphi(x_1,\ldots,x_j)$, $j=0,1,\ldots,n$, как норму по переменным ${}_j\hat{x}=(x_{j+1},\ldots,x_n)$ в смысле L_p от исходной функции:

$$\varphi({}_jx)=\left\{\int|\varphi({}_jx,{}_j\hat{x})|^p\,d_j\hat{x}\right\}^{1/p}.$$

В частности, $\varphi({}_0x)=\|\varphi\mid L_p\|$. Очевидно, что

$$\varphi({}_{j-1}x)=\left\{\int|\varphi({}_{j-1}x,x_j)|^p\,dx_j\right\}^{1/p}.$$

Аналогичные формулы имеют место и для $\psi(y)$ с заменой p на r. В силу уже установленного одномерного неравенства, имеем

$$\int_{R^1}\int_{R^1}\frac{\varphi({}_jx)\psi({}_jy)}{|x_j-y_j|^{\mu}}dx_j\,dy_j\leqslant K\varphi({}_{j-1}x)\,\psi({}_{j-1}y).$$

Полагая здесь $j = 1, 2, \ldots, n$ и сопоставляя полученные неравенства, придем к неравенству

$$\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} \frac{\varphi(x)\,\psi(y)}{\prod\limits_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^{\mu}}\, dx\, dy \leqslant K \,\|\varphi \mid L_p\|\, \|\psi \mid L_r\|.$$

В силу (9.8) второй шаг выполнен.

3-й шаг. Пусть, наконец, $1 \leqslant s \leqslant n$,

$$\varphi(x) \in L_p(R^n), \qquad \psi(y) \in L_r(R^s),$$

$$\lambda = n + s - \frac{n}{p} - \frac{s}{r} = \frac{n}{p'} + \frac{s}{r'}.$$

Нам надо оценить интеграл

$$\int\limits_{R^s}\int\limits_{R^n} \frac{\varphi(x)\,\psi(y)}{|x-y|^{\lambda}}\, dx\, dy = \int\limits_{R^s}\int\limits_{R^n} \frac{\varphi({}_sx, {}_s\hat{x})\,\psi({}_sy)\, d_sx\, d_s\hat{x}\, d_sy}{(|{}_sx - {}_sy|^2 + |{}_s\hat{x}|^2)^{\lambda/2}}.$$

Чтобы свести этот случай к предыдущему, оценим сначала $(n - s)$-мерный интеграл по ${}_s\hat{x}$:

$$\int\limits_{R^{n-s}} \frac{\varphi({}_sx, {}_s\hat{x})\, d_s\hat{x}}{(|{}_sx - {}_sy|^2 + |{}_s\hat{x}|^2)^{\lambda/2}}.$$

Применяя к нему неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\int\limits_{R^{n-s}} \frac{\varphi({}_sx, {}_s\hat{x})}{(|{}_sx - {}_sy|^2 + |{}_s\hat{x}|^2)^{\lambda/2}}\, d_s\hat{x} \leqslant \left\{\int\limits_{R^{n-s}} [\varphi({}_sx, {}_s\hat{x})]^p\, d_s\hat{x}\right\}^{1/p} \times$$

$$\times \left\{\int\limits_{R^{n-s}} (|{}_sx - {}_sy|^2 + |{}_s\hat{x}|^2)^{-\lambda p'/2}\, d_s\hat{x}\right\}^{1/p'}.$$

Согласно нашим обозначениям,

$$\left\{\int\limits_{R^{n-s}} [\varphi({}_sx, {}_s\hat{x})]^p\, d_s\hat{x}\right\}^{1/p} = \varphi({}_sx).$$

Второй интеграл в правой части (9.9) сходится. В самом деле, введем новое $(n - s)$-мерное независимое переменное z по формуле ${}_s\hat{x} = |{}_sx - {}_sy|\, z$. Тогда $d_s\hat{x} = |{}_sx - {}_sy|^{n-s} dz$.

Имеем

$$\int\limits_{R^{n-s}} \{|{}_sx - {}_sy|^2 + |{}_s\hat{x}|^2\}^{-\lambda p'/2}\, d_s\hat{x} =$$

$$= |{}_sx - {}_sy|^{n-s-\lambda p'} \int\limits_{R^{n-s}} (1 + |z|^2)^{-\lambda p'/2}\, dz.$$

Но $\lambda = n/p' + s/r'$ и $\lambda p' = n + sp'/r' > n$, поэтому последний интеграл сходится, и мы имеем оценку

$$\int\limits_{R^{n-s}} \frac{\varphi({}_sx, {}_s\hat{x})\, d_s\hat{x}}{(|{}_sx - {}_sy|^2 + |{}_s\hat{x}|^2)^{\lambda/2}} \leqslant K \frac{\varphi({}_sx)}{|{}_sx - {}_sy|^{\lambda - n/p' + s/p'}}.$$

Наконец,

$$\mu = \lambda - n/p' + s/p' = s\,(1/p' + 1/r'),$$

и мы приходим к оценке

$$\int\limits_{R^s} \int\limits_{R^n} \frac{\varphi(x)\,\psi(y)}{|x-y|^{\lambda}} \leqslant K \int\limits_{R^s} \int\limits_{R^s} \frac{\varphi({}_sx)\,\psi({}_sy)}{|{}_sx - {}_sy|^{\mu}}\, d_sx\, d_sy.$$

Тем самым третий шаг сводится ко второму. Неравенство (2.1) полностью доказано.

ГЛАВА V

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Пространства сходимости. Примеры

Обобщенные функции представляют собой «идеальные элементы», которые пополняют классические функциональные пространства по тому же образцу, как вещественные числа пополняют множество чисел рациональных.

В этой главе мы изложим вкратце теорию таких функций. Будем придерживаться способа изложения, близкого к тому, который впервые был использован в [36]. Позднее теория обобщенных функций рассматривалась Л. Шварцем [53], который, в частности, рассмотрел и исследовал преобразование Фурье обобщенных функций. На русском языке теории обобщенных функций и ее различным применениям посвящена многотомная монография [9—14], а также [2, 7, 50].

Исторически обобщенные функции в явной форме встречались уже и раньше в исследованиях по теоретической физике, в работах Ж. Адамара, М. Рисса, С. Бохнера и других.

Будем рассматривать вначале абстрактное пространство, в котором определено понятие сходимости.

Пусть X — множество с элементами x, и пусть в нем выделен некоторый класс $\varkappa$ последовательностей $\{x_k\}$:

$$\{x_k\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots \ (x_k \in X)\},$$

которые условились считать *сходящимися. Множество X назовем пространством сходимости, если выполняются следующие аксиомы* (М. Фреше).

F0) *Каждой сходящейся последовательности соотнесен некоторый элемент* x_∞ *— ее предел.*

F1) *Всякая последовательность, состоящая только из одного элемента (так называемая стационарная):*

$$\{x_k\} = \{x, x, \ldots, x, \ldots\},$$

является сходящейся, и ее пределом служит этот повторяющийся элемент x.

Эта аксиома называется *аксиомой стационарности.*

F2) *Если последовательность* $\{x_k\}$ *принадлежит* $\varkappa$, *т. е. сходится, то любая ее подпоследовательность* $\{x_{k_j}\}$ ($k_i < k_j$ *при* $i < j$) *также сходится, и притом к тому же пределу.*

Пример 1. Пусть X состоит из двух точек a и b, а класс $\varkappa$ — из двух стационарных последовательностей $\{a, a, \ldots, a, \ldots\}$ с пределом a и $\{b, b, \ldots, b, \ldots\}$ — с пределом b. Все аксиомы Фреше выполнены. Любая нестационарная последовательность здесь не будет сходящейся.

Пример 2. Пусть X — множество вещественных функций $x(t)$, измеримых в смысле Лебега и конечных почти всюду на отрезке $[0, 1]$. Сходящейся последовательностью будем считать последовательность, сходящуюся почти всюду. Предельным элементом будет предел в смысле такой сходимости. Он будет также измеримым и конечным почти всюду. Можно легко проверить, что аксиомы Фреше снова выполнены.

Пример 3. В множестве X из примера 2 определим сходимость как сходимость по мере. Это значит, что последовательность $\{x_k(t)\}$ сходится к $x_\infty(t)$ в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} \{t \in [0, 1] : |x_k(t) - x_\infty(t)| > \varepsilon\} = 0.$$

Предельная функция сходящейся последовательности $\{x_k(t)\}$ будет снова элементом X, и ее мы будем считать пределом для $\{x_k\}$.

Аксиомы Фреше опять выполнены, как читатель может проверить сам.

Пример 4. Пусть $C^{(s)}$ — совокупность s раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных в n-мерном пространстве R^n[1]. Последовательность $\{\varphi_k\}$ будем называть *сходящейся к* φ_∞ *в* $C^{(s)}$, если на любом компактном множестве (на любом замкнутом шаре) все производные $D^\alpha\varphi_k$, $|\alpha| \leqslant s$, равномерно сходятся к соответствующим производным $D^\alpha\varphi_\infty$, $|\alpha| \leqslant s$.

Обозначим через $\mathring{C}^{(s)}$ совокупность финитных элементов из $C^{(s)}$, а сходимость последовательности $\{\varphi_k\}$ в $\mathring{C}^{(s)}$ определим как сходимость $\{\varphi_k\}$ в $C^{(s)}$ с дополнительным требованием, что носители φ_k ограничены в совокупности.

---

[1] Все функции, рассматриваемые в этой главе, принимают вещественные значения.

В этом определении число s можно брать как конечным, так и бесконечным. Пространство $C^{(\infty)}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций, а пространство $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}$ — из финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Пусть X и Y — два пространства сходимости и пусть h — отображение X в Y. Если всякая последовательность $\{x_k\}$, сходящаяся к x_∞ в X, переходит в последовательность $\{y_k\}$, $y_k = h(x_k)$, сходящуюся к $y_\infty = h(x_\infty)$ в Y, то мы будем говорить, что X вложено в Y.

При отображении $h: X \to Y$ различные элементы x из X могут переходить в один и тот же элемент y. Вложение мы будем обозначать стрелкой: $X \to Y$.

Пространство $\overset{\circ}{C}{}^{(s)}$ вложено в $C^{(s)}$, ибо, если последовательность $\{\varphi_k\} \subset \overset{\circ}{C}{}^{(s)}$ сходится к φ_∞ в $\overset{\circ}{C}{}^{(s)}$, то все производные $D^\alpha\varphi_k$ сходятся к соответствующим производным $D^\alpha\varphi_\infty$ равномерно на любом шаре.

Очевидно также, что $C^{(s+1)} \to C^{(s)}$ и $\overset{\circ}{C}{}^{(s+1)} \to \overset{\circ}{C}{}^{(s)}$, поэтому возникает следующая диаграмма вложений:

$$\begin{array}{ccccccccc} \overset{\circ}{C}{}^{(0)} & \leftarrow & \overset{\circ}{C}{}^{(1)} & \leftarrow \ldots \leftarrow & \overset{\circ}{C}{}^{(s)} & \leftarrow \ldots \leftarrow & \overset{\circ}{C}{}^{(\infty)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C^{(0)} & \leftarrow & C^{(1)} & \leftarrow \ldots \leftarrow & C^{(s)} & \leftarrow \ldots \leftarrow & C^{(\infty)} \end{array} \qquad (1.1)$$

Пространства $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}$ и $C^{(\infty)}$ являются пересечениями всех пространств $\overset{\circ}{C}{}^{(s)}$ и $C^{(s)}$ соответственно.

Пример 5. Пусть $K^{(s)}$ — совокупность функций на R^n, у которых существуют обобщенные производные до порядка s включительно, причем все производные порядка s, а значит, все производные меньшего порядка интегрируемы с квадратом по любому компактному множеству.

Последовательность $\{\varphi_k\}$ будет называться *сходящейся в* $K^{(s)}$ *k* φ_∞, если на любом фиксированном компакте Ω_0 при $k \to \infty$

$$\int\limits_{\Omega_0} \sum_{j=0}^{s} \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} \left| D^\alpha\varphi_k(x) - D^\alpha\varphi_\infty(x) \right|^2 dx \to 0.$$

Пространство $K_0^{(s)}$ состоит из всех финитных элементов $K^{(s)}$, а сходимость последовательности в $K_0^{(s)}$ определяется как сходимость в $K^{(s)}$ с дополнительным требованием совокупной ограниченности носителей всех членов этой последовательности.

Для пространств $K^{(s)}$ и $K_0^{(s)}$ возникает диаграмма вложений,

$$\begin{array}{ccccccc} K_0^{(0)} & \leftarrow & K_0^{(1)} & \leftarrow \ldots \leftarrow & K_0^{(s)} & \leftarrow \ldots \leftarrow & K_0^{(\infty)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K^{(0)} & \leftarrow & K^{(1)} & \leftarrow \ldots \leftarrow & K^{(s)} & \leftarrow \ldots \leftarrow & K^{(\infty)} \end{array} \qquad (1.2)$$

Здесь $K^{(\infty)}$ — пересечение всех $K^{(s)}$ при $s > 0$. Сходимость последовательности $\{\varphi_k(x)\}$ в $K^{(\infty)}$ означает ее сходимость в каждом $K^{(s)}$. Аналогично определяется и пространство $K_0^{(\infty)}$. Отметим, что в ряде работ пространство сходимости $K_0^{(\infty)}$ называется пространством основных функций и обозначается как $D = D\,(R^n)$.

Пространства $C^{(s)}$, $\overset{\circ}{C}{}^{(s)}$, $K^{(s)}$ и $K_0^{(s)}$ связаны следующей диаграммой вложений:

$$
\begin{tikzcd}
\overset{\circ}{C}{}^{(s)} \arrow[r] \arrow[d] & K_0^{(s)} \arrow[d] \\
C^{(s)} \arrow[r] & K^{(s)}
\end{tikzcd}
$$

Наконец, для всех рассмотренных пространств имеет место диаграмма вложений, которую полезно представлять себе пространственно:

$$
\begin{tikzcd}
 & K_0^{(0)} \arrow[dd] & & K_0^{(1)} \arrow[ll] \arrow[dd] & \cdots \arrow[l] & & K_0^{(s)} \arrow[ll] \arrow[dd] & \cdots \arrow[l] & & K_0^{(\infty)} \arrow[ll] \arrow[dd] \\
\overset{\circ}{C}{}^{(0)} \arrow[ur] \arrow[dd] & & \overset{\circ}{C}{}^{(1)} \arrow[ll] \arrow[ur] \arrow[dd] & & \cdots \arrow[ll] & \overset{\circ}{C}{}^{(s)} \arrow[l] \arrow[ur] \arrow[dd] & & \cdots \arrow[ll] & \overset{\circ}{C}{}^{(\infty)} \arrow[l] \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & K^{(0)} & & K^{(1)} \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] & & K^{(s)} \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] & & K^{(\infty)} \arrow[ll] \\
C^{(0)} \arrow[ur] & & C^{(1)} \arrow[ll] \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ll] & C^{(s)} \arrow[l] \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ll] & C^{\infty} \arrow[l] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad (1.3)
$$

Эта диаграмма не исчерпывает всех связей между пространствами C и K. Еще одна важная связь, вытекающая из теорем вложения, дается формулой $K^{(s)} \to C^{(s-[n/2]-1)}$. Отсюда следует, что пространства сходимости $C^{(\infty)}$ и $K^{(\infty)}$, а также $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}$ и $K_0^{(\infty)}$ совпадают.

Назовем последовательность $\{x_k\} \subset X$ *последовательностью Урысона*, если существует $x_\infty \in X$, такой, что из любой подпоследовательности $\{x_k\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к x_∞. Тогда выполняется следующая аксиома (П. С. Урысон).

F3) *Любая последовательность Урысона является сходящейся.*

Предел последовательности Урысона, разумеется, совпадает с соответствующим элементом x_∞. *Пространство сходимости с аксиомами* F0) — F3) *будем называть пространством Урысона.*

Если в пространстве сходимости аксиома Урысона не выполнена, то можно расширить класс сходящихся последовательностей, присоединив к нему все последовательности Урысона. Эту операцию мы будем называть операцией насыщения или операцией Урысона. Повторная операция насыщения не расширяет класса сходящихся последовательностей.

Рассмотрим с этой точки зрения наши примеры. В примере 1 произвольная последовательность, состоящая из двух элементов a и b, будет последовательностью Урысона в том и только в том случае, если только один из двух элементов a или b встречается в последовательности бесконечное число раз. Такая последовательность станет стационарной, если отбросить в ней некоторое количество первых ее членов. Следовательно, пространство X — не урысоновское. Операция насыщения состоит в том, что сходящимися нужно считать и все последовательности, стационарные начиная с некоторого члена. В этом случае операция насыщения существенно расширяет класс сходящихся последовательностей.

В примере 2 пространство X также не урысоновское. В самом деле, пусть $\{\varphi_k(t)\}$ сходится по мере к пределу $\varphi_\infty(t)$, но не сходится почти всюду. Тогда эта последовательность будет урысоновской, но не сходящейся. В самом деле, любая ее подпоследовательность также будет сходящейся по мере к $\varphi_\infty(t)$, и значит, из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду к $\varphi_\infty(t)$.

Пространство из примера 3 урысоновское. Можно показать, что операция насыщения переводит пространство функций со сходимостью почти всюду в пространство функций со сходимостью по мере. Все пространства, рассмотренные в примерах 4 и 5, урысоновские.

Изучая функциональные пространства X, часто пользуются сходимостью, вытекающей из некоторой их топологизации. Именно, вводят понятие класса открытых множеств в таком пространстве. Этот класс должен удовлетворять трем аксиомам:

01. *Пустое множество и все пространство являются открытыми множествами.*

02. *Пересечение конечного числа открытых множеств снова будет открытым.*

03. *Объединение любого множества открытых множеств снова будет открытым множеством.*

Каждый элемент x такого пространства X обладает своей системой окрестностей: ими являются все открытые множества, которым он принадлежит. Последовательность $\{x_k\}$ называют сходящейся к x_∞, если в любую окрестность x_∞ попадают все ее члены, начиная с некоторого.

Наиболее удобны пространства, удовлетворяющие еще двум аксиомам.

T_2) Аксиома отделимости Хаусдорфа. *Для любых двух элементов x_1, x_2 из X можно найти такие их окрестности U_1 и $U_2 : x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, пересечение которых пусто: $U_1 \cap U_2 = \phi$.*

C) (Первая аксиома счетности). *Для любой точки $x \in X$ можно найти такую счетную систему окрестностей*

$$U^{(1)} \supset U^{(2)} \supset \ldots \supset U^{(k)} \supset \ldots,$$

которая обладает следующим свойством. Какова бы ни была окрестность $U^{(0)}$ точки x, найдется элемент $U^{(k)}$, лежащий внутри нее: $U^{(k)} \subset U^{(0)}$.

Такая система называется фундаментальной системой окрестностей точки x, а пространство X — топологическим.

Всякое топологическое пространство X — это пространство сходимости. Возникает вопрос, можно ли в данном пространстве сходимости построить топологию, порождающую исходную сходимость. Ответ на него, вообще говоря, отрицателен. Приведем подтверждающий это пример. Нам понадобятся два вспомогательных определения и теорема.

Пусть дана двойная последовательность $\{x_{k,l}\}$ элементов. *Будем говорить, что она сходится в естественном порядке, если для любого* k *существуют пределы* $\lim\limits_{l\to\infty} x_{k,l} = x_k$ *и* $\lim x_k = x_\infty$.

Будем говорить, что двойная последовательность сходится в целом по направлению вниз, если любая подпоследовательность вида $\{x_{k,l_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, *содержащая по одному элементу каждой строки, сходится к элементу* x_∞, *общему для всех таких подпоследовательностей.*

Теорема V.1. *В пространстве* X, *удовлетворяющем аксиомам* 01, 02, 03, T_2, C, *любую двойную последовательность, сходящуюся в естественном порядке, можно превратить в последовательность, сходящуюся в целом по направлению вниз, если отбросить в каждой из строк некоторое количество первых членов.*

Доказательство. Аксиома T_2, очевидно, гарантирует единственность предела для каждой сходящейся последовательности. Возьмем счетную фундаментальную систему окрестностей элемента $x_\infty: U^{(1)} \supset U^{(2)} \supset \ldots \supset U^{(N)} \supset \ldots$ Начиная с некоторого k_1 все элементы x_k попадут в окрестность $U^{(1)}$, которая оказывается окрестностью каждого из них. Поэтому найдутся такие $l_{k,1}$, что $x_{k,l} \in U^{(1)}$, если только $k \geqslant k_1$, $l \geqslant k_{k,1}$. Все строки, предшествующие строке k_1 (если такие есть), оставим без изменения. В каждой строке, начиная с k_1-й, отбросим все члены, предшествующие члену $x_{k,l_{k,1}}$. Далее, найдем элемент $k_2 > k_1$ такой, что все элементы x_k $(k \geqslant k_2)$ попадут в $U^{(2)}$. Затем выберем $l_{k,2} > l_{k,1}$ такое, что $x_{k,l} \in U^{(2)}$ при $k \geqslant k_2$, $l \geqslant k_{k,2}$. Теперь все строки, предшествующие строке k_2, оставим без изменения, а в каждой строке, начиная с k_2-й, отбросим все члены, предшествующие члену $x_{k,l_{k,2}}$. Продолжая процесс неограниченно, получим двойную последовательность, сходящуюся в целом по направлению вниз. Теорема доказана.

Пространство $K_0^{(s)}$ ни при какой топологизации не может удовлетворять всем пяти аксиомам 01, 02, 03, T_2, C. Действительно, пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — два его произвольных элемента, причем $\psi(x) \not\equiv 0$. Построим двойную последовательность

$$\varphi_{k,l}(x) = (1 + 1/k)\,\varphi(x) + (1/l)\,\psi(x/k).$$

Эта двойная последовательность, очевидно, сходится в естественном порядке, но из нее нельзя выделить ни одной сходящейся в целом вниз двойной подпоследовательности, так как носители любых элементов ее растут неограниченно с ростом значка k. По теореме V.1 $K_0^{(s)}$ не может быть топологическим.

Такое же утверждение справедливо для пространств $K^{(s)}$, $\mathring{C}^{(s)}$, $C^{(s)}$. Отметим, однако, что всегда можно построить топологию, порождающую сходимость, более слабую, чем данная.

В этом смысле можно говорить о топологизации пространств сходимости.

В дальнейшем нам придется иметь дело с такими пространствами, в которых при естественном выборе системы окрестностей аксиомы счетности и отделимости не имеют места, и мы предпочитаем не пользоваться топологическим аппаратом, который не дает заметных преимуществ в изложении.

§ 2. Линейные пространства сходимости и функционалы над ними. Определение обобщенных функций. Вложения

Пусть пространство сходимости X — линейное векторное пространство, т. е. в нем определены операции сложения и умножения на постоянную. Если сходимость в X согласована с этими операциями, т. е. если

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda_k\varphi_k+\mu_k\psi_k)=\lim_{k\to\infty}\lambda_k\lim_{k\to\infty}\varphi_k+\lim_{k\to\infty}\mu_k\lim_{k\to\infty}\psi_k,$$

то назовем X линейным пространством сходимости.

Будем составлять ряды из элементов линейного пространства сходимости X. *Ряд $\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j$ назовем сходящимся, если существует предел φ их X последовательности частичных сумм:*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j=\lim_{N\to\infty}S_N=\varphi.$$

Тот же ряд назовем безусловно сходящимся, если ряд, составленный из любой подпоследовательности $\{\varphi_j\}$, снова сходится. Последовательность членов безусловно сходящегося ряда будем называть безусловно суммируемой. Если $\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j$ безусловно сходится, а l — произвольный непрерывный функционал на X, то числовой ряд $\sum_{j=1}^{\infty}l(\varphi_j)$ будет абсолютно сходящимся.

Совокупность линейных функционалов на X, непрерывных относительно данной сходимости, будем обозначать $X^{\#}$. $X^{\#}$ само является линейным пространством.

Последовательность $\{l_k\}\subset X^{\#}$ назовем слабо сходящейся, если для любого $\varphi\in X$ существует предел

$$\lim_{k\to\infty}(l_k,\varphi)=(l_\infty,\varphi).$$

Этот предел l_∞ является в свою очередь линейным функционалом.

Если добавить к четырем аксиомам пространства сходимости X еще одну, то предел всюду сходящейся последовательности линейных непрерывных функционалов будет и непрерывен. При этом пространство, сопряженное с пространством X, оказывается слабо полным [3]. Сформулируем эту аксиому.

F4) *Какова бы ни была последовательность элементов* $\{\varphi_k\}$, *стремящаяся к нулю, из нее всегда можно выбрать безусловно суммируемую подпоследовательность* $\{\varphi_{k_j}\}$.

Теорема V.2. *Пусть линейное пространство сходимости* X *удовлетворяет аксиомам* F0), F1), F2) *и* F4). *Тогда пространство* $X^{\#}$ *линейных непрерывных функционалов на* X *слабо полно.*

Это значит, что предел слабо сходящейся последовательности $\{l_k\}$ линейных непрерывных функционалов будет линейным непрерывным функционалом.

Докажем сначала лемму о бесконечных числовых матрицах с комплексными элементами.

Лемма V.1. *Пусть матрица* $A = \| a_{ij} \|$, $1 \leqslant i, j < \infty$, *удовлетворяет условиям*:

1) *для любого* i *ряд* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} | a_{ij} |$ *сходится;*

2) *для любого* j *сходится последовательность* $\{a_{ij}\}$ *при* $i \to \infty$, *причем*

$$| \lim_{i \to \infty} a_{ij} | > \varepsilon > 0, \tag{2.1}$$

где ε — *некоторое фиксированное положительное число.*

Тогда можно выделить такую подматрицу $\| a_{r_i t_j} \|$ *матрицы* A, *для которой*

$$\Big| \sum_{j=1}^{\infty} a_{r_i t_j} \Big| \to \infty \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Доказательство. Пусть сначала матрица A — вещественная. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lim\limits_{i \to \infty} a_{ij} > \varepsilon > 0$. Рассмотрим первый столбец матрицы A и найдем такой номер r_1, чтобы при любом $i \geqslant r_1$ выполнялось неравенство $a_{i1} > \varepsilon$. По найденному r_1 подберем номер t_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{j=t_1}^{\infty} | a_{r_1 j} | < 1.$$

Затем найдем такое $r_2 > r_1$, чтобы для любого $i \geqslant r_2$ выполнялось неравенство $a_{it_1} > \varepsilon$. По найденному r_2 подберем $t_2 > t_1$ так, чтобы

$$\sum_{j=t_2}^{\infty} | a_{r_2 j} | < 1$$

---

[3] Это свойство аналогично доказанной Банахом и Штейнгаузом теореме о слабой полноте пространства функционалов над банаховыми пространствами.

В настоящем изложении автор следует [44, 51].

и т. д. Мы получим две возрастающих последовательности натуральных чисел $\{r_i\}$ и $\{t_j\}$. Матрица $\| a_{r_i t_j} \|$ обладает требуемым свойством. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{r_i t_j} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{r_i t_j} + \sum_{j=i}^{\infty} a_{r_i t_j} > (i-1)\varepsilon - \sum_{j=i}^{\infty} | a_{r_i t_j} | > (i-1)\varepsilon - 1.$$

Для вещественных матриц лемма доказана. Комплексный случай очевидным образом сводится к вещественному.

Докажем теперь теорему V.2. Пусть последовательность линейных непрерывных функционалов $\{l_k\}$ слабо сходится к линейному функционалу l. Допустим, что l разрывен в некоторой точке φ, т. е. что существует последовательность $\{\varphi_j\}$ такая, что $\varphi_j \to \varphi$, но $l(\varphi_j) \not\to l(\varphi)$. Тогда $\psi_j = \varphi_j - \varphi \to 0$, но $l(\psi_j) \not\to 0$, т. е. функционал l разрывен в нуле.

Не ограничивая общности, можно считать, что $| l(\psi_j) | > \varepsilon > 0$, $j = 1, 2, \ldots$ По аксиоме F4) из стремящейся к нулю последовательности $\{\psi_j\}$ можно выбрать безусловно суммируемую подпоследовательность. Будем считать, что сама последовательность $\{\psi_j\}$ является таковой. Числовая матрица $A = \| a_{ij} \| = \| l_i(\psi_j) \|$ удовлетворяет условиям леммы V.1. В силу того, что $\lim\limits_{i\to\infty} l_i(\psi_j) = l(\psi_j)$ и $| l(\psi_j) | > \varepsilon$, выполнено (2.1), а непрерывность l_i и безусловная суммируемость $\{\psi_j\}$ гарантирует абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} l_i(\psi_j)$.

Выделим в A подматрицу $\| l_{r_i}(\psi_{t_j}) \|$ согласно лемме. Подпоследовательность $\{\psi_{t_j}\}$ безусловно суммируемой последовательности $\{\psi_j\}$ суммируема. Положим $\psi = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \psi_{t_j}$. Тогда

$$l_{r_i}(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} l_{r_i}(\psi_{t_j}) \to \infty$$

при $i \to \infty$. Это противоречит требованию $l_{r_i}(\psi) \to l(\psi)$.

Теорема доказана [3].

При выполнении в X аксиомы F4) слабая сходимость в $X^{\#}$ всегда будет урысоновской. Действительно, если последовательность $\{l_k\}$ урысоновская в смысле слабой сходимости, то при любом φ числовая последовательность $\{(l_k, \varphi)\}$ будет урысоновской, а значит, сходящейся. Обозначим ее предел через (l_∞, φ). По теореме V.2 функционал l_∞ непрерывен.

---

[3] В доказательстве полноты пространства обобщенных функций, приведенном в [9], по существу используется свойство сходимости в $\mathcal{E}^\infty$, аналогичное аксиоме F4), с дополнительным требованием предварительного умножения на неограниченную числовую последовательность. Все рассматриваемые нами пространства сходимости этим свойством, очевидно, обладают.

Особо важным для нас является случай банаховых пространств. Сходимость в банаховом пространстве — это сходимость по норме. Банахово пространство — это линейное пространство сходимости, в котором справедлива аксиома F4). Из последовательности $\{\varphi_k\}$, стремящейся к нулю, всегда можно выбрать безусловно суммируемую подпоследовательность. Достаточно взять $\{\varphi_{n_k}\}$ так, чтобы $\| \varphi_{n_k} \| < 2^{-k}$. Следовательно, сопряженное пространство $X^{\#}$ будет слабо полным.

Функционал l ограничен в банаховом пространстве X, если существует такая постоянная K, что $| (l, \varphi) | \leqslant K \| \varphi \|$ для любого φ из X. Непрерывность функционала эквивалентна его ограниченности. Действительно, если существует такая последовательность $\{\varphi_k\}$, что $| (l, \varphi_k) | \geqslant k \| \varphi_k \|$, то, положив $\psi_k = \varphi_k / \sqrt{k} \| \varphi_k \|$, будем иметь: $\| \psi_k \| \to 0$, но $| (l, \psi_k) | \geqslant \sqrt{k} \to \infty$. Обратное утверждение, т. е. то, что из ограниченности следует непрерывность, очевидно. Нормой ограниченного функционала l называют число $\sup | (l, \varphi) | / \| \varphi \|$, где верхняя грань берется по всем $\varphi \neq 0$.

Пространство ограниченных функционалов с такой нормой и порожденной ею сходимостью по норме обычно называют сопряженным к банахову пространству X и обозначают через X^*. Как множество элементов оно совпадает с $X^{\#}$, но как пространство сходимости — в него вложено. Сходимость в X^* называется сильной сходимостью.

Пусть $X = X(\Omega)$ — линейное пространство сходимости, состоящее из функций $\varphi(x)$, заданных в области Ω и локально интегрируемых в ней [4].

Для произвольной $f(x)$ из $\mathring{C}(\Omega)$ имеет смысл интеграл

$$\int_{\Omega} \varphi(x) f(x)\, dx, \tag{2.2}$$

где φ — любая функция из X (ибо φ суммируема по $\operatorname{supp} f \subset \Omega$). Этот интеграл мы рассматриваем как некоторую билинейную форму от φ и f. Подчиним X еще двум аксиомам.

1) (*Тотальность*) *Если* $f \in \mathring{C}(\Omega)$ *и* $\int_{\Omega} \varphi(x) f(x)\, dx = 0$ *для любых* $\varphi \in X$ *с носителем, содержащимся в носителе* $f(x)$, *то* $f(x) \equiv 0$.

Если пространство X содержит все бесконечно дифференцируемые финитные функции, то аксиома тотальности автоматически выполнена.

2) (*Мажорирование сходимости*) *Пусть* Ω_0 — *любая конечная подобласть* Ω *такая, что* $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. *Потребуем, чтобы из сходимости* $\{\varphi_k\}$ *к* φ_∞ *в* X *вытекала сходимость в смысле* $L_1(\Omega_0)$ *следов* φ_k *на* Ω_0 *к следу* φ_∞ *на* Ω_0.

[4] Локальная интегрируемость означает интегрируемость по любой конечной области Ω_0, такой, что $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$.

При этом интеграл (2.2) будет непрерывным линейным функционалом из $X^{\#}$.

Таким образом, каждой функции f из $\overset{\circ}{C}(\Omega)$ сопоставлен некоторый функционал $l = l_f$ из $X^{\#}$. В силу аксиомы тотальности $\overset{\circ}{C}(\Omega)$ взаимно однозначно отображается на некоторое множество $\mathfrak{M} \subset X^{\#}$. Это отображение определяется билинейной формой (2.2).

Последовательность функций $\{f_k\} \subset \overset{\circ}{C}(\Omega)$ *назовем сходящейся, если в* $X^{\#}$ *слабо сходится соответствующая последовательность функционалов* $\{l_{f_k}\}$. Множество $\overset{\circ}{C}(\Omega)$ при такой сходимости не является замкнутым.

Рассмотрим замыкание X' множества $\mathfrak{M}$ в $X^{\#}$. Среди элементов X' имеются элементы самого $\mathfrak{M}$. Эти функционалы выражаются интегралами (2.2) с $f(x) \in \overset{\circ}{C}(\Omega)$. Кроме того, в X' будут такие функционалы, которые можно представить в виде (2.2) с разрывной или нефинитной $f(x)$. Такие функции $f(x)$ мы будем называть *реализациями* соответствующих функционалов. И, наконец, в X' имеются нереализуемые функционалы, т. е. такие функционалы, для которых нельзя подобрать никакой функции $f(x)$, через которую функционал выражался бы сходящимся интегралом вида (2.2).

Расширим теперь запас функций $\overset{\circ}{C}(\Omega)$, добавив к нему, во первых, все реализации функционалов из X' (в тех случаях, когда они существуют) и, во-вторых, и это основное,— новые «идеальные» элементы, взаимно однозначно отвечающие нереализуемым элементам X'. *Эти идеальные элементы мы будем называть обобщенными функциями и обозначать, как и обычные функции, символом* $f(x)$. Соответствующий функционал будем записывать в виде интеграла

$$\int_{\Omega} \varphi(x) f(x)\, dx.$$

Тем самым мы как бы вводим реализацию с помощью обобщенных функций функционалов, ранее нереализовывавшихся.

Полученное расширение множества $\overset{\circ}{C}(\Omega)$ будем называть *пространством обобщенных функций*, причисляя тем самым и обычные функции к обобщенным. Л. Шварц называет обобщенные функции *распределениями*. Расширенное пространство не всегда, разумеется, фактически содержит идеальные элементы.

Вообще говоря, X' может представить собой собственное подпространство в $X^{\#}$. Однако в тех случаях, которые будут нас интересовать, X' и $X^{\#}$ совпадают.

Таким образом, обобщенная функция — это не то же самое, что функционал. Обобщенная функция — это элемент замыкания множества обычных непрерывных финитных функций, и притом замыкания, построенного на основе вполне определенной сходимости, которая вводится в $\overset{\circ}{C}(\Omega)$ с помощью билинейной формы. Один и тот же функционал может изображаться различными обобщенными функциями, построенными на основе различных билинейных форм.

Пример 1. Пусть $X = L_p(\Omega)$, $p > 1$. Все условия, наложенные на X, выполнены. Здесь $X' = X^{\#} = L_{p'}(\Omega)$, $1/p + 1/p' = 1$, а сходимостью в $X^{\#}$ является слабая сходимость в $L_{p'}(\Omega)$.

Пример 2. Пусть $X = C[-1, 1]$ — пространство непрерывных функций на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, причем

$$\| \varphi \mid X \| = \sup_{|x| \leqslant 1} |\varphi(x)|.$$

Выражение $\varphi(x^{(0)})$, где $|x^{(0)}| < 1$, будет линейным непрерывным функционалом над X. Этот функционал не представим в виде (2.2) ни при какой функции $f(x)$. Однако, как было доказано в гл. I,

$$\varphi(x^{(0)}) = \lim_{h \to 0} \int_{-1}^{1} \frac{1}{h} \omega\left(\frac{x - x^{(0)}}{h}\right) \varphi(x)\, dx,$$

где $\omega(\cdot)$ — ядро усреднения, т. е. этот функционал принадлежит X'.

Введем для этой обобщенной функции особый символ, полагая

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \omega\left(\frac{x - x^{(0)}}{h}\right) = \delta(x - x^{(0)}).$$

Согласно принятому соглашению,

$$\varphi(x^{(0)}) = \int_{-1}^{1} \delta(x - x^{(0)}) \varphi(x)\, dx.$$

Введенный таким образом символ $\delta(x - x^{(0)})$ не имеет при фиксированном x никакого числового значения, числовое значение имеет лишь его скалярное произведение с $\varphi(x)$ из $C[-1, 1]$.

Пример 3. Возьмем в качестве X гильбертово пространство со скалярным произведением

$$[\varphi, \psi] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\varphi\psi + \varphi''(x)\psi''(x))\, dx. \tag{2.3}$$

Элементы этого пространства, как вытекает из теоремы IV, суть непрерывно дифференцируемые функции. Выражение $\varphi'(0)$ будет линейным непрерывным функционалом над X, так как $|\varphi'(0)| \leqslant K \| \varphi \mid X \|$. С другой стороны,

$$-\varphi'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \omega'\left(\frac{x}{h}\right) \varphi(x)\, dx.$$

Следовательно, функционалу $\varphi'(0)$ соответствует обобщенная функция. Положив

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \omega'\left(\frac{x}{h}\right) = D(x), \tag{2.4}$$

можем записать символически

$$\varphi'(0) = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} D(x)\varphi(x)\,dx. \tag{2.5}$$

Согласно общей теории гильбертовых пространств, любой функционал из X^* представим в виде скалярного произведения. Читателю предоставляется проверить, что $\varphi'(0) = [\varphi, \psi_0]$, где

$$\psi_0(x) = (-\operatorname{sh} x \sin x \operatorname{sign} x + \operatorname{cth}(\pi/2) \operatorname{ch} x \sin x)/4.$$

Вернемся к билинейной интегральной форме (2.2). Именно она послужила основой для введения сходимости в $\mathring{C}(\Omega)$. В примере 3, использовав вместо нее другую билинейную интегральную форму (2.3), мы получили другую сходимость на $\mathring{C}(\Omega)$. После введения новой билинейной формы некоторые функционалы, реализовавшиеся ранее только с помощью обобщенных функций, приобрели реализацию в обычных функциях. Например, функционалу $\varphi'(0)$ отвечает как обобщенная функция $-D(x)$, так и отличная от нее обычная функция $\psi_0(x)$. Этот прием носит общий характер, однако во всех приложениях особую роль играет построение обобщенных функций именно с помощью билинейной формы (2.2).

Пусть X_1 и X_2 — два линейных пространства сходимости, для которых имеет место вложение $X_2 \to X_1$. Иными словами, все элементы X_2 входят в X_1, и любая последовательность, сходящаяся в X_2, сходится в X_1. При этом мы говорим, что сходимость в X_2 сильнее, чем сходимость в X_1. Тогда любой непрерывный функционал l из $X_1^\#$ будет функционалом из $X_2^\#$, ибо непрерывность его на X_1 влечет за собой и непрерывность на X_2. Таким образом, имеет место вложение $X_1^\# \to X_2^\#$.

Полезно, однако, заметить, что функционалы, различные в X_1, могут оказаться неразличимыми в X_2. Поэтому запас функционалов $X_2^\#$ может оказаться даже меньше, чем $X_1^\#$. Так, например запас функционалов в $(n-1)$-мерном пространстве меньше, чем запас функционалов в пространстве n-мерном. В самом деле, все линейные функционалы в евклидовом пространстве R^n будут иметь вид

$$(l, x) = \sum_{j=1}^{n} l_j x_j,$$

где $l = (l_1, \ldots, l_n)$ снова принадлежит R^n. При уменьшении n уменьшается и запас функционалов.

Рассмотрим четыре цепочки пространств сходимости из § 1. Из (1.1) и (1.2) вытекает, что для соответствующих пространств функционалов справедливы диаграммы вложений:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathring{C}^{(0)\#} \to & \mathring{C}^{(1)\#} & \to \ldots \to & \mathring{C}^{(s)\#} & \to \ldots \to & \mathring{C}^{(\infty)\#} \\
\uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
C^{(0)\#} \to & C^{(1)\#} & \to \ldots \to & C^{(s)\#} & \to \ldots \to & C^{(\infty)\#}
\end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_0^{(0)\#} & \to & K_0^{(1)\#} & \to \ldots \to & K_0^{(s)\#} & \to \ldots \to & K_0^{(\infty)\#} \\
\uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
K^{(0)\#} & \to & K^{(1)\#} & \to \ldots \to & K^{(s)\#} & \to \ldots \to & K^{(\infty)\#}
\end{array}$$

Для пространств $\mathring{C}^{(s)\#}$, $C^{(s)\#}$, $K_0^{(s)\#}$ и $K^{(s)\#}$ имеет место также диаграмма вложений

$$\begin{array}{ccc}
\mathring{C}^{(s)\#} & \leftarrow & K_0^{(s)\#} \\
\uparrow & & \uparrow \\
C^{(s)\#} & \leftarrow & K^{(s)\#}
\end{array}$$

Наконец, для всех рассматриваемых пространств имеет место диаграмма, аналогичная диаграмме (1.3):

$$\begin{tikzcd}
 & K_0^{(0)\#} \arrow[rr] \arrow[dl] & & K_0^{(1)\#} \arrow[rr] \arrow[dl] & \cdots \arrow[rr] & & & K_0^{(s)\#} \arrow[rr] \arrow[dl] & \cdots \arrow[rr] & & & K_0^{(\infty)\#} \arrow[dl] \\
\mathring{C}^{(0)\#} \arrow[rr] & & \mathring{C}^{(1)\#} \arrow[rr] & & \cdots \arrow[rr] & & \mathring{C}^{(s)\#} \arrow[rr] & & \cdots \arrow[rr] & & \mathring{C}^{(\infty)\#} & \\
 & K^{(0)\#} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[uu] & & K^{(1)\#} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[uu] & \cdots \arrow[rr] & & & K^{(s)\#} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[uu] & \cdots \arrow[rr] & & & K^{(\infty)\#} \arrow[dl] \arrow[uu] \\
C^{(0)\#} \arrow[rr] \arrow[uu] & & C^{(1)\#} \arrow[rr] \arrow[uu] & & \cdots \arrow[rr] & & C^{(s)\#} \arrow[rr] \arrow[uu] & & \cdots \arrow[rr] & & C^{(\infty)\#} \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим множество $K_0^{(s)}(a)$ всех таких функций φ из $K_0^{(s)}$, носители которых заключены в шаре $B_a = \{x : |x| < a\}$. Из теоремы IV.8 вытекает, что $K_0^{(s)}(a) = \mathring{W}_2^{(s)}(B_a)$. Множество $K_0^{(s)}(a)$ со скалярным произведением

$$\{\varphi, \psi\}_a = \int\limits_{|x| \leq a} \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) D^\alpha \psi(x)\, dx$$

является гильбертовым пространством. Будем обозначать его символом $\mathring{L}_2^{(s)}(a)$.

Пусть функционал $l(x)$ обладает тем свойством, что его значения на любой непрерывной функции $\varphi(x)$, носитель которой не имеет общих точек с некоторым замкнутым множеством E, обращается в нуль. Тогда мы будем говорить, что множество E служит *носителем функционала* l, и писать $E = \operatorname{Supp} l$. *Наименьший носитель мы обозначим* supp l. *Функционал* l *назовем финитным, если он обладает компактным носителем.*

Теорема V.3. *Множество* $K^{(s)\#}$ *состоит из функционалов, которые обладают компактным носителем.*

Доказательство этой теоремы мы проведем от противного. Пусть носитель некоторого функционала $l \in K^{(s)\#}$ не компактен. Тогда найдется такая последовательность функций $\{\varphi_k(x)\} \subset K_0^{(s)}$ с носителями в кольцевых областях

$$\operatorname{supp} \varphi_k(x) \subset \{x \colon N_k < |x| < N_{k+1}\},$$

для которой $(l, \varphi_k) = 1$. Здесь $\{N_k\}$ — некоторая неограниченно растущая последовательность. На сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ в $K^{(s)}$ функционал l не определен. Получилось противоречие. Теорема доказана.

Сходимость в $K^{(s)\#}$ будет сильней той, которая порождается сходимостью в $K_0^{(s)\#}$. Именно, для сходимости последовательности функционалов $\{l_k\} \subset K^{(s)\#}$, сходящейся в $K_0^{(s)\#}$, необходимо и достаточно, чтобы их носители были ограничены в совокупности.

Пусть $\{L_k\}$ — некоторая последовательность функционалов из $K^{(s)\#}$. Обозначим через l_k сужение L_k на $K_0^{(s)}$.

Теорема V.4. *Последовательность $\{L_k\}$ функционалов из $K^{(s)\#}$ будет слабо сходящейся тогда и только тогда, когда справедливы два условия:*

1. *Последовательность соответствующих $\{l_k\}$ слабо сходится в $K_0^{(s)\#}$.*

2. *Все носители L_k должны быть заключены в одном и том же шаре $B_a = \{x : |x| \leqslant a\}$.*

Очевидно, что при выполнении этих условий последовательность $\{L_k\}$ слабо сходится в $K^{(s)\#}$. Покажем, что справедливо и обратное.

Пусть это не так и носитель L_k содержит непустое множество E_k, лежащее в области $G_k = \{x : N_k < |x| < N_{k+1}\}$, где $\{N_k\}$ — последовательность чисел, возрастающих до бесконечности. Покажем, что при этом найдется функция ψ из $K^{(s)}$, на которой последовательность $\{L_k\}$ расходится.

Рассмотрим функционал L_1. Найдется функция $\varphi_1 \in K_0^{(s)}$, $\operatorname{supp} \varphi_1 \subset G_1$, для которой $(L_1, \varphi_1) = 1$. Положим $\psi_1 = \varphi_1$. Далее, найдем такое $k_2 > k_1 = 1$, что $\operatorname{supp} L_1 \cap G_k = \phi$ при $k \geqslant k_2$. Существует функция φ_2, $\operatorname{supp} \varphi_2 \subset G_{k_2}$, такая, что $(L_{k_2}, \varphi_2) = 1$.

Составим сумму $\psi_2 = \psi_1 + \varphi_2 [2 - (L_{k_2}, \psi_1)]$. Очевидно, $(L_{k_1}, \psi_2) = 1$, $(L_{k_2}, \psi_2) = 2$. Теперь найдем $k_3 > k_2$ так, чтобы $\operatorname{supp} L_{k_2} \cap G_k = \phi$ при $k \geqslant k_3$. Существует функция φ_3, $\operatorname{supp} \varphi_3 \subset G_{k_3}$, такая, что $(L_{k_3}, \varphi_3) = 1$.

Составим сумму $\psi_3 = \psi_2 + \varphi_3 [3 - (L_{k_2}, \psi_2)]$. Мы получим, очевидно, $(L_{k_1}, \psi_3) = 1$, $(L_{k_2}, \psi_3) = 2$, $(L_{k_3}, \psi_3) = 3$.

Продолжая это построение, мы получим последовательность функций $\{\psi_N\}$, обладающую свойством

$$(L_{k_j}, \psi_N) = j, \; j = 1, 2, \ldots, N.$$

В любой конечной области $\{x : |x| \leqslant A\}$, начиная с некоторого значения N, последовательность $\{\psi_N\}$ стабилизируется. Предельная функция этой последовательности ψ будет такой, что на ней

$$(L_{k_j}, \psi) = j, \; j = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, последовательность $\{L_{k_j}\}$ будет расходящейся. Теорема доказана.

Мы располагаем набором пространств функций $\mathring{C}^{(s)}$, $C^{(s)}$, $K_0^{(s)}$, $K^{(s)}$ и пространств функционалов $\mathring{C}^{(s)\#}$, $C^{(s)\#}$, $K_0^{(s)\#}$, $K^{(s)\#}$.

Пространства функционалов $\mathring{C}^{(s)\#}$ и $C^{(s)\#}$ менее удобны, ибо их элементы выражаются через функции множеств. Поэтому ими мы пользоваться не будем.

Самым обширным среди пространств функционалов является $K_0^{(\infty)\#} = \mathring{C}^{(\infty)\#}$. Самым узким среди пространств функций — $\mathring{C}^{(\infty)} = K_0^{(\infty)}$. Легко, видеть, что имеют место вложения $\mathring{C}^{(s_1)} \to K^{(s_2)\#}$ и $C^{(s_1)} \to K_0^{(s_2)\#}$. При любых s_1 и s_2 эти вложения осуществляются с помощью билинейной формы (2.2), так что в целом возникает диаграмма вложений

$$\begin{array}{ccc} \mathring{C}^{(s_1)} & \to & K^{(s_2)\#} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^{(s_1)} & \to & K_0^{(s_2)\#} \end{array}$$

Поэтому пространство $\mathring{C}^{(\infty)}$ вложено во все остальные, а пространство $K_0^{(\infty)\#}$ содержит в себе все остальные. Во всем дальнейшем мы будем пользоваться различными промежуточными пространствами функций и обобщенных функций $\mathring{C}^{(\infty)} \to X \to K_0^{(\infty)\#}$. Отметим, что в ряде работ пространство $K_0^{(\infty)\#}$ обозначается как $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'(R^n)$.

Иногда мы будем пользоваться еще более узкими пространствами. Именно, мы будем рассматривать пространство финитных s раз непрерывно дифференцируемых функций, носители которых лежат в замыкании $\overline{\Omega}$ данной области Ω. Такое пространство мы будем обозначать символом $\mathring{C}^{(s)}(\overline{\Omega})$ и, в частности, $\mathring{C}^{(\infty)}(\overline{\Omega})$. Аналогично определяются пространства $K_0^{(s)}(\overline{\Omega})$ и $K_0^{(\infty)}(\overline{\Omega})$. Пространств функционалов над ними мы рассматривать не будем. Иногда нам будет полезно рассматривать замыкания этих множеств функций в различных $K^{(s)\#}$ и $K_0^{(s)\#}$.

Пространства X будут каждый раз подбираться нужным образом. Несколько позднее мы докажем, что во всех используемых нами пространствах $X^\# = X'$, т. е. что пространства функционалов исчерпываются пределами функций. Иначе говоря, в этих случаях все функционалы суть обобщенные функции.

§ 3. Операции над обобщенными функциями

Мы будем изучать различные операции с функционалами — обобщенными функциями: сложение, умножение на постоянную или на функцию, умножение функционалов и свертку функционалов с обычными функциями и функционалами же. Эти операции возможны не всегда. Для каждой такой k-местной операции $R(l_1, l_2, \ldots, l_k) = l_0$ мы будем подыскивать ту или иную область определения и отвечающее ей множество значений. Мы будем подбирать системы из $k+1$ пространств $X_1, X_2, \ldots, X_k, X_0$ так, чтобы операция R была определена всегда при $l_j \in X_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, а результат ее был элементом X_0. В соответствующей сходимости результат должен непрерывно зависеть от совокупности всех аргументов $l_1, l_2, \ldots, l_k$. Это значит, что если $\{l_j^{(t)}\}_{t=1}^{\infty}$ сходятся к $l_j^{(\infty)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, то $l_0^{(t)} = R(l_1^{(t)}, \ldots, l_k^{(t)})$ сходится к $l_0^{(\infty)} = R(l_1^{(\infty)}, \ldots, l_k^{(\infty)})$.

Необходимые нам формулы и свойства операции R мы будем выводить сначала для элементов $\mathring{C}^{(\infty)}$, которые всюду плотны во всех пространствах типа C, $C^{\#}$, K, $K^{\#}$. Последнее мы докажем, устанавливая равенства $K^{(s)'} = K^{(s)\#}$ и $K_0^{(s)'} = K_0^{(s)\#}$. Затем операция R распространяется по непрерывности на все нужное нам пространство.

Сложение функционалов и умножение их на постоянную определяется, как и обычно, формулой

$$(a_1 l_1 + a_2 l_2, \varphi) = a_1 (l_1, \varphi) + a_2 (l_2, \varphi).$$

Сложение перестановочно и сочетательно. Умножение на постоянную распределительно относительно сложения.

Умножение на обычную функцию не всегда возможно для данного функционала. Пусть $l(x) \in K_0^{(s)\#}$ и $\psi(x) \in C^{(s)}$. Определим произведение $l(x)\psi(x)$ формулой

$$(l(x)\psi(x), \varphi(x)) = (l(x), \psi(x)\varphi(x)).$$

Очевидно, что правая часть этого равенства имеет смысл и непрерывно зависит от каждой входящей туда величины. Она определяет левую часть. При этом произведение $l(x)\psi(x)$ снова будет элементом $K_0^{(s)\#}$.

Произведение $l(x)\psi(x)$ оказывается непрерывным по совокупности аргументов l, ψ. Чтобы это показать, используем две теоремы.

Будем говорить, что последовательность функционалов $\{l_k\}$ сходится к функционалу l_∞ равномерно на подмножестве $\mathfrak{M}$ линейного пространства сходимости X, если для всех элементов y этого множества

$$|(l_k, y) - (l_\infty, y)| < \varepsilon \text{ при } k > N(\varepsilon),$$

где $N(\varepsilon)$ не зависит от $y \in \mathfrak{M}$.

Теорема V.5 ([52]). *Последовательность функционалов $\{l_k\}$, сходящаяся к l_∞ в $X^{\#}$, сходится равномерно на всякой сходящейся последовательности $\{y_k\}$.*

Доказательство основано на следующей лемме из теории двойных последовательностей.

Лемма V.2. *Пусть даны двойная бесконечная последовательность $\{a_{jk}\}$, у которой все последовательности по строкам и столбцам стремятся к нулю:*

$$\lim_{j\to\infty} a_{jk} = \lim_{k\to\infty} a_{jk} = 0,$$

и произвольная положительная двойная последовательность $\{\eta_{jk}\}$. Тогда из $\{a_{jk}\}$ можно выделить подпоследовательность $b_{jk} = a_{l_j l_k}$

такую, что для всех ее членов, не лежащих на главной диагонали,

$$|b_{jk}| < \eta_{jk}.$$

Очевидно, что выбор $\{b_{jk}\}$ сводится к выбору последовательности $\{l_j\}$. Возьмем $l_1 = 1$. Когда $l_1, l_2, \ldots, l_s$ выбраны, то определена квадратная матрица $B_s = \| b_{jk} \|$ порядка s. Следующее число l_{s+1} выбираем так, чтобы те недиагональные элементы матрицы B_{s+1}, которые не входили в B_s, оказались меньше каждый своего $\eta_{j(s+1)}$ или $\eta_{(s+1)k}$. Эти условия, как нетрудно видеть, будут соблюдены одновременно, если взять l_{s+1} достаточно большим. Тем самым $\{b_{jk}\}$ построена по индукции. Если в матрице $\| a_{jk} \|$ все диагональные элементы больше ε, то и $b_{jj} > \varepsilon$. Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы V.5.

Пусть $y_k \to y_\infty$ в X и $l_k \to l_\infty$ в $X^\#$. Замена $y_k - y_\infty = z_k$ сводит нашу теорему к случаю $y_\infty = 0$, $l_\infty = 0$. Составим матрицу $A = \| a_{jk} \| = \| (l_k, y_j) \|$. По условию $\lim\limits_{j\to\infty} a_{jk} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{jk} = 0$. Предположим, что сходимость при $k \to \infty$ неравномерна по j. Тогда есть постоянная ε и сколь угодно большие номера k и j, для которых $|a_{jk}| > \varepsilon$.

Выберем для данного ε соответствующую последовательность $\{a_{j_s k_s}\}$ и притом так, чтобы $\{j_s\}$ и $\{k_s\}$ возрастали. Выбросив из матрицы A все остальные столбцы и строки, получим матрицу A_1, у которой на главной диагонали будут стоять элементы, большие чем ε.

Рассмотрим последовательность $\{y_{j_s}\}$. Из нее по аксиоме F4) можно выбрать подпоследовательность, образующую безусловно сходящийся ряд. Будем считать, что она совпадает с $\{y_{j_s}\}$. Если это не так, то вычеркнем из A_1 лишние строки и столбцы так, чтобы диагональные элементы оставшейся матрицы состояли из элементов, ранее входивших в состав главной диагонали A_1. Новую матрицу обозначим A_2.

Пусть $\eta_{jk} = \varepsilon/2^{j+2}$. Применяя к A_2 лемму V.2 и вычеркивая еще некоторые строки и столбцы, придем к матрице $B = \| (l_k, y_j) \|$, у которой:

а) все диагональные элементы больше ε;

б) недиагональные элементы удовлетворяют неравенству:

$$|b_{jk}| < \varepsilon/2^{j+2}, \quad j \neq k;$$

в) соответствующий ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j$ безусловно сходится.

Пусть $y^* = \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j$. В силу непрерывности l_k имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} (l_k, y_j) = \Big(l_k, \sum_{j=1}^{\infty} y_j\Big) = (l_k, y^*).$$

Поскольку $|b_{jk}| < \varepsilon/2^{j+2}$, $j \neq k$, то $\left|\sum\limits_{j\neq k} b_{jk}\right| < \varepsilon/2$ и, значит, $|(l_k, y^*)| = \left|\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_{jk}\right| \geqslant |b_{kk}| - \left|\sum\limits_{j\neq k} b_{jk}\right| > \varepsilon/2$. Но, с другой стороны, $\lim\limits_{k\to\infty}(l_k, y^*) = (l_\infty, y^*) = 0$. Получившееся противоречие и доказывает нашу теорему.

Пусть X — линейное пространство сходимости, удовлетворяющее аксиомам F0) и F2) и Y — пространство, удовлетворяющее аксиомам F0), F2), F4). Пусть $B(x, y)$ — билинейная форма, определенная при $x \in X$, $y \in Y$, со значениями в комплексной плоскости. Будем говорить, что: $B(x, y)$ — *раздельно непрерывна*, если из $x_n \to x_\infty$ в X и $y_n \to y_\infty$ в Y следует:

$$B(x_n, y) \to B(x_\infty, y), \quad \forall y \in Y,$$

$$B(x, y_n) \to B(x, y_\infty), \quad \forall x \in X,$$

и $B(x, y)$ — *совместно непрерывна, если* $B(x_n, y_j) \to B(x_\infty, y_\infty)$.

Теорема V.6 ([52]). *Раздельно непрерывная билинейная форма* $B(x, y)$ *является совместно непрерывной.*

При фиксированном x_k форма $B(x_k, \cdot)$ служит линейным функционалом над Y, который сходится к $B(x_\infty, \cdot)$ при $k \to \infty$. По теореме V.5 для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что при $k > N(\varepsilon)$ и любом j имеет место

$$|B(x_k, y_j) - B(x_\infty, y_j)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Имеем далее

$$B(x_k, y_j) - B(x_\infty, y_\infty) = \\ = [B(x_k, y_j) - B(x_\infty, y_j)] + [B(x_\infty, y_j) - B(x_\infty, y_\infty)].$$

Первое слагаемое мало в силу (3.1), а второе — в силу непрерывности $B(x_\infty, \cdot)$. Окончательно

$$|B(x_k, y_j) - B(x_\infty, y_\infty)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k > N_1(\varepsilon),\ j > N_2(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Вернемся к произведению $l(x)\psi(x)$, $l(x) \in K_0^{(s)\#}$, $\psi(x) \in C^{(s)}$. Для проверки совместной непрерывности произведения убедимся, что из $l_k \to 0$ в $K_0^{(s)\#}$ и $\psi_n(x) \to 0$ в $C^{(s)}$ следует $l_k(x)\psi_n(x) \to 0$ в $K_0^{(s)\#}$. Если $\varphi \in K_0^{(s)}$, то $\psi_n(x)\varphi(x) = \varphi_n(x) \to 0$ в $K_0^{(s)}$ и $(l_k(x)\psi_n(x), \varphi(x)) = (l_k(x), \varphi_n(x))$. Так как $K_0^{(s)}$, очевидно, удовлетворяет аксиоме F4), то достаточно к форме $(l(x), \varphi(x))$ применить только что доказанную теорему, положив $X = K_0^{(s)\#}$, $Y = K_0^{(s)}$.

Сдвиг независимого переменного позволяет строить функционал $l(x - z) \in K_0^{(s)\#}$ по функционалу $l(x) \in K_0^{(s)\#}$ и вектору z, и определяется формулой

$$(l(x - z), \varphi(x)) = (l(x), \varphi(x + z)).$$

Нетрудно проверить, что $\lim\limits_{y\to 0} l(x-y) = l(x)$, где предел берется в смысле $K_0^{(s)\#}$. В самом деле, из теории функций вещественного переменного известно, что $\lim\limits_{z\to 0} \varphi(x+z) = \varphi(x)$, где предел берется в смысле $K_0^{(s)}$ [5]. Следовательно,

$$\lim_{z\to 0}(l(x-z), \varphi(x)) = \lim_{z\to 0}(l(x), \varphi(x+z)) = (l(x), \varphi(x)).$$

Перейдем теперь к важной операции — к свертке. *Сверткой* двух обычных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называется выражение

$$\chi(x) = \varphi(x) * \psi(x) = \int \varphi(y)\,\psi(x-y)\,dy,$$

если этот интеграл, взятый по всему пространству, имеет смысл [6]. Это будет так, если обе функции ограничены и хотя бы одна из них финитна. Свертка перестановочна:

$$\varphi(x)*\psi(x) = \int \varphi(y)\,\psi(x-y)\,dy = \int \psi(z)\,\varphi(x-z)\,dz = \psi(x)*\varphi(x)$$

и распределительна по сложению:

$$[a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x)] * \psi(x) = a_1(\varphi_1 * \psi) + a_2(\varphi_2 * \psi).$$

Сдвиг независимого переменного в любом из слагаемых равносилен сдвигу свертки

$$\varphi(x+z_1) * \psi(x+z_2) = \chi(x+z_1+z_2).$$

Свертку функционала $l(x)$ из $K_0^{(s)\#}$ с функцией $\varphi(x)$ из $K_0^{(s)}$ построим по формуле:

$$\psi(x) = l(x) * \varphi(x) = l(y),\ \ \varphi(x-y)).$$

Результат такой свертки будет непрерывной функцией. Каждый функционал l из $K_0^{(s)\#}$ можно, в частности, свернуть с любой бесконечно дифференцируемой финитной функцией. Построим для $l(x)$ среднюю функцию с помощью формулы

$$l_h(x) = l(x) * h^{-n}\ \omega(x/h),$$

где $\omega(x)$ — введенное в гл. I ядро усреднения:

$$\omega(x) = \omega(x_1) \times \ldots \times \omega(x_n), \tag{3.2}$$

$$\omega(x_j) = \begin{cases} 0, & |x_j| > {}^3/_4; \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{th}\,\dfrac{|x_j| - {}^1/_2}{(|x_j| - {}^1/_4)\,({}^3/_4 - |x_j|)}, & \dfrac{1}{4} \leqslant |x_j| \leqslant \dfrac{3}{4}; \\ 1, & |x_j| \leqslant {}^1/_4. \end{cases} \tag{3.3}$$

---

[5] Это вытекает из непрерывности в целом в пространствах L_p при $1 \leqslant p < \infty$.
[6] При интегрировании по всему пространству символ R^n часто опускается.

Из бесконечной дифференцируемости и финитности $\omega(x)$ следует, что $l_h(x)$ будет функцией от x, непрерывной вместе со всеси своими производными, т. е. бесконечно дифференцируемой. Нетрудно убедиться, что средние функции для любого финитного функционала l будут в свою очередь финитными. Средние функции представляют собой удобный аппарат для приближения функционалов.

Теорема V.7. *Замыкание множества функционалов, отвечающих финитным бесконечно дифференцируемым функциям, в пространстве $K_0^{(s)\#}$ совпадает с этим пространством, в частности*

$$K_0^{(s)'} = K_0^{(s)\#}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный функционал $l(x) \in K_0^{(s)\#}$. Покажем, что он является пределом в смысле сходимости в $K_0^{(s)\#}$ последовательности функционалов, отвечающих функциям из $K_0^{(\infty)}$. Построим для $l(x)$ среднюю функцию $l_h(x) = h^{-n}(l(y), \omega((x-y)/h))$, где ω определяется формулами (3.2) и (3.3). Составим интеграл

$$(l_h(x), \varphi(x)) = \int l_h(x)\varphi(x)\,dx = \\ = \int h^{-n}(l(y), \omega((x-y)/h))\,\varphi(x)\,dx, \tag{3.4}$$

где $\varphi \in K_0^{(s)}$. Покажем, что

$$(l_h, \varphi) = (l, \varphi_h). \tag{3.5}$$

Сначала функцию $\varphi \in K_0^{(s)}$ будем считать непрерывной с производными до порядка s включительно. Разобьем носитель функции $\varphi(x)$ на N непересекающихся множеств $\Delta_1^{(N)}, \ldots, \Delta_N^{(N)}$ так, чтобы при $N \to \infty$ максимальный диаметр такого множества $\Delta_j^{(N)}$ стремился к нулю, и заменим интеграл (3.4) пределом сумм:

$$\int l_h(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |\Delta_j^{(N)}|\, l_h(\xi^{(j)})\,\varphi(\xi^{(j)}),$$

где через $|\Delta_j^{(N)}|$ обозначен объем ячейки $\Delta_j^{(N)}$, а через $\xi^{(j)}$ — некоторая точка в этой ячейке.

Преобразуем последнюю сумму:

$$\sum_{j=1}^{N} |\Delta_j^{(N)}|\, l_h(\xi^{(j)})\,\varphi(\xi^{(j)}) = \sum_{j=1}^{N} |\Delta_j^{(N)}|\,\varphi(\xi^{(j)})\,(l(y), h^{-n}\omega((\xi^{(j)}-y)/h)) = \\ = \Big(l(y), \sum_{j=1}^{N} |\Delta_j^{(N)}|\,\varphi(\xi^{(j)})\,h^{-n}\omega((\xi^{(j)}-y)/h)\Big).$$

Сумма под знаком функционала имеет предел при $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} h^{-n} | \Delta_j^{(N)} | \varphi(\xi^{(j)}) \omega((\xi^{(j)} - y)/h) = h^{-n} \int \varphi(x) \omega((x-y)/h)\, dx,$$

причем сходимость имеет место в пространстве $K_0^{(s)}$ функций переменного y. Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \left(l(y), \sum_{j=1}^{N} h^{-n} | \Delta_j^{(N)} | \varphi(\xi^{(j)}) \omega((\xi^{(j)} - y)/h)\right) = (l(y), \varphi_h(y)),$$

т. е. (3.5) доказано. Пусть теперь $\varphi(x)$ — произвольный элемент $K_0^{(s)}$. Рассмотрим двойную свертку

$$\varphi_{h,\delta}(x) = \varphi(x) * h^{-n}\omega(x/h) * \delta^{-n}\omega(x/\delta).$$

Имеем

$$\lim_{\delta\to 0} \varphi_{h,\delta}(x) = \varphi_h(x), \qquad \lim_{h\to 0} \varphi_{h,\delta}(x) = \varphi_\delta(x).$$

Для функции $\varphi_\delta(x)$ воспользуемся уже доказанной формулой

$$\int l_h(x) \varphi_\delta(x)\, dx = \int l(x) \varphi_{\delta,h}(x)\, dx.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\delta \to 0$, что, очевидно, возможно, в силу непрерывности функционала $l(x)$ и равномерного стремления $\varphi_{\delta,h}(x)$ и $\varphi_h(x)$ вместе со всеми производными, и получим (3.5). Из (3.5) следует, что

$$\int \omega(hx) l_h(x) \varphi(x)\, dx = \int l(x) \varphi_h(x)\, dx \tag{3.6}$$

при $h < 1/(5a)$, где a — радиус шара, содержащего supp φ с центром в начале координат. Так как $\varphi_h(x) \to \varphi(x)$ в K_0^s и $l(x)$ — непрерывный функционал, будем иметь в силу (3.6): $\omega(hx)\, l_h(x) \to l(x)$ в $K_0^{(s)\#}$. Остается заметить, что $\omega(hx)\, l_h(x) \in K_0^{(\infty)}$ при любом h. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Для пространств $K^{(s)\#}$ справедливо аналогичное утверждение. Иными словами, любой элемент $K^{(s)\#}$ может быть приближен последовательностью финитных непрерывных функций.*

В самом деле, по теореме V.3 любой элемент $l \in K^{(s)\#}$ имеет ограниченный носитель. Поэтому средние функции $l_h(x)$ будут иметь носители, ограниченные в совокупности при $|h| < 1$. Из сходимости $l_h(x)$ к $l(x)$ в $K_0^{(s)\#}$ следует при этом их сходимость к $l(x)$ в $K^{(s)\#}$ (см. теорему V.4).

Следствие 3.2. *Для $K_0^{(\infty)}$ и $K^{(\infty)}$ справедливы равенства:*

$$K_0^{(\infty)\prime} = K_0^{(\infty)\#}, \qquad K^{(\infty)\prime} = K^{(\infty)\#}.$$

Теорема V.7 позволяет нам употреблять теперь термины «функционал» и «обобщенная функция» на равных правах.

В дальнейшем будем рассматривать функциональные пространства X в данной области Ω. Если такое пространство X содержит в себе все $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$, причем это последнее всюду плотно в X, то мы будем говорить, что пространство X *регулярно*. Пространство $W_p^{(l)}(\Omega)$ в ограниченной области Ω *нерегулярно*. Регулярным будет $\overset{\circ}{W}{}_p^{(l)}(\Omega)$ — замыкание множества финитных функций в в $W_p^{(l)}(\Omega)$.

Часто область Ω совпадает со всем пространством, а любой элемент φ из X (финитный или нефинитный) допускает свертку с ядром усреднения. Получающаяся последовательность средних функций φ_h сходится к φ. Это свойство мы будем называть *сглаживаемостью*.

Дадим для обобщенных функций одно представление, которое мы будем называть *рядом по удаляющимся носителям*. Оно служит грубым аналогом теоремы о плотности финитных функций в $\overset{\circ}{W}{}_{p,\nu}^{(l)}$, доказанной нами в гл. III.

Пусть дан числовой ряд

$$\sum_{\alpha\in A} a_\alpha, \tag{3.7}$$

где A — некоторый набор индексов. Индексами α могут, например, служить целочисленные векторы. Мы скажем, что ряд (3.7) *суммируем к числу* a_∞, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное подмножество $A_0 \subset A$, что для любого объемлющего конечного подмножества A', $A_0 \subset A' \subset A$, выполняется неравенство

$$\Big|\sum_{\alpha\in A'} a_\alpha - a_\infty\Big| < \varepsilon.$$

Аналогично определяется суммируемость ряда из обобщенных функций. Ряд $\sum\limits_{\alpha\in A} l_\alpha, l_\alpha \in K_0^{(s)\#}$ будем называть суммируемым к l_∞ из $K_0^{(s)\#}$, если для любого $\varphi \in K_0^{(s)}$ числовой ряд $\sum\limits_{\alpha\in A}(l_\alpha, \varphi)$ суммируем к (l_∞, φ).

Как было отмечено в § 4 гл. I, справедлива формула

$$\sum_\beta \omega(x-\beta) = 1. \tag{3.8}$$

Рассмотрим теперь ряд $\sum\limits_\beta l(x)\,\omega(x-\beta)$. Этот ряд будет, очевидно, суммируем в $K_0^{(s)\#}$, так как для любой функции $\varphi(x) \in K_0^{(s)}$ справедливо для любого $\varepsilon > 0$

$$\Big|\sum_{\beta\in A'} (l(x)\,\omega(x-\beta), \varphi(x)) - (l(x), \varphi(x))\Big| < \varepsilon, \tag{3.9}$$

где $A' \supset \{\beta : |\beta_j| \leqslant N\}$, а число N достаточно велико. Равенство (3.9) будет точным, как только supp φ окажется лежащим внутри куба $|x_j| < N + {}^1/_4$. Следовательно,

$$l(x) = \sum_{\beta} l(x)\,\omega(x-\beta) = \sum_{\beta} l_\beta(x). \tag{3.10}$$

Дадим общее определение. Пусть дан ряд $\sum\limits_{\alpha \in A} l_\alpha$ из обобщенных функций. *Будем говорить, что это есть ряд по удаляющимся носителям, если для любого шара $\{x : |x| \leqslant a\}$ все слагаемые l_α, кроме некоторого конечного множества, зависящего от a, имеют носители, лежащие вне этого шара.* Любой ряд с удаляющимися носителями, как легко видеть, суммируем.

Разложение (3.10) является примером ряда с удаляющимися носителями. Это разложение назовем стандартным.

Приближение обычных или обобщенных функций финитными часто будем называть *срезыванием*, а пространства, в которых такая аппроксимация всегда возможна, *срезываемыми*. Наличие стандартного разложения гарантирует срезываемость.

Частичные суммы ряда по удаляющимся носителям дают приближения разлагаемой обобщенной функции финитными обобщенными функциями. Мы ввели, таким образом, два способа аппроксимации обобщенных функций: сглаживание и срезывание. Применяя их последовательно в любом порядке, получим приближение обобщенной функции посредством финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Если пространство $X(\Omega)$ содержит $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}(\Omega)$, и если обе операции сглаживания и срезывания всегда выполнимы, то пространство $X(\Omega)$ будет регулярным.

§ 4. Произведение обобщенных функций

Перейдем к умножению обобщенных функций. Произведение $l_1(x)\, l_2(x)$, очевидно, существует не для любой пары сомножителей. Согласно общему принципу, описанному в начале § 3, мы должны ввести пространства X_1 и X_2, из которых будем брать l_1 и l_2 и которые назовем *пространствами взаимных мультипликаторов*. Будем требовать, чтобы $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)} \to X_j \to K_0^{(\infty)\#}$, $j = 1, 2$, и X_j, $j = 1, 2$, были регулярными, т. е. чтобы $\overset{\circ}{C}{}^{(\infty)}$ было всюду плотно в X_j.

Приведем примеры пространств взаимных мультипликаторов. Ограничимся вначале произведением двух функций.

Один такой пример был рассмотрен нами выше. В нем $X_1 = K_0^{(s)\#}$ и $X_2 = C^{(s)}$. Результат умножения $l_3 = l_1 l_2$ принадлежит $K_0^{(s)\#}$ и непрерывно зависит от сомножителей.

Для построения другого примера введем понятие существенного носителя обобщенной функции. Пусть обобщенная функция $l(x)$ каким-либо способом представлена как сумма двух других функций:

$$l(x) = S(x) + b(x), \tag{4.1}$$

причем функционал $b(x)$ реализуется ограниченной функцией $f(x)$, а $S(x)$ не реализуется с помощью таких функций. Носитель E обобщенной функции $S(x)$ будем называть *существенным носителем* Supp ess $l(x)$ обобщенной функции $l(x)$:

$$\operatorname{Supp\,ess} l(x) = \operatorname{supp} S(x).$$

Представление вида (4.1) для данной $l(x)$ отнюдь не единственное. Например, имея такое представление, можно взять произвольную ограниченную измеримую функцию $g(x)$, отличную от нуля только в E, и положить

$$l(x) = (S(x) - l_1(x)) + (l_1(x) - b(x)) = S_1(x) + b_1(x),$$

где $l_1(x)$ — функционал, реализуемый функцией $g(x)$. Иными словами, можно «как угодно» изменять исходную функцию $b(x)$ на замкнутом множестве E. Например, ее можно сделать равной нулю на E.

Положим

$$\operatorname{supp\,ess} l(x) = \bigcap \operatorname{Supp\,ess} l(x),$$

где пересечение берется по всем разложениям вида (4.1). Замкнутое множество supp ess $l(x)$ называется *истинным существенным носителем* обобщенной функции $l(x)$.

Например, для функции $1/|x|^\alpha$, $\alpha > 0$, существенным носителем Supp ess $(1/|x|^\alpha)$ будет любой шар с центром в начале координат, а истинным существенным носителем supp ess $(1/|x|^\alpha)$ будет само начало.

Можно показать, что для любого открытого множества U, содержащего в себе supp ess $l(x)$, существует такое разложение вида (4.1), у которого supp $S(x) \subset U$.

Будем говорить, что обобщенные функции $l_1(x)$ и $l_2(x)$ *разобщены*, если supp $l_1(x) \cap$ supp $l_2(x) = \phi$, и будем говорить, что *разобщены особенности обобщенных функций* $l_1(x)$ и $l_2(x)$, если

$$\operatorname{supp\,ess} l_1 \cap \operatorname{supp\,ess} l_2 = \phi.$$

Иными словами, особенности l_1 и l_2 разобщены, если можно построить такие разложения

$$l_1 = S_1 + b_1 \quad \text{и} \quad l_2 = S_2 + b_2, \tag{4.2}$$

«сингулярные» части которых S_1 и S_2 разобщены. (Достаточно окружить замкнутые множества $E_j =$ supp ess l_j, $j = 1, 2$, непересекающимися открытыми U_j и построить разложения (4.2), у которых supp $S_j \subset U_j$, $j = 1, 2$.)

Пусть теперь имеется разложение вида (4.1) $l(x) = S(x) + b(x)$, где supp $S(x) = E$, а функционал $b(x)$ представляется функцией $f(x)$ одного из классов $C^{(s)}$, $\mathring{C}^{(s)}$, $K^{(s)}$ или $K_0^{(s)}$. Тогда мы будем говорить, что на открытом множестве $\Omega \setminus E$ обобщенная функция $b(x)$ локально принадлежит соответствующему классу. (Здесь Ω — область, на которой рассматриваются основные и обобщенные функции.)

Пусть l_1 и l_2 — две обобщенные функции из $K_0^{(s)\#}$, особенности которых разобщены. Пусть, кроме того, обобщенная функция l_1 на открытом множестве $U_2 \supset E_2 = \operatorname{supp\,ess} l_2$ локально принадлежит $C^{(s)}$, а обобщенная функция l_2 локально принадлежит $C^{(s)}$ на открытом множестве $U_1 \supset E_1 = \operatorname{supp\,ess} l_1$, $U_1 \cap U_2 = \phi$. Если зафиксировать E_1, E_2, U_1 и U_2, то легко определить соответствующие пространства X_1 и X_2, из которых берутся обобщенные функции l_1 и l_2. Пусть

$$l_1 = S_1 + b_1, \quad \operatorname{supp} S_1 \subset U_1,$$

$$l_2 = S_2 + b_2, \quad \operatorname{supp} S_2 \subset U_2.$$

Определим произведение $l_1 l_2$ формулой

$$l_1 l_2 = S_1 b_2 + S_2 b_1 + b_1 b_2.$$

(Мы считаем тем самым произведение $S_1 S_2$ разобщенных функций S_1 и S_2 равным нулю.)

Легко видеть, что в силу локальной принадлежности функции l_1 пространству $C^{(s)}$ на $U_2 \supset \operatorname{supp} S_2$ произведение $S_2 b_1$ определено. Точно так же определено $S_1 b_2$. Произведение $b_1 b_2$ определено как произведение ограниченных функций. Можно показать, что $l_1 l_2$ не зависит от выбора разложений. Справедлива формула

$$\operatorname{supp\,ess}(l_1 l_2) \subset \operatorname{supp\,ess} l_1 \cup \operatorname{supp\,ess} l_2.$$

Таким образом, произведение $l_3 = l_1 l_2$ — это обобщенная функция из $K_0^{(s)\#}$ с особенностями, локализованными в $E_1 \cup E_2$. Легко видеть, что оно непрерывно зависит от сомножителей l_1 и l_2.

Пусть $x^{(\rho)}$ — вектор, составленный из каких-то t координат вектора x, $x^{(\bar\rho)}$ — вектор, дополняющий $x^{(\rho)}$ до x. Будем говорить, что обобщенная функция $l(x)$ зависит только от переменного $x^{(\rho)}$, если

$$l(x) = \lim_{h \to 0} l_h(x^{(\rho)}),$$

где l_h — непрерывная функция от $x^{(\rho)}$.

Необходимое и достаточное условие зависимости $l(x)$ только от $x^{(\rho)}$ состоит, как легко проверить, в том, что

$$(l(x), \varphi(x + z)) = (l(x), \varphi(x))$$

для любого z, такого, что $z^{(\rho)} = 0$.

Всякой обобщенной функции $l(x)$, зависящей только от $x^{(\rho)}$ и принадлежащей пространству $K_0^{(s)\#}(R^n)$, можно сопоставить обобщенную функцию $l(x^{(\rho)})$, принадлежащую пространству

$K_0^{(s)\#}(R^{(\rho)})$, по следующему правилу:

$$(l(x^{(\rho)}), \varphi(x^{(\rho)})) = (l(x), \varphi(x^{(\rho)})\,\psi(x^{(\bar\rho)})),$$

где $\varphi(x^{(\rho)}) \in K_0^{(s)}(R^{(\rho)})$, $\psi(x^{(\bar\rho)}) \in K_0^{(s)}(R^{(\bar\rho)})$, $\int\limits_{R^{(\bar\rho)}} \psi(x^{(\bar\rho)})\,dx^{(\bar\rho)} = 1$.

Нетрудно видеть, что определение не зависит от выбора функции $\psi(x^{(\bar\rho)})$ и, кроме того, различным обобщенным функциям $l(x)$ соответствуют различные $l(x^{(\rho)})$. Обратно, всякая обобщенная функция $l(x^{(\rho)}) \in K_0^{(s)\#}(R^{(\rho)})$ порождает единственную обобщенную функцию $l(x) \in K_0^{(s)\#}(R^n)$, зависящую только от $x^{(\rho)}$, которая определяется по следующему правилу:

$$(l(x), \varphi(x)) = \int\limits_{R^{(\bar\rho)}} (l(x^{(\rho)}), \varphi(x^{(\rho)}, x^{(\bar\rho)}))\,dx^{(\bar\rho)}, \tag{4.3}$$

сначала на функциях из $K_0^{\infty}(R^n)$, а затем по непрерывности на всех функциях из $K_0^{(s)}(R^n)$. При этом используется следующая оценка:

$$\left| \int\limits_{R^{(\bar\rho)}} (l(x^{(\rho)}), \varphi(x^{(\rho)}, x^{(\bar\rho)}))\,dx^{(\bar\rho)} \right| \leqslant K \,\| \varphi \mid W_2^{(s)}(R^n) \|,$$

справедливая для всех функций φ из $K_0^{\infty}(R^n)$ с постоянной K, зависящей только от шара, в котором расположен носитель $\varphi(x)$. Эту оценку мы предлагаем доказать читателю в качестве упражнения. Ясно, что различные обобщенные функции $l(x^{(\rho)})$ порождают при этом различные $l(x)$.

Если по обобщенной функции $l(x)$, зависящей только от $x^{(\rho)}$, построить обобщенную функцию $l(x^{(\rho)})$, а затем по полученной обобщенной функции построить обобщенную функцию из $K_0^{(s)\#}(R^n)$ по указанным правилам, то получится исходная обобщенная функция $l(x)$. Аналогично, если по (4.3) с данной обобщенной функцией $l(x^{(\rho)})$ построить обобщенную функцию $l(x)$, а затем по $l(x)$ построить обобщенную функцию из $K_0^{(s)\#}(R^{(\rho)})$, то придем к обобщенной функции $l(x^{(\rho)})$.

В дальнейшем нам будет удобно обобщенную функцию $l(x) \in K_0^{(s)\#}(R^n)$, зависящую только от $x^{(\rho)}$, обозначать так же, как и соответствующую ей обобщенную функцию из $K_0^{(s)\#}(R^{(\rho)})$, символом $l(x^{(\rho)})$. Читателю будет ясно, о какой из этих обобщенных функций идет речь в каждом конкретном случае.

Определим операцию перемножения для функций, зависящих от отдельных групп переменных. Нам понадобится теорема о глобальном гильбертовом представлении функционала из $K_0^{(s)\#}$.

Т е о р е м а V.8 ([44]). *Для любого функционала* $l\,(x)$ *из* $K_0^{(s)\#}$ *можно найти такую функцию* $\psi\,(x)$ *из* $K^{(s)}$, *что при любой* $\varphi \in K_0^{(s)}$

$$(l, \varphi) = \int \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} D^{\alpha}\varphi\,(x)\, D^{\alpha}\psi\,(x)\, dx. \tag{4.4}$$

Функция ψ определяется с точностью до произвольного полигармонического слагаемого χ. Это не влияет на величину формы (4.4), поскольку интегрирование по частям дает при $\varphi \in K_0^{(s)}$

$$\int \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} D^{\alpha}\varphi\,(x)\, D^{\alpha}\chi\,(x)\, dx = (-1)^s \int \varphi\,(x)\, \Delta^s \chi\,(x)\, dx.$$

В случае, когда функционал l из $K_0^{(s)\#}$ реализуется с помощью бесконечно дифференцируемой функции f, запас функций ψ, удовлетворяющих (4.4), состоит из всех решений уравнения $\Delta^s\psi = (-1)^s f$, принадлежащих $K^{(s)}$. Все эти ψ в свою очередь будут бесконечно дифференцируемыми.

Пусть переменные $(x_1, \ldots, x_n)$ разбиты на две взаимодополняющие группы $x^{(\rho)}$ и $x^{(\bar\rho)}$, которые мы переобозначим $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, и пусть даны две обобщенные функции $l_1\,(x^{(1)})$ и $l_2\,(x^{(2)})$, зависящие каждая от своей группы переменных. Пусть $l_1\,(x^{(1)}) \in K_0^{(s_1)\#}$ и $l_2\,(x^{(2)}) \in K_0^{(s_2)\#}$, где пространства $K_0^{(s)\#}$ берутся для соответствующих групп переменных. Найдем для каждой из этих функций гильбертово представление вида (4.4) и определим функционал $l\,(x)$ на $K_0^{(s_1+s_2)}$ формулой

$$(l, \varphi) = \\ = \int\int \sum_{|\alpha^{(1)}|=s_1} \sum_{|\alpha^{(2)}|=s_2} \frac{s_1!}{\alpha^{(1)}!} \frac{s_2!}{\alpha^{(2)}!} D^{\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}}\varphi D^{\alpha^{(1)}}\psi_1 D^{\alpha^{(2)}}\psi_2\, dx^{(1)}\, dx^{(2)}. \tag{4.5}$$

Здесь $\alpha^{(1)}$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами, у которого $\bar\rho$-компоненты равны нулю. У $\alpha^{(2)}$ равны нулю ρ-компоненты. Заметим сразу же, что билинейная форма (4.5) отлична от обычной гильбертовой билинейной формы для функционалов на $K_0^{(s_1+s_2)}$, поскольку в ней присутствуют отнюдь не все производные порядка $s_1 + s_2$. Отметим еще, что значение функционала l на φ из $K_0^{(s_1+s_2)}$ не зависит от того, какие реализации $\psi_1\,(x^{(1)})$ и $\psi_2\,(x^{(2)})$ обобщенных функций $l_1\,(x^{(1)})$ и $l_2\,(x^{(2)})$ выбраны.

Т е о р е м а V.9. *Произведение* $l\,(x)$ *обобщенных функций* $l_1\,(x^1) \in K_0^{(s_1)\#}$ *и* $l_2\,(x^{(2)}) \in K_0^{(s_2)\#}$, *определяемое формулой* (4.5), *является обобщенной функцией из* $K_0^{(s_1+s_2)\#}$, *непрерывно зависящей от сомножителей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что $l\,(x)$ принадлежит $K_0^{(s_1+s_2)\#}$. По заданному элементу φ из $K_0^{(s_1+s_2)}$ найдем такое a, чтобы бицилиндр $B_a = \{x\colon |\,x^{(1)}\,| < a,\ |\,x^{(2)}\,| < a\}$ содержал носитель φ. Из неравенства Коши—Буняковского

$$|(l, \varphi)|^2 \leqslant \int\limits_{B_a} \sum_{|\alpha^{(1)}|=s_1} \sum_{|\alpha^{(2)}|=s_2} \frac{s_1!}{\alpha^{(1)}!} \frac{s_2!}{\alpha^{(2)}!} [D^{\alpha(1)+\alpha(2)}\varphi]^2 \, dx \times$$

$$\times \int\limits_{|x^{(1)}|<a} \sum_{|\alpha^{(1)}|=s_1} \frac{s_1!}{\alpha^{(1)}!} [D^{\alpha^{(1)}}\psi_1]^2 \, dx^{(1)} \int\limits_{|x^{(2)}|<a} \sum_{|\alpha^{(2)}|=s_2} \frac{s_2!}{\alpha^{(2)}!} \times$$

$$\times [D^{\alpha^{(2)}}\psi_2]^2 \, dx^{(2)} \leqslant \| \varphi \,|\, L_2^{(s_1+s_2)} (B_a) \|^2 \| \psi_1 \,|\, L_2^{(s_1)}(a) \|^2 \| \psi_2 \,|\, L_2^{(s_2)}(a) \|^2 \tag{4.6}$$

сразу же следует, что функционал l определен и непрерывен на пространстве $K_0^{(s_1+s_2)}$.

В случае, когда l_1 и l_2 реализуются бесконечно дифференцируемыми функциями f_1 и f_2, введенный функционал реализуется функцией $f(x) = f_1(x^{(1)}) f_2(x^{(2)})$. В самом деле, интегрируя формулу (4.5) по частям и учитывая, что

$$f_i = (-1)^s \Delta^s \psi_i = (-1)^s \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} D^{2\alpha}\psi_i \quad (i = 1, 2),$$

получим для функционала l представление

$$(l, \varphi) = \int \varphi(x) f_1(x^{(1)}) f_2(x^{(2)}) \, dx.$$

Внеинтегральные члены обращаются в нуль в силу финитности φ. Поэтому и в общем случае $l(x)$ естественно называть *произведением функционалов* l_1 *и* l_2.

Докажем вторую часть теоремы V.9. Пусть последовательность $\{l_1^{(k)}(x^{(1)})\}$ функционалов из $K_0^{(s_1)\#}$ сходится в этом пространстве к $l_1^{(\infty)}(x^1)$. Пусть аналогично $\{l_2^{(k)}(x^{(2)})\}$ сходится к $l_2^{(\infty)}(x^{(2)})$. Образуем $l^{(k)}(x) = l_1^{(k)}(x^{(1)}) \, l_2^{(k)}(x^{(2)})$ и проверим, что $\{l^{(k)}(x)\}$ сходится к $l^{(\infty)}(x) = l_1^{(\infty)}(x^{(1)}) \, l_2^{(\infty)}(x^{(2)})$.

Достаточно доказать, что $\{l^{(k)}(x)\}$ сходится на всех функциях $\varphi(x)$ класса $K_0^{(s_1+s_2)}$ с носителем в произвольном замкнутом бицилиндре $\bar{B}_a = \{x\colon |x^{(1)}| \leqslant a, \; |x^{(2)}| \leqslant a\}$. Множество таких функций является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\{\varphi, \psi\}_{s_1+s_2} = \int\limits_{B_a} \sum_{|\alpha|=s_1+s_2} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha\varphi(x) \, D^\alpha\psi(x) \, dx.$$

Это пространство обозначим через $\mathring{L}_2^{(s_1+s_2)}(B_a)$.

Таким образом, нам достаточно доказать слабую сходимость последовательности $\{l^{(k)}\}$ на гильбертовом пространстве $\mathring{L}_2^{(s_1+s_2)}(B_a)$.

Воспользуемся критерием слабой сходимости функционалов на банаховом пространстве. Пусть X — банахово пространство, $\{l^{(k)}\}$ — последовательность функционалов на X, а M— множество, конечная линейная оболочка которого всюду плотна в X. Для того чтобы последовательность функционалов $\{l^{(k)}\}$ слабо сходилась на X, необходимо и достаточно, чтобы нормы $l^{(k)}$ были ограничены в совокупности, а последовательность $\{l^{(k)}\}$ сходилась всюду на M.

Достаточность этого критерия почти очевидна. Действительно, для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент y из конечной линейной оболочки M, что $\|x - y\| < \varepsilon$. Тогда $\| l^{(k)}(x) - l^{(k)}(y) \| \leqslant \| l^{(k)} \| \| x - y \| < \varepsilon \sup\limits_k \| l^{(k)} \|$ и из сходимости $\{l^{(k)}\}$ на y вытекает, в силу произвольности ε, сходимость $\{l^{(k)}\}$ на x. Необходимость опирается на известную теорему Банаха (см. § 7 гл. I).

Заметим теперь, что функция ψ_1, изображающая функционал l_1, не принадлежит, вообще говоря, гильбертову пространству $\mathring{L}_2^{(s_1)}(a)$. Однако, по основной теореме о представимости функционалов на гильбертовом пространстве, функцию $\psi_1(x^{(1)})$ можно заменить на другую функцию $\mathring{\psi}_1(x^{(1)})$, уже принадлежащую $\mathring{L}_2^{(s_1)}(a)$ и представляющую тот же функционал l_1 на функциях из $\mathring{L}_2^{(s_1)}(a)$.

Проделаем такую замену для всех функционалов $l_1^{(k)}$ и $l_2^{(k)}$. Мы получим две последовательности функций $\{\mathring{\psi}_1^{(k)}(x^{(1)})\}$ и $\{\mathring{\psi}_2^{(k)}(x^{(2)})\}$. Функции $\psi_1^{(k)}(x^{(1)})$ и $\mathring{\psi}_1^{(k)}(x^{(1)})$ отличаются внутри шара $|x^{(1)}| < a$ на полигармоническое слагаемое. Поэтому справедлива формула

$$(l^{(k)}, \varphi) = \int\limits_{|x^{(1)}| \leqslant a} \int\limits_{|x^{(2)}| \leqslant a} \sum_{|\alpha^{(1)}| = s_1} \sum_{|\alpha^{(2)}| = s_2} \frac{s_1!}{\alpha^{(1)}!} \frac{s_2!}{\alpha^{(2)}!} \times$$

$$\times D^{(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)})} \varphi D^{\alpha^{(1)}} \mathring{\psi}_1^{(k)} D^{\alpha^{(2)}} \mathring{\psi}_2^{(k)} \, dx^{(1)} \, dx^{(2)}.$$

В силу слабой сходимости $\{l_1^{(k)}\}$ и $\{l_2^{(k)}\}$ в пространствах $K_0^{(s_1)\#}$ и $K_0^{(s_2)\#}$ нормы функций $\mathring{\psi}_1^{(k)}$ и $\mathring{\psi}_2^{(k)}$ будут ограничены в совокупности в $\mathring{L}_2^{(s_1)}(a)$ и $\mathring{L}_2^{(s_2)}(a)$ соответственно. Подставляя в неравенство (4.6) вместо ψ_1, ψ_2 и l функции $\mathring{\psi}_1^{(k)}$, $\mathring{\psi}_2^{(k)}$ и $l^{(k)}$, видим, что и нормы $l^{(k)}$ в $\mathring{L}_2^{(s_1+s_2)}(B_a)$ ограничены в совокупности.

В качестве множества M, конечная линейная оболочка которого всюду плотна в гильбертовом пространстве $\mathring{L}_2^{(s_1+s_2)}(B_a)$, возьмем множество функций вида $\varphi_1(x^{(1)})\varphi_2(x^{(2)})$, где $\varphi_1(x^{(1)})$ и $\varphi_2(x^{(2)})$ — бесконечно дифференцируемые функции, финитные в шарах $\{x^{(1)} : |x^{(1)}| < a\}$ и $\{x^{(2)} : |x^{(2)}| < a\}$. Слабая сходимость $\{l^{(k)}\}$ к $l^{(\infty)}$ на M, очевидно, следует из (4.5). В силу приведенного критерия отсюда вытекает слабая сходимость функционалов $l^{(k)}$ на всем $\mathring{L}_2^{(s_1+s_2)}(B_a)$. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что произведение обобщенных функций, зависящих от отдельных групп переменных, есть функционал, значение которого на любой функции $\varphi(x^{(\rho)}, x^{(\bar{\rho})}) \in K_0^\infty(R^n)$

можно вычислить последовательным применением к ней функционалов сомножителей:

$$(l_1(x^{(\rho)})\, l_2(x^{(\bar\rho)}), \varphi(x^{(\rho)}, x^{(\bar\rho)})) = (l_1(x^{(\rho)}), (l_2(x^{(\bar\rho)}), \varphi(x^{(\rho)}, x^{(\bar\rho)}))) =$$
$$= \int\limits_{R^{(\rho)}} l_1(x^{(\rho)}) \Bigl(\int\limits_{R^{(\bar\rho)}} l_2(x^{(\bar\rho)})\, \varphi(x^{(\rho)}, x^{(\bar\rho)})\, dx^{(\bar\rho)} \Bigr) dx^{(\rho)}.$$

То же утверждение справедливо при перемножении нескольких обобщенных функций от разобщенных переменных.

Определим произведение обобщенных функций еще в одном случае. Пусть

$$\begin{gathered} l^{(1)}(x) = l_1^{(1)}(x^{(\rho_1)})\, l_2^{(1)}(x^{(\rho_2)}) \ldots l_r^{(1)}(x^{(\rho_r)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l^{(q)}(x) = l_1^{(q)}(x^{(\rho_1)})\, l_2^{(q)}(x^{(\rho_2)}) \ldots l_r^{(q)}(x^{(\rho_r)}), \end{gathered} \tag{4.7}$$

причем при каждом j от 1 до r особенности функционалов $l_j^{(1)}(x^{(\rho_j)})$, $l_j^{(2)}(x^{(\rho_j)})$, ..., $l_j^{(q)}(x^{(\rho_j)})$ разобщены. Произведение $l^{(1)}(x) l^{(2)}(x) \ldots l^{(q)}(x)$ определим формулой

$$l^{(1)}(x)\, l^{(2)}(x) \cdot \ldots \cdot l^{(q)}(x) = \prod_{j=1}^{r} \prod_{k=1}^{q} l_j^{(k)}(x^{(\rho_j)}).$$

Сочетательность и перестановочность такого умножения доказать нетрудно.

§ 5. Свертка обобщенных функций. Замена переменных

Переходим теперь к другой важной операции над обобщенными функциями, а именно к *свертке*. Для обычных функций свертка была определена выше как интеграл:

$$\omega(x) = \varphi(x) * \psi(x) = \int \varphi(y)\, \psi(x-y)\, dy.$$

Поэтому для обобщенных функций, совпадающих с обычными, свертку также можно определить интегралом

$$l_3(x) = l_1(x) * l_2(x) = \int l_1(y)\, l_2(x-y)\, dy.$$

Вычислим значение $l_3(x)$ на $\varphi(x)$ из $K_0^{(s)}$:

$$(l_3(x), \varphi(x)) = \iint l_1(y)\, l_2(x-y)\, \varphi(x)\, dx\, dy.$$

Заменяя переменные $x - y = t$, получим

$$(l_3(x), \varphi(x)) = \iint l_1(y)\, l_2(t)\, \varphi(y+t)\, dy\, dt. \tag{5.1}$$

Эту формулу мы и возьмем за определение свертки двух обобщенных функций.

Заметим, что если носитель обобщенной функции $l(x)$ не совпадает со всем пространством, то функционал $l(x)$ удается ногда естественным способом распространить на более широкое пространство, чем $K_0^{(s)}$. Пусть $K^{(s)}(a, l)$ — множество тех элементов $\varphi \in K^{(s)}$, носители которых пересекаются с supp l по ограниченному множеству, лежащему в шаре радиуса a, т. е. для $\varphi \in K^{(s)}(a, l)$

$$\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} l \subset \{x\colon |x| \leqslant a\}.$$

Распространим функционал $l(x)$ на множество $K^{(s)}(a, l)$, положив

$$(l, \varphi) = (l, \omega(x/4a)\varphi(x)),$$

где $\omega(x)$ — функция, определенная формулой (3.2). Величина (l, φ) зависит при этом только от значений $\varphi(x)$ в точках supp l. В частности, такое определение оказывается возможным для функций одного переменного, носитель которых ограничен сверху, и обобщенной функции $l(x)$, носитель которой ограничен снизу.

Определим теперь двуместную свертку $l_3(x) = l_1(x) * l_2(x)$ на $K_0^{(s)}$ как линейный функционал, заданный формулой

$$(l_3(x), \varphi(x)) = (l_1(x) l_2(y), \varphi(x+y)). \tag{5.2}$$

Здесь $\varphi(x+y)$ — функция $2n$ переменных, имеющая неограниченный носитель, лежащий в некоторой «диагональной» полосе $|x+y| < a$, а l_1 и l_2 таковы, что пересечение носителя $l_1(x)\,l_2(y)$ с полосой $|x+y| < a$ конечно.

Для того чтобы определить свертку (5.2), будем вводить, как и ранее, пары подпространств $X_1 \subset K_0^{(s_1)\#}$ и $X_2 \in K_0^{(s_2)\#}$ с более сильной сходимостью, чем сходимость в $K_0^{(s_1)\#}$ и $K_0^{(s_2)\#}$. Пространства X_1, X_2 назовем *пространствами взаимных свертывателей.*

Свертка двух обобщенных функций непрерывно зависит от совокупности компонент. Пространства X_1 и X_2, как и в случае произведения, можно выделить разными способами. Укажем некоторые из них.

1. Свертка $l_3(x) = l_1(x) * l_2(x)$ при $l_1(x) \in K_0^{(s_1)\#}$, $l_2(x) \in K^{(s_2)\#}$ будет элементом $K_0^{(s_1+s_2)\#}$, непрерывно зависящим от l_1 и l_2.

Докажем это. Действительно, в нашем случае носитель произведения $l_1(x) l_2(y)$ имеет лишь конечную общую часть с любой диагональной полосой. Это вытекает из того, что по теореме V.3 множитель $l_2(y)$ имеет компактный носитель. Поэтому можно «срезать» ту часть носителя $\varphi(x+y)$, которая не имеет общих точек с носителем $l_2(y)$. Следовательно, свертка таких l_1 и l_2 всегда имеет смысл.

Непрерывная зависимость l_3 от первого сомножителя очевидна. Принимая во внимание, что у любой сходящейся последовательности $\{l_2^{(k)}(y)\}$ носитель должен быть общим, легко проверим непрерывность свертки и по совокупности обеих компонент.

2. Рассмотрим множество $\overleftarrow{K}_0^{(s)\#}$ тех обобщенных функций $l \in K_0^{(s)\#}$, у каждой из которых носитель лежит в некоторой «угловой» области $x_j < a_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Для каждого $l \in \overleftarrow{K}_0^{(s)\#}$ вектор a, вообще говоря, свой.

Сходимость $\{l_k\}$ к l_∞ в $\overleftarrow{K}_0^{(s)\#}$ означает, по определению, что $\{l_k\}$ сходится к l_∞ в $K_0^{(s)\#}$ и при этом носители всех l_k ограничены одним и тем же вектором a. Пространство $\overleftarrow{K}_0^{(s)\#}$ урысоновское. Свертка $l_3(x) = l_1(x) * l_2(x)$, где $l_1(x) \in \overleftarrow{K}_0^{(s_1)\#}$, $l_2(x) \in K_0^{(s_2)\#}$, принадлежит $\overleftarrow{K}_0^{(s_1+s_2)\#}$ и непрерывно зависит от l_1 и l_2.

Действительно, произведение $l_1(x) l_2(y)$ в этом случае имеет носитель, в котором ни x_j, ни y_j не могут принимать слишком больших положительных значений. Поскольку в носителе $\varphi(x+y)$ аргументы $x_j + y_j$ не могут принимать ни слишком больших положительных, ни слишком больших отрицательных значений, значит, пересечение $\operatorname{supp} l_1(x) l_2(y)$ с $\operatorname{supp} \varphi(x+y)$ ограничено. Непрерывность свертки в этом случае доказывается так же, как в предыдущем примере.

Под r-местной сверткой $l_0(x) = l_1(x) * l_2(x) * \ldots * l_r(x)$ будем понимать обобщенную функцию вида

$$(l_0(x), \varphi(x)) = (l_1(x^{(1)})\, l_2(x^{(2)}) \ldots l_r(x^{(r)}),$$
$$\varphi(x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(r)})),$$

где каждое $x^{(j)}$ есть n-мерный вектор. Применяя предыдущие результаты, получим для r-местной свертки два класса взаимных свертывателей:

I. $K_0^{(s_1)\#}, K^{(s_2)\#}, \ldots, K^{(s_r)\#}$;

II. $\overleftarrow{K}_0^{(s_1)\#}, \overleftarrow{K}_0^{(s_2)\#}, \ldots, \overleftarrow{K}_0^{(s_r)\#}$.

В первом случае свертка существует как элемент $K_0^{(s_1+s_2+\ldots+s_r)\#}$, во втором — как элемент $\overleftarrow{K}_0^{(s_1+s_2+\ldots+s_r)\#}$, и в обоих случаях свертка непрерывна.

З а м е ч а н и е. В случае II нет надобности, чтобы все множители принадлежали $\overleftarrow{K}_0^{(s_j)\#}$. Один из них может принадлежать пространству с несколько более слабой сходимостью. Например, вместо $\overleftarrow{K}^{(s_j)\#}$ можно взять $K_c^{\diagdown(s_j)\#}$ — пространство, состоящее из функционалов $l(x)$, у каждого из которых носитель лежит в множестве $cx < b$, где c — фиксированный вектор с положительными компонентами, а b — число, свое для каждого $l(x)$. Сходимость $\{l_k\}$ в $K_c^{\diagdown(s)\#}$ есть сходимость этой последовательности в $K_0^{(s)\#}$ с дополнительным условием, что существует число b, общее для носителей всех l_k. Этот и подобные классы сверток рассмотрены в [34—37]. При решении задачи Коши для волнового уравнения приходится производить свертку фундаментального решения с правой частью уравнения. Носителем фундаментального решения служит конус, раскрывающийся книзу (по отношению к t). Правая часть уравнения выбирается так, что ее носитель в пересечении с носителем фундаментального решения дает компакт.

Отметим еще один случай пространств взаимных свертывателей.

III. Пусть обобщенные функции $l^{(1)}(x)$, $l^{(2)}(x)$, $\ldots$, $l^{(q)}(x)$ представимы каждая в виде:

$$l^{(1)}(x) = l_1^{(1)}(x^{(\rho_1)})\, l_2^{(1)}(x^{(\rho_2)}) \ldots l_r^{(1)}(x^{(\rho_r)}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l^{(q)}(x) = l_1^{(q)}(x^{(\rho_1)})\, l_2^{(q)}(x^{(\rho_2)}) \ldots l_r^{(q)}(x^{(\rho_r)}),$$

подобно тому, как это мы рассматривали в формуле (4.7). Пусть $l_j^{(1)}$, $l_j^{(2)}$, $\ldots$, $l_j^{(q)}$ принадлежат пространствам взаимных свертывателей. Тогда

$$l^{(1)}(x) * \ldots * l^{(q)}(x) = \prod_{j=1}^{r} l_j^{(1)}(x^{(\rho_j)}) * l_j^{(2)}(x^{(\rho_j)}) * \ldots * l_j^{(q)}(x^{(\rho_j)}).$$

Такое произведение будет непрерывно зависеть от своих сомножителей в соответствующих пространствах.

В случае, когда одна из двух свертываемых обобщенных функций, например l_2, является обычной достаточно гладкой финитной функцией, операцию свертки обобщенных функций можно записать через символический интеграл

$$l_1(x) * l_2(x) = \int l_1(y)\, l_2(x-y)\, dy.$$

В частности, операция усреднения, рассмотренная нами в § 4, является сверткой.

Определим обобщенную функцию $\delta(x)$ формулой $\varphi(0) = \int \delta(x)\varphi(x)\, dx$. Носителем этой функции служит точка $x = 0$. Свертка любой обобщенной функции $l(x)$ с $\delta(x)$ всегда возможна и не меняет этой функции $l(x) * \delta(x) = l(x)$.

Свертка нескольких функционалов перестановочна и распределительна по сложению:

$$(a_1 l_1(x) + a_2 l_2(x)) * l_3(x) = a_1(l_1 * l_3) + a_2(l_2 * l_3).$$

Важно отметить, что свойство перестановочности верно для нескольких обобщенных функций только в том случае, когда все они принадлежат системе взаимных свертывателей, т. е. когда определена соответствующая r-местная свертка. Поэтому существование, например, последовательной свертки $l_1(x) * (l_2(x) * l_2(x))$ вовсе не гарантирует существования тройной свертки, и поэтому сочетательный закон для последовательной свертки, вообще говоря, не имеет места.

Пример. Пусть x — вещественное переменное, $D = D(x)$ определяется (2.4) и $l_1(x) = x$, $l_2(x) = D * D$, $l_3(x) = |x|$. Обозначим $D^{[2]} = D^{[2]}(x) = D(x) * D(x)$. Свертка $D^{[2]}(x) * \varphi(x)$ представляет собой вычисление второй производной от $\varphi(x)$. Читателю предоставляется проверить, что

$$l_1(x) * l_2(x) = 0, \quad l_2(x) * l_3(x) = 2\delta(x).$$

Поэтому

$$[l_1(x) * l_2(x)] * l_3(x) = 0, \quad l_1(x) * [l_2(x) * l_3(x)] = 2x,$$

откуда видна несочетательность повторной свертки.

Важным свойством обычных функций является возможность их суперпозиции, т. е. подстановки функции в функцию. Такой суперпозицией является, в частности, замена независимых переменных. Уже при замене переменных в s раз непрерывно дифференцируемых функциях требуются некоторые условия гладкости для сохранения класса. Подобные требования возникают также и для обобщенных функций.

Приведем сначала некоторые наводящие соображения. Пусть $f(y)$ — достаточно гладкая функция, а $y = y(x)$ и $x = x(y)$ — взаимно обратные гладкие отображения областей Ω_x и Ω_y друг на друга. Пусть, наконец, функция $\varphi(x)$ финитна в Ω_x. Имеет место интегральное тождество

$$\int_{\Omega_x} f(y(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_{\Omega_y} f(y)\,\varphi(x(y)) \left| \frac{D(x)}{D(y)} \right| dy. \tag{5.3}$$

Обозначим

$$\psi(y) = \varphi(x(y))\,|D(x)/D(y)|, \quad |D(x)/D(y)| \neq 0.$$

При достаточно гладкой замене $x = x(y)$ функции $\varphi(x)$ из $K_0^{(s)}(\Omega_x)$ переходят в функции $\psi(y)$ из $K_0^{(s)}(\Omega_y)$. Сходимость при этом также сохраняется. Равенство двух билинейных форм

$$\int_{\Omega_x} f(y(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_{\Omega_y} f(y)\,\psi(y)\,dy$$

позволяет распространить замену переменных и на обобщенные функции. Действительно, пусть на пространстве $K_0^{(s)}(\Omega_y)$ задана обобщенная функция $l(y)$. Определим обобщенную функцию $l(y(x))$ равенством

$$\begin{aligned}(l(y(x)), \varphi(x)) &= \int l(y(x))\,\varphi(x)\,dx = \int l(y)\,\psi(y)\,dy = \\ &= (l(y), \psi(y)) = \left(l, (y), \varphi(x(y)) \left| \frac{D(x)}{D(y)} \right| \right).\end{aligned} \tag{5.4}$$

Мы уже не раз встречались с использованием сопряженных операторов для расширения заданных операторов на пространство обобщенных функций. Само пространство обобщенных функций было нами построено таким же образом, через сопряженное функциональное пространство. Сформулируем теперь этот прием в общем виде. Пусть A — тот или иной оператор на этом функциональном пространстве. Для определения оператора A^* на обобщенной функции $l(x)$ мы систематически будем использовать равенство $(A^*l, \varphi) = (l, A\varphi)$.

Замена переменных $x = x(y)$ (достаточно гладкая) определяет следующий линейный оператор, переводящий $K_0^{(s)}(\Omega_x)$ в $K_0^{(s)}(\Omega_y)$:

$$\varphi(x) \to \psi(y) = \varphi(x(y)) \mid D(x)/D(y) \mid.$$

Этот оператор, как отмечалось, сохраняет сходимость, т. е. непрерывен.

Формулы (5.3) и (5.4) представляют собой определение сопряженного оператора — замены переменных в обобщенной функции. Сначала в (5.3) такое определение дается на всюду плотном множестве обычных функций f, затем в (5.4) оно переносится на все пространство обобщенных функций.

Частным случаем является линейная замена $y = Hx$ с матрицей H такой, что $\det H = 1$. При этом из (5.4) получим

$$\int l(Hx)\varphi(x)\,dx = \int l(y)\varphi(H^{-1}y)\,dy.$$

Другой частный случай — это замена $y = hx$, где h — положительное число. При этом

$$\int l(hx)\varphi(x)\,dx = h^{-n}\int l(y)\varphi(h^{-1}y)\,dy. \tag{5.5}$$

Функция $f(x)$ называется однородной функцией степени k, если $f(hx) = h^k f(x)$ при $h > 0$. При соблюдении этого же равенства $l(hx) = h^k l(x)$, $h > 0$, мы и обобщенную функцию $l(x)$ будем называть *однородной* функцией степени k. В силу (5.5) условие однородности можно записать в виде

$$\int l(x)\varphi(h^{-1}x)\,dx = h^{k+n}\int l(x)\varphi(x)\,dx.$$

Функция $f(x)$ будет четной относительно x_j, если $f(\hat{x}_j, x_j) = f(\hat{x}_j, -x_j)$, и нечетной, если $f(\hat{x}_j, x_j) = -f(\hat{x}_j, -x_j)$. Простое вычисление дает при этом в силу (5.5) условие четности обобщенной функции в виде

$$\int l(x)\varphi(\hat{x}_j, -x_j)\,dx = \int l(x)\varphi(\hat{x}_j, x_j)\,dx,$$

а условие нечетности — в виде

$$\int l(x)\varphi(\hat{x}_j, -x_j)\,dx = -\int l(x)\varphi(\hat{x}_j, x_j)\,dx.$$

§ 6. Обобщенные функции специальных видов

Рассмотрим несколько специальных особо важных функций. Пусть Ω — ограниченная область, содержащая начало координат. Для $\varphi(x)$ из $K_0^{(s)}(\Omega)$, $s > n/2$, на основании теоремы IV.5

имеем

$$| \varphi (0) | \leqslant K \| \varphi \mid L_2^{(s)} (\Omega) \|.$$

Следовательно, $\varphi (0)$ является непрерывным функционалом на $\overset{(s)}{K}_0$, и, значит, найдется обобщенная функция $\delta (x)$ такая, что

$$\varphi (0) = \int \delta (x) \varphi (x) \, dx. \tag{6.1}$$

Эта обобщенная функция $\delta (x)$ называется δ-функцией, или функцией Дирака, по имени английского физика-теоретика, который ввел ее в систематическое употребление.

Делая линейную замену независимых переменных $y = Hx$, где H — матрица с определителем, равным единице, получим

$$\int \delta (Hx) \varphi (x) \, dx = \int \delta (x) \varphi (H^{-1}x) \, dx = \varphi (H^{-1}0) = \\ = \varphi (0) = \int \delta (x) \varphi (x) \, dx.$$

Отсюда заключаем, что

$$\delta (Hx) = \delta (x). \tag{6.2}$$

Далее, полагая $y = hx$, $h > 0$, получим

$$\int \delta (hx) \varphi (x) \, dx = h^{-n} \int \delta (x) \varphi (h^{-1}x) \, dx = \\ = h^{-n} \varphi (0) = h^{-n} \int \delta (x) \varphi (x) \, dx,$$

откуда $\delta (hx) = h^{-n} \delta (x)$. Таким образом, $\delta (x)$ представляет собой однородную функцию степени $-n$.

Наконец, заменяя $\varphi (\hat{x}_j, x_j)$ на $\varphi (\hat{x}_j, -x_j)$, убеждаемся, что $\delta (x)$ есть четная функция от каждого из своих переменных.

Кроме функции $\delta (x)$ от всех переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, используются функции $\delta (x^{(\rho)})$ от меньшего числа переменных. Функция $\delta (x^{(\rho)})$ определяется равенством

$$\int \delta (x^{(\rho)}) \varphi (x) \, dx = \int \varphi (0^{(\rho)}, x^{(\bar{\rho})}) \, dx^{(\bar{\rho})},$$

где $(0^{(\rho)}, x^{(\bar{\rho})})$ — вектор x с нулевыми координатами из группы координат $x^{(\rho)}$.

Пусть размерность $x^{(\rho)}$ равна p. Обобщенную функцию $\delta (x^{(\rho)})$ можно рассматривать как произведение δ-функции в p-мерном пространстве $R^{(\rho)}$ на 1 в дополнительном пространстве $R^{(\bar{\rho})} = \{x^{(\bar{\rho})}\}$.

Разобьем переменное x на r групп $x^{(\rho_1)}, \ldots, x^{(\rho_r)}$ и рассмотрим произведение $\delta (x^{(\rho_1)}) \ldots \delta (x^{(\rho_r)})$. Элементарная выкладка показывает, что

$$\int \delta (x^{(\rho_1)}) \delta (x^{(\rho_2)}) \ldots \delta (x^{(\rho_r)}) \varphi (x) \, dx = \int \delta (x^{(\rho_1)}) \ldots \\ \ldots \delta (x^{(\rho_{r-1})}) \varphi (x^{(\bar{\rho}_r)}, 0^{(\rho_r)}) \, dx^{(\rho_1)} \ldots dx^{(\rho_{r-1})} = \ldots = \varphi (0).$$

Следовательно, $\delta (x^{(\rho_1)}) \ldots \delta (x^{(\rho_r)}) = \delta (x)$.

В случае, если каждая группа переменных $x^{(\rho_1)}, \ldots, x^{(\rho_r)}$ состоит из одной координаты, получаем

$$\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_n), \tag{6.3}$$

и аналогично

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\ldots\delta(x_s).$$

Разложение (6.3) $\delta(x)$ в произведение функций от одного переменного не является, конечно, единственным. Таких разложений можно написать бесконечно много. Мы остановимся еще только на одном таком представлении, причем для простоты рассмотрим функцию $\delta(x)$ от всех n независимых переменных.

Пусть $y = Hx$ или $x = H^{-1}y$, где определитель матрицы H равен 1. Компоненты вектора $y = Hx$ суть линейные формы от x. Тогда из (6.2) следует, что $\delta(y_1, \ldots, y_n) = \delta(x_1, \ldots, x_n)$, и, значит, $\delta(y_1)\delta(y_2)\ldots\delta(y_n) = \delta(x)$.

Функция $\delta(x)$ принадлежит к $K^{(s)\#}$ при $s > n/2$ и поэтому может быть умножена на любую функцию $\psi(x)$ из $C^{(s)}$, причем, как легко проверить,

$$\psi(x)\delta(x) = \psi(0)\delta(x). \tag{6.4}$$

Правая часть этой формулы имеет смысл для любой непрерывной функции $\psi(x)$.

Так же как и для случая одной независимой переменной свертка с $\delta(x)$ любой обобщенной функции $l(x)$ из $K^{(s)\#}$ всегда возможна и дает снова $l(x)$, т. е. $\delta(x) * l(x) = l(x)$.

Кроме самой δ-функции, нам будут нужны еще некоторые специальные связанные с ней обобщенные функции. Пусть x — одномерное переменное, и пусть

$$\Phi_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k),$$

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x-k),$$

$$\Phi_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta\left(x - k + \frac{1}{2}\right).$$

Функцию $\Phi_0(x)$ будем иногда называть *периодической δ-функцией*. Эта функция определена и непрерывна на $K_0^{(s)}$. Она может быть умножена на любую непрерывную функцию $\psi(x)$. С помощью формулы (6.4) получим

$$\Phi_0(x)\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(k)\,\delta(x-k). \tag{6.5}$$

То же самое относится и к функциям $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$.

Функции одного переменного вида

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c[k]\,\delta(x-k),$$

будем называть боронообразными. Таковыми являются Φ_0 и Φ_1.

Выделим среди боронообразных функций те, у которых коэффициенты $c[k]$ ограничены. Такое множество $P^{(0)}$ можно метризовать, например, с помощью нормы $\|\psi\| = \sup\limits_k |c[k]|$. При этом сходимость в $P^{(0)}$ оказывается сильнее, чем сходимость в $K_0^{(s)\#}$. Множество непрерывных функций, убывающих на бесконечности как $|x|^{-q}$, где $q > q_0$, с нормировкой

$$\|\varphi(x)\,|\,O^{(q)}\| = \sup_{x\in R}\{|(1+|x|^2)^{q/2}\varphi(x)|\},$$

обозначим $O^{(q)}$. Пространства $P^{(0)}$ и $O^{(q)}$ являются пространствами взаимных свертывателей, что можно легко проверить.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — многомерный вектор. Произведение

$$\Phi_0(x) = \Phi_0(x_1)\Phi_0(x_2)\ldots\Phi_0(x_n) \tag{6.6}$$

будем называть *кубической периодической δ-функцией.* Раскрывая его и пользуясь формулой для произведения δ-функций от отдельных переменных, легко получим для $\Phi_0(x)$ формулу

$$\Phi_0(x) = \sum_\beta \delta(x-\beta), \tag{6.7}$$

где β пробегает всевозможные целочисленные векторы. Этот ряд из обобщенных функций, как легко видеть, суммируем в смысле определения § 4 в $K_0^{(s)\#}$ при $s > n/2$.

Функции вида $\psi(x) = \sum\limits_\beta c[\beta]\delta(x-\beta)$ также будем называть боронообразными.

Заметим, что разложение $\Phi_0(x)$ на множители (6.6) является неоднозначным, так же как и разложение (6.3) функции $\delta(x)$. Рассмотрим преобразование $y = Hx$ с целочисленной ортогональной матрицей H. Такое преобразование имеет обратное $x = H^{-1}y$, где H^{-1} — также целочисленная матрица с определителем, равным единице. Легко убедиться, что при этих подстановках любая точка x с целочисленными координатами превращается в точку y тоже с целочисленными координатами, и наоборот. В силу того что определитель преобразования H равен единице, имеем из (6.7) и (6.2)

$$\begin{aligned}\Phi_0(x) &= \sum_\beta \delta(x-\beta) = \sum_\beta \delta(H^{-1}y-\beta) = \sum_\beta \delta(y-H\beta) = \\ &= \sum_\beta \delta(y-\beta) = \Phi_0(y)\end{aligned} \tag{6.8}$$

и, значит, $\Phi_0(x) = \Phi_0(y) = \Phi_0(y_1)\ldots\Phi_0(y_n)$.

Отметим свойства $\Phi_0(x)$ относительно умножения и свертки. Так же как и для одной переменной, функция $\Phi_0(x)$ может быть умножена на любую непрерывную функцию $\psi(x)$ и при этом

$$\Phi_0(x)\psi(x)=\sum_\beta \psi(\beta)\,\delta(x-\beta). \tag{6.9}$$

Будем рассматривать $\Phi_0(x)$ как элемент пространства $P^{(0)}$ боронообразных функций вида $\psi(x)=\sum\limits_\beta c[\beta]\delta(x-\beta)$ с конечной нормой $\|\psi(x)\mid P^{(0)}\|=\sup|c[\beta]|$. Введем также банахово пространство $O^{(q)}$ непрерывных функций в R^n, убывающих на бесконечности как $|x|^{-q}$, $q>q_0$, с нормой

$$\|\varphi(x)\mid O^{(q)}\|=\sup_{x\in R^n}\{|(1+|x|^2)^{q/2}\varphi(x)|\}.$$

При подходящем выборе q_0 пространства $O^{(q)}$ и $P^{(0)}$ будут взаимными свертывателями.

Мы уже имели дело с обобщенной функцией одного переменного $D(x)$, которая определялась равенством (2.4). Изучим эту функцию более подробно.

Пусть X — регулярное линейное пространство сходимости, состоящее из функций $\varphi(x)$, определенных в области Ω из R. Пусть, кроме того, для любого $f(x)$ из $\mathring{C}(\Omega)$ функционал

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx$$

непрерывен на X. Тогда определено пространство X' обобщенных функций (см. § 2).

Будем считать, что $X'=X^{\#}$ и что для любой $\varphi(x)$ из X определено значение $\varphi'(0)$, причем этот функционал непрерывен на X. Тогда существует обобщенная функция $D(x)$ из X', такая, что

$$\int D(x)\varphi(x)\,dx=-\varphi'(0) \tag{6.10}$$

для любой $\varphi(x)$ из X. Из (6.10) и определения линейной замены легко следует, что $D(-x)=-D(x)$, т. е. $D(x)$ нечетна.

Если пространство X вместе с функцией $\varphi(x)$ содержит все сдвиги $\varphi(x+y)$, $y\in R$, то для любой $\varphi(x)$ их X определена свертка с $D(x)$:

$$D(x)*\varphi(x)=\int D(x-y)\varphi(y)\,dy=\int D(-y+x)\varphi(y)\,dy=$$
$$=\int D(-y)\varphi(y+x)\,dy=-\int D(y)\varphi(y+x)\,dy=\varphi'(x). \tag{6.11}$$

Разумеется, свертка $D(x)*\varphi(x)$, вообще говоря, не будет элементом пространства X.

Пусть теперь $\Omega=R^n$, а пространство X удовлетворяет условиям, аналогичным уже описанному одномерному случаю. В частности, предположим, что для любой $\varphi(x)$ из X определены значения $d\varphi/dx_j(0)$, $j=1,2,\ldots,n$, причем соответствующие функционалы непрерывны на X. Тогда для любого j от 1 до n найдется обобщенная функция $D_j(x)$ из X' такая, что

$$\int D_j(x)\,\varphi(x)\,dx = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(0), \quad j=1, 2, \ldots, n, \tag{6.12}$$

для любой $\varphi(x)$ из X.

Обобщенная вектор-функция $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ называется *градиентной обобщенной функцией*. Носитель ее — начало координат. Легко видеть, что, как и в одномерном случае, свертка с D_j дает соответствующую производную:

$$D_j(x) * \varphi(x) = d\varphi/dx_j. \tag{6.13}$$

Каждую компоненту $D_j(x)$ градиентной функции можно выразить через функции меньшего числа переменных:

$$D_j(x) = \delta(x_1)\ldots\delta(x_{j-1})\,D(x_j)\,\delta(x_{j+1})\ldots\delta(x_n) = \delta(\hat{x}_j)\,D(x_j).$$

Рассмотрим теперь поведение градиентной обобщенной функции D на цепочках пространств $K^{(s)}$ и $C^{(s)}$. Функция D определена на $C^{(s)}$ при $s \geqslant 1$ и на $K^{(s)}$ при $s \geqslant [n/2]+2$. Свертка с D также определена на всех этих пространствах. Доопределим эту свертку на $K^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, [n/2]+1$. Напомним, что $K^{(s)}$ вложено в $K_0^{(s)\#}$ при любом $s = 1, 2, \ldots$ Поскольку для любого элемента $l(x)$ из $K_0^{(s)\#}$ свертка с обобщенной функцией $D(x)$ определена (ибо носитель D компактен), то свертка любого элемента $\varphi(x)$ из $K^{(s)}$ с $D(x)$ определена, если рассматривать $\varphi(x)$ как обобщенную функцию.

Эта операция, выполненная над произвольным элементом из $K^{(s+1)}$, приводит к элементу из $K^{(s)}$. Именно, свертка с D_j дает обобщенную производную $d\varphi/dx_j$ от функции $\varphi \in K^{(s+1)}$. Чтобы это показать, достаточно усреднить элемент $\varphi \in K^{(s+1)}$ и вспомнить, что при $h \to 0$ производная от средней функции $d\varphi_h/dx_j$ стремится к обобщенной производной $\partial\varphi/\partial x_j$ в смысле $L_2^{(s)}$ в любой конечной области.

Таким образом, на всех $K^{(s)}$ и $C^{(s)}$ определены операторы частного дифференцирования. При этом

$$D_j : K^{(s+1)} \to K^{(s)}, \qquad D_j : C^{(s+1)} \to C^{(s)}.$$

В силу того что D_j сохраняет финитность,

$$D_j : K_0^{(s+1)} \to K_0^{(s)}, \qquad D_j : \mathring{C}^{(s+1)} \to \mathring{C}^{(s)}.$$

Заметим теперь, что для произвольной обобщенной функции $l(x) \in K_0^{(s)\#}$ и для $\varphi(x) \in K_0^{(s+1)}$ справедливо

$$(l(x), D_j * \varphi) = -(l(x) * D_j, \varphi). \tag{6.14}$$

Формула (6.14) показывает, что обобщенная функция $l(x) * D_j$ является элементом $K_0^{(s+1)\#}$, т. е. D_j: $K_0^{(s)\#} \to K_0^{(s+1)\#}$. То же самое относится к действию D_j на пространствах $K^{(s)\#}$, $\mathring{C}^{(s)\#}$ и $C^{(s)\#}$.

Пусть α, как обычно,— целочисленный вектор с неотрицательными компонентами, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Положим по определению

$$D_j^{[\alpha_j]} = \overbrace{D_j * \ldots * D_j}^{\alpha_j}, \qquad D^{[\alpha]} = D_1^{[\alpha_1]} * D_2^{[\alpha_2]} * \ldots * D_n^{[\alpha_n]}.$$

Очевидно, все эти свертки возможны, так как носитель D_j совпадает с началом координат. Нетрудно проверить, что для $\varphi \in C^{(|\alpha|)}$

$$\int D^{[\alpha]}(x)\, \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\varphi(0).$$

Любой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами может быть представлен теперь как свертка с соответствующей обобщенной функцией. Пусть

$$L = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^\alpha, \qquad L(x) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha D^{[\alpha]}(x).$$

Тогда $L\varphi$ представимо в виде $L\varphi = L(x) * \varphi(x)$.

Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами принадлежат к общему классу операторов, которые мы будем называть *сверточными интегродифференциальными операторами*. Под сверточным интегродифференциальным оператором порядка l будем понимать оператор свертки с обобщенной функцией вида

$$L(x) = \sum_{|\alpha|=l} \chi_\alpha(x) * D^{[\alpha]}(x), \tag{6.15}$$

где $\chi_\alpha(x)$ суть финитные обобщенные функции, которые мы будем называть *коэффициентами*. Интегродифференциальный оператор свертки порядка p будет также оператором любого порядка, меньшего p.

Пример 1. Оператор $D^{[\alpha]} * \varphi$, т. е. оператор дифференцирования порядка $|\alpha|$, будет интегродифференциальным оператором свертки любого из порядков $0, 1, \ldots, |\alpha|$, так как

$$D^{[\alpha]} * \varphi = D^{[\alpha-\beta]} * D^{[\beta]} * \varphi,$$

где β — любой вектор, меньший α, а $D^{[\alpha-\beta]}$ рассматривается как коэффициент.

Пример 2. Разностный оператор $\Delta^{[1]}\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$ есть сверточный интегродифференциальный оператор первого порядка. В самом деле, имеем

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \int_x^{x+1} \varphi'(t)\, dt = D(x) * \varphi(x) * \psi_1(x),$$

где $\psi_1(x) = 1$ при $x \in [-1, 0]$, и $\psi_1(x) = 0$ при $x \notin [-1, 0]$.

Установим теперь общую теорему об интегродифференциальных операторах.

Т е о р е м а V.10. *Для того чтобы данный оператор свертки с финитной функцией $L(x)$ был сверточным интегродифференциальным оператором порядка m, необходимо и достаточно, чтобы*

$$L(x) * x^{\alpha} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m - 1. \tag{6.16}$$

Необходимость условия (6.16) очевидна. Докажем его достаточность. Рассмотрим вначале случай, когда $L(x)$ совпадает с обычной s раз дифференцируемой и финитной функцией, $s \geqslant m$. Условие (6.16), как легко проверить, влечет за собой ортогональность функции $L(x)$ ко всем многочленам степени $m - 1$:

$$\int L(x) x^{\alpha} dx = 0, \qquad |\alpha| \leqslant m - 1. \tag{6.17}$$

Покажем, что функция $L(x)$ представима в виде

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} L_j(x) = \sum_{j=1}^{n} D_j * L_j, \tag{6.18}$$

где $L_j(x)$ — $(s+1)$ —раз непрерывно дифференцируемые финитные функции и такие, что

$$\int L_j(x) x^{\alpha} dx = 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant m - 2, \quad m \geqslant 2. \tag{6.19}$$

Операторы вида (6.18) называют иногда *дивергентными.*

Формулу (6.18) установим индукцией по числу независимых переменных. Пусть $l(x)$ — финитная функция одного переменного, ортогональная ко всем многочленам степени не выше k. Тогда ее первообразная $L(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} l(t)\, dt$ будет финитной функцией, ортогональной ко всем многочленам степени не выше $(k - 1)$. Финитность $L(x)$ следует из того, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} l(x)\, dx = 0$. Пользуясь этим и интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^s L(x)\, dx = \frac{1}{s+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{s+1} l(x)\, dx = 0$$

при $0 \leqslant s \leqslant k - 1$.

Так как $l(x) = D(x) * L(x)$, то формула (6.18) для функций одного переменного установлена. Пусть теперь она установлена для функций $(n - 1)$-го переменного. Покажем ее справедливость и для функций n переменных. Положим, как и ранее, $x = (\hat{x}_n, x_n)$, где $\hat{x}_n = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Пусть

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{(x+1)(1-x)}, & -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Функция $\psi(x)$ бесконечно дифференцируема. Положим

$$L_n(x) = \int_{-\infty}^{x_n} l(\hat{x}_n, x_n')\, dx_n' - \psi(x_n) \int_{-\infty}^{\infty} l(\hat{x}_n, x_n')\, dx_n'. \tag{6.20}$$

Тогда $L_n(x)$ — функция финитная, ибо $l(x)$ — финитна. Очевидно, что функция $(n-1)$-го переменного $\int_{-\infty}^{\infty} l(\hat{x}_n, x_n')\, dx_n'$ также финитна и ортогональна к любому одночлену $\hat{x}_n^{\hat{\alpha}_n}$, где $|\hat{\alpha}_n| \leqslant m-1$. По предположению индукции, найдутся G_j из $\overset{\circ}{C}{}^{(s)}$, $j = 1, \ldots, n-1$, такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(\hat{x}_n, x_n')\, dx_n' = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial G_j}{\partial x_j},$$

причем для всех них будут выполнены условия (6.19). Мы имеем далее из (6.20):

$$l(\hat{x}_n, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_n} L_n + \psi'(x_n) \int_{-\infty}^{\infty} l(\hat{x}_n, x_n')\, dx_n' =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_n} L_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_j} [\psi_n'(x_n) G_j(\hat{x}_n)] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L_j}{\partial x_j}.$$

Покажем, что $L_n(x)$ ортогональна к многочленам степени не выше $m-2$. Имеем

$$\int L_n(x)\, x^\alpha\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x_n^{\alpha_n} \left\{ \int_{-\infty}^{x_n} \left[\int_{\hat{x}_n} l(\hat{x}_n, x_n')\, \hat{x}_n^{\hat{\alpha}_n}\, d\hat{x}_n \right] dx_n' \right\} dx_n -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} x_n^{\alpha_n} \psi(x_n)\, dx_n \left[\int_{\hat{x}_n} \int_{-\infty}^{\infty} l(\hat{x}_n, x_n')\, \hat{x}_n^{\hat{\alpha}_n}\, dx_n'\, d\hat{x}_n \right]. \tag{6.21}$$

Второе слагаемое по условию (6.17) равно нулю. Обозначим $g^{(\hat{\alpha}_n)}(x_n) = \int l(\hat{x}_n, x_n)\, \hat{x}_n^{\hat{\alpha}_n} d\hat{x}_n$. Функция $g^{(\hat{\alpha}_n)}(x_n)$ — финитная функция переменного x_n, ортогональная в силу (6.17) ко всем x_n^s при $|\hat{\alpha}_n| + s \leqslant m-1$. Следовательно, ее первообразная, как мы отмечали выше, ортогональна к x_n^s, где $s \leqslant m - 2 - |\hat{\alpha}_n|$. Отсюда и из условия $|\alpha_n| + |\hat{\alpha}_n| \leqslant m-2$ видим, что первое слагаемое в (6.21) тоже зануляется.

Таким образом, формула (6.18) доказана. Теперь докажем нужное нам утверждение индукцией по m. Если $m = 1$, то представление $L(x)$ в виде (6.18) искомое. Пусть теорема доказана для $m-1$. Докажем ее для m. Функции $L_j(x)$ из (6.18) разложим в сумму вида (6.15), пользуясь предположением индукции. Подставив эти разложения в (6.18), получим сумму вида (6.15).

Таким образом, для s раз дифференцируемых $L(x)$ теорема доказана. Для произвольной обобщенной функции $L(x)$ следует воспользоваться предельным переходом.

Частным случаем сверточных интегродифференциальных операторов является дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Существует простой признак принадлежности сверточного оператора к этому классу.

Теорема V.11. *Для того чтобы некоторый функционал с носителем в точке* $x = 0$ *допускал представление вида*

$$l(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha D^{[\alpha]}(x),$$

где $D^{[0]}(x) = \delta(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы он обращался в нуль на всех функциях, имеющих в начале координат корень кратности* $k+1$, *т. е. обращающихся в нуль вместе с производными до порядка* k *включительно при* $x = 0$.

Необходимость условия теоремы очевидна. Докажем его достаточность. Рассмотрим систему функций, «степенных» вблизи начала координат, например срезанных одночленов $x^\alpha \omega(x)/\alpha!$, где $\omega(x)$ — ядро усреднения (3.2). Построим функционал $l_1(x)$ по формуле

$$l_1(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha D^{[\alpha]},$$

где $a_\alpha = (l(x),\ \omega(x)\, x^\alpha/\alpha!)$. Рассматривая разность $l(x) - l_1(x)$, имеем

$$(l(x) - l_1(x), \varphi(x)) = (l(x), \varphi(x)) - \sum_{|\alpha| \leqslant k} (l(x), \omega(x)\, x^\alpha/\alpha!)\, D^\alpha \varphi(0) =$$

$$= \left(l(x), \varphi(x) - \omega(x) \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{x^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \varphi(0) \right).$$

Но функция

$$\psi(x) = \varphi(x) - \omega(x) \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{x^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \varphi(0)$$

обращается в нуль с производными до порядка k в начале координат и, следовательно, $(l(x),\ \psi(x)) = 0$. Теорема доказана.

ГЛАВА VI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Преобразование Фурье пространства L_2

Обобщенные функции, так же как и обычные функции, могут быть подвергнуты преобразованию Фурье. Можно сказать больше. Преобразование Фурье сталкивалось в классическом анализе с рядом существенных трудностей, таких, как расходимость интегралов, невозможность истолковать в определенном смысле получаемые бесконечные выражения и т. п. Теория обобщенных функций сняла многие из этих трудностей и превратила преобразование Фурье в мощное средство анализа.

Преобразование Фурье в классическом смысле заключается в том, что некоторой функции $\varphi(x)$, заданной на всей вещественной оси, приводится в соответствие другая — $\tilde{\varphi}(p)$, также заданная на всей вещественной оси, по формуле

$$\tilde{\varphi}(p) = \tilde{\varphi}(x) = F(\varphi) = \int e^{2\pi i p x} \varphi(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Интеграл в правой части имеет смысл, например, если $\varphi(x)$ суммируема на вещественной оси [1].

Доказывается, что в некоторых довольно широких предположениях относительно функции $\varphi(x)$ ее можно выразить через $\tilde{\varphi}(p)$ формулой обращения:

$$\varphi(x) = \bar{F}\tilde{\varphi}(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i p x} \tilde{\varphi}(p)\, dp.$$

Займемся распространением операторов F и $\bar{F}$ на более широкие пространства.

Пусть X_1 и X_2 — два пространства сходимости и M_j, $j = 1, 2$,— два линейных множества, всюду плотных, каждое в соответствующем пространстве. Пусть $A_1 : X_1 \to X_2$ и $A_2 : X_2 \to X_1$ — два непрерывных оператора, заданных соответственно на X_1 и X_2.

Л е м м а VI.1. *Если оператор A_2A_1 совпадает с тождественным оператором I_1 на множестве M_1, а оператор A_1A_2 совпадает с тождественным оператором I_2 на M_2, то операторы A_1 и A_2 взаимно обратны.*

Для доказательства достаточно заметить, что как A_2A_1, так и A_1A_2, будучи непрерывными каждый на своем пространстве,

[1] Часто вместо формулы (1.1) пишут

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int e^{ipx} \varphi(x)\, dx,$$

однако для наших целей удобнее та, что приведена в тексте.

естественно продолжаются на все пространство X_1 и X_2 соответственно.

Пользуясь этой леммой, будем строить преобразование Фурье и обратное ему одновременно для двух, переходящих одно в другое пространств. Этот прием позволит нам установить обратимость преобразования Фурье и изоморфизм даваемого им отображения.

В качестве первого приложения этой схемы рассмотрим преобразование Фурье комплексного пространства $L_2 = L_2(E^n)$ которое, как мы увидим, преобразуется само в себя. Пространство L_2 — гильбертово, со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi(x) \overline{\psi}(x)\, dx.$$

Рассмотрим в нем множество $K_0^{(\infty)}$ финитных бесконечно дифференцируемых функций. Это подмножество всюду плотно в L_2. Возьмем функцию $\varphi(x)$ из L_2 и рассмотрим ее срезку, т. е. функцию

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при} \quad |x| \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > n. \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi_n \in L_2$ и $\{\varphi_n\}$ сходится к φ в L_2. Далее, построим среднюю функцию $(\varphi_n)_h$. Согласно теореме I.8, $\{(\varphi_n)_h\}$ сходится при $h \to 0$ к φ_n в L_2, причем сходимость равномерная по n. Из неравенства

$$\| \varphi - (\varphi_n)_h \mid L_2 \| \leqslant \| \varphi - \varphi_n \mid L_2 \| + \| \varphi_n - (\varphi_n)_h \mid L_2 \|$$

следует теперь, что $\{(\varphi_n)_h\}$ сходится к $\varphi(x)$ в L_2 при $n \to \infty$, $h \to 0$. Так как функция $(\varphi_n)_h$ принадлежит $K_0^{(\infty)}$, то $K_0^{(\infty)}$ плотно в L_2.

На функциях $\varphi \in K_0^{(\infty)}$ определим оператор F по формуле

$$F\varphi = \widetilde{\varphi(x)} = \tilde{\varphi}(p) \overset{\text{э}}{=} \int e^{2\pi i p^* x} \varphi(x)\, dx. \tag{1.2}$$

Здесь $p^* = (p_1, \ldots, p_n)$, $x = \uparrow (x_1, \ldots, x_n)$. Интеграл (1.2), очевидно, сходится для любой φ из $K_0^{(\infty)}$. Здесь и в дальнейшем будем обозначать независимое переменное функции $\tilde{\varphi}$ новой буквой p.

Преобразование (1.2), определенное на функциях из $K_0^{(\infty)}$, будем называть *элементарным преобразованием Фурье*. Оно переводит каждую функцию φ из $K_0^{(\infty)}$ в функцию $\tilde{\varphi}(p)$, неограниченно дифференцируемую и даже целую аналитическую, продолжимую на все комплексные p. Последнее вытекает из того, что интеграл в правой части, в силу финитности φ, будет иметь смысл при любых комплексных p.

Кроме того, $\tilde{\varphi}(p)$ при вещественных p убывает на бесконечности быстрее любой степени $|p|$. В самом деле, поскольку φ бесконечно дифференцируема и финитна, формулу (1.2) можно проинтегрировать по частям, причем получится

$$\tilde{\varphi}(p)=\frac{1}{(-2\pi i p)^{\beta}}\int e^{2\pi i p^{*}x}D^{\beta}\varphi(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Отсюда сразу же вытекает, что для любого k справедливо неравенство $|\tilde{\varphi}(p)|\leqslant K|p|^{-k}$, где K — постоянная, зависящая от φ и k. Аналогичное неравенство справедливо и для $D^{\alpha}\tilde{\varphi}$, ибо

$$D^{\alpha}\tilde{\varphi}(p)=\int(2\pi i x)^{\alpha}e^{2\pi i p^{*}x}\varphi(x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{(-2\pi i p)^{\beta}}\int e^{2\pi i p^{*}x}D^{\beta}[(2\pi i x)^{\alpha}\varphi(x)]\,dx. \tag{1.4}$$

Из этих замечаний, в частности, вытекает, что элементарное преобразование Фурье (1.2) переводит $K_0^{(\infty)}$ в L_2.

Теперь расширим F до оператора на всем L_2. Для этого установим изометричность F на $K_0^{(\infty)}$. В случае гильбертовых пространств H_1 и H_2 со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$ изометричность оператора $A: H_1\to H_2$ равносильна тому, что он сохраняет скалярное произведение [2], т. е. тому, что

$$(Ax, Ay)_2=(x, y)_1.$$

Теорема VI.1. *Преобразование Фурье элементов $K_0^{(\infty)}$ сохраняет величину скалярного произведения в L_2. При $\varphi,\psi\in K_0^{(\infty)}$ выполняется равенство*

$$(\tilde{\varphi}(p),\ \tilde{\psi}(p))=(\varphi(x),\psi(x)).$$

Доказательство основано на двух леммах.

Лемма VI.2. *Пусть $\varphi(x)$ — финитная функция одной переменной, имеющая ограниченную производную второго порядка, и пусть $\lambda>0$. Тогда интеграл*

$$\varphi(x\,|\,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\lambda(y-x)}{\pi(y-x)}\varphi(y)\,dy$$

удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x\,|\,\lambda)-\varphi(x)|\leqslant\frac{d}{\lambda}\max_{z}|\varphi''(z)|,$$

где d — диаметр носителя $\varphi(x)$.

---

[2] Из сохранения скалярного произведения, очевидно, следует сохранение нормы. Обратное вытекает из того, что:

$$(A(x), A(y))_2=\frac{1}{4}[(A(x+y), A(x+y))_2-(A(x-y), A(x-y))_2]+$$
$$+\frac{i}{4}[(A(x+iy), A(x+iy))_2-(A(x-iy), A(x-iy))_2]=$$
$$=\frac{1}{4}[(x+y, x+y)_1-(x-y, x-y)_1]+$$
$$+\frac{i}{4}[(x+iy, x+iy)_1-(x-iy, x-iy)_1]=(x, y)_1.$$

Доказательство. Пусть сначала $d = 1$. Разобьем интеграл $\varphi(x \mid \lambda)$ на два, взятых соответственно по полупрямым $y < x$ и $y > x$.

После элементарной замены переменных получим

$$\varphi(x \mid \lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi\lambda z)}{\pi z} [\varphi(x+z) + \varphi(x-z)]\, dz$$

и, поскольку $\int_0^\infty \frac{\sin(2\pi\lambda z)}{\pi z} dz = \frac{1}{2}$, имеем

$$\varphi(x \mid \lambda) - \varphi(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi\lambda z)}{\pi z} [\varphi(x+z) + \varphi(x-z) - 2\varphi(x)]\, dz. \tag{1.5}$$

Заметим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$|\varphi'(x)| \leqslant \max_z |\varphi''(z)|, \quad |\varphi(x)| \leqslant \max_z |\varphi''(z)| \tag{1.6}$$

(φ — финитна и $d = 1$). Обозначим при $z > 0$

$$\psi(x, z) = \frac{\varphi(x+z) + \varphi(x-z) - 2\varphi(x)}{z}.$$

Поскольку

$$\varphi(x+z) + \varphi(x-z) - 2\varphi(x) = z^2\varphi''(\xi),$$

где $\xi \in (x-z,\ x+z)$, то $\psi(x, 0) = 0$. Оценим производную $d\psi/dz$. Имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{z[\varphi'(x+z) - \varphi'(x-z)] - [\varphi(x+z) + \varphi(x-z) - 2\varphi(x)]}{z^2}.$$

Пользуясь известной формулой для приращений двух функций, получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\varphi''(x+\xi_1) + \varphi''(x-\xi_2)}{2}, \quad \text{где } \xi_i \in (-z, z), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial\psi(x, z)}{\partial z}\right| \leqslant \max_z |\varphi''(z)|. \tag{1.7}$$

Этой оценкой будем пользоваться при $0 \leqslant z \leqslant 1$ и при z, пробегающем носители функций $\varphi(x+z)$ и $\varphi(x-z)$. Суммарная длина этих трех множеств не превосходит 3. При остальных z имеем

$$\frac{\partial\psi(x, z)}{\partial z} = \frac{2\varphi(x)}{z^2}, \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| \leqslant \frac{2\max_z |\varphi''(z)|}{z^2}. \tag{1.8}$$

Проинтегрируем теперь по частям равенство (1.5):

$$\varphi(x\,|\,\lambda)-\varphi(x)=-\psi(x,z)\frac{\cos(2\pi\lambda z)}{2\lambda\pi^2}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{\cos(2\pi\lambda z)}{2\lambda\pi^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\partial z.$$

Внеинтегральные члены пропадают, поскольку $\psi(x, z)$ обращается в нуль при $z=0$ и $z=\infty$, а дробь $\cos\ 2\pi\lambda z/(2\lambda\pi^2)$ ограничена по z. Оценивая по модулю второе слагаемое, имеем

$$|\varphi(x\,|\,\lambda)-\varphi(x)|\leqslant\frac{1}{2\lambda\pi^2}\int_0^\infty\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|dz$$

и, в силу оценок (1.7), (1.8), получим

$$|\varphi(x\,|\,\lambda)-\varphi(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\lambda\pi^2}\left\{3+\int_1^\infty\frac{2dz}{z^2}\right\}\max_z|\varphi''(z)|\leqslant\frac{\max\limits_z|\varphi''(z)|}{\lambda}.$$

Случай, когда носитель φ имеет произвольный диаметр d, сводится к случаю $d=1$ заменой переменного $x=yd$. Лемма доказана.

Пусть теперь $\varphi(x)$ — функция n переменных из $K_0^{(\infty)}$, и пусть по-прежнему d — диаметр носителя этой функции. Тогда справедливо неравенство

$$|D^\alpha\varphi(x)|\leqslant d^{|\beta|-|\alpha|}\max_z|D^\beta\varphi(z)| \tag{1.9}$$

при $\alpha\leqslant\beta$.

Введем следующие обозначения. Оператор G_k определим формулой

$$G_k\varphi=\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin 2\pi\lambda_k(y_k-x_k)}{\pi(y_k-x_k)}\varphi(x_1,\ldots,x_{k-1},y_k,x_{k+1},\ldots,x_n)\,dy_k.$$

Положим $H_k=G_k-I$, где I — единичный оператор. Тогда из леммы VI.2 и неравенства (1.9) вытекает

Следствие 1.1. *Для $\varphi\in K_0^{(\infty)}$ и $\lambda_k>0$ справедлива оценка*

$$|H_k\varphi(x)|\leqslant\frac{d}{\lambda_k}\max_{x_k}|D_k^2\varphi(x)|\leqslant\frac{d}{\lambda_k}\max_x|D^{(2,\ldots,2)}\varphi(x)|,$$

где первый максимум берется только по x_k, а также оценка

$$|H_{k_1}H_{k_2}\ldots H_{k_r}\varphi|\leqslant\frac{d^r}{\lambda_{k_1}\ldots\lambda_{k}}\max_{(x_{k_1},\ldots,x_{k_r})}|D_{k_1}^2\ldots D_{k_r}^2\varphi(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{d^r}{\lambda_{k_1}\ldots\lambda_{k_r}}\max_x|D^{(2,\ldots,2)}\varphi(x)|. \tag{1.10}$$

Последняя оценка сразу же устанавливается индукцией по числу сомножителей H_k, если заметить, что оператор дифференцирования по переменному, не входящему в H_k, коммутирует с ним.

Лемма VI.3. *Справедлива оценка*

$$|(G_1 \ldots G_n - I)\varphi| \leqslant d^n \max_z |D^{(2,\ldots,2)}\varphi(z)| \times \\ \times \left\{\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)-1\right\}.$$

Доказательство. Имеем

$$(G_1 \ldots G_n - I)\varphi| \leqslant |(I+H_1)\ldots(I+H_n)\varphi-\varphi| \leqslant \\ \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n}|H_i\varphi| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|H_iH_j\varphi| + \\ + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|H_iH_jH_k\varphi| + \ldots \leqslant \left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{d^n}{\lambda_i} + \right. \\ \left. + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{d^n}{\lambda_i\lambda_j} + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\frac{d^n}{\lambda_i\lambda_j\lambda_k} + \ldots\right\} \times \\ \times \max_z |D^{(2,\ldots,2)}\varphi(z)| = d^n \max_z |D^{(2,\ldots,2)}\varphi(z)| \times \\ \times \left\{\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)-1\right\}.$$

Здесь мы воспользовались (1.10). Лемма доказана.

Из леммы вытекает, в частности, что интеграл

$$\varphi(x\,|\,\lambda) = G_1 \ldots G_n\varphi = \\ = \int \frac{\sin 2\pi\lambda_1(y_1-x_1)}{\pi(y_1-x_1)} \cdots \frac{\sin 2\pi\lambda_n(y_n-x_n)}{\pi(y_n-x_n)}\varphi(y)\,dy$$

равномерно стремится к $\varphi(x)$ на всем R^n.

Перейдем к доказательству теоремы VI.1. Имеем, меняя порядок интегрирования и вычисляя внутренний интеграл:

$$(\tilde\varphi, \tilde\psi) = \int \tilde\varphi(p)\overline{\tilde\psi(p)}\,dp = \\ = \lim_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\to\infty} \int\limits_{\substack{|p_j|\leqslant\lambda_j \\ j=1,2,\ldots,n}} \left(\int e^{2\pi i p^* x}\varphi(x)\,dx\right)\left(\int e^{-2\pi i p^* y}\bar\psi(y)\,dy\right)dp = \\ = \lim_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\to\infty} \int \varphi(x)\left\{\int\bar\psi(y)\left[\int\limits_{\substack{|p_j|\leqslant\lambda_j \\ j=1,2,\ldots,n}} e^{2\pi i p^*(x-y)}\,dp\right]dy\right\}dx = \\ = \lim_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\to\infty} \int \varphi(x)\left\{\int\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin 2\pi\lambda_j(y_j-x_j)}{\pi(y_j-x_j)}\bar\psi(y)\,dy\right\}dx.$$

По лемме VI.3 во внутреннем интеграле по y можно перейти к пределу. Получим

$$(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = (\varphi, \psi). \tag{1.11}$$

Эта важная формула, установленная нами для любых $\varphi, \psi \in K_0^{(\infty)}$, носит название формулы Планшереля. Теорема VI.1 доказана.

Выражая норму в L_2 через скалярное произведение, имеем для φ из $K_0^{(\infty)}$:

$$\| \widetilde{\varphi} \mid L_2 \| = \| \varphi \mid L_2 \|. \tag{1.12}$$

Таким образом, элементарный интегральный оператор Фурье (1.2) на всюду плотном множестве функций из L_2, а именно на множестве $K_0^{(\infty)}$ финитных бесконечно дифференцируемых функций, сохраняет норму. Это позволяет построить расширение этого оператора на все L_2. Напомним, каким образом проводится такое расширение. В силу установленной изометричности любая последовательность $\{\varphi_k(x)\} \in K_0^{(\infty)}$, сходящаяся к элементу φ_∞ в L_2, перейдет в фундаментальную последовательность $\{\tilde{\varphi}_k(p)\}$ в L_2 и в силу полноты гильбертова пространства будет иметь предел $\tilde{\psi}_\infty(p)$ из L_2. Этот предел мы и будем считать преобразованием Фурье для $\varphi_\infty(x)$. Преобразование Фурье, определенное таким образом на всем L_2, непрерывно и при этом справедлива формула Планшереля.

Мы определили преобразование Фурье двумя последовательными приемами. Сначала на функциях φ из $K_0^{(\infty)}$ с помощью прямой формулы (1.2), а затем на всем L_2 путем аппроксимации элементами из $K_0^{(\infty)}$. Заметим, однако, что прямая формула

$$\tilde{\varphi}(p) = \int e^{2\pi i p^* x} \varphi(x)\, dx \tag{1.13}$$

сохраняется для любых финитных функций из L_2. В силу финитности такая функция $\varphi(x)$ суммируема, и интеграл понимается как обычный интеграл от суммируемой функции.

Запись (1.13) сохраняют и для произвольных φ из L_2, хотя в этом случае суммируемость φ по R^n, вообще говоря, не имеет места, а сам интеграл понимается как специфический предельный переход в L_2.

Таким же образом можно построить соответствующее расширение интегрального оператора:

$$\bar{F}\varphi = \widetilde{\varphi(x)} = \tilde{\varphi}(p) = \int e^{-2\pi i p^* x} \varphi(x)\, dx, \tag{1.14}$$

который мы будем называть сопряженным к оператору (1.2). Его непрерывное расширение на все L_2 будем называть сопряженным преобразованием Фурье.

Т е о р е м а VI.2. *Преобразование Фурье на L_2 обратимо, и формула* (1.14) *задает на всем L_2 обратный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & \text{при } 0\leqslant x_j\leqslant \xi_j,\ j=1,2,\ldots,n;\\ 0, & \text{если хоть одно } x_j \text{ не лежит в этом промежутке.}\end{cases}$$

Вычисляя непосредственно ее преобразование Фурье, получим

$$\tilde{\psi}(p)=\frac{e^{2\pi i\xi_1 p_1}-1}{2\pi i p_1}\cdots\frac{e^{2\pi i\xi_n p_n}-1}{2\pi i p_n}.$$

Применив формулу Планшереля к финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ и функции $\psi(x)$, получим

$$\int\limits_0^{\xi_1}\cdots\int\limits_0^{\xi_n}\varphi(x)\,dx=\int\tilde{\varphi}(p)\frac{e^{-2\pi i\xi_1 p_1}-1}{-2\pi i p_1}\cdots\frac{e^{-2\pi i\xi_n p_n}-1}{-2\pi i p_n}\,dp.$$

Поскольку в правой части множитель $\tilde{\varphi}(p)$ убывает быстрее любого многочлена, мы можем продифференцировать полученную формулу по $\xi_1,\ldots,\xi_n$ под знаком интеграла. При этом получится

$$\varphi(x)=\int e^{-2\pi i p^* x}\tilde{\varphi}(p)\,dp=\bar{F}(\tilde{\varphi}(p)=\widetilde{\widetilde{\varphi(x)}}.$$

Итак, мы установили, что для φ из $K_0^{(\infty)}$ имеет место

$$\varphi=\bar{F}\tilde{\varphi}=\bar{F}F\varphi. \tag{1.15}$$

Операторы F и $\bar{F}$ изометричны и, значит, ограничены. Значит (1.15) справедливо для всех φ из L_2 и оператор $\bar{F}$ есть левый обратный к F. Используя это, проверим, что множество $M_2=F(K_0^\infty)$ всюду плотно в L_2. Пусть $\tilde{\varphi}$ из L_2, тогда $\varphi=\bar{F}(\tilde{\varphi})$ также из L_2. Так как $K_0^{(\infty)}$ плотно в L_2, то найдется последовательность $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n\in K_0^{(\infty)}$, сходящаяся к φ. Обозначим через $\tilde{\varphi}_n$ преобразование Фурье $F(\varphi_n)$, тогда $\bar{F}(\tilde{\varphi}_n)=\bar{F}F\varphi_n=\varphi_n$, $F(\tilde{\varphi}-\tilde{\varphi}_n)=\varphi-\varphi_n$. Из формулы Планшереля следует, что $\|\varphi-\varphi_n \mid L_2\|=\|\tilde{\varphi}-\tilde{\varphi}_n\mid L_2\|$. Значит, $\{\tilde{\varphi}_n\}$ сходится к φ, т. е. M_2 плотно в L_2.

В силу леммы VI.1 убеждаемся, что F и $\bar{F}$ взаимно обратны. Теорема доказана.

Рассмотрим условия, при которых образ Фурье функции $\varphi(x)$ обладает обобщенными производными.

1. *Для того чтобы функция $\tilde{\varphi}(p)$ — образ Фурье элемента $\varphi\in L_2$ — допускала обобщенную производную $D^\alpha\tilde{\varphi}\in L_2$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)[1+x^\alpha]\in L_2$.*

2. *Функция $\tilde{\varphi}(p)$ обладает всеми обобщенными производными порядка l тогда и только тогда, когда*

$$\varphi(x)[1+|x|^2]^{l/2}\in L_2.$$

3. *Функция $\tilde{\varphi}(p)$ допускает все производные любого порядка из L_2 тогда и только тогда, когда условие 2 выполняется для всех l.*

Эти три признака читателю предлагается доказать самостоятельно.

Повторное применение преобразований Фурье $\tilde{\tilde{\varphi}}$ и $\overset{\smile\smile}{\varphi}$ приводит к изменению знака при аргументе у функции $\varphi(x)$:

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x)=\overset{\smile\smile}{\varphi}(x)=\varphi(-x).$$

Введем обозначение $\varphi(-x)=\overset{\curvearrowleft}{\varphi(x)}$. Определенные на L_2 преобразования $\sim$, $\smile$ и $\curvearrowleft$ вместе с тождественным образуют группу с двумя элементами четвертого порядка и одним элементом второго порядка. Это циклическая (а значит, коммутативная) группа 4-го порядка. В самом деле, обозначим $\sim$ через a, тогда $\curvearrowleft = a^2$ и $\smile = a^3$.

Группа состоит из элементов е, a, a^2, a^3. Отсюда получаются простые правила композиции этих операторов друг с другом, например, $\curvearrowleft\smile = a^5 = a = \sim$.

Удобно ввести еще одно унитарное преобразование в L_2, а именно — переход к комплексно сопряженной функции. Этот оператор сопоставляет функции $\varphi(x)=\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$ функцию

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi_1(x)-i\varphi_2(x).$$

Обозначим это преобразование буквой b. Очевидно, что $b^2=e$. Вместе с оператором a оператор b порождает группу 8-го порядка, состоящую из элементов e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3. Легко проверить, что $ab=ba^3$, откуда вытекает общее правило коммутации $a^kb=ba^l$, где $k+l=4$.

§ 2. Преобразование Фурье финитных функций из L_2

Существенную роль в выяснении вопроса о преобразовании Фурье финитных элементов L_2 играет следующая

Теорема VI.3 (Винер—Пэли). *Функция $\psi(p)$ n-мерной комплексной переменной $p=(p_1,\ldots,p_n)$, $p_j=\sigma_j+i\tau_j$ при $j=1,\ldots,n$ является преобразованием Фурье финитной функции $\varphi(x)$ из L_2 с носителем, вложенным в множество $\{x\in R^n\colon -a_j\leqslant x_j<-b_j,\ j=1,\ldots,n\}$ тогда и только тогда, когда $\psi(p)$ — целая функция от p, суммируемая с квадратом при вещественных p, т. е.*

$$\int|\psi(\sigma)|^2\,d\sigma<+\infty,$$

удовлетворяющая к тому же при всех p неравенству

$$|\psi(p)|\leqslant K\prod_{j=1}^{n}\left(e^{2\pi a_j\tau_j}+e^{2\pi b_j\tau_j}\right). \tag{2.1}$$

Доказательство. Сначала проверим необходимость условий, наложенных на $\psi(p)$. Пусть $\varphi(x)$ из L_2 финитна и

$$\operatorname{supp}\varphi(x)\subset\{x\in R^n\colon -a_j\leqslant x_j\leqslant -b_j,\ j=1,\ldots,n\}. \tag{2.2}$$

В этом случае имеет место формула (1.13), дающая явное выражение $\widetilde{\varphi(x)}$:

$$\psi(p)=\int e^{2\pi i p^* x}\varphi(x)\,dx=\int e^{-2\pi\tau^* x}e^{2\pi i\sigma^* x}\varphi(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Отсюда и из финитности $\varphi(x)$ сразу следует, что $\psi(p)$ — целая функция. Заметив, что при всех τ и x из R^n; $-a_j\leqslant x_j\leqslant -b_j$, имеет место

$$e^{-2\pi\tau^* x}\leqslant\prod_{j=1}^{n}\left(e^{2\pi a_j\tau_j}+e^{2\pi b_j\tau_j}\right),$$

получим из (2.3) нужную оценку (2.1). Суммируемость $\psi(\sigma)$ с квадратом следует из уже доказанных свойств преобразования Фурье в L_2.

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть $\psi(p)$ — целая функция от p, суммируемая с квадратом при вещественных p и удовлетворяющая оценке (2.1). Положим

$$\varphi(x)=\int e^{-2\pi i x^*\sigma}\psi(\sigma)\,d\sigma.$$

Ясно, что $\varphi(x)$ из L_2. Докажем, что носитель $\varphi(x)$ удовлетворяет включению (2.2).

Предположим сначала, что $\psi(p)$ удовлетворяет неравенству

$$|\psi(p)|\leqslant K\prod_{j=1}^{n}(1+|p_j|^2)^{-1} \tag{2.4}$$

при всех p таких, что $\tau_1\geqslant 0$, $\tau_2=\tau_3=\ldots=\tau_n=0$. Тогда

$$\int\psi(\sigma)\,d\sigma=0. \tag{2.5}$$

Проверим равенство (2.5). Запишем интеграл в виде:

$$\int\psi(\sigma)\,d\sigma=\int\left(\int\psi(\sigma_1,\hat\sigma_1)\,d\sigma_1\right)d\hat\sigma_1=\lim_{A\to\infty}\int\left(\int_{-A}^{A}\psi(\sigma_1,\hat\sigma_1)\,d\sigma_1\right)d\hat\sigma_1. \tag{2.6}$$

Равенства (2.6) справедливы в силу абсолютной сходимости интеграла, стоящего первым. Заменяя по теореме о вычетах отрезок $[-A, A]$ полуокружностью $|p_1|=A$, $0\leqslant\arg p_1\leqslant\pi$, получим

$$\int_{-A}^{A}\psi(\sigma_1,\hat\sigma_1)\,d\sigma_1=-\int_{0}^{\pi}\psi\left(Ae^{ix_1},\sigma_1\right)Aie^{ix_i}\,dx_1,$$

и, значит,

$$\left|\int_{-A}^{A}\psi(\sigma_1,\hat\sigma_1)\,d\sigma_1\right|\leqslant K\int_{0}^{\pi}\frac{A\,dx_1}{1+A^2}\prod_{j=2}^{n}(1+|\sigma_j|^2)^{-1}.$$

Пользуясь этой оценкой и равенством (2.6), получаем (2.5). Аналогичное равенство имеет место в случае, если оценка (2.4) справедлива при $\tau_1 \leqslant 0$, $\tau_2 = \ldots = \tau_n = 0$. Ясно также, что роль τ_1 может играть любое τ_j.

Пусть теперь для функции $\psi(p)$ выполнено неравенство

$$|\psi(p)| \leqslant K \prod_{j=1}^{n} (e^{2\pi a_j \tau_j} + e^{2\pi b_j \tau_j})(1 + |p_j|^2)^{-1}. \tag{2.7}$$

Тогда функция $e^{-2\pi i x^* p}\psi(p)$ удовлетворяет, очевидно, оценке (2.4) при $\tau_j \leqslant 0$, $x_j > -b_j$ или при $\tau_j \geqslant 0$, $x_j < -a_j$. Воспользовавшись для этой функции равенством (2.5), видим, что при $x_j > -b_j$ и при $x_j < -a_j$ имеет место

$$\int e^{-2\pi i x^* \sigma}\psi(\sigma)\, d\sigma = 0,$$

т. е. носитель $\varphi(x)$ действительно удовлетворяет включению (2.2).

Перейдем теперь к случаю $\psi(p)$ общего вида, когда оценка (2.4) не имеет места. Построим среднюю функцию $\varphi_h(x) = \varphi(x) * h^{-n}\omega(x/h)$, где $\omega(x)$ — стандартное ядро усреднения (см. § 4 гл. I). Так как $\varphi(x)$ принадлежит L_2, то и $\varphi_h(x)$ также из L_2 (см. теорему I.8). Обозначим $\psi^{(h)}(p) = \widetilde{\varphi_h(x)}$, тогда

$$\psi^{(h)}(p) = \psi(p)\, \widetilde{h^{-n}\omega(x/h)}. \tag{2.8}$$

В самом деле, если $\varphi(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция, то (2.8) получается из равенства

$$\int e^{2\pi i p^* x}\int \varphi(x-y)\, h^{-n}\omega(y/h)\, dy\, dx =$$
$$= \int \left[\int \varphi(x-y)\, e^{2\pi i p^*(x-y)}\, dx\right] h^{-n}\omega(y/h)\, e^{2\pi i p^* y}\, dy =$$
$$= \tilde{\varphi}(p)\, \widetilde{h^{-n}\omega(x/h)}.$$

Если же $\varphi(x)$ не финитна, то приблизим ее в норме L_2 последовательностью $\{\varphi_k(x)\}$ функций из $K_0^{(\infty)}$ и воспользуемся непрерывностью в L_2 оператора усреднения (см. теорему I.9) и преобразования Фурье. Таким образом, (2.8) доказано. Имеем, далее,

$$\widetilde{h^{-n}\omega(x/h)} = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i h p_j x_j}\omega(x_j)\, dx_j. \tag{2.9}$$

При любом $p_j > 0$ и $h > 0$ справедлива оценка:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i h p_j x_j}\omega(x_j)\, dx_j \right| \leqslant K(h)(1 + |p_j|^2)^{-1}(e^{2\pi h \tau_j} + e^{-2\pi h \tau_j}). \tag{2.10}$$

Если $|p_j| \leqslant 1$, то (2.10) очевидно. Пусть $|p_j| > 1$, тогда, интегрируя дважды по частям и пользуясь финитностью $\omega(x_j)$, получим

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i h p_j x_j}\omega(x_j)\,dx_j\right| = \frac{1}{(2\pi h)^2\,|p_j|^2}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i p_j x_j h}\omega''(x_j)\,dx_j\right| \leqslant$$
$$\leqslant K(h)(1+|p_j|^2)^{-1}(e^{2\pi h\tau_j}+e^{-2\pi h\tau_j}).$$

Из (2.9), (2.10) вытекает, что

$$|\widetilde{h^{-n}\omega(x/h)}| \leqslant K(h)\prod_{j=1}^{n}(e^{2\pi h\tau_j}+e^{-2\pi h\tau_j})(1+|p_j|^2)^{-1}.$$

Вместе с неравенством (2.1) это дает

$$|\psi^{(h)}(p)| \leqslant K(h)\prod_{j=1}^{n}(e^{2\pi(a_j+h)\tau_j}+e^{2\pi(b_j-h)\tau_j})(1+|p_j|^2)^{-1}.$$

Отсюда следует, как мы уже доказали, что носитель $\varphi_h(x)$ расположен в области $-a_j-h\leqslant x_j\leqslant -b_j+h$. Переходя к пределу при $h\to 0$, получаем нужное. Теорема доказана.

Перейдем к изучению образа Фурье линейного пространства сходимости $K_0^{(s)}$, которое является подпространством L_2 с более сильной сходимостью. Рассмотрим множество $Z^{(s)}$, состоящее из функций комплексного переменного $p=(p_1,\ldots,p_n)$, удовлетворяющих следующим трем условиям:

1. Элементами $Z^{(s)}$ служат комплекснозначные функции вещественных переменных $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, продолжимые аналитически на все n-мерное пространство комплексных переменных $p=(p_1,\ldots,p_n)$. Тем самым эти функции целые.

2. Для $\psi(\sigma)$ из $Z^{(s)}$ произведения $\sigma^\alpha\psi(\sigma)$ при $|\alpha|\leqslant s$ интегрируемы с квадратом, т. е.

$$\int \sigma^{2\alpha}|\psi(\sigma)|^2\,d\sigma < +\infty,\quad |\alpha|\leqslant s. \tag{2.11}$$

Это условие, как нетрудно видеть, эквивалентно тому, что

$$\int (1+|\sigma|^2)^s|\psi(\sigma)|^2\,d\sigma < +\infty.$$

3. Функция $\psi(p)$ из $Z^{(s)}$ удовлетворяет для всех p неравенствам

$$|p^\alpha\psi(p)| \leqslant K\prod_{j=1}^{n}(e^{2\pi a_j\tau_j}+e^{2\pi b_j\tau_j}),\quad |\alpha|\leqslant s. \tag{2.12}$$

Определим на $Z^{(s)}$ сходимость. Будем говорить, что последовательность $\{\psi_k(p)\}$, ψ_k из $Z^{(s)}$, сходится к ψ^∞ из $Z^{(s)}$, если, во-первых, найдутся такие векторы $\bar a=(a_1,\ldots,a_n)$ и $\bar b=(b_1,\ldots,b_n)$, что (2.12) выполнено для всех $\psi_k(p)$ одновременно, и, во-вторых, последовательность $\{\sigma^\alpha\psi_k(\sigma)\}$ при $|\alpha|\leqslant s$ сходится в L_2 к $\sigma^\alpha\psi_\infty(\sigma)$.

Очевидно, что $Z^{(s)}$ — линейное пространство сходимости.

Теорема VI.4. *Преобразование Фурье взаимно однозначно отображает $K_0^{(s)}$ на $Z^{(s)}$. При этом как прямое отображение, так и обратное непрерывны в смысле соответствующих сходимостей.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ из $K_0^{(s)}$, тогда из теоремы Винера—Пэли следует, что $\psi(p) = \widetilde{\varphi(x)}$ является целой функцией от p. Пользуясь равенством (1.3), видим, что при $|\alpha| \leqslant s$

$$\widetilde{D^\alpha \varphi(x)} = (-2\pi i p)^\alpha \tilde{\varphi}(p) = (-2\pi i p)^\alpha \psi(p).$$

Учитывая это, получаем из определения $K_0^{(s)}$ и формулы Планшереля условие (2.11). Неравенства (2.12) следуют из теоремы Винера—Пэли. Таким образом, $\psi(p)$ принадлежит $Z^{(s)}$. Проводя рассуждения в обратном порядке, видим, что для $\psi(p)$ из $Z^{(s)}$ функция $\varphi(x) = \underset{\smile}{\psi(p)}$ принадлежит $K_0^{(s)}$.

Непрерывность преобразования Фурье (и обратного к нему) как отображения линейного пространства сходимости $K_0^{(s)}$ на линейное пространство сходимости $Z^{(s)}$ легко проверить, используя все ту же теорему Винера—Пэли.

Два вектора $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, для которых функция $\psi(p)$ удовлетворяет неравенству (2.12), назовем перекосом функции $\psi(p)$.

Приведем лемму, позволяющую точнее оценить поведение функций с конечным перекосом при комплексных p.

Лемма VI.4. *Пусть $\psi(p)$ — целая аналитическая функция переменных p, суммируемая с квадратом по вещественному пространству σ и имеющая конечный перекос, т. е.*

$$|\psi(p)| \leqslant C \prod_{j=1}^{n} (e^{2\pi a_j \tau_j} + e^{2\pi b_j \tau_j}). \tag{2.13}$$

Тогда при любом q из R^n функция $\psi(\sigma - iq)$ суммируема с квадратом по σ из R^n, причем

$$\| \psi(p - iq) \,|\, L_2 \| \leqslant \| \psi(\sigma) \,|\, L_2 \| \prod_{j=1}^{n} (e^{-2\pi a_j q_j} + e^{-2\pi b_j q_j}).$$

Доказательство. По теореме Винера—Пэли функция $\tilde{\psi}(x)$ — прообраз Фурье функции $\psi(p)$ — финитна. Для q из R^n составим произведение $e^{2\pi q^* x} \tilde{\psi}(x)$, тогда

$$\widetilde{\tilde{\psi}(x)\, e^{2\pi q^* x}} = \int e^{2\pi i (p^* - iq^*) x} \tilde{\psi}(x)\, dx = \psi(p - iq).$$

Пользуясь формулой Планшереля, получим

$$\| \psi(p - iq) \,|\, L_2 \| = \| \tilde{\psi}(x)\, e^{2\pi q^* x} L_2 \| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{-a_j \leqslant x_j \leqslant -b_j} (e^{2\pi q^* x}) \| \tilde{\psi}(x) | L_2 \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \psi(p) | L_2 \| \prod_{j=1}^{n} (e^{-2\pi q_j a_j} + e^{-2\pi q_j b_j}).$$

Лемма доказана.

§ 3. Преобразование Фурье обобщенных функций

Пусть обобщенная функция $l(x)$ принадлежит $K_0^{(s)\#}$. Если $l(x)$ допускает реализацию в виде элемента из L_2, то образ Фурье этого элемента мы обозначим $\tilde{l}(p)$ и назовем преобразованием Фурье $l(x)$. Для любой функции $\psi(p)$ из L_2, как вытекает из формулы Планшереля, имеет место равенство

$$(\ (p), \psi(p)) = (l(x), \tilde{\psi}(x)). \tag{3.1}$$

Пользуясь им, определим $\tilde{l}(p)$ в случае произвольной $l(x)$ из $K_0^{(s)\#}$. Именно, заметив, что для такого $l(x)$ правая часть (3.1) задает непрерывный функционал на $Z^{(s)}$, возьмем его за $\tilde{l}(p)$. Тем самым получим расширение непрерывного оператора Фурье $F: K_0^{(s)} \to Z^{(s)}$ до непрерывного же оператора $F: K_0^{(s)\#} \to Z^{(s)\#}$. *Образ произвольной $l(x)$ из $K_0^{(s)}$ при этом расширенном отображении назовем преобразованием Фурье обобщенной функции.*

Аналогично определяется сопряженное преобразование Фурье обобщенной функции $l(p)$ из $Z^{(s)\#}$. При этом следует воспользоваться равенством:

$$(\widetilde{l(x)}, \varphi(x)) = (l(p); \tilde{\varphi}(p)), \ \varphi \in K_0^{(s)}. \tag{3.2}$$

Тем самым непрерывный оператор $\bar{F}: Z^{(s)} \to K_0^{(s)}$ расширяется до непрерывного оператора $\bar{F}: Z^{(s)\#} \to K_0^{(s)\#}$.

Пользуясь определениями (3.1), (3.2) и теоремой VI.2, несложно доказать, что для любых $l(x)$ из $K_0^{(s)\#}$ и $\tilde{l}(p)$ из $Z^{(s)\#}$ справедливо

$$\bar{F}(F(l)) = l, \qquad F(\bar{F}(\tilde{l})) = \tilde{l}. \tag{3.3}$$

Теорема VI.5. *Пусть обобщенная функция $l(x)$ из $K_0^{(s)\#}$ финитна, тогда $\tilde{l}(p)$ — целая функция такая, что*

$$\int (1 + |\sigma|^2)^{-s} |\tilde{l}(\sigma)|^2 \, d\sigma < +\infty. \tag{3,4}$$

При этом справедливо равенство:

$$\tilde{l}(p) = (l(x), e^{2\pi i p^* x}). \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $l(x)$ из $K_0^{(s)\#}$ и носитель $l(x)$ вкладывается в шар $B_a = \{x \in R^n : |x| < a\}$. Проверим, что выполнено условие (3.4).

Рассмотрим множество тех функций из $K_0^{(s)}$, носитель которых вложен в шар B_a. Введем в нем скалярное произведение

$$(\varphi, \psi)_s = \int \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) \overline{D^\alpha \psi(x)}\, dx.$$

В результате получим гильбертово пространство $\mathring{L}_2^{(s)}(a)$.

Так как $l(x)$ принадлежит $K_0^{(s)\#}$, то $l(x)$, очевидно, непрерывна в $\mathring{L}_2^{(s)}(a)$ относительно нормы, порождаемой скалярным произведением. По теореме Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве найдется функция $\varphi_0(x)$ из $\mathring{L}_2^{(s)}(a)$ такая, что

$$(l, \varphi) = \int \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) \overline{D^\alpha \varphi_0(x)}\, dx \tag{3.6}$$

для любой $\varphi(x)$ из $\mathring{L}_2^{(s)}(a)$. В силу условия на носитель $l(x)$ последнее равенство справедливо для всех $\varphi(x)$ из $K_0^{(s)}$. Перепишем (3.6) в ином виде, пользуясь определением $\tilde{l}(p)$ и формулой Планшереля:

$$(\tilde{l}(p), \tilde{\varphi}(p)) = \int \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} (-2\pi i p)^\alpha \tilde{\varphi}(p) (2\pi i \bar{p})^\alpha \overline{\tilde{\varphi}}_0(p)\, dp =$$

$$= \int |2\pi p|^{2s} \overline{\tilde{\varphi}}_0(p) \tilde{\varphi}(p)\, dp. \tag{3.7}$$

Как вытекает из теоремы VI.4, это равенство имеет место для всех $\psi(p) = \tilde{\varphi}(p)$ из $Z^{(s)}$. Иными словами, $\tilde{l}(p)$ реализуется в $Z^{(s)\#}$ функцией $|2\pi p|^{2s} \overline{\tilde{\varphi}}_0(p)$, т. е.

$$\tilde{l}(p) = |2\pi p|^{2s} \overline{\tilde{\varphi}}_0(p). \tag{3.8}$$

Так как $\varphi_0(x) \in K_0^{(s)}$, то $\tilde{\varphi}_0(p)$ — целая функция. Значит, такова же и $\tilde{l}(p)$. Кроме того, из (3.8) получаем

$$\int \frac{|\tilde{l}(\sigma)|^2}{(1+|\sigma^2)^s}\, d\sigma = \int \frac{|2\pi\sigma|^{2s}}{(1+|\sigma|^2)^s} |2\pi\sigma|^{2s} |\tilde{\varphi}_0(\sigma)|^2\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^2 \int |2\pi\sigma|^{2s} |\tilde{\varphi}_0(\sigma)|^2\, d\sigma < +\infty.$$

Последний интеграл конечен, так как $\tilde{\varphi}_0(\sigma)$ принадлежит $Z^{(s)}$. Тем самым $\tilde{l}(p)$ удовлетворяет условию (3.4).

Обозначим через $L(p)$ функцию $(l(x), e^{2\pi i p * x})$. Ясно, что $L(p)$ — целая. Это легко получить, разложив $e^{2\pi i p * x}$ в ряд по степеням p и пользуясь финитностью и непрерывностью $l(x)$. Докажем, что $\tilde{l}(p) = L(p)$, т. е. формулу (3.5).

Если $l(x)$ реализуется функцией из $K_0^{(\infty)}$, то (3.5) просто следует из определения $\tilde{l}(p)$. Пусть $l(x)$ — произвольный элемент $K_0^{(s)\#}$, тогда образуем среднюю функцию $l_h(x) = l(x) * h^{-n}\omega(x/h)$, где $h > 0$, $\omega(\cdot)$ определена (I.4.6). Как уже отмечено в § 3 гл. V,

$l_h(x)$ реализуется бесконечно дифференцируемой функцией. Кроме того, при достаточно малых h носитель $l_h(x)$ содержится в B_a. Воспользовавшись для $l_h(x)$ формулой (3.5), получим

$$\tilde{l}_h(p) = \int (l(y), h^{-n}\omega((x-y)/h))\, e^{2\pi i p^* x}\, dx =$$
$$= \int (l(y), h^{-n}\omega((x-y)/h)\,\omega(x/(8a))\, e^{2\pi i p^* x}\, dx. \tag{3.9}$$

Здесь мы учли, что $l_h(x) = 0$ при $|x| > a$ и что $\omega(x/(8a)) = 1$ при $|x| < a$. Функция $\varphi(x) = \omega(x)/(8a))e^{2\pi i p^* x}$ при фиксированном p, очевидно, принадлежит $K_0^{(s)}$. При доказательстве теоремы V.7 была получена формула

$$(l_h, \varphi) = (l, \varphi_h), \qquad \varphi \in K_0^{(s)}.$$

Используя ее, продолжим (3.9):

$$\tilde{l}_h(p) = \left(l(y), \int h^{-n}\omega((x-y)/h)\,\omega(x/(8a))\, e^{2\pi i p^* x}\, dx\right) =$$
$$= (l(y), (e^{2\pi i p^* y})_h).$$

Последнее справедливо в силу условия на носитель $l(x)$. Вычислим среднюю функцию $(e^{2\pi i p^* x})_h$:

$$\int h^{-n}\omega((x-y)/h)\, e^{2\pi i p^* x}\, dx =$$
$$= e^{2\pi i p^* y} h^{-n} \int \omega((x-y)/h)\, e^{2\pi i p^*(x-y)}\, d(x-y) = e^{2\pi i p^* y}\chi_h(p).$$

Здесь

$$\chi_h(p) = h^{-n}\int \omega(x/h)\, e^{2\pi i p^* x}\, dx = \prod_{j=1}^{n} \int e^{2\pi i p_j x_j h}\,\omega(x_j)\, dx_j \tag{3.10}$$

и при $h \to 0$ $\chi_h(p)$ стремится к 1 равномерно по p из любой ограниченной области R^n. Таким образом, установлено поточечное равенство

$$\tilde{l}_h(p) = \chi_h(p)\, L(p). \tag{3.11}$$

Если мы докажем, что $l_h(x) \to l(x)$ в $K_0^{(s)\#}$ при $h \to 0$, то в силу непрерывности рассматриваемого нами преобразования Фурье, $\tilde{l}_h(p) \to \tilde{l}(p)$ в $Z^{(s)\#}$. С учетом (3.11) это значит, что $\chi_h(p)L(p)$ сходится в $Z^{(s)\#}$ к $\tilde{l}(p)$.

Итак, проверим сходимость $l_h(x)$ к $l(x)$ в $K_0^{(s)\#}$. Для любой $\varphi(x)$ из $K_0^{(s)}$ образуем $\varphi_h(x)$. Очевидно, носители $\varphi_h(x)$ ограничены в совокупности. Из теорем I.8 и I.9 следует, что $\varphi_h \to \varphi$ в $K_0^{(s)}$ при $h \to 0$. Поэтому $(l_h, \varphi) = (l, \varphi_h) \to (l, \varphi)$ при $h \to 0$, т. е. $l_h(x)$ сходится к $l(x)$ в $K_0^{(s)\#}$.

Далее, из стремления $\chi_h(p)$ к единице при $h \to 0$ следует, что $\chi_h(p)L(p)$ сходится к $L(p)$ в $Z^{(s)\#}$. Из единственности предела в $Z^{(s)\#}$ следует (3.5). Теорема доказана.

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — векторы, $s > 0$ — число, $\tilde{l}(p)$ — целая функция комплексного переменного p. Будем говорить, что $\tilde{l}(p)$ имеет *перекос* (a, b) *порядка* s, если выполнены следующие два условия:

$$1. \quad \int |\tilde{l}(\sigma)|^2 (1+|\sigma|^2)^{-s}\, d\sigma < +\infty. \tag{3.12}$$

2. *Существует постоянная K такая, что*

$$|\tilde{l}(p)|(1+|p|^2)^{-s/2} \leqslant K \prod_{j=1}^{n} (e^{2\pi a_j \tau_j} + e^{2\pi b_j \tau_j}). \tag{3.13}$$

В случае $s = 0$ получаем старое определение перекоса.

Т е о р е м а VI.6. *Образом Фурье обобщенной функции $l(x)$ из $K_0^{(s)\#}$ с условием, что*

$$\operatorname{supp} l(x) \in \{x \in R^n : -a_j \leqslant x_j \leqslant -b_j,\ j = 1, \ldots, n\}, \tag{3.14}$$

служит целая функция $\tilde{l}(p)$ с перекосом (a, b) порядка s. Обратно, всякая целая функция $\tilde{l}(p)$ с перекосом (a, b) порядка s является образом Фурье обобщенной функции $l(x)$ из $K_0^{(s)\#}$ с условием (3.14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $l(x)$ из $K_0^{(s)\#}$ удовлетворяет (3.14), тогда, как доказано в предыдущей теореме, $\tilde{l}(p)$ — целая функция, удовлетворяющая условию (3.12). Чтобы получить (3.13), воспользуемся формулой (3.8), где $\varphi_0(x)$ принадлежит $\mathring{L}_2^{(s)}(A)$ при достаточно большом A. Перепишем (3.8) в виде

$$\bar{\tilde{l}}(p) = \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} (2\pi i \bar{p})^{\alpha} (-2\pi i p)^{\alpha} \tilde{\varphi}_0(p). \tag{3.15}$$

Из (3.6) и (3.14) следует, очевидно, что

$$\operatorname{supp} \varphi_0(x) \subset \{x \in R^n:\ -a_j \leqslant x_j \leqslant -b_j,\ j = 1, \ldots, n\}. \tag{3.16}$$

Учитывая это, получаем оценку

$$\begin{aligned} |(-2\pi i p)^{\alpha} \tilde{\varphi}_0(p) &= \left| \int e^{2\pi i p^* x} D^{\alpha} \varphi_0(x)\, dx \right| = \\ &= \left| \int e^{-2\pi \tau^* x} e^{2\pi i \sigma^* x} D^{\alpha} \varphi_0(x)\, dx \right| \leqslant \\ &\leqslant \prod_{j=1}^{n} (e^{2\pi \tau_j a_j} + e^{2\pi \tau_j b_j}) \int |D^{\alpha} \varphi_0(x)|\, dx. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Последний интеграл конечен, что следует из (3.16) и неравенства Гёльдера. Из (3.15) и (3.17) получаем (3.13). Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $\tilde{l}(p)$ — целая функция с перекосом (a, b) порядка s. Для любой $\psi(p)$ из $Z^{(s)}$ имеет место неравенство

$$|(\tilde{l}(p), \psi(p)) \leqslant \\ \leqslant \left(\int |\tilde{l}(\sigma)|^2 (1+|\sigma|^2)^{-s} d\sigma \right)^{1/2} \left(\int |\psi(\sigma)|^2 (1+|\sigma|^2)^{s} d\sigma \right)^{1/2}.$$

Заключаем отсюда, что $\tilde{l}(p)$ принадлежит $Z^{(s)\#}$. Значит, определена обобщенная функция $l(x)$ из $K_0^{(s)\#}$ — образ $\tilde{l}(p)$ при операторе $\bar{F}$. В силу (3.3) обобщенная функция $l(x)$ — прообраз $\tilde{l}(p)$, т. е. $F(l) = \tilde{l}$. Проверим, что носитель $l(x)$ удовлетворяет условию (3.14).

Образуем среднюю функцию $l_h(x) = l(x) * h^{-n}\omega(x/h)$, где $\omega(\cdot)$ — стандартное ядро усреднения (см. § 4 гл. I). Ясно, что $l_h(x)$ — бесконечно дифференцируема. Исследуем преобразование Фурье $\tilde{l}_h(p) = \chi_h(p)\tilde{l}(p)$, где $\chi_h(p)$ определено (3.10). Заметим, что функция $(1 + 2\pi\,|\,p\,|^2)^m\chi_h(p)$ имеет прообразом Фурье $h^{-n}(1 - \Delta)^m\omega(x/h)$, принадлежащую, очевидно, $K_0^{(\infty)}$ и имеющую носителем множество $\{x \in R^n\colon -h \leqslant x_j \leqslant h\}$. По теореме Винера—Пэли $(1 + |\,\sigma\,|^2)^m\chi_h(\sigma)$ принадлежит L_2 и при этом

$$(1 + |\,p\,|^2)^m\,|\,\chi_h(p)\,| \leqslant K\prod_{j=1}^{n}(e^{-2\pi\tau_j h} + e^{2\pi\tau_j h}), \tag{3.18}$$

причем K в этом неравенстве можно выбрать независимо от h. Возьмем $m = [s/2] + 1$ и воспользуемся представлением

$$\tilde{l}_h(p) = (\tilde{l}(p)(1 + |\,p\,|^2)^{-s/2})\,\chi_h(p)(1 + |\,p\,|^2)^{s/2}.$$

Вспомнив еще условия на $\tilde{l}(p)$, видим, что целая функция $\tilde{l}_h(p)$ суммируема с квадратом по R^n и удовлетворяет оценке

$$|\,\tilde{l}_h(p)\,| \leqslant K\prod_{j=1}^{n}(e^{2\pi p_j(a_j+h)} + e^{2\pi p_j(b_j-h)}),$$

где K не зависит от p, h. Из теоремы Винера—Пэли заключаем, что $l_h(x)$ принадлежит $K_0^{(\infty)}$, причем

$$\operatorname{supp} l_h(x) \subset \{x \in R^n\colon -a_j - h \leqslant x_j \leqslant -b_j + h\}.$$

Вспомнив еще, что $l_h(x) \to l(x)$ в $K_0^{(s)\#}$, получаем (3.14). Теорема доказана.

Охарактеризуем некоторым образом функцию $\tilde{l}(p)$ в случае, когда $l(x)$ произвольный, вообще говоря, не финитный, элемент $K_0^{(s)\#}$. Напомним, что в этом случае $l(x)$ разложим в ряд по удаляющимся носителям (см. гл. V, § 3), т. е.

$$l(x) = \sum_{\beta} l_\beta(x) \tag{3.19}$$

где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in Z^n$, $l_\beta(x) \in K_0^{(s)\#}$,

$$\operatorname{supp} l_\beta(x) \subset \{x \in R^n\colon \beta_j - {}^3/_4 \leqslant x_j \leqslant \beta_j + {}^3/_4\}.$$

Очевидно, что любой ряд по удаляющимся носителям, члены которого принадлежат $K_0^{(s)\#}$, сходится в этом пространстве. Применив к обеим частям (3.19) преобразование Фурье, получим

$$\tilde{l}(p) = \sum_{\beta} \tilde{l}_\beta(p), \tag{3.20}$$

где $\tilde{l}_\beta(p) \in Z^{(s)\#}$, причем по теореме VI.6 $\tilde{l}_\beta(p)(1+|p|^2)^{-s/2}$ суммируема с квадратом по R^n и удовлетворяет оценке

$$|\tilde{l}_\beta(p)| \leqslant K \prod_{j=1}^{n} \left(e^{2\pi\tau_j(-\beta_j+3/4)} + e^{2\pi\tau_j(-\beta_j-3/4)}\right)(1+|p|^2)^{s/2}.$$

Ряд (3.20), члены которого удовлетворяют двум последним условиям, назовем рядом по возрастающим перекосам. Ясно, что любой ряд по возрастающим перекосам, члены которого принадлежат $Z^{(s)\#}$, сходится в этом пространстве.

В заключение приведем два примера, в которых за счет усиления требований к слагаемым $l_\beta(x)$ и $\tilde{l}_\beta(p)$ ряды вида (3.19) и (3.20) сходятся на более широком множестве пробных функций.

Рассмотрим пространство $\overbracket{K_0^{(s)\#}}$, состоящее из обобщенных функций $l(x)$ из $K_0^{(s)\#}$, таких что множество $\operatorname{supp} l(x) \cap \{x \in R^n\colon x \geqslant a\}$ ограничено для любого вектора a из R^n. В $\overbracket{K_0^{(s)\#}}$ входят, например, обобщенные функции с носителем в области $\{x \in R^n\colon cx < b\}$, где c — вектор с положительными координатами, b — некоторое число. Такие функции возникают при решении гиперболических уравнений (см. [34]).

Будем говорить, что $\{l_k\}$ сходится в $\overbracket{K_0^{(s)\#}}$, если $\{l_k\}$ слабо сходится на подпространстве $K^{(s)}$, состоящем из функций с носителем в $\{x \in R^n : x > a\}$ для некоторого a из R^n. Таким образом, $\overbracket{K_0^{(s)\#}}$ становится линейным пространством сходимости.

Частичные суммы ряда по удаляющимся носителям (3.20) сходятся на любой пробной функции φ из $K_0^{(s)}$. Если члены ряда $l_\beta(x) \in \overbracket{K_0^{(s)\#}}$ и если конечно множество мультииндексов β с условием, что

$$\operatorname{supp} l_\beta(x) \cap \{x \in R^n : x \geqslant a\} \neq \varnothing$$

для любого a из R^n, то совокупность пробных функций можно расширить. Именно, ряд (3.19) будет сходиться на всех $\varphi(x)$ из $K^{(s)}$ с носителем в некотором множестве.

Пространство образов Фурье $\overbracket{K_0^{(s)\#}}$ обозначим $\overbracket{Z^{(s)\#}}$. Любой ряд по возрастающим перекосам

$$\sum_{\beta \in B} \tilde{l}_\beta(p),$$

такой, что пересечение множества B индексов суммирования с $\{\beta \in Z^n : \beta \geqslant \beta^{(0)}\}$ конечно для любого $\beta^{(0)}$ и что

$$|\tilde{l}_\beta(p)| \leqslant K(1+|p|^2)^{s/2} \prod_{j=1}^{n} \left(e^{2\pi(\beta_j-3/4)\tau_j} + e^{2\pi\tau_j(\beta_j+3/4)}\right),$$

сходится в $\overbracket{Z^{(s)\#}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Adams R. A.* Sobolev spaces. N. Y.: Acad. press, 1975. 268 p.
2. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций: Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976. 311 с.
3. *Aronszajn N., Smith K. G.* Theory of Bessel potentials // Ann. Inst. Fourier. 1961. Vol. 11. P. 385—476.
4. *Берг Ж., Лефстрем Ж.* Интерполяционные пространства.: Введение. М.: Мир, 1980. 264 с.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
6. *Буренков В. И.* Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве // Математический анализ, 1965. М.: ВИНИТИ, 1966. С. 71—155. (Итоги науки).
7. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
8. *Гальярдо Э.* Свойства некоторых классов функций многих переменных // Математика. 1961. Т. 5. № 4. С. 87—116.
9. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с. (Обобщ. функции; Вып. 1).
10. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958. 307 с. (Обобщ. функции; Вып. 2).
11. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958. 274 с. (Обобщ. функции; Вып. 3).
12. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа: Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физматгиз, 1961. 472 с. (Обобщ. функции; Вып. 4).
13. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. 656 с. (Обобщ. функции; Вып. 5).
14. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции. М.: Физматгиз, 1966. 512 с. (Обобщ. функции; Вып. 6).
15. *Головкин К. К.* Параметрически нормированные пространства и нормированные массивы // Тр. МИАН СССР. 1969. Т. 106. С. 1—135.
16. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983. 231 с.
17. *Дезин А. А.* К теоремам вложения и задачи продолжения // ДАН СССР. 1953. Т. 88. С. 741—743.
18. *Зарубин М. М.* Вложение пространств $\mathring{W}^l_{p,\nu}(R^n)$ при некоторых предположениях относительно областей существования весовой нормы градиентов высших порядков // Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск: Наука, 1980. С. 195—199.
19. *Зарубин М. М.* Построение функции, имеющей заданную область существования весомой нормы // Труды семинара академика С. Л. Соболева. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. Ч. 1. С. 50—79.

20. *Зарубин М. М.* К одной теореме существования теории вложений нормированных функциональных пространств // Труды семинара академика С. Л. Соболева. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. Ч. 2. С. 96—108.
21. *Ильин В. П.* О теореме вложения для предельного показателя // ДАН СССР. 1954. Т. 96, № 5. С. 905—908.
22. *Ильин В. П., Солонников В. А.* О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1962. Т. 66. С. 205—226.
23. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
24. *Кудрявцев Л. Д.* Прямые и обратные теоремы вложения: Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Тр. МИАН СССР. 1959. Т. 55. С. 1—181.
25. *Kufner A., John O., Fucik S.* Function spaces. Prague: Academia, 1977. 357 p.
26. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН СССР. 1969. Т. 105. С. 89—105.
27. *Лионс Ж., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
28. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 416 с.
29. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 455 с.
30. *Никольский Ю. С.* Теоремы вложения для весовых классов дифференцируемых функций с предельным показателем // Материалы III Сов.-чехосл. совещ. по применению функцион. методов к краевым задачам мат. физики (май 1971 г.). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1973. С. 174—179.
31. *Peetre J.* *H* spaces // Lecture notes. Lund, 1974. P. 193.
32. *Peetre J.* New thoughts on Besov spaces. Durham: Duke Univ. 1976. 86 p.
33. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена. 1958. Т. 197. С. 54—112.
34. *Соболев С. Л.* Задача Коши в пространстве функционалов // ДАН СССР. 1935. Т. 3, № 7. С. 291—294.
35. *Соболев С. Л.* О некоторых оценках, относящихся к семействам функций, имеющих производные, интегрируемые с квадратом // Там же. 1936. Т. 1, № 7. С. 167—271.
36. *Соболев С. Л.* Methode nouvelle a resoudre le problem de Cauchy pourles equations linearies hyperboliques normales // Мат. сб. 1936. Т. 1, № 1. С. 39—72.
37. *Соболев С. Л.* Об одной теореме функционального анализа // Там же. 1938. Т. 4, С. 471—487.
38. *Соболев С. Д.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
39. *Соболев С. Л.* Плотность финитных функций в пространстве L_p^m // ДАН СССР. 1963. Т. 149, № 1. С. 40—43.
40. *Соболев С. Л.* Плотность финитных функций в пространстве $L_p^m(E_n)$ // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4. № 3. С. 673—682.
41. *Соболев С. Л.* Лекции по теории кубатурных формул. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1964. 192 с.
42. *Соболев С. Л.* Лекции по теории кубатурных формул. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1965. Ч. 2. 263 с.
43. *Соболев С. Л.* О плотности финитных функций в L_p^l // ДАН СССР. 1966. Т. 167, № 3. С. 516—518.

44. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
45. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.
46. *Трибель X.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.
47. *Успенский С. В.* О теоремах вложения для весовых классов // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 60. С. 282—303.
48. *Успенский С. В.*, *Демиденко Г. В.*, *Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984. 223 с.
49. *Харди Г.*, *Литтлвуд Дж. Е.*, *Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.
50. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, 1986. Т. 1. 462 с.
51. *Чересиз В. М.* О слабой полноте пространства, сопряженного к пространству сходимости // ДАН СССР. 1971. Т. 201, № 3. С. 548—551.
52. *Чересиз В. М.* Непрерывные представления групп со сходимостью // Там же. 1973. Т. 213, № 3. С. 542—543.
53. *Schwartz L.* Theorie des distributions. P.: Hermann, Vol. 1. 1950. 148 p.; Vol. 2. 1951. 169 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

Научное издание

Соболев Сергей Львович

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Утверждено к печати
Отделением математики АН СССР

Редактор издательства В. П. Сироткина
Художник А. Г. Кобрин
Художественный редактор Н. Н. Власик
Технические редакторы Т. С. Жарикова, И. Н. Жмуркина
Корректоры А. Б. Васильев, Л. А. Стойкина

ИБ № 40226

Сдано в набор 29.07.88. Подписано к печати 16.12.88
Т-23314. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 1
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая
Усл. печ. л. 16. Усл. кр. отт. 16. Уч.-изд. л. 15,3
Тираж 1850 экз. Тип. зак. 2070
Цена 3 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва В-485
Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6