С. Л. СОБОЛЕВ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Под редакцией О. А. ОЛЕЙНИК

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.162
С54
УДК 517.98

Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— 3-е изд, перераб и доп /Под ред. О. А. Олейник.— М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1988 — С. 336.— ISBN 5-02-013756-1.

Излагается теория функциональных пространств, получивших в настоящее время название пространств Соболева, широко используемая в теории дифференциальных уравнений в частных производных, математической физике и многочисленных приложениях, вариационный метод решения краевых задач для эллиптических уравнений, в том числе с краевыми условиями, заданными на многообразиях различных размерностей, а также теория задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

2-е изд.— 1962 г.

Для научных работников в области математики, математической физики, а также аспирантов и студентов старших курсов.

Ил. 12. Библиогр. 334 назв.

С $\frac{1702050000-188}{053(02)-88}$ 45-88

ISBN 5-02-013756-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга является существенно переработанным переизданием моих лекций «Некоторые применения функционального анализа в математической физике», изданных в 1950 году Издательством Ленинградского университета и переизданных без изменений в 1962 году в г. Новосибирске, а также переведенных в КНР (1959), США (1963), Японии (1963), ГДР (1964).

В данном издании исправлены опечатки и погрешности, уточнены некоторые определения и формулировки теорем, добавлены пояснения и сделаны поправки в ряде доказательств, даны библиографические примечания, внесены редакционные изменения.

В книгу по предложению О. А. Олейник в качестве дополнения к главе III помещена моя статья «Новый метод решения задачи Коши для линейных нормальных гиперболических уравнений», опубликованная в журнале «Математический сборник» за 1936 год (краткое изложение результатов этой статьи содержится в заметке «Задача Коши в пространстве функционалов», напечатанной в «Докладах АН СССР» за 1935 год). Эта статья является естественным продолжением § 21 гл. III. Она содержит изложение основ теории обобщенных функций и решение задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка в пространстве функционалов (обобщенных функций, распределений). Перевод статьи с французского выполнен В. П. Паламодовым. Им же написаны примечания к этой статье.

Основы применения функционального анализа в математической физике, заложенные в работах, выполненных более 50 лет назад в нашей стране и за рубежом (понятие обобщенной производной, обобщенного решения дифференциального уравнения, теоремы вложения, обобщенные функции и др.), послужили отправным пунктом для дальнейших многочисленных исследований в теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории функций, теории функциональных пространств и во многих других областях анализа, для создания аппарата применения функционального анализа к исследованию дифференциальных уравнений. Большую роль в его создании сыграли работы Л. Шварца по теории обобщенных функций (распределений), появившиеся в 1950—1951 гг., и введенное им понятие преобразования Фурье обобщенных функций. Развитие указанного аппарата исследования в течение более полувека привело к огромному прогрессу в теории уравнений с частными производными и в математической физике. О достижениях в этом направлении можно, например, судить по четырехтомному труду Л. Хёрмандера «The analysis of linear partial differential operators» (имеется русский перевод), подводящему в определенном смысле итог исследований по общей теории линейных уравнений с частными производными к настоящему времени. Этот аппарат прочно вошел в обиход современных исследователей. Его элементы включены в соответствующие обязательные лекционные курсы для студентов университетов.

Настоящая книга снабжена примечаниями, указывающими на исследования по рассматриваемым вопросам, выполненные в последние годы, однако приведенная библиография ни в какой мере не претендует на полноту.

Книга предназначена для студентов и аспирантов — математиков, механиков, физиков, а также для научных работников, использующих дифференциальные уравнения и методы их исследования в своей работе.

Приношу глубокую благодарность моему ученику и большому другу О. А. Олейник за огромный и самоотверженный труд по подготовке настоящего издания, существенно переработанного ею и дополненного.

Я глубоко благодарен В. И. Буренкову, большая и кропотливая работа которого далеко выходила за рамки обычного редактирования.

Приношу искреннюю благодарность В. П. Паламодову за перевод моей статьи и примечания к ней.

Благодарю также О. В. Бесова, Б. Р. Вайнберга, М. И. Вишика, М. В. Карасева, Б. М. Левитана, В. Г. Мазью, В. Г. Перепелкина за предоставленные ими материалы, использованные в переиздании при написании примечаний и составлении списка литературы.

Я благодарен моей дочери Т. С. Соболевой за большую помощь в подготовке рукописи.

С. Л. Соболев

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга возникла в результате обработки курса лекций, прочитанного автором в Ленинградском ордена Ленина Государственном университете. Записи лекций были составлены и обработаны Х. Л. Смолицким и И. А. Яковлевым, которые внесли в них ряд ценных изменений и дополнений. Кроме того, ряд дополнений, естественно возникающих при издании таких лекций, был сделан самим автором.

Таким образом возникла монография, объединяющая трактованный с единой точки зрения ряд вопросов теории уравнений в частных производных. В ней рассматриваются вариационные методы в применении к уравнению Лапласа и полигармоническому уравнению, а также задача Коши для линейного и квазилинейного гиперболического уравнения *). Изложению вопросов математической физики предшествует подробное рассмотрение некоторых новых результатов и методов функционального анализа, представляющих собою основу всего дальнейшего. Этому посвящена первая глава. Указанный выше материал и особенно постановки задач и методы их исследования не входят в обычные курсы математической физики и, в частности, в мой курс «Уравнения математической физики». Данная книга предназначена для аспирантов и научных работников.

Автор приносит горячую благодарность своим слушателям Х. Л. Смолицкому и И. А. Яковлеву, без помощи которых, вероятно, такая книга не смогла бы быть написана в столь короткий срок.

С. Соболев

---

*) Параграф, касающийся квазилинейных гиперболических уравнений, в третьем издании опущен.— *Примеч. ред.*

Глава I

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

1. Введение

В изложении всех вопросов, разбираемых в этой книге, придется неоднократно ссылаться на некоторые простейшие свойства интегрируемых в смысле Лебега функций и на некоторые простейшие понятия и теоремы функционального анализа, которые стали общеизвестными. Поэтому мы не будем по большей части излагать их доказательства и лишь повторим необходимые формулировки и определения.

Для понимания всего изложенного ниже достаточно быть знакомым с теорией кратных интегралов от функций вещественного переменного, хотя бы, например, в объеме лекции VI «Уравнений математической физики» [212] или т. V «Курса высшей математики» В. И. Смирнова [190]. Дополнительные сведения, касающиеся рассматриваемых вопросов теории функций и функционального анализа, можно найти в книгах А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [95], Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [89], Ф. Рисса и Б. С. Надя [182], У. Рудина [184].

Напомним некоторые свойства кратных интегралов и суммируемых функций.

1. **Суммируемые функции.** Для всякой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных в ограниченной области Ω можно указать такие замкнутые множества F, на которых она непрерывна *).

Внутренним интегралом от неотрицательной функции f называется верхняя граница

$$(\text{вн})\int\limits_{\Omega} f\,dx_1 \ldots dx_n = \sup_{F\subset\Omega}\int\limits_{F} f\,dx_1 \ldots dx_n. \qquad (1.1)$$

*) Всюду в дальнейшем, если не оговорено особо, область Ω предполагается ограниченной.

Если для неотрицательной функции внутренний интеграл существует и обладает свойством:

$$(\text{вн})\int_\Omega (f+1)\,dx_1\ldots dx_n = $$
$$= (\text{вн})\int_\Omega f\,dx_1\ldots dx_n + (\text{вн})\int_\Omega 1\cdot dx_1\ldots dx_n, \quad (1.2)$$

то функция называется суммируемой, а интеграл $(\text{вн})\int_\Omega f\,dx_1\ldots dx_n$ обозначают просто

$$\int_\Omega f\,dx_1\ldots dx_n \quad (1.3)$$

и называют интегралом в смысле Лебега.

Функция, принимающая значения разных знаков, называется суммируемой, если порознь суммируемы функции

$$f^+ = \frac{1}{2}\{f+|f|\} \text{ и } f^- = \frac{1}{2}\{|f|-f\}, \quad (1.4)$$

причем интеграл от функции f определяется равенством

$$\int_\Omega f\,dx_1\ldots dx_n = \int_\Omega f^+\,dx_1\ldots dx_n - \int_\Omega f^-\,dx_1\ldots dx_n. \quad (1.5)$$

Мерой Лебега для множества E называют интеграл

$$mE = \int_\Omega \varphi_E\,dx_1\ldots dx_n, \quad (1.6)$$

где φ_E принимает значение 1 в точках E и 0 в точках дополнения $(\Omega - E)$, $E\subset\Omega$.

Функция f называется измеримой в области Ω, если мера замкнутых множеств F, на которых она непрерывна, может быть сделана сколь угодно близкой к мере Ω.

Всякая суммируемая функция измерима.

Интеграл Лебега обладает теми же основными свойствами, какими обладают интегралы Римана (в дальнейшем вместо $dx_1\ldots dx_n$ будем писать просто dv):

$$\left.\begin{aligned} &\int_\Omega (f_1+f_2)\,dv = \int_\Omega f_1\,dv + \int_\Omega f_2\,dv, \\ &\int_\Omega af\,dv = a\int_\Omega f\,dv; \quad a = \text{const}. \end{aligned}\right\} \quad (1.7)$$

Если ряд $f_1+f_2+\ldots+f_k+\ldots=f_0$ равномерно сходится, то

$$\int\limits_\Omega (f_1+f_2+\ldots+f_k+\ldots)\,dv =$$
$$=\int\limits_\Omega f_1\,dv+\int\limits_\Omega f_2 dv+\ldots+\int\limits_\Omega f_k\,dv+\ldots \quad (1.8)$$

Больше того, формула (1.8) имеет место, если $|f_1+f_2+\ldots+f_N|\leqslant\Psi$ для любых N и, кроме того, Ψ — суммируемая функция.

Если $f\geqslant 0$ и $\int\limits_\Omega f\,dv=0$, то множество точек, где $f\neq 0$, имеет меру 0 $(m\{f\neq 0\}=0)$.

Две функции f_1 и f_2 эквивалентны, если $\int\limits_\Omega |f_1-f_2|\,dv=0$. Если $\int\limits_\Omega f\psi\,dv=0$, где ψ — любая функция, непрерывная со всеми производными внутри Ω, то f эквивалентна нулю.

Если $k\leqslant f\leqslant K$, то

$$k\cdot m\Omega\leqslant\int\limits_\Omega f\,dv\leqslant K\cdot m\Omega. \quad (1.9)$$

Интеграл Лебега абсолютно непрерывен. Иными словами, каково бы ни было число $\varepsilon>0$ для всякой функции f, суммируемой в области Ω, можно указать такое $\delta(\varepsilon)>0$, что интеграл по любому множеству $E\subset\Omega$ удовлетворяет условию $\int\limits_E |f|\,dv<\varepsilon$, как только $mE<\delta(\varepsilon)$.

Докажем два важных элементарных неравенства.

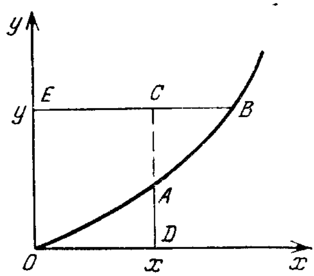

Рис. 1

2. Неравенства Гёльдера и Минковского. Пусть $p>1$; тогда, если $p'=\frac{p}{p-1}$, то

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1 \text{ и } p'-1=\frac{1}{p-1}. \quad (1.10)$$

Рассмотрим кривую $y = x^{p-1}$ (рис. 1). На этой кривой

$$x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{p'-1}.$$

Пусть x и y — два любых положительных числа. Проведя на чертеже линии $AD: x = \text{const}$ и $EB: y = \text{const}$ до пересечения с кривой, видим, что сумма площадей фигур OEB и OAD больше площади прямоугольника $OECD$, как бы ни были выбраны x и y. Иными словами,

$$\int_0^x x^{p-1} dx + \int_0^y y^{p'-1} dy \geqslant xy \tag{1.11}$$

или

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \geqslant xy. \tag{1.12}$$

Равенство будет иметь место лишь в том случае, если $y = x^{p-1}$ или $x^p = y^{p'}$.

Пусть $\vec{Q}$ означает переменную точку области Ω n-мерного пространства и $P(\vec{Q}) > 0$ — некоторая ограниченная функция в Ω. Пусть $x(\vec{Q})$ и $y(\vec{Q})$ — две положительные функции в Ω, удовлетворяющие условиям

$$\int_\Omega \left| x(\vec{Q}) \right|^p P(\vec{Q})\, dv = 1, \quad \int_\Omega \left| y(\vec{Q}) \right|^{p'} P(\vec{Q})\, dv = 1. \tag{1.13}$$

Тогда, умножая (1.12) на $P(\vec{Q})$, интегрируя по Ω и используя (1.10), получим

$$\int_\Omega x(\vec{Q})\, y(\vec{Q})\, P(\vec{Q})\, dv \leqslant 1. \tag{1.14}$$

Пусть теперь $X(\vec{Q})$ и $Y(\vec{Q})$ — две любые функции в Ω, интегрируемые соответственно со степенью p и p'. Тогда для функций

$$x(\vec{Q}) = \frac{|X(\vec{Q})|}{\left[\int_\Omega |X|^p P\, dv\right]^{1/p}}, \quad y(\vec{Q}) = \frac{|Y(\vec{Q})|}{\left[\int_\Omega |Y|^{p'} P\, dv\right]^{1/p'}}$$

имеют место равенства (1.13), и, следовательно, верно неравенство (1.14), которое после упрощения принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} |X(\vec{Q})|\,|Y(\vec{Q})|\,P(\vec{Q})\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_{\Omega} |X|^p P\,dv\right]^{1/p} \left[\int\limits_{\Omega} |Y|^{p'} P\,dv\right]^{1/p'},$$

откуда следует неравенство Гёльдера

$$\left|\int\limits_{\Omega} X(\vec{Q})\,Y(\vec{Q})\,P(\vec{Q})\,dv\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_{\Omega} |X|^p P\,dv\right]^{1/p} \left[\int\limits_{\Omega} |Y|^{p'} P\,dv\right]^{1/p'}. \quad (1.15)$$

Очевидно, знак равенства в (1.14) может иметь место лишь в том случае, если для почти всех значений $\vec{Q}$ имеет место равенство $x^p = y^{p'}$. Следовательно, в неравенстве (1.15) знак равенства имеет место лишь в случае, когда

$$\frac{|X|^p}{\int\limits_{\Omega} |X|^p P\,dv} = \frac{|Y|^{p'}}{\int\limits_{\Omega} |Y|^{p'} P\,dv}, \quad \operatorname{sign} XY = \mathrm{const}$$

почти везде, т. е. когда функции $|X|^p$ и $|Y|^{p'}$ почти везде отличаются лишь постоянным множителем, а X и Y имеют почти везде одинаковые знаки.

Из (1.15) вытекает общее неравенство Гёльдера для нескольких функций.

Пусть $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, $\lambda_j > 0$ и пусть функции φ_j ($j = 1, \ldots, k$) таковы, что

$$\int\limits_{\Omega} |\varphi_j|^{1/\lambda_j} P\,dv < \infty.$$

Тогда произведение $\varphi_1 \ldots \varphi_k$ суммируемо, и имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_{\Omega} \varphi_1 \ldots \varphi_k P\,dv\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_{\Omega} |\varphi_1|^{1/\lambda_1} P\,dv\right]^{\lambda_1} \ldots \left[\int\limits_{\Omega} |\varphi_k|^{1/\lambda_k} P\,dv\right]^{\lambda_k}, \quad (1.16)$$

причем равенство имеет место только тогда, когда

$|\varphi_j|^{1/\lambda_j}$ отличаются друг от друга лишь постоянными множителями (т. е. $|\varphi_j|^{1/\lambda_j}=c_j\psi$) и $\operatorname{sign}[\varphi_1\ldots\varphi_k]=\mathrm{const}$ почти всюду на Ω.

Докажем это неравенство переходом от k к $k+1$.

Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_k,\varphi_{k+1}$ положительны и пусть для k функций неравенство (1.16) доказано. Тогда, если $\lambda_1+\ldots+\lambda_k+\lambda_{k+1}=1$, то будем иметь, полагая $p=\frac{1}{\lambda_{k+1}}$, $p'=\frac{1}{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}$,

$$\left|\int_\Omega \varphi_1\ldots\varphi_k\varphi_{k+1}P\,dv\right|\leqslant\left[\int_\Omega[\varphi_1\ldots\varphi_k]^{\frac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}}\times\right.$$
$$\left.\times P\,dv\right]^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k}\left[\int_\Omega[\varphi_{k+1}]^{1/\lambda_{k+1}}P\,dv\right]^{\lambda_{k+1}}.\qquad(1.17)$$

Но в силу предположения о справедливости (1.16) для k функций получим

$$\int_\Omega \varphi_1^{\frac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}}\ldots\varphi_k^{\frac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}}P\,dv\leqslant$$
$$\leqslant\left[\int_\Omega\left(\varphi_1^{\frac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}}\right)^{\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}{\lambda_1}}P\,dv\right]^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}}\times\ldots$$
$$\ldots\times\left[\int_\Omega\left(\varphi_k^{\frac{1}{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}}\right)^{\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}{\lambda_k}}P\,dv\right]^{\frac{\lambda_k}{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}}.\qquad(1.18)$$

Подставляя это выражение в (1.17), получим неравенство (1.16) для $k+1$ функций. Для $k=2$ неравенство доказано в (1.15). Следовательно, неравенство Гёльдера доказано для любого k.

Можно проверить, применяя последовательно полученный ранее результат, что знак равенства имеет место только тогда, когда все функции $|\varphi_1|^{1/\lambda_1},\ldots,|\varphi_k|^{1/\lambda_k}$ отличаются лишь постоянными множителями (с точностью до множества точек меры нуль).

Если функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ принимают каждая лишь конечное число значений, то интегралы могут быть заменены суммами, и мы получим

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_1^{(i)} \dots a_k^{(i)}\right| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N} \left(a_1^{(i)}\right)^{1/\lambda_1}\right]^{\lambda_1} \dots \left[\sum_{i=1}^{N} \left(a_k^{(i)}\right)^{1/\lambda_k}\right]^{\lambda_k}. \quad (1.19)$$

Это неравенство также называется неравенством Гёльдера. Из (1.19) в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ можно получить полезное неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a^{(i)}\right| = \left|\sum_{i=1}^{N} 1 \cdot a^{(i)}\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} 1\right)^{1/2} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(a^{(i)}\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{N} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(a^{(i)}\right)^2\right]^{1/2}. \quad (1.20)$$

Пусть $x(\vec{Q}) \geqslant 0$, $y(\vec{Q}) \geqslant 0$ в Ω. Рассмотрим

$$\int_{\Omega} (x+y)^p P\,dv = \int_{\Omega} x(x+y)^{p-1} P\,dv + \int_{\Omega} y(x+y)^{p-1} P\,dv.$$

К каждому слагаемому правой части применим неравенство Гёльдера. Получим

$$\int_{\Omega} (x+y)^p P\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{\Omega} x^p P\,dv\right]^{1/p} \left[\int_{\Omega} (x+y)^{(p-1)p'} P\,dv\right]^{1/p'} +$$

$$+ \left[\int_{\Omega} y^p P\,dv\right]^{1/p} \left[\int_{\Omega} (x+y)^{(p-1)p'} P\,dv\right]^{1/p'} =$$

$$= \left[\int_{\Omega} (x+y)^p P\,dv\right]^{(p-1)/p} \left\{\left[\int_{\Omega} x^p P\,dv\right]^{1/p} + \left[\int_{\Omega} y^p P\,dv\right]^{1/p}\right\}.$$

Сокращая на первый множитель правой части, получим неравенство Минковского

$$\left[\int_{\Omega} (x+y)^p P\,dv\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_{\Omega} x^p P\,dv\right]^{1/p} + \left[\int_{\Omega} y^p P\,dv\right]^{1/p}. \quad (1.21)$$

Очевидно, как распространить (1.21) на сумму нескольких слагаемых функций какого угодно знака в Ω. Тогда получаем неравенство Минковского

$$\left[\int_\Omega |x_1 + \ldots + x_k|^p P\,dv\right]^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_\Omega |x_1|^p P\,dv\right]^{1/p} + \ldots + \left[\int_\Omega |x_k|^p P\,dv\right]^{1/p}. \quad (1.22)$$

Знак равенства может иметь место лишь в случае, если почти всюду на Ω $x_i = c_i\varphi$, $i = 1, \ldots, k$, где $\varphi \in L_p$, а c_i — неотрицательные числа.

Если функции x и y принимают каждая лишь конечное или счетное число значений, то интегралы можно заменить суммами, и мы получим неравенство Минковского для числовых рядов. Иэ (1.21) получим

$$\left[\sum a_i |x_i + y_i|^p\right]^{1/p} \leqslant \left[\sum a_i |x_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum a_i |y_i|^p\right]^{1/p} \quad (1.23)$$

или, когда этих числовых рядов несколько,

$$\left[\sum_i a_i \left|\sum_j x_{ij}\right|^p\right]^{1/p} \leqslant \sum_j \left[\sum_i a_i |x_{ij}|^p\right]^{1/p}. \quad (1.24)$$

3. Обратные неравенства Гёльдера и Минковского. Пусть $0 < p < 1$; тогда $p' = p/(p-1) < 0$.

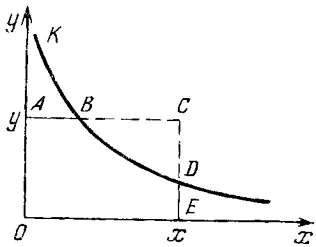

Рис. 2

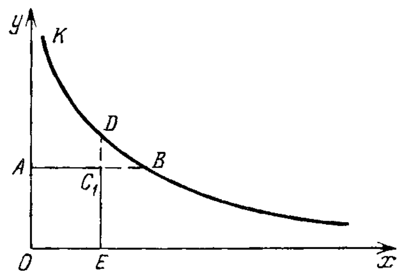

Рис. 3

Рассмотрим кривую $y = x^{p-1}$, $x > 0$ (рис. 2). На этой кривой, очевидно, $x = y^{p'-1}$. Пусть точка C с координатами x и y расположена выше кривой $y = x^{p-1}$.

Площадь q фигуры $OABDE$ меньше площади прямоугольника $OACE$. Пусть K — бесконечно далекая точка на оси y. Площадь q выражается как разность площадей

$OAKBDE = \int\limits_0^x y\,dx$ и площади $AKB = \int\limits_y^\infty x\,dy$. Иными словами,

$$\int\limits_0^x x^{p-1}dx - \int\limits_y^\infty y^{p'-1}dy \leqslant xy \text{ или } \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \leqslant xy.$$

Возьмем теперь точку C_1 ниже кривой $y = x^{p-1}$ (рис. 3). Составим разность площадей $KAOEC_1D = \int\limits_0^x x^{p-1}dx$ и $KAC_1BD = \int\limits_y^\infty y^{p'-1}\,dy$. Эта разность равна разности площадей OAC_1E и C_1DB и, следовательно, меньше, нежели OAC_1E, т. е.

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \leqslant xy. \tag{1.25}$$

В случае, если $y = x^{p-1}$, т. е. $x^p = y^{p'}$, неравенство (1.25) обращается в равенство.

Из (1.25), так же, как было выведено (1.15), получим для положительных X и Y обратное неравенство Гёльдера

$$\int\limits_\Omega XYP\,dv \geqslant \left[\int\limits_\Omega X^p P\,dv\right]^{1/p} \left[\int\limits_\Omega Y^{p'} P\,dv\right]^{1/p'}. \tag{1.26}$$

Из обратного неравенства Гёльдера (1.26) можно получить обратное неравенство Минковского

$$\left[\int\limits_\Omega (x_1 + \ldots + x_k)^p P\,dv\right]^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \left[\int\limits_\Omega x_1^p P\,dv\right]^{1/p} + \ldots + \left[\int\limits_\Omega x_k^p P\,dv\right]^{1/p}, \tag{1.27}$$

справедливое при $0 < p < 1$ для положительных $x_1, \ldots, x_k$.

Как и прежде, знак равенства может иметь место лишь в том случае, если почти всюду на Ω $x_i = c_i\varphi$, $i = 1, \ldots, k$, где $\varphi \in L_p$, а c_i — неотрицательные числа. Доказательство вполне аналогично прежнему.

Замечание. Пусть x задана в Ω. Полагая $y = x$ на множестве $E \subset \Omega$, $y = 0$ на множестве $\Omega - E$, $z = x - y$ в Ω, для $p \geqslant 1$ получим, применяя к y и z неравенство Минковского,

$$\left[\int_\Omega |x|^p \, dv\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_E |x|^p \, dv\right]^{1/p} + \left[\int_{\Omega - E} |x|^p \, dv\right]^{1/p}.$$

Для $0 < p < 1$ неравенство переходит в обратное.

2. Основные свойства пространств L_p

1. Норма. Определение. В обычном евклидовом n-мерном пространстве для определения понятия сходимости и предельного перехода пользуются расстоянием между двумя точками $\rho = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$.

Функция $\rho = \sqrt{\sum \xi_i^2}$, выражающая длину вектора $\vec{x}$ с координатами ξ_i, является частным случаем так называемой нормы вектора. Расстояние между точками выражается, таким образом, как норма разности векторов, соответствующих этим точкам. Способ введения нормы вектора с помощью его евклидовой длины является не единственным. Будем говорить, что функция ρ является нормой, если она удовлетворяет трем требованиям.

А. Функция ρ есть однородная функция первой степени, т. е.

$$\rho(k\xi_1, \ldots, k\xi_n) = |k| \rho(\xi_1, \ldots, \xi_n), \qquad k = \text{const}. \tag{2.1}$$

Б. Функция ρ есть выпуклая функция своих аргументов. Иными словами, если определить вектор $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ как вектор с координатами $\lambda\xi_i + \mu\eta_i$, где ξ_i и η_i — соответственно координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, то из равенств $\rho(\vec{x}) = a$, $\rho(\vec{y}) = a$ следует, что

$$\rho(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \leqslant a, \tag{2.2}$$

если $\lambda + \mu = 1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

В. Функция ρ неотрицательна, причем из равенства $\rho(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ следует, что $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$.

Неравенство треугольника. Свойство выпуклости часто формулируют несколько иначе. Пусть $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ — два любых вектора. Рассмотрим величину $\rho(\vec{\xi} + \vec{\eta})$ и попробуем оценить ее. Имеем

$$\vec{\xi}+\vec{\eta}=\left[\frac{\rho(\vec{\xi})}{\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})}\cdot\frac{\vec{\xi}}{\rho(\vec{\xi})}+\frac{\rho(\vec{\eta})}{\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})}\cdot\frac{\vec{\eta}}{\rho(\vec{\eta})}\right]\times$$
$$\times[\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})].$$

Если положить $\vec{\xi}/\rho(\vec{\xi})=\vec{x}$, $\vec{\eta}/\rho(\vec{\eta})=\vec{y}$, то получим, очевидно, $\rho(\vec{x})=1$, $\rho(\vec{y})=1$. Далее, полагая $\lambda=\dfrac{\rho(\vec{\xi})}{\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})}$, $\mu=\dfrac{\rho(\vec{\eta})}{\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})}$ и пользуясь однородностью нормы, имеем

$$\rho(\vec{\xi}+\vec{\eta})=[\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})]\,\rho(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}).$$

Но последний множитель по свойству Б не превышает единицы, поэтому

$$\rho(\vec{\xi}+\vec{\eta})\leqslant\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta}). \tag{2.3}$$

Это неравенство называется неравенством треугольника. Таким образом, неравенство (2.2) влечет за собою неравенство треугольника для однородных функций первой степени.

Легко видеть, что и обратно для однородных функций первой степени выпуклость функции ρ следует из неравенства треугольника. В самом деле, если $\rho(\vec{x})=a$, $\rho(\vec{y})=a$, то

$$\rho(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})\leqslant\rho(\lambda\vec{x})+\rho(\mu\vec{y})=(\lambda+\mu)a=a,$$

что и требовалось доказать.

Мы будем называть две нормы $\rho_1(\vec{\xi})$ и $\rho_2(\vec{\xi})$ эквивалентными или равносильными, если при любых $\vec{\xi}$ имеет место неравенство

$$m\rho_1(\vec{\xi})\leqslant\rho_2(\vec{\xi})\leqslant M\rho_1(\vec{\xi}),$$

причем числа m и M не зависят от $\vec{\xi}$, $0<m<M$. В евклидовом n-мерном пространстве все нормы эквивалентны. В самом деле, так как функции ρ_1 и ρ_2 выпуклы в R^n, то они непрерывны (см. [249, с. 22]). Поэтому поверхность S, определяемая уравнением $\rho_1(\vec{x})=1$, является

замкнутым множеством. В силу А она ограничена, так как на ней $1 = \rho_1(\vec{x}) = \rho_1\left(|\vec{x}|\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right) = |\vec{x}|\,\rho_1(\vec{x}/|\vec{x}|) \geqslant$ $\geqslant m_1|\vec{x}|$, где $m_1 = \min\limits_{|\vec{\xi}|=1} \rho_1(\vec{\xi}) > 0$, и $|\vec{x}| \leqslant 1/m_1$. Следовательно, на этой поверхности функция $\rho_2(\vec{x})$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений и последние положительны в силу В. Обозначим эти значения соответственно M и m. Согласно А и В

$$\rho_2(\vec{\xi}) = \rho_2\left(\rho_1(\vec{\xi})\frac{\vec{\xi}}{\rho_1(\vec{\xi})}\right) = \rho_1(\vec{\xi})\,\rho_2(\vec{x}), \quad \vec{x} = \frac{\vec{\xi}}{\rho_1(\vec{\xi})} \in S,$$

откуда сразу вытекает искомое неравенство.

Любое линейное преобразование n-мерного пространства сохраняет свойство выпуклости поверхностей. Поэтому, если $\rho(y_1, \ldots, y_n)$ — норма в пространстве с координатами $y_1, \ldots, y_n$, то $\rho\left(\sum a_{1j}x_j, \ldots, \sum a_{nj}x_j\right)$ является нормой в пространстве с координатами $x_1, \ldots, x_n$, если определитель преобразования $|a_{ij}|$ не равен нулю. В самом деле, если в пространстве с координатами $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ все $y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n)$ равны нулю, то все координаты $x_1, \ldots, x_n$ равны нулю. Таким образом, из равенства $\rho = 0$ следует, что $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Однородность ρ также очевидна.

Пусть $p \geqslant 1$. *Множество измеримых функций* φ, *для которых функция* $|\varphi|^p$ *интегрируема в области* Ω, *мы будем называть* L_p. Введем в множестве функций L_p понятие нормы. Обозначим $\|\varphi\| = \left[\int\limits_{\Omega} |\varphi|^p\,dv\right]^{1/p}$ и $\|\varphi\|$ будем называть нормой φ. Норма в функциональном пространстве служит обобщением геометрического понятия длины вектора. Часто там, где это необходимо, мы будем снабжать норму особым значком, показывающим, в каком пространстве эта норма определена. Мы будем писать, например, $\|\varphi\|_{L_p}$.

Для нормы, очевидно, справедливы следующие утверждения:

а) $\|\varphi + \psi\| \leqslant \|\varphi\| + \|\psi\|$ (неравенство Минковского),

б) $\|a\varphi\| = |a| \cdot \|\varphi\|$, $a = \mathrm{const}$,

в) $\|\varphi\| \geqslant 0$, и если $\|\varphi\| = 0$, то $\varphi = 0$ (с точностью до множества с мерой нуль).

В дальнейшем нам придется пользоваться некоторыми обозначениями теории множеств. Мы будем писать $\varphi \in L_p$, если функция φ есть элемент пространства L_p. Последовательность φ_k каких-либо элементов мы будем обозначать $\{\varphi_k\}$. Если множество E_1 есть часть E_2, то мы будем писать $E_1 \subset E_2$. Если элемент φ не принадлежит множеству E, то будем писать $\varphi \overline{\in} E$. Через AB будем обозначать пересечение множеств A и B, через $A+B$ — их объединение и через $A-B$ — их разность.

Мы будем говорить, что последовательность функций $\{\varphi_k\}$ сходится сильно к функции φ_0 в пространстве L_p, если $\|\varphi_k - \varphi_0\| \to 0$. Мы будем обозначать сильную сходимость знаком

$$\varphi_k \Rightarrow \varphi_0.$$

2. Теорема Рисса — Фишера.

Теорема. *Пусть имеется последовательность функций $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in L_p$, таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\|\varphi_k - \varphi_m\| < \varepsilon$ при k, $m > N(\varepsilon)$. Тогда существует функция $\varphi_0 \in L_p$ такая, что $\varphi_k \Rightarrow \varphi_0$.*

Замечание. Эта теорема утверждает полноту функционального пространства L_p. Доказательство этой теоремы мы не приводим. Оно может быть проведено так же, как аналогичное доказательство для $p = 2$ (см. [212, с. 335—337]).

3. Непрерывность в целом функций в L_p. Пусть φ задана во всем пространстве, причем $\varphi \equiv 0$ вне Ω и $\varphi \in L_p$ в Ω. Пусть $\vec{P}(x_1, \ldots, x_n)$ — вектор в n-мерном пространстве, $|\vec{P}|$ — его длина.

Определение. *Функция $\varphi \in L_p$ в Ω называется непрерывной в целом в L_p, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что* *)

$$\left[\int \left|\varphi(\vec{P}+\vec{Q}) - \varphi(\vec{P})\right|^p dv_{\vec{P}}\right]^{1/p} < \varepsilon, \tag{2.4}$$

лишь только $|\vec{Q}| < \delta(\varepsilon)$.

Теорема. *Всякая функция $\varphi \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ в ограниченной области Ω непрерывна в целом в этой области* ([1]).

*) Здесь и в дальнейшем, если в интеграле не указана область интегрирования, то подразумевается интегрирование по всему пространству.

Доказательство. Вследствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега по данному $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta_1(\varepsilon)>0$, что $\int\limits_{\Omega'}|\varphi|^p\,dv<\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$, как только $m\Omega'<\delta_1$. Выберем такое $\gamma(\varepsilon)>0$, что $m(\Omega-\Omega_\gamma)<\delta_1/4$, где Ω_γ — множество тех точек из Ω, расстояние которых до границы области Ω больше γ. Так как функция φ измерима на Ω_γ, то можно выбрать такое замкнутое множество $F(\varepsilon)\subset\Omega_\gamma$, что функция φ непрерывна на F и $mF>$ $>m\Omega_\gamma-\delta_1/4>m\Omega-\delta_1/2$. Очевидно, функция φ равномерно непрерывна на F. Поэтому существует такое $\delta_2(\varepsilon)>0$, что если точки $\vec{P}$ и $\vec{P}+\vec{Q}$ принадлежат F и $|\vec{Q}|<\delta_2(\varepsilon)$, то

$$|\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p<\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p(m\Omega)^{-1}. \tag{2.5}$$

Обозначим через $A^{\vec{R}}$ сдвиг множества A на вектор $\vec{R}$. Пусть далее $|\vec{Q}|<\delta(\varepsilon)=\min\{\gamma(\varepsilon),\ \delta_2(\varepsilon)\}$. Так как $|\vec{Q}|<\gamma$, то $F^{-\vec{Q}}\subset\Omega$. Рассмотрим пересечение $F^*=$ $=FF^{-\vec{Q}}$. Тогда

$$mF^*=m\left(F-\left(\Omega-F^{-\vec{Q}}\right)\right)\geqslant mF-m\left(\Omega-F^{-\vec{Q}}\right)=$$
$$=mF-\left(m\Omega-mF^{-\vec{Q}}\right)=2mF-m\Omega>m\Omega-\delta_1.$$

Следовательно,

$$m(\Omega-F^*)<\delta_1.$$

Далее,

$$\left(\int|\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p\,dv_{\vec{P}}\right)^{1/p}=$$
$$=\left(\int\limits_{\Omega+\Omega^{-\vec{Q}}}|\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p\,dv_{\vec{P}}\right)^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int\limits_{F^*}|\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p\,dv_{\vec{P}}\right)^{1/p}+$$
$$+\left(\int\limits_{\left(\Omega+\Omega^{-\vec{Q}}\right)-F^*}|\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p\,dv_{\vec{P}}\right)^{1/p}.$$

Если $\vec{P} \in F^*$, то $\vec{P}$, $\vec{P}+\vec{Q} \in F$, поэтому на F^* выполняется неравенство (2.5). Следовательно,

$$\left(\int\limits_{F^*} |\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p\, dv_{\vec{P}}\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Учитывая, что функция φ равна нулю вне Ω, получаем

$$\left(\int\limits_{(\Omega+\Omega^{-\vec{Q}})-F^*} |\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p\, dv_{\vec{P}}\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{(\Omega+\Omega^{-\vec{Q}})-F^*} |\varphi(\vec{P}+\vec{Q})|^p\, dv_{\vec{P}}\right)^{1/p} +$$
$$+\left(\int\limits_{\Omega-F^*} |\varphi(\vec{P})|^p\, dv_{\vec{P}}\right)^{1/p} = \left(\int\limits_{\Omega\left((\Omega+\Omega^{-\vec{Q}})-F^*\right)^{\vec{Q}}} |\varphi(\vec{P})|^p dv_{\vec{P}}\right)^{1/p} +$$
$$+\left(\int\limits_{\Omega-F^*} |\varphi(\vec{P})|^p\, dv_{\vec{P}}\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2}{3}\varepsilon \tag{2.6}$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, поскольку, как уже доказано, $m(\Omega-F^*)<\delta_1$ и

$$m\left(\Omega\left((\Omega+\Omega^{-\vec{Q}})-F^*\right)^{\vec{Q}}\right) = m\left(\Omega\left((\Omega^{\vec{Q}}+\Omega)-(F^*)^{\vec{Q}}\right)\right) =$$
$$= m\left(\Omega-(F^*)^{\vec{Q}}\right) = m(\Omega-F^*).$$

Следовательно, при $|\vec{Q}|<\delta$ выполнено (2.4). Теорема доказана.

4. Средние функции. Пусть функция φ интегрируема в области Ω. Будем считать, что $\varphi=0$ вне Ω.

Рассмотрим ядро ($r=|\vec{Q}|$)

$$\omega(\vec{Q};\, h) = \begin{cases} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} & \text{при } r<h, \\ 0 & \text{при } r \geqslant h. \end{cases} \tag{2.7}$$

Отметим очевидные свойства ядра.

1. $\omega(\vec{Q};\, h)$ непрерывно во всем пространстве вместе со всеми производными.

2. На границе шара радиуса h сама функция $\omega(\vec{Q};\, h)$ и все ее производные равны нулю.

Второе свойство вытекает из того, что $e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}$ и любая ее производная $\to 0$ при $r \to h$ и $r < h$. В самом деле, методом полной индукции можно установить, что любая производная $\dfrac{\partial^{\alpha} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ имеет вид

$$\frac{P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n)}{(r^2-h^2)^{2\alpha}}\, e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}, \tag{2.8}$$

где в числителе стоит многочлен от $x_1, \ldots, x_n$.

3. Обозначим $\chi = \int\limits_{r<1} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} dv$; тогда $\int \omega(\vec{Q};\, h)\, dv = \chi h^n$, где n — число измерений пространства.

При этом $\dfrac{1}{\chi h^n}\int \omega(\vec{Q};\, h)\, dv = 1$.

Замечание. Мы будем пользоваться лишь отмеченными тремя свойствами ядра, не принимая во внимание конкретный вид ядра, данный равенством (2.7). Это замечание будет полезно в дальнейшем.

Составим *среднюю функцию* для φ по шару радиуса h с центром в $\vec{P}$:

$$\varphi_h(\vec{P}) = \frac{1}{\chi h^n}\int \omega(\vec{P} - \vec{P}_1;\, h)\, \varphi(\vec{P}_1)\, dv_{\vec{P}_1}. \tag{2.9}$$

Свойства средних функций (²).

1. *Функции $\varphi_h(\vec{P})$ имеют все производные любого порядка.*

Доказательство. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ — координаты точек $\vec{P}$ и $\vec{P}_1$. Выражение

$$H = \frac{\varphi_h(x_1 + k, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{k} =$$

$$= \frac{1}{\chi h^n}\int [\omega(x_1 + k - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n;\, h) -$$

$$-\omega(x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n; h)]\frac{1}{k}\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dv_{\vec{P}_1} \to$$

$$\to \frac{1}{\chi h^n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}[\omega(\vec{P}-\vec{P}_1; h)]\,\varphi(\vec{P}_1)\, dv_{\vec{P}_1} \qquad (2.10)$$

при $k\to 0$. Предельный переход под знаком интеграла законен, так как

$$\Bigl|\frac{\omega(x_1+k-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n; h)}{k} - \frac{\omega(x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n; h)}{k} - \frac{\partial}{\partial x_1}[\omega(\vec{P}-\vec{P}_1; h)]\Bigr| \leqslant \frac{|k|\,M}{2}=\eta,$$

где $M=\max\limits_{\vec{Q}}\left|\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2}(\vec{Q}; h)\right|$, и, кроме того, при $|k|\leqslant 1$

$$\left|H-\frac{1}{\chi h^n}\int\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\varphi\, dv_{\vec{P}_1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\chi h^n}\Biggl[\int\limits_{|\vec{P}-\vec{P}_1|\leqslant h+1}\eta^{p'}\, dv_{\vec{P}_1}\Biggr]^{1/p'}\Biggl[\int_\Omega|\varphi|^p\, dv_{\vec{P}_1}\Biggr]^{1/p} \to 0$$

при $k\to 0$ (тогда и $\eta\to 0$).

Совершенно аналогично можно провести доказательство существования и непрерывности любой производной любого порядка.

2. *Функции* φ_h *сильно сходятся к* φ *при* $h\to 0$, *т. е.*

$$\int_\Omega|\varphi_h-\varphi|^p\, dv\to 0 \;\; \textit{при} \;\; h\to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим $\delta=\|\varphi-\varphi_h\|$. Имеем

$$\delta^p=\int\left|\varphi(\vec{P})-\frac{1}{\chi h^n}\int\omega(\vec{P}-\vec{P}_1; h)\,\varphi(\vec{P}_1)\, dv_{\vec{P}_1}\right|^p dv_{\vec{P}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega\left\{\frac{1}{\chi h^n}\int\omega(\vec{P}-\vec{P}_1; h)\,|\varphi(\vec{P})-\varphi(\vec{P}_1)|\, dv_{\vec{P}_1}\right\}^p dv_{\vec{P}}.$$

Обозначим $\vec{P}-\vec{P}_1=\vec{Q}$ и для оценки внутреннего интеграла используем неравенство Гёльдера

$$\delta^p \leqslant \int \left\{ \frac{1}{\chi h^n} \left[\int\limits_{|\vec{Q}| \leqslant h} |\omega(\vec{Q}; h)|^{p'} dv_{\vec{Q}} \right]^{1/p'} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\int\limits_{|\vec{Q}| \leqslant h} |\varphi(\vec{P} - \vec{Q}) - \varphi(\vec{P})|^p dv_{\vec{Q}} \right]^{1/p} \right\}^p dv_{\vec{P}}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Из ограниченности ω следует, что

$$\left| \int\limits_{|\vec{Q}| \leqslant h} |\omega(\vec{Q}; h)|^{p'} dv_{\vec{Q}} \right| \leqslant C_1 h^n;$$

тогда

$$\delta^p \leqslant C_2 (h^n)^{-p\left(1 - \frac{1}{p'}\right)} \int \int\limits_{|\vec{Q}| \leqslant h} |\varphi(\vec{P} - \vec{Q}) - \varphi(\vec{P})|^p dv_{\vec{Q}} dv_{\vec{P}} =$$

$$= C_2 h^{-n} \int\limits_{|\vec{Q}| \leqslant h} \int |\varphi(\vec{P} - \vec{Q}) - \varphi(\vec{P})|^p dv_{\vec{P}} dv_{\vec{Q}};$$

вследствие непрерывности функции φ в целом следует, что при h достаточно малом $\int |\varphi(\vec{P} - \vec{Q}) - \varphi(\vec{P})|^p dv_{\vec{P}} < \eta$; тогда

$$\delta^p \leqslant C_2 h^{-n} \int\limits_{|\vec{Q}| \leqslant h} \eta \, dv_{\vec{Q}} \leqslant C_3 \eta. \tag{2.11}$$

5. Счетная плотная сеть.

Теорема 1. *Для всякой функции $\varphi \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ в области Ω существует последовательность $\{\varphi_k\}$ непрерывных функций с непрерывными производными всех порядков, заданных во всем пространстве, сходящихся сильно к φ в L_p на Ω.*

Доказательство. Средние функции φ_{h_k} с $h_k \to 0$ при $k \to \infty$ образуют, очевидно, последовательность функций, непрерывных с производными любого порядка, заданных во всем пространстве, сходящуюся сильно к функции φ в L_p на Ω.

Теорема 2. *В пространстве L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ функций φ, заданных в ограниченной области Ω, существует счетное всюду плотное множество функций $\{\varphi_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\varphi_k \in L_p$, т. е. такое счетное множество $\{\varphi_k\}$,* *что для любого элемента* $\psi \in L_p$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такой элемент* φ_ε, *что* $\|\psi - \varphi_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\psi \in L_p$. Построим ψ_h — среднюю функцию для ψ так, чтобы $\|\psi - \psi_h\| < \varepsilon/3$. Далее, для ψ_h по теореме Вейерштрасса можно найти такой многочлен P, что $\|\psi_h - P\| < \varepsilon/3$.

Наконец, существует такой многочлен P_r с рациональными коэффициентами, что $\|P - P_r\| < \varepsilon/3$. Из этих трех неравенств следует

$$\|\psi - P_r\| < \varepsilon,$$

а так как функций P_r счетное множество, то теорема доказана ([3]).

Замечание. Свойство какого-либо пространства иметь счетное всюду плотное множество (говорят «счетную всюду плотную сеть») называется *сепарабельностью*. Таким образом, пространство L_p сепарабельно.

3. Линейные функционалы в L_p

1. Определение. Ограниченность линейных функционалов. Если каждой $\varphi \in L_p$ в Ω приведено в соответствие число $l\varphi$, то говорят, что $l\varphi$ есть функционал от функции φ. Функционалы можно складывать, вычитать и умножать на постоянное число. Мы будем полагать

$$(al)\varphi = a(l\varphi), \quad (l_1 + l_2)\varphi = l_1\varphi + l_2\varphi.$$

Функционал $l\varphi$, обладающий свойствами

1) дистрибутивности:

$$l(af_1 + bf_2) = alf_1 + blf_2, \tag{3.1}$$

где a и b — любые постоянные;

2) непрерывности:

$$\text{если } \varphi_k \Rightarrow \varphi, \text{ то } l\varphi_k \to l\varphi, \tag{3.2}$$

называется *линейным функционалом* в L_p.

Функционал $l\varphi$ называют *ограниченным*, если существует такая постоянная $M > 0$, что для любой φ

$$|l\varphi| \leqslant M\|\varphi\|, \tag{3.3}$$

где $\|\varphi\| = \left[\int\limits_\Omega |\varphi|^p\,dv\right]^{1/p}$ — норма функции φ в L_p.

Теорема. *Всякий линейный функционал в L_p ограничен.*

Доказательство. Докажем эту теорему от противного. Если это утверждение неверно, то должна существовать такая последовательность $\{\varphi_k\} \subset L_p$, что $\frac{l\varphi_k}{\|\varphi_k\|} > k$ (k — любое натуральное число).

Рассмотрим $\{\psi_k\} = \left\{\frac{\varphi_k}{\sqrt{k}\|\varphi_k\|}\right\}$. Очевидно, $\psi_k \in L_p$ и $\|\psi_k\| = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$ при $k \to \infty$; следовательно, $\psi_k \Rightarrow 0$, а по непрерывности функционала и $l\psi_k \to 0$. С другой стороны, $l\psi_k > \sqrt{k}$, и, следовательно, $l\psi_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Из всех чисел M, удовлетворяющих (3.3), найдется наименьшее, называемое нормой функционала $l\varphi$ и обозначаемое $\|l\|$. Норма функционала l удовлетворяет условиям

$$\|al\| = |a|\,\|l\|$$

и

$$\|l_1 + l_2\| \leqslant \|l_1\| + \|l_2\| \text{ (неравенство треугольника).}$$

Эти свойства следуют непосредственно из определения суммы функционалов и фукционала al.

Нашей задачей является установление общего вида линейного функционала в L_p. Предварительно докажем два вспомогательных неравенства.

2. Неравенства Кларксона.

Лемма 1. *Если* $\lambda \geqslant 1$ *и* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *то*

$$\Phi(x) = (1+x)^\lambda + (1-x)^\lambda - 2^\lambda \leqslant 0. \tag{3.4}$$

Доказательство. Имеем $\Phi'(x) = \lambda(1+x)^{\lambda-1} - \lambda(1-x)^{\lambda-1} \geqslant 0$ и $\Phi(1) = 0$, т. е. $\Phi(x)$ — неубывающая функция в $[0;\ 1]$, равная нулю на правом конце промежутка, и, следовательно, $\Phi(x) \leqslant 0$ при $x < 1$.

Лемма 2. *При* $p \geqslant 2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p \leqslant \frac{1}{2}(1 + x^p). \tag{3.5}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p - \frac{1}{2}(1 + x^p)$$

и

$$\Phi(x) = \frac{2^p}{x^p} F(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^p + \left(\frac{1}{x} - 1\right)^p - 2^{p-1}\left(\frac{1}{x^p} + 1\right).$$

Имеем

$$\Phi(1) = 0;$$

$$\Phi'(x) = -\frac{p}{x^2}\left[\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{p-1} + \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{p-1}\right] + \frac{p2^{p-1}}{x^{p+1}} =$$

$$= -\frac{p}{x^{p+1}}\left[(1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2^{p-1}\right].$$

Вследствие леммы 1 $\Phi'(x) \geqslant 0$ и, следовательно, $\Phi(x) \leqslant \leqslant 0$, а, значит, и $F(x) \leqslant 0$, что и требовалось доказать.

Первое неравенство Кларксона. Рассмотрим $\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^p + \left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^p$. Пусть в данной точке, например, $|\psi| \leqslant |\varphi|$; полагаем $\left|\frac{\psi}{\varphi}\right| = x$. Тогда по лемме 2 получим

$$\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^p + \left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^p = |\varphi|^p\left\{\left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\varphi|^p}{2}(1+x^p) = \frac{1}{2}(|\varphi|^p + |\psi|^p). \quad (3.6)$$

Интегрируя, получим первое неравенство Кларксона

$$\int_\Omega \left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^p dv + \int_\Omega \left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^p dv \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |\varphi|^p\, dv + \frac{1}{2}\int_\Omega |\psi|^p\, dv, \quad p \geqslant 2. \quad (3.7)$$

Лемма 3. *Функция*

$$\omega(p) = [z^p + (1-z)^p]^{\frac{1}{p-1}} \quad (3.8)$$

есть возрастающая функция p при $p > 1$, если $\frac{1}{2} < z < 1$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\lambda(p) = \ln[z^p + (1-z)^p]$. Тогда $\ln\omega(p) = \frac{\lambda(p)}{p-1}$. Имеем

$$\lambda'(p) = \frac{z^p \ln z + (1-z)^p \ln(1-z)}{z^p + (1-z)^p}.$$

Покажем, что $\lambda'(p)$ — возрастающая функция p, т. е., что $\lambda(p)$ — функция выпуклая.

Действительно, $\frac{z}{1-z} > 1$ и, следовательно, $\ln\frac{z}{1-z} > 0$. Кроме того,

$$\mu(p) = \frac{z^p}{z^p + (1-z)^p} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-z}{z}\right)^p}$$

есть возрастающая функция p, так как $(1-z)/z < 1$. Поэтому

$$\lambda'(p) = \mu(p)\ln z + [1 - \mu(p)]\ln(1-z) = \\ = \mu(p)\ln\frac{z}{1-z} + \ln(1-z)$$

есть также возрастающая функция p, что и требовалось доказать. Следовательно, кривая $\lambda(p)$ $(p > 1)$ выпуклая. Из монотонности $\lambda'(p)$ следует, очевидно, $\lambda''(p) > 0$.

Рассмотрим производную от $\frac{\lambda(p)}{p-1} = y(p) = \ln\omega(p)$. Мы получим

$$y'(p) = \frac{1}{(p-1)^2}[\lambda'(p)(p-1) - \lambda(p)]. \tag{3.9}$$

Выражение в квадратной скобке всегда положительно. Действительно,

$$[\lambda'(p)(p-1) - \lambda(p)]' = (p-1)\lambda''(p)$$

и, как мы убедились, всегда положительно. Следовательно, функция $[\lambda'(p)(p-1) - \lambda(p)]$ возрастает. При $p = 1$ она обращается в нуль, так как $\lambda(1) = 0$. Следовательно, всегда положительной будет и функция $y'(p)$. Значит, $y(p)$ — возрастающая функция, что и требовалось доказать.

Замечание. Заметим, что функция $\omega(p, \alpha) = [z^p + (1-z)^p]^{1/(p-\alpha)}$ является возрастающей при $\alpha > 1$ (с особенностью $p = \alpha$) и убывающей при $\alpha < 0$. При $0 < \alpha < 1$ она имеет один минимум. Легко доказать это утверждение геометрически.

Имеем $\ln\omega(p, \alpha) = \frac{\lambda(p)}{p-\alpha}$.

Кривая $\lambda(p)$ $(p > 1)$ имеет вид, изображенный на рис. 4. Для $p > 1$ она выпуклая, ибо $\lambda''(p) > 0$. С осью p она пересекается при $p = 1$. Кривая имеет асимптоту $\lambda = p \ln z$, так как

$$\lambda(p) = p \ln z + \ln\left[1 + \left(\frac{1-z}{z}\right)^p\right],$$

и, следовательно, разность $\lambda(p) - p \ln z$ стремится к нулю при $p \to \infty$ Любая прямая может иметь с этой кривой не более двух общих точек. Очевидно, что $\frac{\lambda(p)}{p-\alpha}$ геометрически представляет собой тангенс угла φ, образованного с осью p прямой, проходящей через данную точку на кривой и точку $p = \alpha$, $\lambda = 0$ на оси p. Если $\alpha > 1$, то угол φ возрастает от $-\pi$ до $\operatorname{arctg} \ln z$. Аналогично, если $\alpha \leqslant 0$, то угол φ убывает от 0 до $\operatorname{arctg} \ln z$.

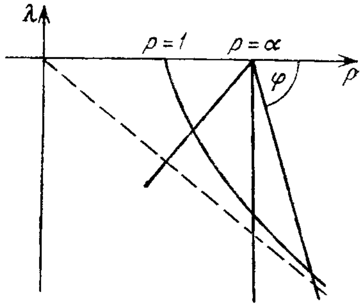

Рис. 4

Наконец, если $0 < \alpha < 1$, то из точки $p = \alpha$, $\lambda = 0$ можно провести одну касательную к нашей кривой. Следовательно, угол φ сначала убывает до некоторого минимума, а затем возрастает до значения $\operatorname{arctg} \ln z$. Отсюда, так как $\omega(p, \alpha) = e^{\operatorname{tg}\varphi}$, следует справедливость утверждений о $\omega(p, \alpha)$.

Второе неравенство Кларксона. Положим для определенности $\varphi > \psi > 0$ и рассмотрим функцию

$$F(\varphi) = \left[\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} + \left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{p-1} - \frac{1}{2}[\varphi^p + \psi^p]. \tag{3.10}$$

Очевидно, что если $\varphi = \psi$, то $F(\varphi) = 0$. Далее имеем

$$\frac{dF}{d\varphi} = \left[\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} + \left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{p-2} \cdot \frac{1}{2} p \left[\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}-1} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}-1}\right] - \frac{p}{2}\varphi^{p-1} = \frac{p}{2}\varphi^{p-1}\left\{\left[\left(\frac{\varphi+\psi}{2\varphi}\right)^{\frac{p}{p-1}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\varphi-\psi}{2\varphi}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{p-2}\left[\left(\frac{\varphi+\psi}{2\varphi}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\frac{\varphi-\psi}{2\varphi}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right] - 1\right\}. \tag{3.11}$$

Полагаем $\frac{\varphi+\psi}{2\varphi} = z > \frac{1}{2}$ и $\frac{p}{p-1} = p' \geqslant 2$. Тогда

$$\frac{\varphi-\psi}{2\varphi} = 1 - z, \quad \frac{1}{p-1} = p' - 1, \quad p - 2 = -\frac{p'-2}{p'-1}.$$

Поэтому

$$\frac{dF}{d\varphi}=\frac{p}{2}\varphi^{p-1}\left\{\left(\frac{[z^{p'-1}+(1-z)^{p'-1}]^{\frac{1}{p'-1}}}{[z^{p'}+(1-z)^{p'}]^{\frac{1}{p'-1}}}\right)^{p'-2}-1\right\}=$$

$$=\frac{p}{2}\varphi^{p-1}\left\{\left[\frac{\omega(p'-1)}{\omega(p')}\right]^{p'-2}-1\right\}\leqslant 0, \quad (3.12)$$

так как по лемме 3 $\frac{\omega(p'-1)}{\omega(p')}<1$, а $p'-2\geqslant 0$. Следовательно, $F(\varphi)$ — убывающая функция, а так как при $\varphi=\psi$ $F(\varphi)=0$, то, следовательно, $F(\varphi)\leqslant 0$ при $\varphi>\psi$.

Очевидно, имеет место неравенство

$$\left[\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{p-1}-\frac{1}{2}[|\varphi|^p+|\psi|^p]\leqslant 0 \quad (3.13)$$

при $1<p\leqslant 2$ и любых φ и ψ.

Для вывода второго неравенства Кларксона применим обратное неравенство Минковского $(0<q<1)$

$$\left[\int_\Omega(|x|+|y|)^q\,dv\right]^{1/q}\geqslant\left[\int_\Omega|x|^q\,dv\right]^{1/q}+\left[\int_\Omega|y|^q\,dv\right]^{1/q}. \quad (3.14)$$

Полагаем в (3.14) $x=\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}$, $y=\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}$, $q=p-1$. Получаем

$$\left[\int_\Omega\left(\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{p-1}dv\right]^{\frac{1}{p-1}}\geqslant$$

$$\geqslant\left[\int_\Omega\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^p dv\right]^{\frac{1}{p-1}}+\left[\int_\Omega\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^p dv\right]^{\frac{1}{p-1}}$$

и, используя (3.13), получим второе неравенство Кларксона

$$\left[\int_\Omega\left|\frac{\varphi+\psi}{2}\right|^p dv\right]^{1/(p-1)}+\left[\int_\Omega\left|\frac{\varphi-\psi}{2}\right|^p dv\right]^{1/(p-1)}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{2}\int_\Omega|\varphi|^p\,dv+\frac{1}{2}\int_\Omega|\psi|^p\,dv\right]^{1/(p-1)}, \quad 1<p\leqslant 2. \quad (3.15)$$

Пусть φ и ψ — два единичных вектора. Полусумма их $\frac{\varphi+\psi}{2}$ представляет собою середину соединяющей их хорды. Длина хорды при этом равна $\|\varphi-\psi\|$.

Неравенства Кларксона позволяют утверждать, что середина всякой хорды длины δ имеет норму строго меньшую, чем некоторое число $\eta(\delta)<1$, т. е. лежит существенно в глубине единичного шара. Это свойство можно назвать *равномерной выпуклостью* единичного шара.

3. Теорема об общем виде линейного функционала.

Теорема. *Всякий линейный функционал в L_p представим в виде*

$$l\varphi=\int_{\Omega}\varphi\psi_0\,dv, \tag{3.16}$$

где

$$\psi_0\in L_{p'} \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ 1<p<\infty\right).$$

Доказательство. Обозначим $\sup\limits_{\|\varphi\|=1}|l\varphi|=g$. Это означает, что существует последовательность $\{\varphi_k\}$, $\|\varphi_k\|=1$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}l\varphi_k=g$. Докажем, что $\{\varphi_k\}$ сходится сильно.

Предположим противное. Тогда можно указать такое $\varepsilon_0>0$, что найдутся пары чисел n_k и m_k $(n_k\to\infty,\ m_k\to\infty$ при $k\to\infty)$ такие, что $\|\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}\|>\varepsilon_0$. Применяя к функциям φ_{m_k} и φ_{n_k} неравенства Кларксона (3.7), если $p\geqslant 2$, (3.15), если $1<p\leqslant 2$, получим

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|^p+\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^p\leqslant 1 \qquad (p\geqslant 2),$$

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p/(p-1)}+\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p/(p-1)}\leqslant 1 \quad (1<p\leqslant 2).$$

Отсюда следует, что

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|<1-\eta, \tag{3.17}$$

где $\eta>0$ и не зависит от k.

Рассмотрим $\chi_k = \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{\| \varphi_{m_k} + \varphi_{n_k} \|}$. Имеем $\|\chi_k\| = 1$. Вследствие дистрибутивности функционала имеем

$$l\chi_k = \frac{1}{2} [l\varphi_{m_k} + l\varphi_{n_k}] \frac{1}{\left\| \frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2} \right\|} > \frac{\frac{1}{2}(l\varphi_{m_k} + l\varphi_{n_k})}{1 - \eta}.$$

Но $l\varphi_{m_k} \to g$, $l\varphi_{n_k} \to g$ при $k \to \infty$, откуда следует, что при достаточно большом k будем иметь $l\chi_k > \frac{g - \eta g}{1 - \eta} = g$, что противоречит тому, что $\sup\limits_{\|\varphi\|=1} | l\varphi | = g$.

Следовательно, $\{\varphi_m\}$ сходится сильно и вследствие полноты L_p существует предельный элемент $\varphi_0 \in L_p$.

Очевидно $\|\varphi_0\| = 1$.

Замечание. Из доказательства следует единственность (с точностью до эквивалентности) функции $\varphi_0 \in L_p$ такой, что $\|\varphi_0\| = 1$ и $l\varphi_0 = g$, иначе мы могли бы составить расходящуюся последовательность, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} l\varphi_k = g$, что невозможно.

Докажем, что

$$l\varphi = g \int\limits_{\Omega} [\,|\varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} \varphi_0]\, \varphi\, dv \tag{3.18}$$

или, полагая $g|\varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} \varphi_0 = \psi_0$,

$$l\varphi = \int\limits_{\Omega} \psi_0 \varphi\, dv.$$

Лемма. *Если для некоторой функции* $\psi \in L_p$

$$\int\limits_{\Omega} [\,|\varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} \varphi_0]\, \psi\, dv = 0, \tag{3.19}$$

то $l\psi = 0$.

Доказательство. Рассмотрим $y(\lambda) = l\left(\frac{\varphi_0 + \lambda\psi}{\|\varphi_0 + \lambda\psi\|}\right)$, где $\psi \neq c\varphi_0$ (c — постоянная).

Так как $\left\| \frac{\varphi_0 + \lambda\psi}{\|\varphi_0 + \lambda\psi\|} \right\| = 1$ и $\frac{\varphi_0 + \lambda\psi}{\|\varphi_0 + \lambda\psi\|} \neq \varphi_0$ при $\lambda \neq 0$, то $y(\lambda) \leqslant g$, причем равенство достигается при $\lambda = 0$. Следовательно, при $\lambda = 0$ $y(\lambda)$ имеет максимум. Если существует $y'(0)$, то $y'(0)=0$. Нетрудно убедиться в существовании этой производной.

Дифференцируя формально, имеем

$$\frac{d}{d\lambda}\|\varphi_0+\lambda\psi\| = \frac{d}{d\lambda}\left[\int_\Omega |\varphi_0+\lambda\psi|^p\,dv\right]^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{p}\left[\int_\Omega |\varphi_0+\lambda\psi|^p\,dv\right]^{1/p-1}\times$$

$$\times\, p\int_\Omega |\varphi_0+\lambda\psi|^{p-1}\operatorname{sign}(\varphi_0+\lambda\psi)\,\psi\,dv,$$

и так как интеграл $\int\limits_\Omega |\varphi_0+\lambda\psi|^{p-1}\operatorname{sign}(\varphi_0+\lambda\psi)\,\psi\,dv$ равномерно сходится [212, лекция VII], то законно формальное дифференцирование по λ. Далее

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\|\varphi_0+\lambda\psi\|\right)_{\lambda=0} = \left[\int_\Omega |\varphi_0|^p\,dv\right]^{1/p-1}\int_\Omega [|\varphi_0|^{p-1}\operatorname{sign}\varphi_0]\,\psi\,dv,$$

и поэтому

$$y'(0) = \frac{l\psi}{\|\varphi_0\|} - \frac{l\varphi_0}{\|\varphi_0\|^2}\|\varphi_0\|^{1-p}\int_\Omega [|\varphi_0|^{p-1}\operatorname{sign}\varphi_0]\,\psi\,dv,$$

откуда в силу (3.19) следует $l\psi=0$, и лемма доказана.

Докажем (3.18). Пусть $\varphi\in L_p$ — любая функция. Положим

$$\alpha = \int_\Omega [|\varphi_0|^{p-1}\operatorname{sign}\varphi_0]\,\varphi\,dv.$$

Тогда $\psi=\varphi-\alpha\varphi_0$ удовлетворяет (3.19), так как

$$\int_\Omega [|\varphi_0|^{p-1}\operatorname{sign}\varphi_0](\varphi-\alpha\varphi_0)\,dv =$$

$$= \alpha - \alpha\int_\Omega |\varphi_0|^{p-1}|\varphi_0|\,dv = \alpha-\alpha = 0.$$

Следовательно, $l\psi = l\varphi - \alpha l\varphi_0 = 0$, т. е.

$$l\varphi = \alpha l\varphi_0 = g\int_\Omega [|\varphi_0|^{p-1}\operatorname{sign}\varphi_0]\,\varphi\,dv,$$

и (3.18) доказано.

Так как $\varphi_0 \in L_p$, то

$$||\varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} \varphi_0|^{p'} = [|\varphi_0|^{p-1}]^{p/(p-1)} = |\varphi_0|^p,$$

и, следовательно,

$$\psi_0 = g|\varphi_0|^{p-1} \operatorname{sign} \varphi_0 \in L_{p'} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right),$$

причем $\|\psi_0\|_{L_{p'}} = g$.

Таким образом, получаем из (3.18)

$$l\varphi = \int_\Omega \psi_0 \varphi\, dv, \quad \psi_0 \in L_{p'},$$

и теорема доказана. Кроме того, очевидно, $\|l\| = \|\psi_0\|_{L_{p'}}$.

Замечание. Из (3.16) следует, что каждому линейному функционалу в L_p соответствует функция $\psi \in L_{p'}$ и, наоборот, каждая $\psi \in L_{p'}$ порождает линейный функционал в L_p. Пространства L_p и $L_{p'}$ являются взаимно сопряженными функциональными пространствами.

4. Сходимость функционалов. Понятие сходимости легко перенести на пространство функционалов.

Будем называть последовательность функционалов $\{l_k\}$ *слабо сходящейся*, если для каждого элемента φ из L_p существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} l_k\varphi = l_0\varphi$.

Этот предел удовлетворяет свойству дистрибутивности, так как

$$l_0(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = \lim_{k\to\infty} l_k(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}(a_1 l_k\varphi_1 + a_2 l_k\varphi_2) = a_1 \lim_{k\to\infty} l_k\varphi_1 + a_2 \lim_{k\to\infty} l_k\varphi_2 =$$
$$= a_1 l_0\varphi_1 + a_2 l_0\varphi_2.$$

Если предельный функционал l_0 ограничен, то он будет и непрерывным, т. е. линейным.

Теорема 1. *Пространство L_p^*, т. е. пространство функционалов для L_p, является полным в смысле слабой сходимости. Иными словами, всякая слабо сходящаяся последовательность функционалов имеет пределом линейный функционал* $(1 < p < \infty)$.

Очевидно, достаточно доказать ограниченность всякой сходящейся последовательности функционалов. Отсюда уже будет следовать ограниченность предельного функционала.

Мы докажем справедливость предложения, из которого будет следовать теорема 1.

Теорема 2. *Если последовательность линейных функционалов*

$$l_1, \ldots, l_k, \ldots \tag{3.20}$$

неограничена, т. е. может принимать на единичном шаре из L_p сколь угодно большие значения, то найдется такой элемент ω_0 из L_p, на котором эта последовательность расходится $(1 < p < \infty)$.

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, что из последовательности функционалов (3.20) мы выберем некоторую подпоследовательность

$$m_1, \ldots, m_s, \ldots, \tag{3.21}$$

где

$$m_s = l_{k_s} \quad (s = 1, 2, \ldots), \quad k_s \to \infty \quad \text{при } s \to \infty,$$

$$m_s\varphi = \int\limits_\Omega \psi_s\varphi dv, \quad \psi_s \in L_{p'}. \tag{3.22}$$

Пусть $\omega_s = \dfrac{|\psi_s|^{p'-1}\operatorname{sign}\psi_s}{\|\psi_s\|^{p'-1}}$. Очевидно,

$$\omega_s \in L_p, \quad \|\omega_s\| = 1, \quad m_s\omega_s = \|\psi_s\|_{L_{p'}}.$$

Составим ряд по функциям ω_s

$$\omega_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s\omega_s, \tag{3.23}$$

где $\alpha_s = \|\psi_s\|^{-1/2}$.

Ряд сходится в L_p, если сходится ряд $\sum\|\psi_s\|^{-1/2}$. Как мы докажем при соответствующем выборе $\{m_s\}$, ряд (3.23) окажется сильно сходящимся к элементу ω_0, а последовательность $l_k\omega_0$ будет расходиться.

Последовательность m_s мы будем строить индуктивно. Пусть m_s выбрано; покажем, как нужно выбрать m_{s+1}.

Рассмотрим последовательность $(l_1\omega_s), \ldots, (l_j\omega_s), \ldots$ Если она не ограничена, то теорема доказана. Если эта последовательность ограничена, то полагаем

$$A_s = \sup_{\substack{k=1,2,\ldots,s\\ j=1,2,\ldots}} |l_j\omega_k|.$$

Имеем $A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_s < \infty$. Каждому функционалу l_k последовательности (3.20) отвечает $\psi_k \in L_{p'}$, такая, что норма l_k равна $\|\psi_k\|_{L_{p'}}$. Так как последовательность (3.20) неограничена, и в силу этого $\{\|\psi_k\|\}$ неограничена, то в качестве m_{s+1} всегда можно выбрать такой l_k, чтобы выполнялись неравенства

$$\|\psi_s\|_{L_{p'}} > 1 \qquad (s = 1, 2, \ldots), \tag{3.24}$$

$$\|\psi_{s+1}\|_{L_{p'}}^{1/2} > 4(A_1 + \ldots + A_s), \tag{3.25}$$

$$\|\psi_{s+1}\|_{L_{p'}} > 3^{2(s+1-j)} \|\psi_j\|_{L_{p'}} \quad (j \leqslant s). \tag{3.26}$$

В силу (3.24) и (3.26) имеем $\|\psi_s\|_{L_{p'}} > 3^{2(s-1)}$, откуда следует, что ряд $\sum \alpha_s = \sum \|\psi_s\|^{-1/2}$ сходящийся и поэтому ряд (3.23) сходится в L_p. Поэтому

$$|m_s\omega_0| = \left| \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_j m_s \omega_j + \alpha_s m_s \omega_s + \sum_{j=s+1}^{\infty} \alpha_j m_s \omega_j \right| \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_s m_s \omega_s - \left| \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_j m_s \omega_j \right| - \left| \sum_{j=s+1}^{\infty} \alpha_j m_s \omega_j \right|. \tag{3.27}$$

Имеем

$$\alpha_s m_s \omega_s = \|\psi_s\|^{-1/2} \|\psi_s\| = \|\psi_s\|^{1/2}. \tag{3.28}$$

В силу (3.24), (3.25) имеем

$$\left| \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_j m_s \omega_j \right| < \sum_{j=1}^{s-1} |m_s \omega_j| \leqslant \sum_{j=1}^{s-1} A_j \leqslant \frac{1}{4} \|\psi_s\|^{1/2}. \tag{3.29}$$

Из (3.26), меняя обозначения, легко находим

$$\alpha_j = \|\psi_j\|^{-1/2} \leqslant \frac{1}{3^{j-s}} \|\psi_s\|^{-1/2}, \quad j > s,$$

откуда

$$\left| \sum_{j=s+1}^{\infty} \alpha_j m_s \omega_j \right| \leqslant \sum_{j=s+1}^{\infty} \frac{1}{3^{j-s}} \|\psi_s\|^{-1/2} \|\psi_s\| =$$

$$= \|\psi_s\|^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j} = \frac{\|\psi_s\|^{1/2}}{2}. \tag{3.30}$$

Тогда из (3.27), (3.28), (3.29), (3.30) получаем

$$|m_s\omega_0| > \frac{1}{4} \|\psi_s\|^{1/2} > \frac{3^{s-1}}{4},$$

откуда ясно, что $l_k\omega_0$ не может стремиться ни к какому пределу при возрастании k. Теорема 2 доказана.

Следовательно, если последовательность $\{l_k\}$ сходится слабо, то она не может быть неограниченной, и поэтому для всякой $\varphi \in L_p$ имеем

$$|l_0\varphi| = \left|\lim_{k\to\infty} l_k\varphi\right| = \lim_{k\to\infty} |l_k\varphi| \leqslant A\|\varphi\|, \tag{3.31}$$

где A — верхняя грань норм всех l_k. Таким образом, функционал l_0 ограничен и, следовательно, непрерывен. Теорема 1 о полноте L_p^* доказана.

Слабая сходимость в L_p. Последовательность функций $\{\varphi_k\}$ называется *слабо сходящейся* к функции φ_0, если для любого функционала $l \in L_p^*$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} l\varphi_k = l\varphi_0. \tag{3.32}$$

В пространстве L_p множество функционалов совпадает с пространством $L_{p'}$. Поэтому формула (3.32) имеет место в случае, если функционалы $l_k \in L_{p'}^*$, соответствующие φ_k, слабо сходятся к функционалу $l_0 \in L_{p'}^*$, соответствующему φ_0.

Мы имеем окончательно в пространстве L_p два вида сходимости: сильную и слабую, которую будем обозначать $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$. Очевидно, что из сильной сходимости $\varphi_k \Rightarrow \varphi_0$ следует слабая сходимость $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$. Обратное не всегда верно. Приведем пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно.

Пример. Пусть $\Omega = [0, 2\pi]$, $p = 2$, $\varphi_k(x) = \sin kx$. Тогда $\sin kx \rightarrow 0$, так как для любой функции $\psi \in L_2$

$$\int_0^{2\pi} \psi(x) \sin kx\, dx = \pi b_k \rightarrow 0,$$

поскольку ряд

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \int_0^{2\pi} \psi^2\, dx$$

сходится. Но $\sin kx \not\Rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, так как

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi \not\rightarrow 0.$$

Замечание. Теорему 2 можно формулировать в терминах слабой сходимости функций так: неограниченная по норме последовательность функций не может быть слабо сходящейся.

4. Компактность пространства L_p

1. Определение компактности. Множество M нормированного пространства называется *компактным*, если из всякой его бесконечной части можно выделить сходящуюся последовательность.

Примеры. 1. Всякое бесконечное ограниченное множество точек плоскости компактно (принцип Больцано — Вейерштрасса).

2. Компактность в пространстве непрерывных функций устанавливается в теореме Арцела: если семейство функций $\{\varphi\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то оно компактно в смысле равномерной сходимости (т. е. если $|\varphi| < A$ и по $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|\varphi(\vec{P}+\vec{Q}) - \varphi(\vec{P})| < \varepsilon$ для всех $\varphi \in \in \{\varphi\}$, лишь только $|\vec{Q}| < \delta(\varepsilon)$, то семейство $\{\varphi\}$ компактно).

Компактность в L_p. В соответствии с двумя видами сходимости, в L_p различают сильную и слабую компактность.

1. Множество функций $\{\varphi\} \subset L_p$ называется *слабо компактным*, если любая бесконечная его часть содержит слабо сходящуюся последовательность.

2. Множество функций $\{\varphi\} \subset L_p$ называется *сильно компактным*, если любая бесконечная его часть содержит сильно сходящуюся последовательность.

2. Теорема о слабой компактности.

Теорема. *Для того чтобы множество $X \subset L_p$ было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным* $(1 < p < \infty)$.

Доказательство необходимости. Необходимость условия следует просто из теоремы о слабой полноте пространства L_p.

Если множество X неограничено, то из него можно выделить последовательность $\{\varphi_k\}$ такую, что $\|\varphi_k\| \to \infty$, из которой на основании замечания к п. 4, § 3 невозможно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, и, следовательно, множество X не является слабо компактным.

Доказательство достаточности. Пусть для всех $\varphi \in X \subset L_p$

$$\|\varphi\| < A. \tag{4.1}$$

Рассмотрим сопряженное пространство $L_{p'}$. Оно сепарабельно (п. 4, § 2). Счетную, всюду плотную сеть в $L_{p'}$ обозначим

$$\psi_1, \ldots, \psi_k, \ldots \tag{4.2}$$

Пусть $\{\varphi_k\}$ — любая бесконечная последовательность, $\{\varphi_k\} \subset X$. Покажем, что из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Возьмем ψ_1 и образуем последовательность чисел $(\varphi_k, \psi_1) = \int\limits_\Omega \varphi_k \psi_1 \, dv = a_k^{(1)}$.

Эта последовательность чисел ограничена: $|a_k^{(1)}| \leqslant \leqslant A \|\psi_1\|$, и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, соответствующую подпоследовательности

$$\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(1)}, \ldots; \quad \int\limits_\Omega \varphi_k^{(1)} \psi_1 \, dv \to a^{(1)} \quad \text{при } k \to \infty.$$

Возьмем ψ_2. Последовательность чисел $a_k^{(2)} = (\varphi_k^{(1)}, \psi_2)$ ограничена, и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, соответствующую подпоследовательности $\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \ldots, \varphi_k^{(2)}, \ldots; \int\limits_\Omega \varphi_k^{(2)} \psi_2 \, dv \to a^{(2)}$ при $k \to \infty$.

Продолжая этот процесс, получим ряд сходящихся последовательностей чисел $a_k^{(s)}$ и соответствующих им функциональных последовательностей, являющихся частичными последовательностями $\{\varphi_k\}$ и таких, что последующая является подпоследовательностью предыдущей: $\{\varphi_k^{(s)}\} \subset \{\varphi_k^{(s-1)}\} \subset \{\varphi_k\}$, и

$$a_k^{(s)} = \int\limits_\Omega \varphi_k^{(s)} \psi_s \, dv \to a^{(s)}$$

при $k \to \infty$ и $s = 1, 2, 3, \ldots$

Диагональным процессом из них можно выбрать последовательность $\{\varphi_k^{(k)}\}$, слабо сходящуюся на всей счетной всюду плотной сети $\{\psi_s\}$, т. е.

$$l_k \psi_s = \int\limits_\Omega \varphi_k^{(k)} \psi_s \, dv \to a^{(s)} = l \psi_s \quad \text{при } k \to \infty \text{ и } s = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$|l\psi_s| \leqslant A \|\psi_s\|.$$

Сходимость $\{l_k\}$ на множестве $\{\psi_s\}$ влечет за собою сходимость везде.

В самом деле, любой элемент $\psi \in L_{p'}$ может быть представлен в виде

$$\psi = \psi_s + \psi',$$

где $\|\psi'\| < \varepsilon$, а ψ_s — элемент нашей сети (4.2). Тогда в силу ограниченности всех l_k имеем

$$|l_k\psi - l_k\psi_s| < A\varepsilon,$$
$$|l_m\psi - l_m\psi_s| < A\varepsilon$$

для любых k и m.

Далее

$$|l_m\psi - l_k\psi| \leqslant |l_k\psi_s - l_m\psi_s| + 2A\varepsilon,$$

и, выбрав достаточно большие m и k, получим

$$|l_m\psi - l_k\psi| < 3A\varepsilon,$$

откуда следует сходимость функционалов l_k на ψ. По доказанному ранее предел $l\psi$ является линейным функционалом в $L_{p'}$, и, следовательно, представим в виде $l\psi = \int \varphi_0\psi\, dv$. Таким образом, для всякой $\psi \in L_{p'}$ имеем $\int\limits_\Omega \varphi_k^{(k)}\psi\, dv \to \int\limits_\Omega \varphi_0\psi\, dv$ и, следовательно, для всякого функционала в L_p^* имеем $l\varphi_k^{(k)} \to l\varphi_0$. Таким образом, множество X слабо компактно, что и требовалось доказать.

3. Теорема о сильной компактности.

Теорема. *Для того чтобы множество $X \subset L_p$ $(1 < p < \infty)$ было сильно компактно, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $$\|\varphi\| < A \text{ для всех } \varphi \in X; \tag{4.3}$$

2) *множество X было бы равностепенно непрерывно в целом, т. е. по любому $\varepsilon > 0$ нашлось бы $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\varphi \in X$*

$$J_\varphi(\vec{Q}) = \int\limits_\Omega |\varphi(\vec{P} + \vec{Q}) - \varphi(\vec{P})|^p\, dv < \varepsilon, \tag{4.4}$$

лишь только $|\vec{Q}| < \delta(\varepsilon)$ (полагаем $\varphi = 0$ вне Ω).

Лемма. *Множество* $X \subset L_p$ $(1 < p < \infty)$ *является сильно компактным тогда и только тогда, когда по любому* $\varepsilon > 0$ *найдется конечная* ε*-сеть на* X*, т. е. найдется конечное число функций* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N(\varepsilon)} \in X$ *таких, что для любой* $\varphi \in X$ *среди них найдется такая функция* φ_s*, что* $\|\varphi - \varphi_s\| < \varepsilon$.

Доказательство необходимости. Пусть существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для него нельзя построить конечную ε_0-сеть. Это значит, что, каков бы ни был элемент $\varphi_1 \in X$, найдется $\varphi_2 \in X$ такой, что $\|\varphi_1 - \varphi_2\| > \varepsilon_0$. Элементы φ_1 и φ_2 не являются ε_0-сетью; следовательно, найдется такой $\varphi_3 \in X$, что

$$\|\varphi_1 - \varphi_3\| > \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad \|\varphi_2 - \varphi_3\| > \varepsilon_0.$$

Продолжая рассуждать таким образом, построим бесконечную последовательность $\{\varphi_k\} \subset X$ такую, что $\|\varphi_i - \varphi_k\| > \varepsilon_0$ для $i \neq k$. Очевидно, из нее нельзя выбрать сильно сходящуюся подпоследовательность, что противоречит предположению о сильной компактности множества X. Необходимость условия доказана.

Доказательство достаточности. Пусть X таково, что на нем можно построить конечную ε-сеть для любого $\varepsilon > 0$ (тем более это возможно для любой его части). Пусть $Y_1 \subset X$ — любое бесконечное множество. Строим на нем $(1/2)$-сеть $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_{N_1}^{(1)}$. Для любой $\varphi \in Y_1$ найдется $\varphi_k^{(1)}$ такая, что $\|\varphi - \varphi_k^{(1)}\| < 1/2$. Пусть $Y_1^{(s)}$ — множество функций $\in Y_1$ и отстоящих от $\varphi_s^{(1)}$ менее чем на $1/2^2$. По крайней мере одно из $Y_1^{(s)}$ бесконечное, так как Y — бесконечное множество. Обозначим его через Y_2 и строим на нем $1/2^2$-сеть. Повторяя этот процесс, получим на k-м шаге $Y_k \subset Y_{k-1} \subset \ldots \subset Y_1$ и на нем $(1/2^k)$-сеть: $\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \ldots, \varphi_{N_k}^{(k)}$. Пусть $\varphi', \varphi'' \in Y_k$, тогда $\|\varphi' - \varphi''\| \leqslant \|\varphi' - \varphi_k\| + \|\varphi'' - \varphi_k\| \leqslant 1/2^k + 1/2^k = 1/2^{k-1}$, т. е. любые две функции $\in Y_k$ отстоят друг от друга менее чем на $1/2^{k-1}$.

Последовательность функций $\{\varphi_k\}$, где $\varphi_k \in Y_k$, сильно сходится, так как $\|\varphi_{k+m} - \varphi_k\| < 1/2^{k-1} < \varepsilon$ при достаточно большом k ($\varphi_{k+m} \in Y_{k+m} \subset Y_k$ при любом m). Таким образом, из $Y_1 \subset X$ мы выделили сильно сходящуюся последовательность, и, следовательно, X компактно.

4. Доказательство теоремы о сильной компактности. Достаточность. Рассмотрим семейство $\{\varphi\}=X$, удовлетворяющее условиям (4.3) и (4.4). Строим семейство средних функций для всех $\varphi\in X$ посредством семейства ядер $\omega(\vec{Q}, h)$ (§ 2, п. 4):

$$\varphi_h(\vec{P})=\frac{1}{h^n\chi}\int\limits_{\Omega}\varphi(\vec{P}_1)\,\omega(\vec{P}-\vec{P}_1;\,h)\,dv_1. \tag{4.5}$$

По оценке п. 4, § 2 $\|\varphi_h-\varphi\|\leqslant KJ_\varphi(h)$, где K не зависит ни от выбора функции семейства, ни от параметра h ядра, а $J_\varphi(h)=\sup\limits_{|\vec{Q}|<h} J_\varphi(\vec{Q})$. Вследствие условия (4.4) по заданному $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $h\leqslant\delta(\varepsilon)$

$$\|\varphi_h-\varphi\|<\varepsilon/2 \text{ для всех } \varphi\in X. \tag{4.6}$$

Тогда $\varepsilon/2$-сеть для $\{\varphi_h\}$ будет ε-сетью для $\{\varphi\}$.

Если мы теперь установим компактность семейства средних функций, то на основании леммы отсюда будет следовать существование для средних функций конечной $\varepsilon/2$-сети. Значит, на множестве X можно построить конечную ε-сеть для любого ε. На основании той же леммы X будет компактным. Для того чтобы установить компактность $\{\varphi_h\}$, покажем, что $\{\varphi_h\}$ при заданном h равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Тогда по теореме Арцела оно компактно в смысле равномерной сходимости и тем более в смысле сходимости в L_p. Но при достаточно малом $|\vec{Q}|$ вследствие непрерывности ядра

$$|\omega(\vec{P}_1-\vec{P}-\vec{Q};\,h)-\omega(\vec{P}_1-\vec{P};\,h)|<\eta,$$

откуда

$$|\varphi_h(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi_h(\vec{P})|=$$

$$=\left|\frac{1}{\chi h^n}\int\limits_{\Omega}\varphi(\vec{P}_1)\,[\omega(\vec{P}_1-\vec{P}-\vec{Q};\,h)-\omega(\vec{P}_1-\vec{P};\,h)]\,dv_1\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1\eta}{\chi h^n}\left\{\int\limits_{\Omega}|\varphi(\vec{P}_1)|^p\,dv_1\right\}^{1/p}=\frac{C_1\eta}{\chi h^n}\|\varphi\|\leqslant\frac{C_1\eta}{\chi h^n}A,$$

и при достаточно малом $|\vec{Q}|$ и фиксированном h

$$|\varphi_h(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi_h(\vec{P})|<\varepsilon,$$

т. е. $\{\varphi_h\}$ равностепенно непрерывно.

Равномерная ограниченность следует из оценки

$$|\varphi_h(\vec{P})|\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\frac{1}{\chi h^n}\left[\int\limits_\Omega|\omega(\vec{P}_1-\vec{P};h)|^{p'}dv_1\right]^{1/p'}\left[\int\limits_\Omega|\varphi(\vec{P}_1)|^p dv_1\right]^{1/p}\right\}\leqslant\frac{C_2A}{\chi h^{n/p}}.$$

Таким образом, семейство $\{\varphi_h\}$ компактно, и по лемме в нем можно построить конечную $\varepsilon/2$-сеть. Она является конечной ε-сетью для X, и, следовательно, по лемме X сильно компактно, что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть X сильно компактно, тогда оно и слабо компактно и по теореме о слабой компактности для всех $\varphi\in X$; $\|\varphi\|<A$, т. е. доказана необходимость условия (4.3).

По лемме существует конечная $\varepsilon/3$-сеть $\{\varphi_k\}$ ($k=1,\ldots,N$). Каждая из функций φ_k непрерывна в целом, а так как их конечное число, то по данному ε можно указать такое $\delta(\varepsilon/3)>0$, что

$$\left[\int\limits_\Omega|\varphi_k(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi_k(\vec{P})|^p dv\right]^{1/p}<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(k=1,\ldots,N),$$

лишь только $|\vec{Q}|<\delta$.

Возьмем любую функцию $\varphi\in X$ и выберем ближайшую к ней φ_k из $\varepsilon/3$-сети. Используя неравенство Минковского, получим

$$\left[\int\limits_\Omega|\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p dv\right]^{1/p}=$$
$$=\left[\int\limits_\Omega|\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi_k(\vec{P}+\vec{Q})+\varphi_k(\vec{P}+\vec{Q})-\right.$$
$$\left.-\varphi_k(\vec{P})+\varphi_k(\vec{P})-\varphi(\vec{P})|^p dv\right]^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant\left[\int\limits_\Omega|\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi_k(\vec{P}+\vec{Q})|^p dv\right]^{1/p}+$$

$$+\left[\int_\Omega |\varphi_k(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi_k(\vec{P})|^p\,dv\right]^{1/p}+$$

$$+\left[\int_\Omega |\varphi_k(\vec{P})-\varphi(\vec{P})|^p\,dv\right]^{1/p}<$$

$$<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon \quad \text{при} \quad |\vec{Q}|<\delta,$$

т. е. для всех $\varphi\in X$ по заданному ε можно указать такое δ, что $J_\varphi(\vec{Q})<\varepsilon$, лишь только $|\vec{Q}|<\delta$, и, следовательно, доказана необходимость условия (4.4).

5. Обобщенные производные

1. Основные определения. Пусть φ задана в области Ω и суммируема по любой ограниченной области G такой, что $\overline{G}\subset\Omega$. Рассмотрим функцию ψ, непрерывную со всеми производными до порядка l включительно и равную тождественно нулю вне некоторой ограниченной области V_ψ такой, что $\overline{V}_\psi\subset\Omega$.

Если φ имеет непрерывные производные, то

$$\int_\Omega\left[\varphi\frac{\partial^l\psi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}+(-1)^{l+1}\psi\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right]dv=0. \qquad (5.1)$$

Пусть теперь мы ничего не знаем о существовании производных от φ и пусть существует функция $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$, суммируемая по любой ограниченной области G такой, что $\overline{G}\subset\Omega$, и удовлетворяющая равенству

$$\int_\Omega\left[\varphi\frac{\partial^l\psi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}+(-1)^{l+1}\psi\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\right]dv=0 \qquad (5.2)$$

для всех функций ψ из рассматриваемого класса. Тогда обозначаем

$$\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad (5.3)$$

и будем называть $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ *обобщенной производной* функции φ.

Замечание. Равенство (5.3) по основной лемме вариационного исчисления верно в обычном смысле почти везде, если φ имеет соответствующую производную и оправдано интегрирование по частям.

Может существовать лишь одна обобщенная производная $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ от функции φ. Если бы их было две: $\omega^{(1)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, $\omega^{(2)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, то на основании (5.2) имели бы

$$\int\limits_{\Omega} \left(\omega^{(1)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} - \omega^{(2)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\right) \psi dv = 0,$$

откуда в силу произвольности ψ получили бы $\omega^{(1)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \omega^{(2)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ почти везде. Таким образом, обобщенная производная определяется однозначно (с точностью до множества меры нуль).

Новое определение производной не совпадает с определением производной почти всюду, как показывают примеры.

Пример 1. Пусть $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, но не абсолютно непрерывна. Если бы $\varphi(x)$ имела обобщенную производную $\omega(x)$, то для всякой $\psi(x)$, непрерывной с первой производной и обращающейся в нуль вне $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < 1/2)$, имели бы равенство

$$\int\limits_0^1 \varphi \frac{d\psi}{dx}\, dx = -\int\limits_0^1 \omega(x) \psi(x)\, dx.$$

Пусть $\Omega(x) = \int\limits_0^x \omega(\xi)\, d\xi$. Тогда

$$-\int\limits_0^1 \omega(x) \psi(x)\, dx = \int\limits_0^1 \Omega(x) \frac{d\psi}{dx}\, dx,$$

и, следовательно,

$$\int\limits_0^1 [\varphi - \Omega(x)] \frac{d\psi}{dx}\, dx = 0,$$

откуда в силу произвольности $\frac{d\psi}{dx}$, удовлетворяющей лишь условию $\int\limits_0^1 \frac{d\psi}{dx}\, dx = 0$, вытекало бы, что $\varphi - \Omega(x) = C$, т. е. $\varphi = \Omega(x) + C$, и, следовательно, $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна, что противоречит предположению. Таким образом, $\varphi(x)$ не имеет обобщенной производной. Поэтому, если $\varphi(x)$ непрерывна, имеет почти везде производную $\frac{d\varphi}{dx}$, но не абсолютно непрерывна, то она не имеет обобщенной производной. Таким образом, из существования производной почти везде не следует существование обобщенной производной.

Пример 2. Рассмотрим функцию двух переменных $\varphi(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, где f_1 и f_2 непрерывные на всей прямой, но нигде не дифференцируемые функции; тогда $\varphi(x, y)$ не имеет производных в обычном смысле, но обобщенная производная $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}$ существует и равна 0 в любом прямоугольнике Ω: $a < x < b$, $c < y < d$. В самом деле,

$$\int_\Omega \varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\,dv = \int_\Omega f_1(x) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\,dv + \int_\Omega f_2(y) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\,dv.$$

Но $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$ на границе Ω, и поэтому

$$\int_\Omega f_1(x) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\,dv = \int_a^b f_1(x) \int_c^d \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\,dy\,dx = \int_a^b f_1(x) \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{y=c}^{y=d} dx = 0$$

и аналогично

$$\int_\Omega f_2(y) \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\,dv = 0.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega \varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\,dv = 0,$$

что и требовалось доказать.

2. Производные от средних функций. Существование обобщенных производных.

Теорема 1. *Пусть функция φ имеет обобщенную производную $\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ в области Ω. Тогда производная средней функции для φ равна средней функции для ее обобщенной производной:*

$$\frac{\partial^\alpha\varphi_h}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = \left[\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right]_h \tag{5.4}$$

на множестве Ω_h тех точек $\vec{P} \in \Omega$, расстояние от которых до границы области Ω больше h.

Доказательство. Так как

$$\varphi_h(\vec{P}) = \frac{1}{\chi h^n} \int\limits_{\Omega} \varphi(\vec{P}_1)\,\omega(\vec{P}_1 - \vec{P}; h)\,dv_1,$$

где $\vec{P} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{P}_1(y_1, \ldots, y_n)$, то

$$\frac{\partial^\alpha \varphi_h(\vec{P})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{\chi h^n} \int\limits_{\Omega} \varphi(\vec{P}_1) \frac{\partial^\alpha \omega(\vec{P}_1 - \vec{P}; h)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\,dv_1 =$$

$$= \frac{(-1)^\alpha}{\chi h^n} \int\limits_{\Omega} \varphi(\vec{P}_1) \frac{\partial^\alpha \omega(\vec{P}_1 - \vec{P}; h)}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}\,dv_1.$$

По определению обобщенной производной для всякой α раз непрерывно дифференцируемой функции ψ, которая обращается в нуль вне некоторой ограниченной области V_ψ такой, что $\overline{V}_\psi \subset \Omega$, имеем равенство (5.2). Если $\vec{P} \in \Omega_h$, то функция $\omega(\vec{P}_1 - \vec{P}; h)$ обращается в нуль вне шара $|\vec{P}_1 - \vec{P}| \leqslant h$, содержащегося в Ω. Взяв $\psi = \omega(\vec{P}_1 - \vec{P}; h)$, получим

$$\frac{\partial^\alpha \varphi_h(\vec{P})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{\chi h^n} \int\limits_{\Omega} \omega(\vec{P}_1 - \vec{P}; h) \frac{\partial^\alpha \varphi(\vec{P}_1)}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}\,dv_1 =$$

$$= \left[\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right]_h,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если φ суммируемая функция и $\dfrac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \in L_p$ в области Ω, то*

$$\frac{\partial^\alpha \varphi_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \Rightarrow \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \textit{при} \quad h \to 0$$

в L_p в любой области $G \subset \Omega$ такой, что расстояние от G до границы области Ω положительно.

Доказательство. Так как для достаточно малых h имеем $G \subset \Omega_h$, то это следует из свойств средних функций.

Теорема 2. *Если к данной функции φ, суммируемой в любой ограниченной области G такой, что $\overline{G}$ содержится в области Ω, можно приблизиться с помощью последовательности непрерывно дифференцируемых функций φ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ в том смысле, что для всякой функции ψ непрерывной и такой, что $\psi \equiv 0$ вне ограниченной области V_ψ и $\overline{V}_\psi \subset \Omega$, имеет место*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi_k(\vec{P})\, \psi(\vec{P})\, dv = \int_\Omega \varphi(\vec{P})\, \psi(\vec{P})\, dv \tag{5.5}$$

и если, кроме того,

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial^\alpha \varphi_k(\vec{P})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p dv < A(\Omega), \tag{5.6}$$

где $A(\Omega)$ не зависит от k, то в Ω существует обобщенная производная

$$\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Доказательство. Из ограниченности интегралов (5.6) вытекает слабая компактность в L_p последовательности $\left\{ \dfrac{\partial^\alpha \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\}$ и, следовательно, существует слабо сходящаяся подпоследовательность

$$\frac{\partial^\alpha \varphi_{k_i}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \to \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$$

(причем $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \in L_p$). Имеет место равенство

$$\int_\Omega \left\{ \varphi_{k_i} \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} + (-1)^{\alpha+1} \psi \frac{\partial^\alpha \varphi_{k_i}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\} dv = 0$$

для всех ψ непрерывных с производными до порядка α и обращающихся в нуль вне $V_\psi \subset \Omega$.

Переходя к пределу при $k_i \to \infty$, получим

$$\int_{\Omega} \left\{ \varphi \frac{\partial^{\alpha}\psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} + (-1)^{\alpha+1} \psi \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \right\} dv = 0,$$

что и доказывает теорему.

Замечание. В силу (3.31) $\int_{\Omega} \left| \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \right|^p dv \leqslant A(\Omega)$, так как $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \in L_p$ и является слабым пределом $\dfrac{\partial^{\alpha}\varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Следствие. *Если множество производных порядка α от средних функций слабо компактно, то данная функция имеет обобщенную производную порядка α.*

3. Правила дифференцирования. Из определения обобщенной производной вытекают следующие утверждения.

1. *Если φ_1 и φ_2 имеют обобщенные производные одного порядка* $\dfrac{\partial^{\alpha}\varphi_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ *и* $\dfrac{\partial^{\alpha}\varphi_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, *а c_1 и c_2 — постоянные, то $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ имеет обобщенную производную того же порядка*

$$\frac{\partial^{\alpha}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = c_1 \frac{\partial^{\alpha}\varphi_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} + c_2 \frac{\partial^{\alpha}\varphi_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Доказательство очевидно.

2. *Если φ имеет обобщенную производную* $\dfrac{\partial^{\alpha}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \omega(x_1, \ldots, x_n)$ *и $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ имеет обобщенную производную* $\dfrac{\partial^{\beta}\omega}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} = \lambda(x_1, \ldots, x_n)$, *то $\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ есть обобщенная производная от φ порядка $\alpha + \beta$:*

$$\lambda = \frac{\partial^{\alpha+\beta}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n+\beta_n}}.$$

Доказательство. Пусть ψ имеет непрерывные производные до $\alpha + \beta$ порядка во всем пространстве и равна нулю вне некоторой ограниченной области V_{ψ} такой, что $\overline{V}_\psi \subset \Omega$. Тогда $\dfrac{\partial^\beta \psi}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} = \psi_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ имеет непрерывные производные до порядка α и равна нулю вне V_ψ.

Из определения обобщенных производных следует

$$\int\limits_\Omega \lambda\psi\, dv = (-1)^\beta \int\limits_\Omega \omega \frac{\partial^\beta \psi}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}\, dv = (-1)^\beta \int\limits_\Omega \omega \psi_{\beta_1 \ldots \beta_n} dv =$$

$$= (-1)^{\alpha+\beta} \int\limits_\Omega \varphi \frac{\partial^\alpha \psi_{\beta_1 \ldots \beta_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\, dv =$$

$$= (-1)^{\alpha+\beta} \int\limits_\Omega \varphi \frac{\partial^{\alpha+\beta} \psi}{\partial x_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n+\beta_n}}\, dv,$$

что ввиду произвольности ψ и доказывает утверждение.

3. *Если* φ_1 *и* $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \in L_p$, φ_2 *и* $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \in L_{p'}$, *то произведение* $\varphi_1\varphi_2$ *имеет обобщенную производную*

$$\frac{\partial (\varphi_1\varphi_2)}{\partial x_1} = \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}.$$

Доказательство. В самом деле, $\varphi_1 \in L_p$ и $\varphi_2 \in L_{p'}$, и поэтому $\varphi_1\varphi_2$ суммируема. Аналогично суммируемы $\varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}$, $\varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ и $\varphi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \varphi_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$. Пусть φ_{1h} и φ_{2h} средние функции для φ_1 и φ_2. По свойству средних функций в любой G такой, что $\overline{G} \subset \Omega$, имеем

$$\varphi_{1h} \Rightarrow \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi_{1h}}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \quad \text{в} \quad L_p,$$

$$\varphi_{2h} \Rightarrow \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_{2h}}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \quad \text{в} \quad L_{p'}.$$

Пусть ψ непрерывна с производными первого порядка во всем пространстве и равна нулю вне $V_\psi \subset \Omega$. Пусть $|\psi|$, $\left|\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}\right| < A$. Тогда

$$\left|\int\limits_\Omega (\varphi_{1h}\varphi_{2h} - \varphi_1\varphi_2) \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\, dv\right| < A \int\limits_{V_\psi} |\varphi_{1h}\varphi_{2h} - \varphi_1\varphi_2|\, dv =$$

$$= A \int\limits_{V_\psi} |\varphi_{1h}(\varphi_{2h} - \varphi_2) + \varphi_2(\varphi_{1h} - \varphi_1)|\, dv \leqslant$$

$$\leqslant A\int\limits_{V_\psi}|\varphi_{1h}||\varphi_{2h}-\varphi_2|\,dv+A\int\limits_{V_\psi}|\varphi_2||\varphi_{1h}-\varphi_1|\,dv\leqslant$$

$$\leqslant A\left[\|\varphi_{1h}\|_{L_p}\|\varphi_{2h}-\varphi_2\|_{L_{p'}}+\|\varphi_2\|_{L_{p'}}\|\varphi_{1h}-\varphi_1\|_{L_p}\right]\to 0$$

при $h\to 0$,

т. е.

$$\int\limits_\Omega \varphi_{1h}\varphi_{2h}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,dv\to\int\limits_\Omega \varphi_1\varphi_2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,dv,\quad \text{при}\quad h\to 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_\Omega\left(\varphi_{1h}\frac{\partial\varphi_{2h}}{\partial x_1}+\varphi_{2h}\frac{\partial\varphi_{1h}}{\partial x_1}\right)\psi\,dv\to\int\limits_\Omega\psi\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)dv.$$

Тогда из очевидного равенства

$$\int\limits_\Omega \varphi_{1h}\varphi_{2h}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,dv=-\int\limits_\Omega\psi\left(\varphi_{1h}\frac{\partial\varphi_{2h}}{\partial x_1}+\varphi_{2h}\frac{\partial\varphi_{1h}}{\partial x_1}\right)dv$$

при $h\to 0$ следует, что

$$\int\limits_\Omega \varphi_1\varphi_2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,dv=-\int\limits_\Omega\psi\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)d\ ,$$

а это означает, что $\varphi_1\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\varphi_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}=\dfrac{\partial(\varphi_1\varphi_2)}{\partial x_1}$.

Замечание. Если φ_1 и φ_2 имеют непрерывные производные до порядка α, то

$$\frac{\partial^\alpha(\varphi_1\varphi_2)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}=\sum_{\beta=0}^{\alpha}\sum_{\Sigma\beta_i=\beta}C_{\beta_1\dots\beta_n}\frac{\partial^\beta\varphi_1}{\partial x_1^{\beta_1}\dots\partial x_n^{\beta_n}}\,\frac{\partial^{\alpha-\beta}\varphi_2}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}},$$

где $C_{\beta_1\dots\beta_n}$ — биномиальные коэффициенты.

Эта же формула верна, если φ_1 и φ_2 принадлежат соответственно L_p и $L_{p'}$ и имеют обобщенные производные, входящие в правую часть, причем производные от φ_1 принадлежат L_p, производные от φ_2 принадлежат $L_{p'}$. Доказательство аналогично только что приведенному.

4. Независимость от области. Пусть φ и λ — две заданные в области Ω функции, суммируемые по любой ограниченной области G такой, что $\overline{G}\subset\Omega$. Если λ есть обобщенная производная от φ:

$$\lambda = \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

в Ω, то λ есть обобщенная производная от φ в любой части Ω, что легко следует из определения обобщенной производной. Таким образом, хотя определение обобщенной производной «глобально», но ее характер в любой окрестности некоторой точки определяется локальными свойствами функции φ. Рассмотрим возможность расширения области первоначального определения обобщенной производной.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Пусть функции φ и λ заданы в области Ω и суммируемы по любой ограниченной области G такой, что $\overline{G} \subset \Omega$, причем в каждом шаре радиуса меньше некоторого $\delta > 0$, лежащем в Ω, λ есть обобщенная производная от φ:*

$$\lambda = \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Тогда λ есть обобщенная производная от φ в Ω.

Доказательство. Пусть $0 < h < \delta_1 \leqslant \delta$. Согласно теореме 1 из п. 2 $\lambda_h = \dfrac{\partial^\alpha \varphi_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ на Ω_{δ_1}. Рассмотрим теперь любую функцию ψ, непрерывную со всеми производными до порядка α включительно и равную тождественно нулю вне некоторой ограниченной области V_ψ такой, что $\overline{V}_\psi \subset \Omega$. Тогда $V_\psi \subset \Omega_{\delta_1}$ для некоторого $0 < \delta_1 \leqslant \delta$, следовательно,

$$\int\limits_{V_\psi} \psi \lambda_h \, dv = (-1)^\alpha \int\limits_{V_\psi} \varphi_h \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \, dv.$$

Так как при $h \to 0$ $\lambda_h \Rightarrow \lambda$ и $\varphi_h \Rightarrow \varphi$ в L_p на V_ψ, то, переходя к пределу, получим, что

$$\int\limits_{V_\psi} \psi \lambda \, dv = (-1)^\alpha \int\limits_{V_\psi} \varphi \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \, dv,$$

т. е.

$$\int\limits_{\Omega} \psi\lambda\, dv = (-1)^{\alpha} \int\limits_{\Omega} \varphi \frac{\partial^{\alpha}\psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\, dv,$$

и лемма доказана.

Пусть $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ две произвольные области. Очевидно,

$$\Omega_{\delta}^{(1)} + \Omega_{\delta}^{(2)} \subset (\Omega^{(1)} + \Omega^{(2)})_{\delta}.$$

Если, каково бы ни было $\delta > 0$, найдется δ' $(0 < \delta' < \delta)$ такое, что

$$(\Omega^{(1)} + \Omega^{(2)})_{\delta} \subset \Omega_{\delta'}^{(1)} + \Omega_{\delta'}^{(2)},$$

то пару областей $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ назовем *суммируемой.*

Теорема. *Пусть $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ — суммируемая пара областей, функция φ_1 определена в $\Omega^{(1)}$, φ_2 — в $\Omega^{(2)}$ и $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ в $\Omega^{(1)}\Omega^{(2)}$ (с точностью до множества меры нуль). Пусть φ_1 имеет в $\Omega^{(1)}$ обобщенную производную $\frac{\partial^{\alpha}\varphi_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ и φ_2 в $\Omega^{(2)}$ имеет обобщенную производную $\frac{\partial^{\alpha}\varphi_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Тогда функция φ, определенная в $\Omega^{(1)} + \Omega^{(2)}$ равенством*

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \text{\textit{в} } \Omega^{(1)}, \\ \varphi_2 & \text{\textit{в} } \Omega^{(2)}, \end{cases}$$

имеет в $\Omega^{(1)} + \Omega^{(2)}$ обобщенную производную, равную

$$\frac{\partial^{\alpha}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \lambda = \begin{cases} \dfrac{\partial^{\alpha}\varphi_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} & \text{\textit{в} } \Omega_1, \\[2ex] \dfrac{\partial^{\alpha}\varphi_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} & \text{\textit{в} } \Omega_2. \end{cases} \tag{5.7}$$

Доказательство. В силу того, что $\varphi_1 = \varphi_2$ в $\Omega^{(1)}\Omega^{(2)}$, имеем $\frac{\partial^{\alpha}\varphi_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha}\varphi_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ в $\Omega^{(1)}\Omega^{(2)}$, что следует из локального характера обобщенной производной. Поэтому правая часть формулы (5.7) непротиворечива в $\Omega^{(1)}\Omega^{(2)}$.

Очевидно, достаточно доказать, что λ есть обобщенная производная от φ в $(\Omega^{(1)}+\Omega^{(2)})_\delta$, где $\delta>0$ произвольно малое.

Так как пара областей $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ суммируема, то $(\Omega^{(1)}+\Omega^{(2)})_\delta \subset \Omega^{(1)}_{\delta'}+\Omega^{(2)}_{\delta'}$ для некоторого $\delta'>0$, и, следовательно, всякая точка $\vec{P}\in(\Omega^{(1)}+\Omega^{(2)})_\delta$ принадлежит по крайней мере одной из областей: $\Omega^{(1)}_{\delta'}, \Omega^{(2)}_{\delta'}$. Пусть $\vec{P}\in\Omega^{(1)}_{\delta'}$. Тогда шар $C_{\delta'}(\vec{P})\subset\Omega^{(1)}$, где λ совпадает с $\dfrac{\partial^\alpha\varphi_1}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ и φ совпадает с φ_1. Поэтому λ есть обобщенная производная от φ в $C_{\delta'}(\vec{P})$, какова бы ни была $\vec{P}\in(\Omega^{(1)}+\Omega^{(2)})_\delta$. На основании леммы λ есть обобщенная производная от φ в $(\Omega^{(1)}+\Omega^{(2)})_\delta$. В силу произвольности δ, λ есть обобщенная производная от φ в $\Omega^{(1)}+\Omega^{(2)}$ ([4]).

6. Свойства интегралов типа потенциалов

1. Интегралы типа потенциалов. Непрерывность. Пусть $f\in L_p$ $(p>1)$ во всем пространстве n измерений, причем $f\equiv 0$ вне некоторой ограниченной области Ω.

Построим функцию

$$U(\vec{Q})=\int\limits_{r\leqslant R} r^{-\lambda} f(\vec{P})\,dv_{\vec{P}}, \tag{6.1}$$

где λ — число, $\lambda<n$, $r=|\vec{P}-\vec{Q}|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$; $r<R$ — шар, содержащий область Ω.

Теорема. *Если* $\lambda<\dfrac{n}{p'}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1\right)$, $1<p<\infty$, *то* $U(\vec{Q})$ *непрерывна и в любой ограниченной области* ω *удовлетворяет неравенству*

$$|U(\vec{Q})|\leqslant K\|f\|_{L_p}, \tag{6.2}$$

где K *— постоянная, зависящая, вообще говоря, от* ω, *но не зависящая от* f.

Доказательство. Имеем $\lambda p'<n$. Поэтому интеграл $\int\limits_{r\leqslant h} r^{-\lambda p'}dv_{\vec{P}}$ сходится и стремится к нулю при $h\to 0$.

Пользуясь неравенством Гёльдера, получим

$$\left|\int\limits_{r<h} r^{-\lambda} f(\vec{P})\, dv_{\vec{P}}\right| \leqslant \left\{\int\limits_{r\leqslant h} |f|^p dv_{\vec{P}}\right\}^{1/p} \left\{\int\limits_{r\leqslant h} r^{-\lambda p'} dv_{\vec{P}}\right\}^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L_p} \left\{\int\limits_{r\leqslant h} r^{-\lambda p'} dv_{\vec{P}}\right\}^{1/p'} < \varepsilon, \qquad (6.3)$$

если h достаточно мало, независимо от положения точки $\vec{Q}$. Так как $U(\vec{Q}) = \int\limits_{h<r<R} r^{-\lambda} f(\vec{P}) dv_{\vec{P}} + \int\limits_{r<h} r^{-\lambda} f(\vec{P})\, dv_{\vec{P}}$ и первое слагаемое правой части есть непрерывная функция $\vec{Q}$, то и $U(\vec{Q})$ непрерывна как равномерный предел непрерывных функций *). Применяя к (6.1) неравенство Гёльдера, так же как и в (6.3), найдем

$$|U(\vec{Q})| \leqslant \|f\|_{L_p} \left\{\int\limits_{r\leqslant R} r^{-\lambda p'} dv_{\vec{P}}\right\}^{1/p'} = K \|f\|_{L_p},$$

т. е. оценку (6.2). Теорема доказана ([5]).

2. Принадлежность к L_{q^*}.

Теорема. *Рассмотрим гиперплоскость s измерений $y_{s+1} = \ldots = y_n = 0$, и пусть $\vec{Q}^{(s)}$ $(y_1, \ldots, y_s)$ — точки этой гиперплоскости. Тогда, если $1 < p < \infty, \lambda \geqslant \frac{n}{p'}$ и $\frac{s}{p} > \lambda - \frac{n}{p'}$, т. е. $s > n - (n - \lambda) p$, то $U(\vec{Q}^{(s)})$ суммируема (по любой конечной области E_s в гиперплоскости) со степенью q^*, где $q^* < q$, $\frac{s}{q} = \lambda - \frac{n}{p'}$, т. е. $q = \frac{sp}{n - (n - \lambda) p}$, и имеет место неравенство*

$$\|U(\vec{Q}^{(s)})\|_{L_{q^*}} \leqslant K_1 \|f\|_{L_p}, \qquad (6.4)$$

где K_1 — постоянная, не зависящая от f.

(В тех случаях, когда у нас одновременно будут встречаться пространства L_{q^*} в евклидовых пространствах с различным числом измерений, мы будем иногда обозначать эти пространства $L_{q^*,s}$.)

---

*) Более подробно об интегралах, зависящих от параметра, см. [212, лекция VII].

Доказательство. Из определения q следует, что $q > p$. Пусть q^* — некоторое число, удовлетворяющее неравенству

$$p < q^* < q.$$

Положим $\lambda = \frac{n}{p'} + \frac{s}{q^*} - 2\varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{q^*} - \frac{1}{q}\right) > 0$. Из (6.1) имеем

$$|U(\vec{Q})| \leqslant \int\limits_{r \leqslant R} \left(|f|^{\frac{p}{q^*}} r^{-\frac{s}{q^*}+\varepsilon}\right)\left(|f|^{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q^*}\right)}\right)\left(r^{-\frac{n}{p'}+\varepsilon}\right) dv_{\vec{P}},$$

и, применяя неравенство Гёльдера к трем множителям, положив $\lambda_1 = 1/q^*$, $\lambda_2 = \frac{q^* - p}{q^* p} = 1/p - 1/q^*$, $\lambda_3 = 1/p'$ (очевидно, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$), получим

$$|U(\vec{Q})| \leqslant \left\{\int\limits_{r \leqslant R} |f|^p r^{-s+q^*\varepsilon} dv_{\vec{P}}\right\}^{1/q^*} \left\{\int\limits_{r \leqslant R} |f|^p dv_{\vec{P}}\right\}^{1/p - 1/q^*} \times$$
$$\times \left\{\int\limits_{r \leqslant R} r^{-n+p'\varepsilon} dv_{\vec{P}}\right\}^{1/p'}.$$

Принимая во внимание, что интеграл $\int\limits_{r \leqslant R} r^{-n+p'\varepsilon} dv$ сходящийся (так как $n - \varepsilon p' < n$) и $\int\limits_{r \leqslant R} |f|^p dv_{\vec{P}} = \|f\|_{L_p}^p$, получим

$$|U(\vec{Q})| \leqslant K_1 \|f\|^{1-\frac{p}{q^*}} \left\{\int\limits_{r \leqslant R} |f|^p r^{-s+\varepsilon q^*} dv_{\vec{P}}\right\}^{1/q^*}. \qquad (6.5)$$

Возводя (6.5) в степень q^*, интегрируя по области E_s в гиперплоскости $y_{s+1} = y_{s+2} = \ldots = y_n = 0$ и переставляя порядок интегрирования, найдем

$$\int\limits_{E_s} |U(\vec{Q}^{(s)})|^{q^*} dv_{\vec{Q}^{(s)}} \leqslant$$
$$\leqslant K_1^{q^*} \|f\|^{q^*-p} \int\limits_{r \leqslant R} |f|^p \left[\int\limits_{E_s} r^{-s+\varepsilon q^*} dv_{\vec{Q}^{(s)}}\right] dv_{\vec{P}}. \qquad (6.6)$$

Покажем, что интеграл $\int\limits_{E_s} r^{-s+\varepsilon q^*} dv_{\vec{Q}^{(s)}}$ ограничен.

В самом деле, в полярных координатах в гиперплоскости $\vec{Q}^{(s)}$ имеем

$$r = \sqrt{\rho^2 + h^2}, \quad dv_{\vec{Q}^{(s)}} = \rho^{s-1} d\rho \, d\omega^{(s)}, \tag{6.7}$$

где h — расстояние от точки $\vec{P}$ до гиперплоскости, $d\omega^{(s)}$ — элемент телесного угла в плоскости вокруг основания перпендикуляра, опущенного из $\vec{P}$ на эту гиперплоскость.

Если χ_s — поверхность шара в s-мерном пространстве, $r \leqslant R$ при $Q \in E_s$, $P \in \Omega$, то

$$\int_{E_s} r^{-s+\varepsilon q^*} dv_{\vec{Q}^{(s)}} \leqslant$$

$$\leqslant \chi_s \int_0^{\sqrt{R^2 - h^2}} \left(\sqrt{\rho^2 + h^2}\right)^{-s+\varepsilon q^*} \rho^{s-1} d\rho \leqslant \chi_s \int_0^R \rho^{\varepsilon q^* - 1} d\rho = K_2.$$

Подставляя в (6.6) и обозначая $K_1 K_2^{1/q^*}$ через K, найдем

$$\| U(\vec{Q}^{(s)}) \|_{L_{q^*}} = \left\{ \int_{E_s} | U(\vec{Q}^{(s)}) |^{q^*} dv_{\vec{Q}^{(s)}} \right\}^{1/q^*} \leqslant K \| f \|_{L_p},$$

что и требовалось доказать.

Пусть $q_1 < q^*$. Тогда

$$\int_{E_s} | U(\vec{Q}^{(s)}) |^{q_1} dv_{\vec{Q}^{(s)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{E_s} | U(\vec{Q}^{(s)}) |^{q_1 \cdot \frac{q^*}{q_1}} dv_{\vec{Q}^{(s)}} \right]^{q_1/q^*} \left[\int_{E_s} dv_{\vec{Q}^{(s)}} \right]^{(q^* - q_1)/q^*},$$

откуда следует, что $\| U(\vec{Q}) \|_{L_{q_1}} \leqslant C \| U(\vec{Q}) \|_{L_{q^*}}$, и неравенство (6.4) справедливо для любого q^*. Следовательно, условие $q^* > p$ может быть отброшено и теорема полностью доказана [6,7].

Замечание. Постоянные K и K_1 в теоремах из п.п. 1 и 2 зависят исключительно от вида области, чисел λ, p, s, n, q^*, но не зависят от функции $f(\vec{P})$.

Если многообразие s измерений не является плоским, то соответствующая теорема может быть получена из предыдущей при помощи замены переменных. Нужно предположить, что существует такое преобразование координат, которое вносит лишь конечное искажение расстояний (т. е. в конечной части пространства можно указать такие числа $M > m > 0$, что $m < \rho/r < M$, где r — расстояние в старой системе, ρ — в новой) и которое преобразует рассматриваемое многообразие в плоское.

7. Пространства $L_p^{(l)}$ и $W_p^{(l)}$

1. Определения. 1. Линейное пространство всех функций φ, суммируемых на любом замкнутом ограниченном множестве, содержащемся в области Ω, имеющих в области Ω все обобщенные производные порядка l, суммируемые в степени $p \geqslant 1$, назовем пространством $W_p^{(l)}$:

$$\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \in L_p \text{ в } \Omega, \quad \sum \alpha_i = l.$$

2. Под $L_p^{(l)}$ будем понимать множество, элементами которого являются классы элементов из $W_p^{(l)}$, имеющих все одинаковые производные порядка l, т. е. φ_1 и φ_2 будем считать принадлежащими одному и тому же классу из $L_p^{(l)}$, если

$$\frac{\partial^l \varphi_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^l \varphi_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \left(\sum \alpha_i = l\right) \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

Элементы из $L_p^{(l)}$ будем обозначать буквой ψ. Функции φ одного и того же класса ψ будем называть эквивалентными между собой.

Элементы $L_p^{(l)}$ можно складывать и умножать на действительные числа. Тем самым $L_p^{(l)}$ образует векторное пространство.

Для умножения элемента ψ на постоянную достаточно умножить на нее все функции φ, входящие в класс ψ. Нетрудно видеть, что при этом мы снова получим элементы одного и того же класса.

Класс $\psi_1 + \psi_2$ получается, если мы сложим попарно все элементы из ψ_1 и ψ_2. Нетрудно видеть, что при этом снова будут получаться элементы одного и того же класса.

2. Норма в $L_p^{(l)}$. Под нормой элемента ψ из $L_p^{(l)}$ будем понимать число

$$\|\psi\|_{L_p^{(l)}} = \left\{\int_\Omega \left[\sum_{i_1\ldots i_l=1}^{n} \left(\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right]^{p/2} dv\right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\int_\Omega \left[\sum_{\Sigma\alpha_i=l} \frac{l!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}\left(\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2\right]^{p/2} dv\right\}^{1/p}, \quad (7.1)$$

где φ принадлежит классу ψ.

В некоторых случаях там, где это не вызывает недоумений, мы будем писать $\|\varphi\|_{L_p^{(l)}}$ для $\varphi \in W_p^{(l)}$, понимая под этим норму класса ψ, к которому принадлежит φ.

Отметим несколько простейших свойств нормы.

I. $\|a\varphi\| = |a|\cdot\|\varphi\|$, если a — число.

II. $\|\varphi_1+\varphi_2\| \leqslant \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ (неравенство треугольника).

III. $\|\varphi\| \geqslant 0$ и, если $\|\varphi\| = 0$, то φ эквивалентно нулю, т. е. представляет собою многочлен степени не выше $l-1$.

IV. Норма инвариантна при всяких ортогональных преобразованиях пространства $x_1, \ldots, x_n$.

Первое свойство совершенно очевидно. Докажем справедливость неравенства треугольника, для чего воспользуемся первым представлением нормы. Тогда, пользуясь тем, что (по неравенству Минковского при $p=2$)

$$\left[\sum\left(\frac{\partial^l \varphi_1}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}} + \frac{\partial^l \varphi_2}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum\left(\frac{\partial^l \varphi_1}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right]^{1/2} + \left[\sum\left(\frac{\partial^l \varphi_2}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right]^{1/2},$$

находим

$$\|\varphi_1+\varphi_2\|_{L_p^{(l)}} \leqslant \left\{\int_\Omega \left[\left(\sum\left(\frac{\partial^l \varphi_1}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right)^{1/2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\sum\left(\frac{\partial^l \varphi_2}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right)^{1/2}\right]^p dv\right\}^{1/p}.$$

Применяя неравенство Минковского вторично, получим

$$\|\varphi_1+\varphi_2\|_{L_p^{(l)}} \leqslant \left\{\int_\Omega \left[\sum\left(\frac{\partial^l\varphi_1}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right]^{p/2} dv\right\}^{1/p} +$$

$$+\left\{\int_\Omega \left[\sum\left(\frac{\partial^l\varphi_2}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right]^{p/2} dv\right\}^{1/p} = \|\varphi_1\|_{L_p^{(l)}} + \|\varphi_2\|_{L_p^{(l)}}.$$

Третье свойство нормы следует из того, что если все обобщенные производные порядка l некоторой функции φ равны нулю, то обращаются в нуль все производные порядка l от средних функций φ_h на Ω_k. Значит, средние функции есть многочлены степени не выше $l-1$. Но пределом последовательности многочленов степени не выше $l-1$ могут быть только многочлены степени не выше $l-1$, и, следовательно, φ есть многочлен степени не выше $l-1$ и эквивалентна нулю.

Инвариантность нормы при ортогональных преобразованиях координат легко следует из первого представления нормы, так как выражение $\sum\limits_{i_1,\ldots,i_l=1}^{n}\left(\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2$ есть один из инвариантов тензора $\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}} = \nabla_{i_1}\ldots{}_{i_l}\varphi$.

Отметим еще два неравенства:

$$\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant K_1 \max_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\left\|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right\|_{L_p}, \tag{7.2}$$

$$\left\|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right\|_{L_p} \leqslant \|\varphi\|_{L_p^{(l)}}. \tag{7.3}$$

В самом деле, неравенство (7.3) очевидно. Неравенство (7.2) следует из того, что

$$\sum_{i_1,\ldots,i_l=1}^{n}\left(\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2 \leqslant \left[\sum_{i_1,\ldots,i_l=1}^{n}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right|\right]^2.$$

Применяя неравенство Минковского к правой части последнего неравенства, получим

$$\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i_1,\ldots,i_l=1}^{n} \left\| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}} \right\|_{L_p} \leqslant K_1 \max_{i_1,\ldots,i_l} \left\| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}} \right\|_{L_p},$$

где K_1 есть число слагаемых в последней сумме. Таким образом, (7.2) доказано.

После введения нормы множество $L_p^{(l)}$ становится нормированным функциональным пространством. Далее мы введем норму и в $W_p^{(l)}$. Поэтому мы можем с самого начала считать $W_p^{(l)}$ нормированным функциональным пространством.

3. Разложение $W_p^{(l)}$ и его нормировка. Рассмотрим еще пространство S_l всех многочленов степени не выше $l-1$. Это пространство представляет собою, очевидно, подпространство в пространстве $W_p^{(l)}$. Пространство $L_p^{(l)}$ является, говоря алгебраически, фактор-пространством пространства $W_p^{(l)}$ по пространству S_l.

Проекционным оператором в пространстве $W_p^{(l)}$ называется оператор, квадрат которого совпадает с ним самим:

$$\Pi^2\varphi = \Pi\Pi\varphi = \Pi\varphi.$$

Если некоторый проекционный оператор Π_1 переводит пространство $W_p^{(l)}$ во все пространство S_l, то он будет на S_l тождественным оператором.

С помощью каждого такого проекционного оператора легко построить некоторое разложение пространства $W_p^{(l)}$. Положим $\Pi_1^*\varphi = \varphi - \Pi_1\varphi$, т. е. $\Pi_1^* = E - \Pi_1$, где E — тождественный оператор.

Оператор Π_1^* является, в свою очередь, проекционным. В самом деле,

$$\Pi_1^*\Pi_1^* = (E - \Pi_1)(E - \Pi_1) =$$

$$= E - 2\Pi_1 + \Pi_1^2 = E - \Pi_1 = \Pi_1^*,$$

что и требовалось доказать.

Любой элемент φ из $W_p^{(l)}$ может быть представлен в форме

$$\varphi = \Pi_1\varphi + \Pi_1^*\varphi.$$

Элементы вида $\varphi^* = \Pi_1^* \varphi$ образуют подпространство в векторном пространстве $W_p^{(l)}$, ибо сумма двух таких элементов $\Pi_1^*\varphi_1 + \Pi_1^*\varphi_2$ может быть представлена в виде $\Pi_1^*(\varphi_1 + \varphi_2)$ и, следовательно, опять принадлежит этому подпространству.

Нетрудно видеть, что пространство элементов вида $\Pi_1^*\varphi$ изоморфно пространству $L_p^{(l)}$, ибо каждому классу из $L_p^{(l)}$ будет отвечать только один элемент вида $\Pi_1^*\varphi$. Это следует из того, что $\Pi_1^*\varphi = 0$, если $\varphi \in S_l$. Сумма элементов вида $\Pi_1^*\varphi$ отвечает сумме классов из $L_p^{(l)}$ и наоборот. Аналогично умножение на постоянную соответствующих элементов приводит снова к соответствующим элементам.

Пространство S_l можно нормировать, как и всякое конечномерное пространство. Удобно определить в нем норму, например, следующим образом. Пусть P — многочлен степени ниже l, имеющий вид

$$P = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{\Sigma\alpha_s = k} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Тогда положим

$$\| P \|_{S_l}^p = \sum_{k=0}^{l-1} \left\{ \sum_{\Sigma\alpha_s = k} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^2 \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \right\}^{p/2}. \qquad (7.4)$$

Определенная таким образом норма инвариантна при повороте осей координат, однако в отличие от рассмотренной нормы в $L_p^{(l)}$ она уже не будет инвариантна при переносе начала. В самом деле, величина $\sum \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^2$ есть один из инвариантов тензора $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ и поэтому сохраняет свою величину при ортогональных преобразованиях.

Можно проверить, что для такой нормы выполняются все три основных условия:

а) $\|P_1 + P_2\| \leqslant \|P_1\| + \|P_2\|$;

б) $\|aP\| = |a| \cdot \|P\|$;

в) $\|P\| \geqslant 0$; если $\|P\| = 0$, то $P = 0$.

Выполнение условий б) и в) очевидно. Установим еще неравенство треугольника.

Пусть

$$P_1 = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{\Sigma\alpha_s = k} a^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$P_2 = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{\Sigma\alpha_s = k} a^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Имеем

$$\|P_1 + P_2\|^p = \sum_{k=0}^{l-1} \left\{ \sum_{\Sigma\alpha_s = k} \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \left[a^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} + a^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \right]^2 \right\}^{p/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{l-1} \left\{ \left[\sum_{\Sigma\alpha_s = k}^{*} a^{(1)^2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \right]^{1/2} + \left[\sum_{\Sigma\alpha_s = k}^{*} a^{(2)^2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \right]^{1/2} \right\}^p,$$

$$\|P_1 + P_2\| \leqslant \left\{ \left\{ \sum_{k=0}^{l-1} \left\{ \left[\sum_{\Sigma\alpha_s = k}^{*} a^{(1)^2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \right]^{1/2} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left[\sum_{\Sigma\alpha_s = k}^{*} a^{(2)^2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \right]^{1/2} \right\}^p \right\} \right\}^{1/p} \leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{l-1} \left[\sum_{\Sigma\alpha_s = k}^{*} a^{(1)^2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \right]^{p/2} \right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{ \sum_{k=0}^{l-1} \left[\sum_{\Sigma\alpha_s = k}^{*} a^{(2)^2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \right]^{p/2} \right\}^{1/p},$$

что и требовалось доказать (здесь через $\sum^*$ обозначено суммирование с весом $\frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}$).

Установление нормы в S_l позволяет нам произвести также и нормировку пространства $W_p^{(l)}$. Эта нормировка может быть выполнена, если нам дан какой-нибудь проекционный оператор.

Естественно положить

$$\|\varphi\|^p_{W_p^{(l)}} = \|\Pi_1\varphi\|^p_{S_l} + \|\Pi_1^*\varphi\|^p_{L_p^{(l)}} = \|\Pi_1\varphi\|^p_{S_l} + \|\varphi\|^p_{L_p^{(l)}}. \quad (7.5)$$

Такой способ введения нормы зависит от заданного проекционного оператора. Позднее мы займемся вопросом о том, в каком соотношении между собой будут находиться нормы, построенные при помощи различных проекционных операторов. Пока нам нужно проверить, что три основных свойства нормы при нашем определении выполнены.

В самом деле, очевидно, $\|a\varphi\|_{W_p^{(l)}} = |a| \|\varphi\|_{W_p^{(l)}}$. Далее, если $\|\varphi\|_{W_p^{(l)}} = 0$, то $\varphi = 0$ почти всюду.

Неравенство треугольника следует с очевидностью из неравенства Минковского.

4. Специальное разложение $W_p^{(l)}$. Для наших целей полезно изучить подробно один специальный вид проекционного оператора Π_1. Этим мы и займемся. Вначале мы наложим некоторые ограничения на ту область пространства, в которой мы изучаем наши функции.

Пусть Ω есть звездная область относительно шара C радиуса H, лежащего внутри Ω, т. е. отрезок, соединяющий любую точку шара C и любую точку области Ω, принадлежит Ω. Для удобства положим сначала, что центр этого шара лежит в начале координат, и будем предполагать, что $\overline{C} \subset \Omega$.

Пусть P и $\vec{Q}$ — две произвольные точки Ω. Положим $r = |\vec{P} - \vec{Q}|$ и $\vec{l} = (\vec{Q} - \vec{P})/r$ — единичный вектор, имеющий направление из $\vec{P}$ в $\vec{Q}$. Каждую функцию двух переменных точек $\mu(\vec{Q}, \vec{P})$ можно представить как функцию $\vec{P}$, $\vec{l}$ и r, полагая $\vec{Q} = \vec{P} + r\vec{l}$ и

$$\mu(\vec{Q}, \vec{P}) = \mu(\vec{P} + r\vec{l}, \vec{P}) = \overline{\mu}(r, \vec{l}, \vec{P}),$$

где черта над μ означает, что $\vec{Q}$ заменено через $\vec{P}$, r, $\vec{l}$. Наоборот, всякую функцию $\overline{\mu}(r, \vec{l}, \vec{P})$ можно представить в виде функции $\vec{Q}$ и $\vec{P}$.

Введем в рассмотрение функцию

$$v(\vec{Q}) = \begin{cases} e^{R^2/(R^2-H^2)} & \text{при } R < H, \\ 0 & \text{при } R \geqslant H, \end{cases}$$

где R — расстояние от начала координат до точки $\vec{Q}$. Функция $v(\vec{Q})$ непрерывна вместе с производными всех порядков и отлична от нуля лишь в шаре C.

Образуем новую функцию двух точек $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, положив

$$\bar{\chi}(r, \vec{l}, \vec{P}) = \chi(\vec{Q}, \vec{P}) = -\int\limits_{|\vec{Q}-\vec{P}|}^{\infty} v(\vec{P} + r_1\vec{l})\, r_1^{n-1} dr_1 =$$

$$= -\int\limits_{r}^{\infty} \bar{v}(r_1, \vec{l}, \vec{P})\, r_1^{n-1} dr_1. \quad (7.6)$$

Интеграл, очевидно, вырождается в интеграл в конечных пределах, так как $\bar{v}$ отлична от нуля лишь в конечной области.

Отметим, что когда r_1 пробегает интервал (r, ∞), точка $\vec{P} + r_1\vec{l}$ пробегает луч, исходящий из точки $\vec{Q}$ в направлении вектора $\vec{l}$. Если этот луч не пересекает шар C, то $\bar{\chi}(r, \vec{l}, \vec{P}) = 0$. Таким образом, при фиксированном $\vec{P}$ функция $\bar{\chi}(r, \vec{l}, \vec{P})$ отлична от нуля лишь для тех r и $\vec{l}$, для которых $\vec{Q} = \vec{P} + r\vec{l}$ лежит внутри области, состоящей из точек всех интервалов, соединяющих точку $\vec{P}$ и точки шара C (рис. 5). Очевидно, что функция $\bar{\chi}(r, \vec{l}, \vec{P})$ непрерывно дифференцируема. Введем еще одну функцию

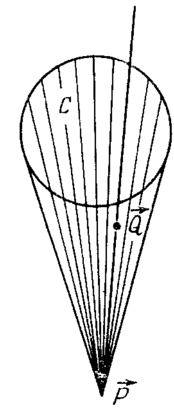

Рис. 5

$$\bar{\psi}(r, \vec{l}, \vec{P}) = \frac{1}{(l-1)!} r^{l-1} \bar{\chi}(r, \vec{l}, \vec{P}).$$

Какова бы ни была теперь функция φ, непрерывно дифференцируемая до порядка l в области Ω, мы можем привести ей в соответствие функцию $\bar{\Phi}$ по формуле

$$\bar{\Phi} = \bar{\varphi} \frac{\partial^{l-1}\bar{\psi}}{\partial r^{l-1}} - \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial r} \frac{\partial^{l-2}\bar{\psi}}{\partial r^{l-2}} + \ldots + (-1)^{l-1} \frac{\partial^{l-1}\bar{\varphi}}{\partial r^{l-1}} \bar{\psi}.$$

Очевидно, имеем

$$\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial r} = \bar{\varphi} \frac{\partial^{l}\bar{\psi}}{\partial r^{l}} + (-1)^{l-1} \frac{\partial^{l}\bar{\varphi}}{\partial r^{l}} \psi. \quad (7.7)$$

Кроме того,

$$\overline{\psi}\Big|_{r=0} = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial r}\Big|_{r=0} = \ldots = \frac{\partial^{l-2}\overline{\psi}}{\partial r^{l-2}}\Big|_{r=0} = 0.$$

Вычисляя $\dfrac{\partial^{l-1}\overline{\psi}}{\partial r^{l-1}}$, получим

$$\frac{\partial^{l-1}\overline{\psi}}{\partial r^{l-1}}\Big|_{r=0} = \overline{\chi}(0, \vec{l}, \vec{P}) = -\int_0^\infty \overline{v}(r_1, \vec{l}, \vec{P})\, r_1^{n-1}dr_1,$$

откуда следует, что

$$\overline{\Phi}(0, \vec{l}, \vec{P}) = -\varphi(\vec{P})\int_0^\infty \overline{v}(r_1, \vec{l}, \vec{P})\, r_1^{n-1}dr_1,$$

$$\overline{\Phi}(\infty, \vec{l}, \vec{P}) = 0.$$

Интегрируя (7.7) по r от 0 до ∞, пайдем

$$\varphi(\vec{P})\int_0^\infty \overline{v}(r_1, \vec{l}, \vec{P})\, r_1^{n-1}dr_1 = \int_0^\infty \left[\overline{\varphi}\frac{\partial^l\overline{\psi}}{\partial r^l} + (-1)^{l-1}\frac{\partial^l\overline{\varphi}}{\partial r^l}\overline{\psi}\right]dr. \tag{7.8}$$

Домножив (7.8) на элемент телесного угла $d\omega_{\vec{l}}$ и интегрируя по единичной сфере, получим

$$\varphi(\vec{P})\int_{\omega_{\vec{l}}} d\omega_{\vec{l}}\int_0^\infty \overline{v}(r_1, \vec{l}, \vec{P})\, r_1^{n-1}dr_1 = \int_{\omega_{\vec{l}}} d\omega_{\vec{l}}\int_0^\infty \left[\overline{\varphi}\frac{\partial^l\overline{\psi}}{\partial r^l} + (-1)^{l-1}\frac{\partial^l\overline{\varphi}}{\partial r^l}\overline{\psi}\right]dr.$$

Принимая во внимание, что $r_1^{n-1}dr_1 d\omega_{\vec{l}} = dv_{\vec{Q}}$, где $dv_{\vec{Q}}$ — элемент объема в точке $\vec{Q}$, найдем

$$\int_{\omega_{\vec{l}}} d\omega_{\vec{l}}\int_0^\infty \overline{v}(r_1, \vec{l}, \vec{P})\, r_1^{n-1}\, dr_1 = \int_{R \leqslant H} \overline{v}(\vec{Q})\, dv_{\vec{Q}} = \chi \neq 0,$$

т. е. величина этого интеграла не зависит от положения точки $\vec{P}$. Таким образом, получаем

$$\varphi(\vec{P}) = \frac{1}{\chi} \int\limits_{\omega_{\vec{l}}} d\omega_{\vec{l}} \int\limits_0^\infty \left[\bar{\varphi} \frac{\partial^l \bar{\psi}}{\partial r^l} + (-1)^{l-1} \frac{\partial^l \bar{\varphi}}{\partial r} \bar{\psi} \right] dr$$

или, вводя $dv_{\vec{Q}}$ в интегралы справа, получим

$$\varphi(\vec{P}) = \\ = \frac{1}{\chi} \int\limits_\Omega \bar{\varphi} \frac{\partial^l \bar{\psi}}{\partial r^l} \frac{1}{r^{n-1}} dv_{\vec{Q}} + \frac{(-1)^{l-1}}{\chi} \int\limits_\Omega \bar{\psi} \frac{\partial^l \bar{\varphi}}{\partial r^l} \frac{1}{r^{n-1}} dv_{\vec{Q}}. \tag{7.9}$$

Покажем, что первый интеграл в (7.9) есть многочлен степени $\leqslant l-1$ относительно координат $x_1, \ldots, x_n$ точки $\vec{P}$.

Действительно, из определения $\bar{\psi}$ следует, что

$$\frac{\partial^l \bar{\psi}}{\partial r^l} = -\sum_{k=1}^{l} B_k \frac{\partial^{l-k} r^{l-1}}{\partial r^{l-k}} \frac{\partial^k}{\partial r^k} \int\limits_r^\infty \bar{v}(r_1, \vec{l}, \vec{P})\, r_1^{n-1} dr_1 = \\ = \sum_{k=1}^{l} C_k r^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial r^{k-1}} (r^{n-1} \bar{v}(r, \vec{l}, \vec{P})) = \\ = \sum_{k=1}^{l} \sum_{s=0}^{k-1} D_{k,s} r^{k-1} r^{n-k+s} \frac{\partial^s \bar{v}(r, \vec{l}, \vec{P})}{\partial r^s} = \\ = \sum_{k=1}^{l} \sum_{s=0}^{k-1} D_{k,s} r^{n-1+s} \frac{\partial^s \bar{v}(r, \vec{l}, \vec{P})}{\partial r^s}, \tag{7.10}$$

где B_k, C_k, $D_{k,s}$ — постоянные числа (биномиальные коэффициенты и их комбинации).

Но $\bar{v}(r, \vec{l}, \vec{P}) = v(\vec{Q})$, где положено $\vec{Q} = \vec{P} + r\vec{l}$, $\vec{Q} = (y_1, \ldots, y_n)$. Поэтому $\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial r} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial v}{\partial y_j} l_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial v}{\partial y_j} \dfrac{y_j - x_j}{r}$, где $l_j = \dfrac{y_j - x_j}{r}$ — проекция $\vec{l}$, и аналогично находим

$$\frac{\partial^s \bar{v}}{\partial r^s} = \sum_{i_1, \ldots, i_s = 1}^{n} \frac{\partial^s v}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_s}} l_{i_1} \ldots l_{i_s} = \\ = \frac{1}{r^s} \sum_{\Sigma \alpha_i = s} C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \frac{\partial^s v}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} (y_1 - x_1)^{\alpha_1} \ldots (y_n - x_n)^{\alpha_n}.$$

Подставляя в (7.10), получаем

$$\frac{\partial^l \overline{\psi}}{\partial r^l} = r^{n-1} \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(y_1, \ldots, y_n),$$

где $\zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(y_1, \ldots, y_n)$ — ограниченная и непрерывная функция от $(y_1, \ldots, y_n)$:

$$\zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_i \leqslant \beta_i \\ \Sigma\beta_i \leqslant l-1}} C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{\beta_1 \ldots \beta_n} \frac{\partial^{\beta_1 + \ldots + \beta_n} v}{\partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial y_n^{\beta_n}} y_1^{\beta_1 - \alpha_1} \ldots y_n^{\beta_n - \alpha_n}.$$

Поэтому первый интеграл в (7.9) примет вид

$$\frac{1}{\chi} \int_\Omega \overline{\varphi} \frac{\partial^l \overline{\psi}}{\partial r^l} \frac{1}{r^{n-1}} dv_{\vec{Q}} =$$

$$= \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{1}{\chi} \int_\Omega \varphi(\vec{Q}) \zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q})\, dv_{\vec{Q}},$$

т. е. он представляет собою многочлен степени $\leqslant l-1$ относительно $x_1, \ldots, x_n$. Заметим, что $\zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q}) \equiv 0$ вне шара C, так как этим свойством обладают $v(\vec{Q})$ и ее производные.

Оператор

$$\Pi_1 \varphi = \frac{1}{\chi} \int_\Omega \overline{\varphi} \frac{\partial^l \overline{\psi}}{\partial r^l} \frac{1}{r^{n-1}} dv_{\vec{Q}}$$

обладает тем свойством, что он переводит любой многочлен степени не выше $l-1$ в самого себя. В этом легко убедиться, заметив, что при подстановке в (7.9) такого многочлена второе слагаемое исчезает. Следовательно, $\Pi_1\varphi$ есть проекционный оператор, и формула (7.9) дает интересующее нас разложение.

Переходим к изучению второго интеграла в (7.9), т. е. к изучению оператора $\Pi_1^*\varphi$. Для этого заметим, что

$$\frac{\partial^l \overline{\varphi}}{\partial r^l} = \sum_{\Sigma\alpha_i = l} C_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \frac{(y_1 - x_1)^{\alpha_1} \ldots (y_n - x_n)^{\alpha_n}}{r^l} \frac{\partial^l \varphi}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}.$$

Последняя формула получается так же, как и для $\dfrac{\partial^s \overline{v}}{\partial r^s}$.

Далее отсюда следует, что

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial^l\overline{\varphi}}{\partial r^l}\overline{\psi}=$$

$$=\frac{1}{r^{n-1+l}}\sum_{\Sigma\alpha_i=l}C_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(y_1-x_1)^{\alpha_1}\ldots(y_n-x_n)^{\alpha_n}\overline{\psi}\times$$

$$\times\frac{\partial^l\overline{\varphi}}{\partial y_1^{\alpha_1}\ldots\partial y_n^{\alpha_n}}=\sum_{\Sigma\alpha_i=l}\mu_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\vec{Q},\vec{P})\frac{\partial^l\overline{\varphi}}{\partial y_1^{\alpha_1}\ldots\partial y_n^{\alpha_n}}.$$

Имеем

$$\mu_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\vec{Q},\vec{P})=C_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\frac{(y_1-x_1)^{\alpha_1}\ldots(y_n-x_n)^{\alpha_n}}{r^{n-1+l}}\overline{\psi}=$$

$$=C_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\frac{l_1^{\alpha_1}\ldots l_n^{\alpha_n}}{r^{n-1}}\overline{\psi}=$$

$$=\frac{1}{r^{n-l}}[C^1_{\alpha_1\ldots\alpha_n}l_1^{\alpha_1}\ldots l_n^{\alpha_n}\overline{\chi}(r,\vec{l},\vec{P})]=$$

$$=\frac{1}{r^{n-l}}\overline{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r,\vec{l},\vec{P}),$$

где $\overline{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r,\vec{l},\vec{P})$ — ограниченная и сколь угодно раз непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Рассматриваемая как функция от $\vec{Q}$, $\vec{P}$, она является ограниченной функцией своих аргументов. Тогда второй интеграл в (7.9) принимает вид

$$\frac{(-1)^{l-1}}{\chi}\int_\Omega\frac{1}{r^{n-1}}\sum_{\Sigma\alpha_i=l}w_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\vec{Q},\vec{P})\frac{\partial^l\varphi(\vec{Q})}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}dv_{\vec{Q}}.\quad(7.11)$$

Относя коэффициенты $1/\chi$ и $(-1)^{l-1}/\chi$ к функциям ζ и w, перепишем (7.9) в виде

$$\varphi(\vec{P})=\sum_{\Sigma\alpha_i\leqslant l-1}x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\int_C\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\vec{Q})\varphi(\vec{Q})\,dv_{\vec{Q}}+$$

$$+\int_\Omega\frac{1}{r^{n-l}}\sum_{\Sigma\alpha_i=l}w_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\vec{Q},\vec{P})\frac{\partial^l\varphi(\vec{Q})}{\partial y_1^{\alpha_1}\ldots\partial y_n^{\alpha_n}}dv_{\vec{Q}}.\quad(7.12)$$

Формула (7.12) доказана нами для функций, имеющих непрерывные производные до порядка l. Нетрудно убедиться в том, что почти для всех $x \in \Omega$ она остается справедливой для любой функции из $W_p^{(l)}$. Действительно, пусть $\varphi \in W_p^{(l)}$ и φ_h — ее средняя функция. Для φ_h справедливо (7.12), т. е. имеем

$$\varphi_h(\vec{P}) = \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \int_C \zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q})\, \varphi_h(\vec{Q})\, dv_{\vec{Q}} +$$

$$+ \int_\Omega \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma\alpha_i = l} w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \frac{\partial^l \varphi_h(\vec{Q})}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}\, dv_{\vec{Q}} = S^{(h)} + \varphi^{*(h)}. \quad (7.13)$$

Обозначим

$$S(\vec{P}) = \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \int_C \zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q})\, \varphi(\vec{Q})\, dv_{\vec{Q}},$$

$$\varphi^*(\vec{P}) = \int_\Omega \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma\alpha_i = l} w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q}, \vec{P})\, \frac{\partial^l \varphi(\vec{Q})}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}\, dv_{\vec{Q}}.$$

Очевидно, что $\int_C \zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \varphi_h dv_{\vec{Q}} \to \int_C \zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \varphi dv_{\vec{Q}}$ при $h \to 0$ и, следовательно, $S^{(h)} \to S$ равномерно в Ω.

Будем предполагать сначала, что функция $\varphi \in W_p^{(l)}$ в Ω и равна нулю в окрестности ее границы. Тогда согласно теореме из п. 2, § 5

$$\left\| \frac{\partial^l \varphi_h}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} - \frac{\partial^l \varphi}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_p} \to 0, \quad h \to 0,$$

в Ω. Следовательно, если $lp > n$, то из оценки (6.2) вытекает, что $\varphi^{*(h)} \to \varphi^*$ равномерно в Ω, а если $lp \leqslant n$, то из оценки (6.4) вытекает, что $\varphi^{*(h)} \Rightarrow \varphi^*$ в L_p на Ω (так как $p < q = \dfrac{np}{n - lp}$ при $s = n$). Кроме того, согласно свойствам средних функций $\varphi_h \Rightarrow \varphi$ в L_1 на Ω. Поэтому, переходя к пределу при $h \to 0$ в (7.13), получим, что формула (7.12) имеет место почти всюду в Ω.

Заметим далее, что поскольку функции $w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q}, \vec{P})$ обращаются в нуль вне «конуса», представляющего собой объединение всех интервалов $(\vec{P}, \vec{Q})$, где $\vec{Q} \in C$ (см. рис. 5), то для любого $\delta > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$, что если $\vec{P} \in \Omega_\delta$, то все эти конусы содержатся в Ω_{δ_1}. Следовательно, во втором слагаемом правой части равенства (7.12) для $\vec{P} \in \Omega_\delta$ можно интеграл по Ω заменить на интеграл по Ω_{δ_1}.

Для любой функции $\varphi \in W_p^{(l)}$ выполнение равенства (7.12) для почти всех $\vec{P} \in \Omega_\delta$ для любого $\delta > 0$ (а, значит, почти всюду на Ω) следует из того, что для каждой области Ω_{δ_1} существует функция $\varphi^{\delta_1} \in W_p^{(l)}$, равная нулю в некоторой окрестности границы Ω и совпадающая с φ на Ω_{δ_1}.

Случай, когда центр шара C лежит в некоторой точке $\vec{T}(y_1, \ldots, y_n)$, сводится к рассмотренному переносом начала координат в точку $\vec{T}$ (т. е. применением формулы (7.12) к функции ψ, определяемой равенством $\psi(\vec{P}) = \varphi(\vec{P} + \vec{T})$. При этом из (7.12) следует, что

$$\varphi(\vec{P}) = \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} (x_1-y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n-y_n)^{\alpha_n} \int\limits_C \zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q}-\vec{T})\varphi(\vec{Q})\,dv_{\vec{Q}} + \int\limits_\Omega \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma\alpha_i = l} w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q}-\vec{T}, \vec{P}-\vec{T}) \frac{\partial^l \varphi(\vec{Q})}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}\,dv_{\vec{Q}}. \quad (7.14)$$

Если точка $\vec{T}$ — начало координат, то равенство (7.14) переходит в (7.12). Положим еще

$$\tilde{\varphi}(\vec{P}) = S(\vec{P}) + \varphi^*(\vec{P}). \quad (7.15)$$

Таким образом, для функций φ, имеющих непрерывные производные до порядка l включительно, φ совпадает с $\tilde{\varphi}$ на Ω, а для функций $\varphi \in W_p^{(l)}$ она равна $\tilde{\varphi}$ почти всюду на Ω [8–12].

Важным классом пространств являются нормированные функциональные пространства, обладающие свойством полноты, т. е. существования предельного элемента у всякой сходящейся в себе последовательности. Пространство $W_p^{(l)}$ с введенной нормой является полным. Мы установим это позднее. Сейчас докажем несколько важных теорем.

8. Теоремы вложения

1. Вложение $W_p^{(l)}$ в C. Обозначим через C пространство функций, непрерывных и ограниченных в области Ω и положим $\|\varphi\|_C = \sup_\Omega |\varphi|$.

Теорема 1. *Если Ω — ограниченная область, звездная относительно некоторого шара, $\varphi \in W_p^{(l)}$ в Ω и $n < lp$ $(1 < p < \infty)$, то $\tilde{\varphi} \in C$ и*

$$\|\tilde{\varphi}\|_C \leqslant M \|\varphi\|_{W_p^{(l)}}, \tag{8.1}$$

где M — постоянная, не зависящая от выбора функции φ.

Доказательство. Действительно, непрерывность $\tilde{\varphi}$ следует из (7.15) и теоремы из п. 1, § 6 с $\lambda = n - l < n/p'$. Далее из (7.15) заключаем

$$|\tilde{\varphi}| \leqslant |S| + |\varphi^*|.$$

Обозначая $\max \left| x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \right| = A$ $\left(x_i \in \Omega,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant l - 1 \right)$, получим, применяя неравенство Гёльдера (1.20) и обозначая через N число различных одночленов $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant l - 1$,

$$|S| \leqslant A \sum_{\nu=0}^{l-1} \sum_{\Sigma \alpha_i = \nu} |a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}| \leqslant$$

$$\leqslant A \sum_{\nu=0}^{l-1} \sum_{\Sigma \alpha_i = \nu} \left(\frac{\nu!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \right)^{1/2} |a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}| \leqslant$$

$$\leqslant A \sqrt{N} \sum_{\nu=0}^{l-1} \left\{ \sum_{\Sigma \alpha_i = \nu} \frac{\nu!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} |a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}|^2 \right\}^{1/2} \leqslant K' \|\varphi\|_{W_p^{(l)}}.$$

Применяя неравенство (6.2), найдем оценку для $|\varphi^*|$. Обозначая $\sup |w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}| = B$ $(\vec{P} \in \Omega,\ \vec{Q} \in \Omega,\ \sum \alpha_i = l)$, получим

$$|\varphi^*| \leqslant KB \left\| \sum_{\Sigma \alpha_i = l} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \right\|_{L_p} \leqslant KB \sum_{\Sigma \alpha_i = l} \left\| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_p}.$$

Используя (7.3), найдем

$$|\varphi^*| \leqslant KBN_1 \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant KBN_1 \|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \leqslant K'' \|\varphi\|_{W_p^{(l)}},$$

где N_1 — число различных производных порядка l. Отсюда $|\tilde{\varphi}| \leqslant |S| + |\varphi^*| \leqslant (K' + K'') \|\varphi\|_{W_p^{(l)}} = M \|\varphi\|_{W_p^{(l)}}$, и неравенство (8.1) доказано ([13]).

2. Вложение $\mathbf{W}_p^{(l)}$ в $\mathbf{L}_{q^*}$.

Теорема. *Если Ω — ограниченная область, звездная относительно некоторого шара, $\varphi \in W_p^{(l)}$ в Ω и $n \geqslant lp$ $(1 < p < \infty)$, то $\tilde{\varphi} \in L_{q^*}$ на сечении Ω любой гиперплоскостью s измерений, где $s > n - lp$ и $q^* < q = \frac{sp}{n - lp}$. Кроме того, имеет место неравенство*

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L_{q^*}} \leqslant M \|\varphi\|_{W_p^{(l)}}, \tag{8.2}$$

где M — постоянная, не зависящая от выбора функции φ.

Доказательство. Действительно, тот факт, что $\tilde{\varphi} \in L_{q^*}$, следует из (7.15) и теоремы из п. 2, § 6 с $\lambda = n - l \geqslant \frac{n}{p'}$ и $s > n - (n - \lambda)p$. Остается доказать (8.2). Согласно (7.15) имеем

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L_{q^*}} \leqslant \|S\|_{L_{q^*}} + \|\varphi^*\|_{L_{q^*}}.$$

Обозначая $A = \max\limits_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} \left\| x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \right\|_{L_{q^*}}$, так же, как при доказательстве теоремы из п. 1, найдем

$$\|S\|_{L_{q^*}} \leqslant K \|\varphi\|_{W_p^{(l)}}.$$

Обозначив опять $\sup |w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}| = B\,(\vec{P} \in \Omega, \vec{Q} \in \Omega, \sum \alpha_i = l)$, найдем, используя оценку (6.4) для $\lambda = n - l$,

$$\|\varphi^*\|_{L_{q^*}} \leqslant B \sum_{\Sigma\alpha_i = l} \left\| \int_\Omega \frac{1}{r^{n-l}} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| dv \right\|_{L_{q^*}} \leqslant$$

$$\leqslant BK_1 \sum_{\Sigma\alpha_i = l} \left\| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_p} \leqslant BK_1 N \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant K_2 \|\varphi\|_{W_p^{(l)}}.$$

Отсюда находим

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L_{q^*}} \leqslant (K+K_2)\|\varphi\|_{W_p^{(l)}} = M\|\varphi\|_{W_p^{(l)}},$$

т. е. выполнено неравенство (8.2). Теорема доказана [14—15].

Теоремы из п.п. 1 и 2 означают, что оператор *вложения*, переводящий функцию φ как элемент $W_p^{(l)}$ в Ω в функцию $\tilde{\varphi}$ как элемент C в Ω ($n < lp$) или элемент L_{q^*} на сечении Ω гиперплоскостью s измерений ($n \geqslant lp$, $s > n - lp$, $q^* < sp/(n-lp)$), является ограниченным оператором. В § 11 будет доказано, что он является и вполне непрерывным оператором.

3. Примеры. Нами доказано, что если $\varphi \in W_p^{(l)}$ и $n > lp$, то $\varphi \in L_{q^*}$ на сечении Ω любой гиперплоскостью s измерений, где $s > n - lp$, $q^* < q = sp/(n-lp)$, и тогда имеет место неравенство (8.2). Приведем два примера, показывающие, что в теореме из п. 2 число q^* нельзя заменить числом $q+\varepsilon$, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$. Этим самым будет доказано, что найденные показатели q являются точными, не допускающими увеличения.

Пример 1. Пусть $R < 1$. Рассмотрим полушар Ω радиуса R в n-мерном пространстве

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2 \leqslant R^2, \quad x_n \geqslant 0 \qquad (n \geqslant 3).$$

Тогда $u = r^{1-\frac{n}{2}}(\ln r)^{-1} \in W_2^{(1)}$ в Ω, так как

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{1}{r^n}\left[\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)^2}{(\ln r)^2} + \frac{n-2}{(\ln r)^3} + \frac{1}{(\ln r)^4}\right]$$

и

$$\int_{\Omega}\sum\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dv = \frac{\sigma_n}{2}\int_0^R\left\{\frac{1}{r^n}\left[\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)^2}{(\ln r)^2} + \frac{n-2}{(\ln r)^3} + \frac{1}{(\ln r)^4}\right]\right\} r^{n-1}dr$$

сходится.

Здесь σ_n означает площадь поверхности сферы в n-мерном пространстве.

Рассмотрим сечение Ω_1 полушара Ω плоскостью $x_1=0$ и обозначим $\sum\limits_{i=2}^{n} x_i^2=\rho^2$. По теореме из п. 2 $u\in L_{q^*}$ в Ω_1, где

$$q^*<q=\frac{2(n-1)}{n-2}.$$

Покажем, что $\int\limits_{\Omega_1}|u|^{q+\varepsilon}dv_{n-1}$ расходится, если $\varepsilon>0$. Действительно,

$$\int\limits_{\Omega_1}|u|^{q+\varepsilon}dv=\frac{\sigma_{n-1}}{2}\int\limits_0^R\frac{1}{\left[\rho^{\frac{n-2}{2}}|\ln\rho|\right]^{q+\varepsilon}}\rho^{n-2}d\rho=$$

$$=\frac{\sigma_{n-1}}{2}\int\limits_0^R\frac{\rho^{-1-\frac{\varepsilon}{2}(n-2)}}{|\ln\rho|^{q+\varepsilon}}d\rho=\frac{\sigma_{n-1}}{2}\int\limits_{-\ln R}^{\infty}\frac{e^{\xi(n-2)\frac{\varepsilon}{2}}}{\xi^{q+\varepsilon}}d\xi,$$

откуда следует, что интеграл расходится, как бы мало ни было $\varepsilon>0$. Таким образом, u не принадлежит $L_{q+\varepsilon}$ на Ω_1.

Пример 2. Пусть $\delta>0$. Обозначим через r_δ расстояние от точки $(0,\ldots,0,-\delta)$ до точки $(x_1,\ldots,x_n)$, т. е.

$$r_\delta=\left[(x_n+\delta)^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2\right]^{1/2}.$$

Тогда в полушаре Ω семейство функций

$$u_\delta=r_\delta^{1-\frac{n}{2}}(\ln r_\delta)^{-1}\quad\left(0<\delta<\frac{1-R}{2}\right)$$

равномерно ограничено по норме в $W_2^{(1)}$.

Действительно, интегралы от $|u_\delta|$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_\delta}{\partial x_i}\right|^2$ по полушару радиуса $R+\delta<(1+R)/2<1$ с центром в точке $(0,0,\ldots,-\delta)$ равномерно ограничены, так как интегралы

$$\int\limits_0^{(1+R)/2}\frac{r^{n/2}dr}{|\ln r|}\quad\text{и}\quad\int\limits_0^{(1+R)/2}\frac{dr}{r|\ln r|^2}$$

сходятся.

Поэтому интегралы от $|u_\delta|$ и $\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_\delta}{\partial x_i}\right|^2$ по Ω также равномерно ограничены (Ω есть часть каждого из полушаров радиуса $R+\delta$) и в силу (7.12) и (7.5) $\|u_\delta\|_{W_2^{(1)}}$ равномерно ограничены.

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$\int_{\Omega_1} |u_\delta|^{q+\varepsilon} dv_{n-1} \to \infty \text{ при } \delta \to 0,$$

и, следовательно, $\|u\|_{L_{q+\varepsilon}}$ на Ω_1 не является ограниченной, т. е. для $q^* = q+\varepsilon$ неравенство (8.2) не имеет места ([16—18]).

9. Общие способы нормировки $W_p^{(l)}$ и следствия теорем вложения

1. Теорема об эквивалентных нормах. Пусть Π_1 и Π_2 — два проекционных оператора, переводящие $W_p^{(l)}$ в S_l. Эти операторы порождают в $W_p^{(l)}$ нормы, которые обозначим ${}^1\|\varphi\|$ и ${}^2\|\varphi\|$. Будем говорить, что эти нормы эквивалентны, если можно указать два положительных числа m, M так, что

$$m \leqslant \frac{{}^2\|\varphi\|}{{}^1\|\varphi\|} \leqslant M \quad \text{для всех } \varphi \in W_p^{(l)}. \tag{9.1}$$

Рассмотрим оператор $\Xi_{12}\varphi = (\Pi_1 - \Pi_2)\varphi$. Этот оператор обладает двумя свойствами.

1. $\Xi_{12}S = 0$, т. е. Ξ_{12} обращает в нуль всякий многочлен $S \in S_l$. Это следует из того, что $\Pi_1 S = \Pi_2 S = S$. Отсюда вытекает, что Ξ_{12} приводит в соответствие один и тот же многочлен S всем функциям одного и того же класса $\psi \in L_p^{(l)}$.

2. $\Xi_{12}^2\varphi = 0$, т. е. квадрат оператора Ξ_{12} есть оператор аннулирования.

Действительно, $\Xi_{12}\varphi = S \in S_l$ и, следовательно,

$$\Xi_{12}^2\varphi = \Xi_{12}S = 0.$$

Теорема. *Для эквивалентности норм* ${}^1\|\varphi\|$ *и* ${}^2\|\varphi\|$, *порожденных операторами* Π_1 *и* Π_2, *необходимо и доста-*

точно, чтобы существовало число $M>0$ такое, что

$$\|\Xi_{12}\varphi\|_{S_l} \leqslant M\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \tag{9.2}$$

для всех $\varphi \in W_p^{(l)}$ в области Ω.

Доказательство необходимости. Доказательство проведем от противного. Пусть условие (9.2) не имеет места. Тогда можно указать такую последовательность функций $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in W_p^{(l)}$, для которых

$$\|\Xi_{12}\varphi_k\|_{S_l} > k\|\varphi_k\|_{L_p^{(l)}} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{9.3}$$

Нормируя φ_k, можем считать, что $\|\varphi_k\|_{L_p^{(l)}} = 1$.

Рассмотрим функцию $\psi_k = \overset{*}{\Pi}_1\varphi_k = \varphi_k - \Pi_1\varphi_k$ и вычислим обе нормы ψ_k. Так как $\Pi_1\psi_k = 0$, то

$$^1\|\psi_k\| = \|\varphi_k\|_{L_p^{(l)}} = 1.$$

Так как $\Pi_1\varphi_k \in S_l$, то $\Pi_2\Pi_1\varphi_k = \Pi_1\varphi_k$. Кроме того, приняв во внимание (9.3), получим

$$^2\|\psi_k\| = \|\Pi_2\psi_k\|_{S_l} + \|\varphi_k\|_{L_p^{(l)}} = \|\Pi_2\varphi_k - \Pi_2\Pi_1\varphi_k\|_{S_l} + 1 =$$

$$= \|\Pi_2\varphi_k - \Pi_1\varphi_k\|_{S_l} + 1 = \|\Xi_{12}\varphi_k\|_{S_l} + 1 > k + 1,$$

откуда следует, что $\dfrac{^2\|\psi_k\|}{^1\|\psi_k\|} \to \infty$. Это противоречит (9.1) и означает, что нормы $^1\|\varphi\|$ и $^2\|\varphi\|$ не эквивалентны. Противоречие говорит о том, что предположение (9.3) неверно и для всех функций $\varphi \in W_p^{(l)}$ выполняется (9.2).

Доказательство достаточности. Пусть выполнено (9.2). Тогда

$$^1\|\varphi\| = \|\Pi_1\varphi\|_{S_l} + \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\|\Pi_2\varphi\|_{S_l} + \|(\Pi_1 - \Pi_2)\varphi\|_{S_l}\right] + \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant$$

$$\leqslant \|\Pi_2\varphi\|_{S_l} + M\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} + \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} = \|\Pi_2\varphi\|_{S_l} + (M+1)\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant$$

$$\leqslant (M+1)\left[\|\Pi_2\varphi\|_{S_l} + \|\varphi\|_{L_p^{(l)}}\right] = (M+1)\cdot{}^2\|\varphi\|.$$

Аналогично доказывается, что $^2\|\varphi\| \leqslant (M+1)\cdot{}^1\|\varphi\|$. Наличие последних двух неравенств означает выполнение (9.1), и теорема доказана.

Условие (9.2) удобно записать в несколько иной форме. Мы имеем

$$\Xi_{12}\varphi = \Pi_1\varphi - \Pi_2\varphi = \Pi_1\varphi - \Pi_1\Pi_2\varphi = \\ = \Pi_1(\varphi - \Pi_2\varphi) = \Pi_1\Pi_2^*\varphi$$

и аналогично

$$\Xi_{12}\varphi = -\Pi_2\Pi_1^*\varphi.$$

Пользуясь этим, легко видеть, что каждое из трех приводимых ниже неравенств является необходимым и достаточным условием эквивалентности норм:

$$\|\Xi_{12}\varphi\|_{S_l} \leqslant M\|\varphi\|_{L_p^{(l)}}, \tag{9.2}$$

$$\|\Pi_1\Pi_2^*\varphi\|_{S_l} \leqslant M\|\varphi\|_{L_p^{(l)}}, \tag{9.4}$$

$$\|\Pi_2\Pi_1^*\varphi\|_{S_l} \leqslant M\|\varphi\|_{L_p^{(l)}}. \tag{9.5}$$

Этим мы и будем пользоваться в дальнейшем.

2. **Общий вид нормы, эквивалентной данной.** Займемся теперь более детальным изучением структуры проекционных операторов, порождающих нормы, эквивалентные данной. Пусть Π_1 задан.

Всякий проекционный оператор Π_2 имеет вид

$$\Pi_2\varphi = \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} l_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varphi,$$

где $l_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ представляют собою функционалы, обладающие свойством дистрибутивности (см. § 3).

Нетрудно видеть, что эти функционалы обладают также свойством

$$l_{\alpha_1\ldots\alpha_n} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum(\alpha_i - \beta_i)^2 = 0, \\ 0, & \text{если } \sum(\alpha_i - \beta_i)^2 > 0. \end{cases} \tag{9.6}$$

Теорема. *Для того чтобы нормы ${}^1\|\varphi\|$ и ${}^2\|\varphi\|$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы все функционалы $l_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ были ограничены в смысле нормы, определяемой проекционным оператором* Π_1.

Доказательство. Легко видеть, что условие эквивалентности норм (9.5) равносильно системе условий

$$\left| l_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \Pi_1^* \varphi \right| \leqslant M \| \varphi \|_{L_p^{(l)}}. \tag{9.7}$$

Нам остается показать, что (9.7) эквивалентно условию теоремы.

Пусть все функционалы $l_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ ограничены по норме ${}^1\|\varphi\|$. Тогда

$$\left| l_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \Pi_1^* \varphi \right| \leqslant M\, {}^1\| \Pi_1^* \varphi \|_{W_p^{(l)}} = M \| \varphi \|_{L_p^{(l)}},$$

т. е. (9.7) справедливо.

Обратно, если справедливо (9.7), то, учитывая (9.6), легко найдем

$$\left| l_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \varphi \right| = \left| l_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \Pi_1 \varphi + l_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \Pi_1^* \varphi \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| l_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \Pi_1 \varphi \right| + \left| l_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \Pi_1^* \varphi \right| \leqslant \| \Pi_1 \varphi \|_{S_l} + M \| \varphi \|_{L_p^{(l)}} \leqslant$$
$$\leqslant M_1 \cdot {}^1\| \varphi \|_{W_p^{(l)}} \quad (M_1 = \max(1, M)),$$

т. е. из (9.7) вытекает ограниченность функционалов $l_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, и теорема полностью доказана.

Таким образом, произвольная система линейных функционалов $l_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ в $W_p^{(l)}$, удовлетворяющих уравнениям (9.6), порождает проекционный оператор Π_2 и, следовательно, новую норму в $W_p^{(l)}$, и эта норма эквивалентна норме, относительно которой определялась ограниченность функционалов.

Если теперь рассмотреть произвольную систему линейных функционалов $h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, число которых в точности равно числу одночленов степени не выше $l-1$, и притом таких, что определитель квадратной матрицы

$$A = \left\| h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} \right\|,$$

в каждой строке которой стоят значения одного и того же функционала, а в каждом столбце функционалы над одним и тем же одночленом, не равен нулю,— то из них всегда можно составить линейные комбинации $l_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, такие, которые будут удовлетворять уравнениям (9.6).

Каждая такая система линейных функционалов позволяет определить норму в S_l формулой

$$\|\varphi\|_{S_l} = \left|\sum (h_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\varphi)^2\right|^{1/2}. \tag{9.8}$$

Такая норма, как мы видели выше, эквивалентна исходной норме в S_l.

Условие $|A| \neq 0$ можно сформулировать в форме, удобной для приложений, двояким образом.

Известно, что если определитель квадратной матрицы не равен нулю, то невозможно составить линейную комбинацию столбцов этой матрицы или линейную комбинацию строк этой матрицы с коэффициентами, из которых по крайней мере один отличен от нуля, состоящую из одних нулей. Обратно, если такую линейную комбинацию столбцов, состоящую из одних нулей, составить нельзя, то определитель матрицы не равен нулю. То же справедливо, если нельзя составить такую же линейную комбинацию строк, состоящую из одних нулей. Отсюда вытекают два замечания.

а) Условие $|A| \neq 0$ выполнено, если справедливо следующее: каков бы ни был многочлен P степени не выше $l-1$, $P \neq 0$, найдется функционал $h_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ такой, что $h_{\alpha_1\dots\alpha_n}P \neq 0$.

б) Условие $|A| \neq 0$ выполнено, если справедливо следующее: какова бы ни была линейная комбинация функционалов

$$\rho = \sum A_{\alpha_1\dots\alpha_n} h_{\alpha_1\dots\alpha_n}, \quad \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} A^2_{\alpha_1\dots\alpha_n} \neq 0,$$

всегда можно указать такой одночлен $x_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n}$, для которого $\rho x_1^{\beta_1}\dots x_n^{\beta_n} \neq 0$

3. Нормы, эквивалентные специальной норме. До сих пор рассматривалась эквивалентность норм, порожденных двумя произвольными проекционными операторами, и все рассуждения годились для произвольной области Ω. Вернемся к области, звездной относительно шара C, для которой построен специальный проекционный оператор, определяемый формулой (7.12).

Для нормы, порожденной этим оператором, справедливы теоремы вложения из п. 1 и 2, т. е. неравенство (8.1) в случае $n < lp$ и (8.2) в случае $n \geqslant lp$.

Пусть $h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \left(\sum \alpha_i \leqslant l-1\right)$ — система линейных функционалов в C (если $n < lp$) или в L_{q*} (если $n \geqslant lp$), удовлетворяющих условию: если функции φ и ψ совпадают почти всюду на Ω, то

$$h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \varphi = h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \psi. \tag{9.9}$$

Тогда, например, в случае $n < lp$ найдем, пользуясь (8.1),

$$\left| h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \varphi \right| = \left| h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \tilde{\varphi} \right| \leqslant K_1 \| \tilde{\varphi} \|_C \leqslant K_2 \| \varphi \|_{W_p^{(l)}},$$

т. е. $h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ ограничен в $W_p^{(l)}$ по норме с проекционным оператором (7.12). Аналогичное утверждение справедливо, если $h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ линеен в L_{q*} $(n \geqslant lp)$. Отсюда, пользуясь предыдущей теоремой, получаем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть Ω — область, звездная относительно шара, $\{h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\} \left(\sum \alpha_i \leqslant l-1\right)$ — линейные функционалы в C $(n < lp)$ или в L_{q*} $(n \geqslant lp)$, удовлетворяющие условию (9.9), и пусть для каждого многочлена $S \in S_l$, $S \not\equiv 0$, хотя бы один из $h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ отличен от нуля. Тогда норма, определенная (7.5) и (9.8), эквивалентна норме (7.5), порожденной оператором (7.12), и справедливы (8.1) или (8.2), если в правой части последних неравенств считать нормы φ определенными, в свою очередь, формулами (7.5) и (9.8).*

4. Шаровые проекционные операторы. Будем предполагать, что область Ω звездна относительно шара C радиуса H с центром в начале координат. Формула (7.12) определяет проекционный оператор Π в виде

$$\Pi \varphi = \sum_{\sum \alpha_i \leqslant l-1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \int\limits_C \zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{(H)} (\vec{Q}) \, \varphi (\vec{Q}) \, dv_{\vec{Q}},$$

приводящий в соответствие каждой функции $\varphi \in W_p^{(l)}$ многочлен $S \in S_l$, причем коэффициенты этого многочлена определяются только значениями φ в шаре C (функция $\zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ в (7.12) выражается через функцию v, которая зависит от H; чтобы подчеркнуть эту зависимость, здесь мы ее обозначим через $\zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{(H)}$).

Пусть $\vec{T}(y_1, \ldots, y_n)$ — такая точка области Ω, что шар C_1 радиуса H_1 с центром в $\vec{T}$ содержится в области

Ω (при этом не предполагается, что область Ω звездна относительно шара C_1). Построим оператор

$$\Pi_{C_1}\varphi = \sum_{\Sigma\alpha_i\leqslant l-1} (x_1-y_1)^{\alpha_1}\ldots(x_n-y_n)^{\alpha_n}\int_{C_1}\zeta^{(H)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\vec{Q}-\vec{T})\times$$
$$\times\varphi(\vec{Q})\,dv_{\vec{Q}}. \quad (9.10)$$

Оператор Π_{C_1} каждой функции $\varphi\in W_p^{(l)}$ приводит в соответствие некоторый многочлен $S\in S_l$. Кроме того, Π_{C_1} переводит каждый многочлен $S\in S_l$ в себя, так как для него справедливо равенство (7.14) с заменой C на C_1 и Ω на Ω_1, где Ω_1 — любая область, звездная относительно шара C_1, например, $\Omega_1=C_1$ (второе слагаемое при этом равно нулю). Отсюда следует, что оператор Π_{C_1} проекционный. Операторы Π_{C_1}, определяемые равенством (9.10), будем называть *шаровыми проекционными операторами.*

Теорема. *Пусть Ω — область, звездная относительно некоторого шара; тогда нормы, построенные при помощи любых шаровых проекционных операторов, эквивалентны.*

Доказательство. Как и в п. 4, § 7, без ограничения общности можно считать, что Ω — область, звездная относительно шара C с центром в начале координат. Чтобы доказать эту теорему, достаточно установить эквивалентность нормы, определенной с помощью любого шарового проекционного оператора, норме $\|\varphi\|^*_{W_p^{(l)}}$, определенной формулами (7.5) и (9.8) с функционалами $h_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$, линейными в C $(n<lp)$ или в L_{q^*} $(n\geqslant lp$, $q^*<np/(n-lp)$; $s=n)$. Покажем, что эти нормы эквивалентны.

Действительно, функции $\zeta^{(H)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ ограничены и поэтому функционалы

$$h_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varphi=\int_{C_1}\zeta^{(H)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\vec{Q}-\vec{T})\,\varphi(\vec{Q})\,dv_{\vec{Q}},\quad \sum\alpha_i\leqslant l-1, \quad (9.11)$$

ограничены в C $(n<lp)$ или в L_{q^*} $(n\geqslant lp,\ q^*<np/(n-lp),\ s=n)$. Как отмечено выше, на множестве S_l оператор Π_{C_1} есть оператор тождественного преобра-

зования, поэтому функционалы $h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, $\sum \alpha_i \leqslant l-1$ обладают тем свойством, что для всякого многочлена $S \in \in S_l$, отличного от нуля, по крайней мере один из функционалов отличен от нуля. Следовательно, на основании теоремы из п. 3 норма, порожденная оператором $\Pi_{C_1}\varphi$, эквивалентна норме $\|\varphi\|^*$. Таким образом, нормы, порожденные любыми шаровыми проекционными операторами, эквивалентны норме $\|\varphi\|^*_{W_p^{(l)}}$, а, следовательно, эквивалентны между собой, и теорема доказана.

5. **Области незвездные.** Мы можем теперь освободиться от ограничения звездности, наложенной нами на область Ω при доказательстве теорем вложения.

Пусть Ω — ограниченная область, содержащая некоторый шар C радиуса H. Формула (9.11) определяет проекционный оператор в $W_p^{(l)}$, и мы определим норму по формуле (7.5). Нам остается показать, что при некоторых ограничениях на Ω останутся справедливыми теоремы вложения из пп. 1 и 2 и неравенства (8.1) и (8.2). Заметим, что если для некоторой области справедливы теоремы вложения, то для этой области справедлива предыдущая теорема.

Лемма. *Пусть область Ω имеет вид $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 — две области, для каждой из которых справедлива теорема вложения. Тогда для области Ω справедливы теоремы вложения (функция $\tilde{\varphi}$ определяется равенством (7.15) на каждой из областей Ω_1 и Ω_2), и нормы, определенные для всех шаровых проекционных операторов, эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in W_p^{(l)}$ в Ω. Тогда $\varphi \in \in W_p^{(l)}$ в Ω_1 и Ω_2 в отдельности, и поэтому $\varphi \in C$ (если $n < lp$) в Ω_1 и Ω_2 и, следовательно, в $\Omega_1 + \Omega_2$. Аналогично рассматривается случай $n \geqslant lp$. Остается доказать (8.1) и (8.2).

Предполагая $n < lp$, докажем (8.1). Пусть C_{12} шар в $\Omega_1\Omega_2$ и $\Pi_{C_{12}}$ — шаровой проекционный оператор. Тогда

$$\|\varphi\|_C \leqslant K_i \left[\|\Pi_{C_{12}}\varphi\|_{S_l} + {}^{(i)}\|\varphi\|_{L_p^{(l)}}\right] \quad \text{в } \Omega_i \quad (i = 1,2),$$

откуда следует, что в области $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_C \leqslant K_3\left[\|\Pi_{C_{12}}\varphi\|_{S_l} + \|\varphi\|_{L_p^{(l)}}\right],$$

так как[i] $\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant \|\varphi\|_{L_p^{(l)}}$ и $K_3 = \max[K_1, K_2]$.

Следовательно, справедливо (8.1). Аналогично в случае $n \geqslant lp$ доказывается (8.2). На основании теоремы из п. 4 следует эквивалентность всех норм, определенных для шаровых проекционных операторов.

Теорема. *Пусть область Ω представляет собой сумму конечного числа областей $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, каждая из которых является звездной относительно своего шара. Тогда для области Ω имеет место теорема вложения (функция $\tilde{\varphi}$ определяется равенством* (7.15) *на каждой из областей Ω_j), и нормы всех шаровых проекционных операторов эквивалентны.*

Доказательство. Эта теорема следует из повторного применения леммы к областям $\Omega_1 + \Omega_2$, $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ и т. д.

В последующем будем иметь в виду такие области, не оговаривая это каждый раз особо.

Мы можем впредь ограничиться рассмотрением только таких норм в пространстве $W_p^{(l)}$, которые эквивалентны нормам, получаемым при помощи шаровых проекционных операторов. Такие нормы мы будем называть естественными. Каждый раз, говоря о норме и сходимости в $W_p^{(l)}$, если не будет сделано специальной оговорки, мы будем иметь в виду какую-либо естественную норму и сходимость для любой естественной нормы.

6. **Примеры.** Приведем два примера, иллюстрирующие применение вышеприведенных теорем.

Пример 1. Пусть $p = 2$, $l = 1$, $s = n \geqslant 3$. Так как $q = \frac{2n}{n-2} > 2$, то можно взять $q^* = 2$, т. е. $W_2^{(1)} \subset L_2$. Так как $l = 1$, то для определения нормы достаточно взять один функционал. Положим $h\varphi \equiv (h, \varphi) = \int\limits_\Omega \varphi\, dv$.

Очевидно, что $(h, 1) \neq 0$, и функционал h линеен в L_2. Поэтому на основании теоремы из п. 2 имеем

$$\left\{\int\limits_\Omega |\varphi|^2 dv\right\}^{1/2} \leqslant M\left[\left|\int\limits_\Omega \varphi\, dv\right| + \left\{\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 dv\right\}^{1/2}\right],$$

откуда следует, что

$$\int_\Omega |\varphi|^2 dv \leqslant M_1 \left[\left\{ \int_\Omega \varphi\, dv \right\}^2 + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 dv \right], \qquad (9.12)$$

где M, M_1 — постоянные.

Последнее неравенство известно под названием неравенства Пуанкаре.

Пример 2. Пусть $p=2$, $l=1$, $s \geqslant n-2$; $s_1 = n-1$, $s_2 = n$.

Так как $q_1 = \frac{2(n-1)}{n-2} > 2$, то $W_2^{(1)} \subset L_2$ на сечениях S области Ω гиперплоскостями размерности $n-1$.

Положим

$$(h, \varphi) = \int_S \varphi\, dv_{n-1}.$$

Имеем $(h, 1) \neq 0$, и функционал h ограничен в L_2 на многообразии S.

На основании той же теоремы из п. 2 имеет место теорема вложения относительно нормы

$$\left| \int_S \varphi\, dv_{n-1} \right| + \|\varphi\|_{L_2^{(1)}},$$

и, в частности, так как $W_2^{(1)} \subset L_2$ в $\Omega (s_2 = n)$,

$$\left\{ \int_\Omega |\varphi|^2 dv \right\}^{1/2} \leqslant M \left[\left| \int_S \varphi\, dv_{n-1} \right| + \|\varphi\|_{L_2^{(1)}} \right],$$

откуда следует, что

$$\int_\Omega |\varphi|^2 dv \leqslant M_1 \left\{ \left| \int_S \varphi\, dv_{n-1} \right|^2 + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 dv \right\}. \qquad (9.13)$$

Ясно, что теорема из п. 2 может служить источником для многих неравенств, если варьировать выбор функционалов $h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$.

10. Некоторые следствия теорем вложения

1. **Полнота пространства $W_p^{(l)}$.** Рассмотрим сходящуюся в себе последовательность $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in W_p^{(l)}$. Пусть норма в $W_p^{(l)}$ определена каким-либо шаровым проекционным оператором П. Имеем

$$\| \varphi_m - \varphi_k \|_{W_p^{(l)}} \to 0, \quad m, \ k \to \infty. \tag{10.1}$$

На основании теоремы вложения заключаем, что

$$\| \varphi_m - \varphi_k \|_{L_p} \to 0.$$

Пусть φ_0 — предельная функция. Обозначая $\Pi \varphi_k = S_k$, получим из (10.1)

$$\| S_m - S_k \|_{S_l}^p + \| \varphi_m - \varphi_k \|_{L_p^{(l)}}^p \to 0, \ m, \ k \to \infty,$$

откуда следует, что

$$\| S_m - S_k \|_{S_l} \to 0, \quad m, \ k \to \infty, \tag{10.2}$$

$$\| \varphi_m - \varphi_k \|_{L_p^{(l)}} \to 0, \quad m, \ k \to \infty. \tag{10.3}$$

Из (10.2) следует, что коэффициенты S_k стремятся к определенным конечным пределам и, следовательно, S_k равномерно стремится к некоторому многочлену S_0. Очевидно, имеем

$$\| S_k - S_0 \|_{S_l} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{10.4}$$

Из (10.3) следует, что

$$\left\| \frac{\partial^l \varphi_m}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} - \frac{\partial^l \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_p} \to 0,$$

$$\sum \alpha_s = l, \ m, \ k \to \infty,$$

т. е. каждая из производных $\dfrac{\partial^l \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ стремится в L_p к некоторой функции $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \in L_p$. Покажем, что

$$\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \frac{\partial^l \varphi_0}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{10.5}$$

Действительно, для всякой ψ, имеющей непрерывные производные до l порядка во всем пространстве и равной нулю вне конечной области V_ψ такой, что $\overline{V}_\psi \subset \Omega$, имеем

$$\int_\Omega \varphi_k \frac{\partial^l \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dv = (-1)^l \int_\Omega \psi \frac{\partial^l \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dv,$$

откуда предельным переходом при $k \to \infty$ следует справедливость (10.5).

Таким образом, $\varphi_0 \in W_p^{(l)}$ (так как $\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \in L_p$). Нетрудно убедиться, что $\Pi\varphi_0 = S_0$. Действительно, полагая в (9.11) φ_k вместо φ и переходя к пределу, получим

$$\Pi\,\varphi_0 = \lim_{k\to\infty} \Pi\,\varphi_k = \lim_{k\to\infty} S_k = S_0.$$

Так как $\dfrac{\partial^l \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \Rightarrow \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ в L_p и в силу (10.4), очевидно, имеем $\|\varphi_0 - \varphi_k\|_{W_p^{(l)}} \to 0$, $k \to \infty$. Полнота пространства $W_p^{(l)}$ доказана.

2. Вложение $W_p^{(l)}$ в $W_{p_k}^{(k)}$. До сих пор в §§ 7, 8, 9 не шла речь о производных порядка ниже l. В § 5 было замечено, что из существования обобщенных производных высшего порядка не следует, вообще говоря, существование производных низшего порядка. Сейчас будет доказана следующая теорема.

Теорема. *Если $\varphi \in W_p^{(l)}$ в области Ω, представляющей собой сумму конечного числа ограниченных областей, каждая из которых является звездной относительно своего шара, то функция $\widetilde{\varphi}$, определенная в теореме из п. 5, § 9, имеет в Ω все обобщенные производные порядка ниже l. При этом*

1) *если $lp > n, 0 \leqslant m < l - \dfrac{n}{p}$, то $\dfrac{\partial^m \widetilde{\varphi}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ непрерывна и*

$$\left| \frac{\partial^m \widetilde{\varphi}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leqslant M \|\varphi\|_{W_p^{(l)}}; \qquad (10.6)$$

2) *если* $lp \leqslant n$, $m \geqslant 0$ *и* $m \geqslant l - \frac{n}{p}$, $s > n - (l-m)p$, *то на всяком сечении области* Ω s *измерений*

$$\frac{\partial^m \tilde{\varphi}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \in L_{q^*},$$

где $q^* < q = \frac{sp}{n-(l-m)p}$, *причем*

$$\left\| \frac{\partial^m \tilde{\varphi}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_{q^*}} \leqslant M \|\varphi\|_{W_p^{(l)}}. \tag{10.7}$$

Замечание. Если $lp > n$, то $W_p^{(l)} \subset \tilde{C}^{l - \left[\frac{n}{p}\right] - 1}$, т. е. $W_p^{(l)}$ есть часть пространства функций, имеющих после изменения на множестве меры нуль $l - \left[\frac{n}{p}\right] - 1$ непрерывных производных. Это следует из первой части теоремы. Полагая во второй части теоремы $s = n$ и учитывая, что в этом случае доказана возможность $q^* = q$ (см. ([14])), заключаем, что если $k \geqslant 0$ и $k \geqslant l - \frac{n}{p}$, то $W_p^{(l)} \subset$ $\subset W_q^{(k)}$ $(k < l)$, где q определяется равенством $k = l - n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, т. е. $q = \frac{np}{n-(l-k)p}$.

Доказательство. Теорему достаточно доказать для области Ω, звездной относительно некоторого шара.

Пусть $\varphi(\vec{P})$ непрерывна и имеет непрерывные производные до порядка l. Тогда имеет место формула (7.12):

$$\varphi(\vec{P}) = \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \int_C \zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q})\, \varphi(\vec{Q})\, dv_{\vec{Q}} + \\ + \int_\Omega \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma\alpha_i = l} w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q}, \vec{P}) \frac{\partial^l \varphi(\vec{Q})}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}\, dv_{\vec{Q}}. \tag{7.12}$$

Теорема будет доказана, если покажем, что

$$\frac{\partial^m}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \int_\Omega \frac{1}{r^{n-l}} w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \frac{\partial^l \varphi}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}\, dv_{\vec{Q}} = \\ = \int_\Omega \frac{1}{r^{n-l+m}} w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{\beta_1 \ldots \beta_m} \frac{\partial^l \varphi}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}\, dv_{\vec{Q}}, \tag{10.8}$$

где $w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{\beta_1 \ldots \beta_n}$ — ограниченная функция.

Действительно, продифференцируем m раз обе части (7.12), написанные для средней функции φ_h. Пределом первого слагаемого правой части при $h \to 0$ будет многочлен $\frac{\partial^m S}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}$, коэффициенты которого выражаются просто через коэффициенты S и, следовательно, $\left|\frac{\partial^m S}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}\right| \leqslant M \| S \|_{S_l}$.

Пределом второго слагаемого правой части будет сумма слагаемых вида правой части (10.8). На основании теорем § 6 об интегралах типа потенциалов следуют утверждения теоремы.

Для доказательства (10.8) достаточно доказать, что

$$\frac{\partial^m}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \left(\frac{1}{r^{n-l}}\, w(\vec{Q}, \vec{P})\right) = \frac{w^{(m)}(\vec{Q}, \vec{P})}{r^{n-l+m}}, \qquad (10.9)$$

где $w^{(m)}$ — ограниченная функция (для простоты индексы опущены). Имеем (п. 4, § 7)

$$\frac{1}{r^{n-l}}\, w(\vec{Q}, \vec{P}) = C^1_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \frac{(x_1 - y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n - y_n)^{\alpha_n}}{r^n}\, \chi(\vec{Q}, \vec{P}).$$

Покажем, что каждое дифференцирование функции $\frac{1}{r^{n-l}}\, w(\vec{Q}, \vec{P})$ увеличивает на единицу порядок особенности этой функции.

Действительно, относительно первого множителя $(x_1 - y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n - y_n)^{\alpha_n} / r^n$ это очевидно.

Если заданы $\vec{Q}$ и $\vec{P}$, то $r = |\vec{Q} - \vec{P}|$; $\vec{l} = \frac{\vec{Q} - \vec{P}}{r}$,

$$\bar{v}(r, \vec{l}, \vec{P}) = v(\vec{Q}_1), \quad \text{где} \quad \vec{Q}_1 = \vec{P} + r_1 \vec{l} = \vec{P} + \frac{r_1}{r}(\vec{Q} - \vec{P}).$$

Поэтому

$$\chi(\vec{Q}, \vec{P}) = -\int^{\infty} v\left(\vec{P} + \frac{r_1}{r}(\vec{Q} - \vec{P})\right) r_1^{n-1} dr_1.$$

Дифференцируя по x_1, найдем

$$\frac{\partial\chi(\vec{Q},\vec{P})}{\partial x_1}=v(\vec{Q})\,r^{n-1}\frac{x_1-y_1}{r}-$$

$$-\int_r^\infty\sum_{j=1}^n\frac{\partial v(\vec{Q}_1)}{\partial y_j}\left[\delta_{1j}+\frac{r_1}{r^2}\frac{(x_1-y_1)(x_j-y_j)}{r}-\delta_{1j}\frac{r_1}{r}\right]r_1^{n-1}dr_1=$$

$$=\frac{1}{r}\left[\int_r^\infty\frac{\partial v(\vec{Q}_1)}{\partial y_1}r_1^n dr_1-\sum_{j=1}^n\frac{(x_1-y_1)(x_j-y_j)}{r^2}\int_r^\infty\frac{\partial v(\vec{Q}_1)}{\partial y_j}r_1^n dr_1\right]+$$

$$+v(\vec{Q})\,r^{n-2}(x_1-y_1)-\int_r^\infty\frac{\partial v(\vec{Q}_1)}{\partial y_1}r_1^{n-1}dr_1.$$

Обозначая через $\chi_1(\vec{Q},\vec{P})$, $\chi_2(\vec{Q},\vec{P})$ и т. д. интегралы того же типа, что и $\chi(\vec{Q},\vec{P})$ ($v(\vec{Q}_1)$ заменяется другой сколь угодно раз непрерывно дифференцируемой функцией, r_1^{n-1} заменяется r_1^n, r_1^{n+1} и т. д.), получим

$$\frac{\partial\chi}{\partial x_1}=\frac{1}{r}\left[-\chi_1(\vec{Q},\vec{P})+\sum_{j=1}^n l_1 l_j\chi_j(\vec{Q},\vec{P})\right]+$$

$$+\chi_2(\vec{Q},\vec{P})+v(\vec{Q})\,r^{n-1}l_1,$$

откуда легко следует, что дальнейшие дифференцирования по x_i увеличивают порядок особенности каждый раз не более, чем на единицу. Таким образом, $\dfrac{\partial^m\chi(\vec{Q},\vec{P})}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}=\dfrac{1}{r^m}\omega(\vec{Q},\vec{P})$, где $\omega(\vec{Q},\vec{P})$ — ограниченная функция своих аргументов. Этим доказано (10.9), а следовательно, и теорема.

Замечание. Во всем § 7 формулировались теоремы для плоских многообразий s измерений. Эти теоремы распространяются на достаточно гладкие многообразия s измерений. Именно, если многообразие s измерений лежит в некоторой области, в которой существует взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое преобразование с ограниченными производными, переводящее рассматриваемое многообразие в плоское, то для этого многообразия верны все теоремы, относившиеся к плоским многообразиям.

Для исследования некоторых вопросов нам будет важно иногда знать поведение функции на границах области. Мы введем класс областей, который удобно называть областями с простой границей. Будем говорить, что область Ω имеет *простую границу* в случае, если эта граница может быть разбита на конечное число многообразий $S_{n-1}^{(1)}, S_{n-1}^{(2)}, \ldots, S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(k)}$ различной размерности и притом так, что каждое многообразие S_{n-s}^{j} при помощи преобразования координат, определенного на части области Ω, непрерывного с непрерывными производными до l-го порядка, преобразуется в плоское. Для области с простой границей можно утверждать, что теорема вложения будет справедлива и для граничных многообразий.

3. Инвариантная нормировка $W_p^{(l)}$. Для дальнейшего нам будет удобно ввести норму в $W_p^{(l)}$ еще одним способом.

Пусть $\varphi \in W_p^{(l)}$ в области Ω, удовлетворяющей условиям теоремы из п. 5, § 9. Тогда $\varphi \in L_p^{(l)}$ и в силу теорем вложения $\varphi \in L_p$. Покажем, что норма $\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}^{(0)}$, определяемая равенством

$$\left(\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}^{(0)}\right)^p = \|\varphi\|_{L_p}^p + \|\varphi\|_{L_p^l}^p,$$

эквивалентна любой норме, построенной при помощи шаровых проекционных операторов, т. е. является естественной нормой.

Правая часть написанного равенства определяется способом, не зависящим ни от выбора начала координат, ни от направления координатных осей, и является инвариантной при всевозможных ортогональных преобразованиях. Отсюда мы видим, что естественная норма может быть определена инвариантным образом.

Докажем эквивалентность $\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}^{(0)}$ любой естественной норме. Пусть $\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}^{(1)}$ — норма, определенная при помощи какого-нибудь шарового проекционного оператора. Требуется доказать, что существуют числа m и M $(0 < m < M)$ такие, что

$$m\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}^{(0)} \leqslant \|\varphi\|_{W_p^{(l)}}^{(1)} \leqslant M\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}^{(0)}.$$

Мы имеем

$$\left(\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}^{(1)}\right)^p = \|\Pi_1^*\varphi\|_{L_p^{(l)}}^p + \|\Pi_1\varphi\|_{S_l}^p = \|\varphi\|_{L_p^{(l)}}^p + \left(\|\Pi_1\varphi\|_{S_l}^{(1)}\right)^p,$$

где Π_1 — заданный проекционный оператор.

Далее $\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant \|\varphi\|^{(0)}_{W_p^{(l)}}$. Докажем еще, что

$$\|\Pi_1\varphi\|^{(1)}_{S_l} \leqslant K\|\varphi\|_{L_p},$$

где K — постоянная, зависящая от области Ω.

Пусть коэффициенты многочлена $\Pi_1\varphi$ суть $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$; тогда, очевидно,

$$\|\Pi_1\varphi\|^{(1)}_{S_l} \leqslant K_1 \max|a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}|. \tag{10.10}$$

С другой стороны, каждый из коэффициентов $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ представляется интегралом:

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \int\limits_C \zeta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q})\,\varphi(\vec{Q})\,dv_{\vec{Q}},$$

где $\zeta(\vec{Q})$ — ограниченная непрерывная функция своих аргументов [см. (7.12)]. Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$|a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}| \leqslant K_2\|\varphi\|_{L_p}. \tag{10.11}$$

Из (10.10) и (10.11) имеем

$$\|\Pi_1\varphi\|^{(1)}_{S_l} \leqslant K\|\varphi\|_{L_p}.$$

Отсюда находим оценку сверху

$$\left(\|\varphi\|^{(1)}_{W_p^{(l)}}\right)^p \leqslant M\left[\|\varphi\|^p_{L_p^{(l)}} + \|\varphi\|^p_{L_p}\right] \leqslant M\left(\|\varphi\|^{(0)}_{W_p^{(l)}}\right)^p.$$

Остается получить оценку снизу. На основании теорем вложения имеем $W_p^{(l)} \subset L_p$ и

$$\|\varphi\|_{L_p} \leqslant K\|\varphi\|^{(1)}_{W_p^{(l)}}.$$

Кроме того,

$$\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} = \|\Pi_1^*\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant \|\varphi\|^{(1)}_{W_p^{(l)}},$$

откуда, очевидно, следует, что

$$\|\varphi\|^{(0)}_{W_p^{(l)}} \leqslant K_1\|\varphi\|^{(1)}_{W_p^{(l)}},$$

что и требовалось доказать ([19–28]).

11. Полная непрерывность оператора вложения (теорема Кондрашова)

1. Постановка вопроса. В этом параграфе будет доказано, что всякое ограниченное множество в $W_p^{(l)}$ (ограниченное по норме) является ограниченным и равностепенно непрерывным в C, если $n < lp$, и в L_{q^*}, если $n > lp$, для ограниченных областей Ω, звездных относительно шара.

Предварительно докажем леммы об интегралах специального вида. Введем обозначения. Пусть $\vec{P}$ и $\vec{P} + \Delta\vec{P}$ — две произвольные точки, $\vec{Q}$ — точка интегрирования, $r = |\vec{P} - \vec{Q}|$, $r_1 = |\vec{P} + \Delta\vec{P} - \vec{Q}|$. Пусть $f \in L_p$ в Ω. Будем считать $f(\vec{P})$ равной нулю вне Ω и продолженной на все пространство. Пусть $\lambda < n$. Рассмотрим

$$U(\vec{P}, \Delta\vec{P}) = \int \frac{(r + r_1)^{\lambda-1}}{r^\lambda r_1^\lambda} f(\vec{Q})\, dv_{\vec{Q}}. \tag{11.1}$$

Представим (11.1) в виде

$$U(\vec{P}, \Delta\vec{P}) = \\ = \int\limits_{r < |\Delta\vec{P}|/2} + \int\limits_{r_1 < |\Delta\vec{P}|/2} + \int\limits_{\substack{r > |\Delta\vec{P}|/2 \\ r_1 > |\Delta\vec{P}|/2}} \frac{(r_1 + r)^{\lambda-1}}{r^\lambda r_1^\lambda} f(\vec{Q})\, dv_{\vec{Q}}.$$

При фиксированном $\Delta\vec{P}$ последний интеграл ограничен, в первом интеграле ограничено $1/r_1^\lambda$, во втором $1/r^\lambda$. Каждый из этих интегралов представляет собой при этом функцию из C, если $n < (n - \lambda)p$, или функцию из L_{q^*}, если $n \geqslant (n - \lambda)p$, так как переменная область интегрирования может быть заменена в них постоянной областью с помощью введения множителей, равных нулю или единице в соответствующих областях. Поэтому $U(\vec{P}, \Delta\vec{P})$ также принадлежит C или L_{q^*} в соответствующих случаях.

2. Лемма о компактности специальных интегралов в C.

Лемма. *Если $n < (n - \lambda)p$ (т. е. $\lambda < n/p'$), то для $|\Delta\vec{P}| \leqslant 1$ и $\vec{P}$, принадлежащих ограниченной об-*

ласти ω,

$$|\Delta\vec{P}|\cdot|U(\vec{P},\Delta\vec{P})|\leqslant C\|f\|_{L_p}|\Delta\vec{P}|^{\beta}, \tag{11.2}$$

где β — *постоянная*, $0<\beta\leqslant 1$, *постоянная* C *зависит от* ω, *но не зависит от* f.

Доказательство. Так как $\lambda<n/p'$, то $1/r^{\lambda}\in L_{p'}$ в конечной области. Имеем

$$|U(\vec{P},\Delta\vec{P})|\leqslant\int\limits_{r\leqslant R}\frac{(r+r_1)^{\lambda-1}}{r^{\lambda}r_1^{\lambda}}|f(\vec{Q})|\,dv_{\vec{Q}},$$

где R — такое число, что шар радиуса R с центром в любой точке $\vec{P}\in\omega$ содержит Ω.

Применяя неравенство Гёльдера с показателями p и p', найдем

$$|U(\vec{P},\Delta\vec{P})|\leqslant\left\{\int\limits_{r\leqslant R}\frac{(r+r_1)^{\lambda p'-p'}}{r^{\lambda p'}r_1^{\lambda p'}}\,dv\right\}^{1/p'}\|f\|_{L_p}=J_1^{1/p'}\|f\|_{L_p}. \tag{11.3}$$

Изучим интеграл $J_1=\int\limits_{r\leqslant R}\frac{(r+r_1)^{\lambda p'-p'}}{r^{\lambda p'}r_1^{\lambda p'}}\,dv_{\vec{Q}}$. Для этого перейдем к новым переменным, положив $x_i=|\Delta\vec{P}|\xi_i$, $y_i=|\Delta\vec{P}|\eta_i$, где координаты точки $\vec{P}$ суть x_i, а координаты $\vec{Q}$ суть y_i. При этом точка $\vec{P}$ перейдет в точку $\vec{P}_1$, точка $\vec{P}+\Delta\vec{P}$ в точку $\vec{P}_2$, так что $|\vec{P}_1-\vec{P}_2|=1$. Точка интегрирования $\vec{Q}$ перейдет в точку $\vec{Q}_1$.

Имеем $|\vec{Q}_1-\vec{P}_1|=\rho=1/|\Delta\vec{P}|$, $|\vec{Q}_1-\vec{P}_2|=\rho_1=r_1/|\Delta\vec{P}|$, $dv_{\vec{Q}}=|\Delta\vec{P}|^n dv_{\vec{Q}_1}$. Получим

$$J_1=\int\limits_{\rho\leqslant R/|\Delta\vec{P}|}\frac{(\rho+\rho_1)^{\lambda p'-p'}|\Delta\vec{P}|^{\lambda p'-p'}}{\rho^{\lambda p'}\rho_1^{\lambda p'}|\Delta\vec{P}|^{2\lambda p'}}|\Delta\vec{P}|^n dv_{\vec{Q}_1}=$$

$$=|\Delta\vec{P}|^{n-\lambda p'-p'}\int\limits_{\rho\leqslant R/|\Delta\vec{P}|}\frac{(\rho+\rho_1)^{\lambda p'-p'}}{\rho^{\lambda p'}\rho_1^{\lambda p'}}\,dv_{\vec{Q}_1}=|\Delta\vec{P}|^{n-\lambda p'-p'}J_2. \tag{11.4}$$

Разбивая интеграл J_2 на две части, получим

$$J_2 = \int\limits_{\rho < \frac{R}{|\Delta \vec{P}|}} \frac{(\rho+\rho_1)^{\lambda p'-p'}}{\rho^{\lambda p'}\rho_1^{\lambda p'}}\, dv_{\vec{Q}_1} =$$

$$= \int\limits_{\rho<2} \frac{(\rho+\rho_1)^{\lambda p'-p'}}{\rho^{\lambda p'}\rho_1^{\lambda p'}}\, dv_{\vec{Q}_1} + \int\limits_{2\leqslant\rho<\frac{R}{|\Delta\vec{P}|}} \frac{(\rho+\rho_1)^{\lambda p'-p'}}{\rho^{\lambda p'}\rho_1^{\lambda p'}}\, dv_{\vec{Q}_1}.$$

Первое слагаемое не зависит от $|\Delta\vec{P}|$. Это сходящийся интеграл.

Оценивая второе слагаемое, заметим, что при $\rho \geqslant 2$ отношение ρ_1/ρ заключено в постоянных пределах, ибо $\rho - 1 \leqslant \rho_1 \leqslant \rho + 1$, откуда следует, что $1 - \frac{1}{\rho} \leqslant \frac{\rho_1}{\rho} \leqslant 1 + \frac{1}{\rho}$, т. е. $\frac{1}{2} \leqslant \frac{\rho_1}{\rho} \leqslant \frac{3}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_{2\leqslant\rho<R/|\Delta\vec{P}|} \frac{(\rho+\rho_1)^{\lambda p'-p'}}{\rho^{\lambda p'}\rho_1^{\lambda p'}}\, dv_{\vec{Q}_1} \leqslant K \int\limits_2^{R/|\Delta\vec{P}|} \rho^{n-p'-\lambda p'-1}\, d\rho,$$

где K — константа. Отсюда вытекает, что при $n - p' - \lambda p' \neq 0$

$$J_2 \leqslant K_1 + K_2 \left(\frac{R}{|\Delta\vec{P}|}\right)^{n-p'-\lambda p'}. \tag{11.5}$$

Учитывая (11.4) и (11.5), получим

$$J_1 \leqslant C_2 + C_1 |\Delta\vec{P}|^{n\mid p'-\lambda p'}.$$

Из формулы (11.3) следует при этом

$$|U(\vec{P}, \Delta\vec{P})| \leqslant \|f\| [C_2 + C_1 |\Delta\vec{P}|^{n-p'-\lambda p'}]^{1/p'},$$

откуда находим

$$|\Delta\vec{P}|\,|U(\vec{P}, \Delta\vec{P})| \leqslant \|f\| [C_2 |\Delta\vec{P}|^{p'} + C_1 |\Delta\vec{P}|^{n-\lambda p'}]^{1/p'}.$$

Обозначив $\min\left(1, \frac{n-\lambda p'}{p'}\right) = \beta$, получим

$$|\Delta\vec{P}|\; |U(\vec{P}, \Delta\vec{P})| \leqslant C\|f\|\; |\Delta\vec{P}|^{\beta}, \text{ где } 0 < \beta \leqslant 1,$$

и лемма доказана.

Замечание. Если $n-\lambda p'-p'=0$, то, несколько изменяя вывод, получим искомое неравенство с любым $0<\beta<1$.

3. Лемма о компактности интегралов в L_{q^*}. Из теоремы п. 2, § 6 имеем, что если $n\geqslant(n-\lambda)p$ (т. е. $\lambda\geqslant n/p'$) и, кроме того, $s>n-(n-\lambda)p$, то $U(\vec{P}, \Delta\vec{P})\in L_{q^*}$ как функция точки $\vec{P}$ при фиксированном $\Delta\vec{P}$ в любой ограниченной области E_s в гиперплоскости s измерений, где $q^*<q=\frac{sp}{n-(n-\lambda)p}$.

Лемма. *В условиях теоремы п. 2, § 6 имеет место неравенство*

$$|\Delta\vec{P}|\cdot\|U(\vec{P}, \Delta\vec{P})\|_{L_{q^*}}\leqslant C\|f\|_{L_p}|\Delta\vec{P}|^{\beta},\quad C=\text{const},\tag{11.6}$$

где норма в L_{q^*} функции $U(\vec{P}, \Delta\vec{P})$, как функции от $\vec{P}$, берется по ограниченной области E_s гиперплоскости s измерений, $|\Delta\vec{P}|\leqslant 1$, $\beta=\min(1, 2\varepsilon)$, если $2\varepsilon=\frac{n}{p'}+\frac{s}{q^*}-\lambda\neq 1$, и β — любое число такое, что $0<\beta<1$, если $\frac{n}{p'}+\frac{s}{q^*}-\lambda=1$.

Докажем лемму для случая $2\varepsilon\neq 1$, предоставляя доказательство в особом случае $2\varepsilon=1$ провести читателю.

Доказательство. Имеем, как и ранее, при доказательстве теоремы из п. 2, § 6 $\lambda>\frac{n}{p'}$, $\frac{s}{q}=\frac{n}{p}-n+\lambda=\lambda-\frac{n}{p'}$, т. е. $\lambda=\frac{n}{p'}+\frac{s}{q}$. Положим $\lambda=\frac{n}{p'}+\frac{s}{q^*}-2\varepsilon$, где $2\varepsilon=\frac{s}{q^*}-\frac{s}{q}>0$. Выберем, как и раньше, $q^*>p$. ($p<q^*<q$).

Прежде всего установим для функции $|U(\vec{P}, \Delta\vec{P})|^{q^*}$ одно вспомогательное неравенство. Именно, мы докажем, что

$$|U(\vec{P}, \Delta\vec{P})|^{q^*}\leqslant\|f\|^{q^*-p}_{L_p}\left[A_1+A_2|\Delta\vec{P}|^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)p'}\right]^{q^*/p'}\times$$
$$\times\int\limits_{r\leqslant R}|f|^p\frac{(r+r_1)^{\varepsilon-\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)q^*}}{r^{s-\varepsilon q^*}r_1^{s-\varepsilon q^*}}\,dv_{\vec{Q}}.\tag{11.7}$$

Действительно, очевидно, имеем

$$|U(\vec{P}, \Delta\vec{P})| \leqslant \int\limits_{r\leqslant R} \left[|f|^{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q^*}\right)}\right] \left[|f|^{\frac{p}{q^*}} \frac{(r+r_1)^{\frac{s}{q^*}-\varepsilon-\frac{1}{2}}}{r^{\frac{s}{q^*}-\varepsilon} r_1^{\frac{s}{q^*}-\varepsilon}}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{(r+r_1)^{\frac{n}{p'}-\varepsilon-\frac{1}{2}}}{r^{\frac{n}{p'}-\varepsilon} r_1^{\frac{1}{p'}-\varepsilon}}\right] dv_{\vec{Q}}.$$

Применим к последнему интегралу неравенство Гёльдера с показателями

$$\frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q^*}} = \frac{pq^*}{q^*-p}, \quad q^*, \ p'.$$

Как легко видеть, $\frac{q^*-p}{pq^*} + \frac{1}{q^*} + \frac{1}{p'} = 1$. Получим

$$|U(\vec{P}, \Delta\vec{P})| \leqslant \left[\int\limits_{r<R} |f|^p \, dv_{\vec{Q}}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q^*}} \times$$

$$\times \left[\int\limits_{r<R} |f|^p \frac{(r+r_1)^{s-\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)q^*}}{r^{s-\varepsilon q^*} r_1^{s-\varepsilon q^*}} \, dv_{\vec{Q}}\right]^{1/q^*} \times$$

$$\times \left[\int\limits_{r\leqslant R} \frac{(r+r_1)^{n-\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)p'}}{r^{n-\varepsilon p'} r_1^{n-\varepsilon p'}} \, dv_{\vec{Q}}\right]^{1/p'} =$$

$$= \|f\|_{L_p}^{1-\frac{p}{q^*}} \omega(\Delta\vec{P}) \left[\int\limits_{r\leqslant R} |f|^p \frac{(r+r_1)^{s-\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)q^*}}{r^{s-\varepsilon q^*} r_1^{s'-\varepsilon q^*}} \, dv_{\vec{Q}}\right]^{1/q^*}, \tag{11.8}$$

где $\omega(\Delta\vec{P}) = \left[\int\limits_{r\leqslant R} \frac{(r+r_1)^{n-\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)p'}}{r^{n-\varepsilon p'} r_1^{n-\varepsilon p'}} \, dv_{\vec{Q}}\right]^{1/p}$. Оценивая $\omega(\Delta\vec{P})$ таким же способом, как мы оценивали J_1 в доказательстве леммы из п. 2, получим

$$|\omega(\Delta\vec{P})|^{p'} \leqslant |\Delta\vec{P}|^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)p'} \left\{ \int\limits_{\rho\leqslant R/|\Delta\vec{P}|} \frac{(\rho+\rho_1)^{n-\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)p'}}{\rho^{n-\varepsilon p'}\rho_1^{n-\varepsilon p'}}\, dv_{\vec{Q}_1} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant |\Delta\vec{P}|^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)p'} \left[K_1 + K_2 \int\limits_2^{R/|\Delta\vec{P}|} \rho^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)p'-1}\, d\rho \right].$$

Из (11.8) и полученной оценки $|\omega(\Delta\vec{P})|$ следует (11.7). Заметим, что в оценке $|\omega(\Delta\vec{P})|^{p'}$ при $\varepsilon<\frac{1}{2}$ главным является первый член, при $\varepsilon>\frac{1}{2}$ — второй член.

Пользуясь (11.7), мы приступим к оценке интеграла от $|U(\vec{P}, \Delta\vec{P})|^{q^*}$ по E_s.

Интегрируя неравенство (11.7) по переменной $\vec{P}$ и переставляя порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_{E_s} |U(\vec{P}, \Delta\vec{P})|^{q^*} dv_s \leqslant \|f\|_{L_p}^{q^*-p} \left[A_1 + A_2 |\Delta\vec{P}|^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)p'} \right]^{q^*/p'} \times$$

$$\times \int\limits_{E_s} \left\{ \int\limits_{r\leqslant R} |f|^p \frac{(r+r_1)^{s-\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)q^*}}{r^{s-\varepsilon q^*} r_1^{s-\varepsilon q^*}}\, dv_{\vec{Q}} \right\} dv_s =$$

$$= \|f\|_{L_p}^{q^*-p} \left[A_1 + A_2 |\Delta\vec{P}|^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)p'} \right]^{q^*/p'} \times$$

$$\times \int\limits_{r\leqslant R} |f|^p \left\{ \int\limits_{E_s} \frac{(r+r_1)^{s-\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)q^*}}{r^{s-\varepsilon q^*} r_1^{s-\varepsilon q^*}}\, dv_s \right\} dv_{\vec{Q}}. \qquad (11.9)$$

Во внутреннем интеграле при переменной точке $\vec{P}$ будут возможны две особых точки $\vec{Q}$ и $\vec{Q}-\Delta\vec{P}$. Каждая из этих точек при разных значениях $\vec{Q}$ может оказаться или на той же плоскости, где меняется $\vec{P}$, или вне ее. Мы оценим внутренний интеграл способом, не зависящим от положения точек $\vec{Q}$ и $\vec{Q}-\Delta\vec{P}$.

Прежде всего, выполняя прежнюю замену переменных интегрирования, получим

$$\int\limits_{E_s} \frac{(r+r_1)^{s-\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)q^*}}{r^{s-\varepsilon q^*} r_1^{s-\varepsilon q^*}} dv_s = |\Delta\vec{P}|^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)q^*} \times$$

$$\times \int\limits_{\rho<\frac{R}{|\Delta\vec{P}|}} \frac{(\rho+\rho_1)^{s-\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)q^*}}{\rho^{s-\varepsilon q^*}\rho_1^{s-\varepsilon q^*}} dv_s = |\Delta\vec{P}|^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)q^*} J_1. \quad (11.10)$$

Разобьем опять область интегрирования на часть, лежащую внутри шара $\rho \leqslant 2$, и часть, лежащую вне этого шара

$$J_1 = J_2 + J_3 = \int\limits_{\rho\leqslant 2} + \int\limits_{\rho\geqslant 2} \frac{(\rho+\rho_1)^{s-\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)q^*}}{\rho^{s-\varepsilon q^*}\rho_1^{s-\varepsilon q^*}} dv_s. \quad (11.11)$$

Докажем теперь, что интеграл J_2 ограничен при любом расположении точек $\vec{Q}$ и $\vec{Q}-\Delta\vec{P}$. Введем на гиперплоскости полярную систему координат, взяв за ее центр проекцию точки $\vec{Q}$ на эту гиперплоскость. Пусть эта проекция будет $\vec{Q}_0$. Расстояние в гиперплоскости P_s, содержащей область E_s, до точки $\vec{Q}_0$ обозначим через $\mathfrak{R}$. Тогда $\rho = \sqrt{\mathfrak{R}^2+h^2}$, где h — расстояние от точки $\vec{Q}$ до плоскости P_s.

Пусть, далее, проекция $\vec{Q}-\Delta\vec{P}$ на гиперплоскость P_s будет $\vec{Q}_1$, расстояние на гиперплоскости P_s до точки $\vec{Q}_1$ обозначим через $\mathfrak{R}_1$ и расстояние от $\vec{Q}-\Delta\vec{P}$ до гиперплоскости через h_1. Тогда $\rho_1 = \sqrt{\mathfrak{R}_1^2+h_1^2}$.

При $h > 1/4$, $h_1 > 1/4$ интеграл J_2 ограничен в силу того, что ρ и ρ_1 ограничены как сверху, так и снизу (значением $1/4$). При $h < 1/4$, $h_1 > 1/4$ оценим интеграл, заметив, что $\rho+\rho_1 \leqslant 5$, $\rho_1 > \frac{1}{4}$, $\rho > \mathfrak{R}$. Отсюда

$$J_2 \leqslant K \int\limits_{\mathfrak{R}<2} \frac{\mathfrak{R}^{s-1}}{\mathfrak{R}^{s-\varepsilon q^*}} d\mathfrak{R} = K_1,$$

где K_1 — некоторая постоянная.

Так же оценивается J_2 в случае, если $h > 1/4$, $h_1 < 1/4$. Наконец, в последнем случае, когда $h < 1/4$, $h_1 < 1/4$, расстояние между точками $\vec{Q}_0$ и $\vec{Q}_1$ больше $1/2$, и, следовательно,

$$J_2 \leqslant K \int\limits_{\mathfrak{R} \leqslant 2} \frac{1}{\mathfrak{R}^{s-\varepsilon q^*} \mathfrak{R}_1^{s-\varepsilon q^*}} \, dv_s,$$

т. е. интеграл J_2 сходится.

Оценим теперь интеграл J_3. Замечая по-прежнему, что отношение $\frac{\rho_1}{\rho}$ заключено в конечных пределах, и, пользуясь полярными координатами в гиперплоскости P_s, находим

$$J_3 \leqslant K \int\limits_{2 \leqslant \rho \leqslant R/|\Delta \vec{P}|} \rho^{-s+\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)q^*} \mathfrak{R}^{s-1} d\mathfrak{R} \leqslant$$

$$\leqslant K \int\limits_{a}^{R/|\Delta \vec{P}|} \mathfrak{R}^{s-1} \left[\sqrt{\mathfrak{R}^2 + h^2}\right]^{-s+\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)q^*} d\mathfrak{R},$$

где $a = 0$ для $h > 2$ и $a = \sqrt{4 - h^2}$ для $h \leqslant 2$. При $h > 2$ этот интеграл есть убывающая функция h. Поэтому оценку достаточно провести для $h \leqslant 2$. При этих значениях подынтегральная функция ограничена в промежутке $a \leqslant \mathfrak{R} \leqslant 2$.

Далее, если $\mathfrak{R} \geqslant 2$, получим путем несложных оценок

$$J_3 \leqslant C_1 \int\limits_{2}^{R/|\Delta \vec{P}|} \mathfrak{R}^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)q^*-1} d\mathfrak{R} = C_3 \left(\frac{R}{|\Delta \vec{P}|}\right)^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)q^*} + C_4 =$$

$$= C_4 + C_5 |\Delta \vec{P}|^{-\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)q^*}.$$

Отсюда, пользуясь (11.11) и ограниченностью J_2, найдем

$$J_1 \leqslant C_6 + C_5 |\Delta \vec{P}|^{-\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)q^*}.$$

Отсюда, на основании (11.10), получаем

$$J \leqslant C_5 + C_6 |\Delta \vec{P}|^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)q^*}$$

и, пользуясь (11.9), находим

$$\int\limits_{E_s} |U(\Delta\vec{P})|^{q^*}\,dv_s \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^{q^*}_{L_p}\left[A_1 + A_2|\Delta\vec{P}|^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)^{p'}}\right]^{q^*/p'}\left[C_5 + C_6|\Delta\vec{P}|^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)q^*}\right].$$

Отсюда легко заключаем, что

$$\left[\int\limits_{E_s} |U(\vec{P},\Delta\vec{P})|^{q^*}dv_s\right]^{1/q^*} \leqslant K\|f\|_{L_p},$$

где

$$K = \begin{cases} B_1, & \text{если } \varepsilon > 1/2,\\ B_2|\Delta\vec{P}|^{2\varepsilon-1}, & \text{если } \varepsilon < 1/2,\end{cases}$$

откуда следует, что

$$|\Delta\vec{P}|\left[\int\limits_{E_s} |U(\vec{P},\Delta\vec{P})|^{q^*}\,dv_s\right]^{1/q^*} \leqslant B\|f\|_{L_p}|\Delta\vec{P}|^{\beta},$$

где $\beta = \min(1, 2\varepsilon)$, и лемма доказана.

4. Полная непрерывность оператора вложения в C.

Теорема. *Если $1 < p < \infty$, $n < lp$ и область Ω представляет сумму конечного числа ограниченных областей, каждая из которых является звездной относительно своего шара, то оператор вложения $W_p^{(l)}$ в C вполне непрерывен, т. е. для всякого ограниченного множества $\{\varphi\} \subset \subset W_p^{(l)}\left(\|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \leqslant N\right)$ множество $\{\tilde{\varphi}\}$, где функции $\tilde{\varphi}$ определяются так же, как в теореме из п. 5, § 9, является компактным в C.*

Доказательство. Из теорем вложения следует, что $\{\tilde{\varphi}\}$ ограничено в C. Достаточно доказать равностепенную непрерывность в C множества $\{\tilde{\varphi}\}$. Имеем $\tilde{\varphi} = S + \varphi^*$ — разложение $\tilde{\varphi}$ по формуле (7.15).

Так как $\|S\|_{S_l} + \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant N$ для всех $\varphi \in \{\varphi\}$, то $\|S\|_{S_l} \leqslant N$, и, следовательно, коэффициенты многочленов ограничены одним числом. Отсюда легко следует равностепенная непрерывность многочленов S. Остается показать, что из неравенства $\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant N$ следует равностепенная непрерывность φ^*. Имеем

$$\varphi^*(\vec{P}) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma\alpha_i=l} w_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\,dv_{\vec{Q}}. \quad (11.12)$$

Обозначим $r_1 = |\vec{Q} - (\vec{P} + \Delta\vec{P})|$. Тогда

$$\frac{w_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\vec{Q}, \vec{P} + \Delta\vec{P})}{r_1^{n-l}} - \frac{w_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\vec{Q}, \vec{P})}{r^{n-l}} =$$

$$= \frac{\bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r_1, \vec{l}_1, \vec{P} + \Delta\vec{P})}{r_1^{n-l}} - \frac{\bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}, \vec{P})}{r^{n-l}} =$$

$$= \bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}, \vec{P})\left(\frac{1}{r_1^{n-l}} - \frac{1}{r^{n-l}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r_1^{n-l}}\{[\bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r_1, \vec{l}_1, \vec{P} + \Delta\vec{P}) - \bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}_1, \vec{P} + \Delta\vec{P})] +$$

$$+ [\bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}_1, \vec{P} + \Delta\vec{P}) - \bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}, \vec{P} + \Delta\vec{P})] +$$

$$+ [\bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}, \vec{P} + \Delta\vec{P}) - \bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}, \vec{P})]\}. \quad (11.13)$$

Так как $\bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}, \vec{P})$ и ее производные по $r, \vec{l}, \vec{P}$ ограничены, и, кроме того, $|r_1 - r| \leqslant |\Delta\vec{P}|$, $(r + r_1)/r \geqslant 1$ и $1/(r + r_1) > A > 0$ (область ограниченная), то при $n \geqslant l$

$$\left|\frac{1}{r_1^{n-l}}[\bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r_1, \vec{l}_1, \vec{P} + \Delta\vec{P}) - \bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}_1, \vec{P} + \Delta\vec{P})]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_1|\Delta\vec{P}|}{r_1^{n-l}} \leqslant B\frac{(r + r_1)^{n-l-1}}{r^{n-l}r_1^{n-l}}|\Delta\vec{P}|.$$

Аналогично найдем

$$\left|\frac{1}{r_1^{n-l}}[\bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}, \vec{P} + \Delta\vec{P}) - \bar{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}, \vec{P})]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_1|\Delta\vec{P}|}{r_1^{n-l}} \leqslant B\frac{(r + r_1)^{n-l-1}}{r^{n-l}r_1^{n-l}}|\Delta\vec{P}|.$$

Далее, так как $\vec{l} = \frac{\vec{Q} - \vec{P}}{r}$, $\vec{l}_1 = \frac{\vec{Q} - (\vec{P} + \Delta\vec{P})}{r_1}$, то

$$\vec{l}_1 - \vec{l} = \frac{r\vec{Q} - r\vec{P} - r\Delta\vec{P} - r_1\vec{Q} + r_1\vec{P}}{rr_1} =$$

$$= \frac{-(r_1 - r)(\vec{Q} - \vec{P} - \Delta\vec{P}) - r_1\Delta\vec{P}}{rr_1},$$

откуда следует, что

$$|\vec{l}_1 - \vec{l}| \leqslant \frac{r_1 |\Delta\vec{P}|}{rr_1} + r_1 \frac{|\Delta\vec{P}|}{r_1 r} = 2\frac{|\Delta\vec{P}|}{r}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{r_1^{n-l}}\left[\overline{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}_1, \vec{P}+\Delta\vec{P}) - \overline{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}, \vec{P}+\Delta\vec{P})\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_1|\vec{l}_1 - \vec{l}|}{r_1^{n-l}} \leqslant 2A_1|\Delta\vec{P}|\frac{1}{rr_1^{n-l}} \leqslant 2A_1|\Delta\vec{P}|\frac{(r+r_1)^{n-l-1}}{r^{n-l}r_1^{n-l}},$$

и, наконец,

$$\left|\overline{w}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(r, \vec{l}, \vec{P})\left(\frac{1}{r_1^{n-l}} - \frac{1}{r^{n-l}}\right)\right| \leqslant \frac{A_1}{r^{n-l}r_1^{n-l}}|r^{n-l} - r_1^{n-l}| =$$

$$= \frac{A_1}{r^{n-l}r_1^{n-l}}|r_1 - r|(r^{n-l-1} + r^{n-l-2}r_1 + \ldots$$

$$\ldots + rr_1^{n-l-2} + r_1^{n-l-1}) \leqslant \frac{A|\Delta\vec{P}|}{r^{n-l}r_1^{n-l}}(r+r_1)^{n-l-1}.$$

Подставляя эти оценки в (11.13), получим

$$\left|\frac{w_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\vec{Q}, \vec{P}+\Delta\vec{P})}{r_1^{n-l}} - \frac{w_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\vec{Q}, \vec{P})}{r^{n-l}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{(r+r_1)^{n-l-1}}{r^{n-l}r_1^{n-l}}|\Delta\vec{P}|$$

и из (11.12) находим

$$|\varphi^*(\vec{P}+\Delta\vec{P}) - \varphi^*(\vec{P})| \leqslant$$

$$\leqslant C|\Delta\vec{P}|\int\limits_{\Omega}\frac{(r+r_1)^{n-l-1}}{r^{n-l}r_1^{n-l}}\sum_{\Sigma\alpha_i=l}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|dv_{\vec{Q}}. \quad (11.14)$$

Для вывода неравенства (11.14) мы нигде не пользовались тем обстоятельством, что $lp > n$. Применим лемму из п. 2 к (11.14), положив $\lambda = n - l$. Получим: $n - \lambda =$

$=l$, $(n-\lambda)p=lp$ и по условию теоремы $lp>n$; следовательно, неравенство $n<(n-\lambda)p$ выполнено. Тогда

$$|\varphi^*(\vec{P}+\Delta\vec{P})-\varphi^*(\vec{P})|\leqslant K\|\varphi\|_{L_p^{(l)}}|\Delta\vec{P}|^{\beta};$$
$$\beta=\min\left(1,\ l-\frac{n}{p}\right), \tag{11.15}$$

откуда следует равностепенная непрерывность φ^* для множества $\{\varphi\}$, ограниченного в $W_p^{(l)}$, так как эта оценка сдвига не зависит от функции $\varphi\in\{\varphi\}$. Теорема доказана при $l\leqslant n$ (доказательство при $l>n$ проводится аналогично и с существенными упрощениями).

5. Полная непрерывность оператора вложения в L_{q^*}.

Теорема. *Если $1<p<\infty$, $n\geqslant lp$, $s>n-lp$, $q^*<sp/(n-lp)$, область Ω удовлетворяет условиям теоремы из п. 4, то оператор вложения пространства $W_p^{(l)}$ в L_{q^*} на сечении Ω любой гиперплоскостью s измерений вполне непрерывен, т. е. для всякого ограниченного множества $\{\varphi\}\subset W_p^{(l)}$ $\left(\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}\leqslant N\right)$ множество $\{\tilde{\varphi}\}$ является компактным в L_{q^*} на этом сечении.*

Доказательство. Эта теорема доказывается в основном так же, как и теорема из п. 4. Все сводится к доказательству равностепенной непрерывности в целом функций φ^* в L_{q^*}, если $\|\varphi\|_{L_p^{(l)}}\leqslant N$. Надо доказать, что

$$\|\varphi^*(\vec{P}^{(s)}+\Delta\vec{P})-\varphi^*(\vec{P}^{(s)})\|_{L_{q^*}}<\varepsilon, \tag{11.16}$$

лишь только $|\Delta\vec{P}|<\delta(\varepsilon)$, где $\delta\to 0$ вместе с $\varepsilon\to 0$. Для этого к правой части (11.14) применим лемму 2, положив $\lambda=n-l$; тогда неравенство $n\geqslant(n-\lambda)p$ выполнено, так как по условию теоремы $n\geqslant lp$. Мы получаем, используя неравенство (11.6),

$$\|\varphi^*(\vec{P}^{(s)}+\Delta\vec{P})-\varphi^*(\vec{P}^{(s)})\|_{L_{q^*}}\leqslant K\|\varphi\|_{L_q^{(l)}}\cdot|\Delta\vec{P}|^{\beta}; \tag{11.17}$$
$$\beta=\min\left[1;\ \frac{s}{q^*}-\left(\frac{n}{p}-l\right)\right],$$

откуда следует (11.16). Теорема доказана.

Замечание. Пусть в области Ω задана суммируемая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $E \subset \Omega$ — гладкое многообразие s измерений. Будем говорить, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в смысле $L_{q^*,s}$, если

$$\int_E |\varphi(\vec{P} + \Delta\vec{P}) - \varphi(\vec{P})|^{q^*} dE \to 0 \quad \text{при} \quad |\Delta\vec{P}| \to 0, \qquad (11.18)$$

каково бы ни было многообразие E, лишь бы сдвиг E на вектор $\Delta\vec{P}$ лежал в Ω. Из доказанной выше теоремы следует, что для всякой функции $\varphi \in W_p^{(l)}$ функция $\tilde{\varphi}$ непрерывна в смысле $L_{q^*,s}$, если $s > n - lp$ и $q^* < sp/(n - lp)$. Если $n - lp < 0$, то φ непрерывна в обычном смысле после изменения на множестве меры нуль ([29–43]).

Глава II

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

12. Задача Дирихле

1. Введение. Как известно, уравнения математической физики часто оказываются уравнениями Эйлера для некоторых вариационных задач.

В вариационном исчислении для отыскания экстремума какого-либо функционала вида

$$\int_{\Omega} F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, x_j\right) d\Omega + \int_{S} \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_j}, x_j\right) dS,$$

где S — граница области Ω, в некотором классе функций находят решение некоторой краевой задачи для соответствующего уравнения Эйлера.

Однако эти же вариационные задачи об экстремуме функционалов могут иногда быть решены прямым путем. Естественно возникает вопрос, нельзя ли обратно в тех случаях, где основное уравнение есть уравнение Эйлера, свести данную краевую задачу к задаче вариационного исчисления, которую можно решить затем при помощи прямого метода. Именно в этом и состоит идея вариационных методов в математической физике ([44]).

Мы начнем изучение вариационных методов в математической физике с изучения простейшего уравнения эллиптического типа, а именно с уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{12.1}$$

Рассмотрим для этого уравнения задачу Дирихле, т. е. задачу отыскания гармонической функции, принимающей на границе заданные значения.

Пусть Ω — ограниченная область n-мерного пространства и S — ее граница, простая в смысле, определенном выше в п. 2, § 10, гл. I.

Рассмотрим в Ω функцию $u(x_1, \ldots x_n)$, суммируемую и имеющую суммируемые с квадратом все обобщенные производные первого порядка. Пусть

$$D(u) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega < \infty. \tag{12.2}$$

Это означает, что $u \in W_2^{(1)}$, и, следовательно, на основании теорем вложения $u \in L_2$ на всяком многообразии $n-1$ измерения, так как

$$2 < q = \frac{2(n-1)}{n-2}.$$

Более того, можно утверждать в силу полной непрерывности оператора вложения, что если кусок S_1 некоторого многообразия $n-1$ измерения сдвинуть на вектор $\Delta\vec{P}$ так, чтобы он оставался в Ω, то

$$\int\limits_{S_1} |u(\vec{P} + \Delta\vec{P}) - u(\vec{P})|^2 \, dS_{\vec{P}} \to 0, \tag{12.3}$$

если

$$|\Delta\vec{P}| \to 0.$$

Очевидно также, что не всякая функция $\varphi \in L_2$, заданная на поверхности S, может быть предельным значением некоторой функции $v \in W_2^{(1)}$, заданной внутри области. В самом деле, уже из теоремы вложения следует суммируемость предельных значений v на поверхности с любой степенью, меньшей чем $2\,\frac{n-1}{n-2}$. Позднее мы убедимся (см. п. 5), что такой суммируемости и даже непрерывности предельных значений еще недостаточно для того, чтобы эта функция могла служить предельным значением для функции из $W_2^{(1)}$.

Условимся называть функцию φ, заданную на границе S области Ω, *допустимой*, если существует такая функция $v \in W_2^{(1)}$, для которой φ служит предельным значением ([45]).

Задача Дирихле состоит в отыскании такой гармонической функции из $W_2^{(1)}$, которая принимает в указанном выше смысле на границе заданные допустимые значения φ:

$$u|_S = \varphi. \tag{12.4}$$

Переходим к решению этой задачи.

Для этого решим сначала вариационную задачу и затем докажем, что решение вариационной задачи является решением задачи Дирихле.

2. **Решение вариационной задачи.** Обозначим $W_2^{(1)}(\varphi)$ множество функций $v \in W_2^{(1)}$, принимающих на S значения φ. Так как φ — допустимая функция, то $W_2^{(1)}(\varphi)$ — непустое множество. Для каждой $v \in W_2^{(1)}(\varphi)$ имеем $0 \leqslant D(v) < \infty$, поэтому существует точная нижняя граница значений $D(v)$:

$$d = \inf_{v \in W_2^{(1)}(\varphi)} D(v), \quad d \geqslant 0. \tag{12.5}$$

Из множества $W_2^{(1)}(\varphi)$ можно выделить последовательность $\{v_k\}$, для которой

$$\lim_{k \to \infty} D(v_k) = d, \tag{12.6}$$

что следует из определения точной нижней границы. Последовательность $\{v_k\}$ назовем *минимизирующей.*

Теорема. *Минимизирующая последовательность $\{v_k\}$ сходится в $W_2^{(1)}$; предельная функция принадлежит $W_2^{(1)}(\varphi)$ и дает функционалу $D(v)$ наименьшее значение среди всех таких функций.*

Доказательство. Действительно, определим норму в $W_2^{(1)}$ формулой

$$\|v\|_{W_2^{(1)}} = \left\{ \left[\int_S v\,dS \right]^2 + D(v) \right\}^{1/2}, \tag{12.7}$$

получающейся из формул (7.5) и (9.8) при $(h, v) = \int_S v\,dS$.

Из равенства $\int_S (v_k - v_m)\,dS = 0$ получим

$$\| v_k - v_m \|_{W_2^{(1)}} = [D(v_k - v_m)]^{1/2}.$$

Сходимость $\{v_k\}$ в $W_2^{(1)}$ будет доказана, если мы докажем, что $D(v_k - v_m) \to 0$ при $k, m \to \infty$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Найдется такое $N > 0$, что $D(v_k) < d + \varepsilon$, если $k > N$. Пусть k и $m > N$. Очевидно, $\frac{v_k + v_m}{2} \in W_2^{(1)}(\varphi)$; и поэтому

$$D\left(\frac{v_k + v_m}{2}\right) \geqslant d.$$

Из очевидного равенства

$$D\left(\frac{v_k + v_m}{2}\right) + D\left(\frac{v_k - v_m}{2}\right) = \frac{1}{2} D(v_k) + \frac{1}{2} D(v_m)$$

следует неравенство

$$d + D\left(\frac{v_k - v_m}{2}\right) < \frac{d + \varepsilon}{2} + \frac{d + \varepsilon}{2} = d + \varepsilon,$$

т. е.

$$D\left(\frac{v_k - v_m}{2}\right) < \varepsilon, \quad \text{или } D(v_k - v_m) < 4\varepsilon,$$

и, следовательно,

$$D(v_k - v_m) \to 0 \quad \text{при} \quad k, m \to \infty.$$

Из полноты пространства $W_2^{(1)}$ следует, что $\{v_k\}$ сходится к некоторой функции $v_0 \in W_2^{(1)}$, т. е. $\|v_0 - v_k\|_{W_2^{(1)}} \to 0$, $k \to \infty$. Докажем, что $D(v_0) = d$. Для этого заметим, что

$$|D(v_0) - D(v_k)| = \left| \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial v_0}{\partial x_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 \right] d\Omega \right| =$$

$$= \left| \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial v_0}{\partial x_i} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \right] d\Omega \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \left| \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_i} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) d\Omega \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \left[\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_i} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \right]^{1/2} \left[\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n \|v_0 + v_k\|_{W_2^{(1)}} \left[\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_i} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \|v_0 + v_k\|_{W_2^{(1)}} \cdot \|v_0 - v_k\|_{W_2^{(1)}},$$

Отсюда следует, что

$$D(v_0) = \lim_{k\to\infty} D(v_k) = d.$$

Нетрудно теперь установить, что $v_0 \in W_2^{(1)}(\varphi)$.

Действительно, $v_0 \in W_2^{(1)}$ и, следовательно, функция v_0 имеет смысл на каждом многообразии $n-1$ измерения и на всяком таком многообразии принадлежит L_2.

Значение функции v_0 на поверхности S равно φ. В самом деле,

$$\int_S (v_k - v_0)^2\, dS \leqslant \| v_k - v_0 \|^2_{W_2^{(1)}}$$

и, следовательно,

$$\int_S (v_k - v_0)^2\, dS \to 0,$$

но $v_k|_S = \varphi$, и поэтому

$$\int_S (\varphi - v_0)^2\, dS = 0.$$

Функция v_0 принимает свое граничное значение φ, стремясь к нему в среднем, как это было установлено в теоремах вложения.

Таким образом, $v_0 \in W_2^{(1)}$ такова, что

$$1)\ \ v_0|_S = \varphi,\ \ 2)\ \ D(v_0) = d. \tag{12.8}$$

Следовательно, вариационная задача решена.

3. Решение задачи Дирихле.

Теорема. *Функция, дающая минимум $D(v)$ в $W_2^{(1)}(\varphi)$, есть решение задачи Дирихле.*

Доказательство. Докажем, что v_0 внутри Ω имеет непрерывные производные любого порядка и удовлетворяет уравнению (12.1).

Пусть $\xi \in W_2^{(1)}$, $\xi|_S = 0$. Рассмотрим

$$D(v_0 + \lambda\xi) = D(v_0) + 2\lambda D(v_0, \xi) + \lambda^2 D(\xi), \tag{12.9}$$

где $D(v_0, \xi) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\, d\Omega$.

В силу того, что $v_0 + \lambda\xi \in W_2^{(1)}(\varphi)$, имеем $D(v_0 + \lambda\xi) \geqslant$

$\geqslant d = D(v_0)$, и поэтому (12.9) имеет минимум при $\lambda = 0$. По теореме Ферма имеем

$$D(v_0, \xi) = 0. \tag{12.10}$$

Выберем $\xi(x_1, \ldots, x_n)$ специальным образом. Пусть $\psi(\eta)$ такова, что $\psi(\eta) = 1$ для $0 \leqslant \eta \leqslant 1/2$, $\psi(\eta) = 0$ для $\eta \geqslant 1$, $\psi(\eta)$ монотонна в $[1/2, 1]$ и имеет для всех $\eta \in [0, \infty]$ непрерывные производные любого порядка. Например, положим

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{th}\frac{\eta - \frac{3}{4}}{\left(\eta - \frac{1}{2}\right)(\eta - 1)}\right], \quad \frac{1}{2} < \eta < 1.$$

Рассмотрим некоторую внутреннюю точку M_0 области Ω; расстояние до нее от любой точки обозначим r; пусть M_0 отстоит от S на расстоянии δ. Выберем два числа h_1 и h_2

$$0 < h_1 < h_2 < \delta$$

и положим при $n > 2$

$$\xi = r^{2-n}\left[\psi\left(\frac{r}{h_1}\right) - \psi\left(\frac{r}{h_2}\right)\right]$$

(при $n = 2$ доказательство проводится аналогично, полагая $\xi = \ln\frac{1}{r}\left[\psi\left(\frac{}{h_1}\right) - \psi\left(\frac{r}{h_2}\right)\right]$). Очевидно, что $\xi|_S = 0$ в силу выбора h_1 и h_2. Кроме того, $\xi = 0$ для $r < h_1/2$, и, следовательно, функция ξ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка, а, значит, $\xi \in W_2^{(1)}$. Для такой ξ имеет место (12.10). В силу определения обобщенной производной $\frac{\partial v_0}{\partial x_i}$ имеем

$$\int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\, d\Omega = -\int_\Omega v_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i^2}\, d\Omega.$$

При этом равенство (12.10) дает

$$\int_\Omega v_0 \Delta\xi\, d\Omega = 0. \tag{12.11}$$

Но

$$\Delta\xi = \Delta\left(r^{2-n}\psi\left(\frac{r}{h_1}\right)\right) - \Delta\left(r^{2-n}\psi\left(\frac{r}{h_2}\right)\right) = \frac{1}{h_1^n}\,\omega\left(\frac{r}{h_1}\right) - \frac{1}{h_2^n}\,\omega\left(\frac{r}{h_2}\right),$$

где $\omega\left(\frac{r}{h_i}\right) = h_i^n\Delta\left(r^{2-n}\psi\left(\frac{r}{h_i}\right)\right) = h_i^2\Delta\left[\left(\frac{r}{h_i}\right)^{2-n}\psi\left(\frac{r}{h_i}\right)\right]$, и очевидно, что правая часть есть функция только от r/h_i.

Пользуясь тем, что $\psi\left(\frac{r}{h_i}\right) = 1$ для $r < \frac{h_i}{2}$ и $\Delta r^{2-n} = 0$, получим

$$\omega\left(\frac{r}{h_i}\right) = 0 \quad \text{при} \quad r < h_i/2 \quad \text{и} \quad r > h_i.$$

Таким образом, $\Delta\xi$ есть разность двух сколь угодно раз непрерывно дифференцируемых во всем пространстве функций, и равенство (12.11) дает

$$\frac{1}{h_1^n}\int_\Omega v_0\omega\left(\frac{r}{h_1}\right)d\Omega = \frac{1}{h_2^n}\int_\Omega v_0\omega\left(\frac{r}{h_2}\right)d\Omega. \tag{12.12}$$

Умножая обе части (12.12) на $\frac{1}{(n-2)\sigma_n}$, где σ_n — площадь поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве, получим

$$\frac{1}{(n-2)\sigma_n h_1^n}\int_\Omega v_0\omega\left(\frac{r}{h_1}\right)d\Omega = \frac{1}{(n-2)\sigma_n h_2^n}\int_\Omega v_0\omega\left(\frac{r}{h_2}\right)d\Omega. \tag{12.13}$$

Функция $\frac{1}{(n-2)\sigma_n h^n}\,\omega\left(\frac{r}{h}\right)$ может быть принята за ядро усреднения (см. п. 4, § 2, глава I), так как интеграл от нее по всему пространству равен единице. В самом деле,

$$\frac{1}{(n-2)\sigma_n h^n}\int_\Omega \omega\left(\frac{r}{h}\right)d\Omega = \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_\Omega \Delta\left(r^{2-n}\psi\left(\frac{r}{h}\right)\right)d\Omega =$$

$$= \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\int_{r=h} \frac{\partial\left(r^{2-n}\psi\left(\frac{r}{h}\right)\right)}{\partial r}\,dS -$$

$$-\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\int\limits_{r=h/2}\frac{\partial\left(r^{2-n}\psi\left(\frac{r}{h}\right)\right)}{\partial r}\,dS=\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{r=h/2}r^{1-n}dS=$$

$$=\frac{1}{\sigma_n}\left(\frac{h}{2}\right)^{1-n}\left(\frac{h}{2}\right)^{n-1}\sigma_n=1.$$

Пользуясь этим, равенство (12.13) можно переписать в виде

$$(v_0)_{h_1}=(v_0)_{h_2}. \tag{12.14}$$

Мы видим, что средние функции для v_0 не меняются с изменением h (если $h<\delta$) в точках, отстоящих от границы дальше чем на δ, и, следовательно, предел $(v_0)_h$ совпадает с $(v_0)_h$, т. е. $(v_0)_h=v_0$. Так как $(v_0)_h$ имеет непрерывные производные любого порядка, то это же верно и для v_0.

Пусть теперь ξ — любая функция, непрерывная с производными первого порядка в Ω и равная нулю вне некоторой внутренней области. Тогда, очевидно, интегрирование по частям дает

$$D(v_0,\xi)=-\int\limits_{\Omega}\xi\Delta v_0\,d\Omega=0,$$

откуда вследствие произвольности ξ заключаем

$$\Delta v_0=0,$$

т. е. v_0 есть решение уравнения (12.1) и, как было показано ранее, принимает на S значение φ (в смысле $L_{2,\,n-1}$). Таким образом, v_0 есть решение задачи Дирихле ([46]).

4. Единственность решения задачи Дирихле.

Теорема. *Решение задачи Дирихле в указанной постановке единственно.*

Установим предварительно одну важную лемму. Введем функцию

$$\Psi_{2h}=\begin{cases}1 & \text{в} \quad \Omega_{2h},\\ 0 & \text{вне} \quad \Omega_{2h},\end{cases}$$

где Ω_δ — совокупность тех точек Ω, расстояние которых до S больше δ. Образуем среднюю функцию для Ψ_{2h} с помощью ядра $\frac{1}{\varkappa h^n}\psi\left(\frac{r}{h}\right)$, где ψ — введенная ранее функция и $\varkappa = \sigma_n \int\limits_0^1 \eta^{n-1}\psi(\eta)\,d\eta$. Эту среднюю функцию обозначим через χ_h:

$$\chi(\vec{P}) = \frac{1}{\varkappa h^n} \int\limits_{r \leqslant h} \Psi_{2h}(\vec{P}_1)\,\psi\left(\frac{r}{h}\right) dv_{\vec{P}_1},$$

где $r = |\vec{P} - \vec{P}_1|$.

Лемма. *Пусть $\xi \in W_2^{(1)}$ непрерывна с частными производными первого порядка в Ω и $\xi|_S = 0$ в смысле $L_{2,\,n-1}$. Тогда, какова бы ни была функция $v \in W_2^{(1)}$, имеет место равенство*

$$D(v, \xi) = \lim_{h \to 0} D(v, \xi\chi_h). \tag{12.15}$$

Доказательство. Очевидно, χ_h имеет непрерывные производные любого порядка и $\chi_h = 1$ в Ω_{3h}, $\chi_h = 0$ вне Ω_h. Из равенства

$$\frac{\partial \chi_h}{\partial x_i} = \frac{1}{\varkappa h^n} \int\limits_{r \leqslant h} \Psi_{2h}(\vec{P}_1)\,\psi'\left(\frac{r}{h}\right) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{1}{h}\,dv_{\vec{P}_1}$$

заключаем, что

$$\left|\frac{\partial \chi_h}{\partial x_i}\right| < \frac{A}{h}. \tag{12.16}$$

Функция $\xi\chi_h$ имеет непрерывные производные первого порядка в Ω, равна нулю вне Ω_h и равна ξ внутри Ω_{3h}. Нам нужно доказать, что

$$D(v, \xi - \xi\chi_h) \to 0 \text{ при } h \to 0, \tag{12.17}$$

какова бы ни была $v \in W_2^{(1)}$. Оценим это выражение. Имеем

$$D(v, \xi - \xi\chi_h) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial(\xi - \xi\chi_h)}{\partial x_i}\,d\Omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(1 - \chi_h) - \xi \frac{\partial \chi_h}{\partial x_i}\right] d\Omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega - \Omega_{3h}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(1 - \chi_h)\,d\Omega - \int\limits_{\Omega_h - \Omega_{3h}} \xi \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \chi_h}{\partial x_i}\,d\Omega.$$

Как легко видеть, $|1-\chi_h|\leqslant 1$, поэтому первый интеграл правой части не превосходит

$$\left[\int\limits_{\Omega-\Omega_{3h}} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega\right]^{1/2}\left[\int\limits_{\Omega-\Omega_{3h}} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega\right]^{1/2},$$

и, следовательно, стремится к нулю при $h\to 0$ в силу сходимости интегралов $D(v)$ и $D(\xi)$.

Изучим второй интеграл. Мы имеем в силу (12.16)

$$\left|\int\limits_{\Omega_h-\Omega_{3h}} \xi\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \chi_h}{\partial x_i}d\Omega\right|\leqslant \frac{A}{h}\int\limits_{\Omega_h-\Omega_{3h}}|\xi|\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|d\Omega\leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{h}\int\limits_{\Omega_h-\Omega_{3h}}|\xi|\left[n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}d\Omega\leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_1}{h}\left[\int\limits_{\Omega_h-\Omega_{3h}}\xi^2 d\Omega\cdot\int\limits_{\Omega_h-\Omega_{3h}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega\right]^{1/2}.$$

В силу сходимости $D(v)$

$$\int\limits_{\Omega_h-\Omega_{3h}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Поэтому нам достаточно доказать ограниченность при $h\to 0$ выражения

$$\frac{1}{h^2}\int\limits_{\Omega_h-\Omega_{3h}}\xi^2 d\Omega, \tag{12.18}$$

и лемма будет доказана.

Пусть S' есть некоторая область в плоскости $y_n=0$ и Ω' — цилиндрическая область в n-мерном пространстве $(y_1, \ldots, y_n)$, заданная неравенствами

$$0<y_n<h_0 \quad (y_1, \ldots, y_{n-1})\in S'.$$

Пусть $\xi\in W_2^{(1)}$, $\xi|_{S'}=0$ в смысле $L_{2,n-1}$ и имеет в Ω' непрерывные производные. Тогда имеем, считая, что

$\Delta y_n > 0,$

$$|\xi(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n + \Delta y_n) - \xi(y_1 \ldots y_n)|^2 =$$

$$= \left| \int\limits_{y_n}^{y_n+\Delta y_n} \frac{\partial \xi}{\partial y_n} dy_n \right|^2 \leqslant \Delta y_n \int\limits_{y_n}^{y_n+\Delta y_n} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y_n}\right)^2 dy_n.$$

Интегрируя по S', получим

$$\int\limits_{S'} |\xi(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n + \Delta y_n) - \xi(y_1 \ldots y_n)|^2 dS \leqslant$$

$$\leqslant \Delta y_n \int\limits_{S'} \int\limits_{y_n}^{y_n+\Delta y_n} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y_n}\right)^2 dy_n dS \leqslant \Delta y_n \int\limits_{\Omega'} \left|\frac{\partial \xi}{\partial y_n}\right|^2 d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \Delta y_n \|\xi\|^2_{W_2^{(1)}}. \tag{12.19}$$

Устремляя y_n к нулю и заменяя Δy_n через ρ, получим

$$\int\limits_{S'} |\xi(y_1, \ldots, y_{n-1}, \rho)|^2 dS \leqslant \rho \|\xi\|^2_{W_2^{(1)}}.$$

Интегрируя по ρ в пределах от Ah до $Bh (A < B)$, найдем

$$\int\limits_{Ah}^{Bh} \int\limits_{S'} |\xi(y_1, \ldots, y_{n-1}, \rho)|^2 dS\, d\rho \leqslant Kh^2,$$

откуда

$$\frac{1}{h^2} \int\limits_{Ah \leqslant y_n \leqslant Bh} |\xi|^2 d\Omega \leqslant K, \tag{12.20}$$

где постоянная K не зависит от h.

Докажем теперь ограниченность выражения (12.18). Пусть $h_0 > 0$ — достаточно малое число. Разобьем область $\Omega - \Omega_h$ на конечное число перекрывающихся областей V_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ так, чтобы каждая часть «опиралась» на некоторый кусок S_i поверхности S. В каждом V_i, в силу наших предположений о поверхности S, найдется взаимно однозначное точечное непрерывно дифференцируемое с ограниченными первыми производными преобразование V_i на цилиндрическую область Ω_i с основанием S_i. При этом область $V_i(\Omega_h - \Omega_{3h})$ (пересечение V_i

и $(\Omega_k - \Omega_{3h})$) перейдет в некоторую область, лежащую в полосе

$$A_i h \leqslant y_n \leqslant B_i h.$$

Принимая во внимание (12.20), заключаем, что выражение (12.18) ограничено для каждого V_i и, следовательно, и для всей области $\Omega_h - \Omega_{3h}$. Таким образом, для всякой $v \in W_2^{(1)}$ и $\xi \in W_2^{(1)}$ $(\xi|_S = 0)$ имеем

$$D(v, \xi) = \lim_{h \to 0} D(v, \xi\chi_h).$$

Лемма доказана *).

Доказательство теоремы. Допустим, что кроме v_0 существует еще функция $u \in W_2^{(1)}(\varphi)$ такая, что $\Delta u = 0$. Для такой функции $D(u) > d$. Если бы $D(u) = d$, то u можно было бы поместить сколь угодно раз и как угодно далеко в минимизирующую последовательность, сходящуюся к v_0, и тогда мы пришли бы к выводу, что $v_0 = u$, так как минимизирующая последовательность сходится к v_0 всегда без выбора подпоследовательности.

Поэтому, предполагая, что u отлично от v_0, мы должны сделать заключение, что $D(u) > d$. Покажем, что это невозможно.

Если $u \in W_2^{(1)}$ и, кроме того, $\Delta u = 0$, а ξ — функция из только что доказанной леммы, то $D(u, \xi) = 0$. Это равенство получается очевидным предельным переходом из $D(u, \xi\chi_h) = 0$ в силу леммы.

Далее

$$D(u + \lambda\xi) = D(u) + 2\lambda D(u, \xi) + \lambda^2 D(\xi) = \\ = D(u) + \lambda^2 D(\xi) \geqslant D(u) > d$$

в силу предположения $D(u) > d$. С другой стороны, положив $\lambda = 1$ и $\xi = v_0 - u$ $(\xi|_S = 0)$, найдем $D(v_0) > d$, что противоречит доказанному ранее равенству $D(v_0) = d$.

Теорема полностью доказана.

5. Пример Адамара. В заключение приведем пример, принадлежащий Адамару и показывающий, что сумми-

*) Формула (12.20), а с нею и вся лемма могут быть доказаны не только для функций ξ, имеющих непрерывные производные внутри области, но и для любых функций из $W_2^{(1)}$, обращающихся в нуль на границе. Для этого достаточно осуществить предельный переход в (12.19), заменив ξ средней функцией ξ_h.

руемости и даже непрерывности функции, заданной на поверхности, еще недостаточно для того, чтобы эта функция могла служить предельным значением для функции из $W_2^{(1)}$.

Пусть Ω есть круг $x^2+y^2<1$ в плоскости (x, y) и (ρ, θ) — полярные координаты в этой плоскости.

Пусть $\varphi(\theta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^4\theta}{n^2}$. Очевидно, что $\varphi(\theta)$ — непрерывная функция и функция

$$u_1(\rho, \theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^4\theta}{n^2}\rho^{n^4}$$

есть гармоническая функция в круге $x^2+y^2<1$, непрерывная в его замыкании и обращающаяся в $\varphi(\theta)$ при $\rho=1$.

Далее имеем

$$\iint\limits_{\rho<\rho_0<1}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=$$

$$=\int_0^{\rho_0}\rho\left[\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2\right\}d\theta\right]d\rho=$$

$$=2\pi\int_0^{\rho_0}\sum_{n=1}^{\infty}n^4\rho^{2n^4-1}d\rho=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\rho_0^{2n^4}\to\infty \text{ при } \rho_0\to 1,$$

откуда следует, что $u_1 \overline{\in} W_2^{(1)}$ в Ω.

Если бы $\varphi(\theta)$ была допустимой функцией в смысле п. 1, то, решая задачу Дирихле вариационным методом, нашли бы гармоническую функцию $u_2(x, y)\in W_2^{(1)}$ такую, что

$$\int_0^{2\pi}|u_2(\rho, \theta)-\varphi(\theta)|^2\,d\theta\to 0 \quad \text{при} \quad \rho\to 1,$$

и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi}|u_2(\rho, \theta)-\varphi(\theta)|\,d\theta\to 0 \quad \text{при} \quad \rho\to 1.$$

Такое же утверждение имеет место для u_1, так как

$u_1(\rho, \theta)$ равномерно непрерывна. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} |u_2(\rho, \theta) - u_1(\rho, \theta)|\, d\theta \to 0 \tag{12.21}$$

при $\rho \to 1$.

Пусть $\rho_0 < \rho < 1$. Тогда по формуле Пуассона для гармонических функций в круге (см. [212, с. 240]) имеем

$$u_2(\rho_0, \theta_0) - u_1(\rho_0, \theta_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho^2 - 2\rho\rho_0\cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2}\,[u_2(\rho, \theta) - u_1(\rho, \theta)]\, d\theta. \tag{12.22}$$

При фиксированном ρ_0 и $\rho \to 1$ функция

$$\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho_0^2 - 2\rho_0\rho\cos(\theta - \theta_0) + \rho^2}$$

остается ограниченной, и, следовательно, на основании (12.21) правая часть (12.22) стремится к нулю при $\rho \to 1$. Так как левая часть (12.22) от ρ не зависит, то она равна нулю, и в силу произвольности ρ_0, θ_0 имеем: $u_1 \equiv u_2$. Это невозможно, так как $u_1 \overline{\in} W_2^{(1)}$. Следовательно, φ не является допустимой функцией ([47]).

13. Задача Неймана

1. Постановка задачи. Мы рассмотрели для уравнения Лапласа простейшую задачу: задачу Дирихле. Переходим к изучению другой основной задачи: задачи Неймана.

Пусть Ω — ограниченная область n-мерного пространства с достаточно гладкой границей S.

Пусть $u \in W_2^{(1)}$. Рассмотрим функционал

$$H(u) = D(u) + 2(\rho, u), \tag{13.1}$$

где $D(u) = \int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega$ и (ρ, u) — линейный функционал в $W_2^{(1)}$. В дальнейшем будем предполагать, что

$$(\rho, 1) = 0. \tag{13.2}$$

Теорема. *Если* $(\rho, 1) = 0$, *то функционал* $H(u)$ *ограничен снизу.*

Доказательство. Если $u-v=\mathrm{const}$, то $(\rho, u)=(\rho, v)$, т. е. (ρ, u) сохраняет постоянное значение на всяком классе $\psi\in L_2^{(1)}$. В силу линейности функционала ρ имеем

$$|(\rho, u)|\leqslant M\|u\|_{W_2^{(1)}}.$$

Так как для всего класса $\psi\in L_2^{(1)}$ (ρ, u) сохраняет постоянное значение, а для одной из функций u_1 из этого класса $\|u_1\|_{W_2^{(1)}}=\|u_1\|_{L_2^{(1)}}$, то

$$|(\rho, u)|=|(\rho, u_1)|\leqslant M\|u_1\|_{L_2^{(1)}}=M\|u\|_{L_2^{(1)}}=M\sqrt{D(u)}.$$

Поэтому имеем

$$H(u)=D(u)+2(\rho, u)\geqslant D(u)-2|(\rho, u)|\geqslant$$
$$\geqslant D(u)-2M\sqrt{D(u)}=(\sqrt{D(u)}-M)^2-M^2\geqslant -M^2,$$

т. е.

$$H(u)\geqslant -M^2.$$

Теорема доказана.

Следовательно, существует точная нижняя грань $H(u)$, которую обозначим через $-d$:

$$\inf H(u)=-d. \tag{13.3}$$

2. Решение вариационной задачи.

Теорема. *Существует функция $u\in W_2^{(1)}$ такая, что $H(u)=-d$. Кроме того, для любой $\xi\in W_2^{(1)}$ справедливо равенство*

$$D(u, \xi)+(\rho, \xi)=0. \tag{13.4}$$

Доказательство. Пусть $\{v_k\}$ — минимизирующая последовательность, т. е. $v_k\in W_2^{(1)}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} H(v_k)=-d$.

Тогда очевидно, что

$$D\left(\frac{v_k-v_m}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}[D(v_k)+2(\rho, v_k)]+\frac{1}{2}[D(v_m)+2(\rho, v_m)]-$$
$$-\left[D\left(\frac{v_k+v_m}{2}\right)+2\left(\rho, \frac{v_k+v_m}{2}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}H(v_k)+\frac{1}{2}H(v_m)-H\left(\frac{v_k+v_m}{2}\right).$$

Выбрав k и m настолько большими, чтобы $H(v_k) < -d + \varepsilon$ и $H(v_m) < -d+\varepsilon$, и принимая во внимание, что $-H\left(\frac{v_k+v_m}{2}\right) < d$, имеем

$$D\left(\frac{v_k-v_m}{2}\right) < \frac{-d+\varepsilon}{2} + \frac{-d+\varepsilon}{2} + d = \varepsilon,$$

т. е.

$$D(v_k - v_m) < 4\varepsilon.$$

Таким образом, $\{v_k\}$ сходится в $L_2^{(1)}$. В силу того, что $H(u)$ сохраняет постоянное значение на всяком классе $\psi \in L_2^{(1)}$ и для одной из функций u_1 этого класса $\|u_1\|_{W_2^{(1)}} = \|u_1\|_{L_2^{(1)}}$, то в качестве минимизирующей последовательности всегда можно взять последовательность, для которой

$$\|v_k\|_{W_2^{(1)}} = \|v_k\|_{L_2^{(1)}}.$$

При таком выборе последовательность v_k сходится в $W_2^{(1)}$. Пусть $u \in W_2^{(1)}$ — предельная функция.

Подобно тому как это мы имели выше при рассмотрении задачи Дирихле, получим

$$\begin{aligned}|H(u) - H(v_k)| = |D(u) - D(v_k) + 2(\rho, u - v_k)| \leqslant \\ \leqslant |D(u) - D(v_k)| + 2|(\rho, u-v_k)| \leqslant \\ \leqslant \left(\|u\|_{L_2^{(1)}} + \|v_k\|_{L_2^{(1)}}\right)\|u - v_k\|_{L_2^{(1)}} + 2M\|u - v_k\|_{W_2^{(1)}},\end{aligned}$$

поэтому

$$|H(u) - H(v_k)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда следует, что $H(u) = \lim\limits_{k\to\infty} H(v_k) = -d$. Пусть $\xi \in W_2^{(1)}$. Тогда

$$H(u+\lambda\xi) = H(u) + 2\lambda[D(u, \xi) + (\rho, \xi)] + \lambda^2 D(\xi)$$

имеет минимум при $\lambda = 0$, и по теореме Ферма имеем

$$D(u, \xi) + (\rho, \xi) = 0.$$

Теорема доказана.

Каждая функция $u \in W_2^{(1)}$ суммируема по S с любой степенью q^*, где

$$q^* < q = \frac{2(n-1)}{n-2}.$$

Обозначим через $L_{q^*}(S)$ множество функций v, определенных на S и суммируемых со степенью q^*. Пусть (ρ_S, v) есть линейный функционал в $L_{q^*}(S)$. Тогда по теореме вложения $(\rho_S, u|_S)$ линеен в $W_2^{(1)}$. Действительно, если $u \in W_2^{(1)}$, то

$$|(\rho_S, u|_S)| \leqslant K_1 \| u \|_{L_{q^*}(S)} \leqslant K_1 M \| u \|_{W_2^{(1)}} = K \| u \|_{W_2^{(1)}},$$

где K_1, M, K — некоторые постоянные. Полученное неравенство доказывает наше утверждение.

3. Решение задачи Неймана.

Теорема 1. *Если* $(\rho_S, 1) = 0$, *то существует функция* $u \in W_2^{(1)}$ *такая, что*

1) u *имеет в* Ω *непрерывные производные любого порядка и удовлетворяет уравнению*

$$\Delta u = 0, \tag{13.5}$$

2) *пусть* Ω_k — *произвольная возрастающая последовательность областей, имеющих достаточно гладкую границу* S_k, *содержащихся в* Ω *и стремящихся к* Ω. *Тогда*

$$\lim_{k \to \infty} \int_{S_k} \frac{\partial u}{\partial \nu} \xi \, dS_k = -(\rho_S, \xi), \tag{13.6}$$

где ν — *внешняя нормаль к* S_k *и* $\xi \in W_2^{(1)}$ — *произвольная функция.*

Задачу об отыскании такой функции u мы будем называть *задачей Неймана.*

Доказательство. На основании теоремы из п. 2 существует функция $u \in W_2^{(1)}$, такая, что

$$D(u, \xi) + (\rho_S, \xi) = 0 \text{ для любой } \xi \in W_2^{(1)}. \tag{13.7}$$

Если выбрать $\xi = 0$ в некоторой полосе у границы S, то $(\rho_S, \xi) = 0$, и мы получим, что $D(u, \xi) = 0$. Отсюда, буквально повторяя рассуждения предыдущего параграфа, заключаем, что u непрерывно дифференцируема сколько угодно раз и удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$. Первое утверждение доказано.

Пусть ξ — произвольная функция из $W_2^{(1)}$. Имеем тогда

$$D(u, \xi) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \, d\Omega_k =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\int\limits_{S_k} \xi \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_k - \int\limits_{\Omega_k} \xi \Delta u \, d\Omega \right] = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{S_k} \xi \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_k.$$

Принимая во внимание (13.7), получим (13.6).

Теорема 2. *Решение задачи Неймана определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого.*

Доказательство. Пусть существуют две функции u_1 и $u_2 \in W_2^{(1)}$, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$ и одному и тому же условию (13.6). Их разность $\psi = u_1 - u_2$ является гармонической функцией и удовлетворяет условию

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{S_k} \xi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \, dS_k = 0.$$

Положив $\xi = \psi$, найдем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{S_k} \psi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \, dS_k = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} |\operatorname{grad} \psi|^2 \, d\Omega_k = D(\psi) = 0,$$

откуда следует, что $\psi = \mathrm{const}$.

Замечание. Если $(\rho_S, u) = \int\limits_S \varphi u \, dS$, то «граничное» условие (13.6) принимает вид

$$\int\limits_S \varphi \xi \, dS + \lim_{k\to\infty} \int\limits_{S_k} \xi \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_k = 0.$$

Функционал $-(\rho_S, \xi)$ задает обобщенное граничное условие для функции u, причем величина $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ стремится к φ в слабом смысле. Такая постановка является в данном случае вполне естественной, так как предельное значение для $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, если $u \in W_2^{(1)}$, может не существовать ([48]).

14. Полигармоническое уравнение

1. Поведение функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^{(m)}$ у граничных многообразий различных измерений. Рассмотренные нами вариационные методы могут быть перенесены и на краевые задачи для полигармонических уравнений. Переходим к изучению основной краевой задачи для такого уравнения.

Пусть ограниченная область Ω в n-мерном пространстве имеет простую границу S (см. п. 2, § 10, гл. I). Уравнение

$$\Delta^m u = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^m u = 0 \tag{14.1}$$

или

$$\sum_{\Sigma\alpha_i=m} \frac{m!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2\alpha_1}\ldots\partial x_n^{2\alpha_n}} = 0$$

называется *полигармоническим* уравнением.

Уравнение (14.1) является уравнением Эйлера для функционала

$$D(u) = \int_\Omega \sum_{\Sigma\alpha_i=m} \frac{m!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2 d\Omega. \tag{14,2}$$

Очевидно,

$$D(u) = \|u\|^2_{L_2^{(m)}}.$$

Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(m)}$. Если $n - 2m < 0$, то из теорем вложения следует, что $u(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна, и тогда она имеет предельные значения на многообразиях любого числа измерений. Если $n - 2m \geqslant 0$, и $n - s > n - 2m$, то $u(x_1, \ldots, x_n)$ суммируема на многообразиях $(n - s)$ измерений с любой степенью $q^* < q = \dfrac{2(n-s)}{n-2m}$. Так как $q > 2$, то можно взять $q^* = 2$. Следовательно, если $n - s > n - 2m \geqslant 0$, то $u \in L_{2,\,n-s}$ на многообразиях $n - s$ измерений, которые будем обозначать S_{n-s}.

Таким образом, $u \in L_{2,\,n-s}$ на S_{n-s}, если

$$s < 2m. \tag{14.3}$$

Более того, из полной непрерывности оператора вложения следует, что $u(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в смысле

$L_{2,n-s}$ и потому имеет предельные значения в смысле $L_{2, n-s}$ на частях границы S, имеющих размерность $n-s$, где $s<2m$. Как было доказано в п. 2, § 10, $u(x_1, \ldots, x_n)$ имеет все обобщенные производные порядка ниже m. Рассмотрим производные k-го порядка, где $k<m$.

Если $n<2m$, то производные k-го порядка принадлежат L_2 на многообразиях S_{n-s} $(n-s)$ измерений, где

$$s<2(m-k). \tag{14.4}$$

Из полной непрерывности оператора вложения следует, что производные k-го порядка непрерывны в смысле $L_{2, n-s}$, где s удовлетворяет (14.4), и поэтому на частях границы S_{n-s} имеют предельные значения в смысле $L_{2, n-s}$.

Из неравенства (14.4) следует, что

$$k \leqslant m-\left[\frac{s}{2}\right]-1, \tag{14.5}$$

т. е. на многообразиях $(n-s)$ измерений существуют предельные значения в смысле $L_{2, n-s}$ производных до порядка $m-\left[\frac{s}{2}\right]-1$.

Эти результаты сведем в таблицу.

На многообразиях границы	существуют предельные значения в смысле	функции и всех производных до порядка включительно
S_{n-1}	$L_{2, n-1}$	$m-1$
S_{n-2}	$L_{2, n-2}$	$m-2$
S_{n-3}	$L_{2, n-3}$	$m-2$
S_{n-4}	$L_{2, n-4}$	$m-3$
. . . .	. . . .	. . . .
S_{n-2k}	$L_{2, n-2k}$	$m-k-1$
S_{n-2k-1}	$L_{2, n-2k-1}$	$m-k-1$
. . . .	. . . .	. . . .
S_{n-2m+2}	$L_{2, n-2m+2}$	0
S_{n-2m+1}	$L_{2, n-2m+1}$	0

Эта таблица составлена в предположении, что $n-2m+1>0$. Если $n-2m+1 \leqslant 0$, то при некотором k либо $n-2k=0$, либо $n-2k-1=0$. Тогда имеем $m-k-1<m-\frac{n}{2}$, и, следовательно, сама функция и все ее производные до порядка $m-k-1$ непрерывны.

Таблица оборвется строчкой: на S_0 существуют предельные значения функции и всех производных до $m-k-1$ порядка включительно. На многообразиях $S_1, \ldots, S_{n-1}$ производные до $(m-k-1)$-го порядка также непрерывны.

Очевидно, из непрерывности функций следует непрерывность в смысле $L_{2\ n-s}$. Поэтому в последующих оценках обычную непрерывность отмечать не будем и все рассуждения будем вести в предположении непрерывности в смысле $L_{2\ n-s}$.

2. Постановка основной краевой задачи. Пусть граница области состоит из многообразий $S_{n-1}, \ldots, S_{n-2m+1}$, если $n-2m+1>0$, и из многообразий $S_{n-1}, \ldots, S_0$, если $n-2m+1\leqslant 0$. Некоторые из многообразий могут отсутствовать.

Пусть теперь на каждом из многообразий S_{n-s} заданы функции

$$\varphi^{(n-s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n},\quad 0\leqslant\sum\alpha_i\leqslant m-\left[\frac{s}{2}\right]-1.$$

Если существует функция $u\in W_2^{(m)}$ такая, что

$$\left.\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|_{S_{n-s}}=\varphi^{(n-s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \tag{14.6}$$

то будем говорить, что *система граничных значений*

$$\left\{\varphi^{(n-s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\right\}$$

допустима ([49]).

Для любых допустимых граничных значений очевидно, что если $n-2m+1>0$, то все $\varphi^{(n-s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\in L_{2,n-s}$, и, если $n-2m+1\leqslant 0$, то те функции, для которых $0\leqslant\sum\alpha_i\leqslant m-\left[\frac{n}{2}\right]-1$, непрерывны, а остальные принадлежат $L_{2,\ n-s}$.

Для полигармонического уравнения, в отличие от уравнения Лапласа, мы можем задавать краевые значения не только на поверхности размерности $n-1$, но и задавать допустимые значения на поверхности меньшей размерности, как это показывает следующий пример.

Рассмотрим уравнение $\Delta^2 u=0$ в трехмерном пространстве. Имеем $n=3$, $m=2$, $n-2m+1=0$.

В качестве граничных многообразий обязательно должно быть S_2 и могут быть S_1 и S_0. Так как $m-\left[\frac{n}{2}\right]-1=0$, то сама функция u непрерывна. На многообразии S_2 мы задаем $u|_{S_2}$ непрерывной и $\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{S_2} \in L_2$, которые должны быть допустимы. На S_1 и S_0 задается функция u.

Пусть Ω — шар единичного радиуса с исключенным центром: $0<x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$. В нашем примере S_1 отсутствует. Рассмотрим решение, удовлетворяющее условиям

$$u(0, 0, 0)=1 \quad (\text{задание на } S_0);$$
$$u|_{r=1}=\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=0 \quad (\text{задание на } S_2).$$

Задание на S_2, очевидно, равносильно следующему:

$$u|_{S_2}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{S_2}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{S_2}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_{S_2}=0.$$

Функция $u=(1-r)^2$ является решением задачи. Действительно, она удовлетворяет уравнению и граничным условиям. В точке $r=0$ производные не существуют. Вторые производные суммируемы с квадратом по Ω, т. е. $u\in W_2^{(2)}$. Как мы докажем позднее, другого решения в $W_2^{(2)}$ нет. Если бы S_0 отсутствовало, то решение было бы $u\equiv 0$.

3. Решение вариационной задачи. Переходим к изучению основной краевой задачи для полигармонического уравнения в общем виде.

Теорема. *Если система* $\left\{\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(n-s)}\right\}$ *допустима, то существует единственная функция* $u\in W_2^{(m)}$, *удовлетворяющая условиям* (14.6) *и дающая минимум интегралу* $D(u)$ *среди всех таких функций.*

Доказательство. Обозначим $W_2^{(m)}\left\{\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(n-s)}\right\}$ множество функций $v\in W_2^{(m)}$ и удовлетворяющих (14.6). Так как система $\left\{\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(n-s)}\right\}$ допустима, то $W_2^{(m)}\left\{\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(n-s)}\right\}$ — непустое множество. Для каждой функции v из этого множества имеем $0\leqslant D(v)<\infty$. Поэтому существует точная нижняя граница значений $D(v)$, которую обозначим d:

$$d = \inf D(v), \quad v \in W_2^{(m)}\left\{\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(n-s)}\right\}.$$

Из множества $W_2^{(m)}\left\{\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(n-s)}\right\}$ можно выделить минимизирующую последовательность $\{v_k\}$, так что

$$\lim_{k\to\infty} D(v_k) = d. \tag{14.7}$$

Докажем, что $\{v_k\}$ сходится в $W_2^{(m)}$.

Для того чтобы определить в пространстве $W_2^{(m)}$ какую-либо естественную норму, как мы видели, достаточно задать систему линейных функционалов

$$\rho_{\beta_1\ldots\beta_n} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \leqslant m-1\right),$$

ограниченных в одной из естественных норм и таких, что для любой их линейной комбинации

$$\rho = \sum_{\Sigma\beta_i \leqslant m-1} A_{\beta_1\ldots\beta_n} \rho_{\beta_1\ldots\beta_n},$$

у которой не все коэффициенты равны нулю, найдется хоть один одночлен $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, для которого эта комбинация не равна нулю.

Рассмотрим поверхность S_{n-1}. По предположению эта поверхность состоит из конечного числа гладких кусков. Положим

$$\rho_{\beta_1\ldots\beta_n} v = \int\limits_{S_{n-1}} \frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n} v}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}\, dS_{n-1}, \tag{14.8}$$

где v — любой элемент из $W_2^{(m)}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \leqslant m-1$.

Нетрудно видеть, что все функционалы $\rho_{\beta_1\ldots\beta_n}$ линейны в $W_2^{(m)}$, если норму в нем определить при помощи шарового проекционного оператора. Это непосредственно следует из теорем вложения.

Пусть теперь $\varphi = \sum A_{\beta_1\ldots\beta_n}\rho_{\beta_1\ldots\beta_n}$ — какая-либо линейная комбинация функционалов $\rho_{\beta_1\ldots\beta_n}$. Пусть

$A_{\beta_1^{(0)}..\beta_n^{(0)}}$ — какой-либо из не равных нулю коэффициентов, для которых сумма $\beta_1^{(0)} + \ldots + \beta_n^{(0)} = \sigma^{(0)}$ имеет наименьшее значение среди всех сумм $\beta_1 + \ldots + \beta_n = \sigma$. Тогда $\rho x_1^{\beta_1^{( )}} \ldots x_n^{\beta_n^{(0)}} \neq 0$.

В самом деле, для $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq (\beta_1^{(0)}, \ldots, \beta_n^{(0)})$ имеем $\dfrac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n} x_1^{\beta_1^{(0)}} \ldots x_n^{\beta_n^{(0)}}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} = 0$, так как хотя бы для одного k $\beta_k > \beta_k^{(0)}$, поскольку $\beta_1 + \ldots + \beta_n \geqslant \beta_1^{(0)} + \ldots + \beta_n^{(0)}$. Поэтому получим

$$\rho x_1^{\beta_1^{(0)}} \ldots x_n^{\beta_n^{(0)}} = \int\limits_{S_{n-1}} A_{\beta_1^{(0)}..\beta_n^{(0)}} dS_{n-1} \beta_1^{(0)}! \ldots \beta_n^{(0)}! \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы можем определить норму в $W_2^{(m)}$ формулой

$$\| v \|^2_{W_2^{(m)}} = \sum_{\mu} (\rho_\mu v)^2 + D(v), \tag{14.9}$$

где μ обозначает $\beta_1, \ldots, \beta_n$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \leqslant m - 1$. Тогда для двух функций v_k и v_l минимизирующей последовательности получим $\rho_\mu v_k = \rho_\mu v_l$, и поэтому

$$\| v_k - v_l \|_{W_2^{(m)}} = D(v_k - v_l).$$

Возьмем k и l настолько большими, чтобы $D(v_k) < d + \varepsilon$, $D(v_l) < d + \varepsilon$, что возможно вследствие (14.7).

Очевидно, $\dfrac{v_k + v_l}{2} \in W_2^{(m)}\left\{\varphi^{(n-s)}_{\alpha_1, \ldots \alpha_n}\right\}$, и поэтому $D\left(\dfrac{v_k + v_l}{2}\right) \geqslant d$. Из прежнего равенства

$$D\left(\frac{v_k - v_l}{2}\right) = \frac{1}{2} D(v_k) + \frac{1}{2} D(v_l) - D\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right)$$

найдем $D\left(\dfrac{v_k - v_l}{2}\right) < \dfrac{d + \varepsilon}{2} + \dfrac{d + \varepsilon}{2} - d = \varepsilon$, т. е. $D(v_k - v_l) < 4\varepsilon$, откуда в силу произвольности ε следует, что

$$\| v_k - v_l \|_{W_2^{(m)}} \to 0, \quad k, l \to \infty. \tag{14.10}$$

Так как пространство $W_2^{(m)}$ полное, то заключаем, что существует предельная функция $u \in W_2^{(m)}$, для которой $\|u - v_k\|_{W_2^{(m)}} \to 0$. Так же как в задаче Дирихле, доказывается, что

$$1)\ u \in W_2^{(m)}\left\{\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{(n-s)}\right\}, \tag{14.11}$$

$$2)\ D(u) = d. \tag{14.12}$$

Не существует двух различных функций, удовлетворяющих (14.11) и (14.12). Действительно, если бы u_1 и u_2 были такими двумя функциями, то последовательность $u_1, u_2, u_1, u_2, u_1, \ldots$ была бы минимизирующей и, следовательно, сходящейся, что возможно лишь при $u_1 = u_2$.

Теорема доказана.

4. Решение основной краевой задачи.

Теорема. *Функция u, дающая минимум интегралу $D(v)$ в $W_2^{(m)}\left\{\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{(n-s)}\right\}$, имеет непрерывные производные любого порядка внутри Ω и удовлетворяет уравнению* (14.1).

Доказательство. Пусть $\xi \in W_2^{(m)}\{0\}$. Тогда

$$u + \lambda\xi \in W_2^{(m)}\left\{\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{(n-s)}\right\}, \quad \lambda = \text{const},$$

и поэтому $D(u + \lambda\xi) = D(u) + 2\lambda D(u, \xi) + \lambda^2 D(\xi) \geqslant d$ для всех λ и имеет минимум, равный d, при $\lambda = 0$. Отсюда следует, что $\frac{d}{d\lambda} D(u + \lambda\xi)\Big|_{\lambda=0} = 0$, что дает

$$D(u, \xi) = 0. \tag{14.13}$$

Рассмотрим элементарное решение полигармонического уравнения

$$g(r) = \begin{cases} r^{2m-n}, & \text{если } 2m - n < 0 \text{ или } n \text{ нечетно,} \\ r^{2m-n} \ln \frac{1}{r}, & \text{если } 2m - n \geqslant 0 \text{ и } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Легко проверить, что $\Delta^m g(r) = 0$ при $r \neq 0$.

Пусть $\delta > 0$ — достаточно малое число. Рассмотрим область Ω_δ и образуем функцию $\xi = g(r)[\psi(r/h_1) - \psi(r/h_2)]$, где $0 < h_1 < h_2 < \delta$ и ψ — рассматривавшаяся ранее усредняющая функция (см. п. 3, § 12). Из свойств этой функции заключаем, что $\xi = 0$ для $r < h_1/2$, $r > h_2$, все производные ξ непрерывны. Если точка, от которой отсчитывается r, лежит в Ω_δ, то ξ и все ее производные на границе Ω обращаются в нуль. Поэтому для ξ имеет место (14.13). Так как ξ имеет непрерывные производные любого порядка и равна нулю вне Ω_δ, то по определению обобщенных производных $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_n}}$ имеем

$$\int_\Omega \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \cdot \frac{\partial^m \xi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\, d\Omega =$$

$$= (-1)^m \int_\Omega u \frac{\partial^{2m} \xi}{\partial x_1^{2\alpha_1} \ldots \partial x_n^{2\alpha_n}}\, d\Omega.$$

Поэтому равенство (14.13) дает

$$D(u, \xi) = (-1)^m \int_\Omega u \sum_{\Sigma\alpha_i = m} \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{\partial^{2m} \xi}{\partial x_1^{2\alpha_1} \ldots \partial x_n^{2\alpha_n}}\, d\Omega = 0$$

или

$$\int_\Omega u\, \Delta^m \xi\, d\Omega = 0. \tag{14.14}$$

Но $\Delta^m \xi = \Delta^m \left[g(r)\, \psi\left(\frac{r}{h_1}\right)\right] - \Delta^m \left[g(r)\, \psi\left(\frac{r}{h_2}\right)\right]$, и так как $\psi(r/h_i) = 1$ для $r \leqslant h_i/2$, а $\Delta^m g(r) = 0$, то

$$\Delta^m [g(r)\, \psi(r/h_i)] \equiv 0 \quad \text{для} \quad r \leqslant h_i/2 \quad (i = 1,\ 2).$$

Поэтому равенство (14.14) можно представить в виде

$$\int_\Omega u \Delta^m \left[g(r)\, \psi\left(\frac{r}{h_1}\right)\right] d\Omega = \int_\Omega u \Delta^m \left[g(r)\, \psi\left(\frac{r}{h_2}\right)\right] d\Omega, \tag{14.15}$$

причем обе части равенства имеют смысл.

Пусть $n > 2$. Рассмотрим функцию

$$\omega(r, h) = \frac{1}{(n-2) A \sigma_n} \Delta^m \left[g(r)\, \psi\left(\frac{r}{h}\right)\right],$$

где σ_n — площадь поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве и A — постоянная из равенства $\Delta^{m-1} g(r) = A/r^{n-2}$. Очевидно, что $\omega(r, h)$ имеет непрерывные производные любого порядка и равна нулю для $r \leqslant h/2$ и $r \geqslant h$, так как этими же свойствами обладает

$\Delta^m\{g(r)\psi(r/h)\}$. Далее

$$\int_\Omega \omega(r, h)\, d\Omega = \frac{1}{(n-2)A\sigma_n}\int_\Omega \Delta^m\left[g(r)\,\psi\left(\frac{r}{h}\right)\right]d\Omega =$$

$$= \frac{1}{(n-2)A\sigma_n}\int_\Omega \Delta\left\{\Delta^{m-1}\left[g(r)\,\psi\left(\frac{r}{h}\right)\right]\right\}d\Omega =$$

$$= \frac{1}{(n-2)A\sigma_n}\int_{r=h}\frac{d}{dr}\left\{\Delta^{m-1}\left[g(r)\,\psi\left(\frac{r}{h}\right)\right]\right\}dS -$$

$$- \frac{1}{(n-2)A\sigma_n}\int_{r=\frac{h}{2}}\frac{d}{dr}\left\{\Delta^{m-1}\left[g(r)\,\psi\left(\frac{r}{h}\right)\right]\right\}dS =$$

$$= \frac{h^{n-1}\sigma_n}{(n-2)\sigma_n A}\frac{d}{dr}\left\{\Delta^{m-1}\left[g(r)\,\psi\left(\frac{r}{h}\right)\right]\right\}_{r=h} -$$

$$- \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^{n-1}\sigma_n}{(n-2)\sigma_n A}\frac{d}{dr}\left\{\Delta^{m-1}\left[g(r)\,\psi\left(\frac{r}{h}\right)\right]\right\}_{r=h/2}.$$

Так как $\psi(r/h)$ и все ее производные при $r=h$ равны нулю, то первое слагаемое равно нулю. Второе слагаемое отлично от нуля, так как

$$\psi(r/h)\,|_{r=h/2} = 1, \quad \psi^{(k)}(r/h)\,|_{r=h/2} = 0 \qquad (k \geqslant 1).$$

В результате получаем

$$\int_\Omega \omega(r, h)\, d\Omega = \frac{(h/2)^{n-1}}{(n-2)A}\frac{d}{dr}\left\{\left[\Delta^{m-1}g(r)\right]\psi\left(\frac{r}{h}\right)\right\}\Big|_{r=h/2} =$$

$$= -\frac{(h/2)^{n-1}}{(n-2)A}\frac{d}{dr}\left[\frac{A}{r^{n-2}}\psi\left(\frac{r}{h}\right)\right]\Big|_{r=h/2} =$$

$$= -\frac{(h/2)^{n-1}}{n-2}\left[\frac{-(n-2)}{r^{n-1}}\psi\left(\frac{r}{h}\right) + \frac{1}{hr^{n-2}}\psi'\left(\frac{r}{h}\right)\right]\Big|_{r=h/2} = 1.$$

Таким образом, $\int_\Omega \omega(r, h)\, d\Omega = 1$, что показывает, что $\omega(r, h)$ есть ядро усреднения (см. п. 4, § 2, гл. I). Умножая (14.15) на $\frac{1}{(n-2)A\sigma_n}$, перепишем его в виде

$$\int_{\Omega} u\omega(r, h_1)\,d\Omega = \int_{\Omega} u\omega(r, h_2)\,d\Omega.$$

Это равенство означает, что средние функции для u не меняются в Ω_δ при изменении радиуса усреднения h $(h < \delta)$ и поэтому в Ω_δ u равна своей средней функции. Так как средние функции имеют непрерывные производные любого порядка, то это же верно и для u. Ввиду произвольности δ заключаем, что u имеет непрерывные производные в любой точке Ω при $n > 2$. Случай $n = 2$ рассматривается аналогично.

Пусть ξ имеет непрерывные производные до m-го порядка в Ω и равна нулю вне некоторой области, целиком лежащей в Ω. Для такой функции ξ имеет место (14.13), так как, очевидно, $\xi \in W_2^{(m)}\{0\}$. Интегрируя по частям в (14.13), найдем $\int_{\Omega} \xi\Delta^m u\,d\Omega = 0$, откуда ввиду произвольности ξ следует, что $\Delta^m u = 0$. Мы доказали, что u есть решение уравнения (14.1) при условиях (14.6). Будем называть рассмотренную задачу основной краевой задачей для полигармонического уравнения.

15. Единственность решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения

1. Постановка задачи.

Теорема. *Решение в $W_2^{(m)}$ основной краевой задачи (14.1), (14.6) единственно.*

Доказательство. Если допустить, что в $W_2^{(m)}$ существует еще одно решение w уравнения (14.1) при условиях (14.6), то мы должны иметь $D(w) > d$, так как в противном случае можно было бы образовать минимизирующую последовательность, в которой w встречались бы под какими угодно большими номерами. Из сходимости этой последовательности мы пришли бы к выводу: $u = w$. Докажем, что для всякого решения $w \in W_2^{(m)}$ уравнения (14.1) при условиях (14.6) невозможно неравенство

$$D(w) > d. \tag{15.1}$$

Пусть $\xi \in W_2^{(m)}\{0\}$ и пусть ξ внутри Ω имеет непрерывные производные до m-го порядка.

Если мы докажем, что

$$D(w, \xi) = 0, \tag{15.2}$$

то, повторяя буквально соответствующие рассуждения из доказательства единственности задачи Дирихле, придем к неравенству

$$D(u) > d,$$

что противоречит (14.12). Поэтому для доказательства невозможности (15.1) и установления единственности основной краевой задачи достаточно доказать (15.2).

2. Лемма. Подобно тому как мы поступали при доказательстве единственности задачи Дирихле, введем в Ω функцию

$$\Psi_{2h} = \begin{cases} 1 & \text{в} \quad \Omega_{2h}, \\ 0 & \text{вне} \quad \Omega_{2h}, \end{cases}$$

где $h > 0$.

Образуем среднюю функцию для Ψ_{2h} с помощью ядра $\frac{1}{\chi h^n}\psi\left(\frac{r}{h}\right)$. Эту среднюю функцию обозначим χ_h. Очевидно, что χ_h имеет производные любого порядка и $\chi_h = 1$ в Ω_{3h}, нулю вне Ω_h и всюду $|\chi_h| \leqslant 1$. Кроме того, нетрудно установить, что

$$\left| \frac{\partial^k \chi_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| < \frac{A}{h^k}. \tag{15.3}$$

Функция $\xi\chi_h$ имеет непрерывные производные до m-го порядка в Ω, равна нулю вне Ω_h, совпадает с ξ в Ω_{3h}. Докажем следующую основную лемму.

Лемма. *Для каждой $v \in W_2^{(m)}$ можно указать такую последовательность $\{h_r\}$ $(h_r \to 0)$, что*

$$D(v, \xi) = \lim_{r\to\infty} D(v, \xi\chi_{h_r}). \tag{15.4}$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$D(v, \xi - \xi\chi_h) =$$

$$= \int_\Omega \sum \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^m v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^m (\xi - \xi\chi_h)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) d\Omega =$$

$$
= \int\limits_{\Omega-\Omega_{3h}} \sum \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{\partial^m v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^m (\xi - \xi\chi_h)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} d\Omega =
$$

$$
= \int\limits_{\Omega-\Omega_{3h}} \sum \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{\partial^m v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^m \xi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_\alpha^{\alpha_n}} d\Omega -
$$

$$
- \int\limits_{\Omega-\Omega_{3h}} \sum \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{\partial^m v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \sum C^k_{\beta_1 \ldots \beta_n} \times
$$

$$
\times \frac{\partial^{m-k} \xi}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \frac{\partial^k \chi_h}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}} d\Omega,
$$

где $C^k_{\beta_1 \ldots \beta_n}$ — постоянные.

При $h \to 0$ первый интеграл стремится к нулю, так как v и $\xi \in W_2^{(m)}$ и $m(\Omega - \Omega_{3h}) \to 0$. Для доказательства (15.4) достаточно доказать, что второй интеграл стремится к нулю.

Для этого достаточно доказать, что

$$
J_k(h) = \left| \int\limits_{\Omega_h-\Omega_{3h}} \frac{\partial^m v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^{m-k} \xi}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \times \right.
$$

$$
\left. \times \frac{\partial^k \chi_h}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}} d\Omega \right| \to 0 \quad (h \to 0)
$$

$$
(k = 1, 2, \ldots, m)
$$

(для $k = 0$ очевидно, что $J_0(h) \to 0$, так как $v, \xi \in W_2^{(m)}$ и $|\chi_h| \leqslant 1$). Вследствие (15.3) имеем

$$
J_k(h) \leqslant \frac{A}{h^k} \int\limits_{\Omega_h-\Omega_{3h}} \left| \frac{\partial^m v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^{m-k} \xi}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right| d\Omega \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{A}{h^k} \left(\int\limits_{\Omega_h-\Omega_{3h}} \left| \frac{\partial^m v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 d\Omega \right)^{1/2} \times
$$

$$
\times \left(\int\limits_{\Omega_h-\Omega_{3h}} \left| \frac{\partial^{m-k} \xi}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right|^2 d\Omega \right)^{1/2}. \qquad (15.5)
$$

Обозначим $h_\mu^{\prime} = 1/3^\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$
\Omega = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\Omega_{h_\mu^{\prime}} - \Omega_{3h_\mu^{\prime}} \right) + \Omega_1,
$$

и так как $v \in W_2^{(m)}$, то ряд

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_{h'_\mu} - \Omega_{3h'_\mu}} \left| \frac{\partial^m v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 d\Omega$$

сходящийся. Поэтому найдется бесконечная последовательность членов этого ряда, меньших соответствующих членов заведомо расходящегося ряда $\sum\limits_{\mu=2}^{\infty} \frac{1}{\mu \ln \mu}$.

Иначе говоря, для бесконечной последовательности $\{\mu_r\}$ имеем, обозначая $h'_{\mu_r} = h_r$,

$$\int\limits_{\Omega_{h_r} - \Omega_{3h_r}} \left| \frac{\partial^m v}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 d\Omega \leqslant \frac{1}{\mu_r \ln \mu_r} =$$

$$= \frac{\ln 3}{|\ln h_r| \cdot [\ln |\ln h_r| - \ln \ln 3]} \leqslant \frac{K}{|\ln h_r| \cdot \ln |\ln h_r|}. \qquad (15.6)$$

Если доказать, что

$$\int\limits_{\Omega_h - \Omega_{3h}} \left| \frac{\partial^{m-k} \xi}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right|^2 d\Omega \leqslant B h^{2k} \ln |h| \qquad (15.7)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m),$$

то, очевидно, будем иметь из (15.5) и (15.6)

$$J_h(h_r) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{h_r^k} \sqrt{\frac{K}{|\ln h_r| \cdot \ln |\ln h_r|}} \sqrt{B h_r^{2k} |\ln h_r|} = \frac{A \sqrt{BK}}{\sqrt{\ln |\ln h_r|}}.$$

Следовательно, $J_k(h_r) \to 0$ при $r \to \infty$, чем будет доказано (15.4).

Таким образом, для доказательства (15.4) и основной леммы достаточно доказать (15.7).

3. Структура областей $\Omega_h - \Omega_{3h}$. Займемся более детальным изучением структуры областей $\Omega_h - \Omega_{3h}$. Разобьем всю границу области Ω на конечное число гладких кусков различных измерений S^*_{n-s}; к числу этих кусков присоединим все границы между двумя гладкими кусками одинаковой размерности и все особые многообразия типа конических точек или конических линий. Границы между кусками размерностей l будут, вообще говоря, иметь размерность $l-1$. Например, если область Ω есть куб, то многообразия S_2^* будут все грани куба, S_1^* — все его ребра и многообразия S_0^* — все его вершины. Если область есть прямой круговой конус, то нам придется рассмотреть два многообразия S_2^* — боковую поверхность и основание, S_1^* — границу основания и S_0^* — вершину этого конуса.

Построим для каждого из этих многообразий область $(\Omega_h-\Omega_{3h})_{n-s}^*$, состоящую из тех точек области Ω, которые отстоят от многообразия S_{n-s}^* на расстояние, меньшее $3h$, но большее h. Область $\Omega_h-\Omega_{3h}$ покрывается суммой областей $(\Omega_h-\Omega_{3h})_{n-s}^*$.

Выделим теперь из каждой области $(\Omega_h-\Omega_{3h})_{n-s}^*$ некоторую ее часть $(\Omega_h-\Omega_{3h})_{n-s}^{**}$, которая при помощи невырожденного преобразования координат с непрерывными ограниченными производными может быть переведена в некоторый цилиндр радиуса h, «ось» которого есть гиперплоскость размерности $n-s$, и представляет собой образ многообразия S_{n-s}^*, причем сделаем это так, чтобы области $(\Omega_h-$ $-\Omega_{3h})_{n-s}^{**}$ продолжали покрывать всю область $\Omega_h-\Omega_{3h}$.

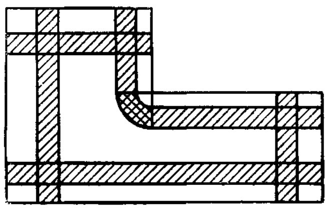

Рис. 6

Наглядный чертеж (рис. 6) показывает, каким должно быть это разбиение, если область Ω есть невыпуклый шестиугольник. Здесь области $(\Omega_h-\Omega_{3h})_{n-s}^{**}$ показаны штриховкой.

Для того чтобы установить справедливость (15.7), достаточно установить это неравенство для каждой из областей $(\Omega_h-\Omega_{3h})_{n-s}^{**}$.

Проводя соответствующую оценку, мы можем с самого начала предположить, что все многообразия S_{n-s}^* суть точки или куски гиперплоскости соответствующего числа измерений. Очевидно, к этому всегда можно свести задачу заменой координат.

Будем считать сначала, что многообразие S^*_{n-s} есть область в гиперплоскости $x_1 = \ldots = x_s = 0$. В силу предположения о простоте границы S, общий случай сводится к этому. В пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)$ введем цилиндрические координаты с «осью» S^*_{n-s}, т. е. положим

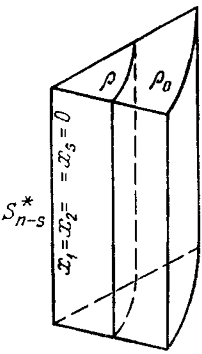

Рис. 7

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos \varphi_1, \\
x_2 &= \rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\
x_3 &= \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{s-1} &= \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{s-2} \cos \varphi_{s-1}, \\
x_s &= \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{s-2} \sin \varphi_{s-1}, \\
x_{s+1} &= x_{s+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= x_n.
\end{aligned}
$$

Тогда многообразие $x_1 = \ldots = x_s = 0$ перейдет в многообразие $\rho = 0$ (рис. 7).

Доказательства для областей, стремящихся к S^*_{n-s}, в случае s четного и нечетного несколько различны. Мы будем вести доказательство одновременно, указывая различие в необходимых случаях.

Пусть $s = 2t$ или $s = 2t + 1$. Тогда нам придется рассмотреть отдельно случай I, когда $k = 1, 2, \ldots, t$, т. е. оценить интеграл (15.7) для производных, значения которых на S^*_{n-s} не определены (см. п. 1, § 14), рассмотреть отдельно случай II, когда $k = t + 1$ и, наконец, случай III: $k = t + 2, \ldots, m$, т. е. случай, когда производные, стоящие под знаком интеграла в (15.7), определены на S^*_{n-s}.

4. Доказательство леммы для $k \leqslant \left[\frac{s}{2}\right]$. Исследуем сначала случай I: $k = 1, 2, \ldots, t$. Обозначим

$$
Z(\rho, \varphi_i, x_j) = \frac{\partial^{m-k} \xi(\rho, \varphi_i, x_j)}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}},
$$

где $k = 1, \ldots, t$, $i = 1, \ldots, s-1$, $j = s+1, \ldots, n$. Пусть $\rho_0 > 0$ некоторое число. Будем считать $0 < \rho < \rho_0$. Так как ξ имеет непрерывные производные до порядка m, то Z имеет таковые до порядка k всюду, кроме многообразия $\rho = 0$.

Поэтому, применяя формулу Тейлора, найдем

$$Z(\rho, \varphi_i, x_j) = Z(\rho_0, \varphi_i, x_j) + \frac{\rho - \rho_0}{1!} \left.\frac{\partial Z}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0} + \ldots +$$

$$+ \frac{(\rho - \rho_0)^{k-1}}{(k-1)!} \left.\frac{\partial^{k-1} Z}{\partial \rho^{k-1}}\right|_{\rho=\rho_0} + \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{(\rho - \rho_1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\partial^k Z}{\partial \rho_1^k} d\rho_1. \quad (15.8)$$

Обозначим

$$\| Z(\rho, \varphi_i, x_j) \|_{L_{2,n-s}} = \left\{ \int\limits_{\substack{\rho = \text{const} \\ \varphi_i = \text{const}}} |Z|^2 dx_{s+1} \ldots dx_n \right\}^{1/2}.$$

Тогда равенство (15.8) дает

$$\| Z(\rho, \varphi_i, x_j) \|^2_{L_{2,n-s}} \leqslant C \left\{ \| Z(\rho_0, \varphi_i, x_j) \|^2_{L_{2,n-s}} + \right.$$

$$+ \frac{(\rho - \rho_0)^2}{(1!)^2} \left\| \frac{\partial Z}{\partial \rho_0} \right\|^2_{L_{2,n-s}} + \ldots + \frac{(\rho - \rho_0)^{2k-2}}{[(k-1)!]^2} \left\| \frac{\partial^{k-1} Z}{\partial \rho_0^{k-1}} \right\|^2_{L_{2,n-s}} +$$

$$\left. + \int\limits_{\substack{\rho = \text{const} \\ \varphi_i = \text{const}}} \left[\int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{(\rho - \rho_1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\partial^k Z}{\partial \rho_1^k} d\rho_1 \right]^2 dx_{s+1} \ldots dx_n \right\}. \quad (15.9)$$

Умножая (15.9) на $\rho^{s-1} d\omega$ и интегрируя по единичной сфере ω, получим, обозначая $(n-1)$-мерное многообразие $\rho = \text{const} \neq 0$ через S_ρ,

$$\int\limits_{S_\rho} |Z|^2 dS_\rho \leqslant C \left| \frac{\rho}{\rho_0} \right|^{s-1} \left\{ \int\limits_{S_{\rho_0}} |Z|^2 dS_{\rho_0} + \right.$$

$$+ \frac{(\rho - \rho_0)^2}{(1!)^2} \int\limits_{S_{\rho_0}} \left| \frac{\partial Z}{\partial \rho_0} \right|^2 dS_{\rho_0} + \ldots$$

$$\left. + \frac{(\rho - \rho_0)^{2k-2}}{[(k-1)!]^2} \int\limits_{S_{\rho_0}} \left| \frac{\partial^{k-1} Z}{\partial \rho_0^{k-1}} \right|^2 dS_{\rho_0} \right\} +$$

$$+ C\int\limits_{\omega}\rho^{s-1}d\omega \int\limits_{\substack{\rho=\text{const}\\ \varphi_i=\text{const}}} \left[\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{(\rho-\rho_1)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\partial^k Z}{\partial\rho_1^k}\,d\rho_1\right]^2 dx_{s+1}\ldots dx_n. \tag{15.10}$$

Так как $\xi\in W_2^{(m)}$, то на основании теорем вложения все производные ξ до порядка $m-1$ принадлежат $L_{2,\,n-1}$, и вся фигурная скобка правой части (15.10) оценивается через

$$A\|\xi\|^2_{W_2^{(m)}}.$$

Рассмотрим последнее слагаемое правой части (15.10). Считая $\rho<\rho_0$, получим

$$\int\limits_{\omega}\rho^{s-1}d\omega \int\limits_{\substack{\rho=\text{const}\\ \varphi_i=\text{const}}} \left[\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{(\rho-\rho_1)^{k-1}}{(k-1)!\cdot}\frac{\partial^k Z}{\partial\rho_1^k}\,d\rho_1\right]^2 dx_{s+1}\ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \rho^{s-1}\int\limits_{\omega}d\omega \int\limits_{\substack{\rho=\text{const}\\ \varphi_i=\text{const}}} \int\limits_{\rho}^{\rho_0}\frac{(\rho-\rho_1)^{2k-2}}{[(k-1)!]^2\rho_1^{s-1}}\,d\rho_1 \times$$

$$\times\int\limits_{\rho}^{\rho_0}\left|\frac{\partial^k Z}{\partial\rho_1^k}\right|^2\rho_1^{s-1}d\rho_1 dx_{s+1}\ldots dx_n =$$

$$=\left\{\rho^{s-1}\int\limits_{\omega}d\omega\int\limits_{\substack{\rho=\text{const}\\ \varphi_i=\text{const}}}\int\limits_{\rho}^{\rho_0}\rho_1^{s-1}\left|\frac{\partial^k Z}{\partial\rho_1^k}\right|^2 d\rho_1 dx_{s+1}\ldots dx_n\right\}\times$$

$$\times\int\limits_{\rho}^{\rho_0}\frac{(\rho-\rho_1)^{2k-2}}{[(k-1)!]^2\rho_1^{s-1}}\,d\rho_1 = \rho^{s-1}\int\limits_{\rho^2\leqslant\Sigma x_j^2\leqslant\rho_0^2}\left|\frac{\partial^k Z}{\partial\rho_1^k}\right|^2 d\Omega\times$$

$$\times\int\limits_{\rho}^{\rho_0}\frac{(\rho-\rho_1)^{2k-2}}{[(k-1)!]^2\rho_1^{s-1}}\,d\rho_1 \leqslant C\rho^{s-1}\|\xi\|^2_{W_2^{(m)}}\int\limits_{\rho}^{\rho_0}\frac{(\rho-\rho_1)^{2k-2}}{\rho_1^{s-1}}\,d\rho_1. \tag{15.11}$$

Оценим $\int\limits_{\rho}^{\rho_0} \frac{(\rho-\rho_1)^{2k-2}}{\rho_1^{s-1}}\,d\rho_1$. Для этого положим $\rho_1 = \rho x$, $\rho_0 = \rho y$; тогда

$$\int\limits_{\rho}^{\rho_0} \frac{(\rho-\rho_1)^{2k-2}}{\rho_1^{s-1}}\,d\rho_1 = \int\limits_{1}^{y} \frac{\rho^{2k-2}(1-x)^{2k-2}}{\rho^{s-1}x^{s-1}}\,\rho\,dx = \rho^{2k-s-1}\int\limits_{1}^{y}\frac{(1-x)^{2k-2}}{x^{s-1}}\,dx.$$

Если $2k < s$, то интеграл сходится при $y \to \infty$ (т. е. при $\rho \to 0$). Если $2k = s$, то интеграл растет как $\ln y$, т. е. как $|\ln \rho|$. Следовательно, если $2k \leqslant s$, то имеем из (15.10) и (15.11)

$$\int\limits_{S_\rho} |Z|^2\,dS_\rho \leqslant \rho^{s-1}\|\xi\|_{W_2^{(m)}}\left[C_1 + C_2\rho^{2k-s}|\ln\rho|\right].$$

Интегрируя по ρ от Ah до Bh, получим

$$\int\limits_{\Omega_{Ah}-\Omega_{Bh}} |Z|^2\,d\Omega \leqslant \|\xi\|_{W_2^{(m)}}\left[K_1h^s + K_2h^{2k}|\ln h|\right] \leqslant K_3h^{2k}|\ln h|.$$

Таким образом, неравенство (15.7) доказано для $k = 1, \ldots, t$ ($s = 2t$ или $s = 2t+1$).

5. Доказательство леммы для $k = \left[\frac{s}{2}\right] + 1$. Перейдем к доказательству (15.7) для случая II: $k = t+1$. В этом случае мы уже знаем, что стоящая под интегралом производная стремится к нулю на границе. Однако те оценки, которые мы провели выше в § 11, оказываются недостаточными, и мы дадим небольшое их усиление.

Рассмотрим некоторую область Ω_s в гиперплоскости $x_1 = \mathrm{const}, \ldots, x_n = \mathrm{const}$ и обозначим расстояния от точек $x_1 = \ldots = x_s = 0$ и $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_s)$ $\left(\sum \Delta x_i^2 = |\Delta \vec{P}|^2\right)$ этой гиперплоскости для любой точки этой же гиперплоскости через r и r_1 соответственно.

Обозначим $$\frac{\partial^{m-t-1}\xi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = \varphi(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n).$$

Производные $t+1$ порядка по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от φ суть производные m-го порядка от ξ. Поэтому, применяя формулу (7.12) для оценки

$$\varphi(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_s, x_{s+1}, \ldots, x_n) - \varphi(0, \ldots, 0, x_{s+1}, \ldots, x_n) = \\ = \varphi(\Delta\vec{P}, x_j) - \varphi(0, x_j),$$

найдем так же, как при выводе (11.14),

$$|\varphi(\Delta\vec{P}, x_j) - \varphi(0, x_j)| \leqslant |\Delta\vec{P}| \left[A \int\limits_{\Omega_s} \frac{(r+r_1)^{s-t-2}}{r^{s-t-1} r_1^{s-t-1}} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{\Sigma\alpha_i = m} \left| \frac{\partial^m \xi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| d\Omega_s + B \left(\int\limits_{\Omega_s} |\varphi|^2 \, d\Omega_s \right)^{1/2} \right] \leqslant$$
$$\leqslant |\Delta\vec{P}| \left[A \left(\int\limits_{\Omega_s} \left\{ \sum_{\Sigma\alpha_i = m} \left| \frac{\partial^m \xi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 \right\} d\Omega_s \right)^{1/2} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\int\limits_{\Omega_s} \frac{(r+r_1)^{2s-2t-4}}{r^{2s-2t-2} r_1^{2s-t-2}} \, d\Omega_s \right)^{1/2} + B \left(\int\limits_{\Omega_s} |\varphi|^2 \, d\Omega_s \right)^{1/2} \right].$$

Рассмотрим случай $s = 2t$. Тогда, проделывая преобразования, встречавшиеся ранее в § 11 главы I, получим

$$\int\limits_{\Omega_s} \frac{(r+r_1)^{2s-2t-4}}{r^{2(s-t-1)} r_1^{2(s-t-1)}} \, d\Omega_s = \int\limits_{\Omega_s} \frac{(r+r_1)^{2t-4}}{r^{2(t-1)} r_1^{2(t-1)}} \, d\Omega_s \leqslant$$
$$\leqslant |\Delta\vec{P}| \int\limits_{\rho < R/|\Delta\vec{P}|} \frac{(\rho+\rho_1)^{2t-4}}{\rho^{2t-2} \rho_1^{2t-2}} \, d\Omega_s \leqslant C_1' + C_2' \int\limits_2^{R/|\Delta\vec{P}|} \frac{d\rho}{\rho} =$$
$$= C_1 + C_2 |\ln|\Delta\vec{P}||.$$

Тогда из (15.11) найдем

$$|\varphi(\Delta\vec{P}, x_j) - \varphi(0, x_j)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |\Delta\vec{P}|^2 \left\{ [K_1 + K_2 |\ln|\Delta\vec{P}||] \times \right.$$
$$\left. \times \int\limits_{\Omega_s} \sum_{\Sigma\alpha_i = m} \left| \frac{\partial^m \xi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 d\Omega_s + K_3 \int\limits_{\Omega_s} |\varphi|^2 \, d\Omega_s \right\}.$$

Интегрируя по $S^*_{n-s}(x_1 = \ldots = x_s = 0)$, получим

$$\int\limits_{S^*_{n-s}} |\varphi(\Delta\vec{P}, x_j) - \varphi(0, x_j)|^2 \, d\Omega_{n-s} \leqslant |\Delta\vec{P}|^2 \Bigg\{ [K_1 + K_2 |\ln|\Delta\vec{P}||] \int\limits_{\Omega} \sum_{\Sigma\alpha_i = m} \left| \frac{\partial^m \xi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 d\Omega + K_3 \int\limits_{\Omega} |\varphi|^2 \, d\Omega \Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant |\Delta\vec{P}|^2 \left\{ [K_1 + K_2 |\ln|\Delta\vec{P}||] \|\xi\|^2_{W_2^{(m)}} + K_4 \|\xi\|^2_{W_2^{(m)}} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant K_5 \|\xi\|_{W_2^{(m)}} |\Delta\vec{P}|^2 |\ln|\Delta\vec{P}||. \quad (15.12)$$

Эта оценка точнее чем та, которая непосредственно следует из формулы (11.15), так как, применяя ее, мы получили бы в (15.12) $|\Delta\vec{P}|^{2-\varepsilon}$ вместо $|\ln|\Delta\vec{P}||\ |\Delta\vec{P}|^2$. При выводе (15.12) было использовано то обстоятельство, что

$$\int\limits_{\Omega} |\varphi|^2 \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial^{m-t-1} \xi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 d\Omega \leqslant N \|\xi\|_{W_2^{(m)}}.$$

Воспользовавшись тем, что $\varphi(0, x_j) = 0$ (в смысле $L_{2,\,n-s}$), перепишем (15.12) в виде

$$\int\limits_{\substack{x_1 = \Delta x_1 \\ \cdots \\ x_s = \Delta x_s}} \left| \frac{\partial^{m-t-1} \xi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 dx_{s+1} \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant K_5 \|\xi\|_{W_2^{(m)}} |\Delta\vec{P}|^2 |\ln|\Delta\vec{P}||. \quad (15.13)$$

Вводя цилиндрические координаты с осью S_{n-s}, заменяя в (15.13) $|\Delta\vec{P}|$ на ρ, умножая на $\rho^{2t-1} d\omega$ и интегрируя по единичной сфере ω, получим

$$\int\limits_{S_\rho} \left| \frac{\partial^{m-t-1} \xi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 dS_\rho \leqslant K_6 \|\xi\|_{W_2^{(m)}} \rho^{2t+1} |\ln \rho|. \quad (15.14)$$

Интегрируя по ρ от Ah до Bh, найдем

$$\int\limits_{\Omega_{Ah} - \Omega_{Bh}} \left| \frac{\partial^{m-t-1} \xi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 d\Omega \leqslant K h^{2t+2} |\ln h|. \quad (15.15)$$

Аналогичные рассуждения для случая $s=2t+1$ дают оценку (15.14) с правой частью порядка ρ^{2t+1} и для (15.15) с правой частью порядка h^{2t+2}. Таким образом, (15.7) для $k=t+1$ доказано.

6. **Доказательство леммы для** $\left[\frac{s}{2}\right]+2\leqslant k\leqslant m$. Перейдем к доказательству (15.7) для случая III: $k=t+2, \ldots, m$. Полагаем

$$Z(\rho, \varphi_i, x_j)=\frac{\partial^{m-k}\xi(\rho, \varphi_i, x_j)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

$Z(\rho, \varphi_i, x_j)$ имеет непрерывные производные до k-го порядка ($k>t+1$) по всем аргументам всюду, кроме многообразия $\rho=0$. Применяя формулу Тейлора, найдем

$$Z(\rho, \varphi_i, x_j)=Z(\rho_0, \varphi_i, x_j)+\frac{\rho-\rho_0}{1!}\left(\frac{\partial Z}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0}+\ldots+$$
$$+\frac{(\rho-\rho_0)^{k-t-2}}{(k-t-2)!}\left(\frac{\partial^{k-t-2}Z}{\partial\rho^{k-t-2}}\right)_{\rho=\rho_0}+\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{(\rho-\rho_1)^{k-t-2}}{(k-t-2)!}\frac{\partial^{k-t-1}Z}{\partial\rho_1^{k-t-1}}\,d\rho_1. \tag{15.16}$$

Из формулы (15.16) получим

$$Z(\rho, \varphi_i, x_j)\|_{L_{2,n-s}}\leqslant$$
$$\leqslant\|Z(\rho_0, \varphi_i, x_j)\|_{L_{2,n-s}}+\frac{|\rho-\rho_0|}{1!}\left\|\left(\frac{\partial Z}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0}\right\|_{L_{2,n-s}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{|\rho-\rho_0|^{k-t-2}}{(k-t-2)!}\left\|\left(\frac{\partial^{k-t-2}Z}{\partial\rho^{k-t-2}}\right)_{\rho=\rho_0}\right\|_{L_{2,n-s}}+$$
$$+\left\{\int\limits_{S_{n-s}}\left[\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{(\rho-\rho_1)^{k-t-2}}{(k-t-2)!}\frac{\partial^{k-t-1}Z}{\partial\rho_1^{k-t-1}}\,d\rho_1\right]^2 dx_{s+1}\ldots dx_n\right\}^{1/2}.$$

В силу граничных условий для ξ (ξ и все ее производные до $(m-t-1)$-го порядка равны нулю в смысле $L_{2,n-s}$ на многообразии $\rho=0$), при предельном переходе

$\rho_0 \to 0$, получим

$$\|Z(\rho, \varphi_i, x_j)\|^2_{L_{2,n-s}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{S^*_{n-s}} \left[\int\limits_0^\rho \frac{(\rho-\rho_1)^{k-t-2}}{(k-t-2)!} \frac{\partial^{k-t-1}Z}{\partial\rho_1^{k-t-1}}\, d\rho_1\right]^2 dx_{s+1}\ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant A \int\limits_{S^*_{n-s}} \left\{\int\limits_0^\rho \left|\frac{\partial^{k-t-1}Z}{\partial\rho_1^{k-t-1}}\right|^2 d\rho_1\right\} dx_{s+1}\ldots dx_n \int\limits_0^\rho (\rho-\rho_1)^{2k-2t-4} d\rho_1 =$$

$$= A_1\rho^{2k-2t-3} \int\limits_0^\rho \left[\int\limits_{S^*_{n-s}} \left|\frac{\partial^{k-t-1}Z}{\partial\rho_1^{k-t-1}}\right|^2 dx_{s+1}\ldots dx_n\right] d\rho_1. \quad (15.17)$$

Рассмотрим случай $s = 2t$. Умножая (15.17) на $\rho^{2t-1}\,d\omega$ и интегрируя по единичной сфере ω, получим

$$\int\limits_{S_\rho} |Z(\rho, \varphi_i, x_j)|^2\, dS_\rho \leqslant$$

$$\leqslant A_2\rho^{2k-4} \int\limits_0^\rho \frac{1}{\rho_1^{2t-1}} \int\limits_{S_{\rho_1}} \sum_{\Sigma\alpha_i = m-t-1} \left|\frac{\partial^{m-t-1}\xi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|^2 dS_{\rho_1} d\rho_1,$$

откуда, принимая во внимание (15.14), найдем

$$\int\limits_{S_\rho} |Z(\rho, \varphi_i, x_j)|^2\, dS_\rho \leqslant A_3\|\xi\|^2_{W_2^{(m)}}\rho^{2k-4} \int\limits_0^\rho \frac{\rho_1^{2t+1}|\ln\rho_1|}{\rho_1^{2t-1}}\, d\rho_1 =$$

$$= A_3\|\xi\|^2_{W_2^{(m)}}\rho^{2k-4} \int\limits_0^\rho \rho_1^2 |\ln\rho_1|\, d\rho_1 \leqslant A_4\rho^{2k-1}|\ln\rho|.$$

Интегрируя по ρ от Ah до Bh, найдем

$$\int\limits_{\Omega_{Ah}-\Omega_{Bh}} |Z|^2\, d\Omega \leqslant A_5 h^{2k}|\ln h|.$$

В случае $\rho = 2t+1$ правая часть получается порядка h^{2k}. Таким образом, (15.7) доказано для всех $k = 1, \ldots, m$.

Отсюда сразу вытекает справедливость основной леммы *).

Из леммы очевидным способом выводится равенство (15.2). В самом деле, для любой функции w, удовлетворяющей уравнению $\Delta^m w = 0$, имеем $D(w, \xi\chi_h) = 0$. Переходя к пределу, докажем (15.2), а с ним и теорему единственности.

7. Замечание о постановке краевых условий. Назовем функцию ξ функцией из $W_2^{(m)}(0)$, если она является пределом в $W_2^{(m)}$ функций, обращающихся в нуль в приграничной полосе. Если даны некоторые функции u и ψ, принадлежащие $W_2^{(m)}$, то мы будем говорить, что u совпадает на границе области с ψ в смысле $W_2^{(m)}(0)$, если $u - \psi \in W_2^{(m)}(0)$.

В ряде работ по вариационным методам рассматривалась задача об отыскании функции, дающей экстремум функционалу $D(u)$ (для случая $m = 1$) и совпадающей на границе с заданной функцией ψ в смысле $W_2^{(m)}(0)$. Такая задача, очевидно, имеет единственное решение, в чем легко убедиться непосредственно. Однако без нашего исследования неясно было, каковы будут истинные граничные условия для решения, у которого $u - \psi \in W_2^{(m)}(0)$ ([50]).

16. Задача о собственных значениях

1. Введение. Пусть Ω — ограниченная область n-мерного пространства с достаточно гладкой границей S.

Задача о собственных значениях уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \tag{16.1}$$

при условиях на границе S

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_S - \left.hu\right|_S = 0 \quad (\nu - \text{внешняя нормаль}), \tag{16.2}$$

где h — непрерывная на S функция, заключается в определении всех значений λ, при которых уравнение (16.1)

*) Здесь, как и при доказательстве леммы из п. 4, § 12, можно избавиться от требования непрерывности производных от ξ до порядка m. Для этого нужно лишь осуществить предельный переход от средних функций в формулах (15.9), (15.12), (15.17). Остальное доказательство проходит без изменений.

при условии (16.2) имеет ненулевое решение. Мы будем пользоваться тем, что существуют такие непрерывно дифференцируемые функции a_i, ограниченные, с ограниченными производными в замкнутой области $\Omega + S\left(|a_i| < M;\ \left|\frac{\partial a_i}{\partial x}\right| < M,\ M = \text{const}\right)$, что

$$|h| \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i|_S \cos\alpha_i, \tag{16.3}$$

где α_i — угол между ν и осью Ox_i. Так как S — достаточно гладкая поверхность, то можно построить достаточно гладкие функции C_i, обращающиеся в $\cos\alpha_i$ на поверхности. Тогда достаточно взять $a_i = M_1 C_i$, где $M_1 = \max\limits_S |h|$.

Вариационный метод позволяет построить решение этой задачи, найти все ее собственные функции и показать ортонормальность и полноту в L_2 системы этих функций. Напомним, что ортонормальная система функций из L_2 называется *полной*, если с помощью линейной комбинации этих функций можно приблизиться в норме L_2 с любой точностью к произвольной функции из L_2.

2. **Вспомогательные неравенства.** Переходим к решению этой задачи. Рассмотрим функционалы в $W_2^{(1)}$

$$D(v) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \int\limits_S h v^2 dS,$$

$$J(v) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega,$$

$$H(v) = \int\limits_\Omega |v|^2 d\Omega = \|v\|_{L_2}^2.$$

Лемма. *Имеют место неравенства*

$$J(v) \leqslant L_1 D(v) + L_2 H(v), \tag{16.4}$$

$$|D(v)| \leqslant K_1 H(v) + K_2 J(v), \tag{16.5}$$

где L_1, L_2, K_1, K_2 — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Докажем (16.5). Имеем, используя (16.3),

$$\left|\int\limits_S hv^2\,dS\right| \leqslant \int\limits_S v^2 \sum_{i=1}^n a_i \cos nx_i\,dS =$$

$$= \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial\left(a_i v^2\right)}{\partial x_i}\,d\Omega = 2\int\limits_\Omega v \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\,d\Omega +$$

$$+ \int\limits_\Omega v^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\,d\Omega \leqslant M\int\limits_\Omega 2\,|\,v\,| \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| d\Omega + MnH(v).$$

Пользуясь тем, что $2\,|\,v\,|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leqslant Kv^2 + \frac{1}{K}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2$, где $K > 0$ — любое число, получим

$$\left|\int\limits_S hv^2 dS\right| \leqslant MnH(v) + KMnH(v) + \frac{M}{K}J(v) =$$

$$= Mn(1 + K)\,H(v) + \frac{M}{K}J(v).$$

Из определения $D(v)$ и $J(v)$ имеем

$$|\,D(v)\,| \leqslant J(v) + \left|\int\limits_S hv^2 dS\right| \leqslant Mn(1 + K)\,H(v) +$$

$$+ \left(1 + \frac{M}{K}\right)J(v) = K_1 H(v) + K_2 J(v),$$

$$K_1 = Mn(1 + K), \quad K_2 = 1 + \frac{M}{K},$$

и неравенство (16.5) доказано.

С другой стороны, из определения $D(v)$ и $J(v)$ следует

$$J(v) = D(v) + \int\limits_S hv^2 dS \leqslant D(v) + Mn(1 + K)\,H(v) + \frac{M}{K}J(v),$$

откуда $J(v)\left(1 - \frac{M}{K}\right) \leqslant D(v) + Mn(1 + K)\,K(v)$. Выбрав $K > 2M$, получим $\left(1 - \frac{M}{K}\right) > \frac{1}{2}$,

$$J(v) \leqslant 2D(v) + 2Mn(1 + K)\,H(v) = L_1 D(v) + L_2 H(v),$$

т. е. справедливо неравенство (16.4). Лемма доказана.

Из (16.4) следует, что

$$D(v) \geqslant \frac{1}{L_1} J(v) - \frac{L_2}{L_1} H(v) \geqslant -\frac{L_2}{L_1} H(v),$$

и поэтому, если $H(v) = 1$, то $D(v) \geqslant -L_2/L_1$.

Отсюда следует, что существует

$$\inf_{H(v)=1} D(v) = \lambda_1.$$

Поэтому существует минимизирующая последовательность $\{v_k\}$:

$$v_k \in W_2^{(1)},\ H(v_k) = 1,\ \lim_{k\to\infty} D(v_k) = \lambda_1.$$

3. Минимизирующая последовательность и уравнение в вариациях.

Теорема. *Существует функция* $u_1 \in W_2^{(1)}$ *такая, что*

$$H(u_1) = 1, \quad D(u_1) = \lambda_1.$$

Функция u_1 *имеет непрерывные производные любого порядка в* Ω *и удовлетворяет уравнению*

$$\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0.$$

Доказательство. Пусть $\{v_k\}$ — минимизирующая последовательность. Покажем, что последовательность $\|v_k\|_{W_2^{(1)}}$ ограничена. Действительно, положив $(\rho, v) = \int\limits_\Omega v\,d\Omega$, $(\rho, 1) \neq 0$, получим, приняв во внимание ограниченность $D(v_k)$, (16.4) и условие $H(v_k) = 1$,

$$\|v_k\|_{W_2^{(1)}} = \{(\rho, v_k)^2 + J(v_k)\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \{m\Omega H(v_k) + L_1 |D(v_k)| + L_2 H(v_k)\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \{(m\Omega + L_2) + L_1 A\}^{1/2},$$

где $A = \sup\limits_k |D(v_k)|$. Таким образом, ограниченность последовательности $\|v_k\|_{W_2^{(1)}}$ доказана. Из полной непрерывности оператора вложения следует, что последовательность $\{v_k\}$ сильно компактна в L_2 в Ω. Из $\{v_k\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в L_2. Эта подпоследовательность также является минимизирующей.

Следовательно, существует минимизирующая последовательность, сходящаяся в L_2. Будем поэтому с самого начала считать, что $\{v_k\}$ обладает этим свойством. Далее, $\|v_k - v_l\|^2_{L_2} = H(v_k - v_l) < \varepsilon$ лишь только $k,\ l > N(\varepsilon)$. Из очевидного равенства

$$H\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right) = \frac{1}{2} H(v_k) + \frac{1}{2} H(v_l) - H\left(\frac{v_k - v_l}{2}\right),$$

так как $H(v_k) = H(v_l) = 1$, $H\left(\frac{v_k - v_l}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{4}$, получим, что

$$H\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Функционалы $D(v)$ и $H(v)$ суть однородные квадратичные функционалы, и поэтому их отношение $D(v)/H(v)$ не меняется при замене v на cv ($c = \mathrm{const} \neq 0$, $H(v) \neq 0$), и, следовательно,

$$\inf_{v \in W_2^{(1)}} \frac{D(v)}{H(v)} = \inf_{\substack{H(v)=1 \\ v \in W_2^{(1)}}} D(v) = \lambda_1.$$

Отсюда $D(v) \geqslant \lambda_1 H(v)$ для всех $v \in W_2^{(1)}$ и, в частности,

$$D\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right) > \lambda_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right), \quad k,\ l > N(\varepsilon).$$

Тогда, считая k и l настолько большими, что при этом $D(v_k) < \lambda_1 + \varepsilon$ и $D(v_l) < \lambda_1 + \varepsilon$, получим

$$D\left(\frac{v_k - v_l}{2}\right) = \frac{1}{2} D(v_k) + \frac{1}{2} D(v_l) - D\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right) <$$
$$< \frac{\lambda_1 + \varepsilon}{2} + \frac{\lambda_1 + \varepsilon}{2} - \lambda_1 + \frac{\lambda_1 \varepsilon}{4} = \varepsilon\left(1 + \frac{\lambda_1}{4}\right).$$

Из неравенства (16.4) следует

$$0 \leqslant J(v_k - v_l) \leqslant L_1 D(v_k - v_l) + L_2 H(v_k - v_l),$$

и поэтому

$$D\left(\frac{v_k - v_l}{2}\right) \geqslant -L_2 \frac{\varepsilon}{4},$$
$$0 \leqslant J(v_k - v_l) \leqslant L_2 \varepsilon + L_1 \varepsilon (4 + \lambda_1).$$

Следовательно, $D(v_k - v_l) \to 0$, $J(v_k - v_l) \to 0$, k, $l \to \infty$. Но

$$\|v_k - v_l\|^2_{W_2^{(1)}} = (\rho, v_k - v_l)^2 + J(v_k - v_l) \leqslant$$
$$\leqslant m\Omega H(v_k - v_l) + J(v_k - v_l) \to 0,$$

т. е. $\|v_k - v_l\|_{W_2^{(1)}} \to 0$. Следовательно, $\{v_k\}$ сходится в $W_2^{(1)}$, и вследствие полноты $W_2^{(1)}$ существует предельная функция $u_1 \in W_2^{(1)}$, так что

$$\|u_1 - v_k\|_{W_2^{(1)}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Кроме того,

$$|D(v_k) - D(u_1)| = \left| J(v_k) - J(u_1) + \int_S h(u_1^2 - v_k^2)\, dS \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \sqrt{J(v_k)} - \sqrt{J(u_1)} \right| \left(\sqrt{J(v_k)} + \sqrt{J(u_1)} \right) +$$
$$+ \left(\int_S (u_1 - v_k)^2 dS \right)^{1/2} \left(\int_S h^2 (u_1 + v_k)^2 dS \right)^{1/2} \to 0$$

при $k \to \infty$, так как

$$\left| \sqrt{J(v_k)} - \sqrt{J(u_1)} \right| = \left| \|v_k\|_{L_2^{(1)}} - \|u_1\|_{L_2^{(1)}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|v_k - u_1\|_{L_2^{(1)}} \leqslant \|v_k - u_1\|_{W_2^{(1)}} \to 0,$$

$$\left[\int_S (u_1 - v_k)^2 dS \right]^{1/2} \leqslant N \|u_1 - v_k\|_{W_2^{(1)}} \to 0,$$

а множители $\sqrt{J(v_k)} + \sqrt{J(u_1)}$ и $\int_S h^2 (u_1 + v_k)^2 dS$ ограничены. Поэтому $D(v_k) \to D(u_1)$, и, следовательно,

$$D(u_1) = \lambda_1. \tag{16.6}$$

Аналогично убеждаемся, что

$$H(u_1) = 1. \tag{16.7}$$

Пусть теперь $\xi \in W_2^{(1)}$ — некоторая функция. Рассмотрим отношение

$$\frac{D(u_1 + \mu\xi)}{H(u_1 + \mu\xi)} = \frac{D(u_1) + 2\mu D(u_1, \xi) + \mu^2 D(\xi)}{H(u_1) + 2\mu H(u_1, \xi) + \mu^2 H(\xi)},$$

где

$$D(u, \xi) = \int\limits_{\Omega} \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \, d\Omega - \int\limits_{S} hu\xi \, dS,$$

$$H(u, \xi) = \int\limits_{\Omega} u\xi \, d\Omega.$$

Оно является непрерывно дифференцируемой функцией μ в некоторой окрестности точки $\mu = 0$. Это отношение при $\mu = 0$ имеет минимум, равный λ_1, и на основании теоремы Ферма имеем

$$\left[\frac{D(u_1 + \mu\xi)}{H(u_1 + \mu\xi)}\right]'_{\mu=0} = \frac{2D(u_1, \xi) H(u_1) - 2H(u_1, \xi) D(u_1)}{[H(u_1)]^2} = 0,$$

что дает в силу (16.6) и (16.7)

$$D(u_1, \xi) - \lambda_1 H(u_1, \xi) = 0. \tag{16.8}$$

Равенство (16.8) имеет место для любой $\xi \in W_2^{(1)}$.

Покажем, что u_1 имеет непрерывные производные любого порядка и удовлетворяет уравнению

$$\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0. \tag{16.9}$$

Действительно, пусть δ есть расстояние некоторой точки $\vec{P} \in \Omega$ от границы S. Положим для $n > 2$

$$\xi = \left[\psi\left(\frac{r}{h_1}\right) - \psi\left(\frac{r}{h_2}\right)\right] X(r),$$

где h_1 и $h_2 < \delta$, $\psi(r/h_i)$ — функция, введенная ранее в п. 3, § 12, функция $X(r)$ является решением уравнения $\Delta X + \lambda_1 X = 0$ и при $r = 0$ имеет особенность порядка r^{-n+2}, а функция X' — порядка r^{-n+1}. Так как $\psi\left(\frac{r}{h_1}\right) = \psi\left(\frac{r}{h_2}\right)$ в шаре $r \leqslant \frac{1}{2} \min(h_1, h_2)$, то $\xi \equiv 0$ в этом же шаре. Поэтому ξ не имеет особенности при $r = 0$ и имеет непрерывные производные любого порядка. Следовательно, $\xi \in W_2^{(1)}$. Кроме того, $\xi = 0$ вне шара $r \geqslant \max(h_1, h_2)$, и так как $\max(h_1, h_2) < \delta$, то $\xi \equiv 0$ на S. Поэтому (16.8) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} - \lambda_1 u_1 \xi\right) d\Omega = 0.$$

Так как

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} u_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i^2}\, d\Omega$$

$\left(\text{по определению обобщенной производной } \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)$, то

$$\int\limits_{\Omega} u_1 (\Delta\xi + \lambda_1 \xi)\, d\Omega = 0. \tag{16.10}$$

Обозначим $\frac{1}{c(h)}\left\{\Delta\left[\psi\left(\frac{r}{h}\right) X(r)\right] + \lambda_1 \psi\left(\frac{r}{h}\right) X(r)\right\} = \omega_h(r)$, где $c(h)$ — постоянная, которую определим позднее. Очевидно, что $\omega_h(r) \equiv 0$ при $r \geqslant h$. Кроме того, $\omega_h(r) \equiv 0$ при $r \leqslant h/2$, так как в этом случае $\psi(r/h) \equiv 1$, $\Delta X + \lambda_1 X \equiv 0$. Следовательно, $\omega_h(r)$ имеет непрерывные производные любого порядка.

Так как $\Delta\xi + \lambda_1\xi = c(h_1)\,\omega_{h_1}(r) - c(h_2)\,\omega_{h_2}(r)$, то равенство (16.10) принимает вид

$$c(h_1)\int\limits_{\Omega} u_1 \omega_{h_1}(r)\, d\Omega = c(h_2)\int\limits_{\Omega} u_1 \omega_{h_2}(r)\, d\Omega. \tag{16.11}$$

Положим

$$c(h) = \int\limits_{\Omega}\left\{\Delta\left[\psi\left(\frac{r}{h}\right) X(r)\right] + \lambda_1 \psi\left(\frac{r}{h}\right) X(r)\right\} d\Omega.$$

Тогда $\int \omega_h(r)\, d\Omega = 1$.

Нетрудно показать, что существует отличный от нуля предел $\lim\limits_{h\to 0} c(h) = c_0$. Функцию $\omega_h(r)$ можно взять в качестве усредняющего ядра. Равенство (16.11) означает тогда, что средние функции для u_1 в области Ω_δ при различных $h < \delta$ отличаются лишь множителем. Мы получим $u_{h_2} = \frac{c(h_1)}{c(h_2)}\, u_{h_1}$. В силу того, что u_1 есть предел своих средних функций, то и он отличается лишь множителем от любой средней функции. Но последняя непрерывно дифференцируема сколь угодно раз, и, следовательно, то же верно для u_1 в области Ω_δ. Так как δ произвольно, то u_1 бесконечно непрерывно дифференцируема в любой внутренней точке Ω. Пусть теперь ξ непрерывно дифференцируема и обращается в нуль в некоторой пограничной полосе. Тогда иэ (16.8) интегрированием по частям получим

$$\int_{\Omega} \xi (\Delta u_1 + \lambda_1 u_1)\, d\Omega = 0,$$

откуда в силу произвольности ξ следует, что

$$\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0, \tag{16.12}$$

и теорема докаэана при $n > 2$. Случай $n = 2$ рассматривается аналогично.

Замечание. Рассмотрим последовательность областей $\{\Omega'\}$, лежащих внутри Ω и стремящихся к Ω. Пусть границы S' этих областей кусочно непрерывно дифференцируемы. Равенство (16.8) для $\xi \in W_2^{(1)}$ принимает вид

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} - \lambda_1 u_1 \xi \right) d\Omega - \int_{S} h u_1 \xi \, dS = 0. \tag{16.13}$$

Но

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} - \lambda_1 u_1 \xi \right) d\Omega =$$

$$= \lim_{\Omega' \to \Omega} \int_{\Omega'} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} - \lambda_1 u_1 \xi \right) d\Omega =$$

$$= \lim_{\Omega' \to \Omega} \left[-\int_{\Omega'} \xi (\Delta u_1 + \lambda_1 u_1)\, d\Omega + \int_{S'} \xi \frac{\partial u_1}{\partial \nu} dS \right] =$$

$$= \lim_{\Omega' \to \Omega} \int_{S'} \xi \frac{\partial u_1}{\partial \nu} dS.$$

Тогда (16.13) принимает вид

$$\lim_{\Omega' \to \Omega} \int_{S'} \xi \frac{\partial u_1}{\partial \nu} dS - \int_{S} h u_1 \xi \, dS = 0. \tag{16.14}$$

Если, кроме того, $S' \to S$ в том смысле, что не только точки S' стремятся к точкам S, но и нормали в этих точках стремятся к соответствующим нормалям S, то

$$\int_{S} h u_1 \xi \, dS = \lim_{\Omega' \to \Omega} \int_{S'} h u_1 \xi \, dS,$$

если считать h предельным значением на S некоторой функции, заданной в Ω.

Тогда условие (16.14) принимает вид

$$\lim_{\Omega' \to \Omega} \int\limits_{S'} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu} - h u_1 \right) \xi \, dS = 0. \tag{16.15}$$

Таким образом, u_1 удовлетворяет условию (16.2) в «слабом смысле».

Поэтому *собственной функцией задачи* (16.1), (16.2) мы будем называть функцию $u(x) \neq 0$, которая удовлетворяет уравнению (16.1) в Ω при некотором λ и граничному условию (16.2) в смысле соотношения (16.15). Число λ называется *собственным значением, соответствующим собственной функции* $u(x)$.

Из доказанной теоремы вытекает существование собственной функции u_1, соответствующей собственному значению λ_1, в указанном смысле.

Переходим к отысканию остальных собственных значений.

4. Существование следующих собственных функций. Допустим, что уже найдены $(m-1)$ функций $u_i \in W_2^{(1)}$ и $(m-1)$ чисел λ_i $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ таких, что

$$D(u_i, \xi) - \lambda_i H(u_i, \xi) = 0, \tag{16.16}$$

$$H(u_i) = 1, \; H(u_i, u_k) = 0 \quad (i \neq k), \tag{16.17}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

причем (16.16) имеет место для произвольной $\xi \in W_2^{(1)}$. Пусть $v \in W_2^{(1)}$ удовлетворяет $m-1$ условиям

$$H(v, u_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{16.18}$$

Совокупность таких функций $v \in W_2^{(1)}$ обозначим $W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$. Очевидно, что $W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$ представляет собою линейное пространство, так как любая линейная комбинация его элементов снова принадлежит этому пространству.

Покажем, что это пространство замкнуто. В самом деле, пусть последовательность v_k сходится к v в $W_2^{(1)}$, т. е. $\|v - v_k\|_{W_2^{(1)}} \to 0$. По теореме вложения

$$\|v - v_k\|_{L_2} \leqslant C \|v - v_k\|_{W_2^{(1)}},$$

и, следовательно, $\|v - v_k\|_{L_2} \to 0$.

Тогда

$$|H(v, u_i) - H(v_k, u_i)| = \left| \int\limits_\Omega u_i (v - v_k)\, d\Omega \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega u_i^2 d\Omega \right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega |v - v_k|^2 d\Omega \right)^{1/2} = \| v - v_k \|_{L_2} \to 0,$$

т. е. $H(v, u_i) = \lim\limits_{k\to\infty} H(v_k, u_i)$, и если $v_k \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots$ $\ldots, u_{m-1})$, то и $v \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$. Следовательно, пространство $W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$ замкнуто. Так как $W_2^{(1)}(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) \subset W_2^{(1)}$, то функционал $D(v)$ ограничен снизу для $v \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$ таких, что $H(v) = 1$. Точную нижнюю границу $D(v)$ для этих v обозначим через λ_m:

$$\inf_{\substack{v \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1}) \\ H(v)=1}} D(v) = \lambda_m. \tag{16.19}$$

Теорема. *Существует функция $u_m \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots$ $\ldots, u_{m-1})$ с $H(u_m) = 1$ такая, что*

$$D(u_m, \xi) - \lambda_m H(u_m, \xi) = 0 \tag{16.20}$$

для произвольной $\xi \in W_2^{(1)}$. В частности, для $\xi = u_m$ (16.20) *принимает вид*

$$D(u_m) = \lambda_m. \tag{16.21}$$

Кроме того, u_m имеет в Ω непрерывные производные любого порядка и удовлетворяет уравнению

$$\Delta u_m + \lambda_m u_m = 0 \tag{16.22}$$

и граничному условию (16.2) *в смысле соотношения* (16.15).

Доказательство. Из определения точной нижней грани следует, что в $W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$ найдется минимизирующая последовательность $\{v_k\}$:

$$v_k \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1}), \quad H(v_k) = 1, \quad \lim D(v_k) = \lambda_m.$$

Буквально повторяя доказательство теоремы из п. 3, покажем, что $\| v_k \|_{W_2^{(1)}}$ ограничены и, следовательно, $\{v_k\}$ сильно компактна в L_2. Будем считать, что сама последовательность $\{v_k\}$ сходится в L_2. Тогда для достаточно больших k, l $H(v_k - v_l) < \varepsilon$ и, как в теореме из п. 3, $H\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$.

Для всех $v \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$ имеем $D(v) \geqslant \lambda_m H(v)$, и так как $\frac{v_k + v_l}{2} \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$ одновременно с v_k и v_l, то

$$D\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right) \geqslant \lambda_m H\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right) > \lambda_m\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Отсюда, как в теореме из п. 3, найдем, что $D(v_k - v_l) \to 0$, $k, l \to \infty$, и далее

$$\| v_k - v_l \|_{W_2^{(1)}} \to 0, \quad k, l \to \infty,$$

т. е. $\{v_k\}$ сходится в $W_2^{(1)}$. Вследствие полноты $W_2^{(1)}$ существует предельная функция $u_m \in W_2^{(1)}$. Так как $v_k \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$ и пространство $W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$ замкнуто, то $u_m \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$. Кроме того, как в теореме из п. 3, доказываем, что $D(u_m) = \lambda_m$, $H(u_m) = 1$. Пусть $\eta \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$. Рассмотрим отношение

$$\frac{D(u_m + \mu\eta)}{H(u_m + \mu\eta)} = \frac{D(u_m) + 2\mu D(u_m, \eta) + \mu^2 D(\eta)}{H(u_m) + 2\mu H(u_m, \eta) + \mu^2 H(\eta)}.$$

Это отношение есть непрерывно дифференцируемая функция в некоторой окрестности точки $\mu = 0$, имеющая при $\mu = 0$ минимум, равный λ_m (так как $u_m + \mu\eta \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$). Отсюда по теореме Ферма найдем

$$D(u_m, \eta) - \lambda_m H(u_m, \eta) = 0. \tag{16.23}$$

Покажем, что (16.23) имеет место для всех $\eta \in W_2^{(1)}$. Действительно, положим в (16.16) $\xi = u_m$. Так как $u_m \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$, то $H(u_i, u_m) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, и (16.16) принимает вид $D(u_i, u_m) = 0$. Поэтому (16.23) имеет место для $\eta = u_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$. Следовательно, (16.23) имеет место для любой линейной комбинации функций u_i и $\eta \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$.

Пусть $\xi \in W_2^{(1)}$ — произвольная функция. Тогда функция

$$\eta = \xi - \sum_{i=1}^{m-1} u_i H(u_i, \xi) \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1}),$$

что нетрудно проверить. Поэтому $\xi = \eta + \sum_{i=1}^{m-1} u_i H(u_i, \xi)$, т. е. произвольная функция $\xi \in W_2^{(1)}$ есть линейная комбинация u_i и $\eta \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$. Значит, (16.23) имеет место для ξ, т. е. доказана справедливость (16.20).

Доказательство того, что u_m имеет в Ω непрерывные производные любого порядка и удовлетворяет (16.22), есть буквальное повторение соответствующей части доказательства теоремы из п. 3.

Относительно того, в каком смысле функции u_m удовлетворяют граничному условию (16.2), можно сделать то же замечание, что и для функции u_1 в теореме из п. 3.

5. Бесконечная последовательность собственных значений.

Теорема 1. *Существует неубывающая бесконечная последовательность чисел $\{\lambda_m\}$ и последовательность соответствующих им сколь угодно раз непрерывно дифференцируемых в Ω функций $\{u_m\}$ таких, что*

$$\Delta u_m + \lambda_m u_m = 0, \quad H(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad D(u_i, u_j) = \delta_{ij}\lambda_i, \tag{16.24}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Каждая функция u_m удовлетворяет граничному условию (16.2) *в смысле равенства* (16.15).

Доказательство. Теорема из п. 3 утверждает существование числа λ_1 и функции u_1 таких, что

$$\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = 0, \quad H(u_1) = 1, \quad D(u_1) = \lambda_1.$$

Рассмотрим подпространство $W_2^{(1)}(u_1)$. По теореме из п. 5 существуют число λ_2 и функция u_2 такие, что

$$\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = 0, \quad H(u_2) = 1, \quad H(u_1, u_2) = 0,$$
$$D(u_2) = \lambda_2, \quad D(u_1, u_2) = 0.$$

Таким образом, λ_1, u_1 и λ_2, u_2 удовлетворяют (16.24) при $i, j = 1, 2$. Так как $W_2^{(1)}(u_1) \subset W_2^{(1)}$, то

$$\inf_{v \in W_2^{(1)}(u_1)} D(v) \geqslant \inf_{v \in W_2^{(1)}} D(v), \quad H(v) = 1.$$

Это означает, что $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$. Рассматривая подпространство $W_2^{(1)}(u_1, u_2)$ и пользуясь теоремой из п. 5, найдем λ_3 и u_3. Пользуясь теоремой из п. 5, этот процесс получения чисел λ_i и функций u_i продолжаем неограниченно. При этом получаем $\lambda_m = \inf D(v)$ $\bigl(v \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$, $H(v) = 1\bigr)$. Так как $W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1}) \supset W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_m)$ (функция v, принадлежащая $W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_{m-1})$, удовлетворяет $m-1$ условиям, в то время как $v \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_m)$ удовлетворяет еще одному условию $H(v, u_m) = 0$), то $\lambda_m \leqslant \lambda_{m+1}$. Выполнение условий (16.24) следует из теоремы из п. 5.

Так как $H(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, то последовательность $\{u_m\}$ образует ортогональную и нормированную систему функций.

Теорема 2. *Для последовательности собственных значений* $\{\lambda_m\}$

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_m = +\infty.$$

Доказательство. Действительно, λ_m ограничены снизу и не убывают. Допустим, что λ_m не стремятся к ∞. Тогда λ_m ограничены:

$$|\lambda_m| < A \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Из (16.24) следует, что

$$|D(u_m)| < A, \quad H(u_m) = 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

На основании неравенства (16.4) имеем

$$J(u_m) \leqslant L_1 D(u_m) + L_2 H(u_m) \leqslant L_1 A + L_2 = B,$$

т. е. последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена по норме в $L_2^{(1)}$ числом $\sqrt{B}$.

Докажем, что $\{u_m\}$ ограничена по норме и в $W_2^{(1)}$. Действительно, определив норму в $W_2^{(1)}$ равенством

$$\|v\|^2_{W_2^{(1)}} = \left(\int_\Omega v\, d\Omega\right)^2 + \|v\|^2_{L_2^{(1)}},$$

найдем

$$\|u_m\|^2_{W_2^{(1)}} = \left(\int_\Omega u_m d\Omega\right)^2 + \|u_m\|^2_{L_2^{(1)}} <$$

$$< m\Omega \int_\Omega u_m^2 d\Omega + B = m\Omega + B.$$

Вследствие полной непрерывности оператора вложения можем заключить, что последовательность $\{u_m\}$ сильно компактна в L_2 в Ω. Иными словами, из $\{u_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{m_i}\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ такую, что

$$H\left(u_{m_i}-u_{m_k}\right) \to 0, \qquad i, k \to \infty.$$

Последнее невозможно, так как

$$H\left(u_{m_i}-u_{m_k}\right)=H\left(u_{m_i}\right)-2H\left(u_{m_i}, u_{m_k}\right)+H\left(u_{m_k}\right)=2.$$

Таким образом, допущение $\lim \lambda_m \neq \infty$ приводит к противоречию, и теорема доказана.

6. Замкнутость множества собственных функций.

Теорема. *Система $\{u_m\}$ замкнута в L_2, т. е. для всякой $\varphi \in L_2$ справедливо равенство*

$$\int_\Omega \varphi^2 d\Omega = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_\Omega \varphi u_m d\Omega\right)^2.$$

Доказательство. Так как $\lambda_m \to +\infty$, то начиная с некоторого номера j имеем $\lambda_m > 0$ $(m > j)$. Пусть k — некоторое число, $k > j$, а $v \in W_2^{(1)}$ — некоторая функция. Положим

$$R_k = v - \sum_{m=1}^{k} u_m H(v, u_m).$$

Очевидно, что $R_k \in W_2^{(1)}(u_1, \ldots, u_k)$, так как

$$H(R_k, u_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Поэтому $\dfrac{D(R_k)}{H(R_k)} \geqslant \lambda_{k+1}$, откуда следует, что

$$1)\ D(R_k) > 0, \quad 2)\ H(R_k) \leqslant D(R_k)/\lambda_{k+1}.$$

С другой стороны,

$$0 < D(R_k) =$$

$$= D(v) - 2D\left(v, \sum_{m=1}^{k} u_m H(v, u_m)\right) + D\left(\sum_{m=1}^{k} u_m H(v, u_m)\right) =$$

$$= D(v) - 2\sum_{m=1}^{k} H(v, u_m) D(v, u_m) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} H(v, u_m) H(v, u_l) D(u_m, u_l) =$$

$$= D(v) - 2\sum_{m=1}^{k} H(v, u_m)\,\lambda_m H(v, u_m) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} [H(v, u_m)]^2 D(u_m) = D(v) - \sum_{m=1}^{k} \lambda_m [H(v, u_m)]^2 =$$

$$= \left\{D(v) - \sum_{m=1}^{j} \lambda_m [H(v, u_m)]^2\right\} - \sum_{m=j+1}^{k} \lambda_m [H(v, u_m)]^2 \leqslant$$

$$\leqslant D(v) - \sum_{m=1}^{j} \lambda_m [H(v, u_m)]^2.$$

Таким образом, $D(R_k)$ ограничена и из $H(R_k) \leqslant \leqslant D(R_k)/\lambda_{k+1}$ и $\lambda_{k+1} \to \infty$ следует, что $H(R_k) \to 0$, что означает замкнутость $\{u_m\}$ в классе функций $v \in W_2^{(1)}$.

Пусть $\varphi \in L_2$ — произвольная функция. Как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, найдется $v \in W_2^{(1)}$ такая, что

$$\|\varphi - v\|_{L_2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16.25}$$

Действительно, обозначая через Ω_δ совокупность точек Ω, отстоящих от границы больше чем на δ, получим

$$\int_\Omega \varphi^2 d\Omega = \lim_{\delta \to 0} \int_{\Omega_\delta} \varphi^2 d\Omega,$$

откуда следует, что по заданному $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\left| \int_\Omega \varphi^2 d\Omega - \int_{\Omega_\delta} \varphi^2\, d\Omega \right| < \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

Вводя функцию

$$\varphi_\delta = \begin{cases} \varphi & \text{в } \Omega_\delta \\ 0 & \text{вне } \Omega_\delta \end{cases} \quad (\varphi_\delta \in L_2),$$

получим

$$\int_\Omega |\varphi - \varphi_\delta|^2 d\Omega < \frac{\varepsilon^2}{16}. \tag{16.26}$$

Строя для φ_δ среднюю функцию с ядром радиуса меньше δ, получим функцию v, имеющую в замкнутой области Ω непрерывные первые производные. Следовательно, $v \in \in W_2^{(1)}$, и, выбрав достаточно малым радиус усреднения, находим

$$\int\limits_{\Omega} |\varphi_\delta - v|^2 d\Omega < \frac{\varepsilon^2}{16}. \qquad (16.27)$$

Из (16.26) и (16.27) заключаем справедливость (16.25). Для функции v, как было доказано, можно найти такую линейную комбинацию конечного числа функций $\{u_m\}$, что

$$\left[H\left(v - \sum_{m=1}^{k} a_m u_m\right)\right]^{1/2} = \left\| v - \sum_{m=1}^{k} a_m u_m \right\|_{L_2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

что вместе с (16.25) дает $\left\| \varphi - \sum\limits_{m=1}^{k} a_m u_m \right\|_{L_2} < \varepsilon$. Если a_m заменить через $H(\varphi, u_m)$, то, как это следует из общей теории ортогональных систем, левая часть не увеличивается, и, значит, справедливо неравенство

$$\left\| \varphi - \sum_{m=1}^{k} u_m H(\varphi, u_m) \right\|_{L_2} < \varepsilon,$$

что ввиду произвольности ε приводит к равенству

$$\int\limits_{\Omega} \varphi^2 d\Omega = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int\limits_{\Omega} \varphi u_m d\Omega \right)^2.$$

Теорема доказана ([51]).

Глава III

ТЕОРИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В настоящей главе мы рассмотрим несколько задач, относящихся к теории гиперболических уравнений в частных производных. Мы разберем два вопроса.

1. Решение задачи Коши для волнового уравнения. Зависимость решений от начальных данных и обобщенные решения.

2. Гиперболическое уравнение с переменными коэффициентами.

Эти вопросы объединены общностью метода исследования, который состоит в изучении решений в пространствах $L_p^{(l)}$ и $W_p^{(l)}$, рассмотренных в первой главе. Однако попутно нам придется развить вспомогательный вопрос об интегрировании гиперболического уравнения с переменными достаточно гладкими коэффициентами. Нам необходимо доказать существование решения задачи Коши у таких уравнений при достаточно гладких начальных условиях. Для этой цели мы пользуемся методом характеристик в $2k$-мерном пространстве и методом спуска в пространстве $2k+1$ измерений ([52]).

17. Решение задачи Коши для волнового уравнения с гладкими начальными условиями

1. Вывод основного неравенства. Рассмотрим волновой оператор

$$\square\, u \equiv \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{17.1}$$

в области Ω в пространстве $n+1$ измерения с координатами $x_1, \ldots, x_n, t$, ограниченной гладкой поверхностью S.

Пусть $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ и $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ дважды дифференцируемы в Ω, а их первые производные непрерывны в замыкании Ω.

Пусть

$$\Box u = f, \quad \Box v = \varphi.$$

Рассмотрим интеграл

$$J(u, v) = \int\limits_S \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \cos \alpha_i - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \cos \alpha_0 \right\} dS,$$

где ν внешняя нормаль к S, α_i — угол между ν и осью Ox_i, а α_0 — угол между ν и осью Ot.

Простое преобразование дает

$$J(u, v) = -\int\limits_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right\} d\Omega =$$
$$= -\int\limits_\Omega \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right] + \frac{\partial v}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right] \right\} d\Omega =$$
$$= \int\limits_\Omega \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \Box v + \frac{\partial v}{\partial t} \Box u \right\} d\Omega. \quad (17.2)$$

Заменяя $\Box u$ и $\Box v$ их значениями, получим

$$J(u, v) = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \varphi + \frac{\partial v}{\partial t} f \right) d\Omega.$$

Имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \cos \alpha_0 - \frac{\partial u}{\partial t} \cos \alpha_i \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \cos \alpha_0 - \frac{\partial v}{\partial t} \cos \alpha_i \right) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \sum_{i=1}^n (\cos \alpha_i)^2 + \cos^2 \alpha_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\cos\alpha_i\cos\alpha_0=$$

$$=\cos\alpha_0\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}\cos\alpha_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\cos\alpha_0-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\cos\alpha_i\right]+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}\left\{\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i-\cos^2\alpha_0\right\}.$$

Пусть $S=S'+S''$, причем $\cos\alpha_0\neq 0$ на S' и $\cos\alpha_0=0$ на S''. Тогда

$$J(u, v)=$$

$$=\int\limits_{S'}\left[\frac{-1}{\cos\alpha_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\alpha_0-\frac{\partial u}{\partial t}\cos\alpha_i\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\cos\alpha_0-\frac{\partial v}{\partial t}\cos\alpha_i\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{1-2\cos^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}\right]dS+\int\limits_{S''}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\cos\alpha_i\right\}dS=\int\limits_{S}\Phi\,dS, \qquad (17.3)$$

где через Φ обозначено все подынтегральное выражение интеграла $J(u, v)$.

Полезно заметить, что если $u=v$, то в тех точках поверхности, где $|\cos\alpha_0|\geqslant 1/\sqrt{2}$, подынтегральное выражение имеет тот же знак, что и $-\cos\alpha_0$:

$$\operatorname{sign}\Phi=-\operatorname{sign}\cos\alpha_0. \qquad (17.4)$$

Пусть u есть решение волнового уравнения

$$\Box u=0 \qquad (17.5)$$

в полупространстве $t\geqslant 0$. Считая $v=u$, применим к функции u выведенную выше формулу (17.2), причем за область Ω возьмем усеченный конус, образующие которого составляют угол $\pi/4$ с осью Ot (рис. 8). Тогда

$$\cos\alpha_0=\begin{cases}1/2 & \text{на}\quad S_1,\\ -1 & \text{на}\quad S_2,\\ 1 & \text{на}\quad S_3,\end{cases}$$

где S_2 — нижнее основание, S_3 — верхнее основание, а S_1 — боковая поверхность усеченного конуса. Пусть для определенности величина t на S_3 равна t_0. При этом в силу (17.2) и (17.5) получим

$$J(u, u) = \int_{S_1} \Phi\, dS + \int_{S_2} \Phi\, dS + \int_{S_3} \Phi\, dS = 0. \qquad (17.6)$$

Вследствие (17.4) $\int_{S_1} \Phi\, dS \leqslant 0$. Тогда

$$-\int_{S_3} \Phi\, dS = \int_{S_2} \Phi\, dS + \int_{S_1} \Phi\, dS \leqslant \int_{S_2} \Phi\, dS.$$

Отсюда, так как на S_2 и S_3 $\cos\alpha_i = 0$ при $i \neq 0$, имеем оценку

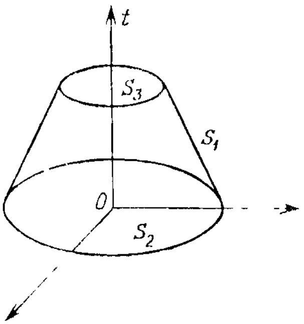

Рис 8

$$\int_{S_3} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dS \leqslant$$
$$\leqslant \int_{S_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dS. \qquad (17.7)$$

2. Оценка роста решения и его производных. Для наших целей необходимо еще оценить интеграл

$$\int_{S_3} u^2 dS.$$

Из (17.7) следует, что интеграл $\int_{S_3} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dS$ ограничен.

Обозначим $y(t) = \int_{\Sigma_t} u^2 dS$, где Σ_τ — сечение плоскостью $t = \tau$ цилиндра с основанием S_3 и осью Ot. Тогда

$$y'(t) = 2\int_{\Sigma_t} u \frac{\partial u}{\partial t}\, dS.$$

Применяя неравенство Буняковского, получим

$$|y'(t)| \leqslant 2\left[\int\limits_{\Sigma_t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dS\right]^{1/2}\left[\int\limits_{\Sigma_t} u^2 dS\right]^{1/2},$$

и в силу неравенства (17.7)

$$|y'(t)| \leqslant 2A\,[y(t)]^{1/2},$$

где

$$A = \left[\int\limits_{S_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\} dS\right]^{1/2}.$$

Отсюда следует, что $\frac{d}{dt}\sqrt{y} \leqslant A$. Интегрируя это неравенство от 0 до t, получим $\sqrt{y(t)} \leqslant \sqrt{y(0)} + At$. Полагая $y(0) = \int\limits_{S_2} u^2 dS = B^2$, имеем

$$y(t) \leqslant (B + At)^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

Пересечем еще наш усеченный конус V плоскостью $t = \text{const}$ и пусть σ_t — полученная в сечении область n-мерного пространства.

Рассуждая подобно прежнему, получим

$$\int\limits_{\sigma_t}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\} dS \leqslant \int\limits_{S_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\} dS. \quad (17.8)$$

Интегрируя по t от 0 до t_0, находим

$$\int\limits_{V}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\} dV \leqslant$$

$$\leqslant t_0\int\limits_{S_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\} dS \leqslant A^2 t_0. \quad (17.9)$$

Аналогично тому, как доказана оценка для $y(t)$, получим

$$\int\limits_{\sigma_t} u^2 dS \leqslant (B + At)^2. \quad (17.10)$$

Интегрируя по t от 0 до t_0, имеем

$$\int\limits_V u^2 dV \leqslant \frac{1}{3}\left(3B^2 t_0 + 3ABt_0^2 + A^2 t_0^3\right). \qquad (17.11)$$

Неравенство (17.11) влечет за собою ряд важных следствий.

Следствие 1. *Пусть начальные значения u, $\frac{\partial u}{\partial t}$ обращаются в нуль внутри шара S_2, тогда $u \equiv 0$ в усеченном конусе V.*

Доказательство. Так как $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ на S_2, то $A = B = 0$, и вследствие (17.11) $u \equiv 0$ на V.

Следствие 2. *Значение функции u, решения рассматриваемого уравнения, в некоторой точке $x_1^0, \ldots, x_n^0$, t^0 определяется значениями начальных данных u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в шаре $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2\right)^{1/2} \leqslant t^0$, являющемся пересечением конуса характеристик с вершиной в данной точке с плоскостью $t = 0$.*

Доказательство. В самом деле, если для двух каких-либо решений волнового уравнения начальные значения u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в этой области совпадают, то их разность обращается в нуль в этой области и на основании следствия 1 равна нулю в вершине конуса. Следовательно, в вершине конуса, т. е. в рассматриваемой точке, оба решения совпадают, что и требовалось доказать.

3. Решение при специальных начальных данных.

Теорема. *Пусть функция u есть решение однородного волнового уравнения. Если начальные значения $u|_{t=0}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}$ имеют во всем пространстве $x_1, \ldots, x_n$ все производные любого порядка, то и сама функция u тоже имеет все производные любого порядка.*

Доказательство. Сначала установим эту теорему в специальном случае. Докажем лемму.

Лемма. *Пусть функция u удовлетворяет уравнению*

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (17.5)$$

в области $-a \leqslant x_i \leqslant a$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $a > 0$ — некото-

рая постоянная, и пусть, кроме того,

$$u|_{x_i=\pm a} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{17.12}$$

т. е. функция u обращается в нуль на границе области. Пусть, кроме того, при $t = 0$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi_0, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \varphi_1, \end{aligned} \tag{17.13}$$

причем функции φ_0 и φ_1 имеют все непрерывные производные любого порядка и обращаются в нуль на границе области вместе со всеми своими производными. Тогда функция u имеет все непрерывные производные любого порядка.

Доказательство. В самом деле, в этом случае решение задачи может быть написано в явном виде при помощи ряда Фурье.

Разложим функции φ_0 и φ_1 в ряды Фурье:

$$\varphi_0 = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{\infty} b_{j_1 \ldots j_n} \sin j_1 \frac{(x_1 + a)\pi}{2a} \ldots \sin j_n \frac{(x_n + a)\pi}{2a},$$

$$\varphi_1 = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{n} g_{j_1 \ldots j_n} \sin j_1 \frac{(x_1 + a)\pi}{2a} \ldots \sin j_n \frac{(x_n + a)\pi}{2a}. \tag{17.14}$$

Эти ряды Фурье равномерно сходятся вместе со своими производными любого порядка.

Рассмотрим отрезки этих рядов. Обозначим

$$\varphi_0^{(N)} = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{N} b_{j_1 \ldots j_n} \sin j_1 \frac{(x_1 + a)\pi}{2a} \ldots \sin j_n \frac{(x_n + a)\pi}{2a},$$

$$\varphi_1^{(N)} = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{N} g_{j_1 \ldots j_n} \sin j_1 \frac{(x_1 + a)\pi}{2a} \ldots \sin j_n \frac{(x_n + a)\pi}{2a}.$$

Если в начальные условия подставить вместо φ_0 и φ_1 функции $\varphi_0^{(N)}$ и $\varphi_1^{(N)}$, то мы найдем решение $u^{(N)}$ волнового уравнения, удовлетворяющее этим начальным условиям

$$u^{(N)} = \sum_{j_1, \ldots, j_n=1}^{N} \left\{ b_{j_1 \ldots j_n} \cos\left(\frac{\pi}{2a} \sqrt{j_1^2 + \ldots + j_n^2}\, t\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2a}{\pi} \frac{g_{j_1 \ldots j_n}}{\sqrt{j_1^2 + \ldots + j_n^2}} \sin\left(\frac{\pi}{2a} \sqrt{j_1^2 + \ldots + j_n^2}\, t\right) \right\} \times$$

$$\times \sin j_1 \frac{(x_1 + a)\pi}{2a} \ldots \sin j_n \frac{(x_n + a)\pi}{2a}.$$

Это решение, очевидно, имеет все непрерывные производные. Докажем, что при возрастании N последовательность $u^{(N)}$ сходится в любом пространстве $W_2^{(l)}$, где l — любое число, к некоторой функции u. Отсюда уже сразу будет следовать, что предельная функция u есть решение волнового уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (17.13) и непрерывно дифференцируемое сколько угодно раз. Из того, что это решение единственно, вытекает и наша лемма.

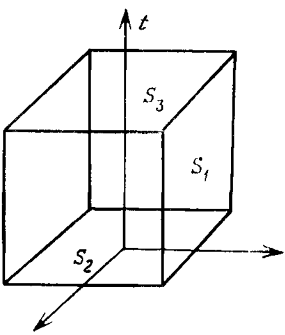

Рис. 9

Нам осталось установить сходимость последовательности $u^{(N)}$. Применим интегральное равенство (17.6) к параллелепипеду, нижнее основание которого S_2: $|x_i| \leqslant a$ лежит в плоскости $t = 0$, а верхнее основание S_3 лежит в плоскости $t = t_0$ (рис. 9). Пользуясь тем, что на боковой поверхности S_1 этого параллелепипеда имеет место равенство $u^{(N)} = \frac{\partial u^{(N)}}{\partial t} = 0$, получим

$$\int_{S_1} \frac{\partial u^{(N)}}{\partial t} \frac{\partial u^{(N)}}{\partial \nu} dS = 0,$$

и, следовательно,

$$\int_{S_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u^{(N)}}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(N)}}{\partial t} \right)^2 \right] dS =$$

$$= \int_{S_3} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u^{(N)}}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(N)}}{\partial t} \right)^2 \right] dS. \quad (17.15)$$

Рассмотрим еще функцию

$$v^{(N)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \frac{\partial^\alpha u^{(N)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Эта функция, в свою очередь, удовлетворяет волновому уравнению*). Заметим еще, что на гранях параллелепипеда при $|x_j| = a$ функция $v^{(N)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ удовлетворяет либо условию $v^{(N)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = 0$, если α_j четное, либо условию $\frac{\partial v^{(N)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial \nu} = 0$, если α_j нечетное. Применяя к этой функции формулу (17.6), получим таким же образом

$$\int\limits_{S_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v^{(N)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^{(N)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial t} \right)^2 \right] dS = \\ = \int\limits_{S_3} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v^{(N)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^{(N)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial t} \right)^2 \right] dS. \quad (17.16)$$

На начальной плоскости S_2 все интегралы при заданных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ограничены числом, не зависящим от N.

Рассмотрим еще функцию

$$w^{(k,r)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = v^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} - v^{(r)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}.$$

Для этой функции получим, подобно прежнему,

$$\int\limits_{S_3} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial w^{(k,r)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(k,r)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial t} \right)^2 \right] dS = \\ = \int\limits_{S_2} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial w^{(k,r)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(k,r)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial t} \right)^2 \right] dS. \quad (17.17)$$

Нетрудно установить, что при достаточно больших k и r интеграл в правой части последнего равенства сколь угодно мал. Это непосредственно следует из сходимости с любыми производными рядов Фурье для φ_0 и φ_1.

*) Если u — решение волнового уравнения, имеющее непрерывные производные до $(l+2)$-го порядка во всем пространстве, то, очевидно, любая производная от u до порядка l есть также решение волнового уравнения.

Отсюда следует, что и в левой части стоит сколь угодно малая величина:

$$\int_{S_3}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial w^{(k,r)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial w^{(k,r)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial t}\right)^2\right]dS<\varepsilon.$$

Проинтегрируем это неравенство по t в пределах от 0 до T. Имеем

$$\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial w^{(k,r)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial w^{(k,r)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial t}\right)^2\right]d\Omega<T\varepsilon,$$

где через Ω обозначена область $0\leqslant t\leqslant T$; $|x_i|\leqslant a$. Пользуясь затем теми же рассуждениями, которые были нами использованы при выводе (17.11), докажем, что

$$\int_{\Omega}\left(w^{(k,r)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\right)^2 d\Omega\leqslant M\varepsilon,$$

где постоянная M не зависит от k и r.

В силу полноты пространства $W_2^{(\alpha)}$ мы заключаем, что последовательность $v^{(N)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$, удовлетворяющая признаку сходимости Коши, сходится в этом пространстве. Сходимость всех производных от $u^{(N)}$ в $W_2^{(\alpha)}$ влечет за собою равномерную сходимость всех производных от этой функции в силу теоремы вложения. Лемма доказана.

Опираясь на эту лемму, легко докажем нашу теорему. В самом деле, значения неизвестной функции внутри конуса

$$0\leqslant t\leqslant\frac{a}{2}-|x| \tag{17.18}$$

зависят только от значений функции φ_0 и φ_1 внутри шара $|x|\leqslant a/2$.

Построим функции

$$\varphi_0^{(a)}=\varphi_0\prod_{i=1}^{n}\psi\left(\left|\frac{x_i}{a}\right|\right),\quad \varphi_1^{(a)}=\varphi_1\prod_{i=1}^{n}\psi\left(\left|\frac{x_i}{a}\right|\right),$$

где $\psi(\xi)$ — функция, равная единице при $\xi<1/2$, равная нулю при $\xi>1$ и имеющая непрерывные производные всех порядков. Будем искать решение $u^{(a)}$ волнового уравнения, удовлетворяющее условиям

$$u^{(a)}\Big|_{t=0} = \varphi_0^{(a)}, \quad \frac{\partial u^{(a)}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1^{(a)}.$$

На основании леммы видим, что $u^{(a)}$ имеет все непрерывные производные. Но по доказанному ранее внутри конуса (17.18) это решение совпадает с u.

Следовательно, u в свою очередь имеет все непрерывные производные, что и требовалось доказать.

18. Обобщенная задача Коши для волнового уравнения

1. Дважды дифференцируемые решения. Поставим следующую задачу: найти решение волнового уравнения

$$\Box\, u = \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{17.5}$$

во всем пространстве, удовлетворяющее начальным условиям

$$u\,|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1. \tag{17.13}$$

Доказано, что если u_0 и u_1 имеют все производные, то решение задачи существует и имеет все производные. Однако нет, конечно, никакой надобности во всех производных для получения решения, в то время как в уравнении участвуют только производные второго порядка.

Мы рассмотрим прежде всего следующую задачу.

З а д а ч а 1. *Найти, какие условия, наложенные на u_0 и u_1, обеспечивают существование дважды непрерывно дифференцируемого решения.*

В предыдущей главе мы познакомились с обобщенными производными, а теперь по той же схеме определим обобщенный волновой оператор.

Пусть $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ — функция, суммируемая в любой ограниченной замкнутой подобласти области Ω $(n+1)$-мерного пространства. Если существует суммируемая в любой ограниченной замкнутой подобласти Ω функция $f(x_1, \ldots, x_n, t)$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega} u\,\Box\,\psi\,dv = \int\limits_{\Omega} \psi f\,dv,$$

какова бы ни была дважды непрерывно дифференцируемая во всем пространстве функция $\psi(x_1, \ldots, x_n, t)$, отличная от нуля лишь в некоторой ограниченной замкнутой подобласти Ω, то будем записывать $\Box u = f$ и считать, что f *есть результат применения к* u *обобщенного волнового оператора* $\Box$.

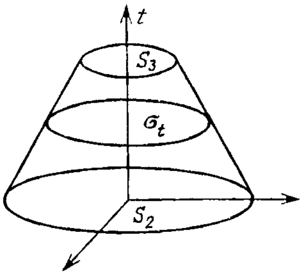

Рис. 10

Если $\Box u = 0$, где $\Box$ — обобщенный волновой оператор, то функцию u мы будем называть *обобщенным решением волнового уравнения.*

Естественно поставить задачу Коши для обобщенных решений.

З а д а ч а 2. *Найти, какие условия, наложенные на* u_0 *и* u_1, *обеспечивают существование обобщенного решения.*

Обе эти задачи будут нами рассмотрены.

Т е о р е м а. *Если* u_0 *имеет обобщенные производные до* $\left[\frac{n}{2}\right] + 3$ *порядка, а* u_1 *имеет обобщенные производные до* $\left[\frac{n}{2}\right] + 2$ *порядка, интегрируемые с квадратами по любой конечной области, то уравнение* (17.5) *имеет дважды непрерывно дифференцируемое решение, удовлетворяющее условиям* (17.13).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим семейства средних функций $\{u_{0h}\}$ и $\{u_{1h}\}$. По теореме из § 17, п. 4 существует решение u_h уравнения (17.5), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = u_{0h}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_{1h} \tag{18.1}$$

и имеющее производные любого порядка.

Рассмотрим функцию $v_{p,q} = u_{h_p} - u_{h_q}$; $v_{p,q}$ — есть решение (17.5) с начальными условиями

$$v_{p,q}\big|_{t=0} = u_{0h_p} - u_{0h_q}, \quad \left.\frac{\partial v_{p,q}}{\partial t}\right|_{t=0} = u_{1h_p} - u_{1h_q}.$$

По неравенству (17.8) имеем (рис. 10)

$$\int\limits_{\sigma_t}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_{p,q}}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial v_{p,q}}{\partial t}\right)^2\right]dS \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{S_2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_{p,q}}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial v_{p,q}}{\partial t}\right)^2\right]dS$$

и аналогично для любой производной от $v_{p,q}$

$$\int\limits_{\sigma_t}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^{\alpha}v_{p,q}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{\alpha}v_{p,q}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2\right]dS \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{S_2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^{\alpha}v_{p,q}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{\alpha}v_{p,q}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2\right]dS. \tag{18.2}$$

Кроме того, вследствие (17.10)

$$\int\limits_{\sigma_t}(v_{p,q})^2\,dS \leqslant \left\{\left[\int\limits_{S_2} v_{p,q}^2 dS\right]^{1/2}+\right.$$
$$\left.+\left[\int\limits_{S_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v_{p,q}}{\partial x_i}\right)^2 dS+\int\limits_{S_2}\left(\frac{\partial v_{p,q}}{\partial t}\right)^2 dS\right]^{1/2} t\right\}^2. \tag{18.3}$$

В силу теоремы вложения из § 10, п. 2 имеем

$$\sup_{\sigma_t}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 v_{p,q}}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\|v_{p,q}\|_{W_2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)}}+\left\|\frac{\partial v_{p,q}}{\partial t}\right\|_{W_2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+2\right)}}\right), \tag{18.4}$$

где взята норма $v_{p,q}$ в $W_2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)}$ и $\frac{\partial v_{p,q}}{\partial t}$ в $W_2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+2\right)}$ по S_2, причем M не зависит от $t\in(0,\ t_0]$.

По свойству средних функций (§ 5, п. 2) $u_{0h}\Rightarrow u_0$ в $W_2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)}$ и $u_{1h}\Rightarrow u_1$ в $W_2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+2\right)}$. Поэтому правая часть неравенства (18.4) может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малых h_p и h_q, а тогда и левая часть сколь угодно мала, т. е. последовательность $\{u_{h_p}\}$ сходится равномерно по усеченному конусу V, следовательно, предельная функция $u \in C^2$. Аналогичными оценками докажем, что $\frac{\partial u}{\partial t} \in C^1$. Так как $\Delta u_{h_p} = \frac{\partial^2 u_{h_p}}{\partial t^2}$, то последовательность $\left\{\frac{\partial^2 u_{h_p}}{\partial t^2}\right\}$ сходится равномерно в V и, значит, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in C$.

Таким образом, функция u дважды непрерывно дифференцируема в $(n+1)$-мерном пространстве и является решением волнового уравнения.

2. Пример. Рассмотрим волновое уравнение в 5-мерном пространстве. Мы видели выше, что от начальных условий достаточно потребовать существования интегрируемых с квадратом производных пятого порядка от u_0 и четвертого порядка от u_1. Покажем, что если интегрируемы с квадратом лишь производные более низкого порядка (для u_0 — производные четвертого порядка, а для u_1 — третьего порядка), то решение может не иметь непрерывных производных второго порядка.

Пусть $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}$; тогда, если $f(y)$ непрерывно дифференцируемая m раз $(m \geqslant 5)$ функция, то

$$u = \frac{f(t-r) - f(t+r)}{r^3} + \frac{f'(t-r) + f'(t+r)}{r^2} \tag{18.5}$$

является решением волнового уравнения с начальными данными

$$u_0 = -\frac{2f_1(r)}{r^3} + \frac{2f_1'(r)}{r^2}, \quad \text{где} \quad 2f_1(r) = f(-r) - f(r);$$

$$u_1 = -\frac{2f_2'(r)}{r^3} + \frac{2f_2''(r)}{r^2}, \quad \text{где} \quad 2f_2(r) = f(r) + f(-r).$$

Имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{[f''(t-r) - f''(t+r)] + r\,[f'''(t-r) + f'''(t+r)]}{r^3}.$$

Если $m \geqslant 5$, то нетрудно убедиться, что $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ непрерывны и применение правила Лопиталя дает

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{r=0} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{[f'''(t-r) - f''(t+r)] + r\,[f'''(t-r) + f'''(t+r)]}{r^3} =$$

$$= \frac{2}{3} f^{(V)}(t).$$

Пусть

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ (y-1)^\alpha, & y > 1. \end{cases}$$

Тогда

$$u_0 = \begin{cases} 0, & r < 1, \\ -\frac{(r-1)^\alpha}{r^3} + \alpha \frac{(r-1)^{\alpha-1}}{r^2}, & r > 1, \end{cases}$$

$$u_1 = \begin{cases} 0, & r < 1, \\ -\alpha \frac{(r-1)^{\alpha-1}}{r^3} + \alpha(\alpha-1) \frac{(r-1)^{\alpha-2}}{r^2}, & r > 1, \end{cases}$$

и нетрудно видеть, что $u_0 \in W_2^{(4)}$, $u_1 \in W_2^{(3)}$, но $u_0 \overline{\in} W_2^{(5)}$, $u_1 \overline{\in} W_2^{(4)}$, если $\frac{9}{2} < \alpha < \frac{11}{2}$. При этом получим

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{r=0} = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ A(t-1)^{\alpha-5}, & t > 1 \quad (A = \mathrm{const} \neq 0), \end{cases}$$

и функция $u(r, t)$, заданная (18.5), не является дважды непрерывно дифференцируемой, если $9/2 < \alpha \leqslant 5$. Как нетрудно убедиться, $u(r, t)$ является обобщенным решением волнового уравнения для заданных u_0 и u_1, и притом единственным решением (см. теорему из п. 5). Если $5 < \alpha < 11/2$, то хотя $u_0 \overline{\in} W_2^{(5)}$, $u_1 \overline{\in} W_2^{(4)}$, но соответствующее решение дважды непрерывно дифференцируемо, и условия $u_0 \in W_2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)}$ и $u_1 \in W_2^{\left(\left[\frac{n}{2}\right]+2\right)}$ не являются необходимыми. Аналогичные примеры легко построить для $(2k+1)$-мерных пространств ([53]).

3. Обобщенные решения. Мы видели ранее, что решения волнового уравнения, имеющие все непрерывные производные, обладают тем свойством, что их норма в любом пространстве $W_2^{(l)}$ в ограниченной области плоского сечения $t = \text{const}$ (если их рассматривать как элементы этого пространства) остается равномерно ограниченной. Эту норму удается оценить, если известны начальные значения функции, точнее — если известна норма в том же пространстве $W_2^{(l)}$ от u_0 и норма в $W_2^{(l-1)}$ от u_1.

Мы будем говорить, что функция u есть *обобщенное решение волнового уравнения из* $W_2^{(1)}$, если $\Box u = 0$, где $\Box$ — обобщенный волновой оператор, и если эта функция в любой конечной области принадлежит $W_2^{(1)}$.

Очевидно, что всякое обобщенное решение волнового уравнения в $W_2^{(1)}$ является пределом последовательности функций u_k, сходящихся в $W_2^{(1)}$ в любой конечной области, являющихся дважды непрерывно дифференцируемыми решениями волнового уравнения: $\Box u_k = 0$.

В самом деле, по доказанному выше u является в любой конечной области пределом в $W_2^{(1)}$ последовательности средних функций: $u_{h_k} \Rightarrow u$. Далее, каждая средняя функция, очевидно, удовлетворяет волновому уравнению, так как для волнового оператора можно установить перестановочность с оператором усреднения. Это доказывается тем же способом, который мы использовали ранее при доказательстве того, что производная от средней функции равна средней функции от производной (см. § 5, п. 2).

Докажем обратное утверждение.

Теорема. *Если функция u служит пределом последовательности u_k непрерывных со вторыми производными решений волнового уравнения, обладающих нормой в $W_2^{(1)}$, ограниченной в совокупности в любой конечной области, причем последовательность сходится к u хотя бы слабо в L_1 в любой конечной области, то u есть обобщенное решение в $W_2^{(1)}$.*

Доказательство. На основании теоремы о существовании обобщенных производных мы заключаем, что u принадлежит $W_2^{(1)}$ в любой конечной области. Тот факт, что u является обобщенным решением волнового уравнения, следует из того, что $\int u \,\Box\, \psi\, dv = \lim\limits_{k\to\infty} \int u_k \,\Box\, \psi\, dv$, где ψ — произвольная функция, имеющая все непрерывные производные и обращающаяся в нуль вне некоторой ограниченной области V_ψ. Так как $\int u_k \,\Box\, \psi\, dv = 0$, мы получим, что

$$\int u \,\Box\, \psi\, dv = 0, \tag{18.6}$$

что и требовалось доказать.

4. Существование начальных данных.

Теорема. *Всякое обобщенное решение из $W_2^{(1)}$ имеет в любой конечной области G на плоскости $t=0$ предельные значения $u_0 \in W_2^{(1)}$ и $u_1 \in L_2$, т. е. для любой конечной области G*

$$\begin{gathered} \lim_{t\to 0} \| u(t) - u_0 \|_{W_2^{(1)}} = 0, \\ \lim_{t\to 0} \left\| \frac{\partial u(t)}{\partial t} - u_1 \right\|_{L_2} = 0, \end{gathered} \tag{18.7}$$

где $u(t) \equiv u(x_1, \ldots, x_n, t)$.

Плоскость $t=0$, разумеется, является выбранной совершенно произвольно. Теорема приводит нас к заключению, что решение волнового уравнения из $W_2^{(1)}$ может иметь плоскость $t = \mathrm{const}$ лишь в качестве устранимой особенности.

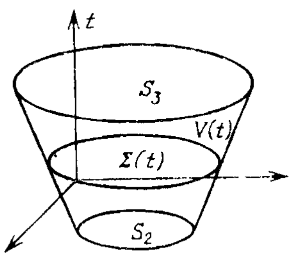

Рис. 11

Напомним, что из теоремы вложения следует в этом случае несколько более слабый результат, а именно: всякое решение u волнового уравнения из $W_2^{(1)}$ может иметь плоскость $t = \mathrm{const}$ лишь в качестве устранимой особенности, если рассматривать значение самого u в L_2 (без производных). Переходим к доказательству теоремы.

Доказательство. Рассмотрим в плоскости $t=0$ произвольный n-мерный шар S_2 и проведем через его границу обратный характеристический конус (рис. 11).

Обозначим через $\Sigma(t)$ шар, получаемый в пересечении этого конуса с плоскостью $t=\mathrm{const}$. Множество $\Sigma(t)$ при $t=T$ обозначим S_3. Пусть $V(t)$ — область, ограниченная S_3, $\Sigma(t)$ и боковой поверхностью конуса, $V(0)=V$.

Пусть, далее, v — некоторое дважды непрерывно дифференцируемое решение волнового уравнения. Для него справедливо неравенство:

$$\int\limits_{\Sigma(t)} \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] dS \geqslant \int\limits_{\Sigma(t_1)} \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] dS,$$

если $t > t_1$, получаемое из (17.7) заменой t на $T-t$.

Интегрируя по t от t_1 до T, получим

$$\int\limits_{V(t_1)} \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] dV \geqslant$$
$$\geqslant (T-t_1)\int\limits_{\Sigma(t_1)} \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] dS. \quad (18.8)$$

Пусть $v_h = u_h(t+k) - u_h(t)$, где u_h — средняя функция для u и $k>0$.

Применяя (18.8) к v_h при фиксированном значении k и подставляя вместо v_h его значение, имеем

$$\frac{1}{T-t_1}\int\limits_{V(t_1)} \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_h(t+k)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_h(t)}{\partial x_i}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u_h(t+k)}{\partial t} - \frac{\partial u_h(t)}{\partial t}\right)^2\right] dV \geqslant \int\limits_{\Sigma(t_1)} \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_h(t+k)}{\partial x_i} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial u_h(t)}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_h(t+k)}{\partial t} - \frac{\partial u_h(t)}{\partial t}\right)^2\right] dS. \quad (18.9)$$

В формуле (18.9) можно перейти к пределу при $h\to 0$, так как сходимость u_h к u имеет место в $W_2^{(1)}$. Сходимость в L_2 на $\Sigma(t_1)$ производных $\dfrac{\partial u_h}{\partial x_i}$ и $\dfrac{\partial u_h}{\partial t}$ следует из оценок для u_h вида (17.8). Поэтому

$$\int\limits_{\Sigma(t_1)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u(t+k) - u(t)) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial t} (u(t+k) - u(t)) \right]^2 \right\} dS \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T - t_1} \int\limits_{V(t_1)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u(t+k) - u(t)) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial t} (u(t+k) - u(t)) \right]^2 \right\} dV. \quad (18.10)$$

Функции $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ принадлежат L_2 в V и, следовательно, непрерывны в целом в области V. Пусть $t_1 < T/2$. Тогда можно выбрать $\delta(\varepsilon)$ столь малым, что при $k < \delta(\varepsilon)$ правая часть неравенства (18.10) будет меньше ε независимо от t_1.

Следовательно,

$$\int\limits_{\Sigma(t_1)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u(t_1+k) - u(t_1)) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial t} (u(t_1+k) - u(t_1)) \right]^2 \right\} dS < \varepsilon.$$

Положив $t_2 = t_1 + k$, получим

$$\| u(t_2) - u(t_1) \|_{L_2^{(1)}} < \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t_2) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_1) \right\|_{L_2} < \varepsilon,$$

где нормы взяты по $\Sigma(t_1)$, при t_1 и t_2 достаточно близких, и, значит, для любых достаточно малых t_1 и t_2.

В силу полноты пространств L_2 и $L_2^{(1)}$ отсюда вытекает существование предельного значения при $t \to 0$ в L_2 для $\frac{\partial u}{\partial t}$ и предельного значения при $t \to 0$ в $L_2^{(1)}$ для u по любой конечной области n-мерного пространства. Если учесть еще, что предельное значение u в L_2 существует в силу теоремы вложения, мы приходим к заключению, что существуют значения $u(0)$ и $\frac{\partial u}{\partial t}(0)$, соответственно принадлежащие $W_2^{(1)}$ и L_2. Поэтому при $k \to 0$

по любой конечной области n-мерного пространства

$$\| u(k) - u(0) \|_{W_2^{(1)}} \to 0, \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(k) - \frac{\partial u}{\partial t}(0) \right\|_{L_2} \to 0.$$

Теорема доказана.

5. Решение обобщенной задачи Коши.

Теорема. *Каковы бы ни были функции* $u_0(x_1, \ldots, x_n) \in W_2^{(1)}$ *и* $u_1(x_1, \ldots, x_n) \in L_2$ *в любой конечной области, существует единственное обобщенное решение* u *волнового уравнения из* $W_2^{(1)}$, *удовлетворяющее условиям*

$$u\big|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1, \tag{17.13}$$

причем при $t \to 0$ $u(t)$ *стремится к* u_0 *в* $W_2^{(1)}$, *а* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *стремится к* u_1 *в* L_2 *по любой конечной области.*

Доказательство. Рассмотрим средние функции для начальных данных: u_{0_h} и u_{1_h}. Подставляя их вместо u_0 и u_1 в начальные данные, мы можем найти решение задачи Коши, так как эти новые начальные данные неограниченно дифференцируемы. Обозначим это решение волнового уравнения через u_h.

Легко показать, что при $h_p \to 0$ последовательность u_{h_p} сходится в $W_2^{(1)}$ в любой конечной области $(n+1)$-мерного пространства $x_1, \ldots, x_n, t$ и в любой конечной области n-мерного пространства $x_1, \ldots, x_n$ при любом значении t.

Действительно, положим $u_{h_p} - u_{h_q} = v_{p,q}$. Функция $v_{p,q}$ есть решение волнового уравнения, для которого величины A и B в неравенствах (17.9) и (17.11) сколь угодно малы при достаточно малых h_p и h_q. Пользуясь этими неравенствами, видим, что при достаточно малых h_p и h_q

$$\int_V v_{p,q}^2 \, dV < \varepsilon, \quad \int_V \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v_{p,q}}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{p,q}}{\partial t} \right)^2 \right] dV < \varepsilon,$$

откуда немедленно вытекает, что последовательность u_{h_p} сходится в силу полноты $W_2^{(1)}$. Предельная функция u в силу теоремы из п. 3 является обобщенным решением волнового уравнения.

Далее, воспользовавшись неравенствами (17.8) и (17.10), получим

$$\int\limits_{\sigma_t} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v_{p,q}}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{p,q}}{\partial t} \right)^2 \right] dS \leqslant \varepsilon, \qquad \int\limits_{\sigma_t} (v_{p,q})^2 \, dS \leqslant \varepsilon. \tag{18.11}$$

Эти неравенства говорят о том, что последовательность u_{h_p} сходится в любой конечной части плоскости $t = \mathrm{const}$ в смысле $W_2^{(1)}$, причем относительно t сходимость равномерна на любом отрезке $[0, T]$.

Отсюда легко заключить, что предельная функция u, которая по доказанному в теореме из п. 4 имеет предельные значения u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t \to 0$, принадлежащие соответственно $W_2^{(1)}$ и L_2 в любой конечной области, принимает на начальной плоскости именно значения u_0 и u_1. В самом деле,

$$\|u(t) - u_0\|_{W_2^{(1)}} \leqslant \|u_h(t) - u_h(0)\|_{W_2^{(1)}} + \\ + \|u_h(0) - u_0\|_{W_2^{(1)}} + \|u_h(t) - u(t)\|_{W_2^{(1)}}.$$

При достаточно малом h ввиду равномерных по t оценок (18.11) имеем

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{W_2^{(1)}} \leqslant \varepsilon/3,$$

$$\|u_h(0) - u_0\|_{W_2^{(1)}} = \|u_{0h} - u_0\|_{W_2^{(1)}} \leqslant \varepsilon/3.$$

Выбрав t при фиксированном h достаточно малым, получим в силу гладкости $u_h(t)$, что $\|u_h(t) - u_h(0)\|_{W_2^{(1)}} \leqslant \varepsilon/3$.

Следовательно,

$$\|u(t) - u(0)\|_{W_2^{(1)}} \leqslant \varepsilon.$$

Аналогично легко доказывается, что

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) - u_1 \right\|_{L_2} \leqslant \varepsilon.$$

Тем самым теорема доказана.

19. Линейное уравнение нормального гиперболического типа с переменными коэффициентами (основные свойства)

1. Характеристики и бихарактеристики. В настоящем параграфе мы докажем существование решения задачи Коши у линейного уравнения гиперболического типа с достаточно гладкими коэффициентами при достаточно гладких начальных данных.

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^{2k+1} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F, \quad (19.1)$$

где A_{ij} $(A_{ij} = A_{ji})$, B_i, C и F суть функции переменных $x_0, \ldots, x_{2k+1}$, непрерывные с производными до порядка $K+1$ включительно, где K — достаточно большое число.

Допустим, что в каждой точке пространства квадратичная форма

$$A(p) = \sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} A_{ij} p_i p_j \quad (19.2)$$

приводится к виду

$$A(p) = -\sum_{i=1}^{2k+1} q_i^2 + q_0^2 \quad (19.3)$$

при помощи линейной замены переменных p_i.

Уравнение (19.1) называется в этом случае уравнением нормального гиперболического типа.

Характеристическими поверхностями или характеристиками уравнения (19.1) называют поверхности

$$G(x_0, x_1, \ldots, x_{2k+1}) = 0 \quad (19.4)$$

такие, для которых на этой поверхности

$$A(p) = 0, \quad (19.5)$$

$$\sum_{i=0}^{2k+1} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)^2 > 0, \quad (19.6)$$

где $p = (p_0, \ldots, p_{2k+1})$, $p_i = \dfrac{\partial G}{\partial x_i}$ [212].

Уравнение нормального гиперболического типа имеет характеристические поверхности с конической точкой в любой заданной точке пространства $x_0^0, \ldots, x_{2k+1}^0$. Эти поверхности называются *характеристическими коноидами*. В случае уравнения с постоянными коэффициентами характеристические коноиды превращаются в характеристические конусы.

Напомним некоторые простейшие свойства характеристических коноидов и их построение.

Все дальнейшие рассмотрения проводятся в некоторой достаточно малой окрестности фиксированной точки $x_0^0, \ldots, x_{2k+1}^0$.

Обозначим

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = p_i. \tag{19.7}$$

Как известно из теории уравнений в частных производных первого порядка [190], поверхность (19.4), удовлетворяющая уравнению (19.5), получается как многообразие, сотканное из бихарактеристик, т. е. решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_i}} = \frac{-dp_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_i}} = ds. \tag{19.8}$$

Более точно: параметрическое уравнение поверхности (19.4) получается в виде

$$x_i = \xi_i\left(s, x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}, p_0^{(0)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)}\right), \tag{19.9}$$

где $x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}, p_0^{(0)}, \ldots, p_{2k+1}^{0}$ суть функции от $2k$ независимых параметров $v_1, \ldots, v_{2k}$. При этом

а) функции (19.9) вместе с

$$p_i = \frac{1}{s}\pi_i\left(s, x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}, p_0^{(0)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)}\right) \tag{19.10}$$

должны представлять собой общее решение системы (19.8), зависящее от $4k+4$ произвольных постоянных; в (19.9) и (19.10) положено

$$x_i\big|_{s=0} = x_i^{(0)}, \quad p_i\big|_{s=0} = p_i^{(0)} \quad (i = 0, \ldots, 2k+1); \tag{19.11}$$

б) функции $x_i^{(0)}(v_1, \ldots, v_{2k})$, $p_i^{(0)}(v_1, \ldots, v_{2k})$ должны удовлетворять условиям

$$A(p)\big|_{s=0} = 0, \tag{19.12}$$

$$\sum_{i=0}^{2k+1} p_i^{(0)}\frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial v_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, 2k); \tag{19.13}$$

в условии (19.13) величины x_i и p_i следует считать выраженными через s по формулам (19.9) и (19.10);

в) уравнения (19.9) должны давать параметрическое представление многообразия $2k+1$ измерения (не ниже).

Покажем, как строится с помощью этой теории характеристический коноид с вершиной в точке $x_0^{(0)}, \ldots$ $\ldots, x_{2k+1}^{(0)}$.

Допустим, что нами построены решения (19.9) и (19.10) системы (19.8). Будем считать в них за независимые параметры $p_0^{(0)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)}$, которые мы подчиним двум условиям: уравнению (19.12) и условию нормировки

$$\sum_{i=0}^{2k+1} p_i^{(0)2} = 1. \tag{19.14}$$

Величины $x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}$ будем считать постоянными, не зависящими от $p_0^{(0)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)}$.

Нетрудно проверить, что уравнения (19.9) дадут при этом параметрическое уравнение поверхности, удовлетворяющей уравнению (19.5). Условие (19.12) выполняется в силу выбора $p_i^{(0)}$. Условие (19.13) также выполнено, ибо $\dfrac{\partial x_i^{(0)}}{\partial p_j^{(0)}} = 0$.

В том, что мы будем иметь в этом случае из (19.9) параметрическое уравнение многообразия $2k+1$ измерения, мы убедимся непосредственно несколько позднее.

Отметим прежде всего несколько важных свойств уравнений (19.9) и (19.10).

Положим

$$sp_i^{(0)} = y_i, \quad sp_i = \pi_i. \tag{19.15}$$

Покажем, что функции ξ_i и π_i зависят от s и $p_i^{(0)}$ только через посредство y_i, т. е. что

$$\begin{aligned} &\xi_i\left(s,\ x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)},\ \frac{y_0}{s}, \ldots, \frac{y_{2k+1}}{s}\right), \\ &\pi_i\left(s,\ x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)},\ \frac{y_0}{s}, \ldots, \frac{y_{2k+1}}{s}\right) \end{aligned} \tag{19.16}$$

не зависят от s при заданных y_i и x_i^0.

Действительно, вместо s и p_i рассмотрим новые переменные s_1 и $p_i^{(1)}$, полагая

$$s = \alpha s_1, \quad p_i = \frac{p_i^{(1)}}{\alpha}. \tag{19.17}$$

Подставляя эти новые переменные в систему (19.8), мы получим систему уравнений для $p_i^{(1)}$ и x_i с независимым переменным s_1. Эта система оказывается совпадающей с системой (19.8) и могла бы быть получена простым переименованием независимого переменного и функций p_i. Отсюда следует, что функции

$$\begin{gathered} x_i = \xi_i\left(\alpha s_1,\ x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)},\ p_0^{(0)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)}\right), \\ p_i^{(1)} = \alpha p_i = \frac{1}{s_1} \pi_i\left(\alpha s_1,\ x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)},\ p_0^{(0)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)}\right) \end{gathered} \tag{19.18}$$

также удовлетворяют системе (19 8).

Обозначим

$$p_i^{(1)}\Big|_{s_1=0} = p_i^{(0)(1)}, \tag{19.19}$$

тогда $p_i^{(0)(1)} = \alpha p_i^{(0)}$ или $p_i^{(0)} = \dfrac{p_i^{(0)(1)}}{\alpha}$.

Имеем, очевидно,

$$x_i\Big|_{s_1=0} = x_i^{(0)}. \tag{19.20}$$

Уравнения (19.18) можно при этом переписать так

$$\begin{gathered} x_i = \xi_i\left(\alpha s_1,\ x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)},\ \frac{p_0^{(0)(1)}}{\alpha}, \ldots, \frac{p_{2k+1}^{(0)(1)}}{\alpha}\right), \\ p_i^{(1)} = \frac{1}{s_1} \pi_i\left(\alpha s_1,\ x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)},\ \frac{p_0^{(0)(1)}}{\alpha}, \ldots, \frac{p_{2k+1}^{(0)(1)}}{\alpha}\right). \end{gathered} \tag{19.21}$$

С другой стороны, для этих же функций x_i и $p_i^{(1)}$ как решений системы (19.8), удовлетворяющих условиям (19.19) и (19.11), на основании теоремы единственности имеем

$$\begin{gathered} x_i = \xi_i\left(s_1,\ x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)},\ p_0^{(0)(1)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)(1)}\right), \\ p_i^{(1)} = \frac{1}{s_1} \pi_i\left(s_1,\ x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)},\ p_0^{(0)(1)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)(1)}\right). \end{gathered} \tag{19.22}$$

Правые части (19.21) и (19.22) тождественны при любом α. Полагая $s_1 = 1$, $\alpha = s$, получим наше утверждение.

Обозначим

$$\xi_i\left(s, x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}, p_0^{(0)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)}\right) = \\ = X_i\left(x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}, y_0, y_1, \ldots, y_{2k+1}\right),$$

$$\pi_i\left(s, x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}, p_0^{(0)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)}\right) = \\ = \Pi_i\left(x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}, y_0, y_1, \ldots, y_{2k+1}\right).$$

Покажем, что уравнения

$$x_i = X_i\left(x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}, y_0, \ldots, y_{2k+1}\right) \qquad (19.23)$$

выражают замену координат x_i на координаты y_i в нашем пространстве и притом такую, которая переводит точку $y_i = 0$ в точку $x_i = x_i^{(0)}$, имеет вблизи этой точки определитель, отличный от нуля, и непрерывна вместе с производными до порядка K, где K — достаточно большое число.

В силу известной теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений функции π_i и ξ_i имеют непрерывные производные по $x_j^{(0)}$ и $p_j^{(0)}$ до порядка K включительно.

Будем считать функции x_i и p_i функциями переменного s с параметрами $x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}, p_0^{(0)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)}$ и рассмотрим производные от x_i и p_j по s. Покажем, что $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{d^\alpha x_i}{ds^\alpha}$ есть однородный многочлен степени α, а $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{d^\alpha p_i}{ds^\alpha}$ — степени $\alpha+1$ от $p_i^{(0)}$.

Для доказательства воспользуемся опять системой уравнений (19.8). Дифференцируя по s уравнения этой системы последовательно и исключая каждый раз из правых частей первые производные, мы можем выразить $\dfrac{d^\alpha x_i}{ds^\alpha}$ и $\dfrac{d^\alpha p_i}{ds^\alpha}$ через величины x_i и p_i. Мы покажем, что

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x_i}{ds^\alpha} &= X_i^{(\alpha)}\left(x_0, \ldots, x_{2k+1}, p_0, \ldots, p_{2k+1}\right), \\ \frac{d^\alpha p_i}{ds^\alpha} &= P_i^{(\alpha)}\left(x_0, \ldots, x_{2k+1}, p_0, \ldots, p_{2k+1}\right), \end{aligned} \qquad (19.24)$$

где $X_i^{(\alpha)}$ и $P_i^{(\alpha)}$ суть многочлены степени α или $\alpha+1$ от p_i.

Чтобы установить это, применим полную индукцию. Для $\alpha = 1$ утверждение очевидно. Положим, что для некоторого $\alpha \geqslant 1$ утверждение доказано.

Дифференцируя (19.24) по s, получим

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d^\alpha x_i}{ds^\alpha}\right) = \frac{dX_i^{(\alpha)}}{ds} = \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{\partial X_i^{(\alpha)}}{\partial x_j}\frac{dx_j}{ds} + \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{\partial X_i^{(\alpha)}}{\partial p_j}\frac{dp_j}{ds} =$$
$$= \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{\partial X_i^{(\alpha)}}{\partial x_j} \sum_{l=0}^{2k+1} A_{jl}p_l + \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{\partial X_i^{(\alpha)}}{\partial p_j} \cdot \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{2k+1}\sum_{m=0}^{2k+1} \frac{\partial A_{lm}}{\partial x_j} p_l p_m,$$

откуда ясно, что утверждение сохраняет силу и для $\alpha + 1$.

Перейдя к пределу при $s \to 0$, получим требуемое утверждение. Аналогично доказывается это утверждение и для p_i. Так как производные по s существуют до порядка $K + 1$, то, применяя формулу Тейлора, получим

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^{(0)} + s \sum_{j=0}^{2k+1} A_{ij}^{(0)} p_j^{(0)} + \sum_{\alpha=2}^{K} s^\alpha X_i^{(\alpha)}(p_j^{(0)}) + R_K^{(i)}, \\ p_i &= p_i^{(0)} + \frac{1}{s} \sum_{\alpha=1}^{K} s^{\alpha+1} \Pi_i^{(\alpha+1)}(p_j^{(0)}) + R_K^{1(i)}, \end{aligned} \tag{19.25}$$

где $X_i^{(\alpha)}$, $\Pi_i^{(\alpha+1)}$ — многочлены степени α и $\alpha + 1$ от $p_j^{(0)}$. Отсюда следует, что для любого $r \leqslant K - 1$ можно выразить x_i и p_i через y_j так:

$$x_i - x_i^{(0)} = \sum_{j=0}^{2k+1} A_{ij}^{(0)} y_j + \sum_{n=2}^{r+1} X_i^{(n)}(y_j) + R_{r+1}^{(i)},$$
$$p_i = \frac{1}{s}\left\{y_i + \sum_{n=2}^{r+1} \Pi_i^{(n)}(y_j) + R_{r+1}^{1(i)}\right\},$$

где производные порядка α от $R_{r+1}^{(i)}$ и $R_{r+1}^{1(i)}$, взятые по p, обращаются в нуль при $s = 0$ как $s^{K+2-\alpha}$. Простые выкладки показывают, что при этом производные от $R_{r+1}^{(i)}$ и $R_{r+1}^{1(i)}$ по y_j до порядка $r + 1$ включительно обращаются в нуль в начале координат. Следовательно, производные от x_i по y_j до порядка $r + 1$ существуют и непрерывны везде.

Очевидно, что якобиан $\left.\frac{D(x_0, \ldots, x_{2k+1})}{D(y_0, \ldots, y_{2k+1})}\right|_{s=0} \neq 0$, и на основании теорем о неявных функциях существует такая окрестность точки $x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}$, в которой справедливо и обратное: $y_0, \ldots, y_{2k+1}$ суть однозначные функции переменных $x_0, \ldots, x_{2k+1}$.

В этой области мы получим

$$y_i = \sum_{j=0}^{2k+1} H_{ij}^{(0)}\left(x_j - x_j^{(0)}\right) + \sum_{n=2}^{r+1} Y_i^{(n)} + R, \tag{19.26}$$

где $H_{ij}^{(0)}$ — матрица, обратная $A_{ij}^{(0)}$, а $Y_i^{(n)}$ — многочлен степени n от $\left(x_i - x_j^{(0)}\right)$, $j = 0, \ldots, 2k+1$.

Уравнение $A(p^{(0)}) = 0$ в переменных y_i может быть написано в виде

$$A(y) = 0 \tag{19.27}$$

и, следовательно, представляет собой уравнение конуса, т. е. многообразия $2k+1$ измерения.

Таким образом, доказано выполнение условий а), б), в), указанных выше, и, следовательно, (19.27) есть уравнение характеристического коноида.

В силу нашего предположения о том. что уравнение имеет нормально гиперболический тип, конус характеристик делит все пространство на три части: внешность, верхняя внутренность и нижняя внутренность конуса. Всякое направление в любой точке пространства либо уводит во внутренность конуса и по аналогии с обычным случаем называется *времяобразным*, либо во внешность конуса и в этом случае называется *пространственнообразным*.

При аналитическом определении пространственнообразными будут те направления $\vec{l}$, для которых $A(\vec{l}) < 0$, а времяобразными — те, для которых $A(\vec{l}) > 0$.

В окрестности данной точки $\left(x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}\right)$ можно сделать линейное преобразование, переводящее матрицу $\|A_{ij}\|$ в точке $\left(x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}\right)$ в каноническую. Пусть преобразование координат, приводящее уравнение (19.1) к каноническому виду в точке $\left(x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}\right)$, имеет вид

$$x_i - x_i^{(0)} = \sum_j \alpha_{ij} z_j; \quad z_j = \sum_j \gamma_{ij}\left(x_i - x_i^{(0)}\right),$$

где α_{ij} и γ_{ij} — непрерывно дифференцируемые $k+1$ раз функции переменных $x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}$, причем определитель $|a_{ij}| > h$, где h — положительное число, не зависящее от $x_0^{(0)} \ldots, x_{2k+1}^{(0)}$, а K — достаточно большое число (см., например, [174]).

Тогда при замене $p_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} q_i$ имеем

$$\sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} A_{ij} p_i p_j \Big|_{x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{2k+1} \sum_{m=0}^{2k+1} \left\{ \sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} A_{ij} \gamma_{il} \gamma_{jm} \right\} q_l q_m,$$

и, следовательно, в силу предположения о каноничности преобразования должно быть

$$\sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} A_{ij} \gamma_{il} \gamma_{jm} = \begin{cases} 0, & l \neq m, \\ -1, & l = m \neq 0, \\ 1, & l = m = 0. \end{cases}$$

Полагая, что такое преобразование уже выполнено и y_i — соответствующая локальная система координат, для (19.27) получим

$$y_0^2 - \sum_{i=1}^{2k+1} y_i^2 = 0 \tag{19.28}$$

или, если обозначим $\rho = \left(\sum_{i=1}^{2k+1} y_i^2 \right)^{1/2}$, то

$$y_0^2 - \rho^2 = 0, \tag{19.29}$$

т. е. в координатах y_i характеристический коноид превратился в прямой круговой конус. Такое преобразование можно сделать в некоторой окрестности каждой точки пространства.

В случае переменных коэффициентов необходимо, однако, отметить следующее важное обстоятельство. При решении задачи Коши для волнового уравнения бихарактеристики были прямыми линиями, и поэтому наше решение уравнения характеристик годилось для любого момента времени t. В случае же уравнения с переменными коэффициентами поле бихарактеристик может иметь какие-либо особенности (например фокусы), и поэтому мы можем построить коноид лишь в некоторой окрестности его вершины. Размер этой окрестности может быть оценен по коэффициентам при производных второго порядка.

2. **Характеристический коноид.** Преобразуем уравнение (19.1) к координатам y_i. В новых переменных оно принимает вид

$$\sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} \widetilde{A}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=0}^{2k+1} \widetilde{B}_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + \widetilde{C} u = \widetilde{F}. \qquad (19.30)$$

При этом конус с уравнением

$$G(y_0, \ldots, y_{2k+1}) \equiv y_0 + \rho = 0, \qquad (19.31)$$

где $\rho = \left(\sum_{i=1}^{2k+1} y_i^2 \right)^{1/2}$, является характеристическим конусом, а линии $y_i = \alpha_i y_0$, где $\sum_{i=0}^{2k+1} \alpha_i^2 = 1$, являются бихарактеристиками. Рассмотрим подробнее, какие следствия вытекают из этого обстоятельства. На характеристическом конусе

$$\begin{aligned} q_i &\equiv \frac{\partial G}{\partial y_i} = \frac{y_i}{\rho} = -\frac{y_i}{y_0} = -\alpha_i \qquad (i \neq 0), \\ q_0 &\equiv \frac{\partial G}{\partial y_0} = 1. \end{aligned} \qquad (19.32)$$

Подставим эти решения в систему уравнений

$$\frac{dy_i}{\frac{1}{2} \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial q_i}} = ds \qquad (i = 0, \ldots, 2k+1),$$

где $\widetilde{A} = \sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} \widetilde{A}_{ij} q_i q_j$. Так как

$$\frac{dy_i}{ds} = \alpha_i \frac{dy_0}{ds} \qquad (i = 1, \ldots, 2k+1),$$

то, положив

$$\frac{dy_0}{ds} = \varphi(s), \qquad (19.33)$$

запишем эту систему в виде

$$\frac{\alpha_i\varphi(s)}{\tilde{A}_{0i}-\sum\limits_{j=1}^{2k+1}\tilde{A}_{ij}\alpha_j}=\frac{\varphi(s)}{\tilde{A}_{00}-\sum\limits_{j=1}^{2k+1}\tilde{A}_{j0}\alpha_j}=1. \tag{19.34}$$

Таким образом,

$$\tilde{A}_{00}-\sum_{i=1}^{2k+1}\tilde{A}_{i0}\alpha_i=\varphi(s), \tag{19.35}$$

$$\tilde{A}_{0i}-\sum_{j=1}^{2k+1}\tilde{A}_{ij}\alpha_j=\alpha_i\varphi(s). \tag{19.36}$$

Умножая второе равенство на α_i и суммируя по i от 1 до $2k+1$, получаем

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\tilde{A}_{0i}\alpha_i-\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\tilde{A}_{ij}\alpha_i\alpha_j=\sum_{i=1}^{2k+1}\alpha_i^2\varphi(s)=\varphi(s). \tag{19.37}$$

Отсюда следует, что на поверхности характеристического конуса

$$\tilde{A}_{00}-\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\tilde{A}_{ij}\alpha_i\alpha_j=2\varphi(s) \tag{19.38}$$

или

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\tilde{A}_{ij}\alpha_i\alpha_j=\tilde{A}_{00}-2\varphi(s). \tag{19.39}$$

3. Уравнение в канонических координатах. Переходим к исследованию задачи Коши для уравнения (19.1). Пусть нам требуется отыскать такое решение этого уравнения, которое удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} u\big|_{x_0=0}&=u_0(x_1,\ldots,x_{2k+1}),\\ \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0}&=u_1(x_1,\ldots,x_{2k+1}). \end{aligned} \tag{19.40}$$

Сделаем еще одно существенное предположение. Допустим, что в дополнение к (19.2)—(19.3) в каждой точке рассматриваемой нами части пространства

$$A_{00}\geqslant m>0,\quad A_{ii}\leqslant -m<0\qquad (i\neq 0).$$

Введем теперь новую переменную, положив $t=y_0+\rho$. Для удобства рассуждений будем в дальнейшем обозначать через $\frac{\partial}{\partial y_i}$ частные производные по y_i, взятые вдоль поверхности $y_0 = \mathrm{const}$, т. е. при постоянном y_0, а через $\frac{D}{Dy_i}$ — частные производные по y_i, взятые вдоль поверхности $t = \mathrm{const}$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{D}{Dy_i} + \frac{y_i}{\rho}\frac{D}{Dt}, \quad \frac{\partial}{\partial y_0} = \frac{D}{Dt}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} = \frac{D^2}{Dt^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i\, \partial y_0} = \frac{D^2}{Dy_i\, Dt} + \frac{y_i}{\rho}\frac{D^2}{Dt^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i\, \partial y_j} = \frac{D^2}{Dy_i\, Dy_j} - \frac{y_i y_j}{\rho^3}\frac{D}{Dt} + \frac{y_i}{\rho}\frac{D^2}{Dy_j\, Dt} + \frac{y_j}{\rho}\frac{D^2}{Dy_i\, Dt} + \frac{y_i y_j}{\rho^2}\frac{D^2}{Dt^2} \qquad (i \neq j),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} = \frac{D^2}{Dy_i^2} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{y_i^2}{\rho^3}\right)\frac{D}{Dt} + \frac{2y_i}{\rho}\frac{D^2}{Dy_i\, Dt} + \frac{y_i^2}{\rho^2}\frac{D^2}{Dt^2}.$$

Подставляя эти значения в наше уравнение, имеем

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1} \widetilde{A}_{ij}\frac{D^2 u}{Dy_i\, Dy_j} + 2\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1} \widetilde{A}_{ij}\frac{y_i}{\rho}\frac{D^2 u}{Dy_j\, Dt} + \sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1} \widetilde{A}_{ij}\frac{y_i y_j}{\rho^2}\frac{D^2 u}{Dt^2} + 2\sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{i0}\frac{D^2 u}{Dy_i\, Dt} +$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{0i}\frac{y_i}{\rho}\frac{D^2 u}{Dt^2} + \widetilde{A}_{00}\frac{D^2 u}{Dt^2} + \left[\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\left(-\widetilde{A}_{ij}\frac{y_i y_j}{\rho^3}\right) + \sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{ii}\frac{1}{\rho} + \sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{B}_i\frac{y_i}{\rho} + \widetilde{B}_0\right]\frac{Du}{Dt} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{B}_i\frac{Du}{Dy_i} + \widetilde{C}u = \widetilde{F}$$

или

$$\left\{\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{ij}\frac{D^2}{Dy_i\, Dy_j} + \sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{B}_i\frac{D}{Dy_i} + \widetilde{C}\right\}u +$$
$$+ \left\{2\sum_{i=1}^{2k+1}\left[\sum_{j=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{ij}\frac{y_j}{\rho} + \widetilde{A}_{i0}\right]\frac{D}{Dy_i} +\right.$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{ii}\frac{1}{\rho}-\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{ij}\frac{y_i y_j}{\rho^3}+\sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{B}_i\frac{y_i}{\rho}+\widetilde{B}_0\right]\Bigg\}\frac{Du}{Dt}+$$

$$+\left\{\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{ij}\frac{y_i y_j}{\rho^2}+2\sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{0i}\frac{y_i}{\rho}+\widetilde{A}_{00}\right\}\frac{D^2u}{Dt^2}=\widetilde{F}, \quad (19.41)$$

что мы коротко перепишем в виде

$$L^{(0)}u+M^{(0)}\frac{Du}{Dt}+J\frac{D^2u}{Dt^2}=\widetilde{F}, \quad (19.42)$$

где через $L^{(0)}$, $M^{(0)}$ обозначены операторы, стоящие соответственно в первой и второй фигурных скобках левой части (19.41), и J — третья фигурная скобка в (19.41). Как легко видеть в силу (19.32), (19.35) и (19.39), на характеристическом конусе $t=0$ имеем $J|_{t=0}=0$, и (19.42) при $t=0$ принимает вид

$$L^{(0)}u+M^{(0)}\frac{Du}{Dt}=\widetilde{F}.$$

Сделаем еще одну замену независимых переменных, введя вместо $y_1, \ldots, y_{2k+1}$ полярные координаты.

4. Основные операторы $M^{(0)}$ и $L^{(0)}$ в полярных координатах. Мы будем определять положение точки координатой ρ, где

$$\rho=\left(\sum_{i=1}^{2k+1}y_i^2\right)^{1/2},$$

и единичным вектором $\vec{\lambda}$.

Нам необходимо изучить подробнее дифференциальные операторы в этих переменных.

Для того чтобы вычислить какой-либо дифференциальный оператор на единичной сфере, следует выбрать какую-либо координатную систему на поверхности этой сферы. Для нас выбор такой системы безразличен, и поэтому мы можем, например, выбрать для каждой точки сферы свою координатную систему, регулярную в окрестности этой точки.

Можно, например, рассмотреть с этой целью полярные координаты. Система полярных координат на единичной сфере задается уравнениями:

$$
\begin{aligned}
z_{2k+1} &= \rho \cos \vartheta_{2k}, \\
z_{2k} &= \rho \sin \vartheta_{2k} \cos \vartheta_{2k-1}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
z_3 &= \rho \sin \vartheta_{2k} \sin \vartheta_{2k-1} \dots \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_2, \\
z_2 &= \rho \sin \vartheta_{2k} \sin \vartheta_{2k-1} \dots \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1, \\
z_1 &= \rho \sin \vartheta_{2k} \sin \vartheta_{2k-1} \dots \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1,
\end{aligned}
\tag{19.43}
$$

где $-\pi < \vartheta_1 < \pi$; $0 < \vartheta_i < \pi$; $i = 2, \dots, 2k$, а z_i — произвольная декартова координатная система, получаемая из y_j поворотом осей, т. е. ортогональным преобразованием $y_i = \sum\limits_{j=1}^{2k+1} \gamma_{ij} z_j$.

Полезно отметить формулу

$$
\frac{D(y_1, \dots, y_{2k+1})}{D(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{2k})} = \frac{D(z_1, \dots, z_{2k+1})}{D(\rho, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{2k})} = \\
= \rho^{2k} \sin^{2k-1} \vartheta_{2k} \sin^{2k-2} \vartheta_{2k-1} \dots \sin \vartheta_2. \tag{19.44}
$$

Отсюда немедленно следует, что

$$
d\Omega = \rho^{2k} \sin^{2k-1} \vartheta_{2k} \sin^{2k-2} \vartheta_{2k-1} \dots \sin \vartheta_2 d\rho \, d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{2k}. \tag{19.45}
$$

Принимая еще во внимание, что поверхности $\rho = \mathrm{const}$ суть сферы, линии $\theta_1 = \mathrm{const}, \dots, \theta_{2k} = \mathrm{const}$ суть радиусы этих сфер и что $\frac{\partial \rho}{\partial \nu} = 1$, где ν — внешняя нормаль к сфере, заключаем, что элемент поверхности сферы

$$
dS = \rho^{2k} \sin^{2k-1} \theta_{2k} \sin^{2k-2} \theta_{2k-1} \dots \sin \theta_2 d\theta_1 \dots d\theta_{2k}. \tag{19.46}
$$

Система уравнений (19.43), разрешенная относительно ρ и θ_i, имеет вид

$$
\begin{aligned}
\rho &= \left(\sum_{i=1}^{2k+1} z_i^2 \right)^{1/2}, \\
\theta_1 &= (\operatorname{sign} z_1) \arccos \frac{z_2}{\rho_2}, \\
\theta_2 &= \arccos \frac{z_3}{\rho_3},
\end{aligned}
\tag{19.47}
$$

. . . .

$$\theta_{2k-1} = \arccos \frac{z_{2k}}{\rho_{2k}}, \qquad (19.47)$$

$$\theta_{2k} = \arccos \frac{z_{2k+1}}{\rho},$$

где $\rho_2 = (z_1^2 + z_2^2)^{1/2}, \ldots, \rho_{2k} = \left(\sum\limits_{i=1}^{2k} z_i^2\right)^{1/2}$.

Мы будем в дальнейшем для удобства, вычисляя какой-либо оператор от функции в точке $\vec{\lambda}_0$ на сфере, выбирать оси $z_1, \ldots, z_{2k+1}$ таким образом, чтобы рассматриваемая точка $\vec{\lambda}_0$ лежала на оси z_1, т. е. чтобы в этой точке $z_1 = \rho$, $z_2 = \ldots = z_{2k} = 0$.

Функцию Ψ, заданную на сфере, называют s раз непрерывно дифференцируемой в точке $\vec{\lambda}_0$, если она имеет в этой точке непрерывные производные до порядка s включительно по всем координатам $\theta_1, \ldots, \theta_{2k}$ при выборе этой координатной системы так, как это описано выше. Функцию, непрерывно дифференцируемую s раз в любой точке сферы, называют s раз непрерывно дифференцируемой на сфере.

Линейный дифференциальный оператор порядка s на сфере называется непрерывным в точке $\vec{\lambda}_0$ сферы, если он состоит из линейной комбинации производных до порядка s включительно по переменным $\theta_1, \ldots, \theta_{2k}$ с коэффициентами, непрерывными в окрестности точки $\vec{\lambda}_0$. Если он непрерывен в окрестности любой точки, то он называется непрерывным на сфере.

Оператор порядка s может быть применен к любой s раз непрерывно дифференцируемой функции.

Будем называть дифференциальный оператор L, заданный на единичной сфере, r раз дифференцируемым, если его коэффициенты в любой точке непрерывно дифференцируемы r раз. Если оператор порядка l, дифференцируемый r раз, применен к функции, дифференцируемой m раз, где $l < m < l + r$, то результат является функцией, дифференцируемой $m - l$ раз.

После этих замечаний переходим к вычислению операторов $M^{(0)}$ и $L^{(0)}$ в полярных координатах. Найдем сначала вид оператора $M^{(0)}$.

Легко видеть, что

$$\frac{Dv}{Dy_i}=\sum_{j=1}^{2k+1}\varepsilon_{ij}\frac{Dv}{Dz_j}. \tag{19.48}$$

В свою очередь для $j=2, \ldots, 2k$

$$\frac{Dv}{Dz_j}=\sum_{s=j-1}^{2k}\frac{Dv}{D\theta_s}\frac{D\theta_s}{Dz_j}+\frac{Dv}{D\rho}\frac{D\rho}{Dz_j}=$$

$$=\frac{z_j}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}-\frac{\partial v}{\partial\theta_{j-1}}\frac{\rho_{j-1}}{\rho_j^2}+\sum_{s=j-1}^{2k}\frac{\partial v}{\partial\theta_s}\frac{z_{s+1}z_j}{\rho_s\rho_{s+1}^2}.$$

Аналогичное равенство имеем при $j=1$.

Заменяя все z и ρ их выражениями и принимая во внимание, что в искомой точке все ρ_k равны ρ, мы можем придать оператору $M^{(0)}$ следующий вид:

$$M^{(0)}v=G^{(0)}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\Lambda^{(0)}v, \tag{19.49}$$

где $G^{(0)}$ — функция переменных t, ρ, $\theta_1, \ldots, \theta_{2k}$, определенная на всей сфере θ и для всех ρ из промежутка $0<\rho<M$, непрерывно дифференцируемая по этим переменным, а. $\Lambda^{(0)}$ — дифференциальный оператор первого порядка на единичной сфере, дифференцируемый достаточно много раз.

Рассмотрим еще значение оператора $M^{(0)}$ при $t=0$, т. е. на поверхности характеристического конуса. При этом имеем $y_j/\rho=-\alpha_j$, и в силу уравнений (19.36)

$$2\sum_{i=1}^{2k+1}\left(\sum_{j=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{ij}\frac{y_j}{\rho}+\widetilde{A}_{i0}\right)\frac{Dv}{Dy_i}=$$

$$=2\varphi(s)\sum_{i=1}^{2k+1}\alpha_i\frac{Dv}{Dy_i}=-2\varphi(s)\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{y_i}{\rho}\frac{Dv}{Dy_i}=-2\varphi(s)\frac{\partial v}{\partial\rho},$$

а в силу (19.39)

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{ii}\frac{1}{\rho}-\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{ij}\frac{y_iy_j}{\rho^3}+\sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{B}_i\frac{y_i}{\rho}+\widetilde{B}_0=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{A}_{ii}-\widetilde{A}_{00}+2\varphi(s)\right]\frac{1}{\rho}+\sum_{i=1}^{2k+1}\widetilde{B}_i\frac{y_i}{\rho}+\widetilde{B}_0.$$

Поэтому

$$M^0 v\,|_{t=0} = -2\varphi(s)\left\{\frac{\partial v}{\partial \rho} + \left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\widetilde{A}_{00} - \sum_{i=1}^{2k+1} \widetilde{A}_{ii}}{2\varphi(s)} - 1\right) - \frac{\left(\widetilde{B}_0 + \sum_{i=1}^{2k+1} B_i \frac{y_i}{\rho}\right)}{2\varphi(s)}\right] v\right\}.$$

Докажем теперь, что

$$\left[\widetilde{A}_{00} - \sum_{i=1}^{2k+1} \widetilde{A}_{ii}\right]_{\rho=0} = (2k+2)\,\varphi(0). \qquad (19.50)$$

Рассмотрим с этой целью значения $\widetilde{A}_{ij}|_{\rho=0}$. Очевидно, справедливы равенства

$$\widetilde{A}_{00}\,|_{\rho=0} - \sum_{i=1}^{2k+1} \alpha_i \widetilde{A}_{i0}\,|_{\rho=0} = \varphi(0),$$

$$\widetilde{A}_{0i}\,|_{\rho=0} - \sum_{j=1}^{2k+1} \alpha_i \widetilde{A}_{ij}\,|_{\rho=0} = \alpha_i \varphi(0),$$

где α_i — произвольные числа, такие, что $\sum_{i=1}^{2k+1} \alpha_i^2 = 1$. Положив $\alpha_l = \pm 1$, $\alpha_i = 0$, $i \neq l$, видим, что $\widetilde{A}_{00}|_{\rho=0} = \pm \widetilde{A}_{0l}|_{\rho=0} + \varphi(0)$, откуда

$$\widetilde{A}_{00}|_{\rho=0} = \varphi(0); \quad \widetilde{A}_{0l}|_{\rho=0} = 0.$$

Далее, полагая $\alpha_l = \sin\omega$, $\alpha_m = \pm\cos\omega$, где $l \neq m$, $\alpha_i = 0$, $i \neq l$, $i \neq m$, получим

$$\sin\omega\,[\widetilde{A}_{ll}|_{\rho=0} + \varphi(0)] \pm \cos\omega\,\widetilde{A}_{lm}|_{\rho=0} = 0,$$

откуда, пользуясь произвольностью ω, находим

$$\widetilde{A}_{lm}|_{\rho=0} = 0 \ (l \neq m), \quad \widetilde{A}_{ll}|_{\rho=0} = -\varphi(0).$$

Из этих равенств и следует формула (19.50).

Далее из существования непрерывных производных по $y_0, y_1, \ldots, y_{2k-1}$ от коэффициентов $\widetilde{A}_{ij}$ следует, что

$$\widetilde{A}_{ij} = \widetilde{A}_{ij}\,|_{\rho=0} + \rho A_{ij}^{(1)} + \frac{\rho^2}{2} A_{ij}^{(2)} + \ldots + \frac{\rho^N}{N!} A_{ij}^{(N)} + R_{ij}^{(N)},$$

где $R_{ij}^{(N)}$ — остаток, обращающийся в нуль с производными до порядка N включительно при $\rho = 0$.

Аналогично $\dfrac{\widetilde{A}_{ij}}{\varphi(s)} = \dfrac{\widetilde{A}_{ij}|_{\rho=0}}{\varphi(0)} + \sum_{m=1}^{N} \rho^m \widetilde{A}_{ij}^{(m)} + P_{ij}^{(N)}$.

Принимая во внимание это разложение, получим окончательно

$$M^{(0)}v\Big|_{t=0} = -2\varphi(s)\left[\frac{\partial v}{\partial \rho} + \left(\frac{k}{\rho} + G\right)v\right]\Big|_{t=0} \qquad (19.51)$$

где функция $G(\vec{\lambda}, \rho)$ ограничена вместе с производными достаточно высокого порядка.

Выразим теперь в тех же координатах оператор $L^{(0)}$. Мы будем иметь после очевидных выкладок

$$L^{(0)}v = Q^{(0)}\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}R^{(0)}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}S^{(0)}v, \qquad (19.52)$$

где $Q^{(0)}$ — функция, непрерывно дифференцируемая достаточно много раз на сфере, $R^{(0)}$ — оператор первого порядка на сфере и $S^{(0)}$ — оператор второго порядка на сфере, дифференцируемые достаточно много раз.

Представляет интерес вычислить значение $L^{(0)}v$ при $t=0$. С этой целью представим $L^{(0)}v|_{t=0}$ в виде

$$L^{(0)}v\Big|_{t=0} = \left\{-\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{D^2v}{Dy_i^2} + \left[\rho\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\widetilde{C}_{ij}\frac{D^2v}{Dy_iDy_j} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{2k+1}\frac{\widetilde{B}_i}{\varphi(s)}\frac{Dv}{Dy_i} + \frac{\widetilde{C}_v}{\varphi(s)}\right]\right\}\varphi(s)\Big|_{t=0}. \qquad (19.53)$$

Такое представление с непрерывно дифференцируемыми по ρ и θ_i функциями $\widetilde{C}_{ij}$ следует из (19.41), (19.42) и равенств $\widetilde{A}_{lm}|_{\rho=0} = 0$ $(l \neq m)$, $\widetilde{A}_{ll}|_{\rho=0} = -\varphi(0)$.

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{D^2v}{Dy_i^2} = \sum_{i=1}^{2k+1}\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{2k}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{\Delta}v,$$

где $\widetilde{\Delta}$ — поверхностный оператор Лапласа. Имеем

$$L^{(0)}v\Big|_{t=0} = -\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}[1 + \rho Q_1(\rho, \vec{\lambda})] + \frac{1}{\rho}[2k + \rho Q_2(\rho, \vec{\lambda})]\frac{\partial v}{\partial \rho} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\rho^2}[+ \rho Q_3(\rho, \vec{\lambda})]v\right\}\varphi(s)\Big|_{t=0}. \qquad (19.54)$$

5. Система основных соотношений на конусе. Пусть $\Lambda^{(0)}$ — некоторый оператор второго порядка в переменных $y_1, \ldots, y_{2k+1}$ или, что то же, в переменных $\rho, \vartheta_1, \ldots \ldots, \vartheta_{2k}$, коэффициенты которого зависят от переменного t

$$\Lambda^{(0)}v = \sum_{i=1}^{2k+1} {\sum_{j=1}^{2k+1}}' \widetilde{A}_{ij} \frac{D^2 v}{Dy_j Dy_j} + \sum_{i=1}^{2k+1} \widetilde{B}_i \frac{Dv}{Dy_i} + \widetilde{C}v.$$

Мы будем обозначать знаком $\frac{d^l \Lambda}{dt^l} = \Lambda^{(l)}$ оператор вида

$$\Lambda^{(l)}v = \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} \frac{D^l \widetilde{A}_{ij}}{Dt^l} \frac{D^2 v}{Dy_i Dy_j} + \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{D^l \widetilde{B}_i}{Dt^l} \frac{Dv}{Dy_i} + \frac{D^l \widetilde{C}}{Dt^l} v, \tag{19.55}$$

коэффициенты которого суть производные порядка l от коэффициентов оператора $\Lambda^{(0)}$.

Составим операторы $M^{(l)}$ и $L^{(l)}$ по правилу, описанному выше, и построим их выражение в полярных координатах.

Проделывая выкладки, аналогичные прежним, получим

$$\begin{aligned} M^{(l)} &= G^{(l)} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \Lambda^{(l)} v; \\ L^{(l)} &= Q^{(l)} \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} R^{(l)} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} S^{(l)} v. \end{aligned} \tag{19.56}$$

Коэффициенты $G^{(l)}$ и $Q^{(l)}$ суть функции, непрерывно дифференцируемые на сфере, $\Lambda^{(l)}$ и $R^{(l)}$ — операторы первого порядка на сфере, а $S^{(l)}$ — оператор второго порядка на сфере, дифференцируемые достаточное число раз.

Вернемся теперь к уравнению (19.42). Дифференцируя его l раз по t и полагая $t = 0$, получим, приняв во внимание, что $J|_{t=0} = 0$,

$$\sum_{r=0}^{l} \frac{l}{r!\,(l-r)!} L^{(l-r)} \frac{D^r u}{Dt^r} + \sum_{r=0}^{l} \frac{l!}{r!\,(l-r)!} M^{(l-r)} \frac{D^{r+1} u}{Dt^{r+1}} + {\sum_{r=0}^{l}}' \frac{l!}{r!\,(l-r)!} \frac{D^{l-r} J}{Dt^{l-r}} \frac{D^{r+2} u}{Dt^{r+2}} = \frac{D^l \widetilde{F}}{Dt^l}. \tag{19.57}$$

Вводя обозначения

$$
\begin{gathered}
D_0^{(l)}v = L^{(l)}v, \quad D_1^{(l)}v = lL^{(l-1)}v + M^{(l)}v, \\
D_{l+1}^{(l)}v = M^{(0)}v + \frac{DJ}{Dt}v, \qquad (19.58) \\
D_r^{(l)}v = \frac{l!}{r!\,(l-r)!}L^{(l-r)}v + \frac{l!}{(r-1)!\,(l-r+1)!}M^{(l-r+1)}v + \\
+ \frac{l!}{(r-2)!\,(l-r+2)!}\frac{D^{l-r+2}J}{Dt^{l-r+2}}v, \quad 2 \leqslant r \leqslant l,
\end{gathered}
$$

перепишем уравнение (19.57) в виде

$$
\sum_{r=0}^{l+1} D_r^{(l)}\frac{D^r u}{Dt^r} \equiv M_{k-l}\left(u, \frac{Du}{Dt}, \ldots, \frac{D^{l+1}u}{Dt^{l+1}}\right) = \frac{D^l\widetilde{F}}{Dt^l}. \qquad (19.59)
$$

Положим теперь

$$
\left.\frac{D^r u}{Dt^r}\right|_{t=0} = u_r. \qquad (19.60)
$$

При таких обозначениях уравнение (19.59) примет вид

$$
M_{k-l}(u_0, u_1, \ldots, u_{l+1}) \equiv \sum_{r=0}^{l+1} D_r^{(l)}u_r = \frac{\partial^l\widetilde{F}}{\partial t^l}. \qquad (19.61)
$$

В правой части (19.61) стоят, очевидно, известные величины.

20. Задача Коши для линейных уравнений с гладкими коэффициентами

1. Операторы, сопряженные с операторами основной системы. Пусть дана некоторая система m линейных операторов над l функциями в $2k+1$-мерном пространстве $\rho, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{2k}$ с элементом объема

$$
d\Omega = \rho^{2k}d\rho\, dS = \rho^{2k}\varkappa\, d\rho\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{2k}, \qquad (20.1)
$$

где dS — элемент поверхности единичной сферы,

$$
\varkappa = \sin^{2k-1}\vartheta_{2k}\sin^{2k-2}\vartheta_{2k-1} \ldots \sin^2\vartheta_3 \sin\vartheta_2. \qquad (20.2)
$$

Операторы $M_j^{(s)}$ можно расположить в виде прямоугольной таблицы M, содержащей m строк и l столбцов:

$$M = \left\| \begin{array}{l} M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, \ldots, M_1^{(s)}, \ldots, M_1^{(l)} \\ M_2^{(1)}, M_2^{(2)}, \ldots, M_2^{(s)}, \ldots, M_2^{(l)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ M_j^{(1)}, M_j^{(2)}, \ldots, M_j^{(s)}, \ldots, M_j^{(l)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ M_m^{(l)}, M_m^{(2)}, \ldots, M_m^{(s)}, \ldots, M_m^{(l)} \end{array} \right\|.$$

Пусть $M_j^{(s)*}$ обозначает оператор, сопряженный с оператором $M_j^{(s)}$, т. е. такой, что

$$\varkappa\rho^{2k}\left(w_j M_j^{(s)} v_s - v_s M_j^{(s)*} w_j\right) = \sum_{i=1}^{2k} \frac{\partial P_{ij}^{(s)}}{\partial \vartheta_i} + \frac{\partial P_{0j}^{(s)}}{\partial \rho}, \quad (20.3)$$

где $P_{ij}^{(s)}$ — некоторые функции *).

Будем называть системой, сопряженной с системой M_j, систему N_s, состоящую из l линейных операторов над m функциями $w_1, \ldots, w_m$ вида

$$N_s(w_1, \ldots, w_m) = \sum_{j=1}^{m} M_j^{(s)*} w_j \equiv \sum_{j=1}^{m} N_s^{(j)} w_j.$$

Таблица операторов $N_s^{(j)}$ имеет вид

$$N = \left\| \begin{array}{l} N_1^{(1)}, N_1^{(2)}, \ldots, N_1^{(j)}, \ldots, N_1^{(m)} \\ N_2^{(1)}, N_2^{(2)}, \ldots, N_2^{(j)}, \ldots, N_2^{(m)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ N_s^{(1)}, N_s^{(2)}, \ldots, N_s^{(j)}, \ldots, N_s^{(m)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ N_l^{(1)}, N_l^{(2)}, \ldots, N_l^{(j)}, \ldots, N_l^{(m)} \end{array} \right\|.$$

Эта таблица получается из таблицы для операторов $M_j^{(s)}$, если в этой последней заменить строки на столбцы и взять сопряженный к каждому оператору $\left(N_s^{(j)} = M_j^{(s)*}\right)$.

*) Несложные выкладки показывают, что оператор $M_j^{(s)*}$ определяется при этом единственным образом.

Система сопряженных операторов удовлетворяет следующему тождеству

$$\varkappa\rho^{2k}\left[\sum_{j=1}^{m} w_j M_j(v_1, \ldots, v_l) - \sum_{s=1}^{l} v_s N_s(w_1, \ldots, w_m)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k} \frac{\partial P_i}{\partial \vartheta_i} + \frac{\partial P_0}{\partial \rho}, \text{ где } P_i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{l} P_{i,j}^{(s)}. \qquad (20.4)$$

Построим систему операторов N_j $(j = 0, \ldots, k)$ над k функциями $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, сопряженную с системой (19.61).

Таблица M для системы (19.61) имеет вид

$$M =$$

$$= \begin{pmatrix}
D_0^{(k-1)}, & D_1^{(k-1)}, & D_2^{(k-1)}, & \ldots, & D_{k-3}^{(k-1)}, & D_{k-2}^{(k-1)}, & D_{k-1}^{(k-1)}, & D_k^{(k-1)} \\
D_0^{(k-2)}, & D_1^{(k-2)}, & D_2^{(k-2)}, & \ldots, & D_{k-3}^{(k-2)}, & D_{k-2}^{(k-2)}, & D_{k-1}^{(k-2)}, & 0 \\
D_0^{(k-3)}, & D_1^{(k-3)}, & D_2^{(k-3)}, & \ldots, & D_{k-3}^{(k-3)}, & D_{k-2}^{(k-3)}, & 0 & 0 \\
D_0^{(k-4)}, & D_1^{(k-4)}, & D_2^{(k-4)}, & \ldots, & D_{k-3}^{(k-4)}, & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
D_0^{(3)}, & D_1^{(3)}, & D_2^{(3)}, & \ldots, & 0 & 0 & 0 & 0 \\
D_0^{(2)}, & D_1^{(2)}, & D_2^{(2)}, & \ldots, & 0 & 0 & 0 & 0 \\
D_0^{(1)}, & D_1^{(1)}, & D_2^{(1)}, & \ldots, & 0 & 0 & 0 & 0 \\
D_0^{(0)}, & D_1^{(0)}, & 0 & \ldots, & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Соответственно этому таблица N примет вид

$$N =$$

$$= \begin{pmatrix}
D_0^{(k-1)*}, & D_0^{(k-2)*}, & D_0^{(k-3)*}, & D_0^{(k-4)*}, & \ldots, & D_0^{(3)*}, & D_0^{(2)*}, & D_0^{(1)*}, & D_0^{(0)*} \\
D_1^{(k-1)*}, & D_1^{(k-2)*}, & D_1^{(k-3)*}, & D_1^{(k-4)*}, & \ldots, & D_1^{(3)*}, & D_1^{(2)*}, & D_1^{(1)*}, & D_1^{(0)*} \\
D_2^{(k-1)*}, & D_2^{(k-2)*}, & D_2^{(k-3)*}, & D_2^{(k-4)*}, & \ldots, & D_2^{(3)*}, & D_2^{(2)*}, & D_2^{(1)*}, & 0 \\
D_3^{(k-1)*}, & D_3^{(k-2)*}, & D_3^{(k-3)*}, & D_3^{(k-4)*}, & \ldots, & D_3^{(3)*}, & D_3^{(2)*}, & 0, & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
D_{k-3}^{(k-1)*}, & D_{k-3}^{(k-2)*}, & D_{k-3}^{(k-3)*}, & D_{k-3}^{(k-4)*}, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
D_{k-2}^{(k-1)*}, & D_{k-2}^{(k-2)*}, & D_{k-2}^{(k-3)*}, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
D_{k-1}^{(k-1)*}, & D_{k-1}^{(k-2)*}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
D_k^{(k-1)*}, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0
\end{pmatrix}.$$

2. Построение функций σ_i. Построим теперь систему функций $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, являющихся решениями системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&D_k^{(k-1)*}\sigma_1 = 0,\\
&D_{k-1}^{(k-2)*}\sigma_2 + D_{k-1}^{(k-1)*}\sigma_1 = 0,\\
&D_{k-2}^{(k-3)*}\sigma_3 + D_{k-2}^{(k-2)*}\sigma_2 + D_{k-2}^{(k-1)*}\sigma_1 = 0, \qquad (20.5)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&D_1^{(0)*}\sigma_k + D_1^{(1)*}\sigma_{k-1} + D_1^{(2)*}\sigma_{k-2} + \ldots + D_1^{(k-1)*}\sigma_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Эта система является рекуррентной, функции $\sigma_1, \ldots$ $\ldots, \sigma_k$ определяются из нее последовательно одна за другой.

Пусть далее

$$
N_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \\
= D_0^{(0)*}\sigma_k + D_0^{(1)*}\sigma_{k-1} + D_0^{(2)*}\sigma_{k-2} + \ldots + D_0^{(k-1)*}\sigma_1. \qquad (20.6)
$$

Очевидно справедливо тождество, получающееся из (20.4) и (20.5),

$$
\begin{aligned}
&\varkappa\rho^{2k}\left[\sum_{l=0}^{k-1}\sigma_{k-l}\frac{\partial^l\widetilde{F}}{\partial t^l} - u_0' N_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)\right] = \\
&\qquad = \varkappa\rho^{2k}\sum_{l=0}^{k-1}\sigma_{k-l}\left[\frac{\partial^l\widetilde{F}}{\partial t^l} - M_{k-l}(u_0, \ldots, u_{l+1})\right] + \\
&\qquad\quad + \varkappa\rho^{2k}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{r=0}^{l+1}\left\{\sigma_{k-l}D_r^{(l)}u_r - u_r D_r^{(l)*}\sigma_{k-l}\right\} = \\
&= \varkappa\rho^{2k}\sum_{l=0}^{k-1}\sigma_{k-l}\left[\frac{\partial^l\widetilde{F}}{\partial t^l} - M_{k-l}(u_0, \ldots, u_{l+1})\right] + \sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial P_m}{\partial\vartheta_m} + \frac{\partial P_0}{\partial\rho},
\end{aligned} \qquad (20.7)
$$

где $P_m = \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{r=0}^{l+1} P_{m,k-l}^{(r)}$.

Из выражения для $J(t, \rho, \vec{\lambda})$ в (19.42) легко видеть, что $J(t, \rho, \vec{\lambda})$ и ее производные по t до порядка $k+1$ непрерывны при $\rho = 0$. Поэтому, принимая во внимание формулы (19.58) и (19.56) для $L^{(l)}$ и $M^{(l)}$ при $t = 0$, найдем

$$D_{l+1}^{(l)}v = M^{(0)}v + \frac{DJ}{Dt}v = -2\varphi(s)\left\{\frac{\partial v}{\partial\rho} + \left[\frac{k}{\rho} + G(\rho, \vec{\lambda})\right]v\right\},$$

$$D_l^{(l)}v = L^{(0)}v + lM^{(1)}v + \frac{l!}{2!\,(l-2)!}\frac{D^2J}{Dt^2}v =$$

$$= -\varphi(s)\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}[1 + \rho Q_1] + \frac{1}{\rho}\left[2k + \rho\widetilde{Q}_2\right]\frac{\partial v}{\partial\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho^2}\left[\widetilde{\Delta} + \rho\widetilde{Q}_3\right]v\right\}, \qquad (20.8)$$

$$D_r^{(l)}v = \varphi(s)\left\{A\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}B\frac{\partial v}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}Cv\right\}, \quad 0 \leqslant r \leqslant l-1,$$

где G, Q_1, A — функции, $\widetilde{Q}_2$, B — операторы первого порядка, $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{Q}_3$, C — операторы второго порядка, дифференцируемые достаточно много раз.

Переходим к вычислению сопряженных операторов. Заметим прежде всего с этой целью, что операторы B^* или $\widetilde{Q}_2^*$, сопряженные с операторами первого порядка B или $\widetilde{Q}_2$, определенными на единичной сфере, являются в свою очередь операторами первого порядка, определенными на единичной сфере. Операторы $\widetilde{\Delta}^*$, $\widetilde{Q}_3^*$ и C^*, сопряженные с операторами второго порядка на сфере, также являются операторами второго порядка на сфере. Оператор $\widetilde{\Delta}^*$ совпадает с оператором $\widetilde{\Delta}$, так как оператор Лапласа на сфере есть самосопряженный оператор.

Далее, справедливы формулы

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^* = -\left(\frac{1}{\rho^{2k}}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^{2k}\right), \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)^* = \left[\frac{1}{\rho^{2k}}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho^{2k})\right], \qquad (20.9)$$

$$\left(\widetilde{Q}_2\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^* = -\left(\frac{1}{\rho^{2k}}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^{2k}\widetilde{Q}_2^*\right).$$

В самом деле,

$$\rho^{2k}\left[v\frac{\partial u}{\partial\rho} + u\frac{1}{\rho^{2k}}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{2k}v)\right] = (\rho^{2k}v)\frac{\partial u}{\partial\rho} + u\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{2k}v) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\rho}(uv\rho^{2k}),$$

$$\rho^{2k}\left[v\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} - u\frac{1}{\rho^{2k}}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho^{2k}v)\right] = (\rho^{2k}v)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} - u\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho^{2k}v) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\rho}\left[(\rho^{2k}v)\frac{\partial u}{\partial\rho} - u\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{2k}v)\right],$$

$$\rho^{2k}\left\{v\widetilde{Q}_2\frac{\partial u}{\partial\rho}+u\frac{1}{\rho^{2k}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^{2k}\widetilde{Q}_2^*\right)v\right]\right\}=$$
$$=\left[\rho^{2k}v\widetilde{Q}_2\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)-\widetilde{Q}_2^*\left(\rho^{2k}v\right)\frac{\partial u}{\partial\rho}\right]+$$
$$+\left[\widetilde{Q}_2^*\left(\rho^{2k}v\right)\frac{\partial u}{\partial\rho}+u\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\widetilde{Q}_2^*\rho^{2k}u\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\rho}\left[u\left(\widetilde{Q}_2^*\rho^{2k}v\right)\right]+\sum_{i=1}^{2k}\frac{\partial P_i}{\partial\vartheta_i},$$

где P_i — некоторые выражения, заданные на поверхности единичной сферы.

Пользуясь тем, что сопряженный оператор является единственным, видим, что наше утверждение доказано. В силу формул (20.8) получим

$$D_{l+1}^{(l)*}\sigma=\frac{2}{\rho^{2k}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\varphi(s)\rho^{2k}\sigma\right]-\frac{2k\varphi(s)}{\rho}\sigma-G(\rho,\vec{\lambda})\left[2\varphi(s)\sigma\right]=$$
$$=2\varphi(s)\left[\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left(k+\rho H(\rho,\vec{\lambda})\right)\sigma\right], \qquad (20.10)$$

где H — непрерывно дифференцируемая, ограниченная функция.

Проделывая аналогичные выкладки для $D_l^{(l)}$ и $D_r^{(l)}$, где $r\leqslant l-1$, имеем окончательно

$$D_{l+1}^{(l)*}\sigma=2\varphi(s)\left\{\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}(k+\rho H)\sigma\right\}, \qquad (20.11)$$

$$D_l^{(l)*}\sigma=-\varphi(s)\left\{\frac{\partial^2\sigma}{\partial\rho^2}\left[1+\rho T_1^{(l)}\right]+\frac{1}{\rho}\left[2k+\rho T_2^{(l)}\right]\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\rho^2}\left[\widetilde{\Delta}+\rho T_3^{(l)}\right]\sigma\right\}, \qquad (20.12)$$

$$D_r^{(l)*}\sigma=\varphi(s)\left\{\Delta_r^{(l)}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}M_r^{(l)}\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}N_r^{(l)}\sigma\right\},$$
$$r\leqslant l-1. \qquad (20.13)$$

3. Исследование свойств функций σ_i. Переходим к изучению функций σ_i, определяемых системой (20.5).

Докажем, что при соответствующем выборе каждая из них представляется в виде

$$\sigma_{k-l}=\frac{2^l\Gamma(2k-l-1)\,\Gamma(k)}{\Gamma(l+1)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(k-l)}\frac{1}{\rho^{2k-l-1}}\left[1+\rho\Psi_l\right], \qquad (20.14)$$

где Ψ_l — ограниченная функция переменных ρ и ϑ_i, дифференцируемая достаточное число раз.

Прежде всего заметим, что σ_1 есть решение уравнения

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}[k+\rho H]\,\sigma_1=0, \tag{20.15}$$

и, следовательно,

$$\sigma_1=\chi(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{2k})\,e^{-\int\limits_1^\rho \frac{k}{\rho_1}d\rho_1-\int\limits_0^\rho H(\rho_1,\vartheta)d\rho_1}=$$

$$=\chi(\vartheta_1\ldots,\vartheta_{2k})\,\frac{1}{\rho^k}\,e^{-\int\limits_0^\rho H(\rho_1,\vartheta)d\rho_1}. \tag{20.16}$$

Положим $\chi(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{2k})=\dfrac{2^{k-1}\Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)}$.

Наше утверждение для σ_1 доказано.

Свойства функции σ_{k-l} для любого l доказываются полной индукцией.

Уравнение для σ_{k-l} имеет вид

$$2\left[\frac{\partial\sigma_{k-l}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}(k+\rho H)\,\sigma_{k-l}\right]=\chi_{k-l}(\rho,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{2k}),$$

где

$$\chi_{k-l}=-\frac{1}{\varphi(s)}D_{l+1}^{(l+1)*}\sigma_{k-l-1}-\frac{1}{\varphi(s)}D_{l+1}^{(l+2)*}\sigma_{k-l-2}-$$

$$-\ldots-\frac{1}{\varphi(s)}D_{l+1}^{(k-1)*}\sigma_1. \tag{20.17}$$

Подставляя в правую часть последнего равенства значения $\sigma_1,\ldots,\sigma_{k-l-1}$, которые мы будем считать известными и притом удовлетворяющими поставленному выше условию, убеждаемся, что главный член правой части получается из подстановки в оператор $D_{l+1}^{(l+1)*}$ функции σ_{k-l-1} и имеет вид

$$2^{l+1}\frac{\Gamma(2k-l-2)\,\Gamma(k)}{\Gamma(l+2)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(k-l-1)}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\frac{1}{\rho^{2k-l-2}}+\frac{2k}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho^{2k-l-2}}\right]=$$

$$=2^{l+1}\frac{\Gamma(2k-l-2)\,\Gamma(k)}{\Gamma(l+2)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(k-l-1)}\cdot\frac{(2k-l-2)}{\rho^{2k-l}}[(2k-l-1)-2k]=$$

$$=-2^{l+1}\frac{\Gamma(2k-l-1)\,\Gamma(k)}{\Gamma(l+1)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(k-l-1)}\frac{1}{\rho^{2k-l}}.$$

Частное решение уравнения (20.17) легко получить обычным приемом. Имеем

$$\sigma_{k-l} = \frac{\sigma_1}{2}\int\limits_1^{\rho} \frac{\chi_{k-l}}{\sigma_1}\, d\rho_1. \tag{20.18}$$

Отсюда значение главного члена в разложении σ_{k-l} получается элементарным путем. Наша формула для σ_{k-l} доказана.

Остановимся еще на одном вопросе. Оценим главный член в $N_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ при $\rho \to 0$. Он представляет собой результат подстановки функции σ_k в оператор $D_0^{(0)*}$ и, очевидно, равен

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \frac{2k}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{\Delta}\right)\frac{C}{\rho^{2k-1}} = 0.$$

Таким образом, $N_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ начинается с членов порядка ρ^{-2k}, так как члены порядка $\rho^{-(2k+1)}$ исчезают.

4. Вывод основного интегрального тождества $\boldsymbol{Bu = SF}$. Вернемся теперь к тождеству (20.7). Рассмотрим при $t = 0$ область Ω в пространстве $y_1, \ldots, y_{2k+1}$, содержащую начало координат внутри себя. В переменных $x_1, \ldots, x_{2k+1}$ это область па характеристическом конусе, содержащая внутри вершину конуса. Исключим из этой области шар $\rho \leqslant \varepsilon$ с центром в начале координат и обозначим оставшуюся область через Ω'. Граница области Ω' состоит из внешней поверхности S и поверхности $\rho = \varepsilon$. Из равенства (20.7) получим

$$\int\limits_{\Omega'} \left\{\varkappa\rho^{2k}\sum_{l=0}^{k-1}\sigma_{k-l}\left[\frac{\partial^l\widetilde{F}}{\partial t^l} - M_{k-l}(u_0, \ldots, u_{l+1})\right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{2k}\frac{\partial P_m}{\partial\theta_m} + \frac{\partial P_0}{\partial\rho}\right\} d\rho\, d\theta =$$
$$= \int\limits_{\Omega'} \varkappa\rho^{2k}\left[\sum_{l=0}^{k-1}\sigma_{k-l}\frac{\partial^l\widetilde{F}}{\partial t^l} - u_0 N_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)\right] d\rho\, d\theta, \tag{20.19}$$

где $d\theta = d\theta_1 \ldots d\theta_{2k}$.

Очевидно, $\dfrac{\partial^l\widetilde{F}}{\partial t^l} - M_{k-l}(u_0, \ldots, u_{l+1}) = 0$ в силу уравнений (19.61). Левая часть может быть преобразована в интеграл по границе Ω'. Мы получим

$$\int\limits_{\Omega'} \varkappa\rho^{2k}\left[\sum_{l=0}^{k-1}\sigma_{k-l}\frac{\partial^l\widetilde{F}}{\partial t^l}-u_0N_0(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\right]d\rho\,d\theta=$$

$$=\int\limits_S \Xi\,dS'+\int\limits_{\rho=\varepsilon}P_0d\theta,\qquad(20.20)$$

$$\Xi\,dS'=\sum_{m=1}^{2k}P_m\frac{d\rho\,d\theta_1\ldots d\theta_{2k}}{d\theta_m}+P_0d\theta_1\ldots d\theta_{2k}.\qquad(20.21)$$

Перейдем теперь в формуле (20.20) к пределу при $\varepsilon\to 0$. С левой стороны мы будем иметь при этом сходящийся интеграл, ибо N_0 имеет особенность порядка не выше ρ^{-2k}, а каждая из функций σ — особенность порядка не выше ρ^{-2k+1}. Рассмотрим предел, к которому стремится интеграл $\int\limits_{\rho=\varepsilon}P_0d\theta$ при $\varepsilon\to 0$. Покажем, что этот предел равен $-Cu_0|_{\rho=0}$, где C — постоянная, не равная нулю.

В самом деле, отличный от нуля предел может иметь в этом случае только то из слагаемых, составляющих $\int\limits_{\rho=\varepsilon}P_0d\theta$, которому соответствует слагаемое в P_0, не содержащее множителя ρ. Такое слагаемое не может получиться ни для одной из функций σ_{k-s}, кроме σ_k, так как уже σ_{k-1} имеет особенность порядка $\rho^{-(2k-2)}$, и производная от $\rho^{2k}\sigma_{k-1}$ по ρ при $\rho=0$ обращается в нуль.

Очевидно также, что такое слагаемое не может получиться из членов, содержащих u_1, так как u_1 и σ_k встречаются вместе в уравнении (20.7) лишь в слагаемом $\sigma_kD_1^{(0)}u_1-u_1D_1^{(0)*}\sigma_k$, но $D_1^{(0)}$ — оператор первого порядка, и, следовательно, слагаемое $P_{0k}^{(1)}$ будет содержать произведение $\sigma_ku_1\rho^{2k}$, которое равно нулю при $\rho=0$.

Таким образом, остается вычислить главную часть $P_{0k}^{(0)}$, которая имеет вид

$$\sigma_kD_0^{(0)}u_0-u_0D_0^{(0)*}\sigma_k\cong u_0\frac{1}{\rho^{2k}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{2k}\frac{\partial\sigma_k}{\partial\rho}\right)-$$
$$-\sigma_k\frac{1}{\rho^{2k}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{2k}\frac{\partial u_0}{\partial\rho}\right)=\frac{1}{\rho^{2k}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(u_0\rho^{2k}\frac{\partial\sigma_k}{\partial\rho}-\right.$$
$$\left.-\sigma_k\rho^{2k}\frac{\partial u_0}{\partial\rho}\right)\cong\frac{1}{\rho^{2k}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(u_0\rho^{2k}\frac{\partial\sigma_k}{\partial\rho}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\rho=\varepsilon} P_0 d\theta = -Cu_0|_{\rho=0},$$

где C — некоторая постоянная, не равная нулю.

Пользуясь этим, получим окончательно, подставляя этот результат в (20.20) и деля на соответствующую постоянную, что ([54])

$$u_0|_{\rho=0} = \frac{1}{C}\left\{\int\limits_{\Omega} u_0 N_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)\, d\Omega - \right.$$
$$\left. - \sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_{\Omega}\sigma_{k-l}\frac{\partial^l \widetilde{F}}{\partial t^l}\, d\Omega + \int\limits_{S}\Xi\, dS'\right\}. \quad (20.22)$$

5. Обратный интегральный оператор B^{-1} и метод последовательных приближений. Полученное нами соотношение дает возможность построить решение задачи Коши для уравнений с достаточно гладкими коэффициентами в случае, если такое решение существует. Существование такого решения мы установим позднее. Рассмотрим задачу об отыскании решения уравнения (19.1) при условиях (19.40). Пусть нам нужно найти значение неизвестной функции u в точке $P_0(x_0, \ldots, x_{2k+1})$.

Будем предполагать, что все бихарактеристики, выходящие из точки P_0, пересекают плоскость $x_0 = 0$.

Построим характеристический коноид с вершиной в точке P_0. Этот коноид в своей нижней части пересечет плоскость $x_0 = 0$ по многообразию S, ограничивающему участок Ω поверхности этого коноида, содержащей внутри себя точку P_0. На многообразии S величина $\Xi\, dS'$ известна. В самом деле, это многообразие лежит в плоскости $x_0 = 0$, где все производные от функции u определяются из уравнения (19.1) и условий (19.40). Все производные, содержащие не более одного дифференцирования по x_0, определяются из условий (19.40) дифференцированием по $x_1, \ldots, x_{2k+1}$, производная $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{x_0=0}$ определяется из уравнения (19.1), вслед за нею находятся все производные, содержащие дифференцирования по x_0 не более двух раз. Дифференцируя (19.1) по x_0, получим уравнение для нахождения $\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4}$ и т. д. Любая производная $\frac{\partial^s u}{\partial x_0^s}$ определяется при помощи дифференцирования уравнения (19.1) и подстановки уже известных производных. Остальные производные получаются дифференцированием по $x_1, \ldots, x_{2k+1}$ производных вида $\frac{\partial^s u}{\partial x_0^s}$.

Введем следующие обозначения. Положим

$$u(x_0, \ldots, x_{2k+1}) - \frac{1}{C}\int\limits_{\Omega} u(x_0', \ldots, x_{2k+1}')\, N_0 d\Omega \equiv Bu. \qquad (20.23)$$

Оператор B переводит функцию u, определенную в области $x_0 > 0$, в некоторую новую функцию Bu, определенную в той же области, и применим к любой непрерывной функции.

Пусть еще

$$-\frac{1}{C}\int\limits_{\Omega} \sum_{s=0}^{k-1} \sigma_{k-s} \frac{\partial^s \widetilde{F}}{\partial t^s}\, d\Omega \equiv SF. \qquad (20.24)$$

Оператор S применим к любой функции, имеющей непрерывные производные порядка k и определенной при $x_0 > 0$, и переводит ее в функцию, заданную в той же области.

Равенство (20.22) записывается при этом в виде

$$Bu = SF + f_1, \qquad (20.25)$$

где F и f_1 — известные функции. Положив $SF = f_2$, $f_1 + f_2 = f$, имеем

$$Bu = f. \qquad (20.26)$$

Уравнение (20.26) представляет собою интегральное уравнение типа Вольтерра. Несколько позже мы установим его разрешимость и найдем его решение. Исследуем частный вид уравнения (20.26).

Положим, что функция F обращается в нуль вместе со всеми своими производными до порядка k включительно при $x_0 < 0$, и пусть функция u также равна нулю при $x_0 < 0$. Тогда в равенстве (20.22) интеграл $\int\limits_S \Xi\, dS'$ обратится в нуль, ибо он зависит только от начальных значений функции u и ее производных порядка не выше k, а эти начальные значения равны нулю, в чем легко убедиться, рассмотрев способ их вычисления, указанный выше.

Мы получим в этом случае

$$Bu = SF \tag{20.27}$$

или

$$Bu = SLu, \tag{20.28}$$

где под L мы понимаем гиперболический дифференциальный оператор, стоящий в левой части уравнения (19.1).

Изучим свойства операторов B и S.

Теорема 1. *Пусть для точки $P_0\left(x_0^{(0)}, \ldots, x_{2k+1}^{(0)}\right)$ построен характеристический коноид $\sum$ и $0 < T_1 < T_2 \leqslant x_0^{(0)}$. Обозначим через Ω_1 и Ω_2 области, вырезанные из характеристического конуса гиперплоскостями $x_0 = T_1$ и $x_0 = T_2$ (очевидно, $\Omega_1 \supset \Omega_2$). Пусть далее Q — ограниченное замкнутое множество такое, что всякая бихарактеристика, выходящая из точек множества Q, пересекает гиперплоскости $x_0 = T_1$ и $x_0 = T_2$.*

Тогда справедлива оценка

$$\frac{1}{|C|} \int\limits_{\Omega_1 - \Omega_2} |N_0| \, d\Omega \leqslant K(T_2 - T_1),$$

где K — постоянная, не зависящая от точки $P_0 \in Q$.

Доказательство. Эту оценку легче всего доказать, заменив в выражении $d\Omega$ независимые переменные $\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}$ на переменные $x_0, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}$. При этом

$$\frac{D(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})}{D(x_0, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})} = \frac{\partial \rho}{\partial x_0}.$$

Но $\rho = -y_0$ в силу нашего построения. Поэтому $\frac{\partial \rho}{\partial x_0} < M_0$, где $M_0 > 0$ — постоянная, не зависящая от $P_0 \in Q$. Далее $|N_0| \leqslant K_1 \rho^{-2k}$, и, следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_1 - \Omega_2} |N_0| \, d\Omega \leqslant K_1 \int\limits_{\Omega_1 - \Omega_2} \varkappa \rho^{2k} \rho^{-2k} d\rho \, d\theta_1 \ldots d\theta_{2k} =$$

$$= \varkappa K_1 \int\limits_{\Omega_1 - \Omega_2} d\rho \, d\theta_1 \ldots d\theta_{2k} \leqslant \varkappa M_0 K_1 \int\limits_{\Omega_1 - \Omega_2} dx_0 d\theta_1 \ldots d\theta_{2k}.$$

Отсюда сразу вытекает наше неравенство.

Теорема 2. *Оператор B имеет обратный.*

Доказательство. Установим, что уравнение $Bu=f$ разрешимо методом последовательных приближений. Отсюда будет следовать существование обратного оператора.

Положим

$$u^{(0)}=f;$$

$$u^{(n)}\left(x_0^{(0)},\ldots,x_{2k+1}^{(0)}\right)=\frac{1}{C}\int\limits_{\Omega}u^{(n-1)}N_0\,d\Omega+f\left(x_0^{(0)},\ldots,x_{2k+1}^{(0)}\right).$$

Покажем, что последовательность $u^{(n)}$ равномерно сходится. Отсюда будет, очевидно, следовать, что ее предел является решением интегрального уравнения.

Как обычно, достаточно рассмотреть $u^{(n+1)}-u^{(n)}=$ $=v^{(n)}$, где $v^{(n)}$ связаны с $v^{(n-1)}$ однородным соотношением

$$v^{(n)}=\frac{1}{C}\int\limits_{\Omega}v^{(n-1)}N_0\,d\Omega. \tag{20.29}$$

Пусть $|v^{(0)}|\leqslant M$. Докажем, что при этом

$$\left|v^{(n)}\left(x_0^{(0)},\ldots,x_{2k+1}^{(0)}\right)\right|\leqslant MK^n\frac{\left(x_0^{(0)}\right)^n}{n!}, \tag{20.30}$$

где K — постоянная из теоремы 1.

Доказательство проведем при помощи полной индукции. Пусть это неравенство установлено для некоторого n; покажем, что оно останется справедливым и для $(n+1)$. Используя теорему 1, получим

$$\left|v^{(n+1)}\left(x_0^{(0)},\ldots,x_{2k+1}^{(0)}\right)\right|\leqslant\frac{1}{|C|}\int\limits_{\Omega}|v^{(n)}|\,|N_0|\,d\Omega\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{|C|}\int\limits_{\Omega}MK^n\frac{\left(x_0^{(1)}\right)^n}{n!}|N_0|\,d\Omega=$$

$$=\frac{1}{|C|}\int\limits_0^{x_0^{(0)}}MK^n\frac{\left(x_0^{(1)}\right)^n}{n!}\left|\frac{d}{dx_0^{(1)}}\int\limits_{x_0^{(0)}\geqslant x_0^{(1)}}|N_0|\,d\Omega\right|dx_0^{(1)}\leqslant$$

$$\leqslant MK^{n+1}\int\limits_0^{x_0^{(0)}}\frac{\left(x_0^{(1)}\right)^n}{n!}\,dx_0^{(1)}\leqslant MK^{n+1}\frac{\left(x_0^{(0)}\right)^{n+1}}{(n+1)!},$$

что и требовалось доказать.

Построив решение уравнения $Bu = f$, мы находим решение задачи Коши для рассматриваемого уравнения гиперболического типа, если оно существует.

Нам остается еще показать существование такого решения. Предварительно докажем еще несколько теорем.

6. Сопряженный интегральный оператор B^*. Пусть $v(x_0, \ldots, x_{2k+1})$ — функция переменных $x_0, \ldots, x_{2k+1}$, обращающаяся в нуль при $x_0 > T_0 > 0$ и при $|x_i| > T_0$, где T_0 — некоторая постоянная. Функцию u будем считать равной нулю при $x_0 < 0$. Рассмотрим интеграл

$$\int v(x_0, \ldots, x_{2k+1}) Bu(x_0, \ldots, x_{2k+1})\, dx_0 \ldots dx_{2k+1} \tag{20.31}$$

по всему пространству. Этот интеграл может быть преобразован в интеграл

$$\int u(x_0, \ldots, x_{2k+1}) B^*v(x_0, \ldots, x_{2k+1})\, dx_0 \ldots dx_{2k+1}.$$

Оператор B^* называется *сопряженным оператором* с оператором B.

Теорема. *Оба оператора B и B^* применимы к любым непрерывным функциям u и v, удовлетворяющим указанным выше условиям, при этом Bu и B^*v также непрерывные функции.*

Операторы B и B^* имеют обратные операторы. Иными словами, каждое из уравнений $Bu = f$ и $B^*v = \psi$ имеет единственное непрерывное решение при непрерывных правых частях.

Доказательство. Существование обратного оператора для B было доказано нами выше. Для того чтобы доказать теорему, нам нужно прежде всего построить оператор B^* в явном виде.

Преобразуем интеграл (20.31). Имеем

$$\int v(x_0, \ldots, x_{2k+1}) \Big[u(x_0, \ldots, x_{2k+1}) - \frac{1}{C}\int\limits_{\Omega} u(x_0', \ldots, x_{2+1}') \times$$

$$\times N_0(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}, x_0, \ldots, x_{2k+1}) \times$$

$$\times \rho^{2k}\varkappa\, d\rho\, d\theta_1 \ldots d\theta_{2k}\Big]\, dx_0 \ldots dx_{2k+1} =$$

$$= \int v(x_0, \ldots, x_{2k+1})\, u(x_0, \ldots, x_{2k+1})\, dx_0 \ldots dx_{2k+1} -$$

$$- \frac{1}{C}\int\int\limits_{\Omega} v(x_0, \ldots, x_{2k+1}) N_0(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}, x_0, \ldots, x_{2k+1}) \times$$

$$\times u(x_0'(x_0, \ldots, x_{2k+1}, \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}), \ldots$$
$$\ldots, x_{2k+1}'(x_0, \ldots, x_{2k+1}, \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}))\, \rho^{2k} \varkappa \times$$
$$\times d\rho\, d\theta_1 \ldots d\theta_{2k} dx_0 \ldots dx_{2k+1}. \quad (20.32)$$

В последнем интеграле функция N_0 зависит от координат вершины $x_0, \ldots, x_{2k+1}$ и полярных координат на конусе. От этих же переменных зависят переменные $x_0', \ldots, x_{2k+1}'$, вычисляемые на поверхности конуса. Совершим замену независимых переменных, взяв за новые переменные $x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}$.

При этом второй интеграл в равенстве (20.32) перепишется в виде

$$\int\int_{\Omega} N_0(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}, x_0(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}), \ldots$$
$$\ldots, x_{2k+1}(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}))\, v(x_0(\ldots), \ldots$$
$$\ldots, x_{2k+1}(\ldots)) u(x_0', \ldots, x_{2k+1}') \left| \frac{D(x_0, \ldots, x_{2k+1}, \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})}{D(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})} \right| \times$$
$$\times dx_0' \ldots dx_{2k+1}' \rho^{2k} \varkappa\, d\rho\, d\theta_1 \ldots d\theta_{2k} =$$
$$= \int u(x_0', \ldots, x_{2k+1}') \left\{ \int_{\Omega} N_0(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}, x_0(x_0', \ldots \right.$$
$$\ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}), \ldots, x_{2k+1}(x_0', \ldots, x_{2k+1}',$$
$$\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}))\, v(x_0(\ldots), \ldots, x_{2k+1}(\ldots)) \times$$
$$\times \left| \frac{D(x_0, \ldots, x_{2k+1} \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})}{D(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})} \right| \times$$
$$\left. \times \rho^{2k} \varkappa\, d\rho\, d\theta_1 \ldots d\theta_{2k} \right\} dx_0' \ldots dx_{2k+1}'.$$

Отсюда видно, что

$$B^* v(x_0', \ldots, x_{2k+1}') = v(x_0', \ldots, x_{2k+1}') -$$
$$- \frac{1}{C} \int_{\Omega} N_0(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}, x_0(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}), \ldots$$
$$\ldots, x_{2k+1}(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})) \times$$
$$\times \left| \frac{D(x_0, \ldots, x_{2k+1}, \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})}{D(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})} \right| \times$$
$$\times v(x_0(\ldots), \ldots, x_{2k+1}(\ldots))\, \rho^{2k} \varkappa\, d\rho\, d\theta_1 \ldots d\theta_{2k}. \quad (20.33)$$

Сходство между оператором B и оператором B^* проявляется не только во внешнем представлении, но и во многих свойствах.

Исследуем прежде всего характер поверхности в $(2k+2)$-мерном пространстве, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{gathered} x_0 = x_0\left(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{2k+1} = x_{2k+1}\left(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}\right). \end{gathered} \tag{20.34}$$

Докажем, что поверхность (20.34) снова представляет собою характеристический конус с вершиной в точке $x_0', \ldots, x_{2k+1}'$, но обращенный в сторону возрастающих значений x_0, т. е. верхнюю половину полного характеристического конуса. В самом деле, точка $x_0, \ldots, x_{2k+1}$ и точка $x_0', \ldots, x_{2k+1}'$ по построению должны лежать на одной и той же бихарактеристике. Следовательно, множество тех точек $x_0, \ldots, x_{2k+1}$, для которых $x_0', \ldots, x_{2k+1}'$ окажется на поверхности характеристического конуса, направленного вниз, совпадает с множеством точек всех бихарактеристик, проходящих через $x_0', \ldots, x_{2k+1}'$, а это множество и есть верхняя часть характеристического конуса, что и требовалось доказать.

Обозначим

$$\frac{1}{C} N_0' \left| \frac{D\left(x_0, \ldots, x_{2k+1}, \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}\right)}{D\left(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}\right)} \right| = N_0^*$$

и оценим величину определителя Якоби

$$D = \frac{D\left(x_0, \ldots, x_{2k+1}, \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}\right)}{D\left(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}\right)}.$$

Определитель этот ограничен. В самом деле, мы могли бы для его вычисления совершить сначала замену переменных $x_0', \ldots, x_{2k+1}'$ на переменные $y_0, \ldots, y_{2k+1}$ и вычислить функции

$$\begin{gathered} y_0\left(x_0, \ldots, x_{2k+1}, x_0', \ldots, x_{2k+1}'\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{2k+1}\left(x_0, \ldots, x_{2k+1}, x_0', \ldots, x_{2k+1}'\right), \end{gathered}$$

где $x_0, \ldots, x_{2k+1}$ — координаты вершины конуса, в котором осуществляется подстановка, а $x'_0, \ldots, x'_{2k+1}$ — текущие координаты, связанные с $y_0, \ldots, y_{2k+1}$ формулами (19.23), исследованными выше.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что при постоянных $s, p_0^{(0)}, \ldots, p_{2k+1}^{(0)}$ в уравнениях (19.9) $x'_0, \ldots, x'_{2k+1}$ являются непрерывными, достаточное число раз дифференцируемыми функциями начальных данных $x_0, \ldots, x_{2k+1}$ с функциональным определителем, отличным от нуля (начальное значение определителя равно единице).

Следовательно,

$$
\begin{array}{l}
x'_0(x_0, \ldots, x_{2k+1}, y_0, \ldots, y_{2k+1}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x'_{2k+1}(x_0, \ldots, x_{2k+1}, y_0, \ldots, y_{2k+1}),
\end{array}
\tag{20.35}
$$

непрерывные функции $x_0, \ldots, x_{2k+1}$ с функциональным определителем, отличным от нуля. Но функции $x'_j(x_0, \ldots, x_{2k+1}, \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k})$ суть именно функции (20.35), где положено $y_0 = \rho = \left(\sum_{i=1}^{2k+1} y_i^2\right)^{1/2}$. Ограниченность определителя D доказана.

Отсюда непосредственно следует, что функция $N_0^* = \frac{1}{C} N_0 |D|$ удовлетворяет неравенству

$$
|N_0^*| \leqslant M\rho^{-2k}.
$$

Покажем, что функция N_0^* так же, как и N_0, удовлетворяет неравенству (см. теорему 1 из п. 5)

$$
\int\limits_{\Omega_2 - \Omega_1} |N_0^*| \rho^{2k} d\rho\, dS \leqslant K(T_2 - T_1), \quad x_0^{(0)} \leqslant T_1 < T_2. \tag{20.36}
$$

При этом, в отличие от предыдущего случая, $T_1 > x_0^{(0)}$, ибо конус, на котором задано N_0^*, обращен в сторону возрастания x_0. Отсюда, как и ранее, следует существование обратного оператора для B^* в пространстве функций, обращающихся в нуль при $x_0 > T$, где T — постоянная. (В случае оператора B мы имеем дело с пространством функций, обращающихся в нуль при $x_0 < 0$.) Для того чтобы установить (20.36), нам нужно, как и прежде, заменить под знаком интеграла переменную ρ на x_0 при фиксированных $x'_0, \ldots, x'_{2k+1}, \theta_1, \ldots, \theta_k^2$.

7. Сопряженный интегральный оператор S^*. Подобно тому как мы строили оператор B^*, сопряженный с оператором B, можно построить оператор S^*, сопряженный с оператором S. Мы докажем, что оператор S^* определен на всех достаточно гладких функциях, обращающихся в нуль при $x_0 > T_0$ и $|x_i| > T_0$, где T_0 — некоторая постоянная.

Чтобы построить оператор S^*, используем прежний прием. Имеем

$$Su = -\frac{1}{C}\int\limits_{\Omega}\sum_{s=0}^{k-1}\sigma_{k-s}\frac{\partial^s u(x_0', \ldots, x_{2k+1}')}{\partial y_0^s}\rho^{2k}\,d\rho\,dS =$$

$$= -\frac{1}{C}\int\limits_{\Omega}\sum_{s=0}^{k-1}\sigma_{k-s}\sum_{\Sigma\beta_i\leqslant s}\frac{\partial^{\beta}u}{\partial x_0'^{\beta_0}\ldots\partial x_{2k+1}'^{\beta_{2k+1}}}\times$$

$$\times\psi^{(s)}_{\beta_0\ldots\beta_{2k+1}}\rho^{2k}d\rho\,dS. \qquad (20.37)$$

Здесь $\psi^{(s)}_{\beta_0\ldots\beta_{2k+1}}$ — коэффициенты в представлении производной $\frac{\partial^s u}{\partial y_0^s}$ через производные по $x_0', \ldots, x_{2k+1}'$, а интеграл по-прежнему распространен на участок поверхности характеристического конуса, лежащий выше плоскости $x_0 = 0$. Его можно считать распространенным по всей поверхности конуса, так как $u \equiv 0$ при $x_0 < 0$.

Рассмотрим интеграл

$$J = \int v(x_0, \ldots, x_{2k+1})\,Su\,dx_0\ldots dx_{2k+1}.$$

Преобразуя его подобно прежнему, получим

$$J = -\frac{1}{C}\int\sum_{s=0}^{k-1}\Biggl\{\sum_{\Sigma\beta_i\leqslant s}\frac{\partial^{\beta}u(x_0', \ldots, x_{2k+1}')}{\partial x_0'^{\beta_0}\ldots\partial x_{2k+1}'^{\beta_{2k+1}}}\times$$

$$\times\int\limits_{\Omega}\sigma_{k-s}(x_0(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}), \ldots$$

$$\ldots, x_{2k+1}(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}))\,\psi^{(s)}_{\beta_0\ldots\beta_{2k+1}}\times$$

$$\times v(x_0(\ldots), \ldots, x_{2k+1}(\ldots))\,\rho^{2k}\varkappa\,|D|\,d\rho\,d\theta_1\ldots d\theta_{2k}\Biggr\}\times$$

$$\times dx_0'\ldots dx_{2k+1}'. \qquad (20.38)$$

Так как при $x_0 < 0$ функция u обращается в нуль, а при $x_0 > T$, а также при $|x_i| > T_0$, $i = 1, \ldots, 2k+1$, обращается в нуль функция v, то интегрируя по частям в (20.38), получим

$$J = -\frac{1}{C}\int u\left(x_0', \ldots, x_{2k+1}'\right)\sum_{s=0}^{k-1}\Bigg\{\sum_{\Sigma\beta_i \leqslant s}(-1)^{\beta}\times$$

$$\times\frac{\partial^{\beta}}{\partial x_0'^{\beta_0}\ldots\partial x_{2k+1}'^{\beta_{2k+1}}}\int\sigma_{k-s}\left(x_0\left(x_0', \ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}\right), \ldots\right.$$

$$\ldots, x_{2k+1}(\ldots))\,\psi^{(s)}_{\beta_0\ldots\beta_{2k+1}}v\left(x_0(\ldots), \ldots, x_{2k+1}(\ldots)\right)\times$$

$$\times\rho^{2k}\varkappa\,|D|\,d\rho\,d\theta_1\ldots d\theta_{2k}\Bigg\}dx_0'\ldots dx_{2k+1}'.$$

Отсюда видно, что оператор S^* имеет вид

$$S^*v\left(x_0', \ldots, x_{2k+1}'\right) =$$

$$= -\frac{1}{C}\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{\Sigma\beta_i \leqslant s}(-1)^{\beta}\frac{\partial^{\beta}}{\partial x_0'^{\beta_0}\ldots\partial x_{2k+1}'^{\beta_{2k+1}}}\int_{\Omega}\sigma_{k-s}\left(x_0\left(x_0', \ldots\right.\right.$$

$$\left.\ldots, x_{2k+1}', \rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k}\right), \ldots, x_{2k+1}(\ldots))\,\psi^{(s)}_{\beta_0\ldots\beta_{2k+1}}\times$$

$$\times v\left(x_0(\ldots), \ldots, x_{2k+1}(\ldots)\right)\rho^{2k}\varkappa\,|D|\,d\rho\,d\theta_1\ldots d\theta_{2k}. \tag{20.39}$$

Из самого вида оператора S^* ясно, что он определен на всех функциях, имеющих непрерывные производные до порядка $k-1$. Мы можем теперь перейти к доказательству существования решения задачи Коши.

8. Решение задачи Коши для четного числа переменных. Прежде всего сведем вопрос к более простому. Вычислим значение всех производных по x_0 до порядка $k+1$ включительно от функции u и положим

$$u = w + u\big|_{x_0=0} + x_0\frac{\partial u}{\partial x_0}\bigg|_{x_0=0} + \ldots + \frac{x_0^{k+1}}{(k+1)!}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x_0^{k+1}}\bigg|_{x_0=0}. \tag{20.40}$$

Для новой неизвестной функции w мы получим уже однородную задачу Коши и уравнение с другим свободным членом F_1. Очевидно, что F_1 вместе со своими производными до порядка k включительно обращается в нуль при $x_0 = 0$.

Рассмотрим произвольную функцию $\varphi(x_0, \ldots, x_{2k+1})$, достаточно гладкую и отличную от нуля лишь в некоторой конечной области V_φ, заключенной в полосе $0 < x_0 \leqslant \leqslant T_0$. Построим дифференциальный оператор L^* второго порядка, сопряженный с оператором L. Оператор L^* имеет вид

$$L^* v = \sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (A_{ij} v) - \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i v) + C v.$$

Положим

$$L^* \varphi = \psi.$$

Для функции φ мы можем поставить задачу Коши в области $x_0 < T_0$. Начальными данными при этом будут служить условия

$$\varphi \equiv 0, \quad x_0 > T_0.$$

Развитая нами выше теория позволяет выписать для функции φ интегральное тождество

$$B_1 \varphi = S_1 \psi, \tag{20.41}$$

причем решение задачи Коши может быть записано в виде

$$\varphi = B_1^{-1} S_1 \psi.$$

Операторы B_1 и S_1, аналогичные операторам B и S, отличаются лишь тем, что в них роли прямого и обратного конуса переменились. Если считать, что переменное x_0 обозначает время, то обычная задача Коши состоит в отыскании решения в более поздние моменты времени при заданных начальных условиях в момент $t = 0$, а сопряженная задача — в отыскании решения в более ранние моменты, нежели $t = T_0$, для которого известны начальные данные.

Умножая обе части равенства (20.41) на достаточно гладкую функцию Φ, равную нулю при $x_0 < 0$, и интегрируя по всему пространству, получим $\int \Phi B_1 \varphi \, d\Omega = \int \Phi S_1 \psi \, d\Omega$.

Пользуясь определением сопряженного оператора, перепишем это равенство в виде

$$\int \varphi B_1^* \Phi \, d\Omega = \int \psi S_1^* \Phi \, d\Omega. \tag{20.42}$$

Правую часть можно преобразовать следующим образом. Подставим в нее $\psi = L^*\varphi$. Интегрируя по частям, получим

$$\int L^*\varphi S_1^* \Phi \, d\Omega = \int \varphi L S_1^* \Phi \, d\Omega, \tag{20.43}$$

так как функция φ обращается в нуль вне конечной области. Перенося в равенстве (20.42) оба интеграла в левую часть и объединяя их, получим, пользуясь (20.43),

$$\int \varphi \left[B_1^*\Phi - LS_1^*\Phi\right] d\Omega = 0.$$

Последнее равенство имеет место при любых рассматриваемых φ. Отсюда следует тождество

$$B_1^*\Phi - LS_1^*\Phi = 0.$$

Составим теперь интегральное уравнение

$$B_1^*\Phi = F, \tag{20.44}$$

где F — правая часть уравнения (19.1). Оператор B_1^* имеет обратный. Следовательно, это уравнение разрешимо, причем $\Phi = B_1^{*^{-1}} F$.

Подставляя это выражение для Φ в (20.44), получим

$$F = LS_1^* B_1^{*^{-1}} F. \tag{20.45}$$

Это равенство говорит о том, что функция $S_1^* B_1^{*^{-1}} F$ удовлетворяет уравнению $Lu = F$, если функция F имеет непрерывные производные до порядка k включительно и обращается в нуль при $x_0 < 0$. К этой задаче при помощи замены неизвестной функции, как мы уже отмечали выше, может быть сведена общая задача Коши при достаточно гладких F и достаточно гладких начальных данных.

Нами доказано, таким образом, существование решения у линейного нормального гиперболического уравнения в частных производных с достаточно гладкими коэффициентами и достаточно гладкими начальными условиями, в случае, если число независимых переменных четное, в достаточно малой окрестности фиксированной точки гиперплоскости $x_0 = 0$.

9. Задача Коши для нечетного числа переменных. Случай, когда число независимых переменных нечетное, как известно, сводится к предыдущему.

Пусть, например, нужно найти решение уравнения

$$\sum_{i=0}^{2k}\sum_{j=0}^{2k} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^{2k} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F \tag{20.46}$$

при условиях

$$\begin{aligned} u\big|_{x_0=0} &= u_0(x_1, \ldots, x_{2k}), \\ \frac{\partial u}{\partial x_0}\Big|_{x_0=0} &= u_1(x_1, \ldots, x_{2k}). \end{aligned} \tag{20.47}$$

Мы предполагаем, что в каждой точке пространства квадратичная форма $A(p) = \sum\limits_{i=0}^{2k}\sum\limits_{j=0}^{2k} A_{ij}p_i p_j$ приводится к виду

$$A(p) = -\sum_{i=1}^{2k} q_i^2 + q_0^2 \tag{20.48}$$

при помощи линейной замены переменных p_i, $A_{00} > 0$, $A_{ii} < 0$, $i \neq 0$.

Введем еще одну новую независимую переменную x_{2k+1} и рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=0}^{2k}\sum_{j=0}^{2k} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{2k+1}^2} + \sum_{i=0}^{2k} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F. \tag{20.49}$$

Уравнение (20.49) является уравнением нормального гиперболического типа с четным числом независимых переменных, причем A_{ij}, B_i, C и F не зависят от переменного x_{2k+1}.

По доказанному это уравнение имеет решение, удовлетворяющее условиям (20.47), которые следует толковать как условия в пространстве $(2k+2)$ переменных, причем правые части не зависят от x_{2k+1}.

Решение этой задачи даст нам функцию u, которая, как нетрудно убедиться, в свою очередь не зависит от x_{2k+1}. В самом деле, уравнение, которому удовлетворяет функция $\frac{\partial u}{\partial x_{2k+1}}$, совпадает с уравнением для u при $F\equiv 0$, а начальные условия для этой функции

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_{2k+1}}\equiv 0,\ \frac{\partial u_1}{\partial x_{2k+1}}\equiv 0.$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x_{2k+1}}\equiv 0$. Но это решение единственное, как мы установили выше. Следовательно, для полученного нами решения u всюду $\frac{\partial u}{\partial x_{2k+1}}\equiv 0$ и, значит, оно не зависит от x_{2k+1}. Но в таком случае функция u как функция $2k+1$ переменного $x_0, \ldots, x_{2k+1}$ удовлетворяет уравнению (20.46) и начальным условиям (20.47), что и требовалось доказать ([55]).

21. Исследование линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами

1. Упрощение уравнения. В предыдущем параграфе мы установили существование единственного решения у нормального гиперболического линейного уравнения в частных производных с переменными достаточно гладкими коэффициентами при достаточно гладких начальных данных. Методы, развитые нами в первых главах, позволяют значительно точнее оценить степень гладкости коэффициентов уравнения и начальных данных, которую нужно требовать для того, чтобы решение существовало.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=0}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=F, \qquad (21.1)$$

где $A_{ij}=A_{ji}$, B_i суть непрерывно дифференцируемые функции от $x_0, \ldots, x_n$, причем $A_{00}\neq 0$. В дальнейшем будут указаны добавочные условия, налагаемые на коэффициенты A_{ij}, B_i, C и свободный член F.

Это уравнение можно упростить при помощи замены независимых переменных.

Положим $x_0 = t$ и построим векторное поле $\vec{l}$ с помощью равенств

$$l_j = \frac{A_{0j}}{A_{00}}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{21.2}$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = l_s \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{21.3}$$

и пусть $C_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ суть первые интегралы этой системы.

Из системы (21.3) вытекает, что линии

$$C_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{const} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

трансверсальны по отношению к плоскостям $t = \mathrm{const}$.

Положим

$$y_i = C_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{21.4}$$

В окрестности фиксированной точки $x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ в уравнении (21.1) можно перейти к переменным t, $y_1, \ldots, y_n$. В этих переменных уравнение (21.1) принимает особо простой вид. В нем уничтожаются коэффициенты $\tilde{A}_{0j}$ при смешанных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial t}$.

Докажем это. Как известно, коэффициенты при смешанных производных $\tilde{A}_{0j}$ в уравнении гиперболического типа после преобразования имеют вид

$$\tilde{A}_{0j} = \sum_{i=1}^{n} A_{0i} \frac{\partial C_j}{\partial x_i} + A_{00} \frac{\partial C_j}{\partial t}.$$

Так как $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial C_j}{\partial t} = 0$, то на основании уравнений (21.3)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_j}{\partial x_i} l_i + \frac{\partial C_j}{\partial t} = 0.$$

Принимая во внимание (21.2), видим, что $\tilde{A}_{0j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Поделив затем уравнение на $\bar{A}_{00} = A_{00}$, придем к новому уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{A}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + h \frac{\partial u}{\partial t} - \widetilde{C} u = \widetilde{F}.$$

Положим еще $u = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t h\,dt_1} v$. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} e^{-\frac{1}{2}\int_0^t h\,dt_1} + v \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + h \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-\frac{1}{2}\int_0^t h\,dt_1}.$$

После такой замены из уравнения исключается и член, содержащий $\frac{\partial u}{\partial t}$. В дальнейшем при исследовании общих линейных уравнений мы будем всегда предполагать с самого начала, что члены, содержащие $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$, в уравнение не входят.

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F, \quad (21.5)$$

где A_{ij}, B_i, C и F — заданные функции от $x_1, \ldots, x_n, t$. Пусть в любой точке пространства и в любой момент времени

$$A(p) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} p_i p_j \geqslant c \sum_{i=1}^{n} p_i^2; \; A_{ij} = A_{ji}, \quad (21.6)$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная ([50]).

Будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=0} = u_0(x_1, \ldots, x_n); \; \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x_1, \ldots, x_n). \quad (21.7)$$

Мы будем рассматривать две различные постановки этой задачи.

2. Постановка задачи Коши для обобщенных решений. Пусть Ω область $(n+1)$-мерного пространства t,

$x_1, \ldots, x_n$. Функцию $u(t, x_1, \ldots, x_n)$, определенную в Ω и суммируемую по любой ограниченной области Ω' такой, что $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, будем называть *обобщенным решением* уравнения (21.5), если, какова бы ни была дважды непрерывно дифференцируемая во всем пространстве функция v, отличная от нуля лишь в ограниченной области Ω_1, такой, что $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, имеет место равенство

$$\int_{\Omega} uL^*v\,d\Omega = \int_{\Omega} vF\,d\Omega,$$

где L^* — сопряженный оператор, определенный равенством

$$L^*v = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(A_{ij}v) - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(B_i v) + Cv.$$

Первая постановка задачи Коши состоит в следующем.

Найти обобщенное решение u уравнения (21.5) такое, что на любом сечении области Ω гиперплоскостью $t = \mathrm{const}$ u представляет собою элемент пространства $W_2^{(1)}$, а $\frac{\partial u}{\partial t}$ — элемент пространства L_2. Траектория в $W_2^{(1)}$ и L_2, определяемая как пара функций u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ в этой паре пространств, должна быть непрерывной по t и удовлетворять начальным условиям (21.7).

Наложим на A_{ij}, B_i, C и F ограничения, которые назовем условиями δ) или условиями существования решения обобщенной задачи Коши. Эти условия следующие.

В области Ω:

1) коэффициенты A_{ij} непрерывны с первыми производными и удовлетворяют неравенствам

$$A_{00} \geqslant m > 0, \quad |A_{ij}| \leqslant A, \quad \left|\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\right| \leqslant A, \quad \left|\frac{\partial A_{ij}}{\partial t}\right| \leqslant A \qquad (21.8)$$

$$(i, j, k = 1, \ldots, n),$$

где m и A — постоянные;

2) коэффициенты B_i непрерывны и удовлетворяют неравенствам $|B_i| \leqslant A \quad (i = 1, \ldots, n)$.

3) первые обобщенные производные от функций B_i существуют и для некоторого $\varepsilon > 0$ удовлетворяют

неравенствам

$$\left(\int\limits_{\Omega(t)}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right|+\left|\frac{\partial B_i}{\partial t}\right|\right)^{\mu_1}dx_1\ldots dx_n\right)^{1/\mu_1}\leqslant A(t)\leqslant A \tag{21.9}$$

$$(i=1,\ldots,n),$$

где $\Omega(\tau)$ — сечение области Ω гиперплоскостью $t=\tau$, $\mu_1=n+\varepsilon$ при $n\geqslant 2$ и $\mu_1=2$ при $n=1$.

4) коэффициенты C удовлетворяют неравенству

$$\left(\int\limits_{\Omega(t)}|C|^{\mu_1}dx_1\ldots dx_n\right)^{1/\mu_1}\leqslant A(t)\leqslant A; \tag{21.10}$$

5) первые обобщенные производные от C существуют и для некоторого $\varepsilon>0$ удовлетворяют неравенству

$$\left(\int\limits_{\Omega(t)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial C}{\partial x_i}\right|+\left|\frac{\partial C}{\partial t}\right|\right)^{\nu_1}dx_1\ldots dx_n\right)^{1/\nu_1}\leqslant A(t)\leqslant A, \tag{21.11}$$

где $\nu_1=(n+\varepsilon)/2$ при $n\geqslant 4$ и $\nu_1=2$ при $n=1, 2, 3$;

6) свободный член F удовлетворяет неравенству

$$\left(\int\limits_{\Omega(t)}|F|^2dx_1\ldots dx_n\right)^{1/2}\leqslant \widetilde{F}(t)\leqslant \widetilde{F}, \tag{21.12}$$

где $\widetilde{F}$ — постоянная;

7) первые обобщенные производные от F существуют и удовлетворяют неравенству

$$\left(\int\limits_{\Omega(t)}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|^2+\left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|\right)^{2}dx_1\ldots dx_n\right)^{1/2}\leqslant \widetilde{F}(t)\leqslant \widetilde{F}; \tag{21.13}$$

8) в $\Omega(0)$

$$u_0\in W_2^{(2)}; \tag{21.14}$$

9) в $\Omega(0)$

$$u_1\in W_2^{(1)}. \tag{21.15}$$

На вопрос о решении задачи Коши в первой постановке дает ответ следующая теорема.

Теорема. *Выполнение условий о) достаточно для существования решения задачи Коши* (21.5), (21.7) *в* *некоторой окрестности G множества $\Omega(0)$ в первой постановке. Решение непрерывно зависит от начальных данных в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\|u_0\|_{W_2^{(1)}} < \delta$ и $\|u_1\|_{L_2} < \delta$ в $\Omega(0)$, то $\|u\|_{W_2^{(1)}} < \varepsilon$ и $\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2} < \varepsilon$ в $G \cap \Omega(t)$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, нам необходимо установить несколько важных неравенств.

3. Основное неравенство. Пусть w — любая функция переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, непрерывная с производными второго порядка.

Выведем некоторое неравенство, аналогичное неравенству (17.7). Рассмотрим некоторую область V в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n, t$ с кусочно гладкой границей S. Тогда по формуле Гаусса — Остроградского

$$\int_S \left\{\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] \cos\alpha_0 - \right.$$
$$\left. - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial t} \cos\alpha_i \right\} dS =$$
$$= \int_V \left\{ -2 \frac{\partial w}{\partial t} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} - 2 \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial t}\right)\right\} dV, \quad (21.16)$$

где α_i — угол между внешней нормалью ν к S и осью Ox_i, а α_0 — угол между ν и осью Ot.

Если в некоторой части поверхности S

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \cos\alpha_i \cos\alpha_j - \cos^2\alpha_0 \leqslant 0,$$

то на ней знак квадратичной формы

$$\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] \cos\alpha_0 -$$
$$- 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial t} \cos\alpha_i = \frac{1}{\cos\alpha_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \cos\alpha_0 - \right.$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t}\cos\alpha_i\Big)\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\cos\alpha_0-\frac{\partial w}{\partial t}\cos\alpha_j\right)+$$

$$+\frac{\cos^2\alpha_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}\cos\alpha_i\cos\alpha_j}{\cos\alpha_0}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \qquad (21.17)$$

совпадает со знаком $\cos\alpha_0$.

Рассмотрим замкнутый шар S_2, содержащийся в $\Omega(0)$, и пусть $(S_2,\ [0,\ T])$ есть цилиндр, построенный на S_2 и ограниченный гиперплоскостями $t=0$ и $t=T>0$. Положим $c_1 = n \max\limits_{i,j,(S_2,\,[0,T])} |A_{ij}|$. Проведем через границу шара S_2 коническую поверхность S_1 (рис. 12) так, чтобы на ней $\cos^2\alpha_0 > c_1/(1+c_1)$. Этот усеченный конус, лежащий в цилиндре $(S_2,\ [0,\ T])$, обозначим через Ω^*; верхнее основание конуса, лежащее в гиперплоскости $t=T_1\leqslant T$, обозначим через S_3. Тогда на поверхности S_1 квадратичная форма положительна, так как на ней $\cos\alpha_0>0$ и

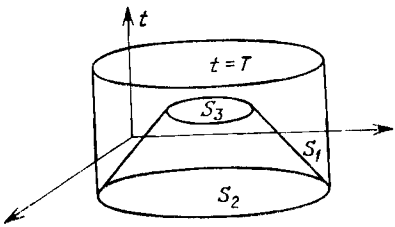

Рис. 12

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\cos\alpha_i\cos\alpha_j-\cos^2\alpha_0<c_1\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i-\cos^2\alpha_0=$$

$$=c_1(1-\cos^2\alpha_0)-\cos^2\alpha_0=c_1-(1+c_1)\cos^2\alpha_0<0.$$

Отсюда получается неравенство, аналогичное ранее выведенному неравенству (17.7):

$$\int\limits_{S_3}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\}dS\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{S_2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\}dS+\int\limits_{\Omega^*}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}-\right.$$

$$\left.-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial t}-2\frac{\partial w}{\partial t}L_1w\right\}d\Omega, \qquad (21.18)$$

где

$$L_1 w = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Обозначим через $\Omega^*(\tau)$ сечение конуса Ω^* плоскостью $t = \tau$. Пусть для функции w имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega^*(t)} (L_1 w)^2 \, dx_1 \ldots dx_n = N(t) \leqslant N. \qquad (21.19)$$

Тогда можно оценить интеграл по Ω^* в неравенстве (21.18) следующим образом:

$$\left| \int\limits_{\Omega^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} - 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2 \frac{\partial w}{\partial t} L_1 w \right\} d\Omega \right| \leqslant \int\limits_0^{T_1} \left\{ A \int\limits_{\Omega^*(t)} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2n \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial w}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right| + \frac{2}{A} \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right| \left| L_1 w \right| \right] dx_1 \ldots dx_n \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int\limits_0^{T} \left\{ \int\limits_{\Omega^*(t)} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2 \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right| \left| L_1 w \right| \right] \times \right.$$

$$\left. \times \, dx_1 \ldots dx_n \right\} dt.$$

Положим

$$\int\limits_{\Omega^*(t)} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx_1 \ldots dx_n = K_1(t \mid w). \quad (21.20)$$

Очевидно, вследствие (21.6) и условия $|A_{ij}| \leqslant c_1/n$ имеем

$$c_2 K_1(t \mid w) \leqslant \left| \int\limits_{\Omega^*(t)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx_1 \ldots dx_n \right| \leqslant C_2 K_1(t \mid w), \quad (21.21)$$

где $c_2 = \min\{c, 1\}$, $C_2 = \max\{c_1, 1\}$.

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\Omega^*(t)} \left|\frac{\partial w}{\partial t}\right| |L_1 w|\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} \left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^2 dx_1 \ldots dx_n\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} |L_1 w|^2\, dx_1 \ldots dx_n\right)^{1/2} \leqslant N(t)^{1/2} K_1(t\,|\,w)^{1/2}.$$

Полагая в (21.18) $T_1 = t$ и, значит, $S_3 = \Omega^*(t)$, получим, что

$$c_2 K_1(t\,|\,w) \leqslant C_2 K_1(0\,|\,w) + C_1 \int\limits_0^t [K_1(t_1\,|\,w) + \\ + 2K_1(t_1\,|\,w)^{1/2} N(t_1)^{1/2}]\, dt_1. \quad (21.22)$$

Для наших целей необходимо вывести еще одно неравенство. Положим

$$\int\limits_{\Omega^*(t)} w^2 dx_1 \ldots dx_n = K_0(t\,|\,w). \quad (21.23)$$

Очевидно, что

$$K_0(t_1\,|\,w) \leqslant \int\limits_{\Omega^*(t)} w^2(t_1, x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

если $t_1 > t$. Поэтому

$$\frac{dK_0(t\,|\,w)}{dt} = \lim_{t_1 \to t} \frac{K_0(t_1\,|\,w) - K_0(t\,|\,w)}{t_1 - t} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t_1 \to t} \frac{1}{t_1 - t} \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} w^2(t_1, x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Omega^*(t)} w^2(t, x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n\right) =$$

$$= \frac{d}{d\tau}\left(\int\limits_{\Omega^*(t)} w^2(\tau, x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n\right)\Bigg|_{\tau = t} =$$

$$= 2\int\limits_{\Omega^*(t)} w \frac{\partial w}{\partial t}\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int\limits_{\Omega^*(t)} w^2 dx_1 \ldots dx_n\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\,[K_0(t\,|\,w)]^{1/2}\,[K_1(t\,|\,w)]^{1/2}.$$

Тогда

$$K_0(t\,|\,w) = \int_0^t \frac{d}{dt_1} K_0(t_1\,|\,w)\,dt_1 + K_0(0\,|\,w) \leqslant$$

$$\leqslant K_0(0\,|\,w) + 2\int_0^t [K_0(t_1\,|\,w)]^{1/2}\,[K_1(t_1\,|\,w)]^{1/2}dt_1. \quad (21.24)$$

Неравенства (21.22) и (21.24) — основные для всего дальнейшего.

4. Лемма об оценках приближенных решений. Докажем теперь основную лемму. Рассмотрим уравнение (21.5), удовлетворяющее условиям *о*).

Заменим в нем все функции A_{ij}, B_i, C и F их средними функциями A_{ijh}, B_{ih}, C_h и F_h по $x_1, \ldots, x_n$, t, а начальные данные u_0 и u_1 — их средними функциями u_{0h} и u_{1h} по $x_1, \ldots, x_n$. Новое уравнение $L_hu_h = F_h$ будем называть усредненным. Это уравнение с новыми начальными условиями имеет решение u_h в некоторой окрестности G множества $\Omega(0)$, не зависящей от $h > 0$ ([58]).

Пусть Ω^* — усеченный конус, содержащийся в G. Составим для этого решения интегралы $K_0(t|u_h)$, $K_1(t|u_h)$ и

$$K_2(t\,|\,u_h) = \int\limits_{\Omega^*(t)} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}\right)^2\right] dx_1 \ldots dx_n.$$

Лемма. *Для функций $K_0(t|u_h)$, $K_1(t|u_h)$ и $K_2(t|u_h)$ справедливы неравенства*

$$|K_i(t|u_h)| \leqslant y_i(t), \quad i = 0,\ 1,\ 2, \qquad (21.25)$$

где y_i — решения системы уравнений

$$\frac{d\left(y_0^{1/2}\right)}{dt} = My_1^{1/2},$$

$$\frac{d\left(y_1^{1/2}\right)}{dt} = M\left(y_0^{1/2} + y_1^{1/2} + \widetilde{F}(t)\right), \qquad (21.26)$$

$$\frac{d\left(y_2^{1/2}\right)}{dt} = M\left(y_0^{1/2} + y_1^{1/2} + y_2^{1/2} + \widetilde{F}(t)\right)$$

при условиях

$$
\begin{aligned}
y_0|_{t=0} &= MK_0(0|u),\\
y_1|_{t=0} &= MK_1(0|u),\\
y_2|_{t=0} &= MK_2(0|u),
\end{aligned}
\tag{21.27}
$$

где M — некоторая положительная постоянная, не зависящая от h. (Таким образом, $K_0(t|u_h)$, $K_1(t|u_h)$ и $K_2(t|u_h)$ имеют оценку, не зависящую от h.)

Доказательство. Вернемся к неравенству (21.22) и рассмотрим для $u_h \equiv w$ уравнение

$$L_{1h}w = F_h - \sum_{i=1}^{n} B_{ih}\frac{\partial w}{\partial x_i} - C_h w, \tag{21.28}$$

где функции B_{ih} согласно свойствам средних функций ограничены:

$$|B_{ih}| \leqslant A, \tag{21.29}$$

функция C_h удовлетворяет неравенству

$$\left[\int\limits_{\Omega^*(t)} |C_h|^{\mu_1} dx_1 \ldots dx_n\right]^{1/\mu_1} \leqslant A(t) \leqslant A, \tag{21.30}$$

и, кроме того,

$$\left[\int\limits_{\Omega^*(t)} F_h^2 dx_1 \ldots dx_n\right]^{1/2} = \tilde{F}(t) \leqslant \tilde{F}. \tag{21.31}$$

В этом случае в области $\Omega^*(t)$

$$\|L_{1h}w\|_{L_2} \leqslant \|F_h\|_{L_2} + \left\|\sum_{i=1}^{n} B_{ih}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_{L_2} + \|C_h w\|_{L_2}. \tag{21.32}$$

Очевидно,

$$\|F_h\|_{L_2} = \tilde{F}(t) \leqslant \tilde{F}; \quad \left\|\sum_{i=1}^{n} B_{ih}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_{L_2} \leqslant A\|w\|_{L_2^{(1)}}.$$

Для оценки $\|C_h w\|_{L_2}$ воспользуемся неравенством Гёльдера и теоремами вложения.

Если $n \geqslant 2$, то $\mu_1 = n + \varepsilon > 2$, и согласно неравенству Гёльдера и теореме вложения из п. 2, § 8, гл. I имеем

$$\left(\int\limits_{\Omega^*(t)} |C_h w|^2 dx_1 \dots dx_n\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} |C_h|^{n+\varepsilon} dx_1 \dots dx_n\right)^{1/(n+\varepsilon)} \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} |w|^{q^*} dx_1 \dots dx_n\right)^{1/q^*} \leqslant$$

$$\leqslant B_1 A(t) \; w\|_{W_2^{(1)}} \leqslant B_1 A\left[K_1(t\,|\,w)^{1/2} + K_0(t\,|\,w)^{1/2}\right], \qquad (21.33)$$

где $q^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+\varepsilon}\right)^{-1} < q = \frac{2n}{n-2}$, B_1 — постоянная из теоремы вложения.

Если $n = 1$, то $\mu_1 = 2$, и согласно теореме вложения из п. 1, § 8, гл. I имеем

$$\left(\int\limits_{\Omega^*(t)} |C_h w|^2 dx_1 \dots dx_n\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} |C_h|^2 dx_1 \dots dx_n\right)^{1/2} \|w\|_C \leqslant$$

$$\leqslant B_2 A(t) \|w\|_{W_2^{(1)}} \leqslant B_3 A\left[K_1(t\,|\,w)^{1/2} + K_0(t\,|\,w)\right]^{1/2},$$

B_2, $B_3 = \text{const}$.

Таким образом, согласно (21.19)

$$[N(t)]^{1/2} \leqslant C_1 [K_1(t|w)^{1/2} + K_0(t|w)^{1/2} + \tilde{F}(t)], \qquad (21.34)$$

где C_1 — постоянная, не зависящая от w, t и h.

Подставляя эту оценку в неравенство (21.22), получим

$$K_1(t\,|\,w) \leqslant C_2 K_1(0\,|\,w) + C_3 \int\limits_0^t K_1(t_1\,|\,w)^{1/2} \times$$

$$\times \left[K_0(t_1\,|\,w)^{1/2} + K_1(t_1\,|\,w)^{1/2} + \tilde{F}(t_1)\right] dt_1. \qquad (21.35)$$

Вместе с (21.24) мы получим систему неравенств, из которой легко оцениваются функции $K_0(t|w)$ и $K_1(t|w)$.

Обозначим через y_0, y_1 функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$y_1(t) = C_2K_1(0|w) + 2C_3\int_0^t y_1^{1/2}\left[y_0^{1/2} + y_1^{1/2} + \widetilde{F}\right] dt_1,$$
$$y_0(t) = K_0(0|w) + 2\int_0^t y_0^{1/2} y_1^{1/2} dt_1. \tag{21.36}$$

Нетрудно показать, что $y_0(t) \geqslant K_0(t|w)$, $y_1(t) \geqslant \geqslant K_1(t|w)$. В самом деле, функции y_0 и y_1 можно найти как пределы возрастающих последовательностей $y_0^{(m)}$ и $y_1^{(m)}$, определенных формулами

$$y_1^{(m)} = C_2K_1(0|w) + 2C_3\int_0^t \left[y_1^{(m-1)}\right]^{1/2}\left(\left[y_0^{(m-1)}\right]^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \left[y_1^{(m-1)}\right]^{1/2} + \widetilde{F}\right) dt_1,$$

$$y_0^{(m)} = K_0(0|w) + 2\int_0^t \left[y_1^{(m-1)}\right]^{1/2}\left[y_0^{(m-1)}\right]^{1/2} dt,$$

если первые члены этих последовательностей взять равными $K_0(t|w)$ и $K_1(t|w)$. Наша оценка доказана.

Функции y_0 и y_1 суть решения системы дифференциальных уравнений

$$y_0' = 2y_0^{1/2}y_1^{1/2}, \quad y_1' = 2C_3y_1^{1/2}\left(y_0^{1/2} + y_1^{1/2} + \widetilde{F}\right). \tag{21.37}$$

Взяв за новые переменные $y_0^{1/2} = z_0$ и $y_1^{1/2} = z_1$, получим

$$z_0' = z_1, \quad z_1' = C_3\left(z_0 + z_1 + \widetilde{F}\right). \tag{21.38}$$

Нам осталось оценить $K_2(t|w)$. Дифференцируя усредненное уравнение (21.28) по x_l и по t, получим

$$L_{1h}\frac{\partial u_h}{\partial x_l} = \frac{\partial F_h}{\partial x_l} - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{ijh}}{\partial x_l}\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{i=1}^n B_{ih}\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i\partial x_l} -$$
$$- \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_{ih}}{\partial x_l}\frac{\partial u_h}{\partial x_i} - C_h\frac{\partial u_h}{\partial x_l} - u_h\frac{\partial C_h}{\partial x_l}, \tag{21.39}$$

$$L_{1h}\frac{\partial u_h}{\partial t}=\frac{\partial F_h}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ijh}}{\partial t}\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}B_{ih}\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i\partial t}-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B_{ih}}{\partial t}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}-C_h\frac{\partial u_h}{\partial t}-u_h\frac{\partial C_h}{\partial t}. \quad (21.39)$$

Мы можем легко оценить величину $K_2(t|w)$ с помощью применения неравенства (21.22). Применяя его к каждой производной и замечая, что

$$\sum_{i=1}^{n}K_1\left(t\,\middle|\,\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)+K_1\left(t\,\middle|\,\frac{\partial w}{\partial t}\right)=K_2(t\,|\,w),$$

находим

$$K_2(t\,|\,w)\leqslant C_4K_2(0\,|\,w)+C_5\int_0^t\left\{K_2(t_1\,|w)+\right.$$
$$\left.+K_2(t_1\,|\,w)^{1/2}\left[\sum_{l=1}^{n}[N_l(t_1)]^{1/2}+[N_0(t_1)]^{1/2}\right]\right\}dt_1, \quad (21.40)$$

где $[N_l(t)]^{1/2}=\left\|L_1\frac{\partial u_h}{\partial x_l}\right\|_{L_2}$, $[N_0(t)]^{1/2}=\left\|L_1\frac{\partial u_h}{\partial t}\right\|_{L_2}$. Мы получим

$$[N_l(t)]^{1/2}\leqslant\left\|\frac{\partial F_h}{\partial x_l}\right\|_{L_2}+A\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i\partial x_j}\right\|_{L_2}+A\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_l\partial x_i}\right\|_{L_2}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial B_{ih}}{\partial x_l}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\right\|_{L_2}+\left\|C_h\frac{\partial u_h}{\partial x_l}\right\|_{L_2}+\left\|\frac{\partial C_h}{\partial x_l}u_h\right\|_{L_2}\quad (l=1,\ \ldots,\ n).$$

Оценивая $\left\|\frac{\partial B_{ih}}{\partial x_l}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\right\|_{L_2}$ и $\left\|C_h\frac{\partial u_h}{\partial x_l}\right\|_{L_2}$ так же, как ранее (см. (21.33)), получим

$$\left\|\frac{\partial B_{ih}}{\partial x_l}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\right\|_{L_2}\leqslant C_6A(t)\left[K_2(t\,|\,u_h)^{1/2}+K_1(t\,|\,u_h)^{1/2}\right], \quad (21.41)$$

$$\left\|C_h\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\right\|_{L_2}\leqslant C_6A(t)\left[K_2(t\,|\,u_h)^{1/2}+K_1(t\,|\,u_h)^{1/2}\right]. \quad (21.42)$$

Наконец, для оценки $\left\|\frac{\partial C_h}{\partial x_l}u_h\right\|_{L_2}$ снова воспользуемся неравенством Гёльдера и теоремами вложения. Если $n \geqslant 4$, то $\nu_1 = (n+\varepsilon)/2 > 2$, и согласно неравенству Гёльдера и теореме вложения из п. 2, § 8, гл. I, имеем

$$\left\| \frac{\partial C_h}{\partial x_l} u_h \right\|_{L_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} \left| \frac{\partial C_h}{\partial x_l} \right|^{\frac{(n+\varepsilon)}{2}} dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{2}{(n+\varepsilon)}} \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} |u_h|^{q^*} dx_1 \dots dx_n \right)^{1/q^*} \leqslant$$

$$\leqslant B_3 A(t) \| u_h \|_{W_2^{(2)}} \leqslant B_3 A(t) \left[K_0 (t \mid u_h)^{1/2} + K_1 (t \mid u_h)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + K_2 (t \mid u_h)^{1/2} \right],$$

где в этот раз $q^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+\varepsilon} \right)^{-1} < \frac{2n}{n-4}$, B_3 — постоянная теоремы вложения.

Если $n = 1, 2, 3$, то $\nu_1 = 2$ и согласно теореме вложения из п. 1, § 8, гл. I имеем

$$\left\| \frac{\partial C_h}{\partial x_l} u_h \right\|_{L_2} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} \left| \frac{\partial C_h}{\partial x_l} \right|^2 dx_1 \dots dx_n \right)^{1/2} \| u_h \|_C \leqslant$$

$$\leqslant B_4 A(t) \| u_h \|_{W_2^{(2)}}.$$

Таким образом, для $l = 1, \dots,$

$$[N_l(t)]^{1/2} \leqslant C_7 [K_0(t|u_h)^{1/2} + K_1(t|u_h)^{1/2} + K_2(t|u_h)^{1/2}]. \quad (21.43)$$

Аналогично получаем оценку для $[N_0(t)]^{1/2}$.

Учитывая все вышесказанное, из (21.40) получим

$$K_2 (t \mid u_h) \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \left\{ K_2 (0 \mid u_h) + \int\limits_0^t \left[K_0 (t_1 \mid u_h)^{1/2} + K_1 (t_1 \mid u_h)^{1/2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + K_2 (t \mid u_h)^{1/2} + \widetilde{F} (t_1) \right] K_2 (t_1 \mid u_h)^{1/2} dt_1 \right\}. \quad (21.44)$$

Если

$$y_2 (t) = C_7 \left\{ K_2 (0 \mid u_h) + 2 \int\limits_0^t y_2 (t_1)^{1/2} \left[y_0 (t_1)^{1/2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + y_1 (t_1)^{1/2} + y_2 (t_1)^{1/2} + \widetilde{F} (t_1) \right] dt_1 \right\}, \quad (21.45)$$

то, как и выше, получим

$$K_2(t|u_h) \leqslant y_2(t). \tag{21.46}$$

Для y_2 имеем уравнение

$$y_2' = 2C_7 y_2^{1/2}\left[y_0^{1/2} + y_1^{1/2} + y_2^{1/2} + \widetilde{F}\right]. \tag{21.47}$$

Считая $y_2^{1/2} = z_2$, находим

$$z_2' = C_7\left(z_0 + z_1 + z_2 + \widetilde{F}\right). \tag{21.48}$$

Лемма доказана (с $M = \max\{1, C_2, C_3, C_7\}$) ([57]).

5. Решение обобщенной задачи Коши. Переходим к доказательству основной теоремы ([58]).

Семейство u_h в силу наших оценок имеет ограниченный интеграл от суммы квадратов всех производных второго порядка по Ω^*. Иными словами, $u_h \in L_2^{(2)}$, причем $\|u_h\|_{L_2^{(2)}} \leqslant M$, где M — постоянная, не зависящая от h. Из ограниченности $\|u_h\|_{L_2^{(2)}}$ и $\|u_h\|_{L_2}$ заключаем, что

$$\|u_h\|_{W_2^{(2)}} \leqslant M_1. \tag{21.49}$$

В силу теоремы вложения u_h и $\dfrac{\partial u_h}{\partial t}$ компактны в $W_2^{(1)}$ и L_2 соответственно на $\Omega^*(t)$, причем эта пара функций, зависящих от t, представляет собой равностепенно по h непрерывную траекторию в паре пространств $W_2^{(1)}$ и L_2.

Следовательно, из этого семейства траекторий можно выбрать подпоследовательность, равномерно по t сходящуюся к траектории u, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Переходя к пределу в неравенствах (21.25) и пользуясь теоремой о существовании обобщенных производных (см. п. 2, § 5, гл. I), получим

$$K_0(t|u) \leqslant y_0(t), \quad K_1(t|u) \leqslant y_1(t), \quad K_2(t|u) \leqslant y_2(t). \tag{21.50}$$

Семейство u_h удовлетворяет, очевидно, интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega^*} u_h L_h^* v\, d\Omega = \int\limits_{\Omega^*} v\, F_h d\Omega, \tag{21.51}$$

где v — произвольная функция переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, непрерывная с производными до второго порядка включительно и обращающаяся в нуль вне некоторой области V_v

такой, что $\overline{V}_v \subset \Omega^*$ (через L_h^* обозначен оператор, сопряженный с оператором L_h).

Переходя к пределу при $h \to 0$ по соответствующей подпоследовательности, получим

$$\int\limits_{\Omega^*} uL^*v d\Omega = \int\limits_{\Omega^*} vF d\Omega. \tag{21.52}$$

Это равенство по определению означает, что функция u является обобщенным решением уравнения (21.5).

Легко видеть, что эта функция удовлетворяет начальным условиям.

Непрерывная зависимость решения от начальных данных устанавливается также без труда.

Если $F(t)$ достаточно мало и $K_0(0|u)$ и $K_1(0|u)$ малы в свою очередь, то функции $y_0(t)$ и $y_1(t)$ будут малыми. Из неравенств (21.50) следует малость $K_0(t|u)$ и $K_1(t|u)$. Теорема доказана ([57]).

Задача Коши в 1-й постановке решена. Переходим ко 2-й постановке.

6. Постановка классической задачи Коши. Будем искать решение уравнения (21.5) с условиями (21.7), имеющее непрерывные производные второго порядка.

На коэффициенты A_{ij}, B_i, C и F, а также на начальные условия нам придется наложить теперь несколько иные условия, которые мы будем называть условиями *н*).

Условия *н*) следующие.

В области Ω:

1) коэффициенты A_{ij} непрерывны с первыми производными и удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} A_{00} \geqslant m_0 > 0, \quad |A_{ij}| \leqslant A, \quad \left|\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_h}\right| \leqslant A, \\ \left|\frac{\partial A_{ij}}{\partial t}\right| \leqslant A \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ \ldots,\ n), \end{gathered} \tag{21.53}$$

где m и A — постоянные;

2) обобщенные производные от A_{ij} удовлетворяют для некоторого $\varepsilon > 0$ неравенствам

$$\left(\int\limits_{\Omega(t)} \left(\sum \left|\frac{\partial^l A_{ij}}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right|\right)^{\lambda_l} dx_1 \ldots dx_n\right)^{1/\lambda_l} \leqslant A \tag{21.54}$$

$$(l = 2,\ \ldots,\ k_1 - 1),$$

где $\lambda_l = (n+\varepsilon)/(l-1)$ при $n \geqslant 2l-2$ и $\lambda_l = 2$ при $1 \leqslant \leqslant n < 2l-2$;

3) коэффициенты B_i непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$|B_i| \leqslant A \qquad (i=1, \ldots, n); \tag{21.55}$$

4) обобщенные производные от B_i удовлетворяют для некоторого $\varepsilon > 0$ неравенствам

$$\int\limits_{\Omega(t)} \left(\sum \left| \frac{\partial^l B_i}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^{\mu_l} dx_1 \ldots dx_n \right)^{1/\mu_l} \leqslant A \tag{21.56}$$

$$(l = 1, \ldots, k_1 - 1),$$

где $\mu_l = \frac{n+\varepsilon}{l}$ при $n \geqslant 2l$ и $\mu_l = 2$ при $1 \leqslant n < 2l$;

5) обобщенные производные от C удовлетворяют для некоторого $\varepsilon > 0$ неравенствам

$$\left(\int\limits_{\Omega(t)} \left(\sum \left| \frac{\partial^l C}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \right)^{\nu_l} dx_1 \ldots dx_n \right)^{1/\nu_l} \leqslant A \tag{21.57}$$

$$(l = 0, \ldots, k_1 - 1),$$

где $\nu_l = \frac{n+\varepsilon}{l+1}$ при $n \geqslant 2l+2$ и $\nu_l = 2$ при $1 \leqslant n < 2l+2$;

6) обобщенные производные от F удовлетворяют неравенствам

$$\left(\int\limits_{\Omega(t)} \left(\sum \left| \frac{\partial^l F}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \right)^2 dx_1 \ldots dx_n \right)^{1/2} \leqslant \widetilde{F}(t) \leqslant \widetilde{F}$$

$$(l = 0, \ldots, k_1 - 1), \tag{21.58}$$

где $\widetilde{F}$ — постоянная;

7) в $\Omega(0)$

$$u_0 \in W_2^{(k_1)}; \tag{21.59}$$

8) в $\Omega(0)$

$$u_1 \in W_2^{(k_1-1)}. \tag{21.60}$$

Если $k_1 = 2$, то условия *н*) совпадают с условиями *о*).

Мы можем теперь сформулировать основную теорему.

Теорема. *Для того чтобы задача Коши* (21.5), (21.7) *имела решение, непрерывное с производными до* *порядка* $m \geqslant 2$ *в некоторой окрестности множества* $\Omega(0)$, *достаточно, чтобы условия н) выполнялись при* $k_1 = m + 1 + \left[\frac{n}{2}\right]$.

Доказательство этой теоремы основано на применении теорем вложения и использовании тех же неравенств, которые позволили доказать теорему из п. 2. При $m = 2$ получаем решение задачи Коши во второй постановке.

Прежде чем переходить к доказательству, сделаем несколько замечаний. Подобно тому как мы поступили при доказательстве теоремы из п. 2, построим средние функции для A_{ij}, B_i, C, F, u_0 и u_1 и составим новое уравнение

$$L_h u_h = F_h, \tag{21.61}$$

решение которого будем искать при условиях

$$u_h\Big|_{t=0} = u_{0h}, \quad \frac{\partial u_h}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_{1h}, \tag{21.62}$$

и пусть, как и выше,

$$L_{1h} u_h = F_h - \sum_{i=1}^{n} B_{ih} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} - C_h u_h.$$

Одновременно с уравнением (21.61) рассмотрим всевозможные уравнения для функций

$$v_{\alpha_0 \ \alpha_n h} = \frac{\partial^l u_h}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{21.63}$$

Дифференцируя, имеем

$$L_{1h} v_{\alpha_0 \ \alpha_n h} = \frac{\partial^l F_h}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} -$$

$$- \sum_{0 < \Sigma\beta_i \leqslant l} C_{\alpha_0 \ \alpha_n}^{\beta_0 \ \beta_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^\beta A_{ijh}}{\partial t^{\beta_0} \partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \times$$

$$\times \frac{\partial^{l-\beta+2} u_h}{\partial t^{\alpha_0 - \beta_0} \partial x_1^{\alpha_1 - \beta_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n - \beta_n} \partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant \Sigma\beta_i \leqslant l} C_{\alpha_0 \ \alpha_n}^{\beta_0 \ \beta_n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^\beta B_{ih}}{\partial t^{\beta_0} \partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \times \right.$$

$$\times \frac{\partial^{l-\beta+1} u_h}{\partial t^{\alpha_0-\beta_0} \partial x_1^{\alpha_1-\beta_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n-\beta_n} \partial x_i} -$$

$$\left. - \frac{\partial^\beta C_h}{\partial t^{\beta_0} \partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \cdot \frac{\partial^{l-\beta} u_h}{\partial t^{\alpha_0-\beta_0} \partial x_1^{\alpha_1-\beta_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}} \right\} \equiv \Phi^{(l)}_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}, \tag{21.64}$$

где $C^{\beta_0 \ldots \beta_n}_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}$ — биномиальные коэффициенты.

Обозначим

$$K_\rho(t \mid w) = \int\limits_{\Omega^*(t)} \sum_{\Sigma \gamma_i = \rho} \left[\frac{\partial^\rho w}{\partial t^{\gamma_0} \partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_n^{\gamma_n}} \right]^2 dx_1 \ldots dx_n. \tag{21.65}$$

7. Лемма об оценке производных.

Лемма. *При соблюдении условий н) функции* u_h *удовлетворяют неравенствам*

$$K_\rho(t \mid u_h) \leqslant y_\rho \qquad (\rho = 1, \ldots, k_1), \tag{21.66}$$

где

$$\frac{dy_\rho^{1/2}}{dt} = M \left[y_0^{1/2} + y_1^{1/2} + \ldots + y_\rho^{1/2} + \widetilde{F}(t) \right], \tag{21.67}$$

при условиях $y_\rho|_{t=0} = M K_\rho(0 \mid u_h)$, *где* M — *некоторая положительная постоянная, не зависящая от* h, *а* $\widetilde{F}(t)$ — *функция, стоящая в правой части 6-го условия.*

Доказательство. Для $\rho = 0, 1, 2$ эта оценка установлена ранее. Переходим к доказательству леммы для остальных ρ.

Прежде всего оценим $\left\| \Phi^{(l)}_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} \right\|_{L_2}$.

Если $n \geqslant 2\beta + 2$, то $\nu_\beta = (n + \varepsilon)/(\beta + 1) > 2$ и согласно неравенству Гёльдера

$$J_C = \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} \left(\frac{\partial^\beta C_h}{\partial t^{\beta_0} \partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right)^2 \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial^{l-\beta} u_h}{\partial t^{\alpha_0-\beta_0} \partial x_1^{\alpha_1-\beta_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}} \right)^2 dx_1 \ldots dx_n \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} \left| \frac{\partial^\beta C_h}{\partial t^{\beta_0} \partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right|^{(n+\varepsilon)/(\beta+1)} dx_1 \ldots dx_n \right)^{(\beta+1)/(n+\varepsilon)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega^*(t)} \left| \frac{\partial^{l-\beta} u_h}{\partial t^{\alpha_0-\beta_0} \partial x_1^{\alpha_1-\beta_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}} \right|^{q^*} dx_1 \ldots dx_n \right)^{1/q^*} \leqslant$$

$$\leqslant A\left(\int\limits_{\Omega^*(t)}\left|\frac{\partial^{l-\beta}u_h}{\partial t^{\alpha_0-\beta_0}\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}}\right|^{q^*}dx_1\ldots dx_n\right)^{1/q^*}, \tag{21.68}$$

где $q^*=\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta+1}{n+\varepsilon}\right)^{-1}$. Так как $q^*<q=\frac{2n}{n-2\beta-2}$, то на основании теоремы вложения из п. 2, § 8, гл. I мы получим, что

$$J_C\leqslant A_1[K_0(t|u_h)^{1/2}+K_1(t|u_h)^{1/2}+\ldots+K_{l+1}(t|u_h)^{1/2}]. \tag{21.69}$$

Если $1\leqslant n<2\beta+2$, то $\nu_\beta=2$ и

$$J_C\leqslant\left(\int\limits_{\Omega^*(t)}\left|\frac{\partial^\beta C_h}{\partial t^{\beta_0}\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}\right|^2dx_1\ldots dx_n\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left\|\frac{\partial^{l-\beta}u_h}{\partial t^{\alpha_0-\beta_0}\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}}\right\|_C\leqslant A\left\|\frac{\partial^{l-\beta}u_h}{\partial t^{\alpha_0-\beta_0}\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}}\right\|_C.$$

Согласно теореме вложения из п. 1, § 1, гл. I вновь получим (21.69).

Аналогично получаются оценки

$$J_A=\left[\int\limits_{\Omega^*(t)}\left(\frac{\partial^\beta A_{ijh}}{\partial t^{\beta_0}\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}\right)^2\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial^{l-\beta+2}u_h}{\partial t^{\alpha_0-\beta_0}\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}\partial x_i\partial x_j}\right)^2dx_1\ldots dx_n\right]^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant A_2\sum_{i=0}^{l+1}K_i(t\,|\,u_h)^{1/2}, \tag{21.70}$$

$$J_B=\left[\int\limits_{\Omega^*(t)}\left(\frac{\partial^\beta B_{ih}}{\partial t^{\beta_0}\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}\right)^2\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial^{l-\beta+1}u_h}{\partial t^{\alpha_0-\beta_0}\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n-\beta_n}\partial x_i}\right)^2dx_1\ldots dx_n\right]^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant A_3\sum_{i=0}^{l+1}K_i(t\,|\,u_h)^{1/2}. \tag{21.71}$$

Собирая эти оценки вместе, получим

$$\left\| \Phi^{(l)}_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \right\|_{L_2} \leqslant A_4 \left(\sum_{i=0}^{l+1} K_i (t \mid u_h)^{1/2} + \widetilde{F}(t) \right) \qquad (21.72)$$

($A_1, \dots, A_4$ — некоторые постоянные, не зависящие от h).

Вернемся теперь к неравенству (21.22), положим в нем $w = v_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$ и просуммируем по всем производным порядка l. Мы получим

$$c_2 \sum_{\Sigma \alpha_i = l} K_1 (t \mid v_{\alpha_0 \dots \alpha_n}) \leqslant C_2 \sum_{\Sigma \alpha_i = l} K_1 (0 \mid v_{\alpha_0 \dots \alpha_n}) +$$

$$+ C_1 \int_0^t \left\{ K_1 (t_1 \mid v_{\alpha_0 \dots \alpha_n}) + K_1 (t_1 \mid v_{\alpha_0 \dots \alpha_n})^{1/2} \left\| \Phi^{(l)}_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \right\|_{L_2} \right\} dt_1.$$

$$c_2,\ C_1,\ C_2 = \mathrm{const} > 0.$$

Пользуясь оценкой для $\left\| \Phi^{(l)}_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \right\|_{L_2}$ и тем, что

$$C_3 K_{l+1} (t, u) \leqslant \sum_{\Sigma \alpha_i = l} K_1 (t \mid v_{\alpha_0 \dots \alpha_n}) \leqslant C_4 K_{l+1} (t \mid u),$$

$$C_3,\ C_4 = \mathrm{const} > 0, \qquad (21.73)$$

имеем окончательно

$$K_{l+1} (t \mid u_h) \leqslant M \Bigg[K_{l+1} (0 \mid u_h) +$$

$$+ \int_0^t K_{l+1} (t_1 \mid u_h)^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{l+1} K_i (t_1 \mid u_h)^{1/2} + \widetilde{F}(t_1) \right\} dt_1 \Bigg] \qquad (21.74)$$

$$(l = 1, \dots, k_1 - 1),$$

где M — соответствующая постоянная.

Отсюда, как и прежде, полагая

$$y_{l+1}(t) = M \left[y_{l+1}(0) + 2 \int_0^t y_{l+1}(t_1)^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{l+1} y_i(t_1)^{1/2} + \widetilde{F}(t_1) \right\} dt_1 \right],$$

можем доказать неравенства

$$K_{l+1} (t \mid u_h) \leqslant y_{l+1}(t). \qquad (21.75)$$

Для функций y_ρ, $\rho = 1, \ldots, k_1$, получаем

$$\begin{gathered}\frac{dy_\rho^{1/2}}{dt} = \left[y_0^{1/2} + y_1^{1/2} + \ldots + y_\rho^{1/2} + \widetilde{F}(t)\right], \\ y_\rho \big|_{t=0} = MK_\rho(0 \mid u_h).\end{gathered} \tag{21.76}$$

Лемма доказана ([60]).

8. Решение классической задачи Коши. Мы можем теперь доказать теорему, сформулированную в п. 6 ([59]).

Рассмотрим последовательность решений u_h усредненных уравнений с усредненными начальными условиями ([61]).

Эти функции имеют ограниченные интегралы $K_\rho(t \mid u_h)$, $\rho = 0, 1, \ldots, m+1+\left[\frac{n}{2}\right]$, а, следовательно, и ограниченные нормы в пространстве $W_2^{(\rho)}$.

Из теоремы вложения в пространство C на $\Omega^*(t)$ и оценок вида (11.15) для функций u_h и их производных до порядка m включительно следует, что эти производные образуют компактные множества в пространстве C на Ω^*.

Выбрав из множества $\{u_h\}$ последовательность, равномерно сходящуюся с производными до порядка m включительно, и переходя к пределу в основном уравнении (21.61) по этой последовательности, получим, что предельная функция u удовлетворяет уравнению $Lu = F$ и обладает непрерывными производными до порядка m включительно.

Полезно заметить, что неравенства (21.75), установленные нами для u_h, остаются верными и для решения u. Это следует из теоремы о существовании обобщенных производных (см. п. 2, § 5) ([62]).

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Теорема справедлива и для неограниченных областей Ω. При этом достаточно учесть, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой шар C, что $\int\limits_{\Omega - C} |\varphi(\vec{P})|^p \, dv_{\vec{P}} < \varepsilon$, и воспользоваться доказанным утверждением для ограниченных областей.

2. В ряде задач возникает необходимость использования операторов усреднения более сложной структуры. Различные типы таких операторов были введены и изучены в работах [268, 110, 27, 264, 113, 176, 246].

3. Теорема справедлива и для неограниченных областей. В этом случае всюду плотное множество образуют функции вида $P_r \chi_k$, где P_r — многочлен с рациональными коэффициентами, а χ_k — характеристическая функция шара радиуса k с центром в начале координат ($k = 1, 2, \ldots$).

4. В [46] показано, что любая пара ограниченных областей является суммируемой. Поэтому приведенная теорема справедлива для любой пары ограниченных областей и в силу локального характера обобщенной производной она верна и для пары любых (в том числе и неограниченных) областей. Отметим, что существуют пары неограниченных областей, не являющихся суммируемыми.

5. При $p = 1$ теорема справедлива при $\lambda \leqslant 0$. Рассуждения при этом упрощаются: неравенства (6.3) и (6.2) устанавливаются непосредственно без применения неравенства Гёльдера.

6. В предположениях теоремы 2 функция $U(\vec{Q})$ определена, вообще говоря, не для любого $\vec{Q}$. Из проведенного доказательства видно, что $U(Q^{(s)})$ можно определить как предел в L_{q^*} на E_s интеграла

$$\int\limits_{\varepsilon < r < R} r^{-\lambda} f(\vec{P}) \, dv_{\vec{P}} \text{ при } \varepsilon \to +0.$$

Если $p = 1$, $0 < \lambda < n$, $s > \lambda$, то функция $U(Q^{(s)})$ суммируема (по любой конечной области E_s в гиперплоскости s измерений) со степенью $q^* < q = s/\lambda$. Доказательство проводится с упрощениями по той же схеме.

7. Эта теорема для случая $s = n$ в более сильной формулировке (для предельного показателя $q^* = q$) при $n = 1$ была доказана Харди и Литтлвудом (см. [241]), при $n > 1$ — С. Л. Соболевым [203]. При $s < n$ С. Л. Соболев доказал эту теорему при $p = 2$, $q^* = 2$, В. И. Кондрашов [101] при $q^* < q$, В. П. Ильин [79] при $q^* = q$. Подробные доказательства этих утверждений можно найти в книге [19].

Д. Адамс [252, 253] установил, что если $1 < p < q < \infty$, $\lambda > n/p'$, то для того чтобы во всем пространстве выполнялось неравенство

$$\left(\int |U(\vec{Q})|^q d\mu\right)^{1/q} \leqslant C_1 \|f\|_{L_p} \tag{1}$$

при некоторой постоянной C_1, не зависящей от f, необходимо и достаточно, чтобы мера μ удовлетворяла условию

$$\sup_{\rho>0} \sup_{\vec{P}} \rho^{\frac{n}{p'}-\lambda} \left(\mu\left(B(\vec{P}, \rho)\right)\right)^{1/q} < \infty, \tag{2}$$

где $B(\vec{P}, \rho)$ — открытый шар с центром в точке $\vec{P}$ радиуса ρ.

8. Ю. Г. Решетняк [180] и В. И. Буренков [29] показали, что равенство (7.12) может быть записано в виде

$$\varphi(\vec{P}) = \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{1}{\varkappa} \int_C \frac{\partial^\alpha \left((x_1 - y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n - y_n)^{\alpha_n} v(\vec{Q})\right)}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} \times$$

$$\times \varphi(\vec{Q})\, dv_{\vec{Q}} + \int_\Omega \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma\alpha_i = l} w_{\alpha_1 \ \alpha_n}(\vec{Q}, \vec{P}) \frac{\partial^l \varphi(\vec{Q})}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}\, dv_{\vec{Q}}. \tag{3}$$

Приведем, следуя [29], вывод этой формулы непосредственно из формулы Тейлора

$$\varphi(\vec{P}) = \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{\partial^\alpha \varphi(\vec{Q}')}{\partial y_1'^{\alpha_1} \ldots \partial y_n'^{\alpha_n}} (x_1 - y_1')^{\alpha_1} \ldots (x_n - y_n')^{\alpha_n} +$$

$$+ l \sum_{\Sigma\alpha_i = l} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \int_0^1 (1-t)^{l-1} \frac{\partial^\alpha \varphi(\vec{Q}' + t(\vec{P} - \vec{Q}'))}{\partial y_1'^{\alpha_1} \ldots \partial y_n'^{\alpha_n}} \times$$

$$\times (x_1 - y_1')^{\alpha_1} \ldots (x_n - y_n')^{\alpha_n}\, dt,$$

где $\vec{Q}' = (y_1', \ldots, y_n') \in C$. Умножим обе части этого равенства на $v(\vec{Q}')$ и проинтегрируем по $\vec{Q}'$ по всему пространству, считая, что все функции $\dfrac{\partial^l \varphi}{\partial y_1'^{\alpha_1} \ldots \partial y_n'^{\alpha_n}}$ доопределены нулем вне Ω.

Тогда

$$\varphi(\vec{P}) = \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l-1} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{1}{\varkappa} \int_C \frac{\partial^\alpha \varphi(\vec{Q}')}{\partial y_1'^{\alpha_1} \ldots \partial y_n'^{\alpha_n}} \times$$

$$\times (x_1 - y_1')^{\alpha_1} \ldots (x_n - y_n')^{\alpha_n} v(\vec{Q}')\, dv_{\vec{Q}'} +$$

$$+ l \sum_{\Sigma\alpha_i = l} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{1}{\varkappa} \int \left(\int_0^1 (1-t)^{l-1} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^l \varphi(\vec{Q}' + t(\vec{P} - \vec{Q}'))}{\partial y_1'^{\alpha_1} \ldots \partial y_n'^{\alpha_n}} (x_1 - y_1')^{\alpha_1} \ldots (x_n - y_n')^{\alpha_n} \, dt \right) \times$$

$$\times v(\vec{Q}') \, dv_{\vec{Q}'}. \quad (4)$$

Первое слагаемое в правой части (4) после интегрирования по частям переходит в первое слагаемое формулы (3). Обозначим интегралы, стоящие под знаком второй суммы в (4), через $J_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$. Меняя порядок интегрирования и заменяя $\vec{Q}' + t(\vec{P} - \vec{Q}')$ на $\vec{Q}$ (при этом $x_i - y_i'$ заменится на $(1-t)^{-1}(x_i - y_i)$, а $dv_{\vec{Q}'}$ — на $(1-t)^{-n} dv_{\vec{Q}}$), получим, снова меняя порядок интегрирования, что

$$J_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \int \frac{\partial^l \varphi(\vec{Q})}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} (x_1 - y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n - y_n)^{\alpha_n} \times$$

$$\times \left(\int_0^1 v\left(\vec{P} + \frac{\vec{Q} - \vec{P}}{1-t}\right) \frac{dt}{(1-t)^{n+1}} \right) dv_{\vec{Q}}.$$

Выполняя замену переменных $\frac{r}{1-t} = r_1$, где $r = |\vec{P} - \vec{Q}|$, находим, полагая, как и прежде, $\vec{l} = \frac{\vec{Q} - \vec{P}}{r}$, что

$$J_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \int \frac{\partial^l \varphi(\vec{Q})}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} \frac{(x_1 - y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n - y_n)^{\alpha_n}}{r^n} \times$$

$$\times \left(\int_r^\infty v(\vec{P} + r_1 \vec{l}) \, r_1^{n-1} dr_1 \right) dv_{\vec{Q}}.$$

Таким образом, приходим к формуле (3) с

$$w_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\vec{Q}, \vec{P}) = \frac{l}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{(x_1 - y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n - y_n)^{\alpha_n}}{r^l} \times$$

$$\times \frac{1}{\varkappa} \int_r^\infty v(\vec{P} + r_1 \vec{l}) r_1^{n-1} dr_1 \quad (5)$$

(нетрудно убедиться, что функция $w_{\alpha_1 \ \alpha_n}$ в (7.12) имеет именно такой вид).

Другие выводы интегрального представления (7.12) можно найти в книгах [190; 89, 2-е изд.].

9. Отметим, что в равенствах (7.12) и (3) можно считать, что v — любая функция, имеющая непрерывные производные до порядка l включительно в $\overline{C}$, обращающаяся в нуль вместе с производными до порядка $l-1$ включительно на границе шара C и такая, что $\varkappa = \int\limits_C v(\vec{Q})\, dv_{\vec{Q}} \neq 0$.

В равенстве (4) за v можно взять любую суммируемую в C функцию, для которой $\varkappa \neq 0$.

Из (4) для функций φ, имеющих в области Ω непрерывные производные до порядка l включительно и обращающихся в нуль вне некоторых ограниченных областей V_φ таких, что $\overline{V}_\varphi \subset \Omega$, следует более простое интегральное представление

$$\varphi(\vec{P}) = \frac{l}{\sigma_n} \int\limits_\Omega \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma\alpha_i = l} \frac{1}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \times \\ \times \frac{(x_1-y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n-y_n)^{\alpha_n}}{r^l} \frac{\partial^l \varphi(\vec{Q})}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}\, dv_{\vec{Q}}, \qquad (6)$$

где σ_n — площадь единичной $(n-1)$-мерной сферы.

Для получения (6) будем считать, что для фиксированной точки $\vec{P} \in \Omega$ в (4) C — шар $|\vec{P}-\vec{Q}| < R$, содержащий $\overline{V}_\varphi$, и заменим в (4) v на функцию v_k такую, что $v_k(\vec{Q}) = 1$ при $R - \frac{1}{k} < |\vec{P} - \vec{Q}| < R$ и $v_k(\vec{Q}) = 0$ для остальных $\vec{Q}$. Переходя к пределу в равенстве (4) при $k \to \infty$, получим (6), так как в (5)

$$\frac{1}{\varkappa_k} \int\limits_r^\infty v_k(\vec{P} + r_1 \vec{l})\, r_1^{n-1} dr_1 \to \frac{1}{\sigma_n} \text{ при } k \to \infty.$$

При $l = 1$, $n = 1$, $\Omega = (a, b)$ равенство (6) сводится к очевидному равенству $\varphi(x) = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \operatorname{sign}(x-y)\, \varphi'(y)\, dy$. Прямой вывод представления (6) можно найти в книгах [150, 219, 135].

В книге [135] получено еще одно представление, справедливое для произвольной ограниченной области Ω и более широкого класса функций $W_1^{(l)} \cap \overset{0}{W}{}_1^{(k)}$ при $2k \geqslant l$, где через $\overset{0}{W}{}_1^{(k)}$ обозначено замыкание по норме пространства $W_1^{(k)}$ множества C_0^∞ всех бесконечно дифференцируемых в Ω функций ψ, обращающихся в нуль в окрестности границы и в окрестности бесконечности, если область Ω неограничена. Из этого интегрального представления следует, что теоремы вложения из § 8 остаются справедливыми для любой ограниченной области Ω, если функции из $W_p^{(l)}$ дополнительно принадлежат пространству $\overset{0}{W}{}_\varphi^{(k)}$, причем $2k \geqslant l$. При $2k < l$ этот факт уже не имеет места.

10. Ю. Г. Решетняк (см. [65]) и О. В. Бесов [16] получили представление вида (7.12) для более широкого класса областей, связанных с так называемым условием «гибкого конуса».

11. Построены также интегральные представления функций φ через несмешанные производные различных порядков функции φ по разным переменным. Приведем одно из них, принадлежащее В. П. Ильину [83] и иллюстрирующее способ вывода подобных представлений, основанный на использовании усреднений. Пусть функция φ — непрерывная в области Ω вместе с производными $\dfrac{\partial^{l_i}\varphi}{\partial x_i^{l_i}}$ (l_i — натуральные числа, $i = 1, \ldots, n$), $K(\vec{P})$, $\vec{P} = (x_1, \ldots, x_n)$, бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям:

а) $K = 0$ вне $\Pi = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, где $a_i b_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$,

б) $\int K(\vec{P})\, dv_{\vec{P}} = 1$,

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i^s K(\vec{P})\, dx_i = 0$ $(s = 1, \ldots, l_i - 1)$ при всех $\vec{P}^{(i)} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ и при каждом $i = 1, \ldots, n$.

Тогда функция $N_i(\vec{P}) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_i K(\vec{P}))$ удовлетворяет соотношениям

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i^s N_i(\vec{P})\, dx_i = 0, \qquad s = 0, 1, \ldots, l_i - 1,$$

при всех $\vec{P}^{(i)}$, а функция

$$L_i(\vec{P}) = \frac{1}{(l_i - 1)!} \int\limits_{-\infty}^{x_i} N_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)(x_i - t)^{l_i - 1} dt$$

бесконечно дифференцируема и удовлетворяет условиям $L_i = 0$ вне Π, $\dfrac{\partial^{l_i} L_i}{\partial x_i^{l_i}} = N_i$.

При $h > 0$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i = \frac{1}{l_i}$, $|\lambda| = \sum_1^n \lambda_i$, $\frac{\vec{P}}{h^\lambda} = \left(\frac{x_1}{h^{\lambda_1}}, \ldots, \frac{x_n}{h^{\lambda_n}}\right)$ рассмотрим анизотропное усреднение функции φ:

$$\varphi_{h\lambda}(\vec{P}) = \frac{1}{h^{|\lambda|}} \int K\left(\frac{\vec{P}_1 - \vec{P}}{h^\lambda}\right) \varphi(\vec{P}_1)\, dv_{\vec{P}_1}.$$

Равенство

$$\varphi_{\varepsilon\lambda}(\vec{P}) = \varphi_{h\lambda}(\vec{P}) - \int_\varepsilon^h \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{t\lambda}(\vec{P})\, dt \tag{7}$$

справедливо при любых ε, h таких, что $0 < \varepsilon < h$. Учитывая, что $\varphi_{\varepsilon\lambda}(\vec{P}) \to \varphi(\vec{P})$ при $\varepsilon \to +0$, предельным переходом в (7) при $\varepsilon \to +0$ получаем интегральное представление функции φ в точке $\vec{P}$. В правой части (7) используются значения функции φ лишь в точках $\vec{P} + \vec{Q}$, где $t^\lambda \vec{Q} \in \Pi$, $0 < t \leqslant h$, т. е. в точках некоторого «рога»

$$V_{\vec{P}} = \left\{\vec{P} + \vec{Q}:\ \vec{Q} \in \bigcup_{0<t\leqslant h} \prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{t^{\lambda_i}}, \frac{b_i}{t^{\lambda_i}}\right)\right\}$$

с вершиной в точке $\vec{P}$. Параметры a_i, b_i, h рога следует выбирать так, чтобы $V_{\vec{P}} \subset \Omega$ для любой точки $\vec{P} \in \Omega$. Этим на Ω накладывается определенное условие геометрического характера.

Пусть $\vec{Q} = (y_1, \ldots, y_n)$. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-|\lambda|} K\left(\frac{\vec{Q}}{t^\lambda}\right)\right) = -t^{-|\lambda|} \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial^{l_i}}{\partial y_i^{l_i}}\left(L_i\left(\frac{\vec{Q}}{t^\lambda}\right)\right),$$

после интегрирования по частям в (7) приходим к интегральному представлению

$$\varphi(\vec{P}) = \varphi_{h\lambda}(\vec{P}) + \int_0^h \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i t^{-|\lambda|} \int L_i\left(\frac{\vec{Q}}{t^\lambda}\right) \frac{\partial^{l_i} \varphi(\vec{Q})}{\partial y_i^{l_i}}\, dv_{\vec{Q}}\right) dt \tag{8}$$

для любых $\vec{P} \in \Omega$.

12. Другие интегральные представления функций были получены и использованы в работах [256, 17, 323, 180, 233, 171]. Подробное изложение вопроса об интегральных представлениях функций можно найти в книгах [19, 65].

13. При $p = 1$ теорема справедлива для $l \geqslant n$. Это следует из соответствующей оценки для интегралов типа потенциала (см. ([5])).

14. При $n > lp$ теорема верна и для предельного показателя $q^* = q$. Для ее доказательства при $p > 1$ достаточно привлечь соответствующие оценки для интегралов типа потенциала (см. ([7])). При $p = 1$, $l < n$ доказательство для случая $q^* = q$ дано Гальярдо [280]. Он предложил другой подход к доказательству теорем вложения (при $p \geqslant 1$, $q^* \leqslant q$), не использующий интегральных представлений и свойств интегралов типа потенциала.

15. При $n = lp$, $p > 1$, теорема гарантирует вложение $W_p^{(l)}$ в L_{q^*} при любом $q^* < \infty$ Этот результат был уточнен в работах [250, 179, 331], где было доказано, что в этом случае для любых функций $\varphi \in W_p^{(l)}$

$$\int\limits_{\Omega} \exp\left(C_2 \left(\frac{|\varphi(\vec{Q})|}{\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}} \right)^{p'} \right) dv_{\vec{Q}} < \infty, \tag{9}$$

где C_2 — некоторая положительная постоянная, не зависящая от φ (показатель p' нельзя заменить на больший). Случай неограниченных областей рассмотрен в [269]. В статье [307] при $l = 1$, $p = n \geqslant 2$ для функций $\varphi \in \overset{0}{W}{}_p^{(1)}$ в произвольной ограниченной области Ω получено точное значение постоянной C_2 в (9).

16. Если $s < n$, то значение функции $\tilde{\varphi}$ на сечении Ω гиперплоскостью s измерений называют следом функции φ па этом сечении. По поводу других определений следа см. книги [156, 219, 19].

17. Теорема вложения пространства $W_p^{(l)}$ в L_{q^*} на сечениях гиперплоскостями s измерений доказана в предположении, что $s > n - lp$. При $s \leqslant n - lp$ след в указанном в (16) смысле для отдельно взятой гиперплоскости, вообще говоря, не существует.

Однако можно охарактеризовать поведение функции φ на таких сечениях, если привлечь к рассмотрению пространства со смешанной нормой, определяемой равенством

$$\|\varphi\|_{L(p_1, \ldots, p_n)} = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x_1, x_2, \ldots \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \ldots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{p_3/p_2} \ldots \right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \Bigg)^{1/p_n},$$
$$1 \leqslant p_i < \infty, \quad i = 1, \ldots, n$$

(считаем, что вне области Ω функция φ доопределена нулем). Свойства пространств со смешанной нормой были подробно изучены в [262, 19].

При $1 \leqslant s < n - lp$ и $q^* \leqslant \dfrac{p(n-s)}{n-s-lp}$ при тех же предположениях относительно области Ω, что и в теореме из п. 2, § 8, справедливо неравенство

$$\| \varphi \|_{L(\underbrace{p, \ldots, p}_{s}, \underbrace{q^*, \ldots, q^*}_{n-s})} \leqslant C_4 \| \varphi \|_{W_p^{(l)}}, \tag{10}$$

которое характеризует поведение нормы

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} | \varphi (x_1, \ldots, x_n) |^p \, dx_1 \ldots dx_s \right)^{1/p}$$

как функции от $x_{s+1}, \ldots, x_n$. Неравенство (10) было сформулировано в качестве гипотезы в докладе С Л. Соболева и С. М. Никольского [214]; оно является частным случаем неравенства

$$\| \varphi \|_{L(q_1, \ldots, q_n)} \leqslant C_5 \| \varphi \|_{W_p^{(l)}}, \tag{11}$$

где $1 < p \leqslant q_1, \ldots, q_n < \infty$ и $l - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_k} \right) \geqslant 0$.

Впервые неравенства, аналогичные (10)—(11), были доказаны С. М. Никольским [154] для введенных им пространств $H_p^{(l)}$. Для пространств $W_p^{(l)}$ эти неравенства были установлены в [68].

18. Говорят, что область Ω удовлетворяет условию конуса, если каждой ее точки можно коснуться вершиной лежащего в Ω конуса с фиксированной высотой и углом раствора (по-видимому, впервые это условие рассматривалось в [197]). В [53] показано, что класс ограниченных областей, удовлетворяющих условию конуса, совпадает с классом областей, представимых в виде суммы конечного числа областей, каждая из которых является звездной относительно своего шара.

19. Из результатов Ю. Г. Решетняка и О. В. Бесова (см. ([10])) следует, что приведенные в § 8 теоремы вложения справедливы для более широкого класса областей, удовлетворяющих условию «гибкого» конуса». Отметим, что условие конуса и более слабое условие «гибкого» конуса на область Ω не являются необходимыми для справедливости теорем вложения (соответствующие примеры можно найти в книге [135]).

20. В. Г. Мазья получил [131—135] необходимые и достаточные условия справедливости теорем вложения в терминах изопериметрических или емкостных характеристик области Ω, а также достаточные условия геометрического характера. Приведем, следуя [135], один из результатов такого рода. Пусть Ω — открытое множество, μ — мера в Ω. Тогда для всех $\varphi \in C_0^\infty$ в Ω справедливо неравенство

$$\left(\int_{\Omega} | \varphi |^q d\mu \right)^{1/q} \leqslant C_6 \int_{\Omega} | \nabla \varphi (\vec{Q}) | \, dv_{\vec{Q}}, \tag{12}$$

если

$$C_6 = \sup_{\{g\}} \left(\mu (g)^{1/q} / \sigma (\partial g) \right) < \infty, \tag{13}$$

где $q \geqslant 1$, а $\{g\}$ — совокупность ограниченных открытых множеств

g таких, что $\bar{g} \subset \Omega$ и граница ∂g является бесконечно дифференцируемым многообразием, $\sigma(\partial g)$ — площадь поверхности ∂g. Постоянную C_6 нельзя заменить на меньшую.

21. В [131, 132] с помощью понятия емкости и изопериметрических неравенств получены теоремы вложения для областей, удовлетворяющих условию вырожденного конуса, определяемого, как в (18), заменой конуса телом вида $\{r_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant \alpha_0^2 r_1^{2\lambda},\ 0 \leqslant \leqslant x_1 \leqslant a\}$, где $\lambda > 1$. Подобные теоремы с помощью метода интегральных представлений независимо были получены в [52]. При этом соотношение между l, p, n в теореме вложения в C и показатель q в теореме вложения в L_q зависят от λ.

22. Обозначим через $\overline{C}$ пространство равномерно непрерывных ограниченных в области Ω функций с той же нормой, что и в пространстве C. В предположениях теоремы вложения из п. 1, § 8 справедливо более сильное утверждение: если Ω — ограниченная область, звездная относительно шара, то для любой функции $\varphi \in \in W_p^{(l)}$ функция $\tilde{\varphi} \in \overline{C}$. Отметим, что если Ω есть объединение конечного числа областей, звездных относительно шара, то это утверждение не имеет места.

23. Для нормировки пространств $W_p^{(l)}$ чаще всего употребляется норма $\|\varphi\|^{(0)}_{W_p^{(l)}}$. Широко используется также норма

$$\|\varphi\|^*_{W_p^{(l)}} = \sum_{\Sigma\alpha_i \leqslant l} \left\| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_p},$$

которая для рассматриваемых в настоящей книге областей эквивалентна норме $\|\varphi\|^{(0)}_{W_p^{(l)}}$ (доказательство эквивалентности этих норм для более широкого класса областей — ограниченных областей с непрерывной границей — приведено, например, в книгах [309, 296]; для произвольных областей эти нормы не эквивалентны — соответствующие примеры можно найти в книге [135]. В ряде случаев используется норма

$$\|\varphi\|_{W_p^{l,\ldots,l}} = \|\varphi\|_{L_p} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_i^l} \right\|_{L_p}.$$

Для областей, являющихся объединением конечного числа ограниченных областей, звездных относительно шара, эта норма при $1 < p < \infty$ эквивалентна норме $\|\varphi\|^*_{W_p^{(l)}}$ (при $p = 1$ и $p = \infty$ эквивалентность не имеет места даже для куба). Доказательство этого утверждения и соответствующие примеры можно найти в книгах [19, 135].

24. Если определить для неограниченной области Ω пространство $W_p^{(l)}$ как пространство функций φ, для которых конечна норма $\|\varphi\|^{(0)}_{W_p^l}$ из п. 3, § 10, то для таких пространств теоремы вложения

из § 8 при тех же предположениях относительно параметров справедливы (см., например, [156, 19]) и для неограниченных областей, удовлетворяющих условию конуса (в теореме из п. 2, § 8 нужно дополнительно считать, что $q^* \geqslant p$).

25. В ряде случаев найдены точные (наименьшие возможные) постоянные в неравенствах типа (8.1), (8.2). В случае всего пространства для функций $\varphi \in C_0^\infty$ справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_{L_{np/(n-p)}} \leqslant \frac{1}{\pi^{1/2} n^{1/p}} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{(p-1)/p} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(n-\frac{n}{p}+1\right)}\right]^{1/n} \times \|\nabla\varphi\|_{L_p}$$

($p = 1$ — см. [131, 274], $p > 1$ — см. [258, 330]).

Для выпуклых областей Ω достаточно малого диаметра d ($d < d_0$, где d_0 определяется параметрами l, n и p) доказано [32], что при $l > n/p$

$$\|\varphi\|_C \leqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{-1/p} \|\varphi\|^*_{W_p^{(l)}},$$

а при $l < n/p$, $1 \leqslant q^* < q = np/(n-lp)$

$$\|\varphi\|_{L_{q^*}} \leqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{\frac{1}{q^*}-\frac{1}{p}} \|\varphi\|^*_{W_p^{(l)}}$$

для любых $\varphi \in W_p^{(l)}$ (норма $\|\varphi\|^*_{W_p^{(l)}}$ определяется в ([20])).

26. В случае всего пространства (см. ([24])) справедливо неравенство

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L_{q^*}^{(m)}} \leqslant M\left(\|\varphi\|_{L_p} + \|\varphi\|_{L_p^{(l)}}\right), \tag{14}$$

аналогичное (10.7), где постоянная M не зависит от $\varphi \in W_p^{(l)}$. Применяя его для функций $\varphi(\varepsilon^{1/p}\vec{P})$, где $\varepsilon > 0$, получим неравенство с произвольным параметром

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L_{q^*}^{(m)}} \leqslant M\left(\varepsilon^{-(1-\nu)}\|\varphi\|_{L_p} + \varepsilon^{\nu}\|\varphi\|_{L_p^{(l)}}\right), \tag{15}$$

где $\nu = \frac{1}{l}\left(l - m - \frac{n}{p} + \frac{s}{q^*}\right)$. Минимизируя правую часть этого неравенства по $\varepsilon > 0$, получим мультипликативное неравенство

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L_{q^*}^{(m)}} \leqslant \frac{M}{\nu^{\nu}(1-\nu)^{1-\nu}} \|\varphi\|_{L_p}^{\nu} \|\varphi\|_{L_p^{(l)}}^{1-\nu}. \tag{16}$$

Так как $\left(\frac{x}{\nu}\right)^{\nu}\left(\frac{y}{1-\nu}\right)^{1-\nu} \leqslant x+y,$ то из неравенства (16) следует неравенство (14).

В случае ограниченных областей Ω, являющихся объединением конечного числа областей, звездных относительно шара, неравенство (15) также справедливо, но не для любых $\varepsilon>0$, а для $0<\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где ε_0 зависит от n, p, l и Ω. Неравенство (16) для функций из $W_p^{(l)}$ в Ω не имеет места, но справедлива следующая его модификация:

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L_{q^*}^{(m)}} \leqslant M_1 \|\varphi\|_{L_p}^{\nu}\left(\|\varphi\|_{L_p}+\|\varphi\|_{L_p^{(l)}}\right)^{1-\nu}. \qquad (17)$$

Впервые неравенства типа (17) были получены В. П. Ильиным [78] и Эрлингом [272]. Другие неравенства такого вида доказаны Гальярдо [281], Ниренбергом [312], В. А. Солонниковым [217] и др.

27. Пусть $n \geqslant lp$, $n-1 \geqslant s>n-lp$. Тогда в силу теоремы вложения из п. 2, § 8 для случая всего пространства (см. ([24])) для любой функции $\varphi \in W_p^{(l)}$ существует след (см. ([16])) на гиперплоскости s измерений, принадлежащий L_p.

Задача о построении функций во всем пространстве по заданному следу была поставлена С. М. Никольским, решившим ее в шкале введенных им пространств $H_p^{(l)}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty,$ l — любое положительное число), состоящих из функций, принадлежащих L_p вместе со всеми производными порядков, меньших l, старшие из которых удовлетворяют в L_p условию Гёльдера с показателем $l-[l]$ при нецелом l или условию Зигмунда при целом l (см. [156]). Необходимые и достаточные условия на след функции из пространства $H_p^{(l)}$ заключаются в принадлежности следа пространству $H_p^{\left(l-\frac{n-s}{p}\right)}$ на гиперплоскости s измерений (предполагается, что $l>(n-s)/p$).

При натуральном l и $\varepsilon>0$ имеем $H_p^{(l+\varepsilon)} \subset W_p^{(l)} \subset H_p^{(l)}$. Отсюда и из результатов С. М. Никольского вытекают необходимые условия на след функции $f \in W_p^{(l)}$, а также достаточные условия, близкие к необходимым, на функцию φ на гиперплоскости для ее продолжения во все пространство как функции из $W_p^{(l)}$.

Точная характеристика следа функции из пространства $W_p^{(l)}$ при $l=1$, $s=n-1$ получена для $p=2$ независимо Аронштайном [255], В. М. Бабичем и Л. Н. Слободецким [7], Фройдом и Краликом [277], а затем для $p \geqslant 1$ Гальярдо [279]. Эти результаты распространены Л. Н. Слободецким [188, 189] на случай $s \leqslant n-1$, $p=2$, $l>(n-s)/2$ и $s=n-1$, $p>1, l>\frac{n-1}{p}$. В случае $p>1$, $p \neq 2$, $l>(n-s)/2$ соответствующий завершающий результат принадлежит О. В. Бесову [12], получившему точную характеристику следов функций из $W_p^{(l)}$ в терминах введенных им пространств $B_p^{(l)}$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$, l — любое положительное число): для того чтобы при $1 < p < \infty$, $1 \leqslant s < n$, $l > (n-s)/p$ заданная на гиперплоскости s измерений функция φ являлась следом некоторой функции из $W_p^{(l)}$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \in B_p^{\left(l-\frac{n-s}{p}\right)}$ на этой гиперплоскости. Несколько позже этот результат был получен независимо В. А. Солонниковым [216].

Приведем определение пространств $B_p^{(l)}$ (при нецелых $l > 0$ оно совпадает с определениями Ароншайна, Гальярдо, Л. Н. Слободецкого пространств $W_p^{(l)}$): функция φ, заданная во всем пространстве, принадлежит $B_p^{(l)}$, если при нецелых l конечна норма

$$\|\varphi\|_{B_p^{(l)}} = \|\varphi\|_{L_p} + \sum_{\Sigma\alpha_i=[l]} \left\{ \int\int \left| \frac{\partial^{[l]}\varphi(\vec{P})}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} - \frac{\partial^{[l]}\varphi(\vec{Q})}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p \frac{dv_{\vec{P}}\,dv_{\vec{Q}}}{|\vec{P}-\vec{Q}|^{n+(l-[l])p}} \right\}^{1/p},$$

а при целых l конечна норма

$$\|\varphi\|_{B_p^{(l)}} = \|\varphi\|_{L_p} + \sum_{\Sigma\alpha_i=l-1} \left\{ \int\int \left| \frac{\partial^{l-1}\varphi(\vec{P})}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} - 2\frac{\partial^{l-1}\varphi\left(\frac{\vec{P}+\vec{Q}}{2}\right)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} + \frac{\partial^{l-1}\varphi(\vec{Q})}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p \frac{dv_{\vec{P}}\,dv_{\vec{Q}}}{|\vec{P}-\vec{Q}|^{n+p}} \right\}^{1/p}.$$

Свойства пространств $H_p^{(l)}$, $B_p^{(l)}$ подробно изучены в книгах [156, 19].

Аналогичные результаты справедливы и для ограниченной области Ω, являющейся суммой конечного числа областей, звездных относительно шара, граница которой является простой в смысле п. 2, § 10. Для того чтобы функция φ, заданная на границе области Ω, состоящей из многообразий S_s размерности s ($s=0, 1, \dots, n-1$), была следом некоторой функции, принадлежащей $W_p^{(l)}$ в Ω, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \in B_p^{\left(l-\frac{n-s}{p}\right)}$ на S_s ($s=0, 1, \dots, n-1$). Определение пространств B_p^l на многообразиях и доказательство этого утверждения см. в [19].

28. В предельном случае $l=(n-s)/p$, $p=1$, описание следов функций из пространств W_1^{n-s} на гиперплоскости s измерений дано Гальярдо [281]. В работах [31, 319, 70] исследованы вопро-

сы, связанные с несуществованием в этом случае линейного оператора продолжения с гиперплоскости.

29. В теореме из п. 5, § 11 для предельного показателя $q^* = \frac{sp}{n - lp}$ полная непрерывность оператора вложения не имеет места. Соответствующие примеры были построены в [6]. В книге [254] приведены достаточные условия, обеспечивающие полную непрерывность соответствующего оператора вложения в случае неограниченных областей, а в книге [135] даны для ограниченных областей Ω, удовлетворяющих условию конуса, необходимые и достаточные условия на меру μ, при которых оператор вложения $W_p^{(l)}$ в пространство $L_{q,\mu}$ $\left(\|\varphi\|_{L_{q,\mu}} = \left(\int\limits_\Omega |\varphi|^q \, d\mu\right)^{1/q}\right)$ вполне непрерывен.

30. Построена теория функциональных пространств, состоящих из функций, имеющих в определенном смысле «гладкость нецелого порядка l». Среди таких пространств наиболее хорошо изученными являются пространства Никольского — Бесова $B_{p,\theta}^{(l)}$ $\left(B_{p,\infty}^{(l)} = H_p^{(l)},\ B_{p,p}^{(l)} = B_p^{(l)}\right.$ (см. ([27])) и пространства Лизоркина — Трибеля $F_{p,\theta}^{(l)}$ $\left(\text{при } l \text{ натуральном } F_{p,2}^{(l)} = W_p^{(l)}\right)$. Подробное изложение результатов, относящихся к этим пространствам, можно найти в книгах [156, 19, 219, 228, 229].

При $p = \theta = 2$ эти пространства совпадают и эквивалентной нормой в этих пространствах является норма

$$\left\|(1 + |\xi|^2)^{l/2}\, \widehat{\varphi}(\xi)\right\|_{L_2}, \tag{18}$$

где $\widehat{\varphi}$ — преобразование Фурье функции φ. Пространства с нормой (18) впервые рассматривались Л. Н. Слободецким [188].

Пространства с нецелым l тесно связаны с общей теорией интерполяции пространств (см. [106, 127, 107, 228, 9] и др.).

Дальнейшие обобщения пространств $W_p^{(l)}$ связаны с изучением пространств, в которых дифференциальные свойства характеризуются некоторой функцией гладкости (см. [73, 242, 45, 230, 61, 87, 88, 96, 62, 151], обзор [125] и др.).

31. В связи с различными задачами теории уравнений с частными производными и математического анализа возникла потребность в построении теории вложения для различных обобщений рассматриваемых в настоящей книге пространств. Подробно изучены анизотропные пространства типа $W_p^{(l)}$ с нормой, определяемой равенством

$$\|f\|_{W^{l_1,\ldots,l_n}_{p_0,p_1,\ldots,p_n}} = \|f\|_{L_{p_0}} + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial^{l_i} f}{\partial x_l^{l_i}}\right\|_{L_{p_i}}$$

(вместо L_{p_i} рассматривались также пространства со смешанной нормой $L_{(p_{i1},\ldots,p_{in})}$ — см. ([17])).

Теоремы вложения, теоремы о следах и теоремы продолжения для анизотропных пространств дифференцируемых функций были впервые получены С. М. Никольским [152] (для пространств $H_p^{l_1,\ldots,l_n}$). Изучение анизотропных пространств $W_p^{l_1,\ldots,l_n}$ $(p_0 = p_1 = \ldots = p_n = p)$ было начато Л. Н. Слободецким [188] и развивалось в работах различных авторов (см. [80, 123, 17, 217, 93, 235, 234, 16, 108] и др.).

При формулировке соответствующих результатов на область Ω необходимо наложить так называемое «условие рога» (см. ([11])), заменяющее в случае анизотропных пространств условие конуса (см ([18])). Параметры рога выбираются в зависимости от параметров $l_1, \ldots, l_n, p_1, \ldots, p_n$.

Подробное изложение результатов можно найти в книгах [156, 19, 234].

32. С. М. Никольский [157] ввел пространства $S_p^l W$ с доминирующей смешанной производной, в которых норма для функций, определенных в области Ω, задается равенством

$$\|f\|_{S_p^l W} = \sum_{\alpha_i = \theta_i l_i} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_p},$$

где θ_i принимает только два значения 0 или 1. Теория таких пространств и их обобщений развивалась в работах [126, 4, 72] и др.

Дальнейшие обобщения связаны с изучением пространств $W^{(K, p)}$ с нормой

$$\|f\|_{W(K,p)} = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_{p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}},$$

где K — некоторое множество индексов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, ($\alpha_j$ — неотрицательные целые числа) — см. работы [81, 129, 86, 130] и др.

33. В работах [206—208] доказаны теоремы вложения для пространств функций типа $W_p^{(l)}$ со значениями в банаховом пространстве. Дальнейшие результаты в этом направлении получены в работах [51, 105] и др.

34. Для приложений к теории дифференциальных операторов полезно рассмотрение пространства $W_p^{(l)}$, где l — отрицательное целое число, определяемого как сопряженное пространство к $\overset{\circ}{W}{}_{p'}^{(-l)}$ $(1 < p < \infty)$. При $p = 2$ такие пространства были введены и использованы в работах Лерe (см. книгу [120]), Лакса [297], Л. Шварца [328], при $p \neq 2$ — в работах Лионса и Мадженеса (см. книгу [127]). Можно дать единое определение пространств $W_p^{(l)}$, пригодное как для положительных, так и для отрицательных l. Подробно этот вопрос рассмотрен в книге [229] в терминах пространств $F_{p,\theta}^{(l)}$ $\left(W_p^{(l)} \equiv F_{p,2}^{(l)}\right)$. Изучены также пространства

$B^{(l)}_{p,\theta}$ (см. ([27])) с любым действительным l, в частности пространства $B^{(0)}_{p,\theta}$ ($\neq L_p$ при $p\neq 2$ или $\theta\neq 2$) — см. [311, 156].

35. Значительное число работ посвящено изучению теории вложения для пространств типа $W^{(l)}_p$, в определении нормы которых L_p — норма заменена на норму в пространстве Орлича (или норму в симметрическом пространстве). Подробное изложение результатов можно найти в книге [295]. Пространства такого типа возникают при изучении нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

36. Во многих задачах возникает необходимость в изучении весовых пространств типа $W^{(l)}_p$, в их определении L_p-норма заменяется на норму $\left(\int\limits_\Omega |\varphi(\vec{P})|^p \rho(\vec{P})\, dv_{\vec{P}}\right)^{1/p}$, где $\rho(\vec{P})$ — неотрицательная весовая функция, или на норму $\left(\int\limits_\Omega |\varphi(\vec{P})|^p\, d\mu\right)^{1/p}$, где μ — некоторая мера. Систематическое изучение весовых пространств было начато в работе Л. Д. Кудрявцева [110]. Обзор результатов по теории весовых пространств и их применений к теории уравнений с частными производными можно найти в статьях [18, 285, 260, 259, 167, 94] и в книгах [156, 2-е изд; 228, 295, 234, 135].

37. Теория пространств типа $W^{(l)}_p$ обобщалась также в других направлениях. В частности, проведено систематическое изучение пространств бесконечного порядка в связи с приложениями к теории уравнений в частных производных бесконечного порядка (см., например, [75, 76]). Исследовались пространства типа $W^{(l)}_p$ функций бесконечного числа переменных (см., например, [240]). Изучались также пространства типа $W^{(l)}_p$ переменного (зависящего от точки) порядка [261, 332]. Более общие рассмотрения в этом направлении связаны с теорией псевдодифференциальных операторов (см., например, [226]). Пространства $W^{(l)}_p$ при $0<p<1$ изучались в [317, 229]. Аналоги теорем вложения для дифференциальных форм получены в [64].

38. В ряде работ изучались различные геометрические характеристики операторов вложения (см., например, [215, 85, 92, 21, 227, 84, 90] и обзор [225, гл. III]).

39. В [268, 302] установлено, что для любой области Ω пространство $W^{(l)}_p$ ($1\leqslant p<\infty$) совпадает с пополнением по норме этого пространства множества бесконечно дифференцируемых в Ω функций $\varphi\in W^{(l)}_p$. В [27, 264] доказано, что для любой области Ω любую функцию $\varphi\in W^{(l)}_p$ можно сколь угодно точно приблизить в норме этого пространства бесконечно дифференцируемыми в Ω функциями, принимающими в определенном смысле те же граничные значения, что и функция φ. Установлено [280], что для областей Ω с локально непрерывной границей множество функций, бесконечно дифференцируемых во всем пространстве, плотно в

$W_p^{(l)}$ (обобщения этого результата можно найти в книге [19, § 19]). В [263] для некоторого класса областей Ω, для которых это утверждение не имеет места, даны необходимые и достаточные условия на функцию $\varphi \in W_p^{(l)}$, при которых ее можно сколь угодно точно приблизить бесконечно дифференцируемыми во всем пространстве функциями.

40. В книге [213, с. 283] приведены необходимые и достаточные условия на функцию $\varphi \in W_p^{(l)}$ в Ω $(1 < p < \infty)$ для того, чтобы ее можно было сколь угодно точно в норме $W_p^{(l)}$ приблизить функциями из C_0^∞ в ограниченной области Ω, являющейся суммой конечного числа областей, звездных относительно шара, и имеющей простую границу в смысле п. 2, § 10. В [28] найдены при $p > n$ соответствующие необходимые и достаточные условия в случае произвольной области Ω. Там же при $p > n$ найдены необходимые и достаточные условия на Ω, при которых возможность сколь угодно точного приближения функций $\varphi \in W_p^{(l)}$ функциями из C_0^∞ эквивалентна тому, что продолжение нулем вне Ω функций $\varphi \in W_p^{(l)}$ в Ω принадлежит $W_p^{(l)}$ во всем пространстве. При $p \leqslant n$ ряда результатов в этом направлении получен в [286, 287]. В [287] решена тесно связанная с этим вопросом задача о «спектральном синтезе» для пространств $W_p^{(l)}$.

41. В [209—211] доказаны теоремы об аппроксимации функций из $L_p^{(l)}$ в R^n $(1 \leqslant p < \infty)$ функциями из C_0^∞. Аналогичные вопросы для неограниченных областей рассмотрены в [14]. Вопросы об аппроксимации потенциальных и соленоидальных векторных полей с приложениями к гидродинамике рассмотрены в работах [288, 139, 140].

42. При изучении пространств $W_p^{(l)}$ важным является вопрос о продолжении функций, принадлежащих $W_p^{(l)}$ в области Ω, на все пространство с сохранением класса, т. е. о построении для любой функции $\varphi \in W_p^{(l)}$ в Ω функции $\Phi \in W_p^{(l)}$ в R^n, совпадающей с φ на Ω. Для областей с достаточно гладкой границей теорема о продолжении доказана при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ в [158], для областей с границей класса Lip 1 при $1 < p < \infty$ этот результат получен в [265], а при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ — в [21]. Дальнейшие результаты получены в работах [30, 25, 42, 291, 104, 39]. Для некоторых значений параметров l, p и n получены необходимые и достаточные условия на Ω, при которых справедлива теорема продолжения (см. [42, 104]).

Для областей с границей класса Lip γ при $0 < \gamma < 1$ теорема продолжения с сохранением класса, вообще говоря, не имеет места. Для таких областей в [30] доказана теорема продолжения с минимальным ухудшением класса, а именно в пространство $W_p^{[\gamma l]}$. Для различных типов областей с границей класса Lip γ доказаны теоремы о продолжении с сохранением показателя гладкости с минимальным ухудшением показателя суммируемости (см. [136, 237]).

Для анизотропных пространств $W^{l_1,\ldots,l_n}_{p_0,p_1,\ldots,p_n}$ (см. ([31])) теоремы продолжения доказаны в работах [33, 236, 248].

43. Пусть φ: $R^n \to R^n$ — гомеоморфизм и φ^* — оператор, определенный равенством $(\varphi^* f)(\vec{p}) = f(\varphi(\vec{p}))$. В работах [40, 43, 183] изучен вопрос о необходимых и достаточных условиях на φ, при которых оператор φ^* осуществляет изоморфизм пространств $W_p^{(l)}$.

44. Решению краевых задач вариационными методами посвящены многочисленные работы (см. [305] и приведенную там библиографию [147, 148, 110, 239] и др.).

45. По поводу необходимых и достаточных условий на функцию φ, при которых она является допустимой, см. ([27]).

46. Это утверждение было доказано в работе [200], опубликованной в 1937 г. Там же доказано аналогичное предложение для полигармонических уравнений, которое приведено в п. 4, § 14. Для уравнения Лапласа это утверждение получено также в 1940 г. в работе Г. Вейля [333]; часто в литературе его называют леммой Вейля. (Простое доказательство можно найти в [162], с. 71.)

47. Аналогичный пример в 1871 г. был построен Примом [321], но его работа долгое время оставалась незамеченной. Пример, построенный Адамаром в 1906 г. [284], оказал влияние на исследования в области вариационного исчисления и теории функций, способствовал постановке проблемы о нахождении необходимых и достаточных условий продолжимости функции в область с ее границы с условием принадлежности этой функции в области пространству $W_p^{(l)}$ (см. ([27])).

48. Изучению обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка посвящены многие монографии и статьи, основные вопросы включены в учебники (см. [282, 305, 116] и приведенную там библиографию [149, 146, 162] и др.). Обзор по уравнениям второго порядка с неотрицательной характеристической формой можно найти в [163].

49. По поводу необходимых и достаточных условий на систему функций $\left\{\varphi^{(n-s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\right\}$, при которых она является допустимой, см. [19].

50. Дальнейшее изучение краевых задач для эллиптических уравнений с граничными условиями на многообразиях различных размерностей было проведено в работах [98, 165, 100]. Большой интерес для приложений в теории упругости представляет изучение бигармонического уравнения с двумя независимыми переменными, возникающего в теории пластин. Поведение в окрестности граничных точек обобщенного решения основной краевой задачи для бигармонического уравнения, рассмотренной в §§ 14—15, и вопрос о гладкости обобщенного решения в замкнутой двумерной области подробно исследованы в работах [97, 98, 293]. Эти вопросы тесно связаны с важным в механике принципом Сен-Венана (см. [164]). Для полигармонического уравнения аналогичные вопросы рассмотрены в работе [222]. В статье [99] дан обзор работ по исследованию краевых задач в негладких областях. Изложение современной теории эллиптических краевых задач можно найти в книгах [242, 11, 127, 224, 226].

51. Вариационные методы нашли широкое применение в спектральной теории операторов, получили дальнейшее развитие (см., например, [114, 173, 148, 1, 128, 69] и указанную там библиографию).

52. В настоящее время имеется ряд монографий [66, 121, 2, 120] (см. также [77], [145], [242], [243], [141]), где различными методами исследуется задача Коши для гиперболических уравнений и систем. Работа И. Г. Петровского, где впервые было введено понятие гиперболической системы и исследована для нее задача Коши, помещена в переводе на русский язык в книге [174]. Там же имеется комментарий к этой работе, написанный Л. Р. Волевичем и В. Я. Ивриием [44], где дан обзор работ по задаче Коши и смешанной задаче для гиперболических уравнений.

53. Аналогичное исследование задачи Коши для волнового уравнения с начальными данными из пространств $B^{(l)}_{\varphi,\theta}$ проведено в [15].

54. Полученное интегральное уравнение (20.22) для решения задачи Коши (19.1), (19.40) использовалось Б М. Левитаном [118, 119] при изучении асимптотики спектральной функции задачи на собственные значения для самосопряженного эллиптического уравнения второго порядка с граничным условием Дирихле.

55. В настоящем параграфе решение задачи Коши сводится к интегральному уравнению Вольтерра. Все рассмотрения проводятся «в малом», т. е. в достаточно малой окрестности фиксированной точки, что обеспечивает отсутствие особых (фокальных) точек на коноиде характеристик. В работах В. П. Маслова [142, 143] предложен метод, позволяющий свести задачу Коши к интегральному уравнению Вольтерра глобально, т. е. в любой области существования решения задачи. Этим методом им доказаны существование и единственность решения задачи Коши «в целом», исследована структура фундаментального решения, изучен вопрос о распространении особенностей начальных функций u_0 и u_1

56. В последние десятилетия много работ было посвящено исследованию задачи Коши для уравнений второго порядка вида (21.5), когда условие (21.6) заменено условием $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}p_ip_j \geqslant 0$. Такие уравнения называются вырождающимися гиперболическими уравнениями или гиперболическими уравнениями с кратными характеристиками. Задача Коши и краевые задачи для таких уравнений и гиперболических уравнений высокого порядка с кратными характеристиками изучались в работах [22, 313] и других (см. обзор [44]).

57. С учетом теоремы вложения в L_{q^*} для предельного показателя (см. ([7])) в условии o) в 3) и 4) при $n > 2$, а в 5) при $n > 4$ можно считать, что $\varepsilon = 0$. При доказательстве леммы из п. 4 достаточно использовать теорему вложения для предельного показателя.

58. Покажем, что функции u_h имеют общую область определения Ω' такую, что $\Omega(0) \subset \Omega' \subset \Omega$, для всех h, $0 < h \leqslant h_0$, $h_0 = \text{const} > 0$ Это существенно для доказательства теоремы.

Согласно построениям § 20 задача Коши для уравнения (19.1) с гладкими коэффициентами и гладкими начальными функциями u_0 и u_1, заданными на $\Omega(0)$, имеет решение в тех точках окрестности $\Omega(0)$, каждая из которых является вершиной характеристического коноида, принадлежащего при $0 < x_0 < x_0^0$ области Ω, пересекающего гиперплоскость $x_0 = 0$ в точках $\Omega(0)$ и приводящегося невырожденной заменой переменных $x_0, \ldots, x_{2k+1}$ вида (19.26) к круговому конусу (19.28). Как показано в п. 1, § 19, определитель $D(x_0, \ldots, x_{2k+1})/D(y_0, \ldots, y_{2k+1})$ отличен от нуля в вершине коноида, и можно указать шар радиуса τ с центром в вершине коноида, где этот определитель отличен от нуля, причем τ не зависит от расположения вершины. Это легко видеть из формул (19.25), если учесть гладкость коэффициентов уравнения (19.1) при старших производных.

Докажем, что решение u_h при каждом фиксированном h, $0 < h \leqslant h_0$, можно определить в области Ω', которая состоит из объединения круговых конусов $K \subset \Omega$ и таких, что угол при вершине K, составленный образующей конуса K с осью t, равен α, а пересечение конуса с гиперплоскостью $t = 0$ принадлежит $\Omega(0)$, причем α — некоторое число, $0 < \alpha < \pi/2$. Легко видеть, что число α можно выбрать не зависящим от h и положения вершины конуса K так, что характеристический коноид с вершиной, совпадающей с вершиной конуса K, лежит внутри K при $t > 0$.

По доказанному в п. 8 и п. 9 § 20 решение u_h задачи Коши для усредненного уравнения с усредненными начальными условиями при $t = 0$ существует в каждом конусе K при $0 \leqslant t \leqslant \gamma$, где $\gamma = \tau \cos \alpha$ (τ, быть может, зависит от h). Далее, решая задачу Коши с полученными начальными условиями для u_h при $t = \gamma$, продолжим решение u_h в конусе K при $\gamma \leqslant t \leqslant 2\gamma$, затем $2\gamma \leqslant t \leqslant 3\gamma$ и т. д. Через конечное число шагов построим u_h во всем конусе K. Заметим, что область Ω', определяемая числом α, в которой определены u_h, зависит лишь от Ω и максимумов модулей коэффициентов A_{ij} уравнения (21.5).

59. С учетом теорем вложения в L_{q^*} для предельного показателя (см. (7)) в условиях н) в 2) при $n > 2l - 2$, в 4) при $n > 2l$ и в 5) при $n > 2l + 2$ можно считать $\varepsilon = 0$. При этом для доказательства леммы из п. 7 нужно использовать теорему вложения для предельного показателя.

60. Аналогом приведенного здесь метода получения априорных оценок для решения задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка для случая гиперболических уравнений высокого порядка является метод разделяющего оператора Ж. Лере [120].

61. Относительно области существования решений см. (53).

62. Отметим, что используя оценки, аналогичные тем, которые получены в пп. 4 и 7, можно построить решения обобщенной и классической задачи Коши (21.5), (21.7) методом Хопфа — Галеркина [289]. Приближенное решение ищется при этом в виде линейной комбинации конечного числа функций, зависящих от x и взятых из некоторой полной системы функций, с коэффициентами, зависящими от t. Коэффициенты определяются как решения соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Теоремы вложения позволяют получить сходимость таких приближенных решений к решению задачи Коши (см., например, [36]).

Дополнение

НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ *)

Проблема, которой мы займемся в этой статье, изучалась различными авторами. В наиболее общем случае эта проблема впервые решена Адамаром в его хорошо известных статьях и его изящной книге «Лекции о задаче Коши для гиперболических уравнений» [2]. Другое решение принадлежит М. Матиссону [300].

Мы даем здесь иное решение этой задачи. Основная идея нашего метода, отличная от методов упомянутых авторов, является развитием идей Кирхгофа, примененных им к волновому уравнению с постоянными коэффициентами в пространстве трех измерений (четыре независимых переменных). В. Г. Гоголадзе и автор уже применяли излагаемый в этой работе метод к некоторым частным случаям [191, 192, 54, 55, 56]. Три заметки на эту тему были опубликованы в журнале «Доклады АН СССР» [193, 194, 195].

В данной статье мы изложим этот метод детально. Первая глава содержит вывод нашей основной формулы, которая используется для построения первого вычислительного метода. Эта формула есть интегральное тождество, связывающее произвольную функцию u с начальными значениями

$$u\big|_{t=0} = u^{(0)}\ ,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u^{(1)}$$

этой функции и ее первой производной на начальной поверхности и с функцией $\rho = Lu$, которая есть результат применения линейной дифференциальной гиперболической операции к u.

Затем мы изложим некоторые элементарные вычисления последовательных приближений, которые позволят вывести второе основное тождество. Это тождество дает выражение значения функции u через указанные выше функции ρ, $u^{(0)}$, $u^{(1)}$.

---

*) Настоящее дополнение является переводом с французского языка статьи С. Л. Соболева [196], опубликованной в 1936 г. (Краткое изложение результатов этой статьи содержится в его заметке [195], напечатанной в «Докладах АН СССР» в 1935 г.). Перевод статьи выполнен В. П. Паламодовым, им же написаны примечания к этой статье, помещенные в конце дополнения.

В других главах содержатся общие соображения, касающиеся существования искомого решения. Используя некоторые понятия функционального анализа, мы представим нашу задачу в новом виде и покажем, что в этом виде она всегда имеет единственное решение. Если искомое решение существует в классическом смысле, то наше решение совпадает с ним.

1. Основное тождество

1. Задача Коши. В этой главе мы займемся обобщением формулы, принадлежащей Кирхгофу, которая будет очень важна в дальнейшем.

Наиболее общее уравнение линейного нормального гиперболического типа с четным числом независимых переменных, как известно, может быть приведено к виду

$$Lu = \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2k+1} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F, \quad (1.1)$$

где коэффициенты $A_{ij} = A_{ji}$, B_i, C суть функции независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, t$, а F — известная функция тех же переменных.

Задача Коши состоит в отыскании решения этого уравнения, удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} u \big|_{t=0} &= u^{(0)}(x_1, \ldots, x_{2k+1}), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= u^{(1)}(x_1, \ldots, x_{2k+1}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда коэффициенты A_{ij}, B_i, C являются аналитическими функциями независимых переменных, но это предположение несущественно для последующего изложения и может быть заменено условием, что коэффициенты имеют некоторое число непрерывных производных.

Для того чтобы уравнение (1.1) было нормального гиперболического типа, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $\sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij} p_i p_j$ была положительно определена. Будем предполагать, что это условие всегда выполнено.

2. **Предварительные замечания.** Напомним теперь некоторые основные детали, связанные с конструкцией характеристического коноида, имеющего вершину в точке M^0 с координатами x_1^0, $x_2^0, \ldots, x_{2k+1}^0$, t^0. Как известно, уравнение характеристической поверхности для уравнения (1.1) есть

$$A \equiv \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij} p_i p_j - q^2 = 0, \quad (1.3)$$

где p_i, q означают величины, пропорциональные направляющим косинусам нормали к характеристической поверхности. Пусть

$$G = 0 \tag{1.4}$$

есть уравнение этой поверхности; тогда p_i и q могут быть выбраны по формуле

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}, \quad q = \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{1.5}$$

Уравнения для бихарактеристик, т. е. «характеристик для характеристик» суть

$$ds = \frac{dx_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_i}} = \frac{-dp_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_i}} = \frac{dt}{-q} = \frac{-dq}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t}}. \tag{1.6}$$

Бихарактеристики для (1.1) — это те решения (1.6), для которых

$$A \equiv 0. \tag{1.7}$$

Интегральная поверхность уравнения (1.1) порождается многообразием M_{2k+1} точек M с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, t$, принадлежащих семейству бихарактеристик, удовлетворяющих (1.7), и зависящему от $2k$ параметров $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$, таких, что

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_{2k+1} dx_{2k+1} + q\,dt = 0. \tag{1.8}$$

Из теории уравнений первого порядка известно, что условие (1.7) удовлетворяется вдоль любой интегральной кривой системы (1.6), если оно выполнено в некоторой точке $s = 0$ этой кривой. Подобным образом условие (1.8) автоматически удовлетворяется на всем многообразии M_{2k+1}, если оно справедливо на подмногообразии M_{2k}, отвечающем некоторому постоянному значению s.

Построим далее семейство бихарактеристик, проходящих через точку M^0. Ясно, что их можно определить как интегральные кривые (1.6), удовлетворяющие начальным условиям:

$$\begin{aligned} x_i\big|_{s=0} &= x_i^0, \quad & p_i\big|_{s=0} &= p_i^0, \\ t\big|_{s=0} &= t^0, \quad & q\big|_{s=0} &= q^0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь p_i^0 и q_i^0 произвольные параметры, которые, как мы уже видели, должны удовлетворять соотношению

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0 p_i^0 p_j^0 - q^{0^2} = 0 \tag{1.10}$$

(смысл A_{ij}^0 очевиден).

Таким образом, мы получаем семейство, зависящее от $2k + 1$ параметра, но, как легко понять, с точки зрения величин x_i и t

один из этих параметров лишний, поскольку он входит как общий множитель для p_i и q. В самом деле, заменяя в (1.6) p_i и q величинами αp_i^* и αq^*, а s — величиной s^*/α, мы не меняем уравнений, т. е. если система функций

$$x_i(s),\quad t(s),\quad p_i(s),\quad q(s)$$

удовлетворяет (1.6), то система функций

$$x_i(s/\alpha),\quad t(s/\alpha),\quad \alpha p_i(s/\alpha),\quad \alpha q(s/\alpha)$$

также удовлетворяет этой системе уравнений.

Итак, для того чтобы сохранить в пространстве R_{2k+2} все точки, принадлежащие бихарактеристикам, проходящим через M^0, можно ограничиться рассмотрением лишь тех кривых, для которых, например, $q^0 = 1$. При таком предположении наше семейство удовлетворяет обоим условиям (1.7) и (1.8) при $s = 0$, т. е. в точке M^0, и, следовательно, многообразие M_{2k+1} точек этого семейства представляет собой характеристическую поверхность в R_{2k+2}. Эта поверхность называется характеристическим коноидом.

Чтобы уточнить некоторые свойства этого коноида, мы проделаем более детальный анализ интегралов уравнения (1.6). Предположив, что в окрестности точки M^0 функции A_{ij}, B_i и C могут быть разложены в ряды по степеням $\left(x_i - x_i^0\right)$ и $(t - t^0)$, мы заключаем, что общее решение (1.6) при условиях (1.9) также может быть разложено в ряды по степеням s, коэффициенты которых суть функции от x_i^0, t^0, p_i^0, q^0. Легко показать, что коэффициенты при s^n в разложениях для x_i и t являются однородными полиномами n-й степени от величин p_i^0 и q^0, в то время как коэффициенты при s^n в разложениях p_i и q суть однородные полиномы порядка $n+1$ от этих величин. Действительно, процесс вычисления этих коэффициентов состоит в определении значения n-й производной неизвестной функции по переменной s в начальной точке. Если мы установим, что n-я производная x_i и t (или p_i и q) представляет собой в каждой точке однородный полином степени n (соответственно $n+1$) от величин p_i^0 и q^0, то наше утверждение будет доказано. Это доказывается по индукции с учетом того, что производная по s такого полинома $\Pi_{n-1}\left(p_i^0, q^0\right)$ выражается следующим образом:

$$\frac{d\Pi_{n-1}}{ds} = \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{\partial \Pi_{n-1}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} + \sum_{i=1}^{2k+1} \frac{\partial \Pi_{n-1}}{\partial p_i}\frac{dp_i}{ds} + \frac{\partial \Pi_{n-1}}{\partial q}\cdot\frac{dq}{ds} + \frac{\partial \Pi_{n-1}}{\partial t}\cdot\frac{dt}{ds}. \tag{1.11}$$

Заменяя здесь производные $\frac{dx_i}{ds}$, $\frac{dt}{ds}$, $\frac{dp_i}{ds}$, $\frac{dq}{ds}$ их выражениями, содержащимися в (1.6), мы видим, что указанная выше производная есть полином степени n, что и требовалось доказать.

Прямые вычисления показывают, что x_i, t, p_i и q имеют следующие разложения:

$$
\begin{aligned}
x_i &= x_i^0 + s\sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0 p_j^0 + \sum_{n=2}^{\infty} s^n X_n^{(i)}\left(p_j^0, q^0\right),\\
t &= t^0 - sq^0 + \sum_{n=2}^{\infty} s^n T_n\left(p_j^0, q^0\right),\\
p_i &= p_i^0 + \frac{1}{s}\sum_{n=2}^{\infty} s^n \Pi_n^{(i)}\left(p_j^0, q^0\right),\\
q &= q^0 + \frac{1}{s}\sum_{n=2}^{\infty} s^n P_n\left(p_j^0, q^0\right).
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Следует заметить, что эти ряды равномерно сходятся в некоторой окрестности точки $s=0$ не только для вещественных p_i^0 и q^0, но также и для любых комплексных значений этих параметров, ограниченных некоторым числом M.

Вместо x_i и t введем нормальные переменные Липшица, т. е. переменные

$$P_i = sp_i^0, \quad Q = sq^0. \tag{1.13}$$

Как мы видим, переменные $x_i - x_i^0$ и $t - t^0$ могут быть разложены в равномерно сходящиеся ряды по P_i и Q:

$$
\begin{aligned}
x_i - x_i^0 &= \sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0 P_j + \sum_{n=2}^{\infty} X_n^{(i)}(P_j, Q),\\
t - t^0 &= -Q + \sum_{n=2}^{\infty} T_n(P_i, Q),
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

а p_i и q представляются рядами

$$
\begin{aligned}
p_i &= \frac{1}{s}\left(P_i + \sum_{n=2}^{\infty} \Pi_n^{(i)}(P_i, Q)\right),\\
q &= \frac{1}{s}\left(Q + \sum_{n=2}^{\infty} P_n(P_i, Q)\right).
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Связь между P_i, Q и $x_i - x_i^0$, $t - t^0$ обратима, т. е. функции P_i и Q можно разложить по степеням $x_i - x_i^0$ и $t - t^0$.

Пусть

$$
\begin{aligned}
P_i &= \sum_{j=1}^{2k+1} H_{ij}^0\left(x_j - x_j^0\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \Xi_n^{(i)},\\
Q &= t^0 - t + \sum_{n=2}^{\infty} H_n
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

— эти разложения, причем $\Xi_n^{(i)}$ и H_n суть однородные многочлены от $x_i - x_i^0$ и $t - t^0$, а матрица H_{ij}^0 является обратной к матрице A_{ij}^0, т. е.

$$\sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0 H_{jr}^0 = \delta_{ir} = \begin{cases} 1, & i = r, \\ 0, & i \neq r. \end{cases} \tag{1.17}$$

В координатах P_i и Q уравнение характеристического коноида приводится к виду

$$G \equiv \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0 P_i P_j - Q^2 = 0. \tag{1.18}$$

Это следует из соотношения (1.10) после умножения на s^2. Для дальнейшего необходимо разрешить это уравнение относительно t. Допустим, что после этого разрешения уравнение коноида приобретает вид

$$t - \tau(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}) = 0. \tag{1.19}$$

Теперь мы вычислим некоторые частные производные τ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$. Очевидно, что

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial G}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial G}{\partial t}} = -\frac{p_i}{q} = -\frac{P_i + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \Pi_n^{(i)}}{Q + \sum\limits_{n=2}^{\infty} P_n} =$$

$$= \frac{-\sum\limits_{j=1}^{2k+1} H_{ij}^0 (x_j - x_j^0) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} K_n}{t^0 - t + \sum\limits_{n=2}^{\infty} L_n}; \tag{1.20}$$

и

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{P_i \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x_j} - \dfrac{\partial Q}{\partial t} \dfrac{P_j}{Q} \right) - Q \left(\dfrac{\partial P_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial P_i}{\partial t} \dfrac{P_j}{Q} \right) + \ldots}{Q^2 + \ldots} =$$

$$= \frac{-(t^0 - t)^2 H_{ij}^0 \sum\limits_{s=1}^{2k+1} \sum\limits_{r=1}^{2k+1} H_{ir}^0 H_{js}^0 (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \ldots}{Q^3 + \ldots} =$$

$$= \frac{-H_{ij}^0 Q^2 + P_i P_j + \ldots}{Q^3 + \ldots}, \tag{1.21}$$

где в числителе опущены все члены порядка, равного или превосходящего три, а в знаменателе опущены члены порядка, большего три. Вычисления производных высших порядков очевидны.

Числители и знаменатели полученных функций очевидно сходятся в области, общей для всех производных. Степень первого члена в знаменателе равна степени соответствующего члена числителя плюс $m-1$, где m — порядок производной.

3. **Некоторые соотношения между последовательными производными данной функции.** Вместо переменной t введем новую независимую переменную

$$t_1 = t - \tau.$$

Условимся обозначать результат замены независимых переменных в произвольной функции φ символом $\overline{\varphi}$, т. е.

$$\overline{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, t) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, t_1 + \tau(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1})). \tag{1.22}$$

Обозначая через $\frac{\partial}{\partial x_i}$ частную производную по x_i при условии, что независимыми переменными являются $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, t$, а через $\frac{D}{Dx_i}$ производную по той же переменной в предположении, что независимые переменные суть $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, t_1$, мы, очевидно, получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D\overline{u}}{Dt_1}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{D^2\overline{u}}{Dt_1^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{D\overline{u}}{Dx_i} - \frac{D\overline{u}}{Dt_1}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial x_i};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{D^2\overline{u}}{Dx_iDx_j} - \frac{D^2\overline{u}}{Dx_iDt_1}\frac{\partial\tau}{\partial x_j} - \frac{D^2\overline{u}}{Dx_jDt_1}\frac{\partial\tau}{\partial x_i} + \\ + \frac{D^2\overline{u}}{Dt_1^2}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_j} - \frac{D\overline{u}}{Dt_1}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_i\partial x_j}. \tag{1.23}$$

После указанной замены операция Lu примет вид

$$Lu = \sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\overline{A}_{ij}\frac{D^2\overline{u}}{Dx_iDx_j} + \sum_{i=1}^{2k+1}\overline{B}_i\frac{D\overline{u}}{Dx_i} + C\overline{u} - \\ - 2\sum_{i=1}^{2k+1}\left\{\sum_{j=1}^{2k+1}\overline{A}_{ij}\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\right\}\frac{D^2\overline{u}}{Dx_iDt_1} - \left\{\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\overline{A}_{ij}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_i\partial x_j} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{2k+1}\overline{B}_i\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right\}\frac{D\overline{u}}{Dt_1} + \left\{\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\overline{A}_{ij}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_j} - 1\right\}\frac{D^2\overline{u}}{Dt_1^2}. \tag{1.24}$$

Введем некоторые обозначения. Рассмотрим в пространстве R_{2k+1} с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$ следующие линейные операции:

$$M^{(r)}v = \left\{\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\frac{\partial^r\overline{A}_{ij}}{\partial t_1^r}\bigg|_{t_1=0}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_j} - \frac{\partial^r I}{\partial t_1^r}\right\}v,$$

$$L^{(r)}v = -2\sum_{i=1}^{2k+1}\left[\sum_{j=1}^{2k+1}\frac{\partial^r A_{ij}}{\partial t_1^r}\bigg|_{t_1=0}\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\right]\frac{Dv}{Dx_i} -$$
$$-\left[\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\frac{\partial^r A_{ij}}{\partial t_1^r}\bigg|_{t_1=0}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{\partial^r \overline{B}_i}{\partial t_1^r}\bigg|_{t_1=0}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right]v,$$
$$D^{(r)}v=\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\frac{\partial^r A_{ij}}{\partial t_1^r}\bigg|_{t_1=0}\frac{D^2 v}{dx_iDx_j}+\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{\partial^r \overline{B}_i}{\partial t_1^r}\bigg|_{t_1=0}\frac{Dv}{Dx_i}+\frac{\partial^r \overline{C}}{\partial t_1^r}\bigg|_{t_1=0}v. \tag{1.25}$$

Кроме того, условимся обозначать через u_s значение $\dfrac{\partial^s u}{\partial t^s}$ на характеристическом коноиде, т. е.

$$u_s(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}) = \frac{\partial^s}{\partial t^s}u(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, \tau(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1})). \tag{1.26}$$

Дифференцируя тождество (1.24) s раз по t и полагая $t_1 = 0$, мы, очевидно, получим

$$\sum_{r=1}^{s}\frac{s!}{r!\,(s-r)!}\{M^{(r)}u_{s-r+2}+L^{(r)}u_{s-r+1}+D^{(r)}u_{s-r}\}=\frac{\partial^s Lu}{\partial t^s}\bigg|_{t_1=0}$$
$$(M^0 v \equiv 0). \tag{1.27}$$

Объединяя все операции, примененные к одной функции и обозначая

$$D_s^{(s)}v = D^{(s)}v,$$
$$D_{s-1}^{(s)}v = sD^{(s-1)}v + L^{(s)}v,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_r^{(s)}v=\frac{s!}{r!\,(s-r)!}D^{(r)}v+\frac{s!}{(r+1)!\,(s-r+1)!}L^{(r+1)}v+$$
$$+\frac{s!}{(r+2)!\,(s-r+2)!}M^{(r+2)}v,$$
$$I^{(s)}v = L^{(0)}v + sM^{(1)}v, \tag{1.28}$$

мы окончательно получаем

$$M_{k-r}(u_0, u_1, \ldots, u_{k+1}) \equiv \sum_{s=0}^{r} D_s^{(r)}u_{r-s}+I^{(r)}u_{r+1}=$$
$$=\frac{\partial^r Lu}{\partial t^r}\bigg|_{t=\tau}\qquad (r = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{1.29}$$

Система тождеств (1.29) играет в последующем существенную роль.

4. Конструкция функций σ_r. Операции M_{k-r} суть k линейных преобразований над $k+1$-й функцией u_0, u_1, ..., u_k. Введем систему из $k+1$ линейного преобразования N_r^*, действующего на k функций σ_1, σ_2, ..., σ_k, которые будем называть сопряженными к преобразованиям M_{k-r}. Эти сопряженные операции получаются интегрированием по частям выражения

$$\int\int \sum_{s=1}^{k} \sigma_s M_s dR_{2k+1},$$

где интегрирование ведется по части пространства R_{2k+1}, таким образом, что возникающий интеграл не содержит производных u. Коэффициент при u_i в этом интеграле есть операция N_i^*. Простые вычисления дают

$$\begin{gathered} N_k^*\sigma_1 \equiv I^{(k-1)*}\sigma_1, \\ N_{k-r+1}^*(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r) \equiv I^{(k-r)*}\sigma_r + \sum_{s=0}^{r-2} D_s^{(k-r+s+1)*}\sigma_{r-s+1} \\ (r = 2, 3, \ldots, k), \\ N_0^*(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) \equiv \sum_{s=0}^{k-1} D_s^{(s)*}\sigma_{k-s}, \end{gathered} \tag{1.30}$$

где знак $*$ указывает на операцию сопряжения в классическом смысле. По определению мы имеем

$$\sum_{j=1}^{k} \sigma_j M_j - \sum_{j=0}^{k} u_j N_j^* = \sum_{s=1}^{k} \left(\sigma_{k-s+1} I^{(s-1)} u_s - u_s I^{(s-1)*}\sigma_{k-s+1}\right) + \\ + \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=0}^{k-j+1} \left(\sigma_j D_{k-j-s}^{(k-j)} u_s - u_s D_{k-j-s}^{(k-j)*}\sigma_j\right) = \sum_{r=1}^{2k+1} \frac{\partial U_r}{\partial x_r}. \tag{1.31}$$

Ниже мы уточним вид функций U_r, которые легко вычислить.

Построим теперь систему функций σ_r, являющихся частными решениями системы уравнений

$$N_l^* = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.32}$$

Выберем эту систему так, чтобы она обладала следующими свойствами:

а) каждая функция σ_r является однозначной аналитической функцией переменных p_1^0, p_2^0, ..., p_{2k+1}^0, q^0 и s и зависит лишь от произведений $p_1^0 \cdot s$, $p_2^0 \cdot s$, ..., $p_{2k+1}^0 \cdot s$, $q^0 \cdot s$. Следует заметить, что эти переменные зависимые, так как на нашем характеристическом многообразии мы можем всегда положить $q^0 = 1$, а с другой стороны

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0 p_i^0 p_j^0 - q^{0^2} = 0.$$

б) каждая функция σ_r как функция переменной s может быть представлена как полином степени $r-1$ от $\log(q^0 s)$:

$$\sigma_r = R_0^{(r)}(s) + R_1^{(r)}(s)\log(q^0 s) + \ldots + R_{r-1}^{(r)}(s)\,[\log(q^0 s)]^{r-1}. \quad (1.33)$$

Коэффициенты при степенях $\log(q^0 s)$ суть ряды по степеням s, содержащие некоторое число членов отрицательных степеней и сходящиеся в определенной области.

Первый член в ряде $R_l^{(r)}(s)$ имеет вид $cs^{-(k+r-l-1)}$, причем в первом ряде, т. е. в $R_0^{(r)}(s)$, этот член в точности равен

$$\frac{(-2)^{k-r}\Gamma(k+r-1)\,\Gamma(k)}{\sqrt{\Delta^0}\,\Gamma(k-r+1)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(r)}\left(q^0 s\right)^{-k-r+1} = a_k^{(r)}\left(q^0 s\right)^{-k-r+1} =$$
$$= a_k^{(r)} Q^{-k-r+1}, \quad (1.34)$$

где Δ^0 есть значение дискриминанта формы A в точке $x_1^0, x_2^0, \ldots$ $\ldots, x_{2k+1}^0, t^0$. В частности, первый член в ряде $R_0^{(k)}(s)$ есть

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta^0}} Q^{-2k+1}. \quad (1.35)$$

Ясно, что полное разложение σ_r зависит от выбора первого члена в $R_0^{(r)}$.

Легко видеть, что система (1.32) рекуррентна и функции σ_r могут быть последовательно определены. Для каждой функции σ_r мы, таким образом, имеем линейное дифференциальное уравнение первого порядка, правая часть которого зависит от всех функций σ_l $(l = 1, \ldots, r-1)$. Поэтому все σ_r могут быть получены простыми квадратурами. Чтобы доказать существование этих решений, мы будем действовать по индукции.

Предположим, что функции $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r-1}$ уже определены указанным образом. Уравнение для σ_r имеет вид

$$I^{(k-r)*}\sigma_r = -\sum_{s=0}^{r-2} D_s^{(k-r+s+1)}\sigma_{r-s-1}. \quad (1.36)$$

Проинтегрируем это уравнение методом вариации произвольной постоянной. Соответствующее однородное уравнение есть

$$I^{(k-r)*}\widetilde{\sigma}_r = 0. \quad (1.37)$$

Операция $I^{(k-r)*}\widetilde{\sigma}_r$ имеет вид

$$I^{(k-r)*}\widetilde{\sigma}_r = L^{(0)*}\widetilde{\sigma}_r + (k-r)\,M^{(1)*}\widetilde{\sigma}_r =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{D}{Dx_i}\left\{\sum_{j=1}^{2k+1}\overline{A}_{ij}\Big|_{t_1=0}\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\widetilde{\sigma}_r\right\} - \left\{\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\overline{A}_{ij}\Big|_{t_1=0}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_i\partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2k+1}\overline{B}_i\Big|_{t_1=0}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right\}\widetilde{\sigma}_r + (k-r)\left\{\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\frac{\partial\overline{A}_{ij}}{\partial t}\Big|_{t_1=0}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\right\}\widetilde{\sigma}_r = 0,$$

т. е.

$$I^{(k-r)*}\widetilde{\sigma}_r = 2\sum_{i=1}^{2k+1}\left\{\sum_{j=1}^{2k+1}\overline{A}_{ij}\Big|_{t_1=0}\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\right\}\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r}{\partial x_i} +$$

$$+\left\{\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\overline{A}_{ij}\Big|_{t_1=0}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{2k+1}\left(2\sum_{j=1}^{2k+1}\frac{\partial\overline{A}_{ij}}{\partial x_j} - \overline{B}_i\right)\Big|_{t_1=0}\frac{\partial\tau}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + (k-r)\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}\frac{\partial\overline{A}_{ij}}{\partial t}\Big|_{t_1=0}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\right\}\widetilde{\sigma}_r. \quad (1.38)$$

Учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{2k+1}\overline{A}_{ij}\Big|_{t_1=0}\frac{\partial\tau}{\partial x_j} = -\sum_{j=1}^{2k+1}\overline{A}_{ij}\frac{p_j}{q} = -\frac{1}{q}\frac{dx}{ds}$$

(см. (1.6)), и обозначая через Ω_r коэффициент при $\widetilde{\sigma}_r$ в уравнении (1.38), мы получаем

$$\frac{2}{q}\frac{\partial\widetilde{\sigma}_r}{\partial s} - \Omega_r\widetilde{\sigma}_r = 0. \quad (1.39)$$

Из уравнения (1.39)

$$\widetilde{\sigma}_r = \Xi_r\left(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_{2k+1}^0, q^0\right)e^{\int\frac{q\Omega_r}{2}ds} = \Xi_r e^{\int\frac{qs\Omega_r}{2}\frac{ds}{s}}. \quad (1.40)$$

Рассмотрим подробнее второй множитель в (1.40). Функция $qs\Omega_r$ есть, очевидно, значение на характеристическом коноиде частного двух регулярных степенных рядов от $P_1, P_2, \ldots, P_{2k+1}, Q$. Это становится очевидным, если мы заметим, что коэффициенты A_{ij}, B_i, $\dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial A_{ij}}{\partial t}$ суть регулярные степенные ряды по $P_1, P_2, \ldots, Q$, а производные τ суть частные, как мы это видели в п. 2. Следовательно, $qs\Omega_r$ как функция переменной s и параметров $p_1^0, \ldots, q^0$ может быть разложена в сходящийся ряд по степеням этой переменной в некотором круге

$$|s| < \rho, \tag{1.41}$$

зависящем только от ближайшего корня знаменателя в выражениях для производных τ, т. е. от ближайшего корня функции $q\left(s, p_1^0, \ldots, p_{2k+1}^0, q^0\right)$ и радиусов сходимости других рядов, входящих в выражение для $qs\Omega_r$ (учитывая, что начальное значение q есть единица, мы видим, что радиус круга (1.41) отличен от нуля).

Вычисляя первый член в разложении $qs\Omega_r$, мы видим, что он связан с выражением

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} \bar{A}_{ij} \Bigg|_{t_1=0} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \partial x_j}$$

и равен

$$Q \frac{-\sum\limits_{i=1}^{2k+1} \sum\limits_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0 H_{ij}^0 Q^2 + \sum\limits_{i=1}^{2k+1} \sum\limits_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0 P_i P_j + \ldots}{Q^3 + \ldots} =$$

$$= Q \frac{-2\left(k + \frac{1}{2}\right) Q^2 + Q^2 + \ldots}{Q^3 + \ldots} = -2k. \tag{1.42}$$

Используя этот результат, мы можем уточнить формулу (1.40), положив

$$\tilde{\sigma}_r = \frac{1}{(q^0 s)^k} e^{\int\limits_0^s \left(\frac{qs\Omega_r}{2} + k\right) \frac{ds}{s}}. \tag{1.43}$$

Выражение (1.42) есть аналитическая функция переменных $P_1, P_2, \ldots, P_{2k+1}, Q$ и функция переменной s, которая может быть разложена в ряд по степеням s с ненулевым радиусом сходимости. Отсюда следует, что функция

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta^0}} \frac{(-2)^{k-1} \Gamma(k)}{\Gamma(2k-1)} \tilde{\sigma}_1 \tag{1.44}$$

будем иметь указанный вид.

Перейдем к вычислению самой функции σ_r. Обозначая правую часть уравнения (1.36) через χ_r, мы сможем получить общее решение этого уравнения в виде

$$\sigma_r = \tilde{\sigma}_r \int\limits_0^s \frac{qs\chi_r}{2\tilde{\sigma}_r} \frac{ds}{s}. \tag{1.45}$$

Теперь рассмотрим выражение χ_r более детально. Производные по $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$, которые входят в операции (1.30), могут быть заменены производными по нормальным переменным $P_1, P_2, \ldots \ldots, P_{2k+1}, Q$. С другой стороны, производные по P_i или Q функции, которая зависит только от этих аргументов, т. е. от произведений p_i^0 и q^0 и переменной s, могут быть сведены к производным по p_i^0 и q^0 с помощью следующей простой формулы:

$$\frac{\partial F(P_1, P_2, \ldots, P_{2k+1}, Q)}{\partial p_i^0} = s\,\frac{\partial F}{\partial P_i},$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial P_i} = \frac{1}{s}\,\frac{\partial F}{\partial p_i^0}. \tag{1.46}$$

Из этого замечания и структуры функций $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r-1}$ следует, что χ также является полиномом степени $r-2$ относительно $\log(q^0 s)$:

$$\chi_r = T_0^{(r)}(s) + T_1^{(r)}(s)\log(q^0 s) + \ldots + T_{r-2}^{(r)}(s)\,[\log(q^0 s)]^{r-2}. \tag{1.47}$$

Коэффициенты полинома $T_l^{(r)}$, очевидно, будут рядами по степеням s, сходящимися в том же круге (1.41).

Легко проверить, что главный член выражения $T_l^{(r)}$ имеет вид

$$C_l s^{-(k+r-l+1)}, \tag{1.48}$$

а главный член в $T_0^{(r)}(s)$ эквивалентен величине

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0 \frac{D^2}{Dx_i Dx_j}\,\frac{(-2)^{k-r+1}}{\sqrt{\Delta^0}}\,\frac{\Gamma(k+r-2)\,\Gamma(k)}{\Gamma(k-r+2)\Gamma(2k-1)\Gamma(r-1)}\,Q^{-k-r+2} \approx$$

$$\approx -\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0 \frac{\partial^2\tau}{\partial x_i \partial x_j}\,\frac{(-2)^{k-r}}{\sqrt{\Delta^0}}\,\frac{\Gamma(k+r-2)\Gamma(k)\,(-k-r+2)}{\Gamma(k-r+2)\Gamma(2k-1)\Gamma(r-1)}\,Q^{-k-r+2} +$$

$$+\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0\,\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\,\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\,\frac{(-2)^{k-r}}{\sqrt{\Delta^0}} \times$$

$$\times\,\frac{\Gamma(k+r-2)\,\Gamma(k)\,(-k-r+2)\,(-k-r+1)}{\Gamma(k-r+2)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(r-1)}\,Q^{-k-r} \approx$$

$$\approx \frac{(-2)^{k-r+1}}{\sqrt{\Delta^0}}\,\frac{\Gamma(k+r-2)\,\Gamma(k)}{\Gamma(k-r+2)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(r-1)}\,[-2k(k+r-2)+$$

$$+(k+r)(k+r-2)]\,Q^{-k-r} =$$

$$= -\frac{(-2)^{k-r+1}}{\sqrt{\Delta^0}}\,\frac{\Gamma(k+r-1)\,\Gamma(k)}{\Gamma(k-r+1)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(r-1)}\,Q^{-k-r}$$

и, следовательно, равен

$$-\frac{(-2)^{k-r+1}}{\sqrt{\Delta^0}}\frac{\Gamma(k+r-1)\,\Gamma(k)}{\Gamma(k-r+1)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(r-1)}\left(q^0s\right)^{-k-r}. \tag{1.49}$$

Выражение

$$\frac{q^s\chi_r}{2\widetilde{\sigma}_r} \tag{1.50}$$

также является полиномом от $\log(q^0s)$ вида

$$\frac{q^s\chi_r}{2\widetilde{\sigma}_r}=L_0^{(r)}(s)+L_1^{(r)}(s)\log\left(q^0s\right)+\ldots+L_{r-2}^{(r)}(s)\left[\log\left(q^0s\right)\right]^{r-2}. \tag{1.51}$$

Главный член в $L_l^{(r)}(s)$ имеет порядок s^{-r-l+1}, а главный член в $L_0^{(r)}(s)$ равен

$$\frac{(-2)^{k-r}}{\sqrt{\Delta^0}}\frac{\Gamma(k+r-1)\,\Gamma(k)}{\Gamma(k-r+1)\,\Gamma(2k-1)\,\Gamma(r-1)}\left(q^0s\right)^{-r+1}. \tag{1.52}$$

Наше утверждение можно доказать, почленно интегрируя (1.45).

Полезно отметить, что выражение для N_0^* совпадает с $-\chi_{r+1}$ и что к нему также применима формула (1.47). Следует заметить, что главный член в $T_0^{(k+1)}$ обращается в нуль, так как функция $\Gamma(k-r+1)$, находящаяся в знаменателе, обращается в бесконечность.

5. **Первое основное тождество.** Теперь нетрудно вывести наше первое основное тождество. С этой целью снова рассмотрим характеристический коноид с вершиной в точке M^0. Этот коноид пересекается с гиперплоскостью $t=0$ по многообразию, которое является границей области D_0:

$$0\leqslant\tau\left(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}; x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2k+1}^0, t^0\right)=\tau\left(M; M^0, t^0\right) \tag{1.53}$$

в нашем пространстве R_{2k+1}. Удалим точку $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2k+1}^0$ из области D_0 вместе с малым эллипсоидом

$$H^0\equiv\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}H_{ij}^0\left(x_i-x_i^0\right)\left(x_j-x_j^0\right)=\varepsilon^2, \tag{1.54}$$

а оставшуюся область обозначим D_0'. В D_0' функции σ имеют непрерывные производные и удовлетворяют системе (1.32). Таким образом, сравнивая (1.29) и (1.31), мы будем иметь в D_0' тождество

$$\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\frac{\partial^{k-j}Lu}{\partial t^{k-j}}-u_0N_0^*\equiv\sum_{r=1}^{2k+1}\frac{\partial U_r}{\partial x_r}. \tag{1.55}$$

Теперь, чтобы вывести нашу первую основную формулу, необходимо проинтегрировать тождество (1.55) по области D_0' и преобразовать правую часть к интегралу по границе D_0'. Мы получим

$$\iint\limits_{D_0'} \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \frac{\partial^{k-j} Lu}{\partial t^{k-j}} \, dR_{2k+1} - \iint\limits_{D_0'} u_0 N_0^* dR_{2k+1} \equiv$$

$$\equiv - \int\limits_{\tau=0} \sum_{r=1}^{k} U_r \cos nx_r dS_{2k+1} - \int\limits_{H^0=\varepsilon^2} \sum_{r=1}^{k} U_r \cos nx_r dS_{2k+1}, \quad (1.56)$$

где $\cos nx_r$ — направляющие косинусы внутренней нормали в евклидовом смысле, а через dS_{2k+1} обозначен элемент гиперповерхности в R_{2k+1} также в евклидовом смысле.

Теперь остается перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. С этой целью сделаем замену переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$, введя координаты $y_1, y_2, \ldots, y_{2k+1}$ так, чтобы положительно определенная форма H^0 превратилась в сумму квадратов

$$H^0 = \sum_{j=1}^{2k+1} y_j^2. \quad (1.57)$$

Очевидно, что коэффциенты α_{ij} удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} H_{ij}^0 \alpha_{ik} \alpha_{jl} = \delta_{lk} \equiv \begin{cases} 0, & l \neq k, \\ 1, & l = k. \end{cases} \quad (1.58)$$

Введем также коэффициенты обратного преобразования

$$y_j = \sum_{i=1}^{2k+1} \beta_{ji} \left(x_i - x_i^0\right), \quad (1.59)$$

которые связаны с α_{ij} формулой

$$\sum_{j=1}^{2k+1} \alpha_{ij} \beta_{js} = \delta_{is}. \quad (1.60)$$

Транспонированное обратное преобразование

$$P_i = \sum_{j=1}^{2k+1} \beta_{ji} S_j \quad (1.61)$$

сводит форму $A^0(P_i)$ к сумме $(2k+1)$-го квадрата. Чтобы это доказать, полезно применить некоторые определения из теории матриц. Пусть $\alpha = \|\alpha_{ij}\|$ матрица и $\bar{\alpha}$ транспонированная матрица, т. е. $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ji}$. Тогда, если δ единичная матрица, то условие (1.58) может быть записано в виде $\bar{\alpha}H^0\alpha = \delta$, откуда, обращая, получаем $\beta A^0\bar{\beta} = \delta$ и окончательно

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} A^0_{ij}\beta_{si}\beta_{kj} = \delta_{sk}, \tag{1.62}$$

что доказывает наше утверждение.

Следует отметить, что определитель линейной подстановки α_{ij} выглядит так: $|\alpha_{ij}| = \sqrt{\Delta^0}$. Это вытекает из формулы (1.58).

Для дальнейшего полезно оценить величину q^0s, т. е. величину Q в координатах y_i. Для этого достаточно заметить, что на нашем характеристическом коноиде

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}P_iP_j,$$

так как он преобразуется в $Q^2 = \sum\limits_{i=1}^{2k+1} S_i^2$. С другой стороны, переменные S_i связаны с y_i формулами

$$y_i = S_i + \sum_{n=2}^{\infty} Y_n(S_j),$$

откуда следует, что

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{2k+1} y_i^2 + \sum_{n=3}^{\infty} R_n(y_i), \tag{1.63}$$

Обозначая $\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{2k+1} y_i^2}$, мы видим, что величина q^0s того же порядка, что и ρ.

Из нашей оценки величин N_0^* и σ_j следует, что интегралы в правой части (1.56) равномерно сходятся во всей области D_0' и что правая часть имеет определенный предел при $\varepsilon \to 0$. Это становится очевидным, если, например, мы введем «полярные координаты» с помощью формул

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \rho\cos\theta_1, \\ y_2 = \rho\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{2k} = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{2k-1}\cos\varphi, \\ y_{2k+1} = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{2k-1}\sin\varphi. \end{array}\right. \tag{1.64}$$

Мы будем иметь

$$dR_{2k+1}=\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{2k+1})}\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_{2k+1})}{D(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{2k-1}, \varphi)}d\rho\, d\theta_1\ldots d\varphi =$$
$$=\sqrt{\Delta^0}\rho^{2k}\sin^{2k-1}\theta_1\sin^{2k-2}\theta_2\ldots\sin\theta_{2k-1}d\rho\, d\theta_1\ldots d\theta_{2k-1}d\varphi. \tag{1.65}$$

Учитывая, что абсолютные значения величины $N_0^*(\sigma)$ и величин σ_i не превосходят $A\rho^{-2k}\log\rho$, мы заключаем, что они интегрируемы на R_{2k+1}, что и требовалось доказать.

Теперь заменим переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$ в правой части (1.56) переменными $y_1, y_2, \ldots, y_{2k+1}$. Заметим, что выражение

$$\int\sum_{r=1}^{k}U_r\cos nx_r d_xS_{2k+1}$$

преобразуется в

$$\int\sum_{s=1}^{k}V_s\cos ny_s d_yS_{2k+1},$$

где V_s связаны с U_s формулами

$$V_s=\sqrt{\Delta^0}\sum_{r=1}^{2k+1}\beta_{jr}U_r. \tag{1.66}$$

Для доказательства нужно заменить $\cos nx_r d_xS_{2k+1}$ величиной $\frac{dx_1dx_2\ldots dx_{2k+1}}{dx_r}$ и сделать замену переменных.

В координатах y_i эллипсоид (1.54) превратится в сферу, $\cos ny_i$ станут равными $\frac{y_i}{\rho}$, а d_yS_{2k+1} обратится в

$$\rho^{2k}\sin^{2k-1}\theta_1\sin^{2k-2}\theta_2\ldots\sin\theta_{2k-1}d\theta_1 d\theta_2\ldots, d\theta_{2k-1}d\varphi.$$

Можно показать, что член порядка ε^{-2k} в каждом выражении U_s возникает в результате интегрирования по частям функции $\sigma_k D_0^{(0)}u_0 - u_0 D_0^{(0)*}\sigma_k$. Точнее говоря, этот член происходит из $\sum_{j=1}^{2k+1}u_0A_{ij}^0\frac{\partial\sigma_k}{\partial x_j}$. Если мы учтем лишь слагаемое $\frac{1}{\sqrt{\Delta^0}Q^{2k-1}}$ в σ_k, то сможем заменить это выражение на

$$-\frac{u_0}{\sqrt{\Delta^0}}\sum_{j=1}^{2k+1}\frac{\partial Q^{-(2k-1)}}{\partial Q}A_{ij}^0\frac{p_i}{q}$$

или на $\frac{1}{\sqrt{\Delta^0}}(2k-1)\,u_0\left(q^0 s\right)^{-2k-1}\sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}^0 P_j$, и, наконец,

$$U_s \approx \frac{(2k-1)\,u_0 s^{-2k-1}}{\sqrt{\Delta^0}}\left(x_s - x_s^0\right) + o\left(s^{-2k-1}\right). \qquad (1.67)$$

С помощью простого вычисления мы можем найти, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{H^0=\varepsilon^2}\sum_{s=1}^{2k+1} U_s \cos nx_s d_x S_{2k+1} =$$

$$= 2\,(2k-1)\frac{\pi^{\frac{2k+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)}\,u\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_{2k+1}^0,\ t^0\right). \qquad (1.68)$$

Обозначая постоянную $2\,(2k-1)\frac{\pi^{(2+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)}$ через $\varkappa$, мы получим из (1.56) основное тождество

$$u\left(M^0,\ t^0\right) = -\frac{1}{\varkappa}\int\limits_{\tau(M;M^0,t^0)=0}\sum_{s=1}^{2k+1} U_s\left(M;\ M^0,\ t^0\right)\cos nx_s d_x S_{2k+1} +$$
$$+\frac{1}{\varkappa}\iint\limits_{0\leqslant\tau(M;M^0,t^0)=t} u\,(M,\ t)\,N_0^*\left(M;\ M^0,\ t^0\right)dR_{2k+1} -$$
$$-\frac{1}{\varkappa}\iint\limits_{0\leqslant\tau(M;M^0,t^0)=t}\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\left(M;\ M^0,\ t^0\right)\frac{\partial^{k-j}Lu\,(M;\ t)}{\partial t^{k-j}}\,dR_{2k+1}, \qquad (1.69)$$

где M — точка с координатами $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2k+1}$, а M^0 — точка с координатами $x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_{2k+1}^0$. Это интегральное тождество есть основа нашего метода.

6. Метод последовательных приближений и вторая основная формула. Преобразуем формулу (1.69), подставим в правую часть (1.69) значение u, взятое из левой части. Мы получим

$$u\left(M^0,\ t^0\right) \equiv -\frac{1}{\varkappa}\int\limits_{\tau(M;M^0,t^0)=0}\sum_{s=1}^{2k+1} U_s\left(M;\ M^0,\ t^0\right)\cos nx_s d_x S_{2k+1} -$$
$$-\frac{1}{\varkappa}\iint\limits_{0\leqslant\tau(M;M^0,t^0)=t}\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\left(M;\ M^0,\ t^0\right)\frac{\partial^{k-j}Lu\,(M;\ t)}{\partial t^{k-j}}\,dR_{2k+1} +$$

$$+\frac{1}{\varkappa}\iint\limits_{0\leqslant\tau(M;M^0,t^0)=t} N_0^*(M;\,M^0,\,t^0)\times$$

$$\times\left\{-\frac{1}{\varkappa}\int\limits_{\tau(M^{(1)};M,t)=0}\sum_{s=1}^{2k+1} U_s(M^{(1)};\,M,\,t)\cos nx_s^{(1)}dS_{2k+1}^{(1)}+\right.$$

$$+\frac{1}{\varkappa}\iint\limits_{0\leqslant\tau(M^{(1)};M,t)=t^{(1)}} N_0^*(M^{(1)};\,M,\,t)\,u(M^{(1)},\,t^{(1)})\,dR_{2k+1}^{(1)}-$$

$$-\frac{1}{\varkappa}\iint\limits_{0\leqslant\tau(M^{(1)};M,t)=t^{(1)}}\sum_{j=1}^{k}\sigma_j(M^{(1)};\,M,\,t)\times$$

$$\left.\times\frac{\partial^{k-j}Lu(M^{(1)},\,t^{(1)})}{\partial t^{(1)k-j}}\,dR_{2k+1}^{(1)}\right\}dR_{2k+1}. \qquad (1.70)$$

Соотношение (1.70) есть итерированная основная формула. Повторяя эту процедуру, т. е. подставляя в последний интеграл в (1.70) значение $u(M^{(1)},\,t^{(1)})$, взятое из (1.69), мы получим дважды итерированную формулу и т. д.

Докажем теперь, что правые части итерированных формул сходятся к некоторому пределу, если число итераций неограниченно растет. В результате получим наше второе основное тождество. Для этого достаточно лишь доказать, что член, содержащий саму функцию u в правой части n раз итерированной формулы

$$U_n(M^0,\,t^0)=\frac{1}{\varkappa^n}\iint\limits_{0\leqslant\tau(M;M^0,t^0)=t} N_0^*(M;\,M^0,\,t^0)\times$$

$$\times\iint\limits_{0\leqslant\tau(M^{(1)};M,t)=t^{(1)}} N_0^*(M^{(1)};\,M,\,t)\times$$

$$\times\iint\limits_{0\leqslant\tau(M^{(2)};M^{(1)}t^{(1)})=t^{(2)}} N_0^*(M^{(2)};\,M^{(1)},\,t^{(1)})\,\ldots$$

$$\ldots\iint\limits_{0\leqslant\tau(M^{(n)};M^{(n-1)},t^{(n-1)})=t^{(n)}} N_0^*(M^{(n)};\,M^{(n-1)},\,t^{(n-1)})\times$$

$$\times\,u(M^{(n)},\,t^{(n)})\,dR_{2k+1}^{(n)}dR_{2k+1}^{(n-1)}\ldots dR_{2k+1}^{(1)}dR_{2k+1}, \qquad (1.71)$$

стремится к нулю. Сначала заметим, что величины $U_n(M^0,\,t^0)$ связаны следующим рекуррентным соотношением:

$$U_n(M^0,\,t^0)=\frac{1}{\varkappa}\iint\limits_{0\leqslant\tau(M;M^0,t^0)=t} N_0^*(M;\,M^0,\,t^0)\,U_{n-1}(M,\,t)\,dR_{2k+1}. \qquad (1.72)$$

Функция U_0, очевидно, ограничена, $|U_0| \leqslant M$. Если мы введем полярные координаты

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \rho \cos \theta_1, \\
X_2 &= \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{2k} &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{2k-1} \cos \varphi, \\
X_{2k+1} &= \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{2k-1} \sin \varphi,
\end{aligned} \tag{1.73}
$$

то сможем записать

$$dR_{2k+1} = \rho^{2k} \sin^{2k-1}\theta_1 \sin^{2k-2}\theta_2 \ldots \sin \theta_{2k-1} d\rho\, d\theta_1 \ldots d\theta_{2k-1} d\varphi. \tag{1.74}$$

Из формулы (1.47) следует, что величина $N_0^*(M;\ M^0,\ t^0)$ не превосходит $MQ^{-2k-\alpha}$, где M есть константа, а α — любая положительная постоянная. С другой стороны, из (1.18) следует, что $Q \leqslant A\rho$. Формула (1.72) нам дает

$$|U_n(M^0,\ t^0)| \leqslant \frac{1}{\varkappa} \int_0^\pi \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\rho(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2k-1}, \varphi, t^0)} MA\rho^{-\alpha} |U_{n-1}|\, d\rho \right\} \times$$

$$\times\, d\varphi \left\{ \sin^{2k-1}\theta_1 d\theta_1 \ldots \right\} d\theta_{2k-1}. \tag{1.75}$$

Заметим теперь, что для фиксированных $\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \varphi$ функция $\rho_1 = t^0 - \tau$ зависит лишь от ρ и удовлетворяет неравенству $\rho_1 \leqslant L_1 \rho$ и $\left| \frac{\partial \rho_1}{\partial \rho} \right| \leqslant L_2$. Заменяя ρ переменной ρ_1, мы получим

$$|U_n(M^0,\ t^0)| \leqslant \frac{1}{\varkappa} \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{t^0} MAL_1L_2 |U_{n-1}|\, \rho_1^{-\alpha} d\rho_1 \right\} \ldots d\theta_1. \tag{1.76}$$

Далее предположим, что U_{n-1} удовлетворяет неравенству

$$|U_{n-1}(M^0,\ t^0)| \leqslant \mathscr{E}^{n-1} t^{0(n-1)(1-\alpha)} / \Gamma((n-1)(1-\alpha)+1),$$

и докажем, что для U_n справедливо неравенство

$$|U_n(M^0,\ t^0)| \leqslant \mathscr{E}^n t^{0n(1-\alpha)} / \Gamma(n(1-\alpha)+1).$$

Поскольку это условие выполнено для U_0, мы сможем заключить, что оно выполнено для всех функций U_n, и, следовательно, они равномерно стремятся к нулю.

С этой целью мы подставим в (1.75) предполагаемую оценку для U_{n-1}. Мы получим

$$U_n(M^0, t^0) \leqslant \frac{\mathscr{E}^{n-1}C}{\Gamma((n-1)(1-\alpha)+1)} \int_0^{t^0} \left(t^0-\rho_1\right)^{(n-1)(1-\alpha)} \rho_1^{-\alpha} d\rho_1 =$$

$$= \mathscr{E}^{n-1}C \frac{t^{0n(1-\alpha)}}{\Gamma((n-1)(1-\alpha)+1)} \mathrm{B}((n-1)(1-\alpha)+1, 1-\alpha) =$$

$$= \frac{\mathscr{E}^{n-1}Ct^{0n(1-\alpha)}\Gamma((n-1)(1-\alpha)+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma((n-1)(1-\alpha)+1)\Gamma((n-1)(1-\alpha)+2-\alpha)},$$

и, полагая $\mathscr{E} = C\Gamma(1-\alpha)$, придем к искомому неравенству.

Переходя к пределу в итерированном тождестве, мы приходим к нашей второй основной формуле, которая записывается в виде ряда

$$u(M^0, t^0) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n, \tag{1.77}$$

где

$$J_0 = -\frac{1}{\varkappa} \int\limits_{\tau(M, M^0, t^0)=0} \sum_{s=1}^{2k+1} U_s(M; M^0, t^0) \cos nx_s dS_{2k+1} -$$

$$-\frac{1}{\varkappa} \iint\limits_{0<\tau(M; M^0, t^0)=t} \sum_{s=1}^{k} \sigma_s(M; M^0, t^0) \frac{\partial^{k-s}Lu(M, t)}{\partial t^{k-s}} dR_{2k+1}, \tag{1.78}$$

$$J_n = \frac{1}{\varkappa} \iint\limits_{0<\tau(M; M^0, t^0)=t} N_0^*(M; M^0, t^0) J_{n-1}(M, t) dR_{2k+1}. \tag{1.79}$$

7. Первый алгоритм решения. Сказанное выше позволит нам построить алгоритм для нахождения решения задачи Коши для уравнения (1.1) в предположении, что такое решение существует и имеет ограниченные производные до порядка $(k+1)$. Действительно, в ряде (1.77) теперь известны все члены, так как U_s зависит лишь от значений производных функции u на поверхности $t=0$. Но, как известно, эти производные могут быть вычислены с помощью данных Коши (1.2). Значения функции Lu и ее производных также могут быть получены из уравнения.

Заметим, что сходимость ряда (1.77) может быть установлена немедленно с помощью оценок, полностью аналогичных тем, которые мы проделали выше. Мы получим

$$|J_n| \leqslant \mathscr{E}^n t^{0n(1-\alpha)}/\Gamma(n(1-\alpha)+1).$$

Теперь нам остается доказать существование решения. Этот вопрос есть тема следующих глав.

2. Функциональное пространство [1]

1. Основное функциональное пространство. Для дальнейшего очень важно рассмотрение функционального пространства, которое мы обозначим Φ. Элементы этого пространства суть функции φ, зависящие от $2k+2$ независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, t$, непрерывные вместе с некоторыми своими производными. Каждой такой функции φ должна отвечать некоторая ограниченная область V_φ, вне которой эта функция обращается в нуль. Множество функций нашего пространства, которые имеют непрерывные производные до порядка s, образуют подпространство Φ_s.

Определим понятие сходимости для функций нашего пространства. Скажем, что последовательность φ_n функций сходится со степенью s в Φ к функции φ, если

1) существует ограниченная область $\overline{V}_\varphi$, содержащая внутри себя все V_{φ_n};

2) функции φ_n со своими производными до порядка s равномерно сходятся к функции φ и соответствующим ее производным. Эту сходимость мы обозначим так:

$$\varphi_n \overset{s}{\Rightarrow} \varphi. \tag{2.1}$$

Очевидно, что соотношение (2.1) влечет $\varphi_n \overset{r}{\Rightarrow} \varphi$ для каждого $r \leqslant s$.

Введем понятие линейного функционала на Φ. Пусть $(\rho \cdot \varphi)$ — число, которое получается в результате применения функционала ρ к функции φ. Функционал ρ называется линейным класса s, если он определен для каждой функции из Φ_s и удовлетворяет условиям:

$$(\rho \cdot a\varphi_1 + b\varphi_2) = a(\rho \cdot \varphi_1) + b(\rho \cdot \varphi_2), \tag{2.2}$$

$$(\rho \cdot \varphi_n) \to (\rho \cdot \varphi), \text{ если } \varphi_n \overset{s}{\Rightarrow} \varphi. \tag{2.3}$$

Множество функционалов класса s будет обозначаться через Z_s. Очевидно, можно определить сумму двух функционалов и произведение функционала и константы. Введем понятие предела последовательности функционалов (слабая сходимость). Мы скажем, что последовательность ρ_n сходится в Z_s к функционалу ρ, если $(\rho_n \varphi) \to (\rho \cdot \varphi)$ для всякой φ из Φ_s. Эта сходимость будет обозначаться так:

$$\rho_n \overset{s}{\to} \rho.$$

Далее рассмотрим линейные операции в нашем пространстве.

Пусть $L\varphi$ — функция, полученная применением операции L к функции φ. Операция $L\varphi$ в Φ называется линейной, если она 1) аддитивна и 2) непрерывна:

$$L(a\varphi_1 + b\varphi_2) = aL\varphi_1 + bL\varphi_2, \tag{2.4}$$

$$L\varphi_n \overset{s_1}{\Rightarrow} L\varphi, \text{ если } \varphi_n \overset{s_2}{\Rightarrow} \varphi, \tag{2.5}$$

т. е. если эта операция сопоставляет некоторому множеству Φ_s подмножество Φ_{s_1} с сохранением сходимости. Непрерывность этой операции определяется, таким образом, функцией $s_1(s_2)$, которая сопоставляет числу s_2 некоторое другое число s_1. Предполагается, чта эта функция, которую мы назовем *функцией непрерывности*, определена по крайней мере для одного значения s_2.

Подобным образом можно задать линейные операции в пространстве функционалов. Линейная операция есть операция, которая сопоставляет каждому функционалу из Z_{s_2} некоторый функционал из класса Z_{s_1} и является аддитивной и непрерывной:

$$L(a\rho_1 + b\rho_2) = aL\rho_1 + bL\rho_2, \tag{2.6}$$

$$L\rho_n \xrightarrow{s_1} L\rho, \text{ если } \rho_n \xrightarrow{s_2} \rho. \tag{2.7}$$

Характер непрерывности этих операций также задается соответствием между двумя числами s_1 и s_2

2. Некоторые важные примеры функционалов. Теорема о приближении функционалов. Среди линейных функционалов некоторые имеют совсем простую форму. Они могут быть записаны в виде

$$(\rho\varphi) = \int\int\int \rho(M)\,\varphi(M)\,dR_{2k+2}, \tag{2.8}$$

где $\rho(M)$ есть функция точки M, суммируемая со всеми своими производными до порядка s на каждой ограниченной части пространства. Такие функционалы мы назовем функционалами степени s. Свойства таких функционалов имеют важное значение в дальнейшем, поскольку всегда можно построить последовательность функционалов произвольной степени, которая сходится к любому функционалу ρ из Z_s.

Построим такую последовательность. Пусть $\omega_\eta^{M^2}(M^1)$ — функция, заданная формулами

$$\omega_\eta^{M^2}(M^1) = 0,$$

если $r(M^1, M^2) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{2k+1} \left(x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right)^2 + \left(t^{(1)} - t^{(2)}\right)^2} \geqslant \eta$, и

$$\omega_\eta^{M^2}(M^1) = \frac{1}{K}\, e^{\frac{r^2(M^1, M^2)}{r^2(M^1, M^2) - \eta^2}},$$

если

$$r(M^1, M^2) \leqslant \eta, \tag{2.9}$$

а константа K определяется как

$$K = \int\int\int \omega_\eta\, dR_{2k+2}. \tag{2.10}$$

По заданному функционалу ρ построим функцию $\rho_\eta(M)$ по формуле

$$\rho_\eta(M) = \left(\rho \cdot \omega_\eta^M\right). \tag{2.11}$$

Докажем, что при бесконечно малом η функционалы ρ_η сходятся к функционалу ρ в Z_s. В самом деле, находим

$$(\rho_\eta \cdot \varphi) = \int\int\int \varphi(M)\,\rho_\eta(M)\,dR_{2k+2}. \tag{2.12}$$

Хорошо известно, что этот интеграл может быть заменен суммой

$$\int\int\int \varphi(M)\,\rho_\eta(M)\,dR_{2k+2} = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\,\rho_\eta(\xi_i)\,\Delta V_i + \varepsilon =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\left(\rho_\eta \omega_\eta^{(\xi_i)}\right)\Delta V_i + \varepsilon,$$

где ε бесконечно малая величина, когда малы ΔV_i. Таким образом,

$$\int\int\int \varphi(M)\,\rho_\eta(M)\,dR_{2k+2} = \rho\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\,\omega_\eta^{(\xi_i)}\,\Delta V_i\right) + \varepsilon.$$

Переходя к пределу при ΔV_i стремящихся к нулю и замечая, что сумма $\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\,\omega_\eta^{(\xi_i)}\Delta V_i$ равномерно стремится к предельной функции

$$\varphi_\eta(M) = \int\int\int \varphi(\xi)\,\omega_\eta^{(\xi_i)} d_\xi R_{2k+2}$$

вместе с производными до порядка s, мы получаем

$$(\rho_\eta \cdot \varphi) = (\rho \cdot \varphi_\eta). \tag{2.13}$$

Еще раз переходя к пределу и учитывая, что φ_η стремится к φ равномерно с производными до порядка s, мы видим, что $(\rho_\eta \cdot \varphi) \xrightarrow{s} (\rho \cdot \varphi)$, т. е. $\rho_\eta \to \rho$. Функционалы ρ_η, очевидно, имеют бесконечную степень. Следовательно, наша теорема доказана.

3. Некоторые важные примеры линейных операций. Сопряженные операции. Дадим несколько примеров линейных операций в пространстве функций. Наиболее простая есть операция умножения на данную функцию $\omega(M)$

$$L\varphi = \omega\varphi. \tag{2.14}$$

Легко понять, какова ее функция непрерывности. Если функция ω имеет непрерывные производные до порядка s_2', то $s_1 = \min\left(s_2, s_2'\right)$. Рассмотрим также операцию дифференцирования. Мы имеем

$$L\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi. \tag{2.15}$$

Функция непрерывности в этом случае есть $s_1 = s_2 - 1$. При помощи сложения и умножения из этих операций получаются обыкновенные дифференциальные операции, представляющие для нас специальный интерес.

Можно построить примеры линейных операций в пространстве функционалов, используя понятие сопряженной операции. Рассмотрим произведение

$$(\rho \cdot L\varphi). \tag{2.16}$$

Легко видеть, что это произведение зависит от φ линейно, т. е. $(\rho \cdot L(a\varphi_1 + b\varphi_2)) = a(\rho \cdot L\varphi_1) + b(\rho \cdot L\varphi_2)$ и $(\rho \cdot L\varphi_n) \xrightarrow[s_2]{} (\rho \cdot L\varphi)$, если $\rho \in Z_{s_1}$ и $\varphi_n \Rightarrow \varphi$. Следовательно, это произведение может быть записано как

$$(\chi \cdot \varphi), \tag{2.17}$$

где χ есть функционал. Функционал χ зависит от ρ также линейно. Аддитивность очевидна, так как

$$a(\rho_1 \cdot L\varphi) + b(\rho_2 \cdot L\varphi) = (a\rho_1 + b\rho_2 \cdot L\varphi). \tag{2.18}$$

Непрерывность следует из того, что $(\rho_n \cdot L\varphi) \to (\rho \cdot L\varphi)$, если

$$\varphi \in \Phi_{s_2} \text{ и } \rho_n \xrightarrow{s_1} \rho, \tag{2.19}$$

а поэтому функция непрерывности является обратной к функции $s_1 = \mu(s_2)$ (точнее, каждому значению s_1 отвечает наибольшее возможное число s_2). Итак, $\chi = L^*\rho$. Операция $L^*\rho$ называется сопряженной к операции $L\varphi$.

Для функционалов специального вида, которые мы рассматривали в п. 2, можно естественным образом определить операции умножения на произвольную функцию ω и дифференцирования. Если

$$(\rho \cdot \varphi) = \int\int\int \rho \cdot \varphi \, dR_{2k+2}, \tag{2.20}$$

мы полагаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho \cdot \varphi\right) = \int\int\int \frac{\partial \rho}{\partial x} \varphi \, dR_{2k+2}, \tag{2.21}$$

$$(\omega\rho \cdot \varphi) = \int\int\int \omega\rho\varphi \, dR_{2k+2}. \tag{2.22}$$

Можно проверить формулу

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho \cdot \varphi\right) = \left(\rho \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x}\varphi\right)\right), \tag{2.23}$$

которая следует из (2.21) после интегрирования по частям. С другой стороны,

$$(\omega\rho \cdot \varphi) = (\rho \cdot \omega\varphi). \tag{2.24}$$

Из этого замечания о сопряженных операциях следует, что операции $\frac{\partial}{\partial x}$ и ω могут быть распространены на функционалы общего вида. Очевидно, нужно рассмотреть правые части (2.23) и (2.24) как определения левых частей.

Операция $\frac{\partial}{\partial x}$ применима к любому функционалу и ее функция непрерывности равна $s_2 = s_1 + 1$. Операция умножения на ω, когда функция ω имеет непрерывные производные до порядка s', определена для всех функционалов до класса s'; ее функция непрерывности есть $s_2 = s_1$. Описанное распространение операций единственно, поскольку множество, на котором определение имеет смысл, всюду плотно. Используя сделанные замечания, можно также определить любые дифференциальные операции на пространстве функционалов.

Особенно интересно будет отыскать решение уравнения

$$Lu = \rho \tag{2.25}$$

при определенных начальных условиях, предполагая, что ρ и u не функции, а функционалы. Основная цель дальнейшего — установить существование и единственность такого решения.

4. Задача Коши для пространства функционалов. Теперь перейдем к задаче Коши, которая была поставлена в § 1. Пусть u — неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению

$$Lu = \sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2k+1} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \tag{2.26}$$

(уравнение (1.1)) и начальным условиям

$$\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= u^{(0)}(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= u^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Рассмотрим разрывную функцию $\underline{u}$, которая совпадает с функцией u при $t > 0$ и обращается в нуль при $t < 0$. Построим соответствующий функционал

$$(\underline{u}\cdot\varphi) = \int\int\int \underline{u}\varphi\, dR_{2k+2} = \underset{t>0}{\int\int\int} u\cdot\varphi\, dR_{2k+2}. \tag{2.28}$$

Теперь вычислим операцию $L\underline{u}$ для этого функционала. По определению

$$(L\underline{u}\cdot\varphi) = (\underline{u}\cdot L^*\varphi) = \underset{t>0}{\int\int\int} uL^*\varphi\, dR_{2k+2}.$$

Применяя интегрирование по частям, мы получим

$$(L\underline{u}\cdot\varphi) = \underset{t>0}{\int\int\int} Lu\cdot\varphi\, dR_{2k+2} + \underset{t=0}{\int\int}\left\{u\big|_{t=0}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}\varphi\right\}dR_{2k+1}.$$

Принимая во внимание (2.26) и (2.27), мы получим

$$(\underline{L}u \cdot \varphi) = \iiint\limits_{t>0} F\varphi \, dR_{2k+2} + \iint\limits_{t=0} \left\{ u^{(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - u^{(1)}\varphi \right\} dR_{2k+1}. \quad (2.29)$$

Поскольку операции в правой части (2.29) известны, мы видим, что значение $L\underline{u}$ равно некоторому известному функционалу ρ.

Итак, мы имеем

$$L\underline{u} = \rho, \quad (2.30)$$

где

$$(\rho \cdot \varphi) \equiv \iiint\limits_{t>0} F\varphi \, dR_{2k+2} + \iint\limits_{t=0} \left(u^{(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - u^{(1)}\varphi \right) dR_{2k+1}. \quad (2.31)$$

Существенное свойство нашего функционала состоит в том, что произведение $(\underline{u} \cdot \varphi)$ не зависит от значений функции φ при $t < 0$. Если мы условимся говорить, что функционал ρ обращается в нуль в области D, если $(\rho \cdot \varphi)$ не зависит от значений φ в D, то сможем сформулировать «обобщенную задачу Коши»: *найти решение уравнения*

$$L\underline{u} = \rho, \qquad \rho|_{t<0} = 0 \quad (2.32)$$

с начальными условиями

$$\underline{u}|_{t<0} = 0. \quad (2.33)$$

Заметим, что если такое решение существует и выражается формулой (2.28) с функцией $\underline{u}$, имеющей суммируемые производные второго порядка, то функция u удовлетворяет уравнению (2.26) и начальным условиям (2.27). Действительно, в этом случае для любой функции φ

$$\iiint\limits_{t>0} L\underline{u}\varphi \, dR_{2k+2} + \iint\limits_{t=0} \left\{ u \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \varphi \right\} dR_{2k+1} =$$

$$= \iiint\limits_{t>0} F\varphi \, dR_{2k+2} + \iint\limits_{t=0} \left\{ u^{(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - u^{(1)}\varphi \right\} dR_{2k+1}.$$

Но это соотношение может иметь место только в случае, если (2.26) и (2.27) выполняются, что и требовалось доказать.

3. Обобщенная задача Коши

1. Исследование основной обратной операции. Формула (1.77) дает представление произвольной функции, имеющей непрерывные производные до порядка $k+1$ по заданным значениям Lu при $t > 0$ и начальным значениям функции u и производной $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$. Установим некоторые свойства, касающиеся операции в правой части этой формулы. Мы докажем следующее утверждение.

Теорема. *Если мы подставим в правую часть уравнения (1.77) вместо Lu произвольную функцию, обладающую непрерывными производными до порядка $s+k+1$, вместо $u^{(0)}$ — произвольную функцию, имеющую непрерывные производные до порядка $s+k+1$, а вместо $u^{(1)}$ — произвольную функцию с непрерывными производными до порядка $s+k$, то сумма*

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n \tag{3.1}$$

оказывается функцией, имеющей непрерывные производные порядка s.

Для доказательства мы почленно продифференцируем ряд (1.77), учитывая формулы (1.78). Для упрощения выкладки удобно свести интегралы (1.78) к интегралам по фиксированным областям. С этой целью можно, например, ввести новые переменные

$$t_1 = \frac{t}{t^0},\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_{2k-1},\ \varphi, \tag{3.2}$$

где $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2k-1}, \varphi$ заданы формулами, аналогичными формулам (1.64):

$$\begin{aligned}
S_1 &= \rho\cos\theta_1,\\
S_2 &= \rho\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_i &= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\ \ldots\ \sin\theta_{i-1}\cos\theta_i\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_{2k} &= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{2k-1}\cos\varphi,\\
S_{2k+1} &= \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{2k-1}\sin\varphi,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

а S_i суть нормальные переменные Липшица для координат y, введенных формулами (1.62). Из этих формул видно, что переменные $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2k-1}, \varphi$ остаются постоянными на каждой бихарактеристике. Функциональный определитель, который входит в интегралы (1.78), после замены становится аналитической функцией. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, t$ заменяются аналитическими функциями переменных $x_1^0, \ldots, x_{2k+1}^0, t^0, \theta_1, \ldots, \theta_{2k-1}, \varphi, t$. И J_0 станет интегралом, который зависит от параметров $x_1^0, \ldots, t^0$ только через функции σ_i и $\dfrac{\partial^j Lu}{\partial t^j}$, $u^{(0)}$ и $u^{(1)}$.

Дифференцирование под знаком интеграла, очевидно, возможно. Поскольку функция σ_{k-j} представляется рядом, содержащим отрицательные степени s, а также $\log s$, которые преобразуются после нашей замены переменных в члены с отрицательными степенями $1-t_1$ и $\log(1-t_1)$, не зависящими от координат $x_1^0, \ldots$ $\ldots, x_{2k+1}^0, t^0$, дифференцирование не меняет порядка бесконечности функции σ_{k-j}. Теперь возможность почленного дифференцирования ряда (1.77) может быть доказана по индукции. Равномерная сходимость рядов из производных следует из сходных оценок. Наша теорема доказана.

Все наши результаты сохраняются, если вместо $t = 0$ мы рассмотрим новую поверхность, несущую данные Коши, имеющую пространственную ориентацию, т. е. такую, которая высекает на любом характеристическом коноиде ограниченную область, содержащую вершину этого коноида в своей внутренности. Рассмотрим задачу нахождения функции, которая обращается в нуль со всеми производными на такой поверхности.

Правая часть (1.77) в этом случае зависит только от функции Lu. Она является аддитивной операцией над Lu. Обозначим эту операцию G. Наше уравнение (1.77) запишется в виде

$$u = GLu. \tag{3.4}$$

Операция G сопоставляет каждой функции ψ из нашего основного пространства Φ_{s+k+1} другую функцию

$$\varphi = G\psi, \tag{3.5}$$

которая имеет непрерывные производные до порядка s, определена и отлична от нуля в неограниченной области, которую мы дальше определим точнее.

2. Гиперболическое пространство. Чтобы упростить изложение нашего метода, будет удобно ввести новое функциональное пространство, которое мы назовем гиперболическим и будем обозначать Ψ. Это пространство строится следующим образом.

Мы назовем область прямой гиперболической, если ее общая часть с любым прямым характеристическим коноидом (т. е. таким, у которого значение t в вершине максимально) конечна. Обратная гиперболическая область есть область, для которой общая часть с любым обратным характеристическим коноидом конечна. Прямое гиперболическое пространство образовано функциями ψ, которые отличны от нуля каждая в своей прямой гиперболической области, отвечающей V_ψ, и которые имеют непрерывные производные до порядка s ($s = 0, 1, \ldots$). Множество функций такого сорта, обладающих непрерывными производными до порядка s, образуют подпространство Ψ_s.

Понятие сходимости в Ψ_s аналогично тому, которое мы рассматривали в гл. II. Мы скажем, что последовательность ψ_n сходится к предельной функции ψ в Ψ_s, если производные ψ_n до порядка s равномерно сходятся к соответствующим производным ψ на каждой ограниченной части пространства и если существует прямая гиперболическая область $\overline{V}_\psi$, содержащая внутри себя все V_{ψ_n}.

Очевидно, что наше основное пространство, рассмотренное в гл. II, является частью гиперболического пространства. Пространство функционалов, заданных на гиперболическом пространстве, будет обозначаться W. Значение символа W_s очевидно. Ясно, что всякий функционал на гиперболическом пространстве является также функционалом на основном пространстве.

Необходимо заметить, что слабая сходимость последовательности функционалов ρ_n, принадлежащих одновременно W_s и Z_s, различна в этих двух пространствах. Последовательность, сходящаяся в W_s, очевидно, сходится и в Z_s, в то время как для того, чтобы последовательность ρ_n, сходящаяся в Z_s, сходилась также и в W_s, необходимо и достаточно, чтобы существовал (прямой) характеристический коноид, вне которого все ρ_n обращались бы в нуль. Действительно, в противном случае можно построить функцию ψ, принадлежащую Ψ_s, т. е. отличную от нуля лишь в некоторой прямой гиперболической области, для которой последовательность $(\rho_n \cdot \psi)$ не имеет никакого предела.

В нашем гиперболическом пространстве можно ввести линейные операции, полностью аналогичные линейным операциям в фундаментальных пространствах. Теперь мы можем более точно охарактеризовать операцию G.

Операция G есть линейная операция в прямом гиперболическом пространстве, непрерывно преобразующая каждое множество Ψ_{s+k-1} в некоторое подмножество пространства Ψ_s.

Доказательство очевидно. Возвращаясь сейчас к формуле

$$GLu = u, \tag{3.6}$$

мы видим, что она справедлива, если [2]

$$u \in \Psi_{s+k-1} \qquad (s \geqslant 2). \tag{3.7}$$

3. Операция, сопряженная к операции G. Поскольку пространство функционалов на гиперболическом пространстве ýже, чем пространство функционалов на основном пространстве, операция G^*, сопряженная к G, определена не на всем основном пространстве функционалов, но только на тех функционалах, которые являются также функционалами на прямом гиперболическом пространстве. Сейчас мы увидим, что эту операцию можно распространить на множество несколько более общих функционалов.

Для того чтобы функционал ρ на основном пространстве был также функционалом на прямом гиперболическом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы этот функционал был отличен от нуля только внутри некоторого фиксированного прямого характеристического коноида. В противном случае можно найти прямую гиперболическую область K, общая часть которой с областью, где ρ отличен от нуля, неограничена. Выделяя из этой общей части последовательность неограниченно удаляющихся областей D_ν и строя для каждой D_ν функцию φ_ν так, чтобы $(\rho \cdot \varphi_\nu) = 1$, мы получаем функцию

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu, \tag{3.8}$$

отличную от нуля только в K, для которой произведение

$$(\rho \cdot \varphi) \tag{3.9}$$

не имеет смысла.

Сейчас мы покажем, что операция G^* может быть продолжена на все функционалы, которые отличны от нуля в обратной гиперболической области [3]. Для этого достаточно установить, что если два функционала ρ_1 и ρ_2 различны лишь во внешности фиксированного обратного коноида (т. е. совпадают для каждой функции, которая отлична от нуля лишь внутри этого коноида), то $G^*\rho_1$ и $G^*\rho_2$ могут отличаться также лишь снаружи этого коноида. Теперь доказательство вытекает из определения G^*. В самом деле, если функция ψ отлична от нуля лишь в фиксированном обратном коноиде C, то согласно (1.77) операция $G\psi$ тоже не обращается в нуль лишь в этом коноиде. Следовательно, мы имеем

$$(\rho_1 \cdot G\psi) = (\rho_2 \cdot G\psi), \tag{3.10}$$

т. е.

$$(G^*\rho_1 \cdot \psi) = (G^*\rho_2 \cdot \psi), \tag{3.11}$$

что и требовалось доказать.

Далее мы водим новое абстрактное пространство Ω, чьи элементы суть функции ω, обращающиеся в нуль вне соответствующего обратного характеристического коноида V_ω. Пусть Ω_s есть подпространство Ω. Мы говорим, что последовательность ω_n сходится к ω в Ω_s, если в каждой ограниченной части евклидова пространства $(x_1, x_2, \ldots, t)$ ω_n сходится к ω со всеми производными до порядка s и, кроме того, существует характеристический коноид $\overline{V}_\omega$, содержащий все V_{ω_n} внутри себя. Способом, аналогичным предыдущему; строится пространство функционалов на Ω_s, которое мы обозначим Y_s. Пространство Y_s есть линейное подмножество в Z_s. Условие сходимости в Y_s (слабой сходимости) несколько более ограничительное, чем в Z_s. Соотношение между Z_s и W_s аналогично соотношению между Z_s и Y_s.

Теперь легко установить, что G^* есть линейная операция в Y_s, которая сопоставляет каждому пространству Y_s некоторое подмножество в Y_{s+k-1}. Можно установить формулу, аналогичную (3.6), которая является основным свойством операции G^*:

$$L^*G^*\rho = \rho. \tag{3.12}$$

Очевидно, эта формула имеет место для любого функционала.

4. Обратная задача. Наша задача, состоящая в исследовании уравнения

$$Lu = \rho, \tag{3.13}$$

привела нас к операциям G и G^*. Полезно одновременно рассмотреть уравнение

$$L^*v = \chi \tag{3.14}$$

и построить аналогичным методом операции G'^* и G', заменив повсюду прямой коноид обратным коноидом и наоборот. Операция G'^* определена на обратном гиперболическом пространстве функций ψ^*. Ее закон непрерывности состоит в том, что она сопоставляет множеству Ψ^*_{s+k-1} подмножество в Ψ^*_s с сохранением непрерывности. С другой стороны, она преобразует каждое подмножество Ω^*_{s+k-1} пространства Ψ^*_{s+k-1}, состоящее из функций ω^*, отличных от нуля внутри соответствующего прямого коноида, в другое подмножество в Ω^*_s с сохранением непрерывности в смысле Ω'.

Операция G' определена на функционалах, заданных на основном пространстве, которые отличны от нуля в прямых гиперболических областях. Она преобразует всякое множество функционалов из Y^*_{s+k-1}, обладающих этим свойством, в подмножество в Y_s^* с тем же свойством и сохраняет непрерывность в смысле Y^*. Для операций G' и G'^* справедливы следующие основные формулы:

$$G'^*L^*\omega = \omega, \tag{3.15}$$

$$LG'\rho = \rho. \tag{3.16}$$

5. Правые и левые обратные для операции L в функциональном пространстве. В предыдущих параграфах мы обнаружили, что для операции L в пространстве функционалов, отличных от нуля, в прямой гиперболической области всегда существует правая обратная операция G', удовлетворяющая уравнению (3.16), и что на множестве некоторых специальных функционалов существует левая обратная операция G^*, удовлетворяющая (3.6). Докажем следующую теорему.

Теорема. *Операция G', действующая на функционалы, представимые в виде* (2.8) *с плотностью* ρ, *принадлежащей прямому гиперболическому пространству и являющейся функцией порядка* $s+k-1$, *совпадает с операцией G из предыдущего пункта*, *т. е. $G'\rho$ есть функционал, представимый в виде* (2.8), *где плотность есть* $G\rho(M)$.

Для функции ρ из Ψ_{2k} рассмотрим выражение

$$GLG'\rho. \tag{3.17}$$

Полагая, что результат $G'\rho$ есть функция из Ψ_{k+1} ([4]) и используя формулу (3.6), мы видим, что величина (3.17) равна $G'\rho$. С другой стороны, рассматривая ρ как функционал и применяя (3.16), мы заключаем, что она совпадает с $G\rho$. Следовательно,

$$G\rho = G'\rho, \tag{3.18}$$

что и требовалось доказать.

Также можно доказать совпадение операций G^* и G'^* на всех функционалах, которые могут быть представлены в виде (2.8) с плотностью ρ, которая принадлежит обратному гиперболическому пространству Ψ_{2k}^*.

Теперь докажем, что операция G' является левой обратной к L также на всех наших функционалах. Доказательство основывается на замечании, сделанном в гл. II. Мы показали там, что множество функционалов, представимых в виде (2.8) с плотностью, дифференцируемой любое число раз, всюду плотно. Нетрудно распространить это замечание на пространства W_s, Y_s, W_s^* и Y_s^*. После этого рассмотрим величину

$$G'L\rho. \tag{3.19}$$

Из непрерывности G' и L вытекает, что

$$G'L\rho = \lim G'L\rho_n, \tag{3.20}$$

где ρ_n — функционалы, представимые с помощью функций из Ψ_{2k}. С другой стороны,

$$\lim G'L\rho_n = \lim \rho_n = \rho, \tag{3.21}$$

откуда окончательно

$$G'L\rho = \rho, \tag{3.22}$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы можем опустить знак $'$ в обозначениях G и G^* и сформулировать конечный результат:

существует линейная операция G, которая одновременно является правой и левой обратной для операции L, определенной в пространстве Y и в пространстве W. Существует также операция G^*, служащая правой и левой обратной для L^*.

6. **Существование и единственность для обобщенной задачи Коши.** Теперь не составляет труда установить существование и единственность решения задачи Коши в пространстве функционалов. Эта задача, поставленная в п. 4 § 2, заключается в отыскании решения уравнения

$$Lu = \rho \tag{3.23}$$

при условии, что данный функционал ρ и искомый функционал должны обращаться в нуль вне некоторой прямой гиперболической области.

Существование решения вытекает из существования правой обратной операции. В самом деле, согласно определению функционал

$$u = G\rho \tag{3.24}$$

удовлетворяет уравнению (3.23). С другой стороны, действуя операцией G слева на уравнение (3.23), мы видим, что уравнение (3.24) следует немедленно из (3.23). Единственность также доказана.

7. **Существование решения в классическом смысле.** Было бы интересно теперь ответить на вопрос о существовании классического решения задачи Коши. Ответ вытекает из предыдущей теоремы. Такое решение существует лишь в случае, когда функционал $u = G\rho$ представим в форме (2.8) с плотностью, имеющей вторые непрерывные производные. Результат этого параграфа дает также достаточное условие, которое может быть полезным в некоторых специальных случаях. С помощью теоремы из п. 1 этого параграфа мы заключаем, что такое решение существует, если функция $F = Lu$ имеет непрерывные производные до порядка $k+1$, функция $u^{(0)} = u|_{t=0}$ имеет непрерывные производные до порядка $k+3$, а функция $u^{(1)} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}$ обладает непрерывными производными до порядка $k+2$ ([5]).

ПРИМЕЧАНИЯ К ДОПОЛНЕНИЮ

1. В этой главе впервые подробно излагается принадлежащая С. Л. Соболеву теория обобщенных функций (краткий очерк теории содержится в его предшествующей заметке [195]). Ее основные идеи и конструкция вошли в современную теорию практически без изменений. Перечислим наиболее важные из них:

1. Определение обобщенной функции как функционала на пространстве финитных гладких функций.

2. Порядок сингулярности обобщенной функции — класс функционала в терминологии Соболева.

3. Регуляризация обобщенных функций с помощью свертки, возможность приближения бесконечно дифференцируемыми функциями.

4. Линейные дифференциальные операции в пространстве обобщенных функций как сопряженные с операторами на пространстве основных функций.

5. Гибкое использование иных необходимых для данной задачи пространств основных и обобщенных функций. Эти пространства выделяются или описываются условиями на носители обычных или обобщенных функций. Хотя автор и не вводит явно этого понятия, но фактически постоянно им оперирует.

6. Сведение задачи Коши к решению уравнения с правой частью, но без начальных условий путем превращения начальных данных в дельтообразные по времени источники. Подобный прием в различных вариантах широко использовался впоследствии.

Возникновение теории обобщенных функций было подготовлено развитием математического анализа и теоретической физики. Известные идеи Хевисайда и Дирака, а в особенности работы Кирхгофа и Адамара способствовали ее появлению. Однако в работах предшественников не было понятий и построений, подобных строгим конструкциям Соболева.

Современный вид теория обобщенных функций приобрела в книге Л. Шварца [328], в которой был построен анализ Фурье для распределений (обобщенных функций) медленного роста. Л. Шварц включил в теорию важные идеи Адамара и М. Рисса о «конечных частях» расходящихся интегралов, а также ряд новых идей, в частности, локально выпуклые топологии и частичную регулярность (см., например, [299]).

Новые возможности, возникшие в теории Соболева — Шварца в результате синтеза разнообразных идей, привели к быстрому развитию ее приложений. Отметим некоторые из основных направлений этих приложений. Мальгранж и Эренпрайс с помощью теории целых функций продолжили разработку метода преобразования Фурье обобщенных функций и применили этот метод для доказательства существования фундаментальных решений уравнений с частными производными Методы теории целых функций были использованы И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым [48—50] для решения другой известной проблемы — отыскания наиболее широких классов единственности и корректности задачи Коши для систем уравнений эволюционного типа с постоянными коэффициентами. Эти авторы расширяют понятие обобщенной функции, включая в рассмотрение целую шкалу пространств основных функций как гладких, так и аналитических. Это направление под названием теории ультрараспределений разрабатывалось далее Румьё и Берлингом. Следующий этап в развитии этого направления представляет теория гиперфункций, построенная Сато (см., например, [244]).

В рамках теории обобщенных функций свой естественный вид приобрела проблема деления (Л. Шварц [328]) — возможность деления обобщенной функции на полином или аналитическую функцию. Эта проблема также связана с решением дифференциальных и сверточных уравнений; в своем первоначальном виде она рассматривалсь еще Бохнером. Решение этой проблемы было получено в работах Хёрмандера, Лоясевича и Мальгранжа. Возникшая здесь глубокая теория, выходящая далеко за рамки исходной задачи, отражена в книге [138].

В результате соединения теории обобщенных функций с новыми аналитическими и алгебраическими методами был построен анализ Фурье в пространстве решений произвольной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Итог этого анализа — экспоненциальное представление решений — заключает в себе общий метод исследования других задач теории таких систем уравнений, в частности, локальных свойств решений, единственности задачи Коши, разрешимости системы с правыми частями. Изложение этой теории и ее обобщений содержится в книгах В. П. Паламодова [168] и Эренпрайса [273] (см. также п. 5).

В 30-е годы С. Л. Соболев развивает теорию обобщенных функций в новом направлении. На основе понятия обобщенной производной обычной функции он вводит и изучает шкалу пространств $W_p^{(l)}$, называемых теперь пространствами Соболева. Он применяет эту теорию к исследованию задачи Дирихле для некоторых эллиптических уравнений высокого порядка ([198, 199, 200, 204]). Эти идеи Соболева также получили широкое развитие и приложения, а основные факты теории пространств Соболева и их обобщений — теоремы вложения и теоремы о следах — стали одним из важнейших средств современного математического анализа.

Для С. Л. Соболева обобщенные функции — это прежде всего язык, важный для приложений. Позднее он использует этот язык в совсем новой области — теории кубатурных формул [213].

Сейчас язык и методы теории обобщенных функций стали неотъемлемой частью теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных, они широко применяются также в других областях анализа и математической физики, становятся все более привычными в прикладных исследованиях. О роли и приложениях теории обобщенных функций можно судить по монографиям [47, 247, 37, 38], обзору [170] и фундаментальному труду [243].

2. Фактически здесь доказан лишь следующий локальный по t результат: если функция u отлична от нуля в полупространстве $t > t_0(x)$, то соотношение (3.6) имеет место при $t < t_1(x)$, где $t_1(x)$ — непрерывная функция точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1})$, удовлетворяющая условию: для всякого x^0 нулевые бихарактеристики, выходящие из точки $(x^0, t_0(x^0))$, не имеют фокальных точек в полосе $t_0(x) < t \leqslant t_1(x)$. Отсюда следует, что все прямые характеристические коноиды с вершинами в этой полосе не имеют в ней особых точек. Это свойство коноидов существенно используется в рассуждениях. Простые дополнительные соображения позволяют перейти к глобальному результату при некоторых предположениях о поведении бихарактеристик.

Рассмотрим непрерывную функцию

$$t_{1-\varepsilon}(x) < t_1(x),$$

близкую к $t_1(x)$, и бесконечно дифференцируемую функцию $h(x, t)$, равную единице при $t \leqslant t_{1-\varepsilon}(x)$ и нулю при $t \geqslant t_1(x)$. Для всякой функции

$$\psi_0 \in \Psi_\infty = \bigcap_1^\infty \Psi_s$$

функция $hG\psi_0$ определена при $t \leqslant t_1$, бесконечно дифференцируема и равна нулю со всеми производными в окрестности гиперповерхности $t = t_1$. Обозначим через $G_1\psi_0$ ее продолжение нулем в полупространстве $t > t_1$. Из доказанной в настоящей статье теоремы следует, что функция

$$\psi_1 = \psi_0 - G_1 L \psi_0$$

равна нулю в полупространстве $t \leqslant t_{1-\varepsilon}(x)$. Далее можно найти непрерывную функцию $t_2(x) > t_1(x)$ такую, что на нулевых бихарактеристиках, выходящих из точек $(x^0,\ t_{1-\varepsilon}(x^0))$, не появляется фокальных точек, если $t \leqslant t_2$. Применяя подобные рассуждения, можно построить оператор G_2 такой, что функция

$$\psi_2 = \psi_1 - G_2 L \psi_1$$

принадлежит Ψ_∞ и равна нулю при $t \leqslant t_{2-\varepsilon}$ и т. д.

Продолжая эту конструкцию, мы строим последовательность функции $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ так, чтобы она стремилась к бесконечности на каждом компакте. Это возможно, если ни одна из бихарактеристик не уходит на бесконечность за конечное время. Предположив, что это условие выполнено, мы получим последовательность операторов G_k, действующих в Ψ_∞. Искомый оператор G определяется на пространстве функций, равных нулю при $t < t_0(x)$, формулой

$$G = G_1 + G_2(1 - LG_1) + G_3(1 - LG_2)(1 - LG_1) + \ldots$$
$$\ldots + G_{k+1}(1 - LG_k) \ldots (1 - LG_1) + \ldots.$$

Этот ряд, очевидно, сходится в Ψ_∞ и удовлетворяет соотношению (3.6). Построив подходящую последовательность функций $\ldots t_{-2} < < t_{-1} < t_0$ и соответствующих операторов $\ldots G_{-2},\ G_{-1},\ G_0$, можно продолжить G до непрерывного оператора на всем пространстве Ψ_∞, удовлетворяющего (3.6). Таким образом, эта теорема и все последующие, основанные на ней, справедливы и в глобальном варианте.

Другой более обозримый метод построения оператора G дает конструкция параметрикса с помощью канонического оператора В. П. Маслова (см. [141—144]), а также конструкция [270], использующая интегралы Фурье. Эти методы позволяют, в принципе, детально исследовать структуру параметрикса в окрестности фокальных точек. Однако для такого исследования необходимо применение теории обобщенных функций, начало которой положено в данной работе С. Л. Соболева (см. [67], [169]).

3. Фактически ниже доказывается, что оператор G^* может быть продолжен на пространство функционалов, заданных на произвольном обратном характеристическом коноиде K, т. е. на факторпространство W по подпространству, состоящему из обобщенных функций, равных нулю на K.

4. Это предположение не является необходимым. Искомое соотношение (3.18) можно установить с помощью следующей леммы.

Лемма. *Для всякого $l \geqslant 0$ образ оператора L: $\Psi_{l+2} \to \Psi_l$ плотен в Ψ_l.*

Доказательство. Выберем произвольную функцию $\psi \in \Psi_l$ и сделаем аналитическую замену переменных $y = y(x, t)$, $s = s(x, t)$ таким образом, чтобы 1) функция ψ была отлична от нуля только в полупространстве $s \geqslant 1$ и 2) каждая гиперповерхность $s = \sigma$ была нехарактеристической для уравнения (1.1). Функцию ψ можно приблизить в смысле сходимости в Ψ_l последовательностью функций

$$a_j(y, s),\ j = 1, 2, \ldots,$$

каждая из которых принадлежит Ψ_{l+2}, отлична от нуля только в полупространстве $s \geqslant 0$ и при каждом фиксированном s аналитична по переменным

$$y = y_1, \ldots, y_{2k+1}.$$

Таким образом, достаточно показать, что для всякой функции a, обладающей описанными свойствами, существует функция $b \in \Psi_{l+2}$ такая, что $Lb = a$.

Такую функцию мы построим с помощью принципа Дюамеля. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$Lb_\sigma = 0, \quad b_\sigma(y, \sigma) = 0, \quad \frac{\partial b(y, \sigma)}{\partial s} = a(y, \sigma),$$

зависящую от параметра $\sigma \geqslant 0$. Так как $a(y, \sigma)$ есть аналитическая функция y, а коэффициенты оператора L являются по условию аналитическими функциями всех переменных, в силу теоремы Коши — Ковалевской эта задача имеет решение b_σ, определенное, по крайней мере, в окрестности гиперповерхности $s = \sigma$. Применяя многократно эту теорему, мы сможем продолжить это решение до аналитической функции b_σ во всем пространстве R_{2k+2}, если ни одна из бихарактеристик не уходит на бесконечность за конечное время. Исследуя зависимость этого решения от σ, нетрудно установить, что оно имеет непрерывные производные до порядка $l + 2$ по совокупности переменных y, s, σ. Положив

$$b(y, s) = \int_0^s b_\sigma(y, s)\, d\sigma,$$

получим искомое решение уравнения $Lb = a$.

Вернемся к доказательству теоремы. Покажем, что G является правым обратным к оператору L на пространстве Ψ. Для всякого $l \geqslant 0$ и функции $\psi \in \Psi_{l+2}$ положим $\varphi = L\psi$. Имеем

$$LG\varphi = LGL\psi = L\psi = \varphi.$$

Таким образом, оператор LG совпадает с тождественным оператором на образе оператора L: $\Psi_{l+2} \to \Psi_l$. В силу леммы этот образ плотен, следовательно, ввиду непрерывности оператор LG является тождественным на всем Ψ, что и требовалось доказать.

Оператор G' является левым обратным к L (так как $G^{*\prime}$ правый обратный к L^* по доказанному). В прежних обозначениях имеем

$$(G-G')\varphi=(G-G')L\psi=\psi-\psi=0,$$

следовательно,

$$G-G'=0$$

на плотном подпространстве в Ψ_l, откуда $G=G'$.

5 *). Читатель, проследивший за рассуждениями Соболева, может оценить простоту и лаконичность стиля последних глав, их прагматичный характер изложения. Подчеркну, что здесь изложены основы той теории Соболева — Шварца, которая стала одним из основных событий в анализе нашего времени. Может быть, имеет смысл задуматься над возникающими в этой связи вопросами: какова предыстория этой теории, в чем ее значение и причины той роли, которую она играет. Постараюсь дать ответы на эти вопросы, не претендуя на полноту. О предыстории теории обобщенных функций написана целая книга: Лютцен [299]. Автор этой книги относит к предыстории и анализирует большое число работ, где предпринимались попытки расширить рамки традиционного понятия функции и решения дифференциального уравнения, в частности, известную дискуссию 18 века о понимании решения уравнения движения струны, проходившую между Эйлером, Даламбером и Лагранжем. Следует отметить, что Эйлер наиболее широко трактовал понятие решения, а у Лагранжа имеется зачаток идеи использования пробных функций в связи с изучением решений. В XIX и начале XX века побуждения к созданию теории обобщенных функций возникали в различных областях анализа, в частности в теории потенциала и других областях математической физики. Несколько особняком стоят работы де Рама о потоках на гладких многообразиях — обобщении понятия сингулярной цепи и одновременно понятия дифференциальной формы. Понятие потока нашло адекватное выражение лишь в терминах теории обобщенных функций-распределений Соболева — Шварца. Почему основы теории обобщенных функций не возникли раньше или позже, а появились именно в этой работе С. Л. Соболева? Конечно же, здесь проявились научная смелость и склонность автора к общим теоретико-функциональным конструкциям. Эти качества позже отразились в создании очень важной теории функциональных пространств, которые сейчас называются пространствами Соболева. Эту теорию Соболев ценил и неоднократно возвращался к ней впоследствии.

Помимо этих субъективных причин для возникновения обобщенных функций в этот момент и в этой работе имеются, на мой взгляд, важные объективные причины. Говоря коротко, дело в том, что в данной работе теория обобщенных функций появляется ради решения одной из центральных задач теории гиперболических дифференциальных уравнений со многими независимыми переменными. Заметим, что многие «предысторические» работы, которые, объективно говоря, подводили к теории обобщенных функций, но не дали ей толчок, так или иначе связаны с эллип-

*) Добавлено при корректуре.

тическими уравнениями. Сюда относятся исследования по теории потенциала, а также работы начала века, связанные с основной теоремой интегрального исчисления. Сюда также можно отнести теорию де Рама, которая в значительной степени есть теория оператора Лапласа на многообразии. Хотя современная теория эллиптических (псевдо)дифференциальных уравнений широко использует понятия обобщенных функций, однако, по-видимому, внутренних стимулов для возникновения этих понятий в этой теории было недостаточно.

Данная работа С. Л. Соболева относится к одному из важнейших направлений анализа, возникшему еще в работах Гюйгенса в XVII веке и включающему имена Римана, Пуассона, Кирхгофа, Вольтерра и Адамара. В работах этого направления появились те импульсы и идеи, которые и привели Соболева к созданию основ теории. Еще Эйлер предложил выйти за пределы узкого понимания уравнения струны, предлагая считать решением любую функцию вида $u(x, t) = f(x-t) + g(x+t)$, где f и g — произвольные функции, как это понималось в то время. Это обобщенное понимание решения, однако, не могло стать общей идеей, поскольку зависело от конкретного вида уравнения. Для родственного телеграфного уравнения четкое понятие обобщенного решения было дано и исследовано лишь в начале двадцатого века Н. Винером. Он определяет такое решение как произвольную функцию, удовлетворяющую уравнению в слабом смысле, т. е. как функционал на финитных бесконечно дифференцируемых функциях. Близкие идеи высказывались также Н. М. Гюнтером и Н. Е. Кочиным. Предысторией теории обобщенных функций Соболева в узком смысле слова являются работы Ж. Адамара о задаче Коши для гиперболических дифференциальных уравнений, появившиеся в начале нашего века [2]. Труды Адамара в большой степени послужили возникновению идей обобщенных функций, хотя, следует подчеркнуть, никаких общих определений будущей теории в них нет. В то же время в работах Адамара появились важные конкретные примеры обобщенных функций под названием «несобственные интегралы нового вида». В простейшей форме такой интеграл Адамар записывает в виде

$$\overline{\left|\int_c^b \frac{a(x)\,dx}{(b-x)^{p+\mu}}\right.}, \tag{1}$$

где p — любое целое число, а $0 < \mu < 1$. Он определяет этот интеграл путем предельного перехода в собственном интеграле с верхним пределом $b - \varepsilon$, добавляя сумму p подходящих слагаемых со степенной особенностью при $\varepsilon \to 0$. Позже стало ясно, что эти интегралы представляют собой важное семейство, своего рода элементарные обобщенные функции, однако в работе Соболева они не появляются, поскольку это выходило бы за рамки той задачи, которая в ней решается.

Особую роль гиперболических дифференциальных уравнений можно объяснить тем, что она дает большое разнообразие сингулярных решений. Таковым является, в частности, фундаментальное (элементарное у Адамара) решение, описывающее распространение волны от точечного моментального источника. В отличие от случая эллиптического уравнения, для которого фундаментальное решение имеет точечную особенность, элементарная функция гиперболического уравнения второго порядка имеет разрыв на гиперповерхности, служащей траекторией фронта волны, вызванного источником. В случае движения волны на плоскости фундаментальное решение уходит на бесконечность вблизи этой гиперповерхности (хотя и остается локально интегрируемым). Если движение происходит в трехмерном пространстве, фундаментальное решение имеет дельта-образную сингулярность — именно так дельта-функция появилась в работах Кирхгофа конца прошлого века. С ростом размерности n физического пространства «порядок сингулярности» растет как $n/2$. Если уравнение имеет переменные коэффициенты, то сам фронт волны (коноид лучей) может приобрести особенности, в которых происходит (частичная или полная) фокусировка лучей, и сингулярность фундаментального решения усложняется. В данной работе Соболев не касается вопроса о возможных особенностях волнового фронта и связанных с ними особенностях фундаментального решения, однако сложность аналитической картины неявно присутствует в любом методе конструкции. Эта сложность в конечном счете и привела Соболева к мысли найти простую и эффективную аксиоматику, которая бы позволила вместить эту сложную картину. Учитывая, что аксиоматика обобщенных функций с самого начала была приспособлена, чтобы выразить любые особенности фундаментального решения (а также любого решения гиперболического уравнения с обобщенными данными Коши), мы сейчас можем понять, почему она оказалась тем расширением классического анализа, которое смогло вместить, в частности, понятие слабого решения эллиптического уравнения. Впрочем, такой вывод, сделанный спустя полвека после пионерской работы Соболева, ни в то время, ни двадцать лет спустя ни в коей мере не был очевиден, и успех теории был поразителен.

Этот успех был обеспечен также большим вкладом Л. Шварца [327], который внес в теорию ряд важных идей, соединил различные подходы и поставил ряд проблем, стимулировавших дальнейшее развитие теории. Заслугой Шварца является прежде всего соединение теории с преобразованием Фурье. К предыстории этой идеи относится работа самого Фурье (1822), где он записывает формулу восстановления функции по ее ряду Фурье как свертку с символом δ, где

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \cos ix\right)$$

есть то, что мы сейчас называем дельта-функцией. Обращение преобразования Фурье приводит к подобной формуле. Эти формулы, не имеющие смысла с точки зрения классического анализа, были подвергнуты критике со стороны Дарбу. Однако критика математиков не останавливает Хевисайда, который пишет уже в современном виде эти и подобные формулы для обращения преобразования Бесселя и даже «доказывает» их. Близко к конструкции обобщенного преобразования Фурье подошел Бохнер [1*] *), который определил преобразование Фурье функции одной переменной, имеющей рост не выше степенного, как сумму формальных производных от подходящих непрерывных функций, т. е. на современном языке — как обобщенную функцию конечного порядка. Не ясно было, однако, как можно распространить это определение на функции многих переменных. Конструкция преобразования Фурье в пространстве обобщенных функций медленного роста, предложенная Шварцем, включила подход Бохнера и придала точный смысл рассуждениям Фурье и выкладкам (по крайней мере, их части) Хевисайда. Из теории Соболева — Шварца стало ясно, что дельта-функции Фурье, Кирхгофа, Хевисайда, Дирака и аналогичные символы других авторов суть одно и то же, если им придать смысл обобщенных функций. Теория Шварца значительно упростила применение преобразования Фурье в теории дифференциальных уравнений, в первую очередь в теории уравнений с постоянными коэффициентами. Возможность неограниченного дифференцирования в пространстве $S'(R^n)$ превращает это пространство в модуль над кольцом A многочленов от n переменных, причем базисные элементы кольца действуют как частные производные по независимым переменным. Преобразование Фурье, сохраняя пространство $S'(R^n)$, превращает эту структуру в другую структуру модуля над тем же кольцом, в которой базисные элементы действуют умножением на $2\pi i\xi_1, \ldots, 2\pi i\xi_n$. С помощью этих структур Шварц формулирует известную проблему деления: можно ли любую обобщенную функцию $u \in S'$ разделить на ненулевой элемент $a \in A$, т. е. всегда ли разрешимо в S' уравнение $av = u$? Таким образом, это уравнение можно понимать и как алгебраическое, и как дифференциальное. Положительное решение этой проблемы (Лоясевич, Хёрмандер, Мальгранж) привело к развитию новой области анализа (см. [138]), сыгравшей впоследствии важную роль в теории особенностей гладких отображений (подготовительная теорема Мальгранжа).

Другая важная идея, внесенная в теорию Шварцем, есть широкое использование методов двойственности локально выпуклых пространств. Суть этих методов состоит в том, что некоторые важные свойства линейного оператора, действующего на обобщенные функции (например, дифференциального оператора), могут быть пересказаны в терминах сопряженного оператора, действующего в пространствах основных функций. Например, если основное или сопряженное пространство метризуемо и полно (пространство Фреше), то эпиморфность оператора эквивалентна тому, что сопряженный оператор является изоморфизмом сопряженного пространства на свой образ (теорема Дьёдонне — Шварца). Возможности, которые открыли методы теории двойственности, вызвали — в особенности в первое время — энтузиазм и позволили получить ряд общих теорем о разрешимости и локальных свойствах решений дифференциальных и сверточных уравнений со многими независимыми переменными. Позднее появилось более критическое понимание достижений, основанных на теории двойственности. В конечном счете всякая теорема двойственности опирает-

*) Здесь и далее звездочкой помечены ссылки на дополнительный список литературы.

ся на теорему Хана — Банаха, которая не содержит конструктивного метода нахождения искомого линейного функционала (если только речь идет не о гильбертовом пространстве). В своей полной общности теорема Хана — Банаха опирается на трансфинитную индукцию, которая эквивалентна аксиоме выбора. Последняя, как известно, не зависит от других аксиом теории множеств и может быть принята или отвергнута по вкусу исследователя. В результате возникает противоречие между целью и методом: исходная задача — некоторый конкретный вопрос, относящийся, например, к дифференциальному уравнению, решается с привлечением средства, совершенно постороннего этой задаче. Это противоречие, впрочем, не сказывается на справедливости результатов, полученных этими методами. По крайней мере, основные из них могут быть передоказаны без привлечения теории двойственности, но несколько более сложными рассуждениями. Теория двойственности продолжает применяться и сейчас, однако несомненно, что в последние десять — пятнадцать лет произошел сдвиг в сторону более конкретных эффективных методов, а также и постановок задач.

Дальнейший прогресс теории обобщенных функций происходил по нескольким большим направлениям. Одно из них — распространение теории преобразования Фурье на функции (обычные или обобщенные) произвольного роста. Эта задача была рассмотрена в пятидесятые годы Эренпрайсом и Мальгранжем в связи с проблемой деления, а также И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым [49—50] в связи с изучением характеристической задачи Коши. Преобразование Фурье таких функций определяется как линейные непрерывные функционалы на подходящем пространстве целых функций. Такие функционалы — это не обобщенные функции Соболева, а более сложные объекты. В частности, для них не определено понятие носителя и локализации, поскольку в основном пространстве нет финитных функций, за исключением тождественно равной нулю. Пространство таких функционалов, а также пространство обобщенных функций вкладываются в естественным образом устроенное семейство пространств $\left(S_\alpha^\beta\right)'$ Гельфанда — Шилова, в котором параметр α характеризует рост элементов на бесконечности, а β — степень сингулярности этих функционалов. Здесь обнаруживается эффект зависимости между величинами α и β, отсутствующий в теории Соболева — Шварца: если $\alpha+\beta<1$, то основное пространство S_α^β оказывается тривиальным, т. е. сводится к единственной функции, тождественно равной нулю.

Другое большое направление — теория псевдодифференциальных операторов — есть развитие идеи, состоящей в том, что дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами может быть задан в терминах преобразования Фурье. Следующий этап в этом направлении — теория общих операторов Фурье (В. П. Маслов — Хёрмандер), представляющая собой синтез теории псевдодифференциальных операторов, обычного преобразования Фурье, а также операторов решения задачи Коши для гиперболических уравнений) (см., например, [243]). Это направление обогатило теорию обобщенных функций, выработав, в частности, понятия волнового фронта и обобщенной функции, связанной с коническим лагранжевым многообразием (Хёрмандер).

Отмечу еще одну идею, введенную в теорию обобщенных функций М. Риссом и Л. Шварцем. В своей большой работе [2*] М. Рисс применил метод аналитического продолжения для придания смысла расходящимся интегралам. Этот метод в простейшем виде относится к интегралу Адамара [2]. Рисс рассматривает его как оператор свертки, действующий на функцию a, носитель которой принадлежит правой полупрямой. Трудность, с которой столкнулся Адамар в случае, когда показатель $p+\mu$ становится целым, Рисс обошел, поделив интеграл на гамма-функцию, имеющую полюса в точках $\mu=0$, которые исключил из рассмотрения Адамар. В результате он получил семейство операторов свертки

$$I_\alpha a(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int^{x} a(t)(x-t)^{\alpha-1}dt.$$

Эти интегралы сходятся в обычном смысле лишь при $\operatorname{Re}\alpha>0$, но если функция a бесконечно дифференцируема, они имеют целое аналитическое продолжение по параметру α и таким образом допускают продолжение в целые отрицательные значения α. В частности, I_0 оказывается тождественным оператором. Эти операторы обладают замечательным свойством $I_\alpha * I_\beta = I_{\alpha+\beta}$ для всех значений α и β, которое означает, что соответствие $\alpha\mapsto I_\alpha$ есть гомоморфизм групп. При целых отрицательных α оператор I_α есть дифференцирование, при целых положительных — оператор кратного интегрирования (формула Дирихле). Заметим, что, оставаясь в рамках классического анализа, мы сможем наблюдать лишь часть этой картины, а именно определить I_α лишь при $\operatorname{Re}\alpha>0$ и отдельно при $\alpha=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$, не замечая, что оба случая вкладываются (единственным способом) в общее семейство операторов, которое является целой функцией α! Этот пример является простым и убедительным свидетельством того, что теория о. ф. есть наиболее естественное (и экономное) расширение классического анализа.

Основной результат работы М. Рисса состоит в конструкции аналогичного группового гомоморфизма, связанного с квадратичной формой $q(x)$ сигнатуры $(1,\ n-1)$. Он исходит из семейства функционалов

$$q_+^\alpha(\varphi)=\int\limits_{q\geqslant 0}\theta q^\alpha\varphi\,dx, \tag{2}$$

где θ — функция, равная 1 на одной выпуклой компоненте Q конуса $q\geqslant 0$ и равная 0 на другой. При $\operatorname{Re}\alpha>0$ подынтегральное выражение непрерывно и эти функционалы определены на пространстве $\mathscr{D}_Q$ бесконечно дифференцируемых функций φ, носители которых принадлежат множеству вида $K+Q$, где K — компакт (зависящий от φ). Рисс обнаружил, что это семейство имеет мероморфное продолжение на комплексную плоскость с полюсами, расположенными на двух арифметических прогрессиях $\alpha=-1,-2,\ldots$ и $\alpha=-\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2}-1,\ \ldots$ Первая из них связапа с неособой частью границы Q; в окрестности точки $x \in \partial Q$, $x \neq 0$ интеграл (2) сводится к интегралу Адамара (1), чьи полюса суть $-1, -2, \ldots$ Вторая серия полюсов связана с особой точкой $x = 0$ множества корней полинома q. Чтобы компенсировать эти полюса, Рисс делит это семейство на произведение двух гамма-функций и приходит к семейству функционалов

$$Z_\alpha = \frac{2\pi q_+^{\alpha - \frac{n}{2}}}{\pi^{n/2} 4^\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\alpha + 1 - \frac{n}{2}\right)},$$

где $q(x) = x_n^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2$. Это семейство имеет целое аналитическое продолжение по параметру как семейство непрерывных функционалов на пространстве $\mathscr{D}_Q$. Операторы свертки в $\mathscr{D}_Q$, заданные с помощью этих функционалов, обладают групповым свойством

$$Z_\alpha * Z_\beta = Z_{\alpha+\beta},$$

причем $Z_0 = \delta$ задает тождественный оператор, а $Z_{-k} = \Box^k \delta$, где

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$$

есть волновой оператор в n-мерном пространстве. Последнее свойство в сочетании с групповым законом влечет соотношение

$$\Box^k Z_k = \delta.$$

Отсюда следует вывод, являющийся основной целью работы Рисса: обобщенная функция Z_k есть фундаментальное решение для k-й степени волнового оператора. Это изящное построение завершает цикл исследований, начавшихся еще в девятнадцатом веке, посвященных конструкциям фундаментальных решений для волновых уравнений с постоянными коэффициентами, и одновременно объясняет причину того, что усиленный принцип Гюйгенса справедлив лишь в пространстве четного числа переменных. Именно, если $n > 2$ четно, то значение $\alpha = 1$ является полюсом семейства $q_+^{\alpha - \frac{n}{2}}$ и одновременно полюсом функции $\Gamma\left(\alpha + 1 - \frac{n}{2}\right)$. Значение семейства Z_α в этой точке пропорционально отношению вычетов числителя и знаменателя, но вычет семейства $q_+^{\alpha - \frac{n}{2}}$ в точке $\alpha = 1$ есть функционал, носитель которого принадлежит границе Q, так как внутри Q эта обобщенная функция совпадает с обычной функцией $q^{\alpha - \frac{n}{2}}$. Таким образом, Z_α есть обобщенная функция с носителем, принадлежащим (фактически совпадающим) с ∂Q, что и влечет выполнение усиленного принципа Гюйгенса (наличие заднего фронта волны) для волнового уравнения.

Здесь снова теория обобщенных функций послужила естественным языком, на котором стало возможным изложить конструкцию Рисса. Эта конструкция получила развитие в рамках более общего направления, которое можно определить как соединение теории с вещественной алгебраической геометрией.

Обобщение теоремы М. Рисса о возможности мероморфного продолжения семейства f_+^α для любого многочлена f (задача И. М. Гельфанда) была решена с привлечением мощных средств алгебраической геометрии, в частности теоремы Хиронака о разрешении особенностей аналитических гиперповерхностей. Полюса этого продолжения расположены в конечном числе арифметических прогрессий с разностью, равной 1. Коэффициенты $c_{\alpha,i}$ лорановских разложений в этих полюсах суть некоторые обобщенные функции, носители которых задают алгебраическую стратификацию множества корней полинома f. Эта стратификация, как и расположение полюсов, несомненно, играет важную роль в алгебраической геометрии этого множества. Однако эти глубокие вопросы еще недостаточно исследованы.

Прогресс в теории дифференциальных уравнений в частных производных, который был достигнут на основе методов теории Соболева — Шварца, привел к постановке более общих задач, выходящих за пределы классических вопросов. Это развитие привело к формулировке общей проблемы, которая на языке дифференциальных уравнений звучит как проблема экспоненциального представления решений уравнений с постоянными коэффициентами, а на двойственном языке (в смысле двойственности векторных пространств и одновременно в смысле двойственности Фурье) называется вслед за Эренпрайсом «фундаментальным принципом». Экспоненциальное представление есть далекий аналог результата Эйлера, согласно которому всякое решение обыкновенного уравнения с постоянными коэффициентами может быть записано как сумма экспонент, удовлетворяющих тому же уравнению. В случае, если характеристическое уравнение имеет кратные корни, это представление включает соответствующие экспоненциальные многочлены. Проблема состоит в том, можно ли всякое решение уравнения в частных производных в R^n с постоянными коэффициентами или системы таких уравнений представить в виде интеграла с некоторой мерой по многообразию экспонент вида $\exp(\xi\cdot x)$, $\xi\in(R^n)'$ или экспоненциальных полиномов, удовлетворяющих той же системе? Такая постановка не использует (по крайней мере, явно) теории обобщенных функций и, говоря формально, могла быть высказана самим Эйлером двести лет назад. Однако фактически эта проблема была сформулирована только в конце пятидесятых годов в результате прогресса этой теории. В то же время физики уже широко использовали в теории квантованных полей возможность экспоненциального представления для различных уравнений волнового типа, применяя для обоснования результаты теории обобщенных функций. Трудность в общей постановке проблемы заключается, в частности, в вопросе, как понимать сам интеграл. Действительно, экспоненциальное представление в тривиальном случае, когда дифференциальный оператор равен нулю, если разложение произвольной функции, заданной в R^n или в области этого пространства, в интеграл по экспонентам с линейными фазовыми функциями, т. е. в интеграл Фурье. Как мы отмечали, разложение функций произвольного роста на бесконечности в интеграл Фурье было получено лишь в результате развития теории обобщенных функций.

В начале шестидесятых годов проблема экспоненциального представления и круг связанных вопросов были решены (В. П. Паламодов [168], Эренпрайс [273]), в частности, была установлена возможность разложения любого решения произвольной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, определенного в любой выпуклой области $U \subset R^n$. Вывод этого результата, говоря коротко, основан на соединении двух методов: 1) разработка теории преобразования Фурье функций произвольного роста (или функций, заданных лишь в области) и 2) развитие алгебраической геометрии. Как мы отмечали, преобразование Фурье быстро растущей обобщенной функции уже не является обобщенной функцией, а представляет собой функционал, заданный на пространстве Z целых функций, удовлетворяющих специфическим ограничениям роста на бесконечности. Такие функционалы нельзя локализовать, так как в Z нет разбиений единицы. Если мы хотим описать те функционалы, которые аннулируются операцией умножения на многочлен (частный случай проблемы экспоненциального представления), то должны пользоваться другими методами. Один из этих методов использует конструкцию, подобную той, которая применяется в теории пучков: пространство Z вкладывается в правую резольвенту, образованную голоморфными коцепями Чеха, которые подчинены таким же ограничениям роста на бесконечности. Вариант этого метода использует мягкую резольвенту, образованную гладкими $\bar{\partial}$-дифференциальными формами в C^n. На этом пути возникло сочетание языка теории обобщенных функций с методами теории пучков и гомологической алгеброй.

Еще одна новая идея была включена в теории обобщенных функций в начале шестидесятых годов, хотя, по существу, восходит к работам Коши и Сохоцкого. Известная формула Сохоцкого может быть истолкована как равенство обобщенных функций

$$\delta = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x - i0} - \frac{1}{x + i0}\right), \tag{3}$$

где $\dfrac{1}{x \mp i0}$ есть предельное значение аналитической функции на вещественной оси со стороны нижней, соответственно верхней полуплоскости. Вообще, если f — функция, аналитическая в $C \setminus R$, то можно рассмотреть ее предельные значения на вещественной оси с двух сторон $f(x \mp i0) \in \mathscr{D}'$ (при условии, что такие значения существуют). Оказывается, что всякая обобщенная функция может быть записана в виде $u = f(x-i0) - f(x+i0)$ с подходящей аналитической функцией f (аналитическое представление); в частности, равенство (3) есть аналитическое представление дельта-функции. Для аналитического представления обобщенных функций многих переменных используются различные трубчатые покрытия пространства $C^n \setminus R^n$, причем всякая функция, заданная в R^n или в области этого пространства, имеет хотя бы одно аналитическое представление. Отправляясь от таких представлений, Мартино [3*] строит левую резольвенту пространства обобщенных функций в R^n, образованную коцепями Чеха на указанном трубчатом покрытии, коэффициенты которых суть голоморфные функции, имеющие рост не выше степенного относительно расстояния до R^n (условие существования предельных значений на R^n). На этом языке теорема об аналитическом представлении есть изоморфизм пространства $\mathscr{D}'$ и $(n-1)$-мерной когомологической группы описанного комплекса коцепей (равенство нулю $(n-2)$-мерной когомологии есть вариант известной теоремы Боголюбова об острие клина [4*]). С этой реализацией обобщенных функций тесно связана идея гиперфункций, предложенная ранее М. Сато [5*]. Гиперфункция Сато по определению является элементом группы $(n-1)$-мерной когомологии пространства $C^n \setminus R^n$ с коэффициентами в пучке голоморфных функций. Сравнивая это определение с аналитическими представлениями обобщенных функций, можно так выразить идею гиперфункций: это комбинация предельных значений на R^n голоморфных функций, которые, вообще говоря, таких предельных значений не имеют (поскольку никакие ограничения на их рост вблизи R^n не накладываются). Гиперфункции Сато — это наиболее далекое обобщение понятия обобщенной функции Соболева, в некоторых отношениях слишком далекое, поскольку в теории Сато нет не только понятия носителя, но нет также никакой разумной топологии или хотя бы сходимости. В пространстве гиперфункций нет привычного анализа, но зато имеются необычные алгебраические и пучковые свойства, в частности, пучок гиперфункций вялый, т. е. всякое сечение над произвольным открытым подмножеством $U \subset R^n$ имеет продолжение до гиперфункции, заданной на всем R^n.

Мощный импульс, приданный теорией обобщенных функций анализу, привел к появлению новых направлений, содержащих конкретные достижения и методы, использующие необычные сочетания аналитических, топологических и алгебраических идей. Сама теория обобщенных функций, растворяясь в этих направлениях, становилась в большей степени языком, универсальным для всего анализа. Этот язык стал столь же необходим, как и язык банаховых пространств. Роль теории обобщенных функций как универсального языка и места соединения разнообразных идей имеет мало параллелей в математике. В алгебраической топологии подобную роль, пожалуй, играет, уступая ей в масштабах, гомологическая алгебра — как единый язык и совокупность общих приемов. В алгебраической геометрии подобное место занимает теория схем Гротендика. Хотя теория обобщенных функций уже имеет более чем полувековую историю, возможности ее развития и влияния на анализ, как я полагаю, еще не исчерпаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов Ю. Ш. Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация.— Л.: ЛГУ, 1983.
2. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа: Пер. с фр.— М.: Наука, 1978.
3. Алимов Ш. А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций // Дифференц. уравнения.— 1972.— Т. 8, № 9.— С. 1609—1626.
4. Аманов Т. И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной.— Алма-Ата: Наука КазССР, 1976.
5. Андриенко В. А. Теоремы вложения для функций одного переменного // Итоги науки и техники. Математический анализ.— М.: ВИНИТИ.— 1970.— С. 203—262.
6. Бабич В. М. К вопросу о теоремах вложения в случае предельного показателя // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия.— 1956.— Т. 19, № 4.— С. 186—188.
7. Бабич В. М., Слободецкий Л. Н. Об ограниченности интеграла Дирихле // Докл. АН СССР.— 1956.— Т. 106, № 4.— С. 604—607.
8. Бахвалов Н. С. Теоремы вложения для классов функций с несколькими ограниченными производными // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1963.— № 3.— С. 7—16.
9. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение: Пер с англ.— М : Мир, 1980.
10. Берколайко М. З. Теоремы о следах на координатных подпространствах для некоторых пространств дифференцируемых функций с анизотропной смешанной нормой // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 282, № 5.— С. 1042—1046.
11. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1966.
12. Бесов О. В. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР.— 1959.— Т. 126, № 6.— С. 1163—1165.
13. Бесов О. В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. МИАН СССР.— 1961.— Т. 60.— С. 42—81.
14. Бесов О. В. О плотности финитных функций в $\mathscr{L}^l_{p,\theta}$ и распространении функций // Тр. МИАН СССР.— 1967.— Т. 89.— С. 5—17.
15. Бесов О. В. Об условиях существования классического решения волнового уравнения // Сиб. мат. журн.— 1967.— Т. 8, № 2.— С. 243—256.

16. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения для области с условием гибкого рога // Тр. МИАН СССР.— 1984.— Т. 170.— С. 12—30.
17. Бесов О. В., Ильин В. П. Естественное расширение класса областей в теоремах вложения // Мат. сб.— 1968.— Т. 75(117), № 4.— С. 483—495.
18. Бесов О. В., Ильин В. П., Кудрявцев Л. Д., Лизоркин П. И., Никольский С. М. Теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных // Ин-т мат. СО АН СССР. Труды симпозиума, посвященного 60-летию акад. С. Л. Соболева.— М.: Наука, 1970.— С. 38—63.
19. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.
20. Бирман М. Ш., Павлов Б. С. О полной непрерывности некоторых операторов вложения // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия.— 1961.— С. 61—74.
21. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории // Тр. десятой мат. школы.— Киев: ИМ АН УССР, 1974.— С. 5—189.
22. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа.— М.: АН СССР, 1959.
23. Брудный Ю. А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. Моск. мат. общества.— 1971.— Т. 24.— С. 69—132.
24. Бугров Я. С. Функциональные пространства со смешанной нормой // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1971.— Т. 35, № 5.— С. 1137—1158.
25. Бураго Ю. Д., Мазья В. Г. Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.— 1967.— Т. 3.— С. 1—152.
26. Буренков В. И. Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве // Итоги науки. Математический анализ, 1965.— М.: ВИНИТИ АН СССР.— 1966.— С. 71—155.
27. Буренков В. И. О плотности бесконечно дифференцируемых функций в пространствах Соболева для произвольного открытого множества // Тр. МИАН СССР.— 1974.— Т. 131.— С. 39—50.
28. Буренков В. И. О приближении функций из пространства $W_p^{(r)}(\Omega)$ финитными функциями для произвольного открытого множества // Тр. МИАН СССР.— 1974.— Т. 131.— С. 51—63.
29. Буренков В. И. Интегральное представление Соболева и формула Тейлора // Тр. МИАН СССР.— 1974.— Т. 131.— С. 33—38.
30. Буренков В. И. Об одном способе продолжения дифференцируемых функций // Тр. МИАН СССР.— 1976.— Т. 140.— С. 27—67.
31. Буренков В. И., Гольдман М. Л. О продолжении функций из L_p // Тр. МИАН СССР.— 1979.— Т. 150.— С. 31—51.

32. Буренков В. И., Гусаков В. А. О точных постоянных в теоремах вложения для выпуклых областей малого диаметра // Докл. АН СССР.— 1987.— Т. 294, № 6.— С. 1293—1297.
33. Буренков В. И., Файн Б. Л. О продолжении функций из анизотропных пространств с сохранением класса // Тр. МИАН СССР.— Т. 150.— 1979.— Т. 150.— С. 52—66.
34. Бухвалов А. В. Интерполяция обобщенных пространств Соболева и Бесова с приложением к теореме о следах пространств Соболева // Докл. АН СССР.— 1984.— Т. 279, № 6.— С. 1293—1296.
35. Вишик М. И. Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений // Мат. сб.— 1949.— Т. 25.— С. 189—234.
36. Вишик М. И. О краевых задачах для квазилинейных параболических систем уравнений и о задаче Коши для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР.— 1961.— Т. 140, № 5.— С. 998—1001.
37. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1979.
38. Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций.— М.: Наука, 1986.
39. Водопьянов С. К. Изопериметрические соотношения и условия продолжения дифференцируемых функций // Докл. АН СССР.— 1987.— Т. 292, № 1.— С. 11—15.
40. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн.— 1975.— Т. 16, № 2.— С. 224—246.
41. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Пространства Соболева и специальные классы отображений: Учеб. пособие.— Новосибирск: НГУ, 1981.
42. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Латфуллин Т. Г. Критерий продолжения функций класса L_2^1 из неограниченных плоских областей // Сиб. мат. журн.— 1979.— Т. 20, № 2.— С. 416—419.
43. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // Успехи мат. наук.— 1979.— Т. 34, № 1.— С. 17—65.
44. Волевич Л. Р., Ивраий В. Я. Гиперболические уравнения // И. Г. Петровский. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия.— М.: Наука, 1986.— С. 395—418.
45. Волевич Л. Р., Панеях Б. П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук.— 1965.— Т. 20, № 1.— С. 3—74.
46. Галахов М. А. О суммируемых областях // Тр. МИАН СССР.— 1967.— Т. 89.— С. 69.
47. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений — М.: Физматгиз, 1962.
48. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1958.

49. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.
50. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.
51. Гильдерман Ю. И. Абстрактные функции множеств и теоремы вложения С. Л. Соболева // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 144, № 5.— С. 962—964.
52. Глобенко И. Г. Некоторые вопросы теории вложения для областей с особенностями на границе // Мат. сб.— 1962.— Т. 57(99), № 2.— С. 201—224.
53. Глушко В. П. Об областях, звездных относительно шара // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 144, № 6.— С. 1215—1216.
54. Гоголадзе В. Г. Волновое уравнение для неоднородной и анизотропной среды // Тр. МИАН СССР.— 1935.— Т. 9.— С. 107—166.
55. Гоголадзе В. Г. Проблема Коши для «обобщенного» волнового уравнения // Докл. АН СССР.— 1934.— Т. 1, № 4.— С. 166—169.
56. Гоголадзе В. Г. К теории запаздывающих потенциалов // Докл. АН СССР.— 1934.— Т. 3, № 7.— С. 481—484.
57. Годунов С. К., Гордиенко В. М. Смешанная задача Коши для волнового уравнения // Тр. семинара С. Л. Соболева.— Новосибирск.— 1978.— № 2.— С. 93—118.
58. Головкин К. К. К теоремам вложения // Докл. АН СССР.— 1960.— Т. 134, № 1.— С. 19—22.
59. Головкин К. К. О невозможности некоторых неравенств между функциональными нормами // Тр. МИАН СССР.— 1964.— Т. 70.— С. 5—25.
60. Головкин К. К. Параметрически нормированные пространства и нормированные массивы // Тр. МИАН СССР.— 1969.— Т. 106.— С. 1—135.
61. Гольдман М. Л. Описание следов для некоторых функциональных пространств // Тр. МИАН СССР.— 1979.— Т. 150.— С. 99—127.
62. Гольдман М. Л. О вложении конструктивных и структурных липшицевых пространств в симметричные // Тр. МИАН СССР.— 1986.— Т. 173.— С. 90—112.
63. Гольдштейн В. М. Теоремы вложения, продолжения и емкость: Учеб. пособие.— Новосибирск: НГУ, 1982.
64. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. Л. Об интегрировании дифференциальных форм классов $W^*_{p,q}$ // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 23, № 5.— С. 63—79.
65. Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.— М.: Наука, 1983.
66. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1961.
67. Гординг Л. Резкие фронты парных осциллирующих интегралов // Успехи мат. наук.— 1983.— Т. 38, № 6.— С. 85—96.
68. Гудиев А. Х. Проблема С. Л. Соболева и С. М. Никольского для предельного показателя // Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 149, № 3.— С. 509—512.
69. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Пер. с англ.— М.: Мир, 1970.

70. Гулисашвили А. Б. О следах функций из пространств Бесова на подмножествах евклидова пространства.— Препринт/ЛОМИ.— Ленинград, 1985.— № Р—2—85.— С. 31.
71. Дезин А. А. К теоремам вложения и задаче о продолжении // Докл. АН СССР.— 1953.— Т. 88.— С. 741—743.
72. Джабраилов А. Д. О некоторых функциональных пространствах. Прямые и обратные теоремы вложения // Докл. АН СССР.— 1964.— Т. 159 — С. 254—257.
73. Джафаров Али С. О некоторых свойствах функций многих переменных // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного.— М.: Физматгиз, 1960.— С. 537—544.
74. Дубинский Ю. А. Некоторые теоремы вложения в классах Орлича // Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 152, № 3.— С. 529—532.
75. Дубинский Ю. А. Некоторые вопросы теории пространств Соболева бесконечного порядка и нелинейные уравнения // Дифференциальные уравнения с частными производными.— Новосибирск, 1980.— С. 75—80.
76. Дубинский Ю. А. О следах функций из пространств Соболева бесконечного порядка и неоднородной задаче Коши — Дирихле // Дифференц уравнения.— 1978.— № 6.— С. 1002—1012.
77. Иврий В. А., Петков В. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений // Успехи мат. наук.— 1974.— Т. 29, № 5.— С. 3—70.
78. Ильин В. П. Интегральные неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов.— Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук.— Л., 1951.— 15 с.
79. Ильин В. П. О теореме вложения для предельного показателя // Докл. АН СССР.— 1954.— Т. 96, № 5.—С. 905—908.
80. Ильин В. П. Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных в n-мерной области // Тр. МИАН СССР.— 1962.— Т. 66.— С. 227—363.
81. Ильин В. П. О неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных // Тр. МИАН СССР.— 1965.— Т. 84.— С. 144—173.
82. Ильин В. П. Интегральные представления дифференцируемых функций и их применения к вопросам продолжения функций классов $W_p^l(G)$ // Сиб. мат. журн.— 1967.— Т. 8.— С. 573—586.
83. Ильин В. П. О приближении функций класса $B_{p,\theta}^l(G)$ анизотропными средними // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.— 1978.— Т. 80.— С. 30—47.
84. Исмагилов Р. С. Поперечники компактов в линейных нормированных пространствах // Геометрия пространств и теория операторов.— Ярославль, 1977.— С. 75—113.
85. Кадлец И., Коротков В. Б. Об оценках s-чисел операторов вложения и операторов, повышающих гладкость // Чехосл. мат. журн.— 1968.— Т. 18, № 4.— С. 678—699.
86. Казарян Г. Г. Оценки в L_p смешанных производных через дифференциальные многочлены // Тр. МИАН СССР.— 1969.— Т. 105.— С. 66—76.

87. Калябин Г. А. Описание следов для анизотропных пространств типа Трибеля — Лизоркина // Тр. МИАН СССР.— 1979.— Т. 150.— С. 160—173.
88. Калябин Г. А. Описание функций из классов типа Бесова — Лизоркина — Трибеля // Тр. МИАН СССР.— 1980.— Т. 156.— С. 82—109.
89. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.— 2-е изд.— М : Наука, 1977. 3-е изд.— М.: Наука, 1985.
90. Кашин Б. С. О поперечниках классов Соболева малой гладкости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1981.— № 5.— С. 50—54.
91. Киприянов И. А. Об одном классе теорем вложения с весом // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 147, № 3.— С. 540—543.
92. Кисляков С. В. Соболевские операторы вложения и неизоморфность некоторых банаховых пространств // Функц. анализ и его прил.— 1975.— Т. 9, № 4.— С. 22—27.
93. Климов В. С. К теоремам вложения для анизотропных классов функций // Мат. сб.— 1985.— Т. 127, № 2.— С. 198—208.
94. Кокилашвили В. М. Максимальные функции и сингулярные интегралы в весовых функциональных пространствах // Тр. мат. ин-та АН ГССР.— 1985.— Т. 80.— С. 1—114.
95. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— 5-е изд.— М.: Наука, 1981.
96. Коляда В. И. О вложении классов $H_p^{\omega_1, \ldots, \omega_n}$ // Мат. сб.— 1985.— Т. 127, № 3.— С. 352—381.
97. Кондратьев В. А., Копачек И., Олейник О. А. О наилучших показателях Гёльдера для обобщенных решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб.— 1986.— Т. 131, № 1.— С. 113—125.
98. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Неулучшаемые оценки в пространствах Гёльдера для обобщенных решений бигармонического уравнения, системы уравнений Навье — Стокса и системы Кармана в негладких двумерных областях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1983.— № 6.— С. 22—39.
99. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук.— 1983.— Т. 38, № 2.— С. 3—76.
100. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Об оценках вторых производных решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в окрестности угловых точек границы // Успехи мат. наук.— 1987.— Т. 42, № 2.— С. 231—232.
101. Кондрашов В. И. О некоторых оценках семейств функций, подчиненных интегральным неравенствам // Докл. АН СССР.— 1938.— Т. 18, № 4—5.— С. 235—239.
102. Кондрашов В. И. О некоторых свойствах функций пространства L_p // Докл. АН СССР.— 1945.— Т. 48, № 6.— С. 563—566.
103. Кондрашов В. И. Поведение функций из L_p^ν на многообразиях различных размерностей. // Докл. АН СССР.— 1950.— Т. 6, № 5.— С. 1005—1012.

104. Коновалов В. Н. Критерий продолжения пространств Соболева $w_{\infty}^{(r)}$ из ограниченных плоских областей // Докл. АН СССР.— 1986.— Т. 289, № 1.— С. 36—38.
105. Коротков В. Б. К теоремам вложения С. Л. Соболева для абстрактных функций // Докл. АН СССР.— 1961.— Т. 141, № 2.— С. 308—311.
106. Крейн С. Г. Интерполяционные теоремы в теории операторов и теоремы вложения // Тр. 4-го Всесоюзного мат. съезда, 1961.— Т. 2.— Л.: Наука.— 1964.— С. 504—510.
107. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1977.
108. Кружков С. Н., Королев А. Г. К теории вложения анизотропных функциональных пространств // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 285, № 5.— С. 1054—1057.
109. Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.— М.: Наука, 1985.
110. Кудрявцев Л. Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Тр. МИАН СССР.— 1959.— Т. 55.— С. 1—181.
111. Кудрявцев Л. Д. Теоремы вложения для классов функций, определенных на всем пространстве или полупространстве // I — Мат. сб.— 1966.— Т. 69.— С. 3—35. II.— Мат. сб. Т. 70(112).— № 1.— С. 3—35.
112. Кудрявцев Л. Д. Теоремы вложения для весовых пространств и их приложения к решению задачи Дирихле // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций.— Баку: АН АзССР, 1965.— С. 493—501.
113. Кузнецов Ю. В. К вопросу о плотности бесконечно дифференцируемых функций в пространствах Бесова // Тр. МИАН СССР.— 1984.— Т. 170.— С. 203—212.
114. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1, 2: Пер. с нем.— М.— Л.: ГИТТЛ, 1951.
115. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения.— М.: Гостехиздат, 1953.
116. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М.: Наука, 1964.— С. 306—333.
117. Ландис Е. М., Олейник О. А. К теории уравнений эллиптического типа // И. Г. Петровский. Избранные труды. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1987.
118. Левитан Б. М. О решении задачи Коши для уравнения $\Delta u - q(x_1, \ldots, x_n)\, u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ по методу С. Л. Соболева // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1956.— Т. 20.— С. 237—276.
119. Левитан Б. М. О разложении по собственным функциям самосопряженного уравнения в частных производных // Тр. Моск. мат. общества.— 1956.— Т. 5.— С. 269—298.
120. Лере Ж. Гиперболические уравнения: Пер. с англ.— М.: Наука, 1984.
121. Лере Ж., Гординг Л., Котаке Т. Задача Коши: Пер. с фр.— М.: Мир, 1967.

122. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения // Мат. сб.— 1963.— Т. 60, № 3.— С. 325—353.
123. Лизоркин П. И. Неизотропные бесселевы потенциалы. Теоремы вложения для пространств Соболева $L_p^{r_1,\ldots,r_n}$ с дробными производными // Докл. АН СССР.— 1966.— Т. 170, № 3.— С. 508—511.
124. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. МИАН СССР.— 1969.— Т. 105.— С. 89—167.
125. Лизоркин П. И. Добавление. Пространства обобщенной гладкости // Трибель Г. Теория функциональных пространств: Пер. с англ.— М.: Мир, 1986.— С. 381—415.
126. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей производной // Тр. МИАН СССР.— 1965.— Т. 77.— С. 143—167.
127. Лионс Ж., Мадженес Е. Неоднородные краевые задачи и их приложения: Пер. с франц.— М.: Мир. 1971.
128. Литвинов В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике.— М.: Наука, 1987.
129. Лу Вень-туан. К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными степенями // Вестн. ЛГУ. Сер. «Математика, механика, астрономия».— 1961.— № 7.— С. 23—37.
130. Магарил-Ильяев Г. Г. Обобщенные соболевские классы и неравенства типа Бернштейна — Никольского // Докл. АН СССР.— 1982.— Т. 264, № 5.— С. 1066—1069.
131. Мазья В. Г. Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств // Докл. АН СССР.— 1960.— Т. 133, № 3.— С. 527—530.
132. Мазья В. Г. Классы областей и мер, связанные с теоремами вложения // Теоремы вложения и их приложения. Тр. симп. по теоремам вложения. Баку. 1966.— М.: Наука, 1970.— С. 142—159.
133. Мазья В. Г. О непрерывности и ограниченности функций из пространств С. Л. Соболева // Пробл. мат. анализа.— Л., 1973.— № 4.— С. 46—77.
134. Мазья В. Г. О суммируемости функций из пространств С. Л. Соболева // Пробл. мат. анализа.— Л.— 1975.— № 5.— С. 66—98.
135. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева.— Л.: ЛГУ, 1985.
136. Мазья В. Г., Поборчий С. В. О продолжении функций из пространств С. Л. Соболева во внешность области с вершиной пика на границе // Докл. АН СССР.— 1984.— Т. 275, № 5.— С. 1066—1069.
137. Мазья В. Г., Шапошникова Т. О. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций.— Л.: ЛГУ, 1986.
138. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций.— М.: Мир, 1964.

139. Масленникова В. Н., Боговский М. Е. Пространства Соболева соленоидальных векторных полей // Сиб. мат. журн.— 1981.— Т. 22, № 3.— С. 91—118.
140. Масленникова В. Н., Боговский М. Е. Аппроксимация соленоидальных и потенциальных векторных полей в пространствах Соболева и задачи математической физики // Дифференц. уравнения с частными производными. Тр. межд. конференции по дифференц. уравнениям с частными производными. Новосибирск. 1983.— Новосибирск: Наука, 1986.— С. 129—137.
141. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: МГУ, 1965.
142. Маслов В. П. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.
143. Маслов В. П. О регуляризации задачи Коши для псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН СССР.— 1967.— Т. 177, № 6.— С. 1277—1280.
144. Маслов В. П., Данилов В. Г. Квазиобращение в теории псевдодифференциальных уравнений // Итоги науки. Современные проблемы математики. Т. 6.— М.: ВИНИТИ, 1976.— С. 5—132.
145. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными: Пер. с англ.— М.: Мир, 1977.
146. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных.— М.: Наука, 1983.
147. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала.— М.: Гостехиздат, 1952.
148. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М.: Гостехиздат, 1957.
149. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных.— М.: Высшая школа, 1977.
150. Нагумо М. Лекции по современной теории дифференциальных уравнений в частных производных: Пер. с японск.— М.: Мир, 1967.
151. Нетрусов Ю. В. Теоремы вложения пространств Бесова в идеальные пространства // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.— 1987.— Т. 159.— С. 69—82.
152. Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР.— 1951.— Т. 38.— С. 244—278.
153. Никольский С. М. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных // Успехи мат. наук.— 1961.— Т. 16(101), № 5.— С. 63—114.
154. Никольский С. М. Об одной задаче С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн.— 1962.— Т. 3, № 6.— С. 845—851.
155. Никольский С. М. О граничных свойствах дифференцируемых функций многих переменных // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 146, № 3.— С. 542—545.
156. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1 изд.— 1969, 2 изд.— 1977.
157. Никольский С. М. Вариационная задача // Мат. сб.— 1963.— Т. 62, № 1.— С. 53—75.

158. Никольский С. М. К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом // Докл. АН СССР.— 1953.— Т. 33, № 2.— С. 409—411.
159. Никольский Ю. С. Граничные значения функций из весовых классов // Докл. АН СССР.— 1965.— Т. 164, № 3.— С. 503—506.
160. Никольская Н. С. Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p // Сиб. мат. журн.— 1974.— Т. 15, № 2.— С. 395—412.
161. Новиков С. П., Стернин Б. Ю. Эллиптические операторы и подмногообразия // Докл. АН СССР.— 1966.— Т. 171, № 3.— С. 525—528.
162. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. I.— М.: МГУ, 1976.
163. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки. Математический анализ, 1969.— М.: ВИНИТИ, 1971.
164. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. Принцип Сен-Венана в плоской теории упругости и краевые задачи для бигармонического уравнения в неограниченных областях // Сиб. мат. журн.— 1978.— Т. 19, № 5.— С. 1154—1165.
165. Олейник О. А., Кондратьев В. А., Копачек И. Об асимптотических свойствах решений бигармонического уравнения // Дифференц. уравнения.— 1981.— Т. 17, № 10.— С. 1886—1899.
166. Олейник О. А., Паламодов В. П. Системы линейных уравнений с частными производными // Петровский И. Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия.— М.: Наука, 1986.— С. 427—434.
167. Отелбаев М. Теоремы вложения для пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера // Тр. МИАН СССР.— 1979.— Т. 150.— С. 265—305.
168. Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.— М.: Наука, 1967.
169. Паламодов В. П. Каустики волновых процессов и обобщенные функции, связанные с особыми аналитическими гиперповерхностями // Обобщенные функции и их применения в математической физике. Тр. Межд. конф., Москва. 1980.— МИАН СССР, 1981.— С. 383—400.
170. Паламодов В. П. Обобщенные функции и гармонический анализ // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— М.: ВИНИТИ, 1989.
171. Перепелкин В. Г. Интегральные представления функций, принадлежащих весовым классам С. Л. Соболева в областях, и некоторые приложения // I — Сиб. мат. журн.— 1976.— Т. 17, № 1.— С. 119—140. II — Сиб. мат. журн.— 1976.— Т. 17, № 2.— С. 318—330.
172 Петровский И. Г. Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen // Мат. сб.— 1937.— Т. 2, № 5.— С. 815—870.
173. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными.— М.: Наука, 1964.

174. Петровский И. Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия.— М.: Наука, 1986.
175. Пиголкина Т. С. Теоремы вложения для функций, определенных в неограниченных областях, и их применение к краевым задачам для полигармонических уравнений // Докл. АН СССР.— 1966.— Т. 168, № 5.— С. 1012—1014.
176. Попова Е. М. Дополнения к теореме В. И. Буренкова о приближении функций из пространств Соболева с сохранением граничных значений // Дифференциальные уравнения и функциональный анализ.— М.: УДН, 1984.— С. 76—87.
177. Портнов В. Р. Об одном проекционном операторе типа С. Л. Соболева // Докл. АН СССР.— 1969.— Т. 189, № 2.— С. 258—260.
178. Потапов М. К. О вложении и совпадении некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1969.— Т. 33.— С. 840—860.
179. Похожаев С. И. О теореме вложения С. Л. Соболева в случае $pl = n$ // Докл. научно-техн. конф. МЭИ.— М.— 1965.— С. 158—170.
180. Решетняк Ю. Г. Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.— 1971.— Т. 12, № 2.— С. 420—432.
181. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Пер. с англ.— М.: Мир; Т. 1: Функциональный анализ, 1977; Т. 4: Спектральная теория, 1978.
182. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу: Пер. с англ.— М.: Мир, 1979.
183. Романов А. С. О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса // Функциональный анализ и математическая физика.— Новосибирск: Наука, 1985.— С. 117—133.
184. Рудин У. Функциональный анализ: Пер. с англ.— М.: Мир, 1975.
185. Рыбалов Ю. В. О теоремах вложения одного естественного расширения соболевского класса $W_p^l(\Omega)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— Т. 34.— С. 145—155.
186. Самко С. Г. Гиперсингулярные интегралы.— Ростов-на-Дону: РГУ, 1983.
187. Седов В. Н. О функциях, обращающихся на ∞ в полином // Теоремы вложения и их приложения. Тр. Всесоюзного симп. по теоремам вложения. Баку. 1966.— М.: Наука, 1970.— С. 204—212.
188. Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам в частных производных // Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена.— 1958.— Т. 197.— С. 54—112.
189. Слободецкий Л. Н. Оценки в L_p решений эллиптических систем // Докл. АН СССР.— 1958.— Т. 123, № 4.— С. 616—619.
190. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 5.— М.: Физматгиз, 1960.
191. Соболев С. Л. Sur l'equation d'onde pour le cas d'un milieu héterogéne isotrope // Докл. АН СССР.— 1930.— Т. 7. С. 163—167.
192. Соболев С. Л. Волновое уравнение для неоднородной среды // Тр. Сейсм. ин-та.— 1930.— Т. 6.— С. 1—57.

193. Соболев С. Л. Об одном обобщении формулы Кирхгофа // Докл. АН СССР.— 1933.— № 6.— С. 256—262.
194. Соболев С. Л. Новый метод решения задачи Коши для уравнений в частных производных второго порядка // Докл. АН СССР.— 1934.— Т. 1, № 8.— С. 433—438.
195. Соболев С. Л. Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionelles // Докл. АН СССР.— 1935.— Т. 3(8), № 7 (67).— С. 291—294.
196. Соболев С. Л. Methodo nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équation linéaires hyperbolic normales // Мат. сб.— 1936.— Т. 1(43).— С. 39—72.
197. Соболев С. Л. О некоторых оценках, относящихся к семействам функций, имеющих производные, интегрируемые с квадратом // Докл. АН СССР.— 1936.— Т. 1.— С. 267—270.
198. Соболов С. Л. Основная задача для полигармонического уравнения в области с вырожденным контуром // Докл. АН СССР.— 1936.— Т. 3.— С. 311—314.
199. Соболев С. Л. О прямом методе решения полигармонического уравнения // Докл. АН СССР.— 1936.— Т. 4.— С. 339—342.
200. Соболев С. Л. Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений // Мат. сб.— 1937.— Т. 2(44).— С. 467—500.
201. Соболев С. Л Об одной теореме функционального анализа // Докл. АН СССР.— 1938.— Т. 20.— С. 5—10.
202. Соболев С. Л. О задаче Коши для квазилинейных гиперболических уравнений // Докл. АН СССР.— 1938.— Т. 20.— С. 79—84.
203. Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб.— 1938.— Т. 4(46).— С. 471—498.
204. Соболев С. Л. Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений // Успехи мат. наук.— 1938.— Т. 4.— С. 275—277.
205. Соболев С. Л. Об одном неравенстве // Успехи мат. наук.— 1946.— Т. 3—4(13—14).— С. 197.
206. Соболев С. Л. Расширение пространств абстрактных функций, связанных с теорией интеграла // Докл. АН СССР.— 1957.— Т. 114.— С. 1170—1173.
207. Соболев С. Л. Теоремы вложения для абстрактных функций множеств // Докл. АН СССР.— 1957.— Т. 115.— С. 57—59.
208. Соболев С. Л. Некоторые обобщения теорем вложения // Fundam. math — 1959.— V. 47, № 3.— P. 277—324.
209. Соболев С. Л. Плотность финитных функций в пространстве $L_p^{(m)}(E_n)$ // Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 149, № 1.— С. 40—43.
210. Соболев С. Л. Плотность финитных функций в пространстве $L_p^{(m)}(E_n)$ // Сиб. мат. журн.— 1963.— Т. 4, № 3.— С. 673—682.
211. Соболев С. Л. О плотности финитных функций в $L_p^{(m)}(E_n)$ // Докл. АН СССР.— 1966.— Т. 167, № 3.— С. 516—518.
212. Соболев С. Л. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.
213. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул.— М.: Наука, 1974.

214. Соболев С. Л., Никольский С. М. Теоремы вложения // Тр. 4-го Всесоюзного мат. съезда. 1961. Т. 1.— Л.: Наука, 1963.— С. 227—242.
215. Соломяк М. З., Тихомиров В. М. О геометрических характеристиках вложения классов W_p^d в C // Изв. вузов. Математика.— 1967.— Т. 10.— С. 76—82.
216. Солонников В. А. О некоторых свойствах пространств $\mathfrak{M}_p^l$ дробного порядка // Докл. АН СССР.— 1960.— Т. 134, № 2. С. 282—285.
217. Солонников В. А. О некоторых неравенствах для функций из классов $W_p^{(m)}(R^n)$ // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР.— 1972.— Т. 27.— С. 194—210.
218. Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Пространства Соболева // Избранные главы анализа и высшей алгебры/ Учеб. пособие.— Л.: ЛГУ, 1981.— С. 129—197.
219. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций: Пер. с англ.— М.: Мир, 1973.
220. Стернин Б. Ю. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Тр. Московского мат. общества.— 1966.— Т. 15.— С. 346—382.
221. Стернин Б. Ю. Топологические аспекты проблемы С. Л. Соболева.— М.: МИЭМ, 1977.
222. Тавхелидзе И. Н. Аналог принципа Сен-Венана для полигармонических уравнений и его приложения // Мат. сб.— 1982.— Т. 118, № 2.— С. 236—251.
223. Тандит Б. В. О граничных свойствах функций из пространства $W_{p,\varphi}^{r,1}$ // Тр. МИАН СССР.— 1980.— Т. 156.— С. 223—232.
224. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы: Пер. с англ.— М.: Мир, 1985.
225. Тихомиров В. М. Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987.— С. 103—260. (Итоги науки и техники. Т. 14).
226. Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1, 2: Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.
227. Трибель Х. Интерполяционные свойства ε-энтропии и поперечников. Геометрические характеристики вложения пространств функций типа Соболева — Бесова // Мат. сб.— 1975.— Т. 98.— С. 27—41.
228. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы: Пер. с англ.— М.: Мир, 1980.
229. Трибель Х. Теория функциональных пространств: Пер. с англ.— М.: Мир, 1986.
230. Ульянов П. Л. Вложение некоторых классов функций H_p^{ω} // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1968.— Т. 32.— С. 649—686.
231. Успенский С. В. Свойства классов $W_p^{(r)}$ с дробной производной на дифференцируемых многообразиях // Докл. АН СССР.— 1960.— Т. 132.— С. 60—62.

232. Успенский С. В. О теоремах вложения для весовых классов // Тр. МИАН СССР.— 1961.— Т. 60.— С. 282—303.
233. Успенский С. В. О представлении функций, определяемых одним классом операторов // Тр. МИАН СССР.— 1972.— Т. 117.— С. 292—299.
234. Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г. Теоремы вложения и их приложения к дифференциальным уравнениям.— Новосибирск: Наука, 1984.
235. Файн Б. Л. Теоремы вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми в разных степенях // Мат. заметки. 1975.— Т. 18, № 3.— С. 379—393.
236. Файн Б. Л. Об одном способе продолжения дифференцируемых функций/МИРЭА.— М., 1982.— 11 с.— Деп. в ВИНИТИ 4.02.1983, № 3352.
237. Файн Б. Л. О продолжении функций из пространств Соболева для нерегулярных областей с сохранением показателя гладкости // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 285.— № 2.— С. 296—301.
238. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости: Пер. с англ.— М.: Мир, 1974.
239. Филиппов В. М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов.— М.: УДН, 1985.
240. Фролов Н. Н. Теоремы вложения для функций счетного числа переменных и их приложения к задаче Дирихле // Докл. АН СССР.— 1972.— Т. 203.— С. 39—42.
241. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства/Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1948.
242. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными: Пер. с англ.— М.: Мир, 1965.
243. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1—4: Пер. с англ.— М.: Мир, 1986—1987.
244. Шапира П. Теория гиперфункций: Пер. с фр.— М.: Мир, 1972.
245. Шаталов В. Е. Некоторые асимптотические разложения в задачах Соболева // Сиб. мат. журн.— 1977.— Т. 18, № 6.— С. 1393—1410.
246. Шаньков В. В. Оператор усреднения с переменным радиусом и обратная теорема о следах // Сиб. мат. журн.— 1985.— Т. 26, № 6.— С. 141—152.
247. Шварц Л. Применение обобщенных функций к изучению элементарных частиц в квантовой механике: Пер. с фр.— М.: Мир, 1964.
248. Шварцман П. А. Локальные приближения функций и теоремы продолжения/Ярослав. ун-т.— Ярославль, 1983.— 30 с.— Деп. в ВИНИТИ 18.04.1983, № 2025.
249. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы: Пер. с фр.— М.: Мир, 1979.
250. Юдович В. И. О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений // Докл. АН СССР.— 1961.— Т. 138, № 4.— С. 805—808.

251. Я к о в л е в Г. Н. Граничные свойства функций класса $W_p^{(2)}$ на областях с угловыми точками // Докл. АН СССР.— 1961.— Т. 140, № 1.— С. 73—76.
252. A d a m s D. R. A trace inequality for generalized potentials // Stud. math.— 1973.— V. 48, № 1.— P. 99—105.
253. A d a m s D. R. Trace of potentials. II // Indiana Univ. math. J.— 1973.— V. 22, № 10.— P. 907—918.
254. A d a m s R. A. Sobolev spaces.— New York — San Francisko — London: Acad. Press, 1975.
255. A r o n s z a j n N. On coercive integro-differential quadratic forms // Conference on partial Differential Equations. Univ. of Kansas.— 1954.— Report № 14.— P. 94—106.
256. A r o n s z a j n N., M u l l a F., S z e p t y c k i P. On spaces of potentials connected with L^p classes // Ann. Inst. Fourier.— 1963.— V. 13.— P. 211—306.
257. A r o n s z a j n N., S m i t h K. T. Theory of Bessel potentials. I // Ann. Inst. Fourier.— 1961.— V. 11.— P. 385—475.
258. A u b i n T. Problèmes isopérimètriques et espaces de Sobolev // C. r. Acad. sci. Ser. A — 1975.— T. 280.— P. 279—281.
259. A v a n t a g g i a t t i A. Spazi di Sobolev con peso ed alcune applicazioni // Boll. Unione mat. ital.— 1976.— V. 13 A, № 5.— P. 1—52.
260. A v a n t a g g i a t i A., T r o i s i M. Spazi di Sobolev con peso e problemi ellittici in un angolo // I — Ann. mat. pura ed appl.— 1973.— V. 95.— P. 361—408; II — Там же.— 1973.— V. 97.— P. 207—252.— III.— Там же.— 1974.— V. 99.— P. 1—51.
261. B e a u z a m y B. Espaces de Sobolev et de Besov d'ordre variable définis sur L^p // C. r. Acad. sci. Sér. A.— 1972.— T. 274.— P. 1935—1938.
262. B e n e d e k A., P a n z o n e R. The spaces L^p with mixed norm // Duke math. J.— 1961.— V. 28, № 3.— P. 301—324.
263 B ö t t g e r H.— J. Ein Kriterium für die Approximierbarkeit von Funktionen aus Sobolewschen Räumen durch glatte Funktionen // Manuscr. math.— 1981.— Bd. 34.— S. 93—120.
264. B u r e n k o v V. I. Mollifying operators with variable step and their application to approximation by infinitely differentiable functions // Nonlinear Analysis, Function spaces and Applications. V. 2.— Leipzig: Teubner — Texte zur Mathematik.— 1982.— Bd. 49.— S. 5—37.
265. C a l d e r ó n A. P. Lebeques spaces of differentiable functions and distributions // Pros. Symp. Pure Math.— 1961.— V. 4.— P. 33—49.
266. C a l k i n J. W. Functions of several variables and absolute continuity. I // Duke math. J.— 1940.— V. 6.— P. 176—186.
267. C a m p a n a t o S. Il teorema di immersione de Sobolev per una classe di aparti non dotati della proprieta di cono // Ric. mat.— 1962.— V. 11, № 1.— P. 103—122.
268. D e n y L., L i o n s J. L. Les espaces de type de Beppo Levi // Ann. inst. fourier.— 1953—1954.— V. 5.— P. 305—370.
269. D o n a l d s o n T. Nonlinear elliptic boundary value problems in Orlich — Sobolev spaces // J. different. equat.— 1971.— V. 10.— P. 507—528.

270. Duistermaat J. J., Hörmander L. Fourier integral operators. II // Acta Math.— 1972.— V. 128.— P. 183—269.
271. Edmunds D. E., Evans W. D. Orlich and Sobolev spaces on unbounded domains // Proc. roy. soc. London. A.— 1975.— V. 342.— P. 373—400.
272. Ehrling G. On a type of eigenvalue problems for certain elliptic differential operators // Math. scand.— 1954.— V. 2.— P. 267—285.
273. Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables.— New-York, London, Sydney, Toronto: Wiley Publ, 1970.
274. Federer H., Fleming W. H. Normal and integral currents // Ann. math.— 1960.— V. 72.— P. 458—520.
275. Fichera G. Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems // Lecture notes in mathematics. V. 8.— Berlin.— Heidelberg — New York: Springer, 1965.
276. Fraenkel I. E. On regularity of the boundary in the theory of Sobolev spaces // Proc. London Math. Soc.— 1979.— V. 39, № 3.— P. 385—427.
277. Freud G., Kralik D. Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis // Acta math. hung.— 1956.— V. 7, № 3—4 — P. 411—418.
278. Friedrichs K. O. On the identity of weak and strong extensions of differential operators // Trans. amer. math. soc.— 1944.— V. 55.— P. 132—151.
279. Gagliardo E. Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rend. Sem. Matem. Univ. di Padova.— 1957.— V. 27.— P. 284—305.
280. Gagliardo E. Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili // Ric. mat.— 1958.— V. 7. P. 102—137.— Русский перевод: Математика.— 1961.— Т. 5, № 4.— С. 87—116.
281. Gagliardo E. Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili // Ric. mat.— 1959.— V. 8.— P. 24—51.
282. De Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari // Mem. accad. sci. Torino.— 1957.— V. 3.— P. 25—43.
283. Gol'dstein V. M., Vodop'janov S. K. Prolongement de fonctions differentiables hors de domaines plans // C. r. Acad. sci. Ser. A.— 1981.— T. 293.— P. 581—584.
284. Hadamard J. Sur le pricipe de Dirichlet // Bull. soc. math. France.— 1906.— V. 24.— P. 135—138.
285. Hanouzet B. Espaces de Sobolev avec poids. Applications an problème de Dirichlet dans une demi espace // Rend. sem. mat. univ. Padova.— 1971.— V. 46.— P. 227—272.
286. Hedberg L. I. Two approximation problems in function spaces // Ark. math.— 1978.— V. 16, № 1.— P. 51—81.
287. Hedberg L. I. Spectral synthesis in Sobolev spaces and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem // Acta math.— 1981.— V. 147.— P. 237—264.
288. Heywood I. G. On uniqueness questions in the theory of viscous flow // Acta math.— 1976.— V. 136, № 1—2.— P. 61—102.
289. Hopf E. Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodynamischen Grundgleichungen // Mat. Nachr.— 1950—51.— Bd. 4.— S. 213—231.

290. John F., Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation // Communs pure and appl. math.— 1961.— V. 14, № 3.— P. 415—426.
291. Jones P. W. Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces // Acta math.— 1981.— V. 147.— P. 71—88.
292. Komatsu H. The Sobolev — Besov imbedding theorem from the viewpoint of semi-groups of operators // Sem. Goulaonic — Schwarts.— 1972—1973.— Exp. 1.
293. Kondratiev V. A., Oleinik O. A. On the smoothness of weak solutions of the Dirichlet problem for the biharmonic equation in domains with nonregular boundary // Nonlinear partial differential equations and their applications. College de France Seminar, Pitman.— 1986.— V. 7.— P. 180—199.
294. Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Estimates near the boundery for second order derivatives of solutions of the Dirichlet problem for the biharmonic equations // Atti. accademia naz. Lincei, rendiconti.— Roma, 1986.— V. 80, № 7—12.— C. 525—529.
295. Kufner A. Weighted Sobolev spaces.— Leipzig: Teubner-Texte zur Mathematik, 1980.
296. Kufner A., John O., Fučik S. Function spaces.— Prague: Academia, 1977.
297. Lax P. D. On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations // Communs pure and appl. math.— 1955 — V. 8.— P. 615—633.
298. Lax P. D. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problem // Duke math. J.— 1957.— V. 24.— P. 627—646.
299. Lützen J. The prehistory of the theory of distribution.— Institut for de eksakte videnskabers historie. Aarhus Univ., 1979.
300. Mathisson M. Eine neue Lösungsmethode für Differentialgleichungen von normalen hyperbolishen Typus // Math. ann.— 1932.— Bd. 107, № 3.— P. 400—419.
301. Mazja V. G. Einbettungssätze für Sobolewsche Raüme.— Leipzig: Teubner-Texte zur Mathematik; Bd. 1, 1979; Bd. 2, 1980.
302. Meyers N., Serrin J. $H \equiv W$ // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1964.— V. 51.— P. 1055—1056.
303. Michlin S. G. Konstanten in einigen Ungleichungen der Analysis.— Leipzig: Teubner-Texte zur Mathematik, 1981.
304. Morrey C. B, Jr. Functions of several variables and absolute continuity II. // Duke Math. J.— 1940.— V. 6, № 1.— P. 187—215.
305. Morrey C. B. Integrals in the calculus of variations.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer verlag, 1966.
306. Moser J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Communs pure and appl. math.— 1960.— V. 13.— P. 457—468.
307. Moser J. A sharp form of an inequality by N. Trudinger // Indiana univ. math. j.— 1971.— V. 20, № 11.— P. 1077—1092.
308. Muramatu T. On imbedding theorems for Sobolev spaces and some of their generalization // Publ. res inst. math. sci. Kyoto univ. Ser. A.— 1968.— V. 3.— P. 393—416.
309. Nečas J. Les métbodes directes en théorie des équations élliptiques.— Prague: Academia, 1967.

310. Nikodým O. M. Sur une classe de fonctions considerées dans le probléme de Dirichlet // Fund. math.— 1933.— V. 21.— P. 129—150.
311. Nikolsky S. M., Lions J. L., Lizorkin P. I. Integral representation and isomorphism properties of some classes of functions // Ann. scuola norm. super. Pisa.— 1965.— V. 19, № 11, P. 127—178.
312. Nirenberg L. On elliptic partial differential equations (Lecture II) // Ann. scuola norm. super. Pisa. Ser. 3.— 1959.— V. 13.— P. 115—162.
313. Oleinik O. A. On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations // Communs pure and appl. math.— 1970 — V. 23.— P. 569—589.
314. Oleinik O. A. On some mathematical problems of elasticity // Atti. dei convegni Lincei. Acad. naz. Lincei.— 1986.— V. 77.— P. 259—273.
315. Oleinik O. A. On the behaviour at infinity of solutions of second order elliptic equations // Ordinary and partial differential equations; 1986. Pitman Research Notes in Mathematics, Series 157. Proceedings of the 9 Dundee Conference.— 1987.— P. 161—175.
316. Peetre J. Espaces d'interpolation et théoréme de Soboleff // Ann. Inst. Fourier.— 1966.— V. 16.— P. 279—317.
317. Peetre J. A remark on Sobolev spaces. The case $0 < p < 1$ // J. approxim. theory.— 1975.— V. 13.— P. 218—228.
318. Peetre J. New thoughts on Besov spaces.— Duke Univ. Math. Series, 1976.
319. Peetre J. A counterexample connected with Gagliardo's trace theorem // Comment. math. Prace mat.— 1979.— T. 2.— P. 277—282.
320. Poulsen E. T. Boundary value properties connected with some improper Dirichlet integral // Math. scand.— 1960.— V. 8, № 1.— P. 5—14.
321. Prym F. Zur Integration der Differentialgleichunge $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ // J. de Crelle.— 1871.— V. 73.— P. 340—349.
322. Rosen G. Minimum value for C in the Sobolev inequality $\|\varphi^3\| \leqslant C\|\operatorname{grad}\varphi\|^3$ // SIAM J. appl. math.— 1971.— V. 21, № 1.— P. 30—33.
323. Smith K. T. Formulas to represent functions by their derivatives // Math. ann.— 1970.— V. 188, № 1.— P. 53—77.
324. Stampacchia G. $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$-spaces and interpolation // Communs pure and appl. math.— 1964.— V. 17.— P. 293—306.
325. Stein E. M. The characterization of functions arising as potentials // Bull. Amer. Math. Soc.— I.— 1961.— V. 67, № 1.— P. 102—104; II.— Там же.— 1962.— V. 68, № 6.— P. 577—584.
326. Stricharts R. S. Multipliers on fractional Sobolev spaces // J. math. and mech.— 1967.— V. 16.— P. 1031—1060.
327. Schwartz L. Théorie des distribution. I. II.— Paris: Hermann, 1950—51.

328. Schwartz L. Les travaux de Garding sur le problem de Dirichlet — Sém Bourbaki, Paris, 1952.
329. Tableson M. N. On the theory of Lipshitz spaces of distributions on Euclidian n-space // I.— J. math. and mech.— 1964.— V. 13.— P. 407—479.— II.— Там же.— 1965.— V. 14.— P. 821—840.— III.— Там же.— 1966.— V. 15.— P. 973—981.
330. Talenti G. Best constant in Sobolev inequality // Ann. mat. pura et appl.— 1976.— V. 110.— P. 353—372.
331. Trudinger N. S. On imbeddings into Orlich spaces and some applications // J. math. and mech.— 1967.— V. 17.— P. 473—483.
332. Unterberger A. Sobolev spaces of variable order and problems of convexity for partial differential operators with constant coefficients // Coll. Intern. C. N. R. S. sur les équations aux dérivées partielles linéaires.— Astérisque 2 et. 3. Soc. math. France.— 1973.— P. 325—341.
333. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory // Duke Math. J. 1940.— № 7.— P. 411—444.
334. Yoshikawa A. On abstarct formulation of Sobolev type imbedding theorems and its applications to elliptic boundary value problems // J. Fac. sci. univ. Tokyo. Sect. I. A.— 1970.— V. 17.— P. 543—558.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1*. Bochner S. Vorlesungen über Fouriersche Integrale.— Leipzig, 1932.
2*. Riesz M. L'integral de Riemann — Liouville et le problème de Cauchy // Acta Math.— 1949.— V. 81.— P. 1—223.
3*. Martineau A Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes // Proc. of the Intern. Summer Inst.— Lisbon, 1964.
4*. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных.— М.: Наука, 1976.
5*. Sato M. Theory of hyperfunctions I, II // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.— 1959—1960.— V. 8.— P. 139—193, 387—437.

Научное издание

Соболев Сергей Львович

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ
ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Заведующий редакцией *А. П. Баева*
Редакторы *В. И. Буренков, М. М. Горячая*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Т. Г. Егорова, М. Л. Медведская*

ИБ № 32660

Сдано в набор 25.12.87. Подписано к печати 18.10.88. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 17,75. Усл. кр.-отт. 17,7. Уч.-изд. л. 20,26. Тираж 6200 экз. Заказ № 4. Цена 2 р. 70 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск 77, Станиславского, 25

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15