

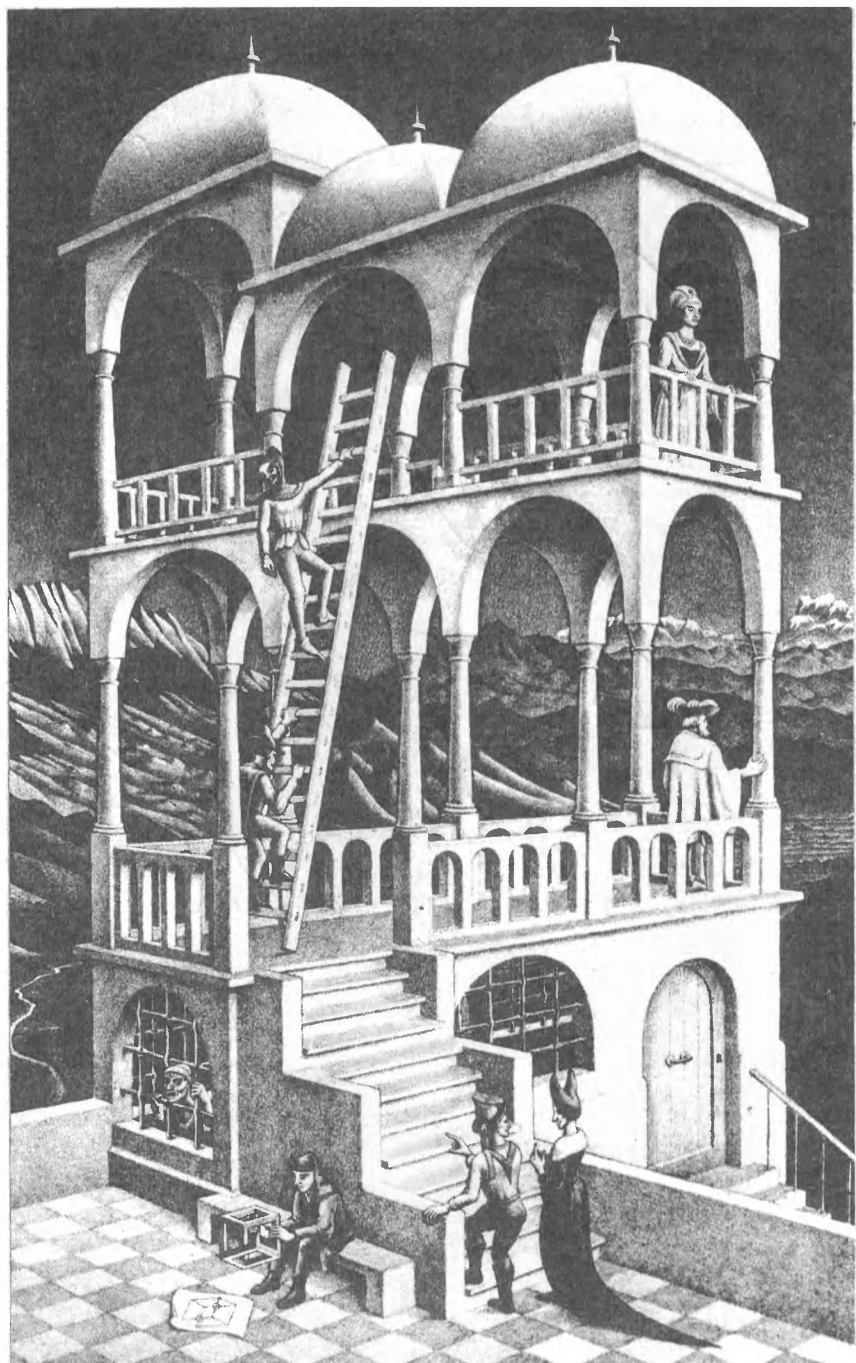
И.Ф. ШАРЫГИН,  
Л.Н. ЕРГАНЖИЕВА



# НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**Глядя на мир,  
нельзя не удивляться.**

*Козьма Прутков*



И. Ф. ШАРЫГИН, Л. Н. ЕРГАНЖИЕВА

# НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

учебное пособие  
для учащихся V—VI классов

МОСКВА 1992

**Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. Учебное пособие для V — VI классов. — М.; МИРОС, КПП «МАРТА», 1992. — 208 с.; ил.**

Книга, не имеющая аналогов в современной школьной практике, призвана способствовать развитию у младших школьников геометрических представлений.

Пособие, написанное живо и увлекательно, может быть использовано учителем как на уроках, так и во внеклассной работе. Много полезного найдут в нем и школьники для самостоятельных занятий

Для учащихся и преподавателей геометрии

**Оформить заявку на учебное пособие «Наглядная геометрия»  
можно по адресу:**

**109004, Москва, ул. Нижняя Радищевская, д. 10, МИРОС**

**Тел. для справок и заявок: 272-23-15; 271-23-20.**

**Расчетный счет N 609071**

**в Коммерческом Народном банке г. Москвы,  
код МФО 191016**

**Изд. N C83(03)**  
**ISBN 5-87299-065-1**



- © И Ф Шарыгин, Л Н Ерганжиева
- © Московский институт развития образовательных систем (МИРОС), 1992
- © Культурно-производственный центр «МАРТА», 1992

## *Дорогой читатель!*

Книга, которую вы только что открыли, не учебник. Во всяком случае она не похожа на обычный учебник. Эта книга введет вас в мир геометрии. На самом деле этот мир окружает вас с самого рождения. Ведь все, что мы видим вокруг (прямоугольник окна, загадочный узор снежинки, дома-параллелепипеды, капля воды, велосипедная шина, узел на веревке, линия, по которой движется брошенный камень), так или иначе относится к геометрии, ничто не ускользает от ее внимательного взгляда.

Мы хотели бы, чтобы эта книга помогла вам идти по миру геометрии с широко открытыми глазами, научила внимательно смотреть вокруг и видеть красоту обычных вещей, смотреть и думать, думать и делать выводы.

Прежде всего эту книгу надо читать и понимать, внимательно рассматривать рисунки. Надо постоянно решать задачи. Не отчаивайтесь, если задача кажется трудной, не удастся рисунок. Не торопитесь заглянуть в ответ, подумайте еще немного, сделайте еще несколько попыток рисунков. Если все-таки что-то не получается — загляните в ответ. Разберитесь в приведенном там решении. И мы уверены, прекрасный мир геометрии постепенно пойдет вам навстречу, начнет открывать свои тайны, и вы полюбите геометрию на всю жизнь.

## Слово к учителю

В основе предлагаемого курса лежит соответствующая авторская концепция геометрического образования и его значения в интеллектуальном, творческом развитии человека. В краткой тезисной форме суть этой концепции можно изложить следующим образом. Исторически и генетически геометрическая деятельность является первичной интеллектуальной деятельностью человечества в целом и каждого человека в отдельности.

Геометрия — это не только раздел математики, школьный предмет, это прежде всего феномен общечеловеческой культуры, являющийся носителем собственного метода познания мира.

Геометрическое мышление в своей основе является разновидностью образного, чувственного мышления, что функционально присуще правому полушарию головного мозга; по мере развития геометрического мышления происходит возрастание логической составляющей и соответственно роли левого полушария. Отсюда важность геометрии в непосредственно физиологическом смысле и особенно для детей в возрасте 8 — 12 лет с доминирующим развитием правого полушария. Есть основания считать, что таких детей отнюдь не меньшинство.

Важнейшей педагогической проблемой является разрешение противоречия между первичностью пространственных форм с точки зрения процесса познания мира, их физическим реализмом сравнительно с абстрактностью плоских фигур и традиционной логикой построения геометрических курсов, развивающихся от плоской к пространственной геометрии. Возможным путем разрешения такого противоречия является соответствующая специализация геометрического материала на трех этапах школьного обучения. [На первом этапе (1 — 6 классы) единый курс математики с широкой геометризацией всего изучаемого материала, приоритетность пространственных форм; в течение двух последних лет — выделение четкой геометрической линии ("Наглядная геометрия"). На втором этапе (7 — 9 классы) систематический курс геометрии, частично фузионистский (к теории плоской геометрии добавляются элементы пространственной). На последнем этапе (10 — 11 классы) множественные курсы, программы которых определяются целями и потребностями соответствующих категорий школьников. Основным является курс

геометрии, к которому, возможно, добавляются элементы аксиоматической теории.

Занятия геометрией способствуют развитию интуиции, воображения и других важнейших качеств, лежащих в основе любого творческого процесса.

Геометрия обладает целым рядом качеств, присущих предметам гуманитарного цикла, и в определенном смысле является самым гуманитарным из негуманитарных предметов. Геометрия располагает огромными возможностями для эмоционального, эстетического и духовного развития человека.

Таковы тезисы, определяющие концепцию школьного курса геометрии в целом и его раздела «Наглядная геометрия» (5—6 классы, возраст 10—12 лет) в частности. Кроме того, в концептуальную основу «Наглядной геометрии» входит общий взгляд на значение соответствующего школьного этапа в образовательном процессе, на его роль в формировании основы для гармоничного развития личности, в определении профессиональных ориентиров. Одной из задач математики на этом этапе является задача заинтересовать, привлечь внимание всех школьников, обладающих каким-то типом математических способностей, а для этого необходимо показать математику во всей ее многогранности, акцентируя внимание на интересных, занимательных темах. Математическое развитие ученика в этом возрасте происходит в рамках своеобразной триады: число — фигура — слово.

«Наглядная геометрия» привязана ко второй части триады. Числовые характеристики, связанные с фигурой, играют существенную, но все же вторичную роль. Большое значение имеет третья составляющая триады — слово. Его роль не ограничивается традиционными функциями (сообщение теоретических сведений, проведение логическо-доказательной линии) и даже менее традиционными, но все же достаточно понятными и привычными, расширяющими информационный горизонт предмета за счет включения в него сведений из истории, географии и просто общегуманитарных наук. Самое главное — избежать сухости, словарной ограниченности и стилистической тяжеловесности, которые органически присущи учебным математическим текстам. Литературно-художественный фон должен удовлетворять самым строгим эстетическим критериям, что в сочетании с математической точностью существенно увеличивает воспитательные возможности курса. (Насколько эта цель достигнута авторами, им самим судить трудно.)

Одной из важнейших задач школы является воспитание культурного человека. Но формальное объединение традиционного содержания школьных предметов оставляет в стороне многие



важнейшие участки общекультурного пространства. В связи с этим каждый предмет должен взять дополнительные, несвойственные ему функции. Так, геометрия должна внести свой вклад в художественное воспитание учеников, развитие у них изобразительной культуры. Для этого следует широко использовать произведения мастеров изобразительного искусства, графиков и зодчих, иллюстрируя те или иные геометрические закономерности. Ведущей методической линией курса является организация разнообразной геометрической деятельности: наблюдение, экспериментирование, конструирование и др., в результате которой учащиеся самостоятельно добывают геометрическое знание и развивают специальные качества и умения: геометрическую интуицию, пространственное воображение, глазомер, изобразительные навыки. Плоские и пространственные формы изучаются совместно, последовательность изучаемых тем обуславливается не столько логикой предмета, сколько установкой на разнообразие и регулярное изменение видов геометрической деятельности.

К каждому параграфу прилагается достаточное число всевозможных заданий и задач, расположенных по сложности в очень широком диапазоне. Авторами многих из имеющихся в пособии задач и головоломок являются как известные составители головоломок — Ллойд, Дьюдени, Барр, Произволов и др., так и малоизвестные и даже анонимные творцы математического фольклора. Не приписывая себе авторства этих задач, мы были вынуждены отказаться от ссылок, поскольку во многих случаях установить первоисточник просто невозможно, да и данное пособие все же не является академическим изданием.

Некоторые из задач весьма трудны и возможно, что даже очень способный школьник с ними справится не сразу. Но тем не менее важно, чтобы он потрудился над ними определенное время. Это имеет и развивающее (чтобы научиться думать, надо думать), и воспитательное значение. Кроме того, в этом случае учащийся лучше оценит яркую идею, заложенную в решении, и эта идея надолго останется в его голове, возможно, на всю жизнь. В пособии имеется целый ряд задач, которые, несмотря на внешнюю сложность, все же являются задачами для всех. Успеха может добиться каждый, если проявит усидчивость, аккуратность и трудолюбие, тем более, что в подобных задачах (заданиях) возможны разные уровни достижения успеха.

Авторы пособия надеются, что работа с книгой будет интересной и доставит удовольствие и ученикам, и учителям.

## § 1. ПЕРВЫЕ ШАГИ В ГЕОМЕТРИИ\*

---

*«Я думаю, что никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период. Все вокруг — геометрия». Эти слова, сказанные великим французским архитектором Ле Корбюзье в начале XX в., очень точно характеризуют и наше время. Мир, в котором мы живем, наполнен геометрией домов и улиц, гор и полей, творениями природы и человека. Лучше ориентироваться в нем, открывать новое, понимать красоту и мудрость окружающего мира поможет вам эта книга.*

---

Геометрия зародилась в глубокой древности. Строя жилища и храмы, украшая их орнаментами, размечая землю, измеряя расстояния и площади, человек применял свои знания о форме, размерах и взаимном расположении предметов, он использовал свои геометрические знания, полученные из наблюдений и опытов. Почти все великие ученые древности и средних веков были выдающимися геометрами. Древнегреческий философ Платон, проводивший беседы со своими учениками в роще Академа (Академ — древнегреческий мифологический герой, которого, по преданию, похоронили в священной роще недалеко от Афин), откуда и пошло название «академия», одним из девизов своей школы провозгласил: «Не знающие геометрии не допускаются!» Было это примерно 2400 лет тому назад. Из геометрии вышла наука, которая называется математикой.

На занятиях по наглядной геометрии, где вы встретитесь с интересными головоломками и занимательными задачами, бумаж-

---

\* К каждому параграфу прилагается достаточное число всевозможных заданий и задач, расположенных по сложности в очень широком диапазоне. Авторами многих из имеющихся в пособии задач и головоломок являются как известные составители головоломок — Ллойд, Дьюдени, Барр, Произволов и др., так и малоизвестные и даже анонимные творцы математического фольклора. Не приписывая себе авторства этих задач, мы были вынуждены отказаться от ссылок, поскольку во многих случаях установить первоисточник просто невозможно, да и данное пособие все же не является академическим изданием

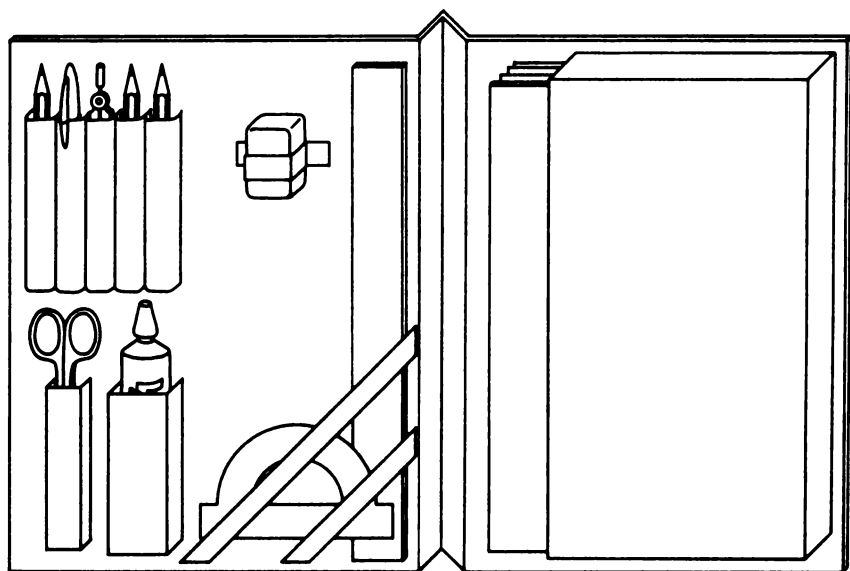


Рис. 1

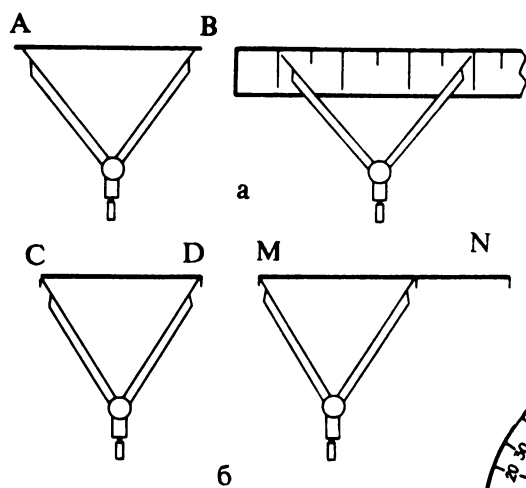


Рис. 2

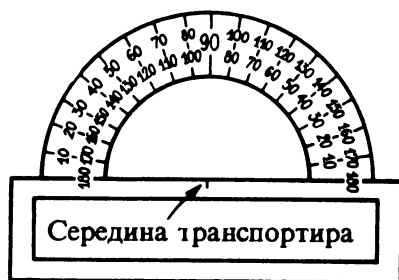


Рис. 3

ными человечками и геометрическими играми, вашими постоянными спутниками будут наблюдение и опыт. Усидчивость и аккуратность при выполнении заданий помогут вам в достижении цели. Они так же важны, как смекалка и находчивость при решении задач.

В ходе занятий часто будут встречаться задания начертить какую-либо фигуру, измерить какие-либо величины. Все необходимое для выполнения этих заданий есть в папке для геометрических занятий (рис. 1). Это линейка, циркуль и транспортир, т.е. измерительные и чертежные инструменты.

С помощью линейки можно:

- проводить прямые линии;
- измерять отрезки;
- строить отрезки заданной длины.

Линейку без делений мы назовем математической линейкой. С ее помощью можно лишь проводить прямые линии.

Циркуль позволяет:

- строить окружности;
- измерять отрезки (рис.2, а);
- сравнивать отрезки по величине (рис.2, б);
- откладывать на прямой отрезки заданной величины (длины).

Транспортир (рис. 3) используют для измерения и построения углов. Шкала транспортира представляет полуокружность, разделенную на 180 частей. Одна часть называется ГРАДУСОМ. Шкала транспортира содержит  $180^\circ$  (знак  $^\circ$  в конце числа вверх заменяет слово «градусов»). В градусах измеряют углы и дуги окружностей.

Будьте внимательны! На транспортире две шкалы! Если сторона угла совпадает с правой половиной основания транспортира, то используют внутреннюю шкалу, а если с левой половиной, то внешнюю!



**Геометрическая птичка Квадрик покажет Самое Важное, что нужно запомнить.**

Мы начнем с нескольких задач, внешне очень различных, показывающих некоторые грани геометрии.

Итак, в дорогу! Счастливого пути!

1. Сложите шесть спичек так, чтобы образовалось четыре треугольника (сторона каждого треугольника должна быть равной длине спички).
2. Разрежьте квадрат на четыре равные части разными способами, на пять частей.

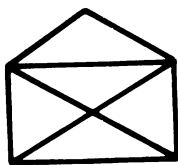


Рис. 4



Рис. 5

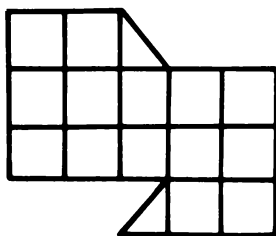


Рис. 6

3. Можно ли нарисовать открытый конверт (рис. 4), не отрывая карандаша от бумаги и не проводя более одного раза никакой линии? А закрытый (рис. 5)?
4. Как разрезать фигуру, показанную на рис. 6, на две одинаковые части?
5. Арбуз разрезали на четыре части и съели. Получилось пять корок. Может ли такое быть?
6. Как вырезать из целого листа бумаги фигуру, изображенную на рис. 7? Приклеивать части нельзя.
7. Четыре страны имеют форму треугольников. Нарисуйте, как расположены друг относительно друга страны, если у каждой из них есть общие границы с тремя другими.
8. Деревянный куб покрасили снаружи белой краской, каждое его ребро разделили на пять равных частей, после чего куб распилили так, что получились маленькие кубики, у которых ребро в пять раз меньше, чем у исходного куба. Сколько получилось маленьких кубиков? У скольких кубиков окрашены три грани? две грани? только одна грань? Сколько осталось неокрашенных кубиков?

## § 2. ПРОСТРАНСТВО И РАЗМЕРНОСТЬ

---

*Однажды известный математик пытался объяснить своему знакомому поэту, что такое пространство. Тот долго его слушал, а в конце заметил: «Это все не так. Я знаю, что пространство голубое и по нему летают птицы!» К сожалению, математики смотрят на пространство более прозаично.*

---

Геометрия изучает форму и взаимное расположение фигур в пространстве. Это то пространство, которое окружает нас. Посмотрим вокруг.

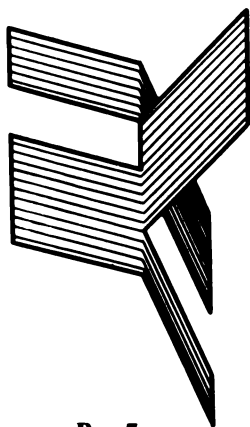


Рис. 7

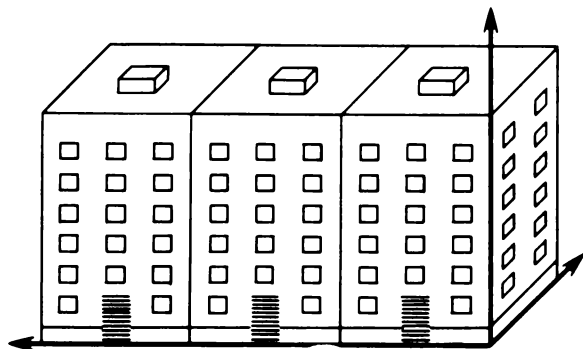


Рис. 8

### Мы живем в мире трех измерений.

Что это значит? Представим, что перед нами стоит дом (рис. 8), и мы хотим описать его, то есть, объяснить, какой он. Мы говорим: «Этот дом длиной в три подъезда, шириной в два окна, высотой в шесть этажей». В общем, этого вполне достаточно, чтобы представить дом. Нам понадобилось задать три величины — длину, ширину и высоту. Эти три измерения мы используем ежедневно, говоря об окружающих нас предметах: высота дерева, длина дороги, ширина тротуара,...

Все предметы (тела) в окружающем нас мире имеют три измерения, хотя далеко не у всех можно указать длину, ширину, высоту. Как называется геометрическое тело, полностью описываемое тремя измерениями — длиной, шириной и высотой? Это ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД. Вернее, прямой прямоугольный параллелепипед (параллелепипед может быть и наклонным). Все его стороны (грani) являются прямоугольниками. Множество предметов имеют форму параллелепипеда. Это, например, ящик, кирпич, брус. Параллелепипед можно считать символом нашего пространства. Правда, когда мы говорим «длина, ширина и высота», то имеем в виду измерения параллелепипеда, расположенного конкретным образом на земле (или на столе). Высотой в этом случае мы называем измерение, направленное вертикально вверх от земли. Если мы не знаем, как расположен параллелепипед, то говорить о «длине, ширине и высоте» было бы не совсем верно. Лучше просто — три измерения.

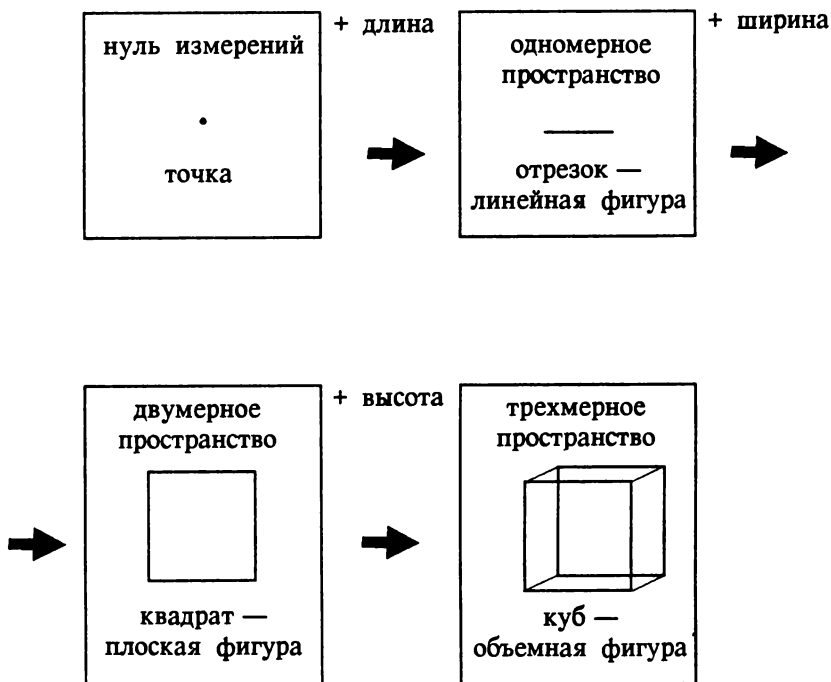
А теперь представим, что высота исчезла. Весь мир стал плоским,

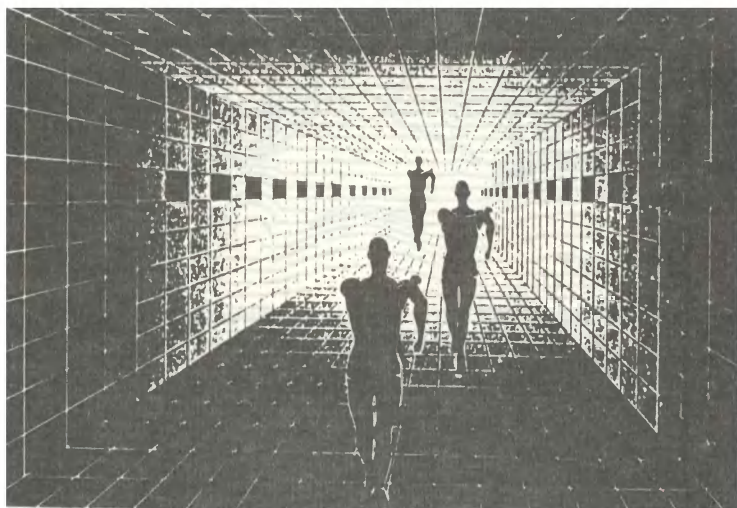
как лист бумаги, остались только ДВА ИЗМЕРЕНИЯ — длина и ширина (ДВУМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО). Математики говорят, что плоскость является двумерным пространством. Какие геометрические фигуры могут «жить» в этом мире? Конечно, это квадрат, отрезок, круг. А что же еще? Какие фигуры не совместимы с ним? Вообразите себя плоским. Вокруг вас живут треугольники, окружности, квадраты, отрезки и другие плоские фигуры. Расскажите, как вам это представляется, какими вы их видите? А что происходит, если они движутся, поворачиваются? Что вы увидите, если плоскость вашего тела пересечет шар, движущийся сквозь плоскость, как сквозь стену?

Продолжим эксперименты, «уберем» теперь и ширину. Останется ОДНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО с одним измерением — ДЛИНОЙ. Этот мир полностью лежит на прямой; жители его — отрезки, лучи, точки. Какими они видят друг друга?

В удивительном мире геометрии существует и фигура, которая не имеет измерений — длины, ширины, высоты. Вы догадались, что это? Конечно, это ТОЧКА.

Следующая картинка еще раз показывает, как увеличение числа измерений влечет за собой изменение и усложнение геометрических фигур:





**В. Вазарели. «Изучение перспективы»**

**Рис. 9**

**Разделите пополам тетрадный лист вертикальной чертой, слева напишите названия тех фигур (или начертите их), которые можно поместить в плоскости, а справа те, которые нельзя. Сможете ли вы указать по 10 фигур в каждой колонке?**

С давних пор люди пытались объемные тела изобразить на плоскости так, чтобы их сразу можно было отличить от плоских, чтобы чувствовалась глубина пространства. Была разработана научная теория перспективы, позволяющая «обмануть зрение». Картина венгерского художника Виктора Вазарели «Изучение перспективы» — прекрасный тому пример (рис. 9). На ней видно, как линии, уходящие «вглубь», сходятся в одной точке, а фигура, находящаяся «дальше» от нас, изображается в виде фигуры меньших размеров. С понятием перспективы вы подробнее ознакомитесь на уроках рисования.



**ПЕРСПЕКТИВА — не единственное средство изображения трехмерного пространства на плоскости.**

Рассмотрите, как Вазарели с помощью изгибов линий удалось передать «вмятины», «выпуклости», «капли» на плоском листе бумаги (рис. 10).

**Придумайте и нарисуйте свою картинку с кажущимися выпуклостями и вмятинами на листе бумаги.**



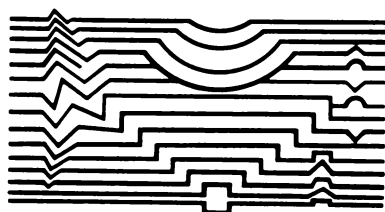
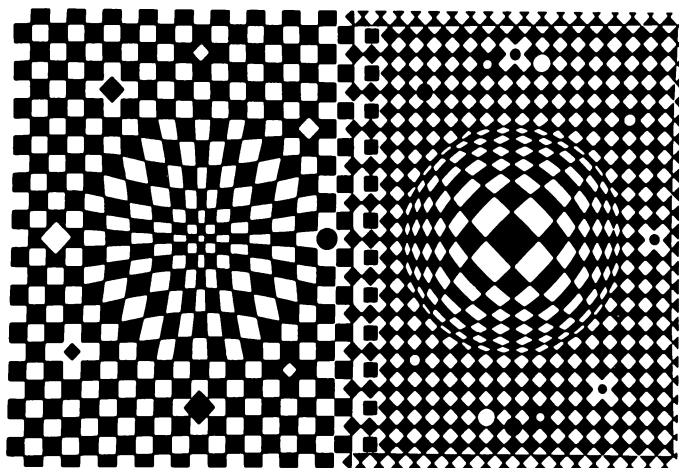
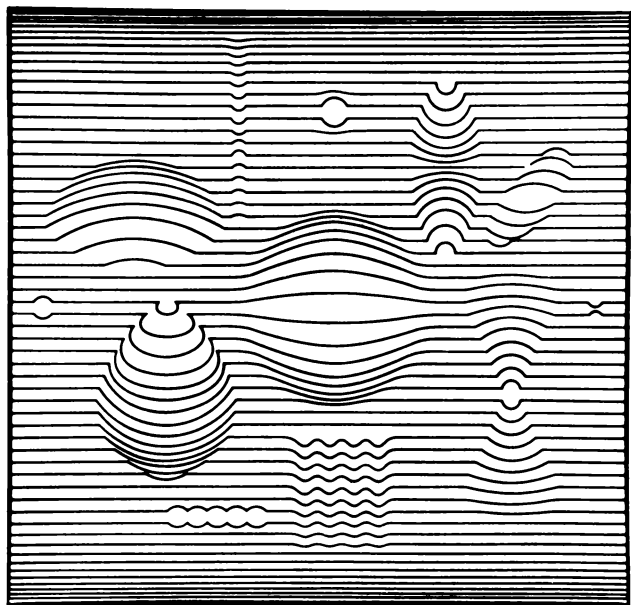
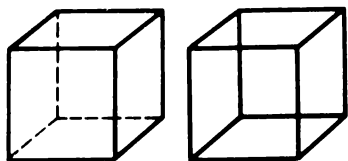


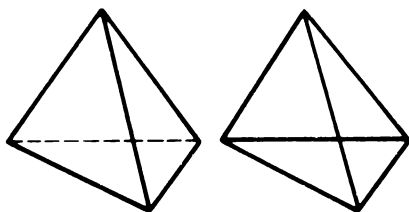
Рис. 10



а)

б)

Рис. 11



а)

б)

Рис. 12

В геометрии для облегчения восприятия пространства договорились изображать линии, скрытые от взора наблюдателя, пунктирными. Например, куб принято изображать так, как на рис.11, а. Если же мы нарисуем его без пунктирных линий (рис.11, б), то можно усомниться, что это куб. Может, это просто набор сложенных определенным образом треугольников и четырехугольников? Даже если мы и видим куб, то всякий раз иначе «видим», какая грань впереди, а какая сзади.

Пирамиду изобразим так, как на рис.12, а. А вот на рис. 12,б изображен четырехугольник, противоположные вершины которого соединены отрезками. Эти отрезки называются ДИАГОНАЛЯМИ. Пунктирная линия на рис.12, а делает этот рисунок объемным и позволяет отличать изображение пирамиды от четырехугольника с диагоналями. Научитесь изображать на клетчатой бумаге куб и пирамиду.

1. Сколько одинаковых квадратов надо взять, чтобы из них можно было сложить в два раза больший квадрат? Сколько одинаковых кубиков надо для составления в два раза большего куба?
2. Треугольник можно разделить на четыре равных треугольника. Как? Если от треугольной пирамиды отрезать четыре ее «уголка», проведя разрезы через середины ребер, то будет ли оставшаяся часть также треугольной пирамидой?
3. Если известно, сколько у многоугольника вершин, то сразу можно сказать, сколько у него сторон. Их столько же. Например, у пятиугольника пять вершин и пять сторон. Для многогранников (объемных тел) это не так. Как известно, у параллелепипеда восемь вершин и шесть граней. Придумайте какой-нибудь многогранник, у которого также восемь вершин, но число граней не равно шести. Сколько таких многогранников вы можете придумать?
4. Нарисуйте многогранник, у которого пять вершин и пять граней. А теперь многогранник, у которого пять вершин и шесть граней.

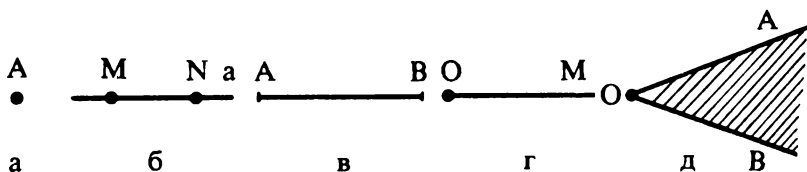


Рис. 13

5. На какое самое большое число частей можно разрезать блин тремя разрезами? Сколько частей может получиться при трех разрезах каравая хлеба?

### § 3. ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

*Так же, как самое большое здание складывается из маленьких кирпичей, так и сложные геометрические фигуры составляются из простейших геометрических фигур. О них вы узнаете из этого параграфа. Здесь также будут рассмотрены наиболее часто используемые геометрические инструменты — линейка, циркуль, транспортир.*

Итак, простейшие фигуры и их обозначение.



Точка А (рис. 13, а).

Прямая а (рис. 13, б). Ее еще можно назвать прямой MN.

Отрезок АВ — это часть прямой между двумя точками А и В (от прямой как бы отрезали кусочек). Точки А и В — концы отрезка АВ (рис. 13, в).

Луч OM — это часть прямой по одну сторону от некоторой точки — начала луча (похоже на луч фонарика, точка О — как лампочка фонарика). Точка О — начало луча (рис. 13, г).

Угол АОВ — это часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки. Точка О — общее начало лучей ОА и ОВ, точка О — вершина угла.

Всегда в обозначении угла вершина ставится в середине (рис. 13, д). Лучи ОА и ОВ — стороны угла.

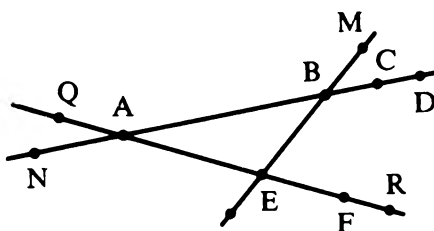


Рис. 14

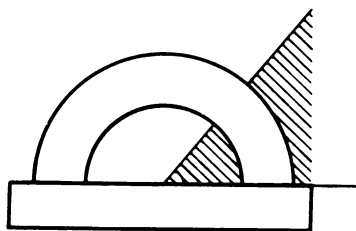


Рис. 15

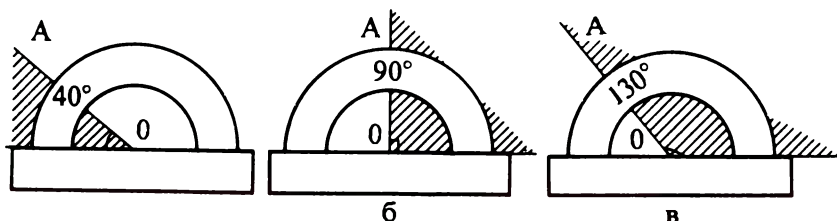


Рис. 16

Начертите в тетради и обозначьте точку, прямую, отрезок, луч и угол.

На рис. 14 изображены три прямые, на них выбраны и обозначены некоторые точки. Найдите на этом рисунке и запишите в тетради три любых отрезка, три луча, три угла. Сколько разных лучей вы можете назвать?

### КАК ИЗМЕРИТЬ УГОЛ?

1. Приложите транспортир к углу (рис.15) так, чтобы:
  - а) вершина угла совпала с черточкой — серединой транспортира;
  - б) одна сторона угла совпала с основанием транспортира, соответствующим  $0^\circ$ .
2. Вторая сторона угла указывает на шкале угол в градусах. Среди всех углов выделяется ПРЯМОЙ угол (рис. 16, а). Прямой угол содержит  $90^\circ$ . По отношению к нему остальные углы делятся на две группы: ОСТРЫЕ углы (меньшие  $90^\circ$ , рис. 16, б) и ТУПЫЕ углы (большие  $90^\circ$ , рис. 16, в). Угол, равный  $180^\circ$ , называется РАЗВЕРНУТЫМ (рис. 17).

Измерьте углы в четырехугольнике ABCD (рис. 18).

1. Проведите через одну точку три прямые. Сколько при этом образовалось углов (рассматривать углы с вершиной в точке пересечения прямых)?

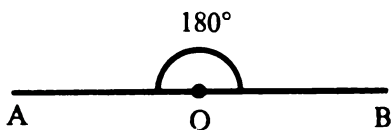


Рис. 17

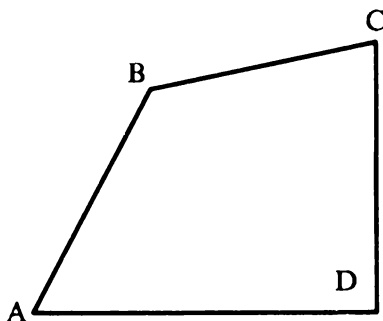


Рис. 18

2. Нарисуйте при помощи транспортира углы  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ , ...,  $170^\circ$ , причем так, чтобы одна сторона у всех углов была общей.
3. Постарайтесь при помощи одной линейки, без транспортира, «на глазок», построить углы  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ . А теперь измерьте транспортиром построенные углы. Подсчитайте, насколько вы ошиблись.
4. На плоскости даны две пересекающиеся прямые. Один из углов между прямыми равен  $28^\circ$ . Сделайте чертеж. Измерьте остальные углы. Что получится, если угол равен  $33^\circ$ ?

Проведенные измерения и наблюдения приведут вас к следующему выводу:



при пересечении двух прямых образуются две пары равных углов.

Это пары вертикальных углов. Стороны одного из вертикальных углов являются продолжением сторон другого угла.

Назовите пары вертикальных углов на рис. 19.

Два вертикальных угла не имеют общих сторон. У них общая вершина.

На рисунке есть также пары углов с общей стороной. Это, например, углы AOC и DOC. Сторона OC у них общая, а стороны OA и OD составляют развернутый угол. Такие два угла называются СМЕЖНЫМИ. Подумайте, чему равна сумма смежных углов?

5. Нарисуйте четырехугольник, у которого три угла прямые. Как вы думаете, будет ли и четвертый угол прямым?
6. Нарисуйте квадрат и проведите в нем диагональ. Как вы думаете, какие углы образует диагональ со сторонами квадрата? Проверьте свою интуицию измерением. Можете ли вы объяснить, почему угол именно такой? А если взять квадрат других размеров — больше или меньше — изменится

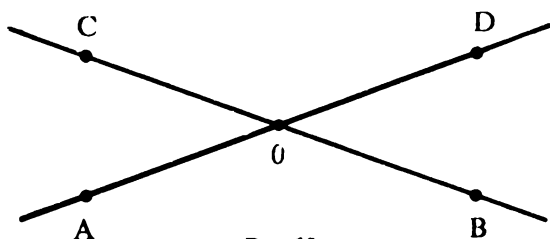


Рис. 19

ли угол между диагональю и сторонами квадрата? Вырежьте из бумаги квадрат и сложите его вдвое по диагонали. Что вы заметили?

7. Чему равен угол между минутной и часовой стрелками на часах в 9 ч, 10 ч, 6 ч, 5 ч, 11 ч 30 мин?
8. На угол  $10^\circ$  смотрят через увеличительное стекло с десятикратным увеличением. Чему равен угол, наблюдаемый сквозь стекло?

В задании 6 вы складывали квадрат по диагонали. Половинки квадрата (треугольники) совпали, т.е. диагональ квадрата разделила его на две равные части. И угол квадрата разделился пополам. В этом случае говорят, что диагональ квадрата является **БИСЕКТРИСОЙ** угла, из которого она выходит.

9. Нарисуйте на листе бумаги любой угол и вырежьте его по сторонам, оставив бумагу между сторонами неразрезанной. Как вы думаете, можно ли без карандаша и линейки построить биссектрису этого угла? Как это сделать? Для всякого ли угла можно построить биссектрису?
10. Начертите в тетради угол  $60^\circ$ . Какой угол образует биссектриса этого угла с его сторонами? Начертите ее.
11. Нарисуйте в тетради какой-нибудь угол, проведите в нем на глаз биссектрису и проверьте правильность измерением. Потренируйтесь таким образом в развитии глазомера. У кого он лучше развит — у вас или у вашего соседа по парте?

## § 4. КОНСТРУИРОВАНИЕ ИЗ Т

---

*Смена деятельности — лучший отдых. Задания этого параграфа позволят вам отвлечься от измерений и построений и поиграть.*

---

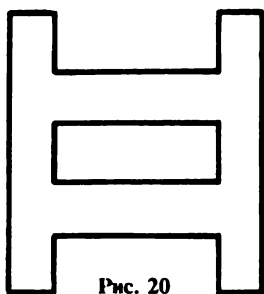


Рис. 20

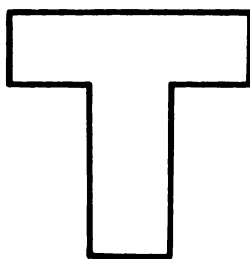


Рис. 21

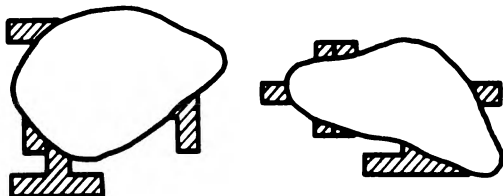


Рис. 22

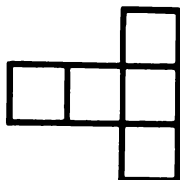


Рис. 23

Посмотрите на эту фигуру (рис. 20). Как ее назвать? Это не квадрат, не прямоугольник... Как описать фигуру человеку, который ее не видит? Можно сделать это так: это буква Н с двумя перекладинами, лежащая на боку. Придумайте еще два описания этой фигуры человеку, который не видит ее, чтобы он понял, что нарисовано, и запишите их в тетрадь. А теперь попробуйте описать ее, используя фигуру, изображенную на рис. 21. Она похожа на букву Т. Так и будем ее называть — буква Т.

1. Составьте конструкцию из трех — четырех букв Т и, не показывая ее соседу по парте, словесно опишите ее. Ваша задача — описать фигуру так, чтобы ваш приятель смог ее нарисовать. Если получилось, поменяйтесь ролями: теперь он объясняет, а вы рисуете.
2. На эти фигуры кто-то вылил белую краску (рис. 22). Известно, что фигуры состоят из букв Т. Восстановите их вид.
3. Составьте из букв Т большую композицию. Это может быть орнамент или какой-нибудь рисунок.
4. Можно ли в букву Т завернуть куб в один слой? Если да, то нарисуйте эту букву. Укажите ее размеры, если длина ребра куба 1 см.
5. Имеется кусок клетчатой бумаги размером 10 x 10 клеток. Вырежьте из нее как можно больше букв Т такой формы, как на рис. 23.
6. Разрежьте фигуры (рис. 24, а,б) на буквы Т такой же формы, как в задании 5.

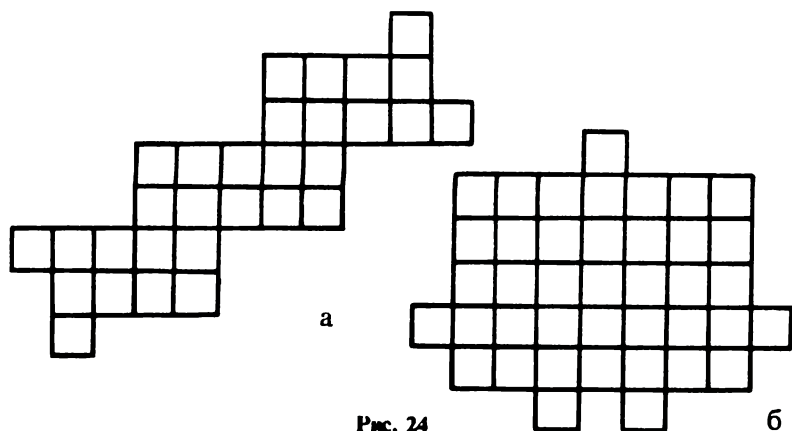


Рис. 24

## § 5. КУБ И ЕГО СВОЙСТВА

*Пожалуй, трудно найти человека, которому бы не был знаком куб. Ведь «кубики» — любимая игра малышей. Кажется, что мы о кубе знаем все, но так ли это? Что вы можете о нем рассказать, какие его свойства вам известны?*

Куб является представителем большого семейства многогранников. С некоторыми из многогранников вы уже встречались. Это пирамида, прямоугольный параллелепипед. Знакомство с другими, например октаэдром, додекаэдром ожидает вас впереди.

Многогранники при всем различии имеют ряд общих свойств. Например, поверхность каждого из них состоит из плоских многоугольников, которые называются **ГРАНЯМИ МНОГОГРАННИКА**. Два соседних плоских многоугольника имеют общую сторону — **РЕБРО МНОГОГРАННИКА**. Концы ребер являются **ВЕРШИНАМИ МНОГОГРАННИКА**. Рассмотрите изображение куба на рис. 25, перечертите его в тетрадь и подпишите названия основных элементов куба. Запомните и в дальнейшем используйте эти термины!

Решение следующих задач и выполнение заданий позволит вам обнаружить некоторые свойства куба.

1. Возьмите в руки кубик из любого материала. Лучше, если он будет не очень маленьким. Ваша цель — исследовать его, т.е. обнаружить путем измерения, наблюдения, подсчета как можно больше свойств куба. Обнаруженные свойства запишите в тетрадь. Обсудите в классе полученные результаты.



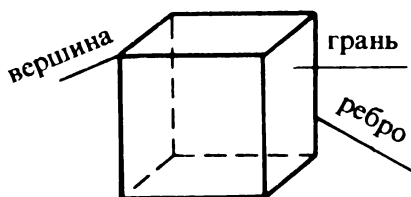


Рис. 25

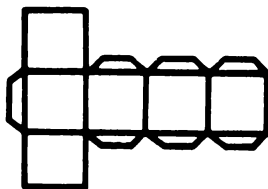


Рис. 26

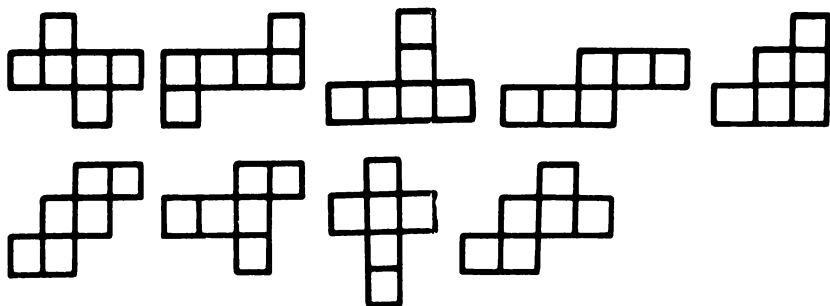


Рис. 27

Дополните, если это понадобится, свой список свойств куба теми свойствами, которые заметили твои одноклассники. (Как самостоятельно склеить куб, сказано в задании 2.)

2. Перечертите на клетчатую бумагу фигуру (рис. 26) и вырежьте ее (сторона каждого квадрата 4 см). Сверните из нее куб, склейте его. Вырезанная фигура называется РАЗВЕРТКОЙ КУБА. Подумайте, почему она так названа? Из чего она состоит? Придумайте еще несколько разверток куба и начертите их в тетради.
3. Из фигур на рис. 27 выберите те, которые являются развертками куба и перенесите их в тетрадь. Объясните, почему вы выбрали именно их.
4. Условимся боковые грани куба обозначать буквой Б, верхнюю — В, нижнюю — Н. Расставьте на развертках куба буквы в соответствии с уже намеченными (рис. 28).
5. Дана развертка куба (рис. 29). Какие из кубиков на рис. 30, а—в можно из нее склеить? Выберите кубик и обоснуйте выбор.
6. На развертке куба (рис. 31) пронумерованы его грани. Запишите парами номера противоположных граней (противоположные грани не имеют общих ребер): 1, \_ , 2, \_ , 3, \_ . Запишите, какие грани соседствуют с гранью 6. Перечертив развертку на бумагу, обозначив грани и вырезав ее, проверьте себя.

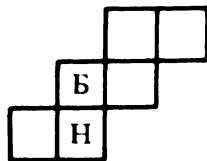
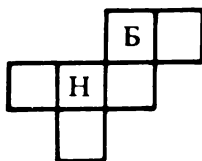
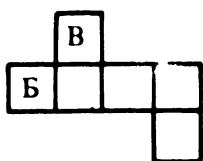


Рис. 28

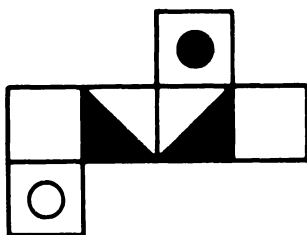
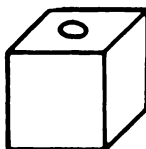
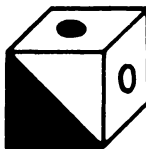


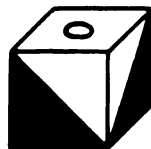
Рис. 29



а)



б)



в)

Рис. 30

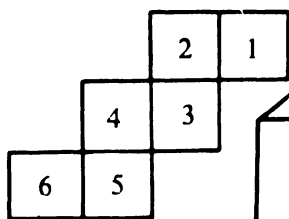
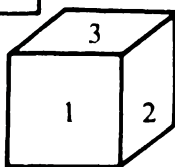
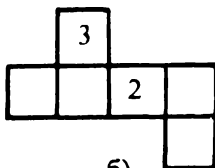


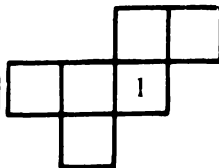
Рис. 31



а)



б)



в)

Рис. 32

7. На видимых гранях куба (рис. 32, а) проставлены числа 1, 2, 3. А на развертке (рис. 32, б, в) — одно из чисел или два. Расставьте на развертках куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы сумма чисел на противоположных гранях была равна 7.
8. Пунктирными линиями обозначены невидимые ребра куба (рис. 33). Обведите ребра куба, которые лежат ближе к вам, красным цветом, а дальние — синим. Какие ребра «ведут вглубь»? Обведите их зеленым. На этот куб мы «смотрели» справа сверху. На рис. 34 проведите сплошные линии (видимые ребра) так, чтобы куб был «виден»: а)слева снизу; б)слева сверху; в)справа снизу.
9. Отрезок, соединяющий две противоположные вершины куба (наиболее удаленные друг от друга), называется ДИАГОНАЛЬЮ КУБА (рис. 35). Как измерить диагональ непустого куба, пользуясь только линейкой и карандашом, если есть: 1) три кубика; 2) один кубик?
10. Рассмотрите рис. 36. Что за странный куб изображен на нем? Что в нем необычного?

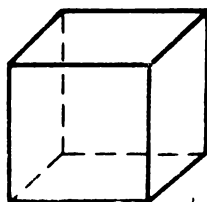
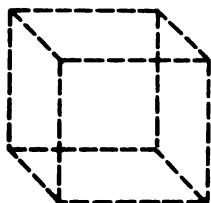
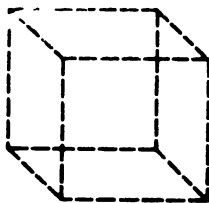


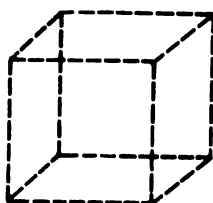
Рис. 33



слева снизу



слева сверху



справа снизу

Рис. 34

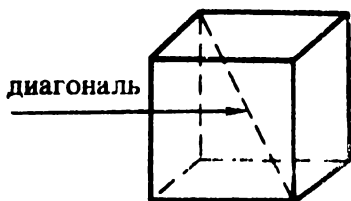


Рис. 35

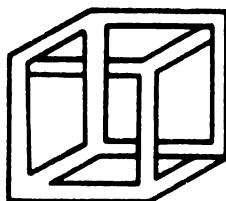


Рис. 36

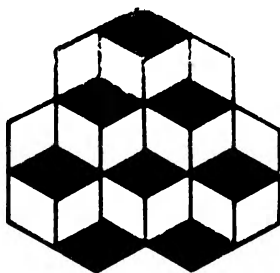


Рис. 37

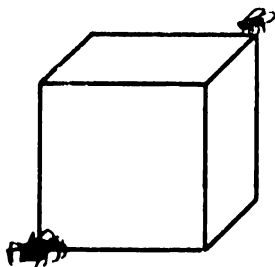
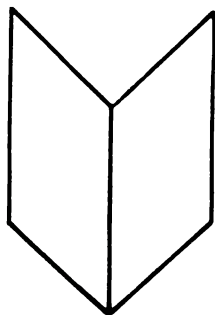


Рис. 38

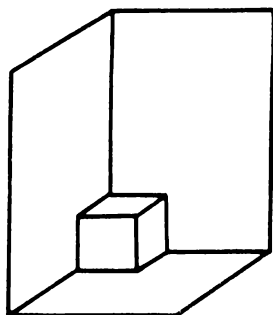
11. Сколько кубиков вы видите на рис. 37?
12. Имеется полоска бумаги размером  $1 \times 7$ . Как из нее сложить единичный кубик (т. е. куб с ребром 1)?
13. Представьте, что куб стоит на одной своей вершине и освещен прямо сверху. Какая в этом случае получается тень от куба?
14. Имеется куб со стороной 3 см. Сколько надо сделать распилов, чтобы распилить его на кубики со стороной 1 см?



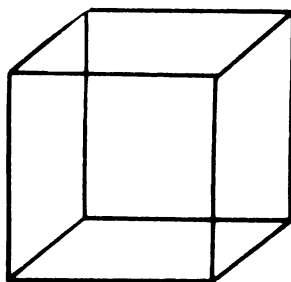
Э. Бороинг «Леди и старуха»



Фигура Маха



Что это?



С какой стороны мы смотрим на этот каркасный куб?

Рис. 39

15. В противоположных (наиболее удаленных друг от друга) вершинах куба сидят паук и муха (рис. 38). Каким кратчайшим путем паук может доползти до мухи? Объясните ответ.

Рисунок к заданию 11 относится к НЕОДНОЗНАЧНЫМ ФИГУРАМ. Рассмотрите картинки, изображенные на рис. 39. Сколько разных объяснений вы найдете для каждой из них?

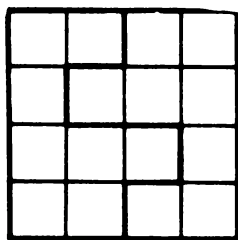


Рис. 40

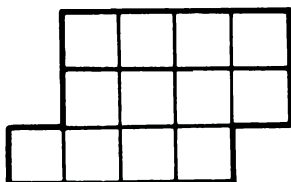


Рис. 41

## § 6. ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ И СКЛАДЫВАНИЕ ФИГУР

*«Семь раз отмерь, один раз отрежь!».*

*Эта поговорка предостережет вас от поспешности в решении задач.*

*Заданную фигуру, которая для облегчения работы часто разделена на равные клеточки, надо разрезать на две или несколько одинаковых частей. Если эти части можно наложить друг на друга так, что они совпадут (при этом разрешается переворачивать их «наизнанку» ), то задача решена верно.*

На рис. 40 показан способ разрезания квадрата со стороной в четыре клетки по сторонам клеток на две равные части. Найдите пять других способов. Сколько существует способов разрезания квадрата на две равные части линиями, идущими по сторонам маленьких квадратиков?

Эта задача посложнее, так как фигура на рис. 41, которую также нужно разрезать на две равные части, не такая простая.

Над разрезанием этих фигурок (рис. 42) на две равные части подумайте на досуге. Это очень хороший и полезный отдых, гораздо лучше сидения перед телевизором.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Разрезать можно не только по сторонам, но и по диагоналям клеточек.

А теперь мы предлагаем вам не задачу, а игру. И называется она пентамино.

### ПЕНТАМИНО

Игра «Пентамино» была придумана в 50-х годах XX в. американским математиком С.Голомбом и очень быстро увлекла не только школьников и студентов, но и профессоров математики.

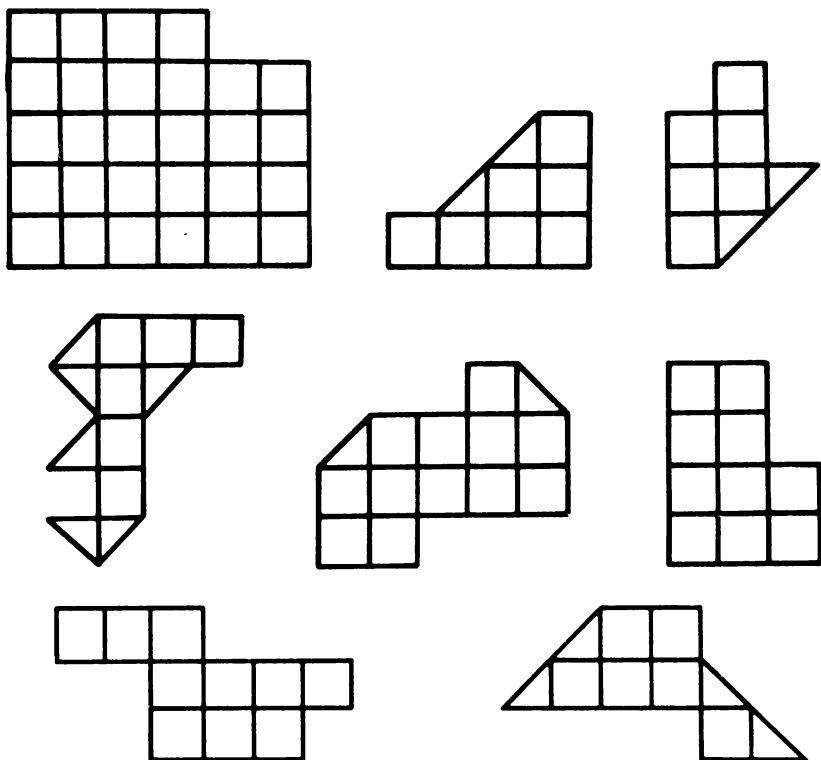


Рис. 42

Она заключается в складывании различных фигур из заданного набора пентамино. Набор пентамино содержит 12 фигурок, каждая из которых составлена из пяти ("пента" по гречески означает «пять») одинаковых квадратов, причем квадраты «соседствуют» друг с другом только сторонами.

**Составьте из пяти квадратов все 12 фигур пентамино. Сравните свои результаты с рис. 42.**

**Изготовьте самостоятельно набор 12 пентамино. Лучше, если сторона квадратика будет равна 2 см, а фигурки вырезаны из картона.**

**Уложите все 12 пентамино в прямоугольник 6 х 10. Сколько разных вариантов вы можете предложить? Фигурки пентамино можно переворачивать.**

**Перемешайте пентамино на столе, чтобы фигурки лежали произвольно, а затем сложите прямоугольник 6 х 10, не переворачивая ни одной фигурки.**

**Постройте два прямоугольника 5 х 6.**

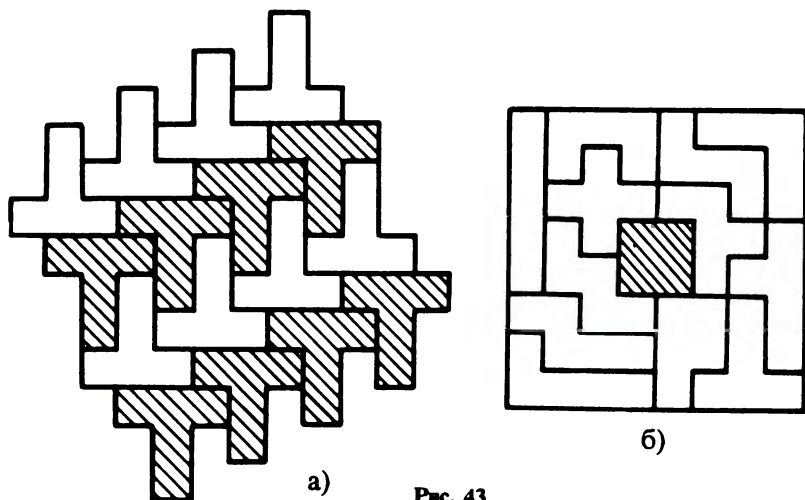


Рис. 43

На рис. 43, а фигурки пентамино, похожие на Т, уложены на плоскости без промежутков (говорят, что из них составлен паркет). Из каких еще фигурок пентамино можно составить паркет? Нарисуйте на клетчатой бумаге эти паркеты.

В пентамино можно играть и вдвоем. Двое игроков по очереди выбирают любую из 12 фигурок пентамино и располагают ее на свободных клетках поля 8 x 8. Проигрывает тот, кто первым не сможет разместить на доске ни одного пентамино. Если же все фигурки удалось разместить на доске, то выигрывает ходивший последним.

Шахматную доску (8 x 8) полностью нельзя покрыть пентамино, останется четыре свободных клетки. Если вырезать в середине квадрат 2 x 2, то оставшиеся клетки покрываются двенадцатью фигурками пентамино. На рис. 43, б изображено покрытие, предложенное Голомбом. Найдите еще хотя бы один вариант подобного покрытия квадрата 8 x 8 с вырезанной серединой.

## § 7. ТРЕУГОЛЬНИК

*Кто не слышал о загадочном Бермудском треугольнике\*, в котором бесследно исчезают корабли и самолеты? А ведь знакомый всем нам с детства треугольник также таит в себе немало интересного и загадочного.*

\* Бермудский треугольник находится в Атлантическом океане между Бермудскими островами, государством Пуэрто-Рико и полуостровом Флорида

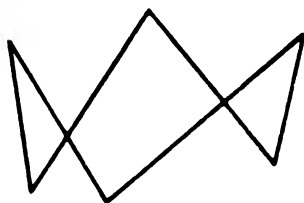
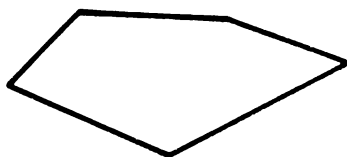
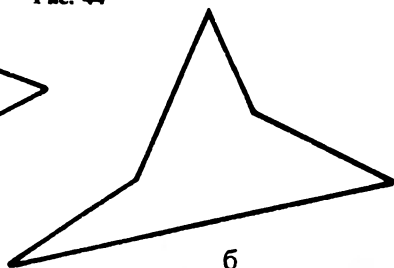


Рис. 44

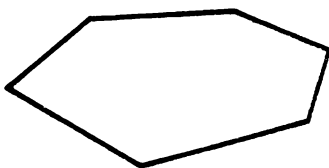


а

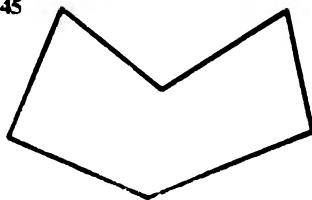


б

Рис. 45



а



б

Рис. 46

Среди множества различных геометрических фигур на плоскости выделяется большое семейство **МНОГОУГОЛЬНИКОВ**. Присмотритесь попристальнее к слову «многоугольник» и скажите, из каких частей оно состоит. Названия геометрических фигур имеют вполне определенный смысл. Слово «многоугольник» указывает на то, что у всех фигур из этого семейства «много углов». Но для характеристики фигуры этого еще недостаточно. Например, у фигуры на рис. 44 тоже много углов, но она не является многоугольником. Для определения многоугольника важно указать, что эта фигура ограничена замкнутой ломаной линией, звенья которой не пересекают друг друга.

Подставьте вместо части «много» в слово «многоугольник» конкретное число, например 5. Вы получите пятиугольник (рис. 45, а, б). Или 6. Тогда — шестиугольник (рис. 46, а, б). Заметьте, что сколько углов, столько и сторон, поэтому эти фигуры вполне можно было бы назвать и многосторонниками. Внимательно рассмотрите рис. 45 и 46.

**Попробуйте сформулировать, чем отличаются многоугольники на рис. 45, а и 46, а от многоугольников на рисунках 45, б и 46, б.**



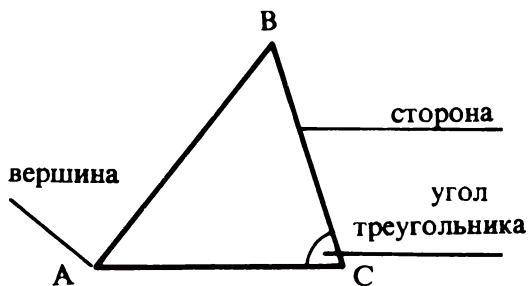


Рис. 47

Каким **НАИМЕНЬШИМ** числом можно заменить «много» в слове «многоугольник»? Числом 3.

Значит, самым простым многоугольником является треугольник. Но простым — еще не значит неинтересным. Посмотрим, что интересного преподнесет нам знакомство с треугольниками.

На рис. 47 изображен треугольник ABC и указаны названия основных его элементов. Вершины треугольника, а также соответствующие углы принято обозначать большими латинскими буквами A, B, C или K, L, M и т.д., а весь треугольник обозначают так:  $\triangle ABC$  или  $\triangle KLM$  (по буквам вершин).

Все большое семейство треугольников можно разделить на группы по числу сторон:



- равных сторон нет — разносторонний треугольник;
- две равные стороны — равнобедренный треугольник;
- все стороны равны — равносторонний треугольник или правильный треугольник.

Треугольники можно разделить на группы в зависимости от углов:



- все углы острые — остроугольный треугольник;
- есть прямой угол — прямоугольный треугольник;
- есть тупой угол — тупоугольный треугольник.

На рис. 48 найдите равнобедренные, правильные, разносторонние, остроугольные, прямоугольные, тупоугольные треугольники. Попадают ли какие-либо из них в две группы сразу? Запишите эти треугольники.

В §6 мы составляли из некоторых фигурок пентамино паркеты. А можно ли одинаковыми треугольниками покрыть плоскость без промежутков? Вырежьте из бумаги несколько одинаковых треугольников и проверьте практикой свое предположение о возможности такого покрытия. Подумайте, зависит ли результат от вида треугольников? Посмотрите внимательно на получившиеся паркеты. Какой вывод о сумме углов треугольника вы можете сделать.



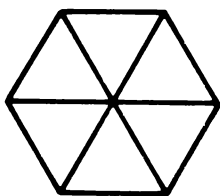


Рис. 49

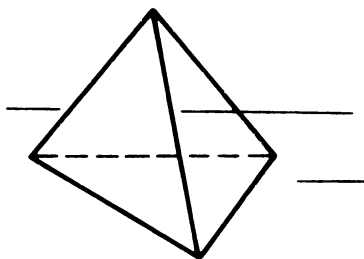


Рис. 50

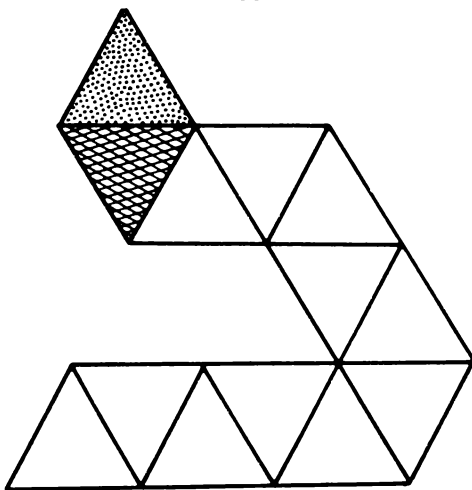


Рис. 51

Слово пирамида — латинская форма греческого слова «пюрамис», так греки называли египетские пирамиды; происходит от древнеегипетского слова «пурама» (так пирамиды называли египтяне). Современные египтяне называют пирамиды словом «хирам», которое тоже происходит от этого древнеегипетского слова.

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т.д. в зависимости от того, на какой многоугольник опираются треугольники (в геометрии говорят — какой многоугольник лежит в основании пирамиды). Треугольная пирамида имеет еще одно название — ТЕТРАЭДР, т.е. четырехугольник (тетра — четыре, эдр — грань).

**Возьмите в руки или представьте по рис. 50 треугольную пирамиду исследуйте ее так, как вы исследовали когда-то куб. Результаты исследования запишите в тетрадь. Подумайте, что является разверткой тетраэдра, нарисуйте ее. Сделайте модель тетраэдра из бумаги. Будьте аккуратны при вычерчивании развертки.**

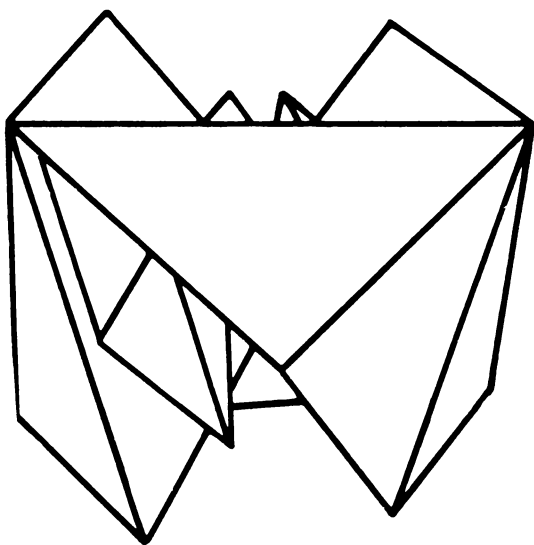


Рис. 52

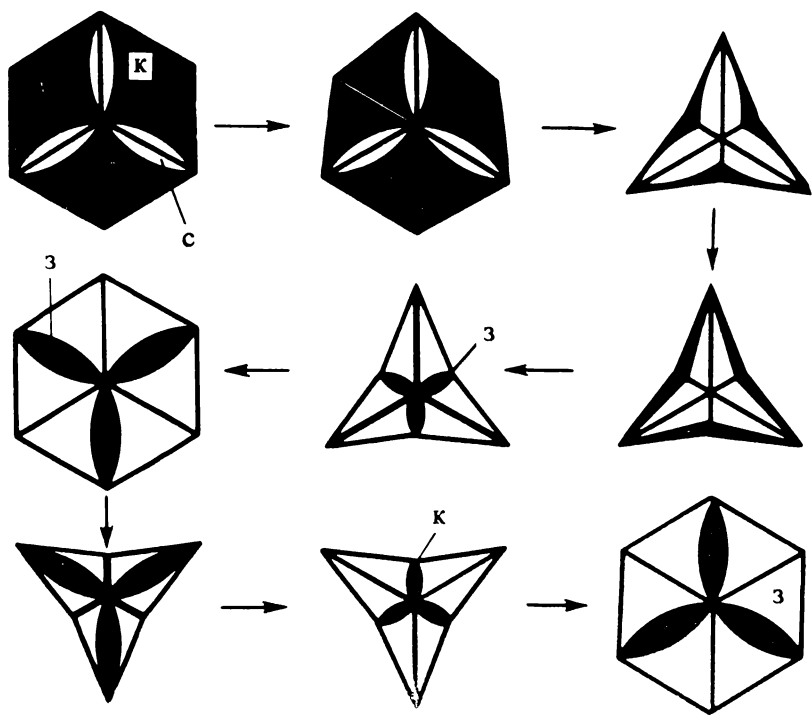


Рис. 53

5. Дан тетраэдр, грани которого окрашены в синий, красный, зеленый и белый цвета (рис. 51). Тетраэдр начинают перекачивать, как показано на рисунке, причем он оставляет след такого же цвета, что и грань, касающаяся бумаги. Если тетраэдр сначала стоял на красной грани, то какого цвета будет последний треугольник следа, оставленного тетраэдром? Постарайтесь догадаться без модели. Если трудно догадаться, то модель вам поможет.
6. Тетраэдр (рис. 51), перекачиваясь с грани на грань, возвращается в свое исходное положение. Если сначала нижняя грань была красной, то какой она будет по возвращении? Зависит ли результат от пути?

Пирамида «жесткое» геометрическое тело, т. е. его нельзя изменить, не сломав. Этим свойством «жесткости» обладают все ИЗВЕСТНЫЕ вам многогранники. Лишь совсем недавно американский геометр Коннели сумел построить «хитрый» многогранник, который этим свойством не обладает, а может изменять свою форму так, что каждая его грань остается неизменной. Это очень сложный многогранник. Некоторое представление о нем дает рис. 52.

Существует интересная геометрическая игрушка, которая состоит из треугольников и меняется, «выворачиваясь наизнанку». Эта игрушка ФЛЕКСАГОН [to flex (англ.) означает складываться, гнуться, т. е. флексагон — «гнувшийся многоугольник»]. Флексагон обладает удивительной способностью внезапно менять свою форму и цвет. На рис. 53 показано постепенное изменение флексагона. Конечно, по этому рисунку никак нельзя понять, ни что такое флексагон, ни как происходит удивительное превращение.

Чтобы в этом разобраться, надо изготовить эту игрушку. А для этого надо сделать его развертку. Она состоит из десяти правильных треугольников, расположенных так, как на рис. 54. Пусть сторона каждого треугольника равна 3 см. Изготовьте такую полоску и раскрасьте. Вырежьте полоску и переверните ее. Обратную сторону раскрасьте тоже в соответствии с рисунком. Перегните полоску по сторонам треугольников и сложите как показано на рис. 55. Оставшийся треугольник подогните вниз, склейте друг с другом две окрашенные треугольные поверхности и флексагон готов. Одна сторона у него красная, другая синяя. Превратим его в зеленый флексагон. Для этого сначала надо поставить его на стол так, чтобы он опирался на три нижние точки (на рисунке они отмечены стрелками). Эти вершины слегка отгибаем вниз. Затем осторожно соединяем их и флексагон вывернется наизнанку. Теперь он имеет зеленую сторону. Если верхние точки флексагона развести в стороны, то он будет готов

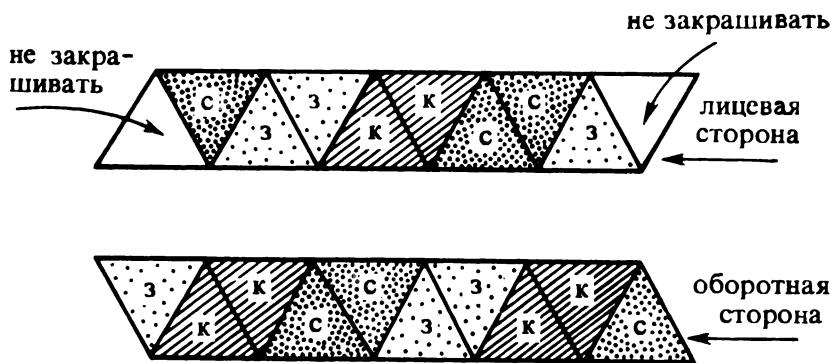


Рис. 54

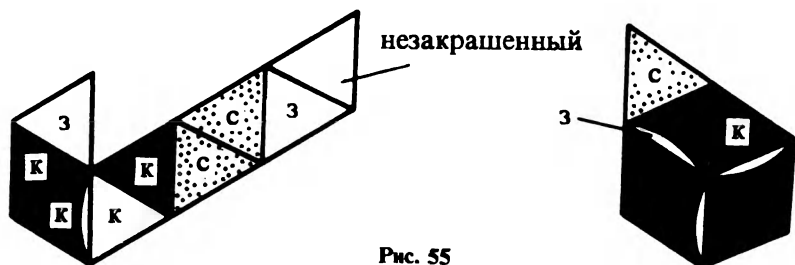


Рис. 55

к новому превращению. Еще раз посмотрите на рис. 53. Так ли изменяется ваш флексагон?

Аккуратность и точность при вычерчивании резверток геометрических тел — это 80% успеха в изготовлении моделей! Добиться этого нам поможет умение пользоваться чертежными инструментами и знание способов построения треугольников.

## ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Треугольник определяется тремя своими элементами, хотя не любые три элемента однозначно задают треугольник. Рассмотрим следующие три основные задачи на построение треугольника, если заданы:

- две стороны и угол между ними;
- сторона и два прилежащих к ней угла;
- три стороны.

Вот как строится треугольник ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ.

Пусть сторона  $AB = 5$  см, сторона  $AC = 3$  см и угол  $BAC = 50^\circ$  (рис. 56). Самостоятельно постройте треугольник  $KLM$  по таким данным:

сторона  $KL = 4,5$  см, сторона  $KM = 3,5$  см, угол  $LKM = 30^\circ$ .

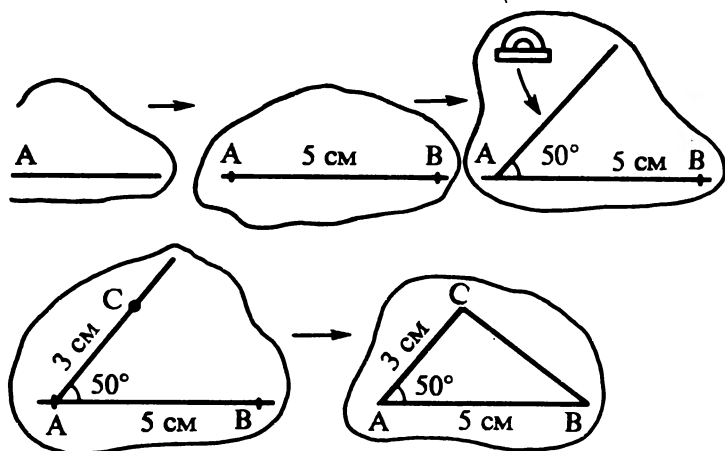


Рис. 56

А теперь построение ПО СТОРОНЕ И ДВУМ ПРИЛЕЖАЩИМ К НЕЙ УГЛАМ.

Пусть сторона  $AB = 5$  см. Угол  $CAB = 60^\circ$ , угол  $CBA = 30^\circ$  (рис. 57). Постройте треугольник, если сторона  $OP = 4$  см, угол  $ROP = 20^\circ$ , угол  $POR = 100^\circ$ .

Еще один способ построения треугольника: ПО ТРЕМ СТОРОНАМ. Нам понадобится кроме линейки еще и циркуль. Построив одну сторону по линейке, мы измерим циркулем две оставшиеся стороны, проведем дуги окружностей с центрами в концах полученного отрезка и радиусами, равными этим сторонам, и точка пересечения дуг будет третьей вершиной нужного нам треугольника. Следующий рисунок поясняет порядок действий. Пусть  $AB = 4$  см,  $AC = 3$  см,  $BC = 2,5$  см (рис. 58).

Постройте таким же образом правильный треугольник со сторонами, равными 6 см.

В начале этого параграфа, знакомясь с понятием треугольника, мы узнали, что сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ . Поэтому нельзя, например, построить треугольник с двумя тупыми углами. А если строить треугольник по трем сторонам, любые ли три отрезка нам подойдут?

7. Попробуйте построить треугольник по трем сторонам, длины которых 6 см, 2 см, 3 см. Удалось ли вам это сделать? Почему? Пусть теперь стороны равны 6 см, 2 см, 4 см. Какая фигура получилась в этом случае? Как вы думаете, какими должны быть длины трех отрезков, чтобы из них можно было построить треугольник?

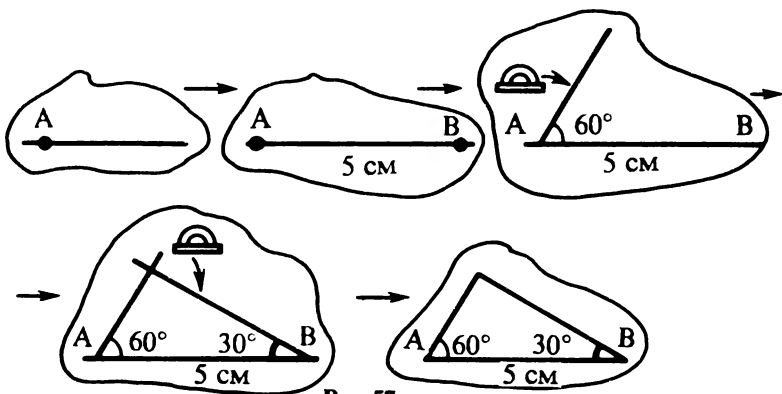


Рис. 57

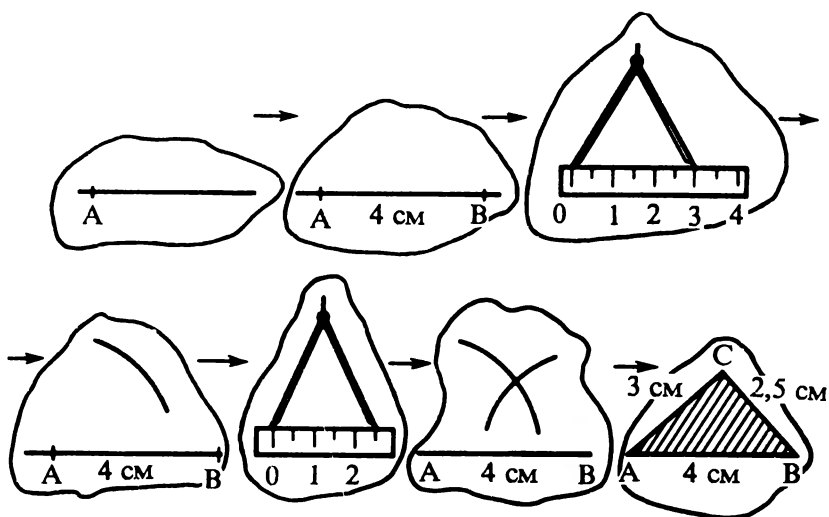


Рис. 58

Во всех рассмотренных выше случаях, если по заданным элементам можно было построить треугольник, то одни и те же данные давали одинаковые треугольники (конечно, при верном построении). Казалось бы, ничего удивительного в этом нет, данные-то одинаковые.

8. Постройте треугольник по трем углам. Пусть  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ . Сравните свой треугольник с треугольниками своих товарищей, построенными по тем же углам. Что можно сказать об их форме и размерах? Какой вывод можно сделать о построении треугольников по трем углам?



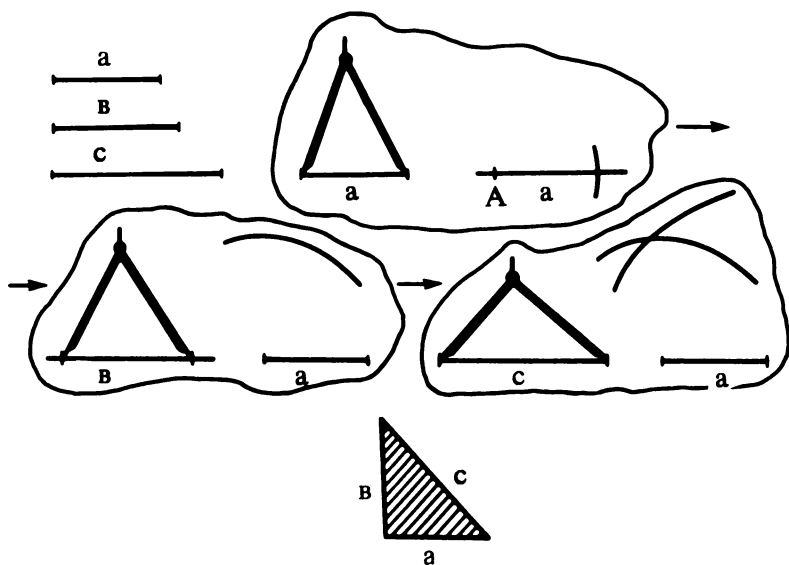


Рис. 59

Задачи на построение, наверное, — один из самых древних математических задач. По их поводу у математиков существует целый ряд договоренностей и ограничений. По этим договоренностям стороны треугольника, например, задаются в виде отрезков, а не числами, определяющими их длину; так же и углы задаются в виде геометрической фигуры — угла. При построении же разрешается пользоваться лишь математической линейкой (т. е. односторонней линейкой без делений) и циркулем. Транспортир, как и линейка с делениями, не входит в число традиционно разрешенных инструментов.

Если мы теперь вернемся к задаче построения треугольника по трем сторонам, то исходными данными для построения будут являться три данных отрезка. Само построение будет почти таким же, просто стороны треугольника мы будем откладывать не по линейке, а измерять циркулем данные отрезки (рис. 59). Задачами на построение циркулем и линейкой вы будете специально заниматься в дальнейшем.

Треугольник — плоская фигура, он изображается без искажений. Рисунок же пространственной фигуры часто таит в себе подвох, как изображение невозможного куба (рис. 36). Мы предлагаем еще один невозможный объект — ТРЕУГОЛЬНИК ПЕНРОУЗА (рис. 60). Закройте одну из вершин этого «треугольника», и станет ясно, что одна из его сторон направлена к нам, а другая — от нас, т. е. он не укладывается на плоскости.

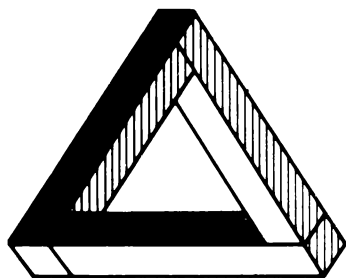
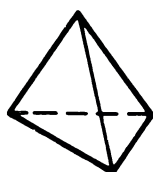
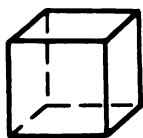


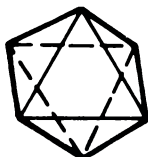
Рис. 60



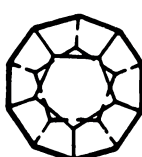
Тетраэдр



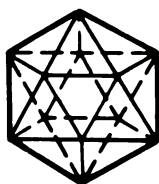
Гексаэдр



Октаэдр



Додекаэдр



Икосаэдр

Рис. 61

Придумайте и нарисуйте свой «невозможный» объект.

## § 8. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

*Однажды обычный английский мальчик Джеймс, увлекшись изготовлением моделей многогранников, написал в письме к отцу: "...Я сделал тетраэдр, додекаэдр и еще два эдра, для которых не знаю правильного названия". Эти слова знаменовали рождение в пока не примечательном мальчике великого физика Джеймса Кларка Максвелла. Думается, что и вас, и ваших родных увлечет изготовление моделей геометрических тел.*

Эти страницы книги — для работы дома. Приближается Новый Год — самый веселый и красивый праздник. Кроме традиционных елочных украшений (хлопушек и фонариков) вы можете изготовить «геометрические» игрушки. Это модели правильных многогранников, сделанных из цветной бумаги. Рассмотрите рис. 61, на котором изображены правильные многогранники — тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Их форма — образец совершенства!

Вы можете заметить ряд интересных особенностей, благодаря которым они и получили свое название. Так, у каждого из них

все грани — одинаковые правильные многоугольники, в каждой вершине одного многоугольника сходится одно и то же число ребер, а соседние грани сходятся под равными углами. Подсчитаем число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) у каждого многогранника и запишем результаты в табличку.

Многогранник	В	Г	Р	$V + G - R$
--------------	---	---	---	-------------

Тетраэдр	4	4	6	2
----------	---	---	---	---



В последней колонке для всех многогранников получился один и тот же результат:  $V + G - R = 2$ . Самое удивительное в этой формуле, что она верна не только для правильных, но и для ВСЕХ многогранников!

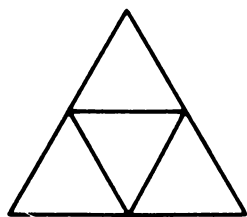
Ради интереса можете проверить это для нескольких наугад взятых многогранников. Доказал это удивительное соотношение один из величайших математиков Леонард Эйлер (1707—1783), поэтому формула названа его именем: **ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА**. Этот гениальный ученый, родившийся в Швейцарии, почти всю жизнь прожил в России, и мы с полным основанием и гордостью можем считать его своим соотечественником.

У правильных многогранников есть еще одна особенность. Оказывается, первый из них (тетраэдр) стоит немного особняком: если считать центры его граней вершинами нового многогранника, то вновь получим тетраэдр. Зато четыре оставшихся разбиваются на две пары. Центры граней куба образуют октаэдр, а центры граней октаэдра — куб. То же происходит с парой додекаэдр — икосаэдр. Можете ли вы объяснить этот факт, используя результаты подсчета числа вершин, граней и ребер, занесенные в таблицу?

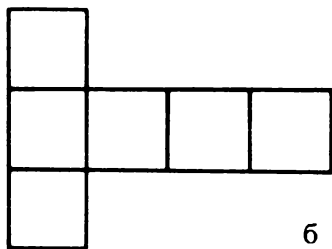
Совершенство форм, красивые математические закономерности, присущие правильным многогранникам, явились причиной того, что им приписывались различные магические свойства, и все пять геометрических тел издавна были обязательным атрибутом волшебников и звездочетов. И если вы потрудитесь над их изучением и изготовлением, то наверняка они доставят вам радость и удовольствие, а возможно, принесут удачу в новом году!

На рис.62, а—д даны развертки елочных игрушек. При изготовлении моделей не забудьте в нужных местах сделать клапаны для склеивания!

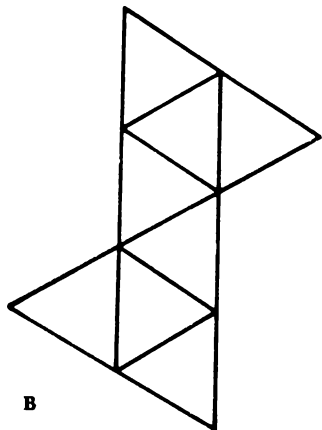
Есть еще один способ изготовления моделей многогранников, при котором они сплетаются из нескольких полосок бумаги. Без применения клея модель приобретает жесткую структуру после того, как будет заправлен последний кусочек бумаги.



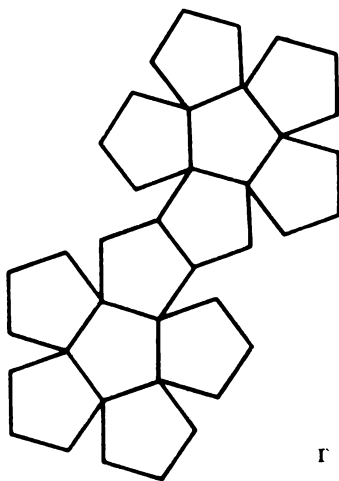
а



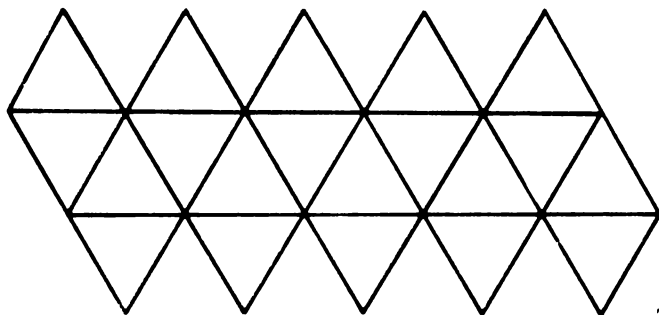
б



в



г

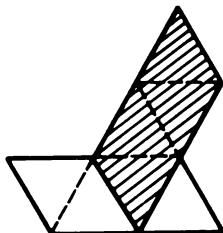


д

Рис. 62



Согните и разогните каждую из полосок по пунктирным линиям, чтобы образовались сгибы — «овраги»

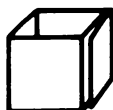


Наложите черную полоску на белую. Сложите из белой тетраэдр, затем оберните черной полоской две грани тетраэдра и оставшийся треугольник вставьте в щель между двумя белыми треугольниками

а

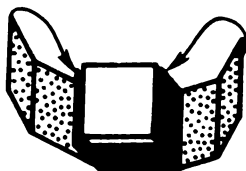


1. Вырежьте три такие полоски (белую, черную, красную)



2. Сложите белую полоску так

3. Оберните ее черной полоской



4. Получим куб, у которого передняя и задняя грани белые, а остальные — черные

5. Третью полоску (красную) пропустите сзади куба в щель между белой и черной полосками, согните и конечные квадраты также пропустите в щель между передней белой гранью и черной полоской

б

Рис. 63

На рис. 63, а показано, как можно сплести тетраэдр из двух полосок, состоящих из четырех треугольников. На рис. 63, б дан один из способов плетения куба из четырех полосок, разделенных на пять квадратов.

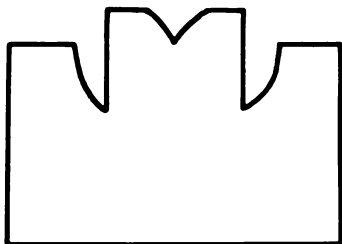


Рис. 64

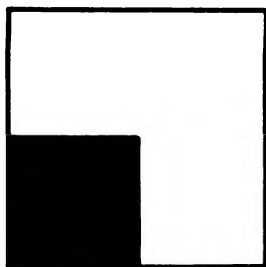


Рис. 65

Если полосы разного цвета, то у получающегося куба противоположные грани одинакового цвета. Показанный на этом рисунке способ интересен тем, что любые две полосы не зацеплены друг с другом, а все три зацеплены. Существует другой способ плетения куба из таких же полосок. При этом каждые две полосы оказываются зацепленными, а одинаково окрашенными будут пары соседних граней. Попробуйте найти этот второй способ плетения куба самостоятельно.

## § 9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ

---

*Хорошее воображение — это качество, необходимое в равной мере и математику, и поэту. А может быть, математику даже в большей степени. Великий французский просветитель Вольтер как-то сказал: «В голове у Архимеда было гораздо больше воображения, чем в голове у Гомера».*

---

1. На рис. 64 изображена часть крепостной стены. Один из камней стены имеет столь причудливую форму, что если вытащить его из стены и положить иначе, то стена станет ровной. Изобразите этот камень.
2. Отец, у которого было четыре сына, имел квадратное поле. Четверть поля (рис. 65) он оставил себе. Остальную часть обещал отдать сыновьям, если те сумеют разделить поле между собой на равные по площади и по форме части. Как сыновьям выполнить это?

Занимательных задач на разрезание квадрата — множество. Если разрезать квадрат, как показано на рис. 66, то получится популярная китайская головоломка ТАНГРАМ, которую в Китае называют «чи тао ту», т.е. умственная головоломка из семи частей. Название «танграм» возникло в Европе вероятнее всего от слова «тань», что означает «китаец» и корня «грамма» (с греч. «буква»).

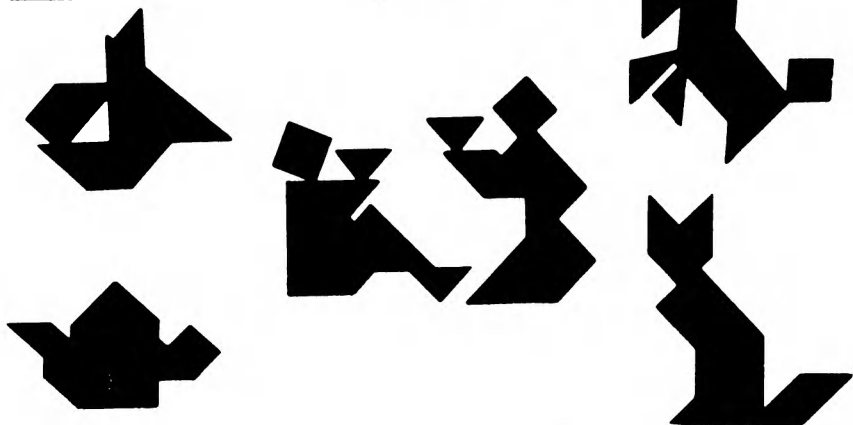
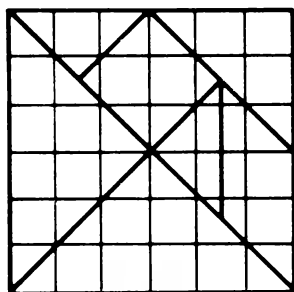


Рис. 66

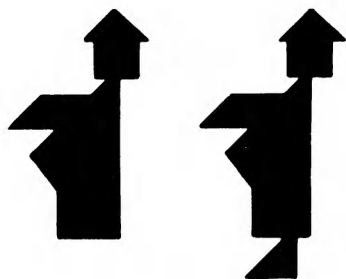


Рис. 67

3. Изготовьте головоломку сами: переведите на плотную бумагу квадрат, разделенный на семь частей (рис. 66), и разрежьте его. Головоломка состоит в том, чтобы, используя все семь частей, сложить фигурки, приведенные на том же рис. 66. Может, вам удастся придумать и свои картинки?

Как ни странно, обе эти фигурки (рис. 67) составлены из всех семи кусочков танграма. Каким образом фигурка справа приобрела «ногу»?

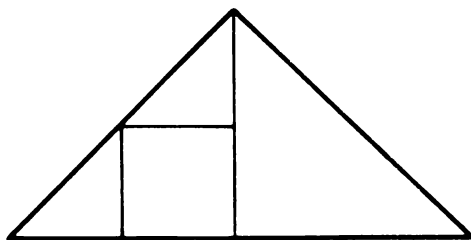


Рис. 68

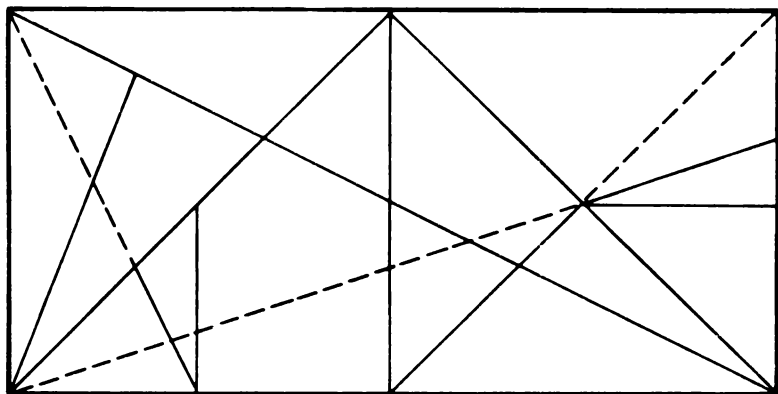


Рис. 69

## ГЕОМЕТРИЯ ТАНГРАМА

В танграме среди его семи кусочков уже имеются треугольники трех разных размеров. Но можно сложить еще один треугольник, используя четыре кусочка: один большой треугольник, два маленьких и квадрат (рис. 68).

4. Сложите такой же треугольник, используя:
  - а) один большой треугольник, два маленьких треугольника и параллелограмм;
  - б) один большой треугольник, один треугольник средний и два маленьких.
5. Можно ли составить треугольник, используя только два кусочка? три кусочка? пять кусочков? шесть кусочков? все семь кусочков?
6. Очевидно, что из всех семи кусочков составляется квадрат. Можно или нельзя составить квадрат из двух кусочков? из трех?
7. Какие различные кусочки составляют прямоугольники? Какие еще многоугольники можно составить?
8. Найдите площади всех частей танграма, если сторона клетки на рис. 66 равна 1.





Рис. 70

### СТОМАХИОН ("приводящая в ярость")

Игра «Стомахион» была известна еще до нашей эры. Создателем ее считали Архимеда. В 1899 г. швейцарский историк Генрих Зютер обнаружил в книгохранилищах Берлина и Кембриджа арабскую рукопись «Книга Архимеда о разбиении фигуры стомахиона на 14 частей, находящихся в рациональных отношениях». Позже датский историк математики Гейберг подтвердил, что создателем игры является Архимед.

Сделайте игру «Стомахион»: возьмите прямоугольник, одна сторона которого в два раза больше другой, и выполните в нем построения как на рис. 69. Разрезав прямоугольник по сплошным линиям, составьте фигурки курицы, мельницы и петуха (рис. 70), а также какие-нибудь свои фигурки.

## § 10. ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИНЫ

---

*«Измерь самого себя — и ты станешь настоящим геометром!» — воскликнул средневековый философ Марсилио Сичино. Конечно, измерить самого себя и стать настоящим Геометром, настоящим Поэтом, Садовником и вообще Настоящим очень трудно. Не всякому удастся сделать это за всю жизнь, но если говорить о чем-то более простом, то с уверенностью можно сказать, что каждому человеку, научившемуся считать и писать, неоднократно приходилось что-либо измерять: высоту дерева, собственный вес, длину прыжка, время бега и многое другое. И все же давайте подумаем над вопросом: «Что значит, измерить какую-то величину?»*

---

Любые измерения производят в каких-то единицах: длина — в единицах длины, вес — в единицах веса, время — в единицах

времени и т.д. За свою историю человечество придумало огромное количество всевозможных единиц, причем каждый народ имел свои. Как известно, герои одного мультфильма измеряли длину удава в «попугаях». Для обитателей тропического леса, в котором живет попугай, эта единица не хуже других. Но длина в «попугаях» ничего не скажет жителям тайги, да и для соседних джунглей, где живут попугаи другой породы, придется переводить своих «попугаев» в чужие.

Эта история из мультфильма не такая уж нелепая. Правители разных стран любили устанавливать свои меры, часто связанные с собственной персоной. Например, английский король Генрих I ввел в качестве единицы длины ЯРД, как расстояние от кончика своего носа до большого пальца вытянутой руки. Более демократична по происхождению другая английская единица длины ФУТ, что по-английски означает ступня. 16 англичан выстраивались в цепочку таким образом, что каждый следующий касался концами пальцев своих ног пяток предыдущего. Одна шестнадцатая такой цепочки и составляла 1 фут. Можно сказать, что английский фут — это длина ступни среднего англичанина. На Руси в старину мерами длины были ПЯДЬ, ШАГ, ЛОКОТЬ. Большие расстояния измерялись ПОЛЕТОМ СТРЕЛЫ. Несколько позже появились АРШИН, САЖЕНЬ, ВЕРСТА и другие.

С развитием ремесел и торговли появилась потребность в международных, определяемых через что-то более постоянное, чем длина ступни и подобные величины, единицах. Так появился МЕТР. Первоначально в 1791 г. метр был определен как одна сорокамиллионная часть ( $1/40\,000\,000$ ) парижского меридиана. Был изготовлен эталон метра — металлический брус из сплава платины и иридия. На него нанесены два штриха, расстояние между которыми и составляет 1 метр. Этот эталон хранится в Международном бюро мер и весов в Севре недалеко от Парижа. В 1960 г. на XI конференции по мерам и весам было решено главную роль в определении метра отвести газу криптону. Это сделали для уточнения метра. Почему для этого был выбран именно криптон, вы узнаете в курсе физики.

После введения метра одни страны сразу приняли его, другие же, славящиеся приверженностью традициям, не спешили отказываться от своих единиц (и до сих пор Англия, США и некоторые другие страны измеряют длины в дюймах, футах, ярдах, милях). Поэтому для международного общения потребовалось научиться переводить национальные меры в международные и обратно. С этой целью некоторую неизменную величину, например парижский меридиан, надо было измерить в тех и других единицах. Таким образом выяснялось, какую

часть метра (или сколько метров) составляет та или иная мера длины (например, английский фут оказался равен 0,3048 м). Вернемся к вопросу, заданному в начале параграфа: «Что значит измерить?» Коротко можно ответить так: «Измерить — значит сравнить с эталоном». Измерим длину отрезка прямой линии в заданных единицах (измерение длин кусков кривой линии несколько иная задача). Берем единицу длины, например метр, и откладываем его на нашем отрезке до тех пор, пока остаток не станет меньше него. Получившееся число целых единиц запишем. Теперь разделим нашу единицу на 10 равных частей и на оставшейся части измеряемого отрезка будем откладывать  $1/10$  часть единицы. Получившееся целое число от 0 до 9 припишем после запятой к полученному ранее целому. Таким образом последовательно получают десятые, сотые, ... доли единицы. Теоретически этот процесс может продолжаться бесконечно долго, но на практике он быстро закончится. Продолжать измерения станет либо практически невозможно, либо бессмысленно. Чем на меньшие доли мы раздробили метр, тем больше точность измерения. Точность измерения зависит, во-первых, от измерительного инструмента: если мы измеряем длину садового участка метром без делений, то получим эту величину с точностью до 1 м. Например, длина участка — около 50 м. Если длину мерить рулеткой, самое мелкое деление которой 1 см, то длина участка будет измерена с точностью до 1 см (например, длина участка около 49 м 68 см). Каждый раз, измеряя на практике длину чего-либо, мы должны выбрать некоторую **РАЗУМНУЮ** точность измерения: ведь нет необходимости знать длину участка в миллиметрах или расстояние от Земли до Солнца в метрах. Точность измерения определяется также свойствами измеряемого объекта. Кусок ткани, например, может растягиваться, да и край у него не всегда четко обозначен.

Итак, измеряя на практике различные величины, мы всегда получаем приближенные значения, но погрешность измерения часто не учитываем и считаем полученный результат истинным. Математики же в своих рассуждениях исходят из того, что отрезки (и другие величины) имеют точную длину (точное значение) и оперируют этими точными числами. Так же в дальнейшем будем действовать и мы. Вот одна простая задача:

1. Некий путешественник оказался среди жителей малоизвестного племени. Их язык ему понятен, но единиц измерения он не знает. Для больших расстояний местные жители пользуются единицей, которую называют **ЯЛИМ**. Путешественник измерил в километрах расстояние между двумя деревнями. Оно

оказалось равным 10,8 км. Местные жители определяют это расстояние в 8,1 ялима. Сколько километров надо пройти путешественнику, чтобы добраться до ближайшей реки, если жители говорят, что это расстояние составляет 3,6 ялима?

В связи с этой задачей полезно сформулировать одно очень простое, но очень важное утверждение.



Отношение длин двух отрезков есть число, которое не зависит от единицы измерения.

Оно называется **ОТНОШЕНИЕМ ОТРЕЗКОВ**.

Чтобы завершить наш разговор о единицах измерения, расскажем о старинных русских мерах длины и некоторых иностранных.

**ВЕРШОК** — «верх» указательного пальца, точнее, два верхних сустава этого пальца, равен  $1/4$  пяди.

**ПЯДЬ** — расстояние между концами большого и указательного пальцев, растянутых в плоскости, равна  $1/4$  аршина. Ее еще называли «четверть».

**АРШИН** — примерно расстояние от плеча до конца вытянутой руки взрослого человека. 1 аршин равен 0,711 м.

**САЖЕНЬ** равна 3 аршинам. **КОСАЯ САЖЕНЬ** (2,48 м) и **МАХОВАЯ САЖЕНЬ** (1,76 м).

**ВЕРСТА** — старинная русская мера пути, равная 500 саженьям.

Это все были старинные русские меры длины. Приведем еще наибольший список мер длины, которыми пользовались (а некоторыми пользуются и сейчас) в разных странах.

**СТАДИЙ** — мера длины многих древних народов. Величина стадия различна, например, **ВАВИЛОНСКИЙ СТАДИЙ** — около 195 м, **АТТИЧЕСКИЙ СТАДИЙ** — около 185 м. По-гречески стадий и стадион пишутся одинаково.

**ЛИ** — единица длины, издавна существовавшая в странах Дальнего Востока. Сказать что-либо определенное об этой единице трудно, поскольку ее величина в разных странах меняется от долей миллиметра до 500 м.

**ЛЬЁ (лье)** — старинная единица длины во Франции.

**СУХОПУТНОЕ ЛЬЁ** составляет 4,444 км, **МОРСКОЕ ЛЬЁ** равно 5,556 км.

**МИЛЯ** — происходит от латинского слова, означающего тысяча шагов. Эта единица ранее была распространена во многих странах, а сегодня используется главным образом в морском деле. **МИЛЯ МОРСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ** равна 1,852 км. **МОРСКАЯ МИЛЯ В ВЕЛИКОБРИТАНИИ** немного больше — 1,8532 км. Кроме того, в Великобритании и США есть еще **УСТАВНАЯ СУХОПУТНАЯ МИЛЯ**, равная 1,609 км.

**КАБЕЛЬТОВ** —  $1/10$  морской мили.

**ДЮЙМ** — английская мера длины, равная  $1/12$  фута или 2,54 см.

Стоит заметить, что в старину на Руси использовались не только исконные русские меры, но и пришедшие с Запада. Такой единицей был ДЮЙМ, а также связанные с ним ЛИНИЯ и ТОЧКА. По поводу ТОЧКИ в словаре Даля сказано, что это «малейшая доля протяженья». И поясняется: в дюйме 10 ЛИНИЙ, в линии — 10 ТОЧЕК.

Еще несколько английских мер длины:

МИЛ (не путайте с милей) — тысячная доля дюйма.

ФУТ. Равен 0,3048 м.

ЯРД. Равен 3 футам.

2. Запишите все известные, а вернее перечисленные выше, единицы длины в порядке возрастания.
3. Известно старинное пожелание морякам: «Семь футов под килем». А сколько это будет аршин, метров? Вспомните еще пословицы и поговорки, в которых фигурируют меры длины. Приведите примеры из литературы.

Задача измерения длин кривых линий, конечно, труднее практически и сложнее теоретически, чем измерение отрезков прямых. Но мы ее решение сводим к измерению отрезков.

**ПЕРВЫЙ СПОСОБ.** Выкладываем нитку или веревку по форме измеряемой кривой, а затем вытягиваем ее в отрезок и измеряем. Так можно измерять длину окружности, обхват дерева и др.

**ВТОРОЙ СПОСОБ.** Разбиваем измеряемую кривую на небольшие участки, каждый из которых можно считать почти отрезком. Измеряем каждый отрезок и складываем результаты измерений. По существу, именно так мы и поступаем, когда измеряем шагами длину дороги.

4. Приведите примеры кривых, длины которых удобно измерять каждым из этих способов.

## § 11. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМА

---

*«...Потом Мэри Поппинс поставила градусник себе самой, подержала его одно мгновение и вытащила. «Полное совершенство во всех отношениях,» — прочитала она, и самодовольная улыбка заиграла на ее лице...» Трудно сказать, в каких единицах Мэри Поппинс измерила свое совершенство, поэтому мы поговорим о более простом и привычном, а именно: измерении площадей и объемов*

---

Что же можно взять в качестве единицы площади или объема? Очевидно, что исходить нужно из уже имеющихся единиц длины.

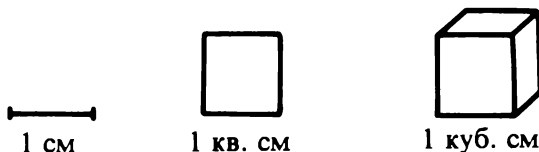


Рис. 71

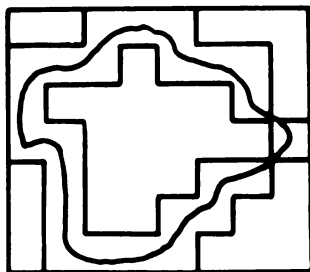


Рис. 72

Далеко не сразу человек додумался до «квадратных» и «кубических» единиц. Что это такое?

Возьмем квадрат со стороной 1 м. Его площадь равна квадратному метру (кв. м.). А площадь квадрата со стороной 1 см равна 1 квадратному сантиметру (рис. 71).

В 1 кв. м укладывается  $100 \times 100 = 10\,000$  кв. см, а в 1 кв. см будет  $10 \times 10 = 100$  кв. мм.

Нетрудно найти площадь фигуры, составленной из квадратных метров или квадратных сантиметров или из тех и других. А как быть, если фигура произвольна?

Возьмем лист клетчатой бумаги и нарисуем на нем какую-нибудь фигуру (рис. 72). Как мы видим, ровно 16 клеток содержится внутри фигуры. А самое меньшее число клеток, покрывающих фигуру, равно 40. Таким образом, площадь фигуры больше 16 клеток, но меньше 40. Если считать, что одна клетка есть квадратный сантиметр, то площадь больше 16 кв. см. Величина 16 кв.см. есть площадь фигуры, измеренная с недостатком. Правда, к сожалению, ошибка не равна 1 кв. см, а существенно больше. Площадь фигуры с избытком равна 40 кв. см. Самое лучшее в данной ситуации, если мы в качестве значения площади возьмем полусумму измерений с недостатком и с избытком. Получим приближенное значение площади  $(16 + 40)/2 = 28$  кв. см. Ошибка при этом будет меньше, чем  $28 - 16 = 40 - 28 = 12$  кв. см. Объясните, почему ошибка меньше указанной величины?

Как поступить, чтобы найти площадь фигуры точнее? Для этого надо дробить квадратную единицу. В 1 кв. см укладывается

$10 \times 10 = 100$  кв. мм. Будем продолжать заполнять площадь фигуры квадратными миллиметрами до тех пор, пока это возможно. Прибавив соответствующее количество квадратных миллиметров к ранее найденной величине, мы вычислим площадь фигуры с недостатком, но уже точнее. Продолжая покрывать фигуру квадратными миллиметрами, мы найдем ее площадь с избытком. Затем вновь возьмем полусумму полученных значений. Продолжая этот процесс, можно определить площадь еще точнее. Так же можно поступать и с пространственной фигурой. В качестве единицы объема можно выбрать куб с ребром, равным соответствующей линейной единице. Получим 1 кубическую единицу — метр, сантиметр, аршин, фут и т.д. Поскольку 1 куб.м заполняется  $100 \times 100 \times 100 = 1\,000\,000$  куб.см, то 1 куб.м в миллион раз больше 1 куб.см.

1. Сколько квадратных миллиметров в одном квадратном километре, квадратных аршинов в квадратной версте, квадратных дюймов в одном квадратном ярде, квадратных километров в одной квадратной миле, кубических сантиметров в одном кубическом километре, кубических вершков в одной кубической сажени, кубических футов в одном кубическом аршине?

А теперь вновь зададим вопрос: «Почему?» Почему для получения единиц площадей и объемов мы использовали квадрат и куб? Почему бы нам не воспользоваться для измерения площадей «треугольным сантиметром», взяв за единицу треугольник, у которого все стороны равны 1 см? Или даже «круглый сантиметр»?

Что касается «круглого сантиметра», то здесь неудобство сразу бросается в глаза: непересекающимися кругами нельзя заполнить плоскость. Зато треугольниками можно. В связи с этим задача.

2. Каждая из сторон треугольника равна 7 см. Сколько треугольных сантиметров составляет его площадь?

В общем, для измерения площадей треугольные сантиметры вполне подходят. Они ничем не хуже квадратных сантиметров. Но если мы таким же образом введем для измерения объемов «пирамидальные единицы», т.е. будем использовать треугольные пирамиды, все ребра которых равны соответствующей единице длины, то столкнемся с большими трудностями. Оказывается, такими пирамидами нельзя заполнить пространство, и вообще, с измерениями в пространстве все обстоит гораздо сложнее, чем на плоскости. Вот один пример в виде задачи.

3. Треугольник, каждая из сторон которого 2 см, легко разрезать на четыре треугольника со стороной 1 см. А теперь возьмем треугольную пирамиду с ребрами по 2 см. На сколько частей

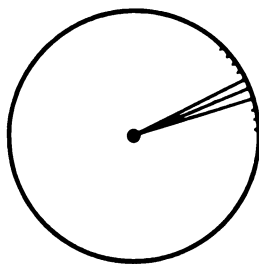


Рис. 73

оказалась разрезанной исходная пирамида плоскостями, делящими ее ребра пополам? Все ли части являются пирамидами?

При решении практических задач на измерение объема не обязательно разбивать пространство на кубические единицы, а затем мельчить на меньшие кубики. Можно поступить следующим образом.

Изготовим сосуд в виде единичного куба и заполним его какой-нибудь жидкостью, например водой. Тогда получившееся КОЛИЧЕСТВО воды (разумеется, при той же температуре) и будет соответствовать объему одной кубической единицы. Теперь, разливая это количество воды в различные по форме сосуды, мы будем получать единичные объемы различной формы. Именно так во многих практических ситуациях человек и поступает. Как известно, 1 л соответствует объему 1 куб. дм. Большинство бутылок, выпускаемых в нашей стране, вмещают объемы  $1/3$  л или  $1/2$  л. С их помощью нетрудно измерить объемы самых разных сосудов с точностью, достаточной в хозяйстве.

Для измерения площадей такой простой способ мы предложить не можем, хотя здесь также, разрезая квадрат на части и перекладывая эти части, можно получать фигуры единичной площади и различной конфигурации.

Кроме длин, площадей и объемов в геометрии надо еще уметь измерять углы. Единица угла, как мы знаем, — градус. Градус можно определить еще и следующим образом. Возьмем произвольную окружность с центром  $O$  (рис. 73). Разделим ее на 360 равных частей — дуг. Если мы соединим центр окружности (точку  $O$ ) с точками деления, то получим 360 равных углов, каждый из которых равен  $1^\circ$ . Дуги окружности также измеряются в градусной мере. Каждая из получившихся дуг также равна  $1^\circ$ . Разделив каждый градус на 60 равных частей, получим более мелкую единицу угла — минуту. Минуты обозначают значком  $'$ . Одна шестидесятая часть минуты —



секунда. Обозначается двумя штрихами ("). Запись  $78^{\circ}16'25''$  читается так: 78 градусов 16 минут 25 секунд. Как видим,



дольные единицы углов называют как и единицы времени.

Кроме длин, площадей, объемов и углов человеку приходится измерять множество различных величин: время, вес, скорость, громкость звука, силу света и многое другое. Не так уж редки ситуации, когда мы с помощью единиц одного вида измеряем не соответствующую ей величину. Например, говоря о расстоянии между двумя городами, мы указываем время, в течение которого можно доехать из одного города до другого. И это гораздо удобнее, чем указывать расстояние. При помощи песочных часов время измеряется в единицах объема — объема пересыпавшегося песка. Попробуйте привести другие примеры такого рода.

Во многих случаях, чтобы измерить какую-то величину, приходится проявлять большую изобретательность. Ведь нельзя так просто взять и измерить радиус Земного шара, площадь океана и многое другое, что нужно знать ученым. Помните, в самом начале этой книги предлагалась задача об измерении диагонали кирпича? А вот еще подобная задача.

4. Предложите способ, с помощью которого на практике можно измерить: толщину бумажного листа, объем булыжника, вместимость чайной ложки (ее объем). Придумайте свои задачи на измерение каких-то величин, требующие изобретательности.

## § 12. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ, ПЛОЩАДИ И ОБЪЕМА

---

*В книге П.Л.Треверс «Мэри Поппинс» в одном из эпизодов Кошка задает вопросы Королю. «Первый вопрос: «Высоко ли до неба?» Король удовлетворенно хмыкнул. Это был вопрос как раз в его вкусе, и он улыбнулся с видом превосходства.*

*— Ну, конечно, — начал он, — это понятие относительное. если мы будем измерять высоту от уровня моря — результат будет один. Если с вершины горы — другой. И приняв все это в расчет, а также определив широту и долготу, учитывая данные метеорологии, психологии, геологии, топологии и болтологии, а также астрономии и физиологии, статистики, лингвистики, беллетристики и мистики, мы можем ...»*

---

К сожалению, мы вынуждены прервать цитату. Желающие могут прочесть книгу и узнать, чем закончился этот разговор. Как ни

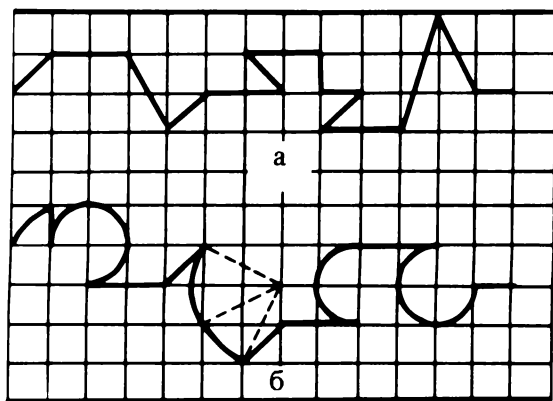


Рис. 74

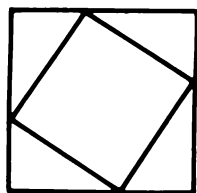


Рис. 75

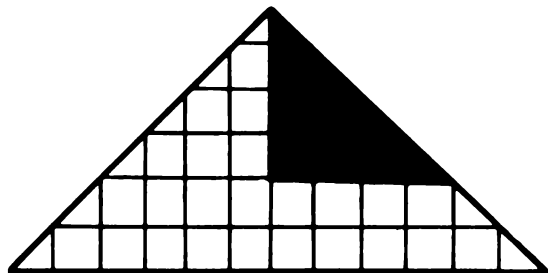
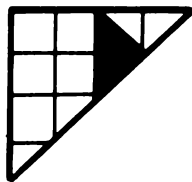
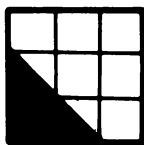
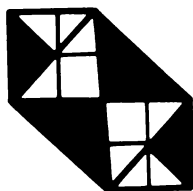
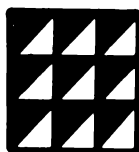
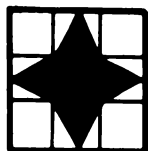
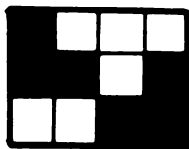


Рис. 76

странно, но Король прав. Задача измерения весьма трудная, и одной изобретательности недостаточно. Надо многое знать — законы природы, свойства фигур, математические формулы.

Так, например, зная, что звук в воздухе распространяется со скоростью примерно 330 м/с (за 1 с проходит 330 м), а свет практически мгновенно, мы без труда определим, на каком расстоянии примерно идет гроза, если измерим интервал времени между ударом молнии и последующим раскатом грома.

В §11 мы решили несколько практических задач на измерение величин. А как быть, если требуется измерить высоту дерева, ширину реки или объем большого камня, который трудно поднять даже несколькими силачам? Прежде чем ответить на этот вопрос, решим несколько задач.

1. Увеличьте ломаную на рис. 74, а в два раза так, чтобы ее форма не изменилась. Нарисуйте какую-нибудь ломаную для соседа по парте. Пусть он удвоит ее длину сохранив прежнюю форму. На рис. 74, б изображена линия, состоящая из отрезков прямых и дуг окружности. Как удвоить эту линию?
2. Как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить в 2 раза? в 3 раза? в  $2\frac{1}{3}$  раза? Как изменится площадь треугольника, если каждую его сторону увеличить в 2 раза? в 3 раза? в  $2\frac{1}{3}$  раза?
3. Ребро куба увеличили в три раза. Во сколько раз увеличился его объем? Если каждое ребро пирамиды увеличить в три раза, то во сколько раз возрастет ее объем?
4. Покажите, что площадь квадрата на рис. 75 равна 13 клеткам.
5. Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого равна 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 20, 25, 26 клеткам.
6. Какая часть фигуры (по площади), изображенной на рис. 76, закрашена?
7. На рис. 77 изображена фигура площадью 2 кв. см. Нарисуйте еще две фигуры площадью 2 кв. см. Нарисуйте несколько фигур площадью 3 кв. см.
8. Покажите, что треугольник и прямоугольник на рис. 78 имеют одинаковые площади.
9. Через точку внутри квадрата проведены прямые по сторонам и диагоналям клеток (рис. 79). Докажите, что сумма площадей закрашенных частей равна сумме площадей незакрашенных частей.
10. Противоположные стороны шестиугольника, изображенного на рис. 80, равны. Взяв три вершины шестиугольника через

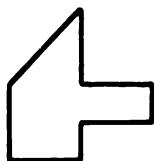


Рис. 77

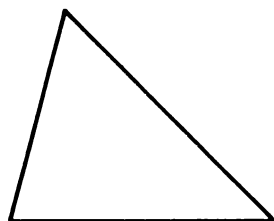


Рис. 78

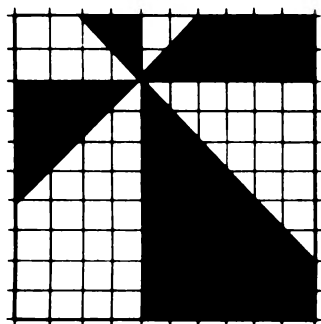
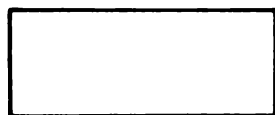


Рис. 79

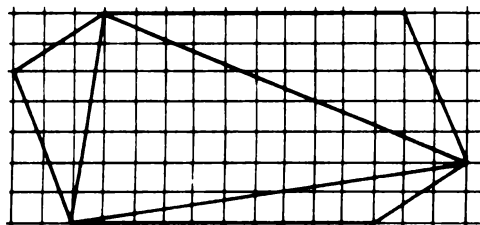


Рис. 80

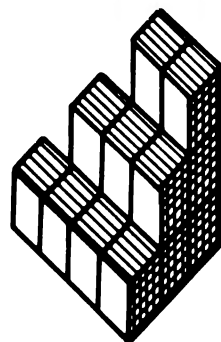
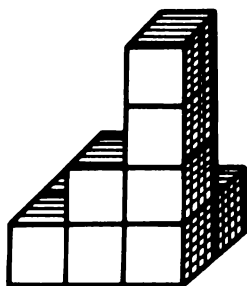
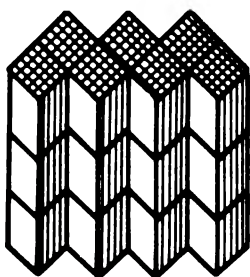


Рис. 81

одну, получим треугольник. Покажите, что площадь этого треугольника равна половине площади шестиугольника.

**11.** Изображенные на рис. 81 тела составлены из кубиков с ребром 1 см. Подсчитайте объемы тел.

При решении большинства предыдущих задач мы опирались на некоторые свойства фигур. Эти свойства справедливы не только для квадратов, треугольников, кубов. Они являются общими свойствами произвольных фигур. Сформулируем их.



Каждая плоская фигура или пространственное тело имеют форму и размеры.

Равные фигуры — это фигуры, одинаковые по форме и по размерам.

Если две различные плоские фигуры можно разрезать на одинаковые части, то они будут иметь равные площади.

Такие фигуры называют РАВНОСОСТАВЛЕННЫМИ. Фигуры, имеющие равные площади, называют РАВНОВЕЛИКИМИ.

Плоские равновеликие многоугольники также являются равносоставленными. Иными словами,



один многоугольник всегда можно перекроить в любой другой с такой же площадью.

Объемные тела, составленные из одинаковых частей, имеют одинаковый объем.

В отличие от многоугольников, два многогранника, имеющие одинаковый объем, не всегда можно разделить на одинаковые части.

Если, не меняя формы плоской фигуры, увеличить ее размеры в  $n$  раз, то ее площадь увеличится в  $n \times n$  раз.

Если, не меняя формы тела, увеличить его размеры в  $n$  раз, то его объем увеличится в  $n \times n \times n$  раз.

Используя эти свойства, можно предложить практические способы измерения больших величин. Основная идея — постараться каким-то образом изготовить уменьшенную копию той фигуры, параметры которой надо измерить.

Вот небольшая история о том, как отец одного школьника сумел измерить высоту дерева при помощи ... лужи.

Однажды сын проходил с отцом по двору. Недавно прошел дождь и во дворе было много небольших луж. Посреди двора росло большое дерево. Сын спросил отца: «Чему равна высота этого дерева?» На этот вопрос отец ответил: «Давай не будем гадать, а измерим его высоту. Я знаю свой рост — 180 см. Мне надо знать, на какой высоте расположены глаза. Думаю, мы не сильно ошибемся, если будем считать это расстояние равным 170 см. Мой шаг равен 90 см ... А впрочем, это не важно. Сейчас я встану так, чтобы я мог видеть в этой луже отражение вершины дерева. Теперь подсчитаем, сколько шагов от меня до лужи. Получилось 3 шага. Так, а чему равно расстояние от лужи до дерева?.. 30 шагов. Значит, высота дерева равна...»

**12.** Сделайте картинку, иллюстрирующую ситуацию, описанную в рассказе, и ответьте на вопрос, чему равна высота дерева.

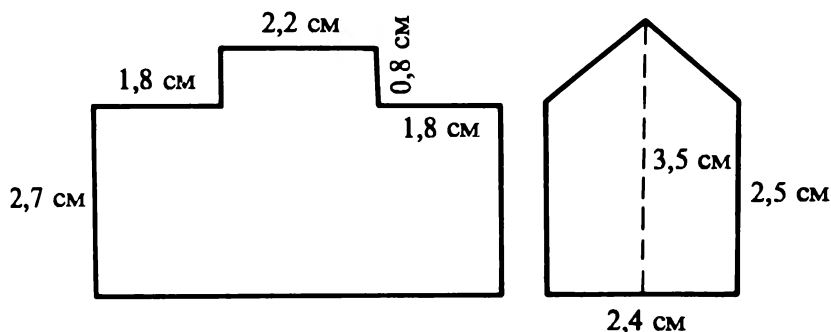


Рис. 82

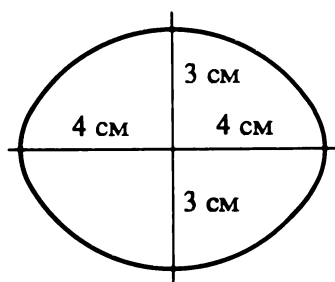


Рис. 83

При решении задач на нахождение тех или иных величин большую пользу могут принести формулы, позволяющие выразить искомые величины через другие, известные или легко находимые.

Простейшие из них — формулы для вычисления площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда.



Если  $a$  и  $b$  — длины сторон прямоугольника (в каких-то единицах), то его площадь равна  $a \times b$  квадратных единиц.

Если  $a$ ,  $b$ , и  $c$  — длина, высота и ширина прямоугольного параллелепипеда, то его объем равен  $a \times b \times c$  кубических единиц.

13. Найдите площадь фигур, изображенных на рис. 82.
14. Нарисуйте линию той же длины, что и на рис. 83, но ограничивающую площадь на 1 кв.см больше.

## § 13. ОКРУЖНОСТЬ

*В одном из своих стихотворений поэт Павел Коган сказал: «Я с детства не любил овал, я с детства угол рисовал...» На это ему возразил другой поэт Наум Коржавин: «Меня, наверно, Бог не звал, и вкусом не снабдил утонченным. Я с детства полюбил овал за то, что он такой законченный.»*

Но все же не стоит противопоставлять друг другу угол и овал, треугольник и окружность. Среди всевозможных плоских фигур выделяются две главные: треугольник и окружность. Эти фигуры известны нам всем с раннего детства. Любой первоклассник без труда найдет слова, объясняющие, что такое треугольник. Возможно, он скажет что-то вроде: «Возьмем три точки. Если их соединить отрезками, то получится треугольник». Конечно, назвать это описание математически точным определением треугольника нельзя. Но суть выражена достаточно ясно.

Следует отметить, что математики очень любят давать определения всем встречающимся в их науке понятиям, даже самым общеизвестным, таким, как треугольник. Существуют правила, которым должно удовлетворять определение. Так если мы скажем, что «треугольник — это многоугольник, у которого три стороны и три вершины», то это значит, что мы свели понятие «треугольник» к более широкому понятию «многоугольник». А это, в свою очередь, означает, что понятие «многоугольник» должно быть определено раньше. Оказывается, дать определение даже самым общеизвестным понятиям не так просто, как это может показаться на первый взгляд. Попробуйте поиграть в определения и определить такие понятия, как стул, школа, веселье, бег, отдых, обед и т.д., и вы убедитесь в этом.

Но вернемся к окружности. Известный математик Гратендик, вспоминая свои школьные годы, заметил, что увлекся математикой после того, когда узнал определение окружности. Он понимал, что такое треугольник в смысле высказывания нашего первоклассника. Но никак не мог понять, что такое окружность? Ведь эта линия в каждой точке загибается!

### ИТАК, ЧТО ЖЕ ТАКОЕ ОКРУЖНОСТЬ?

Оказывается, эта линия определяется совсем с другой точки зрения, чем треугольник и вообще многоугольники.



**Окружность** — это линия, все точки которой находятся на равном расстоянии от одной точки плоскости, называемой центром окружности.

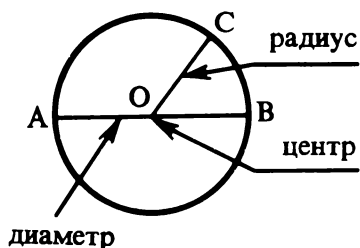


Рис. 84

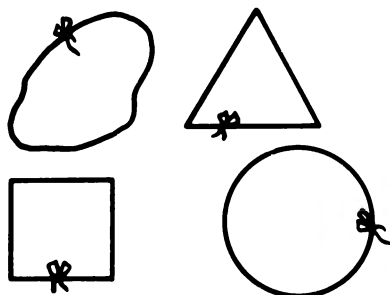


Рис. 85

На рис. 84 изображена окружность, отмечен ее центр — точка  $O$ , проведены и обозначены два отрезка:  $OC$  и  $AB$ . Отрезок  $OC$  соединяет центр окружности с точкой на окружности. Он называется **РАДИУСОМ** (по латыни *radius* — спица в колесе). Отрезок  $AB$  соединяет две точки окружности и проходит через ее центр. Это **ДИАМЕТР** окружности (с греческого — поперечник).

**Сколько в окружности можно провести радиусов и диаметров? Как связаны между собой радиус и диаметр одной окружности?**

Окружность — удивительно гармоничная фигура, древние греки считали ее самой совершенной. Совершенство окружности — в расположении всех ее точек на одинаковом расстоянии от центра. Именно поэтому



**окружность — единственная кривая, которая может «скользить сама по себе», вращаясь вокруг центра.**

Основное свойство окружности дает ответ на вопросы, почему для ее вычерчивания используют циркуль и почему колеса делают круглыми, а не квадратными, например, или треугольными. Подумайте и вы над этими вопросами!

Кстати, о колесе. Это одно из самых великих изобретений человечества. Оказывается, додуматься до колеса было не так просто, как это может показаться. Ведь даже ацтеки, жившие в Мексике, почти до XVI в. не знали колеса.

Окружность обладает еще одним интересным свойством. Возьмем веревочку и свяжем ее в кольцо. Положив полученное кольцо на плоскость, сделаем из него разные фигуры: квадрат, треугольник, окружность и т.д. (рис. 85).



**Площадь, ограниченная окружностью, (КРУГ) — наибольшая среди полученных таким образом площадей.**

**Окружность — это линия кривая и замкнутая. Она имеет длину.**

**Круг — плоская фигура, его характеризует ПЛОЩАДЬ.**



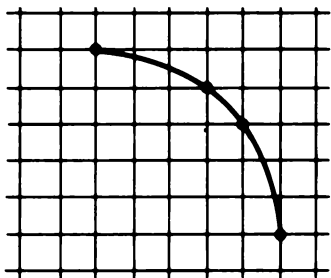


Рис. 86

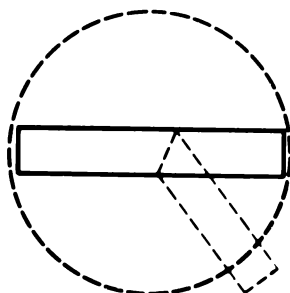


Рис. 87

С площадью круга связана одна из самых знаменитых задач древности — **ЗАДАЧА О КВАДРАТУРЕ КРУГА**. Требовалось постоять с помощью только циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга. Поиски квадратуры круга продолжались четыре тысячелетия! Лишь в 1882 г. немецкий математик Ф.Линдеман доказал, что с помощью циркуля и линейки эта задача неразрешима.

## КАК НАРИСОВАТЬ ОКРУЖНОСТЬ?

Известно, что для изображения окружности служит циркуль. Гораздо труднее нарисовать окружность от руки. Попробуйте сделать это сами. Не правда ли, получается какой-то овал, лишь отдаленно напоминающий окружность? Конечно, опытные, тренированные люди весьма ловко одним росчерком изображают окружность. Рассказывают, что великий немецкий художник Альбрехт Дюрер одним движением руки мог столь точно нарисовать окружность, что последующая проверка при помощи циркуля (центр указывал художник) не показывала никаких отклонений.

**Посоревнуйтесь с друзьями, кто из вас лучше изобразит окружность без циркуля.**



При изображении окружности на клетчатой бумаге стоит запомнить одно правило, позволяющее сделать нужное изображение от руки. Правда, речь идет об изображении окружности определенного размера. Правило это записывается в виде трех пар чисел: 3-1, 1-1, 1-3.

Действовать по этому правилу нужно так. Возьмем пересечение линий (узел) клетчатой бумаги (рис. 86). Отступив на три клетки вправо и одну вниз, поставим вторую точку. Отступая от второй точки по одной клетке вправо и вниз, находим третью точку. Четвертая точка находится в одной клетке вправо и в трех вниз от третьей точки. Соединив плавной линией полученные точки, мы весьма похоже изобразим четверть окружности.

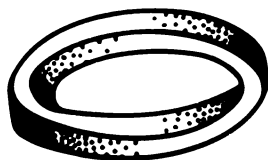


Рис. 88

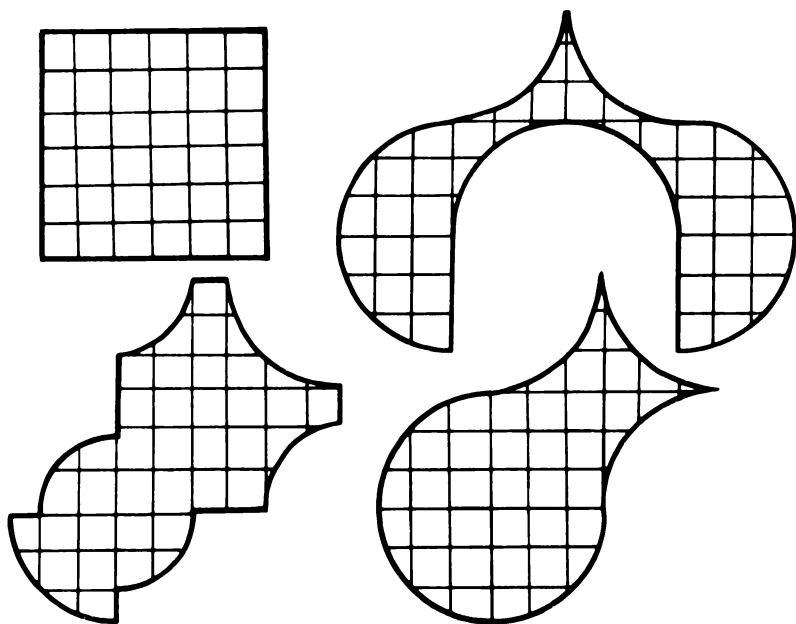


Рис. 89

### Сколько клеток равен радиус такой окружности?

Много интересных задач связано с окружностью и кругом. Попробуйте решить следующие из них.

1. Почему канализационные люки делают круглыми, а не квадратными?
2. Возьмем прямоугольный листок бумаги, который можно накрыть кругом. Сложим листок (рис. 87). Можно ли теперь накрыть его тем же кругом?
3. Расположите пять одинаковых монет так, чтобы каждая из них касалась четырех остальных.
4. Существует ли кольцо, изображенное на рис. 88, в действительности или на рисунке допущена ошибка?
5. Разрезав квадрат на части, сложите из них следующие фигуры (рис. 89). Бумага в клеточку облегчит решение.

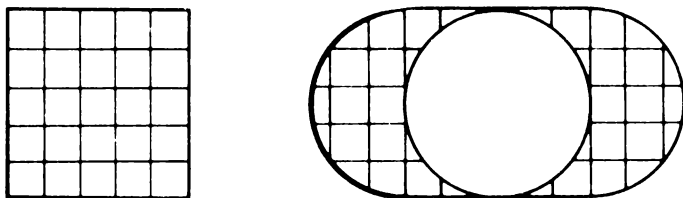


Рис. 90

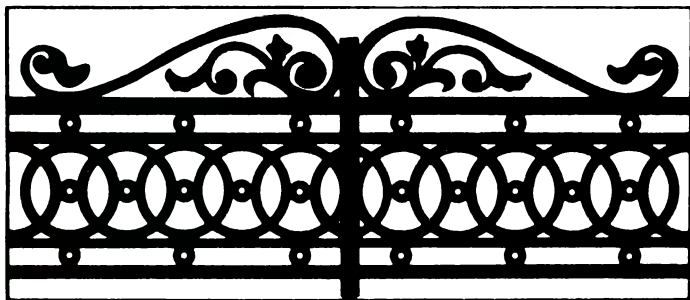


Рис. 91. Ворота Таврического дворца

6. На столе один пятак лежит неподвижно, а другой катится вокруг первого, касаясь его. Сколько раз он обернется вокруг своего центра, прежде чем вернется в исходное положение?
7. Вокруг небольшого курортного городка расположены три круглых не соединяющихся между собой озера: большое, средних размеров и маленькое. Отдыхающие, в каком бы направлении ни выходили, двигаясь по прямой, обязательно приходили к одному из озер. Может ли такое быть? Как расположены городок и озера?
8. На что пойдет больше краски, на окрашивание квадрата или этого необычного кольца (рис. 90)?

Окружность как совершенная геометрическая форма всегда привлекала к себе внимание художников, архитекторов. В неповторимом архитектурном облике Санкт-Петербурга восторг и удивление вызывает «чугунное кружево» — садовые ограды, перила мостов и набережных, балконные решетки, фонари. Четко просматриваемое на фоне фасадов зданий летом, в изморози зимой, оно придает особое очарование городу. На рис. 91 дан эскиз ворот Таврического дворца, созданный в конце XVIII в. архитектором Ф. И. Волковым. Особую воздушность придают воротам окружности, сплетенные в орнамент.

Торжественность и устремленность ввысь зданий достигается использованием арок, представляющих дуги окружностей (рис. 92). Окружности и дуги являются основными элементами готических храмов средневековья, делая их как бы летящими ввысь (рис. 93).



Рис. 92. К. Росси. Арка Главного штаба. С-Петербург

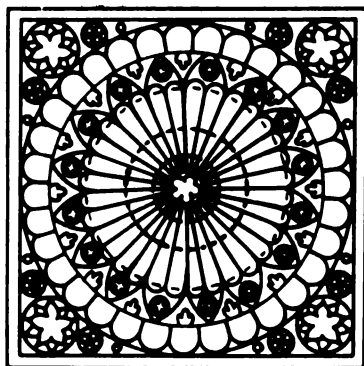


Рис. 93

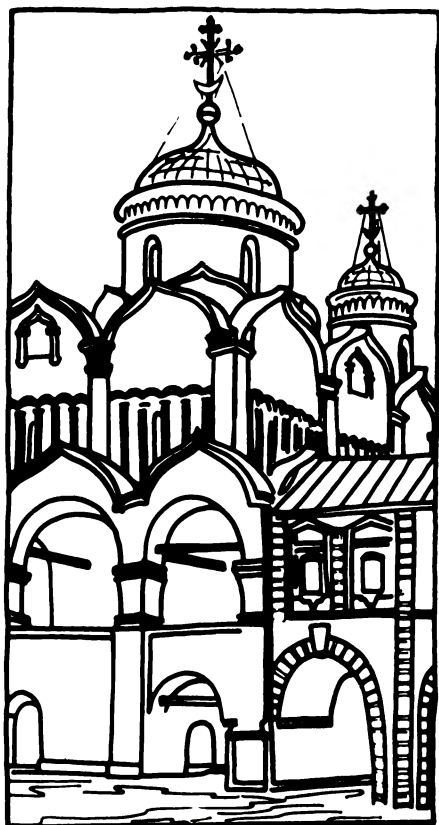
### Фрагмент фасада собора в Страсбурге

Архитектура Православных церквей как обязательные элементы включает в себя купола, арки, округлые своды, что зрительно увеличивает пространство, создает эффект полета, легкости (рис. 94).

В создании орнаментов с окружностями часто используются приемы деления окружности на равные части.

### ДЕЛЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ НА ЧАСТИ

Представим, что радиус окружности — это часовая стрелка на круглом циферблате часов. Отметим его начальное положение — 12 ч. В 3 ч угол между радиусом и его начальным положением равен  $90^\circ$ , в 6 ч —  $180^\circ$ , а за 12 ч радиус возвратится в исходное положение, описав угол  $360^\circ$ .



Суздаль.  
Покровский собор  
Рис. 94

Проведем в окружности три радиуса так, чтобы углы между ними были равны  $360^\circ/3 = 120^\circ$ . Эти радиусы разделят окружность на три равные части — дуги по  $120^\circ$ .



Соединив последовательно точки деления отрезками, получим треугольник, вписанный в окружность. Вписанный — значит все его вершины лежат на окружности.

Рассмотрите на рис. 95, как вписывается в окружность треугольник. Сделайте необходимые вычисления и впишите в окружность равносторонние (правильные) пятиугольник, шестиугольник и восьмиугольник. Затем соедините вершины так, чтобы получить пяти-, шести- и восьмиконечную звезды. Интересно, что



сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу окружности.

Можно по-разному объяснить этот факт. Например так.

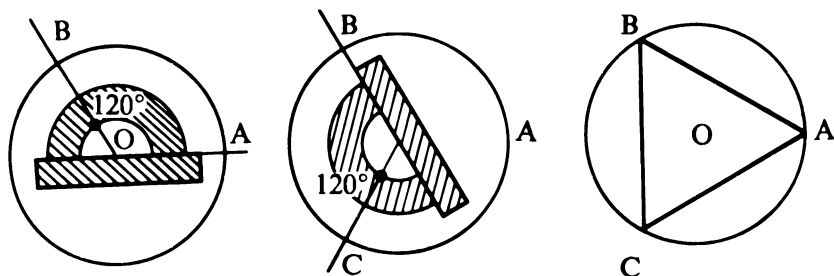


Рис. 95

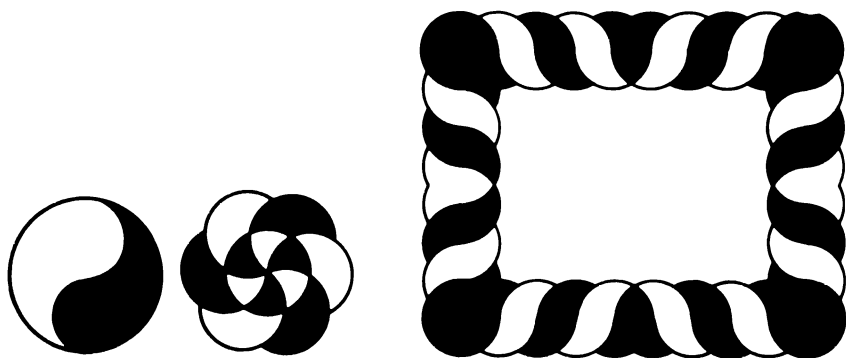


Рис. 96

Возьмем шесть правильных, равных между собой треугольников и расположим их рядом так, чтобы у них была общая вершина. Вместе они составят правильный шестиугольник. Общую вершину треугольников будем считать центром окружности с радиусом, равным стороне треугольника. Остальные вершины треугольников окажутся на окружности, т.е.



шестиугольник вписан в окружность и все его стороны равны радиусу этой окружности.

Зная это, можно вписывать в окружность правильные шестиугольники и треугольники без транспортира, по всем классическим правилам, пользуясь только циркулем и линейкой. Для этого достаточно циркулем, не меняя его раствора, разделить окружность на равные части, а затем точки деления соединить последовательно или через одну.

9. Вторая из изображенных на рис. 96 фигур есть «инь и янь» — знаменитый китайский символ равновесия темных и светлых сил в природе. Оказывается, проведя лишь одну линию, фигуру можно разделить на две равные части, причем на равные части будет разделена каждая из частей — черная и белая. Найдите эту линию.

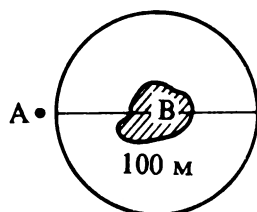


Рис. 97

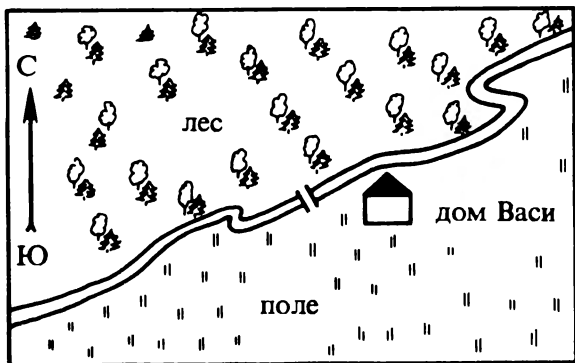


Рис. 98

Поскольку задача достаточно трудная, сделаем подсказку: нужная линия имеет ту же форму, что и граница, разделяющая черную и белую части.

10. Хозяйка, приведя козу на пастбище, вбила два колышка на расстоянии 10 м один от другого, натянула между колышками веревку с кольцом, а к кольцу привязала веревку длиной 5 м с козой. Нарисуйте образовавшееся пастбище.
11. На берегу глубокого озера круглой формы с диаметром 100 м вбит колышек А, в середине озера расположен остров, а в его центре колышек В (рис. 97). У человека, который не умеет плавать, есть веревка. Ее длина немного больше 100 м. Каким образом, используя веревку и колышки, он может перебраться на остров?
12. Имеется 17 шестеренок — первая зацеплена со второй, вторая с третьей, ..., последняя с первой. Может ли эта система вращаться?
13. Тяжелая платформа лежит на круглых бревнах. Задний конец платформы расположен в 5 м от последнего бревна. Платформу катят по бревнам. На сколько метров передвинется передняя часть платформы, когда задняя поравняется с последним бревном?
14. Васин дом расположен на берегу реки, с одной стороны которой лес, а с другой — поле. Вася знает, что по лесу он может передвигаться со скоростью 3 км/ч, а по полю — со скоростью 4 км/ч. Он взял карту своей местности (рис. 98; масштаб карты 1 : 100 000, что означает уменьшение всех настоящих размеров в 100 000 раз) и решил отметить на этой карте все точки, до которых он может дойти за 1 ч. Помогите ему сделать это. Считайте речку очень узкой и не учитывайте время на переход по мосту.

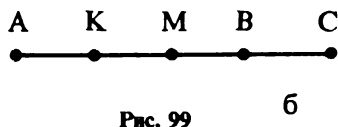
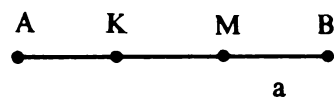


Рис. 99

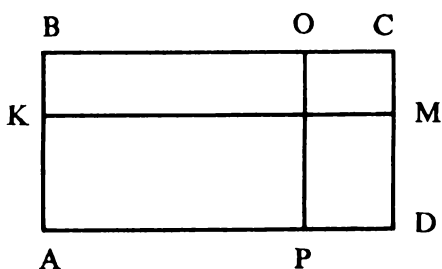


Рис. 100

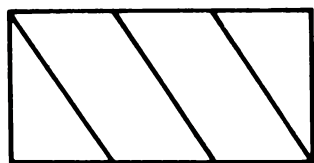


Рис. 101

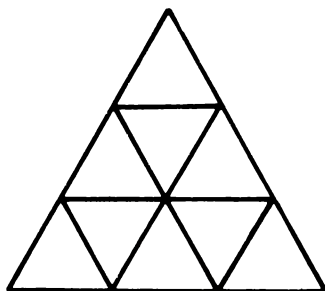


Рис. 102

## § 14. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ТРЕНИНГ

*В геометрии очень важно уметь смотреть и видеть, замечать различные особенности геометрических фигур, делать выводы из замеченных особенностей. Эти умения, которые вместе можно назвать «геометрическим зрением», необходимо постоянно тренировать и развивать.*

1. На отрезке взяты точки K и M (рис. 99, а). Сколько получили разных отрезков? На первый взгляд кажется, что их три: AK, KM и MB. Но если внимательно рассмотреть этот рисунок, то можно найти еще три отрезка: AM, KB и AB. Сколько отрезков изображено на рис. 99, б?
2. Прямоугольник ABCD (рис. 100) разделен на части прямыми KM и OP. Сколько получилось разных прямоугольников? Четыре? Нет! Найдите на этом рисунке девять прямоугольников.
3. Сколько четырехугольников на рис. 101?



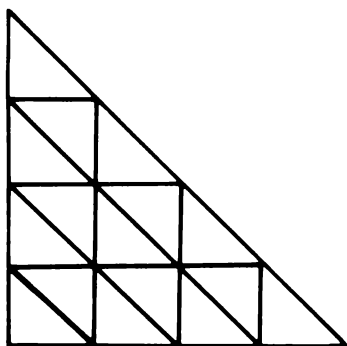


Рис. 103

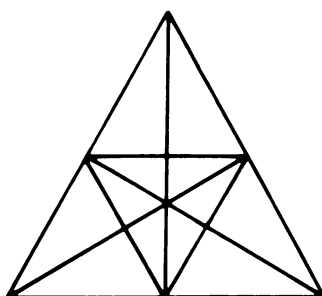


Рис. 104

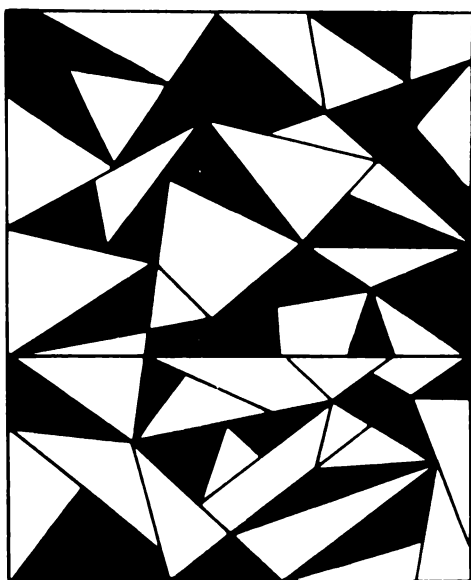


Рис. 105

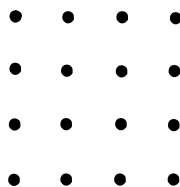


Рис. 106

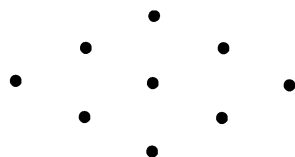


Рис. 107

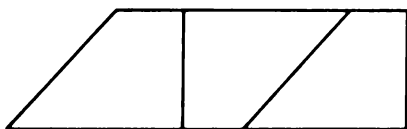


Рис. 108

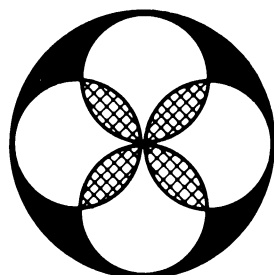


Рис. 109

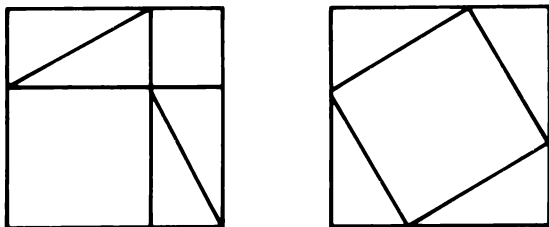


Рис. 110

4. Сколько треугольников на рис. 102?
5. Найдите 27 треугольников в фигуре на рис. 103.
6. Найдите 47 треугольников в фигуре на рис. 104.
7. Найдите звезду на рис. 105.
8. Сколько различных квадратов с вершинами в данных точках можно начертить на рис. 106?
9. Сколько различных равносторонних треугольников с вершинами в данных точках можно начертить на рис. 107?
10. Рис. 108 иллюстрирует доказательство того, что площадь параллелограмма равна площади некоторого прямоугольника. Постарайтесь сформулировать утверждение, которое следует из рис. 108.
11. Орнамент состоит из частей, изображенных на рис. 109. Соответствующие части окрашены в красный и синий цвета. Используя тот факт, что если радиус одного круга в два раза больше радиуса другого круга, то площадь первого в четыре раза больше второго, покажите, что для окраски этого орнамента потребуется равное количество красной и синей краски.
12. Рис. 110, а, б иллюстрируют самую известную и древнейшую теорему в геометрии — теорему Пифагора. Внимательно рассмотрите эти рисунки. Обратите внимание на треугольники и квадраты. Сравните площади заштрихованных квадратов. Что вы заметили? Может вы сумеете сами «открыть» эту великую теорему?

## §15. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЫТЫ

*ТОПОЛОГИЯ является одним из самых молодых разделов современной геометрии. Появилась она лишь в конце XIX в. Мы рассмотрим несколько топологических опытов с поверхностями, полученными из бумажной полоски примерно 30 см в длину и 3 см в ширину.*

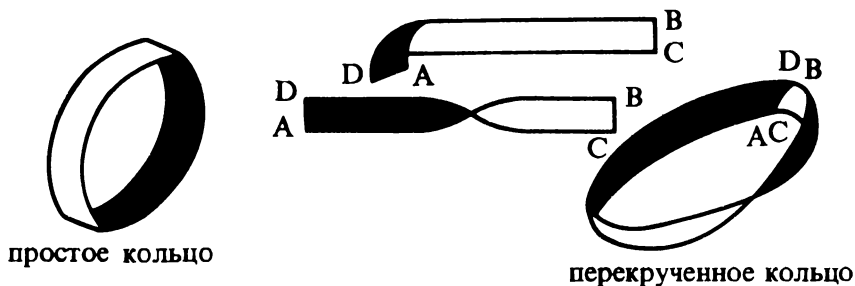


Рис. 111

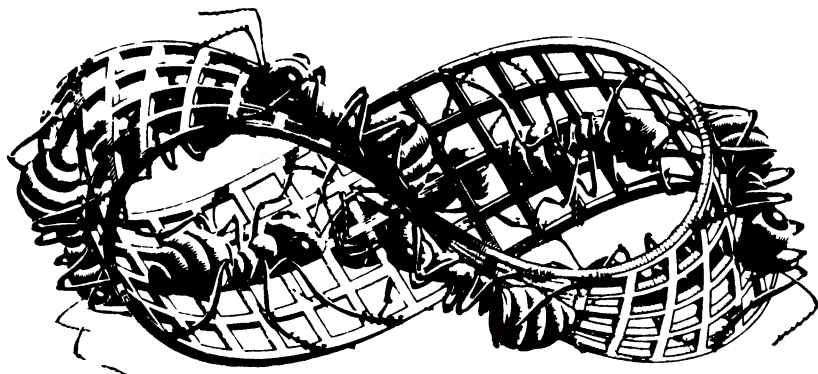


Рис. 112

Склейте два кольца: одно простое и одно перекрученное (рис. 111). Перекрученное кольцо получите так, как показано на рисунке. Представьте муравья, находящегося на поверхности простого кольца. Удастся ли муравью попасть на обратную, «изнаночную» сторону кольца, не переползая через край? Конечно же нет! А если муравей ползет по перекрученному кольцу (рис. 112)? Попробуйте провести непрерывную линию по одной из сторон перекрученного кольца (будем считать, что это путь муравья). Что вы получили?

Этот опыт провел в середине прошлого века немецкий астроном и геометр Август Мебиус. Он обнаружил, что на перекрученном кольце линия прошла по обеим сторонам, хотя его карандаш не отрывался от бумаги. Оказывается, у перекрученного кольца (впоследствии его назвали листом Мебиуса) имеется только одна сторона! Позже математики открыли еще целый ряд «одно-сторонних поверхностей». Но эта, самая первая, положившая начало целому направлению в геометрии, по-прежнему привлекает к себе внимание.

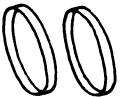

Опыты, которые мы предлагаем вам провести с листом Мёбиуса и подобными ему кольцами, продемонстрируют много интересных и неожиданных свойств.

## НЕСКОЛЬКО ПЕРЕКРУЧИВАНИЙ

Разрежьте простое кольцо ножницами вдоль (рис. 113). Что получилось?

Разрежьте перекрученное на пол-оборота кольцо (лист Мёбиуса) вдоль.

Продолжайте перекручивание полоски бумаги перед склеиванием, каждый раз увеличивая число полуоборотов на один. Разрежьте вдоль. Результаты запишите в таблицу.

Число полуоборотов	Результат разрезания	Свойства	Рисунок
0	2 кольца	длина окружности кольца та же, но кольцо в 2 раза уже	
1	1 кольцо	Кольцо перекручено на два полуоборота, его длина окружности в два раза больше и кольцо уже исходного	
2			
...			

## НЕСКОЛЬКО РАЗРЕЗОВ

Склейте лист Мебиуса шириной 5 см. Что получится, если разрезать его вдоль, отступив от края сначала на 1 см, затем на 2 см, на 3 см, на 4 см (рис. 114)?

## НЕСКОЛЬКО ЛЕНТ

Приготовьте два кольца: одно простое и одно перекрученное. Склейте их, как показано на рис. 115, а затем оба разрежьте вдоль. Каков результат разрезания?

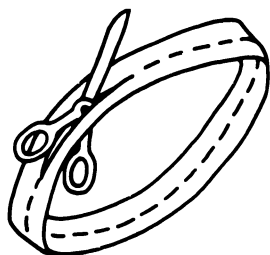


Рис. 113

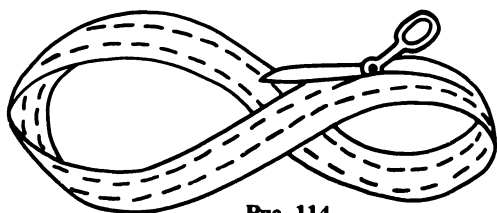


Рис. 114

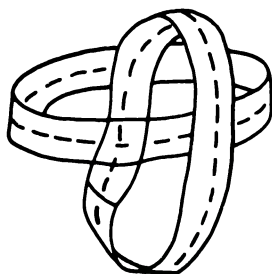


Рис. 115

### СОЛДАТИК-ПЕРЕВЕРТЫШ

Вырежьте из бумажного солдатика (рис. 116) и отправьте его вдоль пунктира, идущего посередине листа Мебиуса. В каком виде он вернется к месту старта?

Лист Мебиуса — один из объектов топологии. Интересно, что с точки зрения топологии гайка, макаронина и кружка — одинаковые объекты. Их роднит то, что каждый из них имеет одно и только одно отверстие. Если бы мы из пластилиновой гайки, не разрывая и не склеивая пластилин захотели вылепить макаронину или кружку, то нам бы это удалось. А вот кастрюльку с двумя ручками уже не вылепить (в ней две дырки-ручки). Придумайте еще несколько предметов, одинаковых с гайкой с точки зрения топологии. Перечислите несколько «топологических родственников» шара.

Среди букв русского алфавита тоже есть топологически одинаковые буквы. Представьте, что они сделаны из мягкой проволоки. Какие из букв можно преобразовать друг в друга, если не разрывать проволоку в местах соединений и не склеивать концы? Проволоку можно только гнуть и растягивать!

К топологическим относятся и задачи на вычерчивание фигур одним росчерком. В подобных задачах требуется начертить какую-либо фигуру, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя два раза по одной и той же линии.

Испытайте свои силы в вычерчивании одним росчерком фигур, изображенных на рис. 117. Какие-то из этих фигур вам удалось



Рис. 116

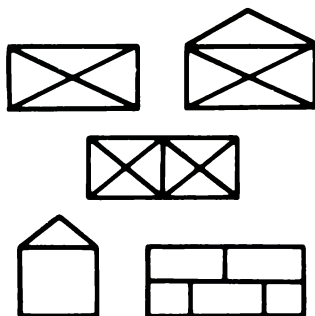


Рис. 117

вычертить почти сразу, решение других пришло через некоторое время, а третьи вообще не рисуются. Почему так происходит?

Давай разберемся вместе.

Начертите на бумаге связную сеть кривых, например, как на рис.118.

Сеть таких кривых называют **ГРАФОМ** (от слова grapho — пишу). Условимся точки, в которых соединяются кривые, называть **УЗЛАМИ**. На нашем графе пять узлов, причем три из них четные (первый, второй и третий — в них соединяется четное число линий), а два нечетные (четвертый и пятый — в них соединяется нечетное число линий). Эту фигуру можно начертить одним росчерком. А вот домик с дверью (рис. 119) — уже иная фигура. Она содержит девять узлов, пять из которых четные, а четыре — нечетные.

Если в фигуре (на графе) больше двух нечетных узлов, то ее нельзя нарисовать одним росчерком!

Покажем это на примере одной известной задачи — задачи о кенигсбергских мостах, которая положила начало **ЗАДАЧАМ НА ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ФИГУР ОДНИМ РОСЧЕРКОМ**. Город Кенигсберг был расположен на берегах и двух островах реки Преголь. Различные части города были соединены семью мостами (рис. 120). Совершая прогулки в воскресные дни, горожане заспорили: можно ли выбрать такой маршрут, чтобы пройти один и только один раз по каждому мосту и затем вернуться в начальную точку пути? Долго бы спорили жители города, если бы через Кенигсберг не проезжал Леонард Эйлер. Он заинтересовался спором и ... разрешил его. Возможно, он рассуждал примерно так.

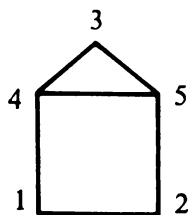


Рис. 118

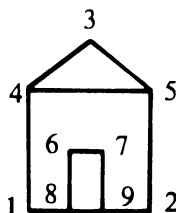


Рис. 119

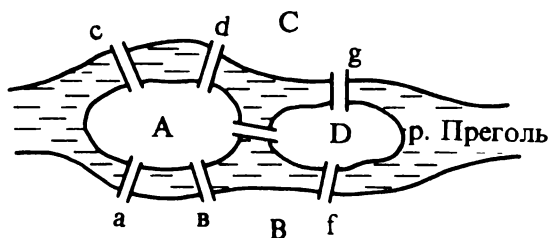


Рис. 120

К восточному острову (рис. 121) ведут три моста. Если прогулка начинается вне восточного острова, то, поскольку по каждому из трех мостов надо пройти один раз, кончаться она должна на этом же острове. (Это можно сравнить с выключением настольной лампы. Будем поочередно включать и выключать настольную лампу, вставляя вилку в розетку и вынимая ее. Если вначале вилка была вынута (света нет), то после трех таких операций вилка окажется в розетке и свет будет включен). К западному острову (рис. 122) ведут пять мостов, а 5, как и 3 — число нечетное. Отсюда следует, что, поскольку прогулка начинается вне западного острова, заканчивается она на западном острове.

Но и на южный, и на северный берег также ведут по три моста, и к ним применимо то же рассуждение. Итак, на каком бы из четырех участков суши не началась прогулка, закончиться она обязана одновременно на каждом из трех других участков. Но это значит, что «кенигсбергская прогулка» невозможна, так как нельзя ее закончить в нескольких местах сразу.

План города для решения этой задачи можно изобразить графом (рис. 123). На этом графе четыре узла (они соответствуют берегам C и B и островам A и D) и семь кривых, которые обозначают мосты a, b, c, d, e, f, g. Если бы существовал искомый маршрут, то эту сеть кривых можно было бы вычертить одним росчерком. Таким образом, задача об обходе мостов оказалась равносильной задаче о рисовании одним росчерком. А

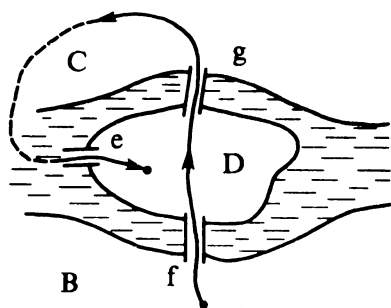


Рис. 121

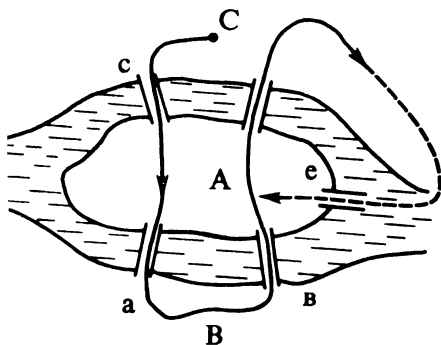


Рис. 122

решение задачи о мостах доказывает приведенное нами условие «одного росчерка».

1. Река разделяет город на четыре части, соединенные шестью мостами (рис. 124). Один турист решил обойти все мосты, побывав на каждом из них только один раз. Как это можно сделать, если не требовать обязательного возвращения в тот же район города, из которого начался обход?

2. Добавьте на рис. 124 еще один мост так, чтобы:

а) можно было совершить переход через все мосты из любой части города;

б) совсем нельзя было совершить переход через все мосты, побывав на каждом по одному разу.

Для решения преобразуйте план города в сеть кривых, как в задаче о «Кенигсбергских мостах».

3. Оса забралась в банку из-под сахара. Банка имеет форму куба. Сможет ли оса последовательно обойти все 12 ребер куба, не проходя дважды по одному ребру? Подпрыгивать и перелетать с места на место она не может.

4. Начертите фигуры (рис. 125) одним росчерком (пронумеруйте отрезки в той последовательности, в какой вы их проходили).

5. На рис. 126 изображен план подземного лабиринта (подвала из 16 комнат, соединенных дверьми). Можно ли, начиная с комнаты №1, обойти комнаты так, чтобы пройти через все двери всех комнат только один раз? В какой комнате закончится такой обход?

Указание. Замените комнаты точками, а двери — дугами и постройте соответствующий граф.

6. На рис. 127 изображен план подвала из десяти комнат. Можно ли пройти через все двери всех комнат, запирая



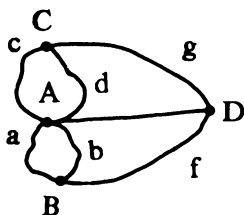


Рис. 123

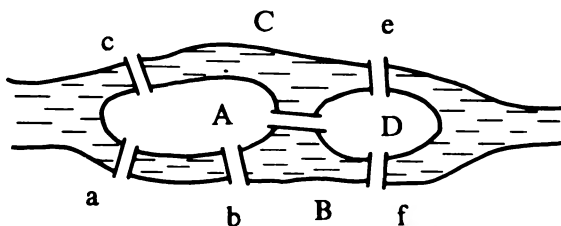


Рис. 124

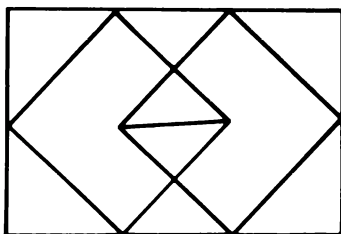
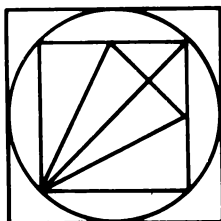


Рис. 125



каждый раз ту дверь, через которую вы проходите? С какой комнаты надо начинать движение?

7. Докажите, что число нечетных узлов графа всегда четно.

## § 16. ЗАДАЧИ СО СПИЧКАМИ

*Занимательные задачи со спичками хорошо известны и взрослым и детям. Для их решения нужны только смекалка, способность предвидеть результат и, пожалуй, хорошее воображение. Надеемся, что вы обладаете этими качествами. В работе над задачами можно использовать спички, счетные палочки или просто рисунок на бумаге.*

1. Положите 12 спичек так, чтобы получилось пять квадратов.
2. Из спичек сложена фигура, состоящая из девяти равных треугольников (рис. 128). Уберите пять спичек так, чтобы осталось пять треугольников. Как это сделать?
3. Возьмите ту же фигуру (рис. 128) и переложите шесть спичек так, чтобы получилась фигура, состоящая из шести равных четырехугольников.

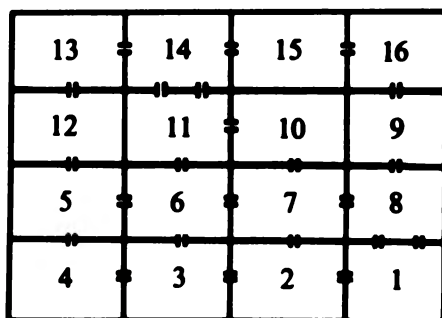


Рис. 126

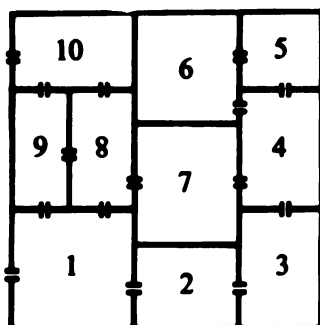


Рис. 127

4. Из спичек сложена фигура (рис. 129):
  - а) уберите четыре спички так, чтобы осталось пять квадратов;
  - б) уберите восемь спичек так, чтобы осталось два квадрата;
  - в) уберите шесть спичек так, чтобы осталось три квадрата.
5. Из спичек сложена фигура, состоящая из шести равносторонних треугольников (рис. 130). Переложите четыре спички так, чтобы получилось три равносторонних треугольника.
6. Расположите шесть спичек так, чтобы каждая спичка касалась всех остальных спичек.
7. Из десяти спичек выложите три квадрата. Затем уберите одну спичку и сделайте из оставшихся спичек один квадрат и два ромба.
8. Расположите три спички на столе так, чтобы их головки не касались ни стола, ни друг друга.
9. Восемь спичек уложите так, чтобы образовались один восьмиугольник, два квадрата и восемь треугольников — все в одной фигуре!
10. Переложите три спички так, чтобы рыбка (рис. 131) поплыла в противоположную сторону.
11. Дано 12 спичек. Примем каждую из них за единицу длины. Требуется выложить из 12 спичек такую фигуру, которая охватывала бы площадь в три квадратные единицы. Найдите несколько вариантов.
12. Переложите две спички так, чтобы корова повернулась в противоположную сторону (рис. 132).
13. Придумайте несколько задач со спичками и предложите решить их своим друзьям.

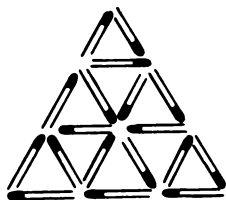


Рис. 128

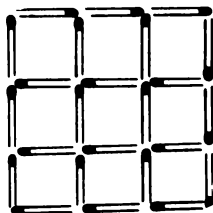


Рис. 129

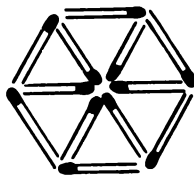


Рис. 130

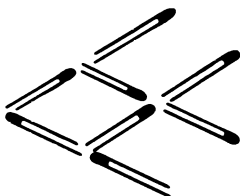


Рис. 131

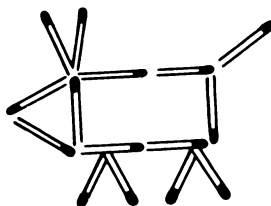


Рис. 132

## § 17. ЗАШИФРОВАННАЯ ПЕРЕПИСКА

*Играли ли вы когда-нибудь в разведчиков? В этой игре разведчик вынужден вести переписку со своими товарищами так, чтобы никто из посторонних не смог прочитать написанного. Для этого используют шифровки. Об одном из способов шифровки текста вы сейчас узнаете.*

### СПОСОБ РЕШЕТКИ

Из плотной бумаги вырежьте квадрат, разделите его на 64 квадратика и прорежьте окошечки (рис. 133).

Как пользоваться этой решеткой? Пусть необходимо передать следующее сообщение: «Наступление планируется 16 сентября пять утра. Внимание левому флангу. РВС.»

Наложив решетку на листок бумаги, пишут сообщение в окошечках решетки по букве. Сначала помещается всего 16 букв: наступление плани... Вот как они расположены (рис. 134, а).

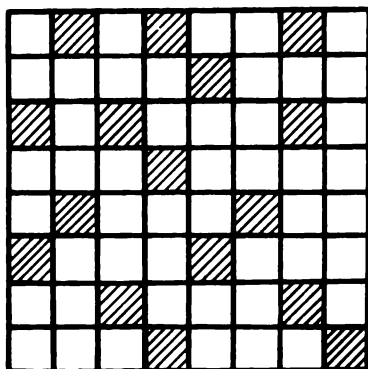
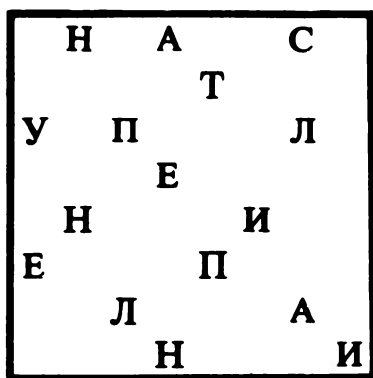


Рис. 133



а



б

Рис. 134

Затем поворачивают решетку по часовой стрелке на  $90^\circ$ . Все написанные буквы закрыты, в новые окошечки продолжают вписывать текст. Еще два поворота, и текст вписан. Если остаются неиспользованные клетки, их заполняют буквами а, б, в и т. д. (чтобы не было пробелов). Полностью письмо принимает вид, показанный на рис. 134, б. Его ни за что не прочтешь человеку, не имеющему шифровального квадрата. А читают так же (накладывая квадрат и поворачивая его по часовой стрелке на  $90^\circ$ ). После четвертого поворота текст становится ясен адресату.

Из объяснений понятно, что



способ шифровки основан на повороте квадрата вокруг его центра. Поворот — геометрическое преобразование фигур, при котором свойства фигур не меняются, может измениться лишь положение фигуры, так как каждая ее точка повернется вокруг некоторой точки на угол

1	2	3	4	13	9	5	1
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	6	5
1	5	9	13	4	3	2	1

Рис. 135

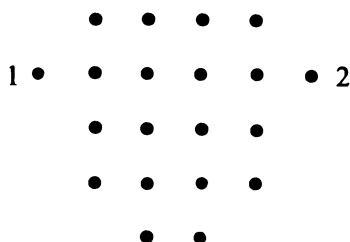


Рис. 136

поворота. Квадрат при повороте на  $90^\circ$  вокруг его центра займет исходное положение. Каждая же точка внутри квадрата при четырех поворотах на  $90^\circ$  занимает четыре разных положения. «Окошечки» решетки займут в процессе поворота четыре различных положения. Чтобы все клеточки 64-клеточного квадрата были заполнены буквами, должно быть  $64 : 4 = 16$  окошек.

Чтобы составить свою решетку, нужно разбить 64-клеточный квадрат на четыре области. В первой расставить числа от 1 до 16 в обычном порядке. Вторая область — это то же, что и первая, но повернутая по часовой стрелке на  $90^\circ$ . Повернув еще на  $90^\circ$ , получим заполнение третьей области. При последнем повороте получается заполнение четвертой области (рис. 135).

Затем выбирают для окошечек любые 16 клеток, заботясь лишь о том, чтобы в их числе не было клеток с одинаковыми номерами. Итак, решетка готова, можно приступать к шифровке!



**На 64-клеточном поле можно составить более 4 млрд. разных секретных решеток!**

Объясним этот факт или, как говорят математики, докажем его. Клетку № 1 можно взять в качестве окошка в четырех местах. В каждом случае можно присоединить клетку № 2, взяв ее также в четырех местах. Следовательно, два окошка можно наметить  $4 \times 4$ , т.е. 16 способами. Три окошка  $4 \times 4 \times 4 = 64$  способами. Рассуждая таким образом, устанавливаем, что 16 окошек можно набрать  $4 \times 4 \times 4 \times \dots \times 4$  раз (произведение 16 четверок). Число это превышает 4 миллиарда. Если считать расчет преувеличенным в несколько раз (так как неудобно пользоваться решетками с примыкающими друг к другу окошками, и эти случаи надо исключить), то все же остается несколько сотен миллионов различных решеток. Попробуйте отыскать ту, которая требуется!

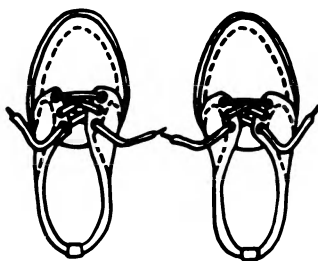


Рис. 137

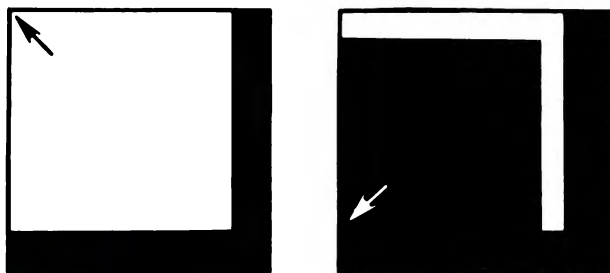


Рис. 138

## § 18. ЗАДАЧИ, ГОЛОВОЛОМКИ, ИГРЫ

---

*Великий итальянский ученый Галилео Галилей однажды сказал: «Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать».*

---

1. Расставьте 12 стульев в комнате так, чтобы:
  - а) в двух рядах было по четыре стула, а в одном — шесть;
  - б) у каждой из четырех стен было по четыре стула;
  - в) два стула стояли посередине комнаты, а остальные — вдоль четырех стен поровну.
2. Расставьте десять стульев так, чтобы у каждой стены комнаты стояло по три стула.
3. В доску вбито 20 гвоздиков (рис. 136). Расстояние между соседними равно 1 см. Натяните нитку длиной 19 см от первого гвоздика до второго так, чтобы она прошла через все гвоздики.
4. Как выглядит шнуровка туфель (рис. 137) изнутри? Ответ неоднозначен.

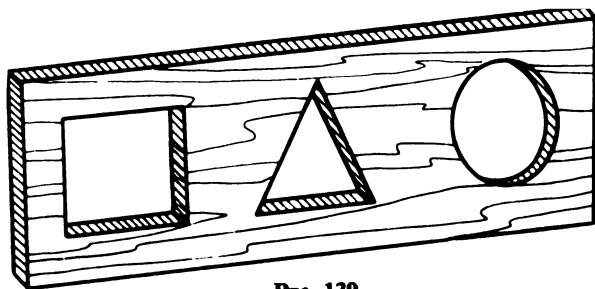


Рис. 139



Рис. 140

5. При решении этой головоломки не разрешается делать какие-либо рисунки и манипулировать объектами. У нас есть 10 квадратных карточек со сторонами 10, 9, 8, 7, ..., 1. Карточки, стороны которых четны, покрашены в черный цвет, а остальные — в белый. Выложим на стол самую большую карточку, т.е. черную со стороной 10. Затем на нее положим карточку со стороной 9, но не по центру, а как показано на рис. 138 (в левом верхнем углу). На нее (в левый нижний угол) положим черную карточку со стороной 8. Потом на нее кладем следующую по размеру карточку (в правый нижний угол). Продолжаем далее этот процесс, причем положения карточек «закручиваются» внутрь против часовой стрелки. Какой черно-белый рисунок получится после того, как мы выложим последнюю карточку? Дайте полное описание этого рисунка. Можно проверить себя, вырезав десять таких квадратов или нарисовав их в тетради.
6. Дана дощечка с тремя отверстиями: квадратным, круглым и треугольным (рис. 139). Может ли существовать одна затычка такой формы, чтобы закрывать все эти отверстия?
7. Присмотритесь к следующим пятнам (рис. 140). Что нарисовано на этой картинке?
8. Очень сложная замкнутая линия ограничивает на плоскости некоторую область. Намечая на чертеже ту или иную точку, требуется по возможности быстро определить, где (внутри или вне этой области) лежит данная точка (рис. 141).
9. Расставьте 24 стула так, чтобы они стояли в шесть рядов по пять стульев в каждом ряду.
10. Сколькими способами можно прочитать слово «шалаш», двигаясь по прямым, кривым и ломаным дорожкам (рис. 142), если начальная и конечная буква «ш» не должны совпадать?
11. Используя игру «Танграм», сложите фигуры, показанные на рис. 143.

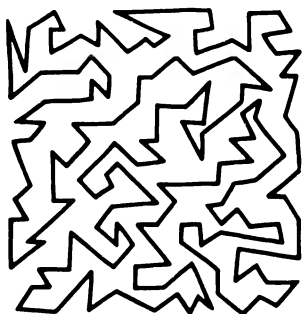


Рис. 141

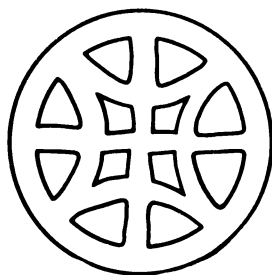


Рис. 142

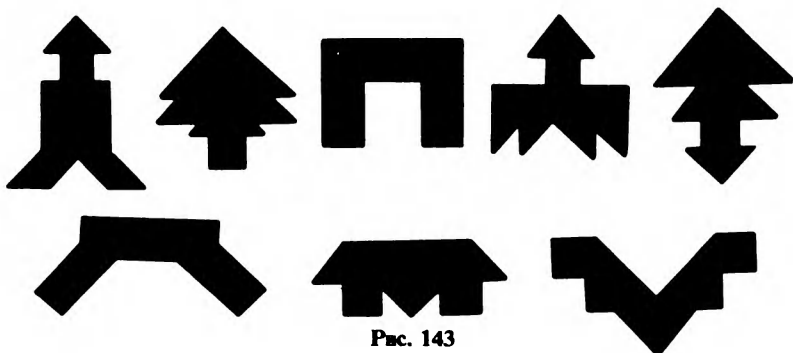


Рис. 143

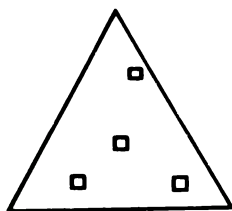


Рис. 144

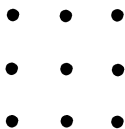


Рис. 145

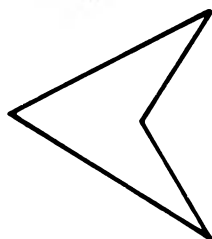


Рис. 146

12. Участок с четырьмя колодцами, имеющий форму правильного треугольника (рис. 144), надо разделить на такие участки, чтобы они были одинаковы по форме, равны по площади и чтобы на каждом из них было по колодцу. Как это сделать?
13. Как четырьмя прямыми линиями, не отрывая карандаш от бумаги, перечеркнуть девять точек, расположенных так, как показано на рис. 145?
14. Изображенную на рис. 146 фигуру разделите на шесть частей двумя прямыми.
15. Дан прямоугольник, ширина которого в два раза меньше длины. Разрежьте этот прямоугольник:



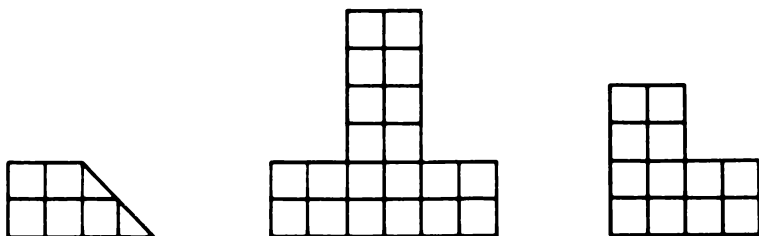


Рис. 147

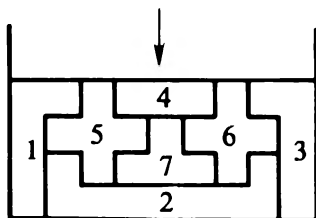


Рис. 148

- а) на две части так, чтобы из них можно было составить прямоугольный треугольник;
  - б) на две части так, чтобы из них можно было составить равнобедренный треугольник;
  - в) на три части так, чтобы из них можно было составить квадрат.
16. Разрежьте каждую из фигур, изображенных на рис. 147, на четыре равные части.
  17. Возьмите две монетки: пятикопеечную и двухкопеечную. Обведите на листе бумаги двухкопеечную монетку и аккуратно вырежьте кружок. Как вы думаете, пройдет ли пятикопеечная монета сквозь отверстие?
  18. Детали 1 — 7 вдвинуты в футляр (рис. 148) сверху. Каждая из них двигалась строго по вертикали. В какой последовательности производилась укладка?
  19. Для того чтобы сделать бумажную трубочку, мы отрываем полоску от газеты. При этом один край остается ровным, а другой будет рваным. Затем мы начинаем скручивать полоску с одного из углов. Допустим, мы хотим спрятать рваный край. С какого угла нужно начинать? Попробуйте, не пользуясь бумагой, ответить на вопрос: к какому из указанных на рис. 149 результатов приведет каждый из способов а) и б)?
  20. Возьмите набор геометрических тел (куб, шар, пирамиду, конус, цилиндр и др.) и каких-либо предметов (книгу, ручку и др.). Эти предметы расположите на столе так, чтобы,

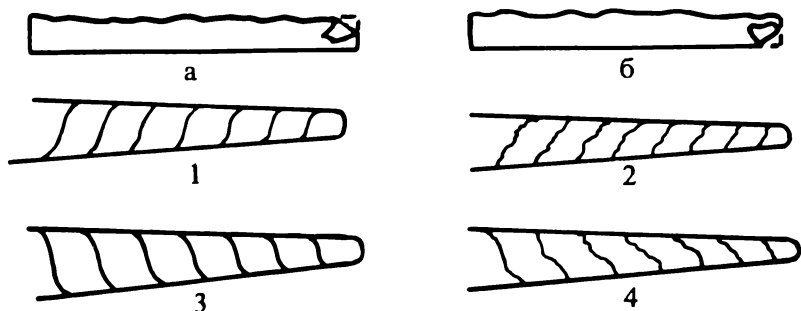


Рис. 149



Рис. 150

глядя на них из некоторой точки, можно было догадаться, как выглядит эта группа предметов с противоположной стороны (т.е. не должно быть предметов, полностью скрытых от наблюдателя). Учащиеся становятся попарно лицом друг к другу, и один из них вслух описывает, как видит эту композицию его товарищ с противоположной стороны. Другой ученик, видя предметы, контролирует и оценивает ответ. Затем описывает второй ученик. Выигрывает тот, кто подробнее и без ошибок смог описать расположение предметов. Устное описание можно заменить рисованием.

21. Уберите на рис. 106 несколько точек так, чтобы из оставшихся **никакие** четыре не являлись вершинами квадрата. Постарайтесь достичь этого, убрав как можно меньше точек.
22. Уберите несколько точек на рис. 107 так, чтобы из оставшихся **никакие** три не являлись вершинами равностороннего треугольника. Постарайтесь достичь этого, убрав как можно меньше точек.
23. Концы веревки завязаны в виде петель (рис. 150). Эти **петли** одеваются на левую и правую руки. Как завязать на веревке узел, не снимая петлю с рук?
24. Рис. 151 служит иллюстрацией к известной басне Крылова. Какая это басня и какая строка ее здесь проиллюстрирована?
25. Рис. 152 служит иллюстрацией к сказке Милна «Винни Пух и все, все, все». Что здесь изображено?
26. Ученики одной из московских школ совершили автобусную экскурсию в г. Волоколамск. Вернувшись с экскурсии, один из школьников нарисовал картинку (рис. 153). Куда на этой картинке едет автобус — в Москву или Волоколамск?



Рис. 151

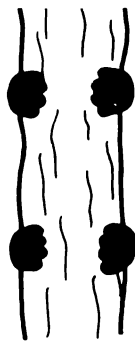


Рис. 152



Рис. 153

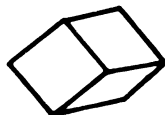
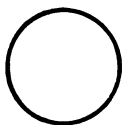
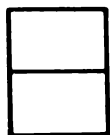


Рис. 154

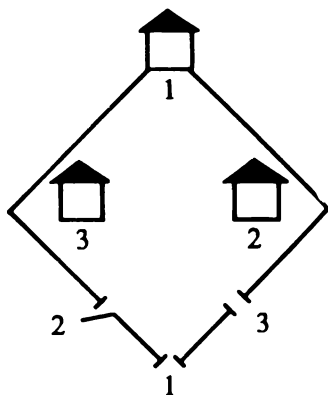


Рис. 155

27. На рис. 154 изображены некоторые геометрические тела. Возможно, точка зрения не очень привычна. Какие тела, если на них посмотреть с соответствующей стороны, могут выглядеть как на рисунке? Какие из рисунков могут соответствовать одному и тому же телу?
28. На квадратном участке расположены три дома (рис. 155), а в ограде сделаны три калитки. От каждой калитки проложена дорожка к домику с тем же номером, причем эти дорожки не пересекаются. Как проходят эти дорожки?
29. ИГРА СО СПИЧКАМИ. На столе, вокруг которого сидят участники, кладут по одной коробке спичек на каждого участника. На середину стола кладется последовательность фигур (рис. 156). Каждый из играющих складывает первую из нарисованных фигур, затем по команде ведущего нужно одной спичкой передвинуть спички первой фигуры так, чтобы

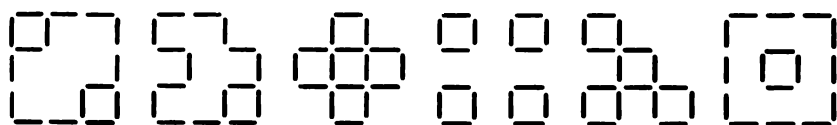


Рис. 156

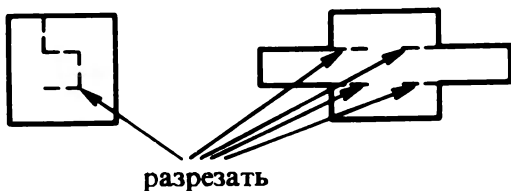
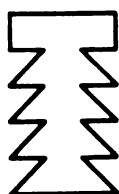


Рис. 157

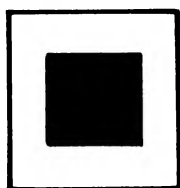


Рис. 158

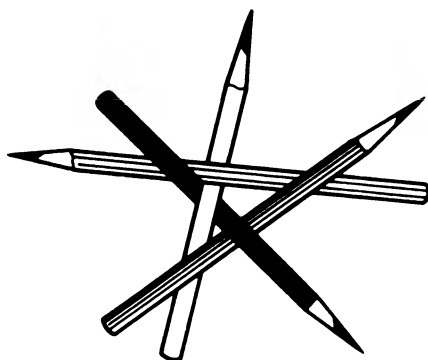


Рис. 159

получить вторую, третью,.... Выигрывает тот, кто перемещение спичек закончит быстрее, получив при этом последнюю фигуру.

30. На рис. 157 даны три выкройки. Свернуть из них кубы так, чтобы кубы были со всех сторон закрыты.
31. Квадрат с вырезанным круглым отверстием легко разрезать на четыре равные части. А можно ли разрезать квадрат на пять равных частей, если эта четвертушка не вырезана (рис. 158)?
32. Можно ли переплести карандаши так, как показано на рис. 159?
33. Рис. 160 иллюстрирует еще одно наглядное «доказательство» того, что сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ . Внимательно рассмотрите рисунок и предложите по нему свое объяснение этого важнейшего свойства треугольников.

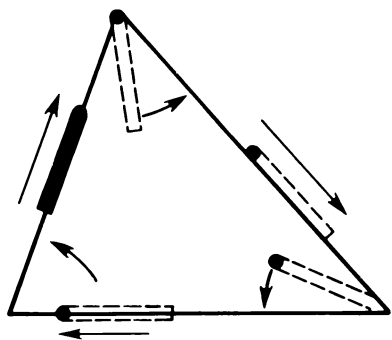


Рис. 160



Рис. 161

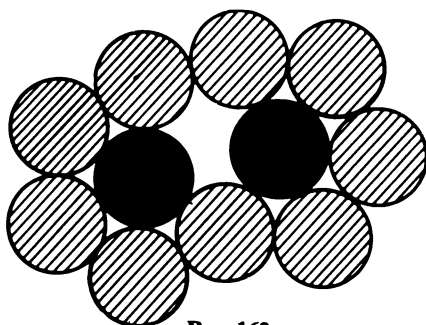


Рис. 162

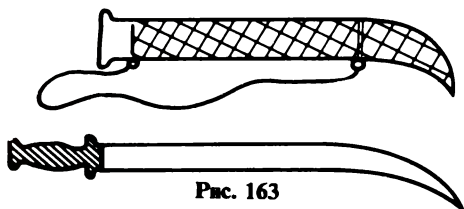


Рис. 163

34. На рис. 161 изображены три домика, колодец, навес и погреб. Провести от каждого домика по одной тропинке к колодцу, навесу и погребу так, чтобы ни одна из этих девяти тропинок не пересекалась с другой (или доказать, что это невозможно).
35. Одиннадцать кружочков расположены на плоскости так, как показано на рис. 162. Можно ли раскрасить их тремя красками так, чтобы никакие два соседних (касающихся друг друга) кружочка не были одного цвета? Ответ обоснуйте.
36. Посетив Исторический музей, Витя решил нарисовать саблю и ножны. Вот что у него получилось (рис. 163). Все ли верно в его рисунке, нет ли ошибки?

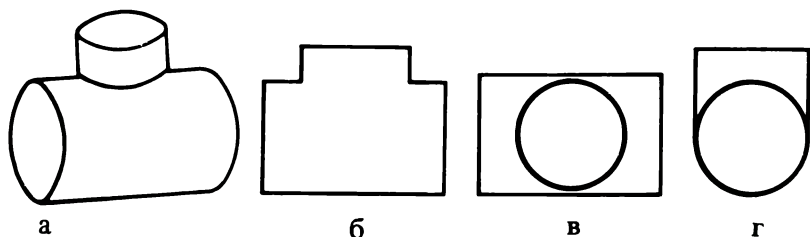


Рис. 164

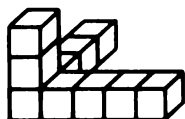
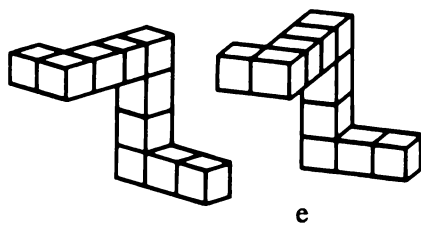
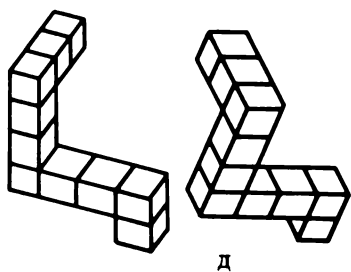
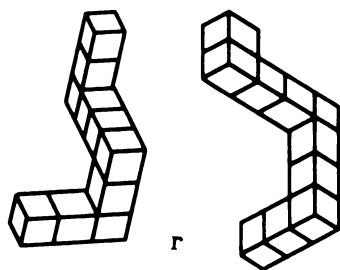
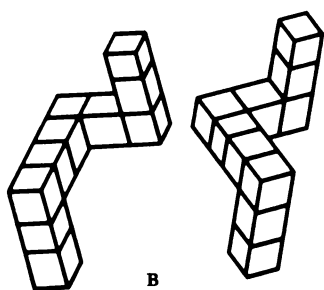
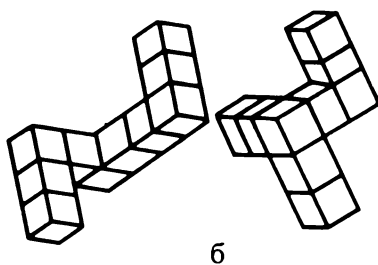
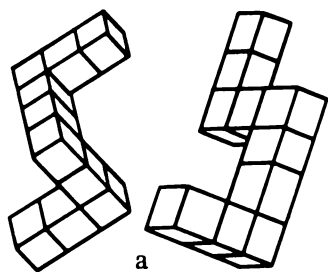
## § 19. ФИГУРКИ ИЗ КУБИКОВ И ИХ ЧАСТЕЙ

*Изображение пространственных фигур на плоскости — дело непростое. Ведь надо нарисовать ее, чтобы ясно было, как она выглядит со всех сторон. Для облегчения этой задачи изобрели МЕТОД ТРЕХ ПРОЕКЦИЙ. Этим методом пользуются чертежники, инженеры, рабочие для изображения и изготовления различных деталей.*

В чем состоит метод трех проекций? Мы смотрим на фигуру (или некоторую деталь) с трех сторон: спереди, сверху и слева. Каждый раз нам видна только одна грань. Ее-то мы и вычерчиваем. Пусть, например, из куба вырезана замысловатая деталь (рис. 164, а). Чтобы токарь выточил нам ее, мы дадим ему не сам рисунок, а именно три проекции этой детали: вид спереди (рис. 164, б), сверху (рис. 164, в) и слева (рис. 164, г). Рабочий внимательно рассмотрит эти проекции и поймет, какой должна быть деталь.

На первый взгляд, это очень трудно, но следующие задания помогут вам овладеть этим методом. При выполнении заданий можно использовать такой прием: внимательно рассмотрите изображение фигуры, потом закройте глаза и представьте ее. Если сразу не получается, попробуйте еще и еще, пока вы ее ясно не «увидите». Когда вы научитесь это делать, постарайтесь мысленно поворачивать фигуру, как бы рассматривая ее со всех сторон. Иногда бывает полезно также найти какой-нибудь характерный признак у одной из фигур и проверить его наличие у другой.

1. Определите, один и тот же объект изображен на рис. 165, а—ж или нет? Постарайтесь объяснить, что значит ОДИНАКОВЫЕ (равные) объекты, а что значит РАЗНЫЕ. Что общего у всех фигур, изображенных на рис. 165?



ж

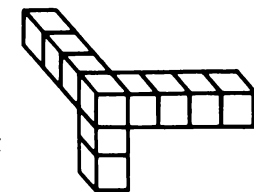
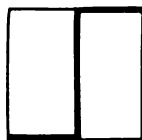
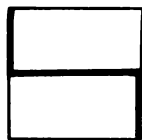
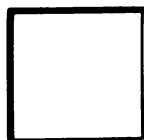
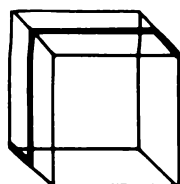


Рис. 165



а) общий вид б) вид спереди в) вид сверху г) вид слева

Рис. 166

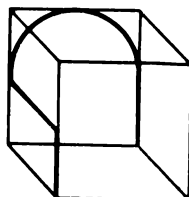
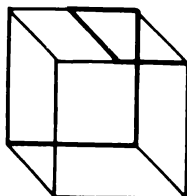
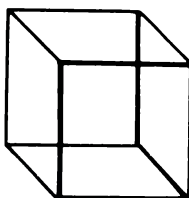
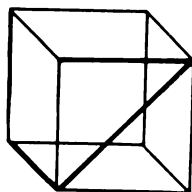
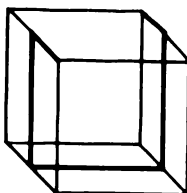
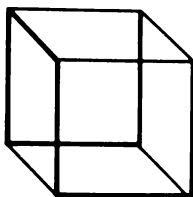


Рис. 167

2. По поверхности стеклянного куба проходит ломаная линия, сделанная из толстой проволоки (рис. 166, а). Глядя на куб спереди, сверху и слева, мы видим, как располагается эта проволока, и можем изобразить три ее проекции. Вид спереди похож на букву Г, сверху — на Ч без половины вертикальной палочки, а слева — на стилизованную латинскую S (рис. 166, б, в, г). Рассмотрите, какие ломаные и кривые линии даны на рис. 167 и начертите в каждом случае три проекции (вид спереди, сверху и слева).
3. Обратное задание: даны проекции ломаных спереди, сверху и слева (рис. 168). Тонким карандашом нарисуйте стеклянный куб, а на его поверхности проволоку, из которой сделаны эти ломаные (общий вид, как на рис. 166, а).
4. На рис. 169 (1—8, А—З) показаны восемь кубов, разрезанных на две части. Первые части 1—8, вторые А—З. Для каждой из частей 1—8 найдите ее пару среди А—З.
5. Мальчик построил из кубиков здание. На рис. 170 показано, как это здание выглядит спереди и слева. Какое наименьшее и наибольшее число кубиков потребуется для постройки?



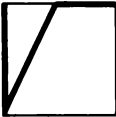
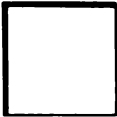
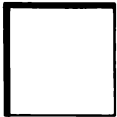

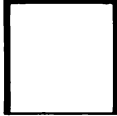
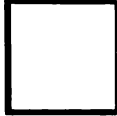


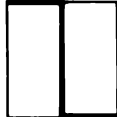
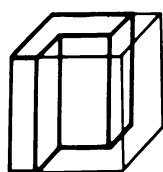
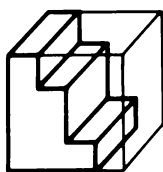
	вид спереди	вид сверху	вид слева
1			
2			
3			

Рис. 168

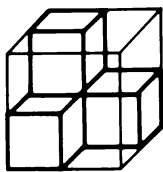
6. Известно, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести одну плоскость. На рис. 171 дано изображение куба, на поверхности которого указаны три точки. Постройте фигуру (сечение), по которой плоскость, проходящая через указанные точки, пересечет куб.  
Задача 6 похожа на разрезание хлеба: ножом мы тоже проводим некоторые плоскости и получаем в разрезе фигуры сечения.
7. Как провести плоскость, чтобы получить квадратное сечение куба?
8. Какой формы получится сечение куба, если плоскость провести по диагонали, т.е. через четыре противоположные вершины? Объясните ответ.
9. Какие многоугольники могут получиться при пересечении куба плоскостью? Если ответить на этот вопрос трудно, проведите эксперимент: вылепите из пластилина кубик и, выбирая различные направления, разрежьте его на две части ножом.
10. Изобразите три тела, вырезанных из кубика девятью способами так, как показано в нижней части рис. 172.



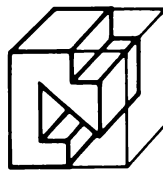
1



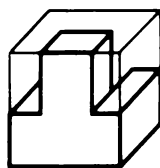
2



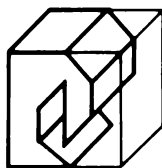
3



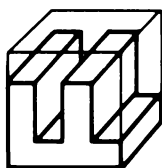
4



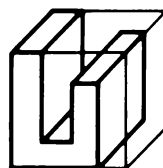
5



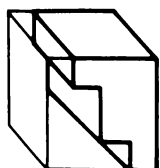
6



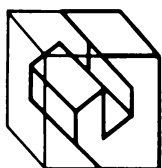
7



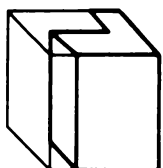
8



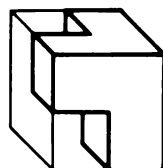
а



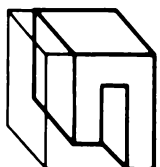
б



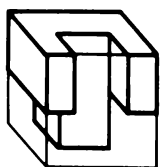
в



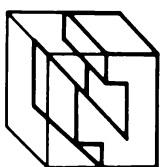
г



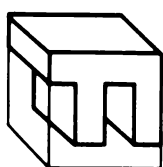
д



е

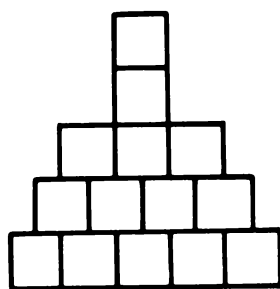


ж

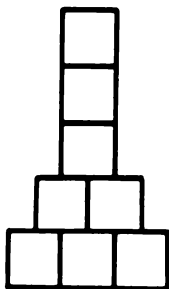


з

Рис. 169



Вид спереди



Вид слева

Рис. 170

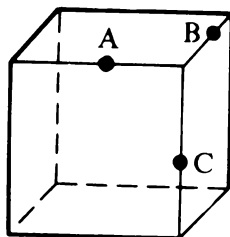
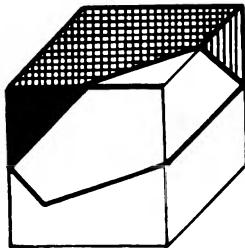
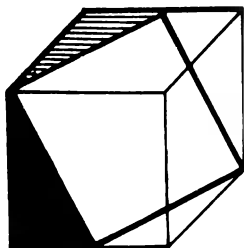
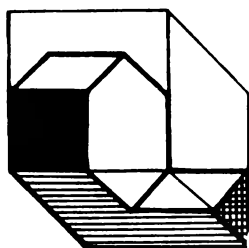


Рис. 171



Образец решения

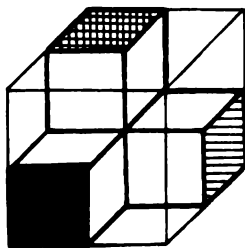
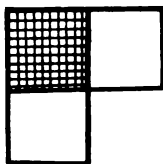
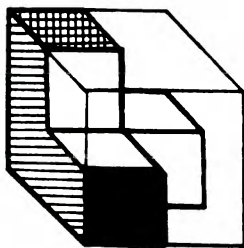
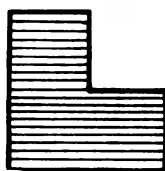
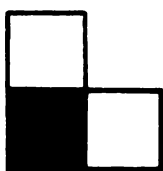
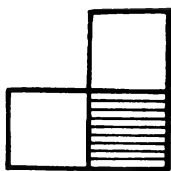
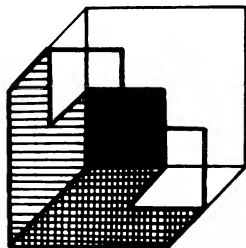
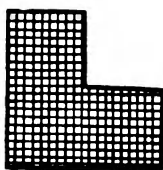
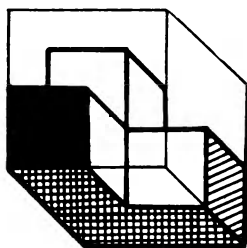


Рис. 172

11. Сколько различных фигур можно построить из трех кубиков, соединя два соседних кубика только по граням? А из четырех кубов?

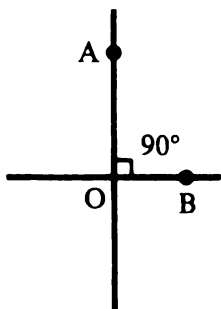


Рис. 173

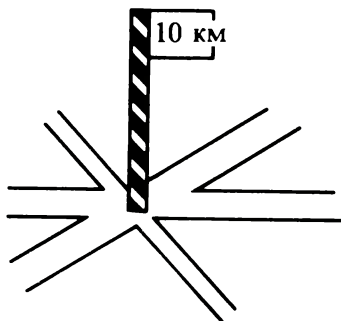


Рис. 174

## § 20. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ

*Параллельные и перпендикулярные прямые играют очень большую роль в жизни человека: особенности их взаимного расположения используют в строительстве, технике, искусстве. Теория параллельных занимает одно из центральных мест в науке «геометрия». Именно свойства параллельных прямых определяют основные свойства изучаемой нами плоскости.*

Рассматривая основные геометрические фигуры, среди всех углов мы выделили прямой угол, равный  $90^\circ$ . Сейчас мы опять вернемся к нему. Изобразим прямой угол и продолжим его стороны за вершину (рис. 173). Мы получили две прямые, пересекающиеся под прямым углом.

Две прямые, пересекающиеся под прямым углом (углом  $90^\circ$ ), называются **ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ**.

Перпендикулярные прямые обладают многими интересными свойствами.



1. Через точку вне данной прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную этой прямой и пересекающую ее.

2. Если точку взять на самой прямой, то через эту точку проходит бесконечное число прямых, перпендикулярных данной прямой.

Если начертить прямую в тетради, то одна из прямых будет лежать в плоскости тетради, а все остальные «прокалывать» тетрадь в данной точке. Они будут находиться в пространстве (вне плоскости листа; это похоже на дорожный столб, стоящий на перекрестке дорог: столб перпендикулярен каждой дороге; рис. 174).

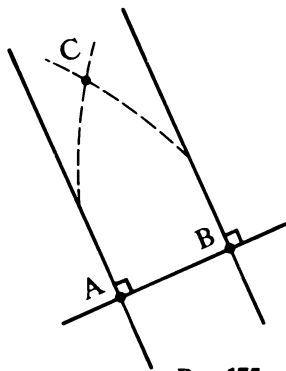


Рис. 175



3. Две прямые, перпендикулярные на плоскости третьей прямой, не могут пересечься друг с другом (рис. 175). Если бы они пересеклись, например, в точке  $C$ , то мы получили бы треугольник  $ABC$ , у которого два прямых угла, что невозможно (см. § 7). На плоскости такого не может быть, а на сфере — явление обычное.

Вспомните экватор и меридианы. Они перпендикулярны друг к другу, но все меридианы пересекаются в одной точке — на ПОЛЮСЕ.

Но вернемся к плоскости. Итак, свойство 3 говорит о том, что на плоскости существуют непересекающиеся прямые.

Две прямые на плоскости называются ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ, если они не пересекаются.

Используя линейку и чертежный треугольник, можно без труда вычерчивать параллельные прямые (рис. 176). Передвигая, как показано на рисунке, треугольник вдоль неподвижной линейки, получаем множество параллельных между собой прямых. На рисунке прямые  $m$  и  $n$  параллельны. Этот факт записывается сокращенно с помощью значка  $||$ :  $m || n$ . (Так и читаем:  $m$  параллельна  $n$ ). Выбор именно такого знака достаточно понятен, не так ли?

У обычного чертежного треугольника один угол прямой. В этом случае с его помощью можно проводить прямые, перпендикулярные данной прямой (рис. 177). Или, как говорят, опускать на данную прямую перпендикуляры или восставлять к ней перпендикуляры. То, что прямые  $m$  и  $n$  перпендикулярны, записывается с помощью знака  $\perp$ :  $m \perp n$ .

С помощью циркуля и линейки также можно строить параллельные и перпендикулярные прямые. Предлагаемые ниже способы построения интересны и тем, что число проводимых при построении линий будет самым маленьким из возможных.

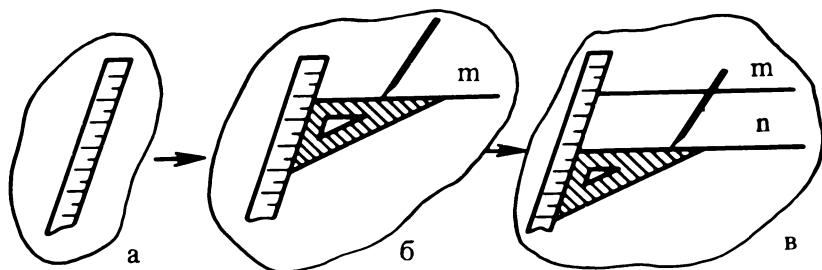


Рис. 176

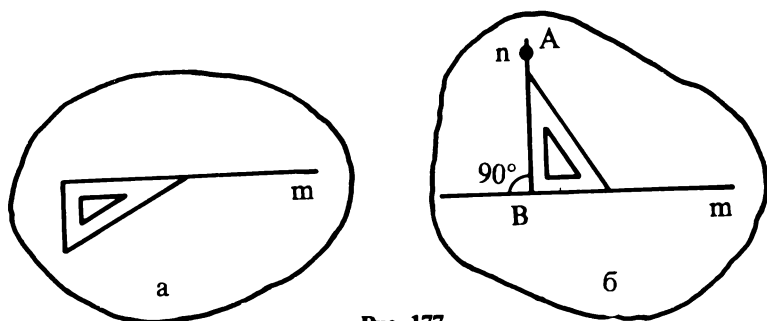


Рис. 177

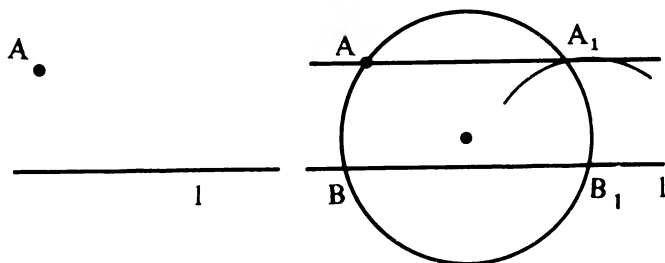


Рис. 178

## ПРОВЕДЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

Пусть проведена прямая  $l$  и дана точка  $A$  вне этой прямой (рис. 178).

1. Проведем через точку  $A$  любую окружность, пересекающую прямую  $l$ .
2. Возьмем одну из точек пересечения окружности с прямой — точку  $B$ , измерим циркулем отрезок  $AB$  и с центром в точке  $B_1$  нарисует окружность радиусом, равным  $AB$ . Появится точка  $A_1$ .
3. Прямая, проходящая через  $A$  и  $A_1$ , параллельна прямой  $l$ .

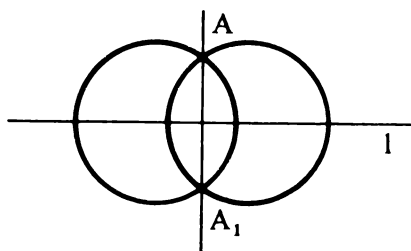


Рис. 179

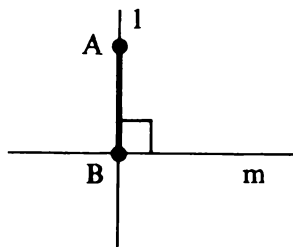


Рис. 180

## ПРОВЕДЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ПРЯМОЙ

Пусть проведена прямая  $l$  и дана точка  $A$  вне этой прямой. Для построения перпендикуляра достаточно с помощью циркуля провести через  $A$  две окружности с центрами на прямой  $l$  (рис. 179). Вторая точка пересечения этих окружностей (точка  $A_1$ ) и даст нам вторую точку на перпендикуляре.

Подумайте, как провести перпендикуляр (с помощью циркуля и линейки), если точка  $A$  лежит на прямой  $l$ .

Следует запомнить еще одно важное свойство перпендикуляра.



Если  $A$  — точка на прямой  $l$ , а  $B$  — точка пересечения перпендикулярных прямых  $l$  и  $m$  (рис. 180), то отрезок  $AB$  есть кратчайшее расстояние от точки  $A$  до прямой  $m$ . Итак, если мы хотим из точки  $A$  по кратчайшему пути попасть на прямую  $m$ , то двигаться надо по перпендикуляру к  $m$ .

Мы все время говорили: «параллельные прямые», «перпендикулярные прямые». Понятно, что на практике мы имеем дело не с прямыми, а лишь с их частями — отрезками, лежащими на этих прямых. Отрезки, лежащие на параллельных прямых, также называются **ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ**, а на перпендикулярных — **ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ**.

Примеры параллельных и перпендикулярных отрезков в пространстве — ребра куба. На рис. 181 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Три четверки его ребер параллельны между собой. Вот одна из них:  $AB \parallel DC \parallel A_1 B_1 \parallel D_1 C_1$ . Назовите еще две четверки параллельных между собой ребер куба.

Ребро  $AA_1$  перпендикулярно ребрам  $AB$ ,  $A_1 B_1$ ,  $AD$  и  $A_1 D_1$ . Угол между ребром  $AA_1$  и каждым из этих ребер равен  $90^\circ$ . Назовите ребра, перпендикулярные: а) ребру  $CC_1$ ; б) ребру  $DC$ .

Ребра  $AA_1$  и  $BB_1$  куба лежат в одной плоскости — в плоскости передней грани; в этой же плоскости лежат и ребра  $AA_1$  и  $AB$ . Через ребра  $AA_1$  и  $CC_1$  также можно провести плоскость — плоскость  $AA_1 CC_1$  (диагональное сечение куба). А вот пара ребер

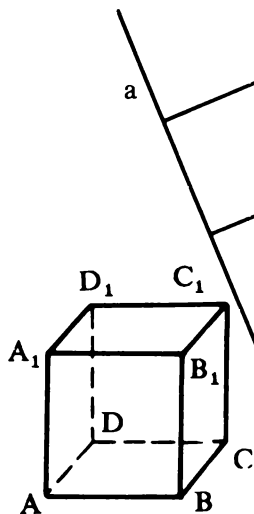


Рис. 181

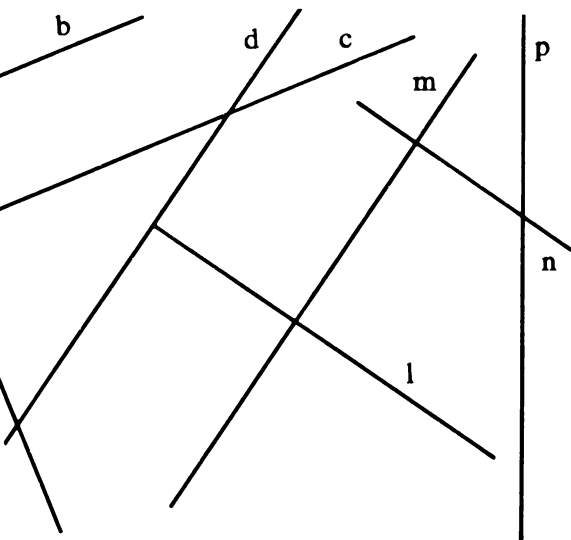


Рис. 182

$AA_1$  и  $D_1C_1$  особенная. Не существует плоскости, которая бы проходила через оба эти отрезка (а также прямые  $AA_1$  и  $D_1C_1$ ). Такие отрезки и прямые называются **СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ**.



Какую бы плоскость мы ни провели через  $AA_1$ , обязательно прямая  $D_1C_1$  либо пересечет ее в какой-либо точке, либо не пересечет никогда.

Найдите еще несколько пар скрещивающихся ребер куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$ .

1. Засеките время и постарайтесь за 10 мин привести как можно больше примеров параллельных и перпендикулярных прямых, встречающихся в окружающем нас мире. (Можно провести конкурс в классе или дома. Участники поочередно называют примеры таких прямых. Игра заканчивается, как только в течение минуты никто не может придумать новый пример. Побеждает тот, чей пример был последним.)
2. Найдите какие-либо отрезки с концами в вершинах куба на рис. 181 (не являющиеся его ребрами) такие, чтобы они были: а) параллельными; б) перпендикулярными; в) скрещивающимися.
3. Пользуясь линейкой, транспортиром и чертежным треугольником, найдите на рис. 182 пары параллельных и перпендикулярных прямых.
4. На рис. 183 изображены две параллельные прямые, пересекаемые третьей прямой. Известно, что угол 1 равен  $52^\circ$ . Чему равны остальные углы?



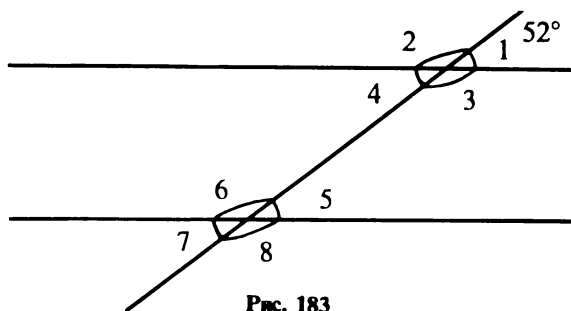


Рис. 183

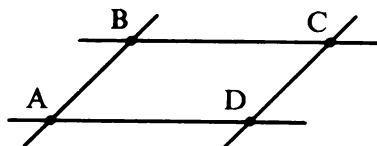


Рис. 184

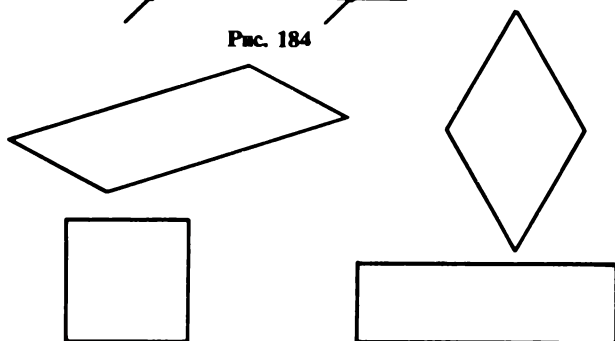


Рис. 185

## §21. ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ

*Параллелограмм — это красивое и звучное слово, напоминающее нам о единицах веса, на самом деле никакого отношения не имеющее к ним. Проведем две пары параллельных прямых как на рис. 184. Рассмотрим образовавшийся при этом четырехугольник ABCD. Его стороны попарно параллельны:  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel AD$ . Такой четырехугольник называется ПАРАЛЛЕЛОГРАММОМ.*

На рис.185 изображены разные параллелограммы. Да, да, не удивляйтесь, и ромб, и прямоугольник, и квадрат — тоже параллелограммы. Только это параллелограммы с некоторыми дополнительными свойствами.

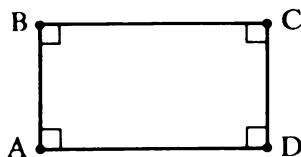


Рис. 186

**Ромб** — это параллелограмм, у которого все стороны равны!

**Прямоугольник** — это параллелограмм, у которого все углы прямые.

А действительно ли прямоугольник является параллелограммом? Верно ли, что  $AB \parallel CD$  и  $BC \parallel AD$  (рис. 186)?

Вспомним свойство трех перпендикулярных прямых (см. §19). Оно говорит о том, что два перпендикуляра к одной прямой параллельны между собой. В прямоугольнике  $ABCD$   $AB \perp AD$  и  $CD \perp AD$ . Значит,  $AB \parallel CD$ .

Но углы  $A$  и  $B$  тоже прямые, т.е.  $BC \perp AB$  и  $AD \perp AB$ . Значит, и  $BC \parallel AD$ . Получилось, что у прямоугольника стороны попарно параллельны. Следовательно, прямоугольник является параллелограммом.

**Квадрат** — очень интересный четырехугольник. Ему можно дать несколько определений.



1. У квадрата, как и у ромба, все стороны равны. Только еще все углы прямые. Значит, квадрат — это ромб с прямыми углами.

2. У квадрата, как и у прямоугольника, все углы прямые. Только еще все стороны равны. Значит, квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны.

3. У квадрата, как и у параллелограмма, стороны попарно параллельны. Только еще все они равны, и все углы прямые. Значит, квадрат — это параллелограмм с прямыми углами, все стороны которого равны.

У квадрата есть еще целый ряд интересных свойств. Так, например, если необходимо забором данной длины огородить четырехугольный участок наибольшей площади, то следует выбрать этот участок в виде квадрата.

Лучше изучить параллельные и перпендикулярные прямые и параллелограммы нам помогут опыты с листом бумаги.



Рис. 187

## ОПЫТЫ С ЛИСТОМ БУМАГИ

Отметьте на листе две точки А и В, а затем сложите лист так, чтобы А и В совпали. Как расположены друг относительно друга линия сгиба и прямая АВ?

Перегибанием листа бумаги получите пару параллельных и пару перпендикулярных прямых.

Из куска бумаги произвольной формы сложите и затем вырежьте прямоугольник. Покажите в нем параллельные и перпендикулярные стороны.

Сверните прямоугольник так, чтобы получился квадрат. Вырежьте этот квадрат и исследуйте его. Линия сгиба, проходящая через две противоположные вершины квадрата, называется **ДИАГОНАЛЬЮ КВАДРАТА**. Получите перегибанием две диагонали. Какие свойства вы можете отметить, используя только перегибы и наложения бумаги? Запишите эти свойства.

Если их отыскание вызывает затруднения, помочь может следующий план исследования.

1. Сравните диагонали по длине.
2. Как диагонали расположены относительно друг друга?
3. Как диагонали делятся точкой пересечения?
4. На какие фигуры делит квадрат каждая диагональ?
5. Какого вида эти фигуры?
6. Сравните их между собой.

Перегните квадрат пополам так, чтобы совпали две противоположные стороны. Через какую точку проходит линия сгиба? Как линия сгиба расположена относительно сторон квадрата? На какие фигуры она делит квадрат?

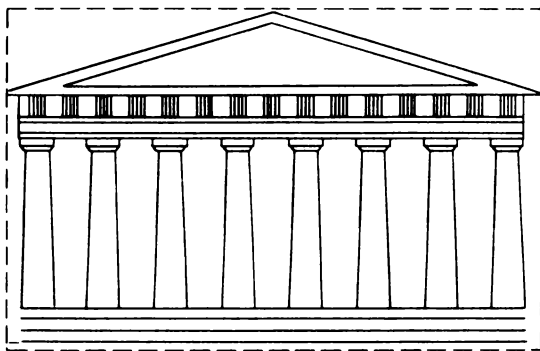


Рис. 188

Учитель дал ребятам задание вырезать из цветной бумаги квадрат. Вася, вырезая квадрат, проверил его так: он сравнил длины сторон. Все четыре стороны оказались равными, и Вася решил, что справился с заданием. Надежна ли такая проверка?

Алеша проверил работу иначе: он измерил не стороны, а диагонали. Диагонали были равны, и Алеша посчитал квадрат вырезанным правильно. Верно ли это?

Лена, вырезав квадрат, сравнила все четыре части, на которые диагонали разделили друг друга. Они оказались равными. По мнению Лены, это доказывало, что вырезанный четырехугольник — квадрат. А по-твоему?

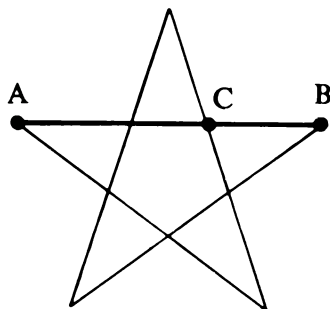
Как удостовериться, что вырезанная фигура — квадрат?

Вырежьте из бумаги прямоугольник со сторонами 10 см и 16 см. Отрежьте от него квадрат со стороной 10 см. Останется прямоугольник, стороны которого 6 см и 10 см, т. е. одна больше другой тоже примерно в 1,6 раза. Затем от этого прямоугольника отрежьте квадрат со стороной 6 см. Останется прямоугольник, одна сторона которого тоже примерно в 1,6 раза больше другой.

Этот процесс можно продолжать и дальше. На прямоугольники, у которых стороны соотносятся приблизительно как  $1,6 : 1$ , обратили внимание очень давно. Посмотрите на изображение храма Парфенон в Афинах (рис. 187). Даже сейчас, когда он стоит в развалинах, это одно из самых красивых сооружений мира. Этот храм построен в эпоху расцвета древнегреческой математики. И его красота основана на строгих математических законах. Если мы опишем около фасада Парфенона прямоугольник (рис. 188), то окажется, что длина его больше ширины примерно в 1,6 раза. Такой прямоугольник называли «ЗОЛОТЫМ ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ». Говорят, что его стороны образуют «ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ». Математики дают точное определение золотому сечению:



Рис. 189



$$AC : (AC + CB) = CB : AC$$

Рис. 190



Золотое сечение — это такое деление целого на две неравные части, при котором большая часть относится к целому, как меньшая к большей.

Если отрезок разделен на две части так, что меньшая имеет длину  $X$ , а большая — длину  $Y$  (рис.189), то в случае золотого сечения.  $Y/(X+Y) = X/Y$ . Интересно, что



в правильной пятиконечной звезде каждая из пяти линий, составляющих эту фигуру, делит другую в отношении золотого сечения (рис. 190).

На рис. 191 изображена раковина: точка  $C$  делит отрезок  $AB$  приблизительно в золотом отношении.

Видели ли вы когда-нибудь предметы, имеющие форму золотого прямоугольника?

Постройте золотой прямоугольник с помощью циркуля и линейки по указаниям, данным на рис. 192.

## § 22. КООРДИНАТЫ, КООРДИНАТЫ, КООРДИНАТЫ, ...

*«...Но интересно, на какой же я широте и долготе? — продолжала Алиса. Сказать по правде, она понятия не имела о том, что такое широта и долгота, но ей очень нравились эти слова. Они звучали так важно и красиво!»*

Географическая карта (будь то карта мира, одной страны или города) покрыта сетью тонких линий. Это параллели и меридианы (рис. 193). Горизонтальные линии — это ПАРАЛЛЕЛИ. Они показывают географическую широту в градусах [удаление (в градусах) данной точки от экватора].

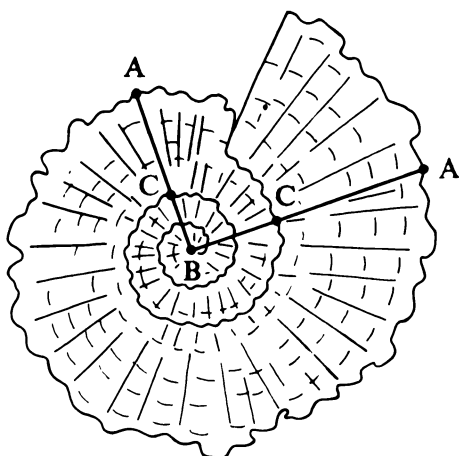
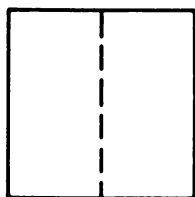
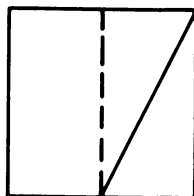


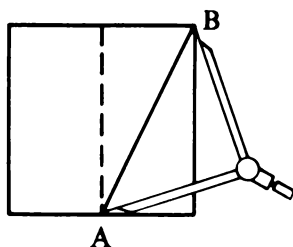
Рис. 191



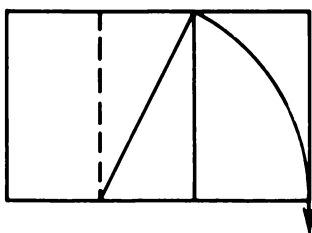
Начнем с квадрата.  
Разделим его на два равных  
прямоугольника



Проведем диагональ  
одного из них



Циркулем проведем дугу  
окружности радиусом  $AB$   
и с центром  $A$



Продолжим основание до  
пересечения с дугой.  
Проведем боковую сторону  
под прямым углом и закончим  
построение золотого  
прямоугольника

Рис. 192

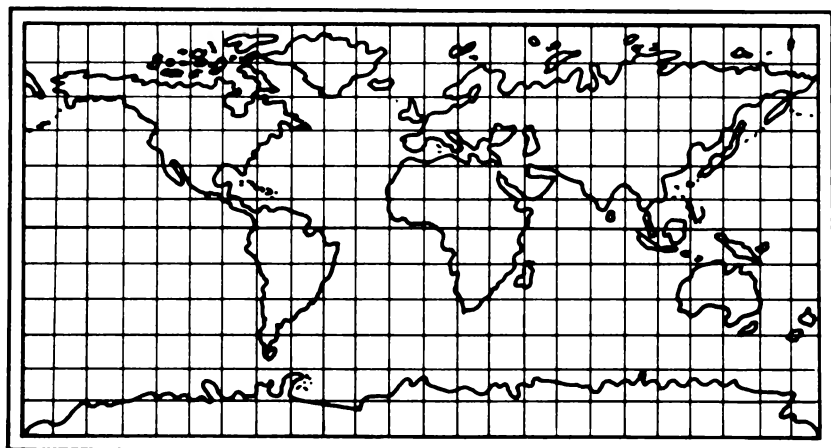


Рис. 193

Экватору на карте мира соответствует горизонтальная линия, делящая карту пополам. Все точки экватора имеют нулевую широту. Северному полюсу соответствует значение  $90^\circ$  северной широты, а Южному  $90^\circ$  южной широты.

Москва находится севернее экватора примерно на широте  $56^\circ$  (говорят  $56^\circ$  северной широты). Но для определения местонахождения Москвы этого недостаточно. Нужна вторая координата — **ДОЛГОТА**.

Вертикальные линии на карте — это **МЕРИДИАНЫ**. Среди них выбран начальный, нулевой меридиан. Этот меридиан проходит через Гринвичскую обсерваторию в Англии и поэтому его называют **ГРИНВИЧСКИМ МЕРИДИАНОМ**. Ему соответствует нулевая долгота. Все точки справа (восточнее) от него имеют восточную долготу. Она изменяется от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ .

В частности, Москве соответствует точка, равная  $38^\circ$  восточной долготы. Понятно, что точкам слева от начального меридиана соответствуют значения западной долготы.



Меридианы и параллели образуют на поверхности земного шара координатную сетку. Указывая ширину и долготу точки, мы указываем ее координаты. При этом точки, координаты которых выражаются близкими числами, расположены недалеко друг от друга.

Правда, у нашей карты (рис. 193) есть один недостаток, который сказывается тем больше, чем большая часть поверхности изображена на карте. Если выбрать две пары точек, расстояния между которыми на карте равны, но точки расположены в разных местах карты (близко к экватору и далеко от него), то этим

парам точек на поверхности земного шара соответствуют точки, находящиеся на разном расстоянии друг от друга. Часть суши в нижней части карты, соответствующая Антарктиде, несоизмеримо велика. Создается впечатление, что Антарктида больше Европы, Азии и Африки, вместе взятых. Это, конечно, не так. Причины этого вы, возможно, уже поняли. Все дело в том, что земля круглая, и изобразить ее поверхность на плоскости без искажений просто невозможно. (Хотя для карт города или района эти искажения незначительны и ими можно пренебречь.)

На поверхности земного шара (или на его модели — глобусе) параллелям соответствуют окружности, параллельные экватору, радиусы которых уменьшаются по мере удаления от экватора, стягиваясь к нулю у полюсов. В то время, как меридианам соответствуют одинаковые полуокружности, проходящие через полюсы. Изменению широты на  $1^\circ$  на всех меридианах соответствует один и тот же путь (одна и та же дуга). Изменению долготы на  $1^\circ$  на разных параллелях соответствуют разные пути. Большой — у экватора, маленький — у полюсов.

Что касается координат на плоскости, то, наверное, все ребята так или иначе с ними знакомы. Кто умеет играть в шахматы, знает, что вертикальные полосы обозначаются буквами, а горизонтальные — цифрами. В результате каждая клетка шахматной доски имеет собственное «имя», складывающееся из двух координат — буквы и числа, обозначающих столбец и строку, на пересечении которых эта клетка находится.

## ИГРА «МОРСКОЙ БОЙ»

Каждый, игравший в «Морской бой», знает, что клетки доски в этой игре обозначаются парой — буква и число. Поиграем в эту игру и мы, но обозначать клетки будем парой чисел. При этом первое число — номер столбца, а второе — номер строки. Так, клетка, отмеченная на рис. 194, обозначается парой (5; 3).

Напомним ПРАВИЛА ИГРЫ. (Можно вносить изменения).

1. Каждый из двух играющих размещает на доске свои корабли: один линкор (полоска из четырех клеток), два авианосца (полоска из трех клеток), три крейсера (две клетки рядом) и четыре катера (одна клетка). При этом корабли не должны соприкасаться даже углами.
2. Каждый по очереди производит по серии выстрелов до первого промаха. После каждого выстрела соперник сообщает одно из трех: ранил (значит, выстрел попал в корабль, но часть клеток корабля еще цела), убил (поражена последняя клетка раненого корабля), промах.



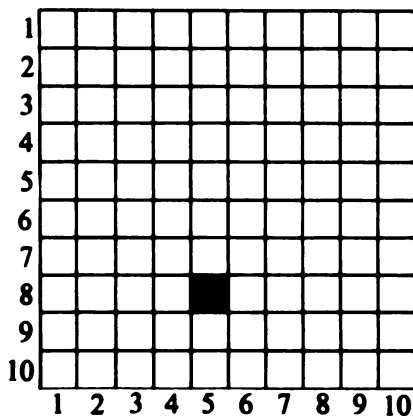


Рис. 194

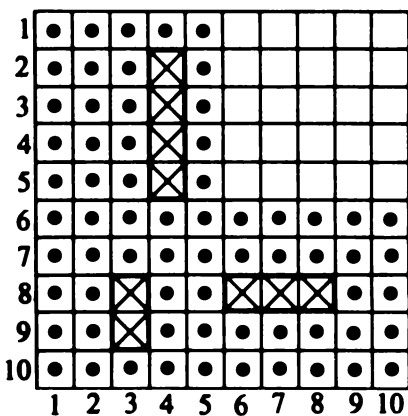


Рис. 195

Выигрывает тот, кто первым поразит все корабли вражеской флотилии. Возможны и варианты правил. Так, иногда добавляют несколько мин в виде единичных клеток (например, 5 мин). Попадание в мину наказывается пропуском очередного хода. Раз уж речь зашла об игре «Морской бой», то попробуйте решить несколько задач, связанных с этой игрой.

1. Представьте, что игра в «Морской бой» пришла к позиции, изображенной на рис. 195. На этой позиции показан результат ваших предыдущих действий: отмечены «убитые» корабли соперника, а также все сделанные вами выстрелы. Сейчас ваш ход. Допустим, сопернику достаточно сделать один очевидный выстрел и уничтожить вашу флотилию. Так что промахиваться нельзя. Сможете ли вы произвести серию точных выстрелов и выиграть в этой игре?
2. Можно ли на пустой доске для морского боя разместить 25 катеров? 26 катеров? Почему?

При решении следующих двух задач вам поможет раскраска доски для морского боя в четыре цвета так, что нижняя левая клетка окрашивается в первый цвет, затем маленькая диагональ из двух клеток окрашивается во второй цвет, следующая трехклеточная диагональ — в третий цвет, затем цвет четвертый, потом вновь первый и т. д. Сколько получилось клеток каждого цвета?

3. На доске находится один линкор. Какое наименьшее число выстрелов надо сделать, чтобы хотя бы один раз наверняка попасть в него?
4. Можно ли разрезать всю доску на линкоры?

Но мы немного отвлеклись и забыли про координаты. Вернемся к ним, а для этого, как ни странно, попробуйте вспомнить и написать день рождения своей мамы. Что означает это число?

На самом деле это тоже координата. Координата времени. За точку отсчета берется начало нашей эры, которая началась с года под номером 1. (Известно ли вам, что нулевого года не было?) Правда, нет четкой единицы измерения, так как год не имеет постоянного числа суток. В обычном году 365 дней, в високосном 366 дней. (Високосные годы имеют номера, делящиеся на 4. Например, 1992 г. — високосный. Исключение составляют годы, кратные 100. Если номер года делится на 100, но не делится на 400, то год не является високосным. Если же делится на 400, то год високосный. Так, 1900 г. не был високосным, а 2000 г. будет високосным годом.) Но это не беда. Мы легко любую дату можем перевести, скажем, в сутки (подсчитать число суток от начала первого года до этой даты) или даже в часы, если мы знаем дату и время события. Течение времени удобно изображать на прямой. Для этого на ней надо выбрать точку 0 (направление возрастания времени) и масштаб (отрезок, соответствующий единице времени; это может быть час, неделя, 1 000 дней и т. д.). Теперь каждому моменту времени соответствует точка на этой прямой.

Прямая, на которой заданы точка 0 и точка 1, называется **КООРДИНАТНОЙ ОСЬЮ** или просто **ОСЬЮ** (рис. 196).

Вы без труда можете найти вокруг себя различные примеры, иллюстрирующие прямые с заданными на них координатами. Это железные дороги (у нас в стране у большинства железных дорог точкой отсчета является Москва), улицы городов и т. д..

А теперь перейдем к плоскости. Координаты на плоскости можно задавать различными способами. Но у всех этих способов есть одно общее свойство:



**координаты точки плоскости** — это пара чисел, из которых одно число является первым и указывается первым, а другое — соответственно вторым.

Математики такую пару называют **УПОРЯДОЧЕННОЙ**.

Наиболее распространенным способом задания координат на плоскости, после чего она становится **КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ**, является следующий.

На плоскости выбирают две перпендикулярные прямые — **оси координат**. Точка пересечения этих прямых является **НАЧАЛОМ КООРДИНАТ**. Единичные отрезки на каждой оси выбираются равными по длине (рис. 197). Одну из этих осей, обычно горизонтальную, называют осью **X**, а вторую — осью **Y**. Такую

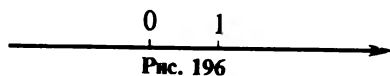


Рис. 196

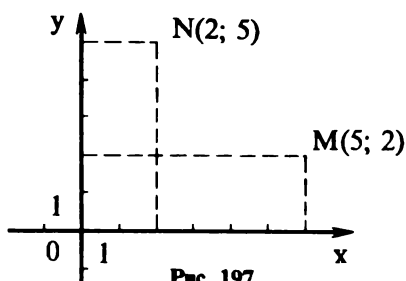


Рис. 197

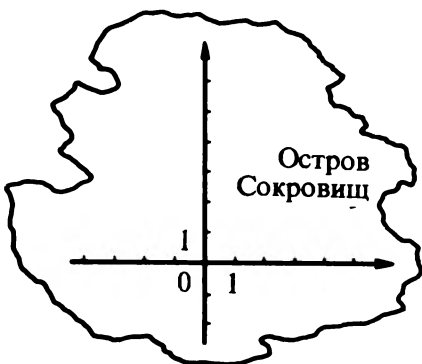


Рис. 198

координатную систему называют **ДЕКАРТОВОЙ** (по имени великого французского математика Рене Декарта, работы которого положили начало одному из важнейших методов исследования — **МЕТОДУ КООРДИНАТ**).

Теперь каждая точка плоскости обозначается парой чисел. Точка  $M$  на рис. 197 имеет координаты 5 и 2, что записывается так:  $M(5; 2)$ . Ее нельзя путать с точкой  $N(2; 5)$ .

### ИГРА «Остров Сокровищ»

На острове Сокровищ была пещера, в которой капитан Флинт прятал свои сокровища. Вход в пещеру был тщательно замаскирован и найти его мог только старый пират Бен Ган. Перед смертью Бен Ган решил оставить для потомков шифрованное письмо — описание пути, ведущего к кладу, и места, где он спрятан.

Поскольку старый пират получил в свое время неплохое образование, он решил для своих целей воспользоваться методом координат. Он взял карту острова, нарисовал на ней оси координат, выбрал единицы. В общем, сделал все, как положено (рис. 198). В качестве главных ориентиров он указал координаты четырех дубов

$(3; 5)$ ,  $(-2; 7)$ ,  $(-3; 4)$ ,  $(3; -1)$ .

Клад находился в точке пересечения прямых, соединяющих первый и третий, второй и четвертый дубы.

Нарисуйте на клетчатой бумаге оси координат (за единицу можно выбрать расстояние в две клетки). Постройте точки, соответствующие дубам, и определите координаты пещеры с сокровищами. А теперь начните заполнять карту острова Сокровищ. Нанесите на карту различные объекты (колодец, наблюдательную вышку,



Рис. 199

склад, пальмовую рощу и т. д.), опишите их положение с помощью координат и сообщите эти координаты соседу по парте.

Пусть он восстановит вашу карту, а вы, в свою очередь, восстановите его карту. Сравните карты в классе. Чья получилась интереснее?

Для тренировки выполните следующие задания.

5. Даны координаты точек. Верно отметив на координатной плоскости и соединив последовательно эти точки, вы получите рисунок. Рисунок не получится, если вы ошибетесь.

1. Рисунок первый:  $(5; 1)$ ,  $(4; -2)$ ,  $(4; 0)$ ,  $(2; -1)$ ,  $(1,5; -0,5)$ ,  $(2; 1)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(-3; 1)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(1,5; 3)$ ,  $(5; 7)$ ,  $(5; 1)$ ,  $(1,5; 3)$ ,  $(2; 2)$ . Последнюю точку не соединяйте ни с какой другой.

2. Рисунок второй:  $(0; 2)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(1; 3)$ ,  $(2; 3)$ ,  $(3; 2)$ ,  $(3; 0)$ ,  $(1; -1)$ ,  $(2; -1)$ ,  $(1; -3)$ ,  $(0; -1)$ ,  $(-1; -3)$ ,  $(-2; -1)$ ,  $(-2; -1)$ ,  $(-3; 0)$ ,  $(-3; 2)$ ,  $(-2; 3)$ ,  $(-1; 3)$ ,  $(0; 0)$ .

6. Как известно, сокровища Флинта были спрятаны на разных островах. При этом для шифровки места положения клада неоднократно использовался метод координат. На рис. 199 изображена карта острова, на которой видны два ориентира (два больших камня). Современные искатели сокровищ не располагают подлинной картой, но они знают, что камни на этой карте имели координаты  $A(2; 1)$ ,  $B(8; 2)$ , а координаты клада  $(6; 6)$ . Найдите на карте место клада.

Из других способов задания координат на плоскости расскажем об одном, хотя и реже используемом, но достаточно полезном и практически и теоретически. Речь пойдет о «полярных координатах».

На плоскости указывается точка  $O$ , которая будет называться ПОЛЮСОМ, выходящий из этой точки луч — ПОЛЯРНАЯ ОСЬ, на которой отмечена точка, находящаяся на расстоянии 1 от  $O$ .

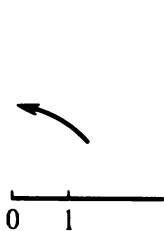


Рис. 200

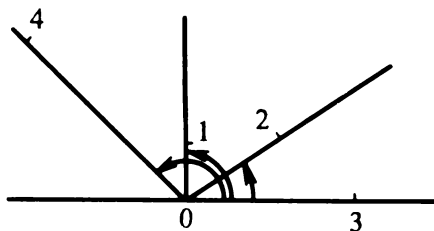


Рис. 201

Кроме того, задается направление вращения вокруг 0, например, против часовой стрелки (рис. 200). Таким образом,



каждая точка плоскости задается двумя полярными координатами: углом и расстоянием.

Расстояние показывает, как далеко точка находится от полюса, а угол показывает поворот полярной оси против часовой стрелки до положения, когда она пройдет через нужную точку. Полному повороту соответствует угол  $360^\circ$ , и полярный угол изменяется от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ .

На рис. 201 отмечены точки  $(0^\circ; 3)$ ,  $(30^\circ; 2)$ ,  $(90^\circ; 1)$ ,  $(135^\circ; 4)$ .

7. Изобразите в полярных координатах точки  $(60^\circ; 1,5)$ ,  $(150^\circ; 3)$ ,  $(180^\circ; 1)$ ,  $(270^\circ; 5)$ ,  $(330^\circ; 2)$ .

Если вы ходили в поход, то знакомы с таким понятием, как АЗИМУТ. Оказывается, туристы обычно пользуются в походах полярными координатами, а азимут — угол, выраженный в полярных координатах, в которых полюсом является некоторая точка на местности, например место, где находится турист, а ось направлена на север (рис. 202).

8. Изобразите в полярных координатах точки: а)  $A(10^\circ; 2)$ ,  $B(130^\circ; 2)$ ,  $C(250^\circ; 2)$ ; б)  $K(20^\circ; 3)$ ,  $L(110^\circ; 3)$ ,  $M(200^\circ; 3)$ ,  $N(290^\circ; 3)$ . Определите вид треугольника ABC и четырехугольника KLMN.

Заканчивая наш разговор о координатах, «выйдем в пространство». Чтобы получить декартову систему координат в пространстве, надо к двум осям X и Y добавить еще одну ось Z, перпендикулярную им, с тем же началом в точке 0 (рис. 203). Теперь каждой точке пространства соответствуют три координаты, тройка чисел X, Y, Z. Именно в этом и состоит характерное свойство ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА.

9. В качестве упражнения постарайтесь изобразить на одном чертеже шесть точек с координатами: 0  $(0; 0; 0)$ , A  $(1; 0; 0)$ , B  $(0; 1; 0)$ , C  $(0; 0; 1)$ , D  $(1; 1; 0)$ , E  $(1; 1; 1)$ . Чтобы чертеж получился более наглядным, свяжите систему координат с кубом, у которого ребро равно 1.

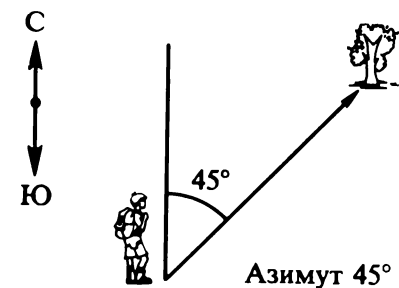


Рис. 202

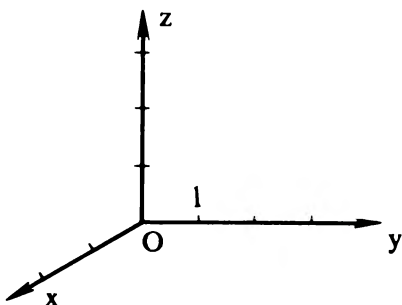


Рис. 203

## §23. ОРИГАМИ

*Умеете ли вы делать из бумаги кораблик, самолетик или какие-либо другие фигурки? Наверняка умеете. Школьники увлекаются их изготовлением, сами не зная того, что занимаются древним японским искусством ОРИГАМИ.*

Оригами — складывание фигурок из бумаги. Все фигурки складываются из прямоугольных листов бумаги (одного или двух), без помощи ножниц или клея (клей применяют разве что для склеивания половинок фигур, составленных из двух листов).

Оригами распространилось по всему свету. Во многих странах есть клубы оригамистов, членами которых являются люди самых разных профессий и возрастов. На рис. 204 изображены фигурки-оригами, изготовленные ими: ворон, чайник, стоящий аист и попугай в полете. Придумывание их — настоящее искусство!

Мы же начнем с более простых фигурок — прыгающей лягушки, кузнечика, зайчика, сороки и фонарика. Вооружившись цветной бумагой, карандашом, линейкой и ножницами, приступайте к работе. Порядок изготовления показан на схемах. Внимательно изучите условные обозначения, а полученные промежуточные результаты каждый раз сверяйте с рисунком. Будьте усидчивы и аккуратны, и у вас появятся замечательные игрушки. Успеха вам!

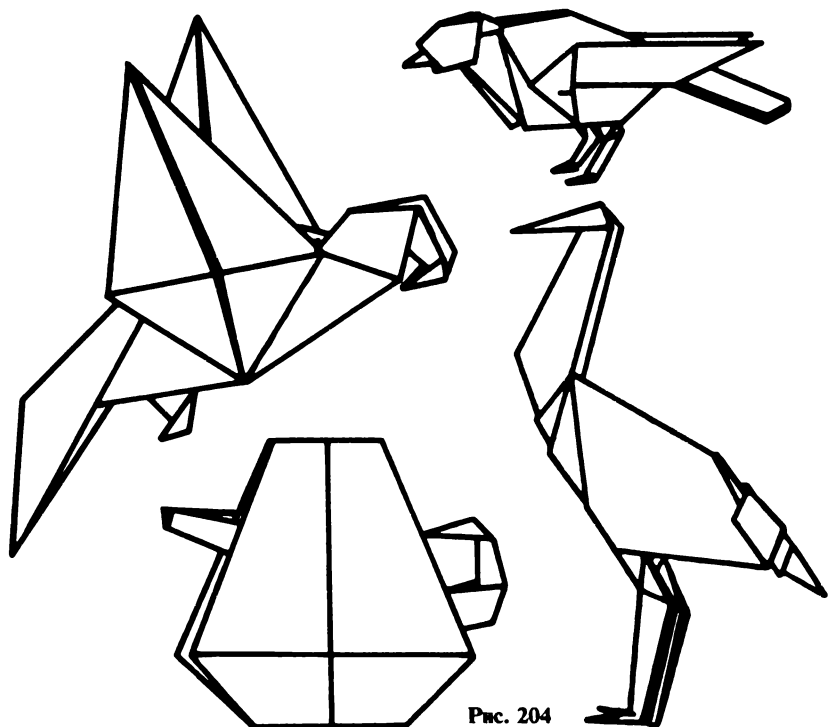


Рис. 204

### Условные обозначения на чертежах:

- линии, по которым надо согнуть лист ребром внутрь (как полураскрытая книга)
- . - . - . линия сгиба, по которой надо согнуть лист ребром наружу (как крыша дома)
- линии предыдущих сгибов
- направление сгиба
- ↔ согнуть и разогнуть
- ▼ место, на которое нужно надавить, чтобы свернуть лист
- ↔ разъединить слои бумаги
- A •B точки A и B свести в точку C

Прыгающая лягушка (рис. 205). Кузнечик (рис. 206). Фонарик (рис. 207). Сорока (рис. 208). Зайчик (рис. 209).

Надеемся, что вас захватит это увлечение, и оригами станет вашим хобби!

# ПРЫГАЮЩАЯ ЛЯГУШКА

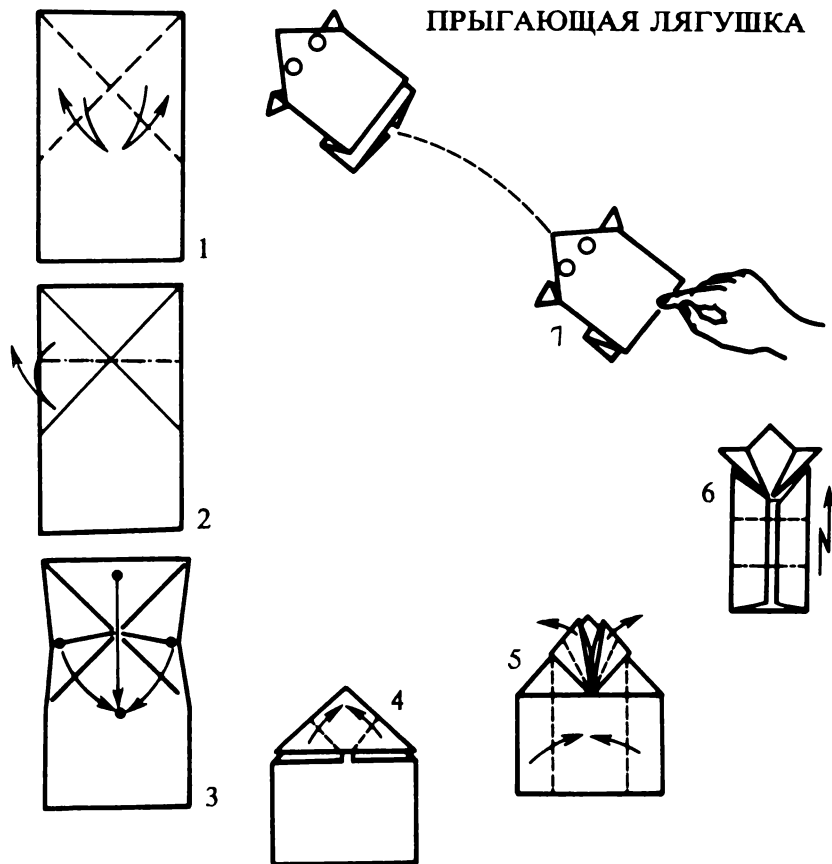


Рис. 205

# КУЗНЕЧИК

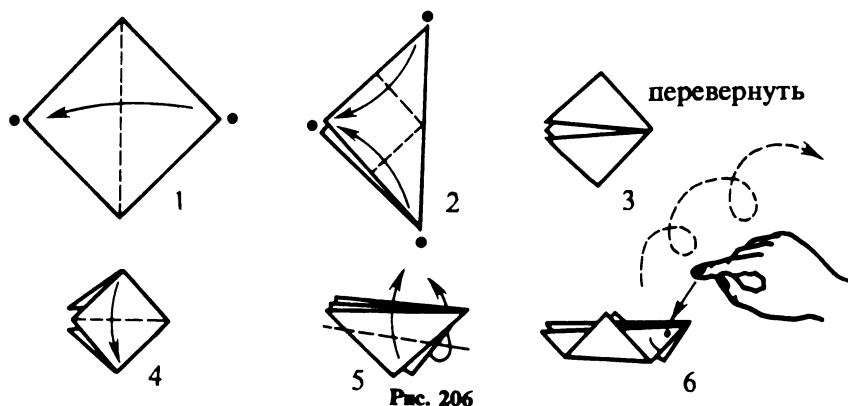


Рис. 206



# ФОНАРИК

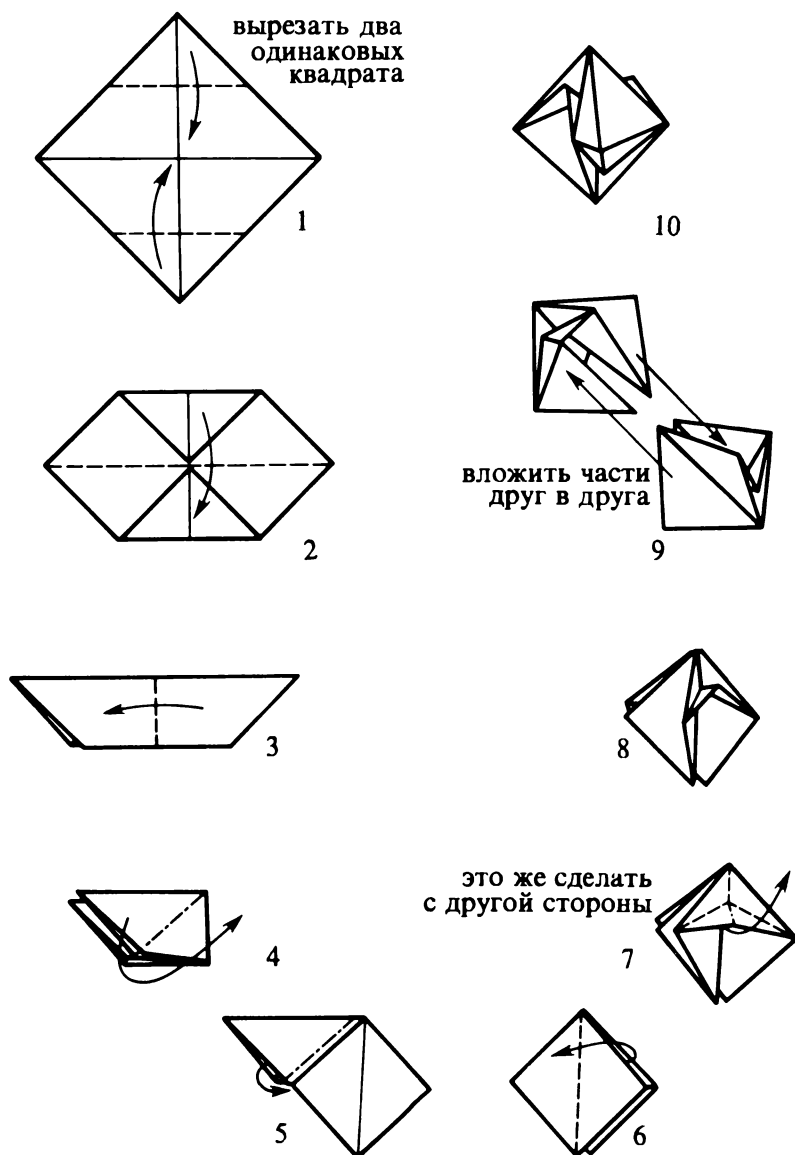


Рис. 207

# СОРОКА

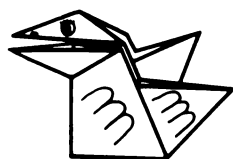
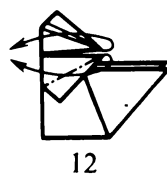
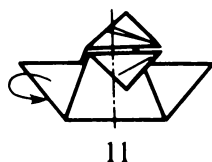
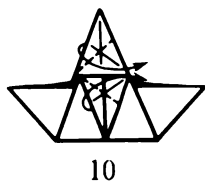
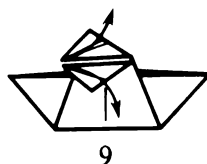
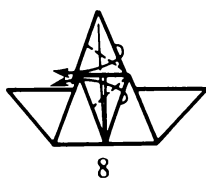
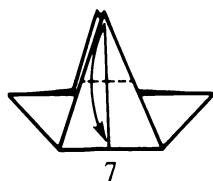
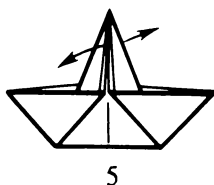
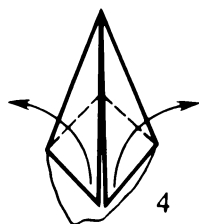
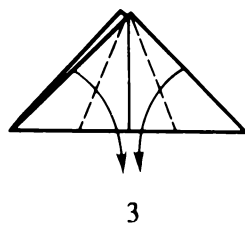
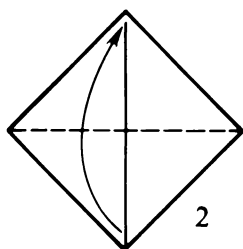
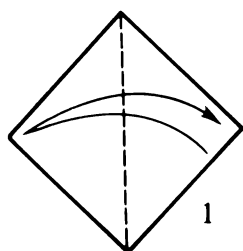
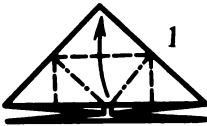
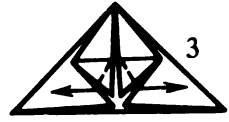


Рис. 208

## ЗАЙЧИК



сворачивается,  
как шаг 3  
у лягушки



перевернуть

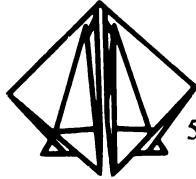
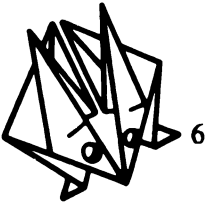
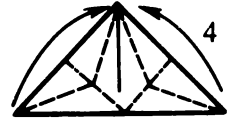


Рис. 209

## § 24. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

*В этом параграфе вы узнаете о некоторых поистине замечательных кривых, населяющих удивительный мир геометрии.*

### ЭЛЛИПС

Возьмите плотный лист бумаги, прикрепите к нему в двух точках нитку и натягивайте карандашом эту нитку. Нарисуйте линию, двигая карандаш и натягивая нитку (рис. 210).

Эта линия называется ЭЛЛИПСОМ. Все точки эллипса, как видно из построения, обладают одним свойством:



сумма расстояний от них до двух заданных точек плоскости (эти точки называются фокусами эллипса) постоянна.

На самом деле эллипсы в нашей жизни встречаются гораздо чаще, чем кажется. Например, когда мы режем наискосок колбасу, то получающийся кусок имеет эллиптическую форму. Планеты движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам,

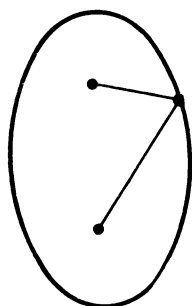


Рис. 210

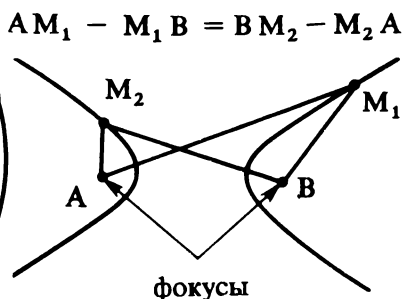


Рис. 211

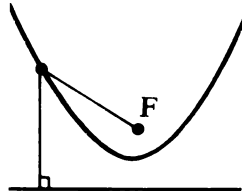


Рис. 212

причем Солнце находится в одном из фокусов. У эллипса есть целый ряд свойств, которые могут иметь самые неожиданные применения. Так, если мы сделаем зеркало в форме эллипса и поместим в одном из фокусов источник света, то лучи, отразившись от зеркала, соберутся в другом фокусе.



Окружность — частный случай эллипса, она получается, если фокусы эллипса совпадают.

## ГИПЕРБОЛА

Для этой кривой мы не можем предложить, как в предыдущем случае, достаточно простой «гиперболический циркуль», позволяющий вычерчивать гиперболу и одновременно показывающий ее основное свойство. Поэтому начнем с указания основного свойства, задающего гиперболу.



Гипербола — это линия, для всех точек которой разность расстояний до двух заданных точек плоскости (фокусов гиперболы) есть величина постоянная (рис. 211).

Гипербола состоит из двух частей (двух отдельных ветвей). Все точки одной ветви ближе к одному фокусу (соответствующим образом берется и разность расстояний), а другой — к другому.

## ПАРАБОЛА

Возьмем на плоскости прямую  $l$  и точку  $F$ . Теперь для любой точки плоскости можно измерить расстояние от нее до  $l$  (вы помните, что это расстояние измеряется по перпендикуляру?) и до  $F$ . Среди всех точек плоскости выделяются те, для которых эти расстояния равны (рис. 212). Так вот, эти точки лежат на параболы. Эта замечательная кривая не так уж редка в природе. Например, камень, брошенный человеком под углом к поверхности Земли, описывает параболу.

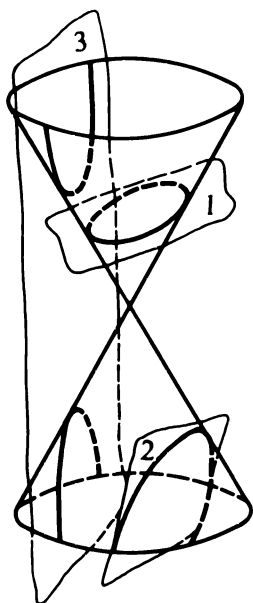


Рис. 213

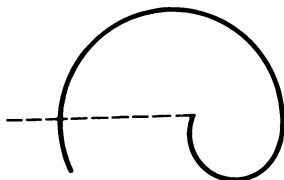


Рис. 214



Все только что рассмотренные линии (эллипс, гипербола и парабола) объединяются общим свойством. Каждая из них может быть получена при пересечении конуса плоскостью.

Их поэтому называют **КОНИЧЕСКИМИ СЕЧЕНИЯМИ** (рис. 213).

## КОНУС

Что такое **КОНУС**, надеемся, вы представляете. Весь конус состоит из двух частей (пол), имеющих общую вершину. Из листа бумаги можно свернуть одну часть. Математики определяют конус следующим образом. Возьмем окружность и точку над ее центром. Эта точка — вершина конуса. Проводя прямые, соединяющие всевозможные точки окружности с вершиной, получим коническую поверхность. Конус можно пересечь плоскостью по окружности. Наклоняя плоскость сечения, получим эллипс (плоскость 1). Увеличивая наклон плоскости, получаем все более вытянутые эллипсы. В конце концов эллипс превратится в параболу. При этом мы по-прежнему сечением задеваем лишь одну «полу» конуса (плоскость 2). Наклоняя плоскость дальше, мы пересекаем и вторую «полу». Появятся две ветви, парабола перейдет в гиперболу (плоскость 3).

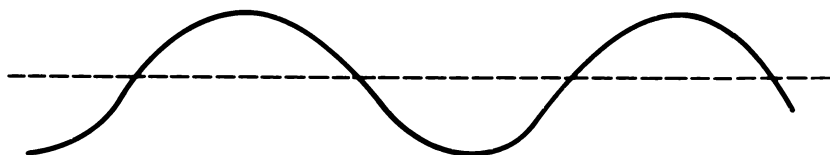


Рис. 215

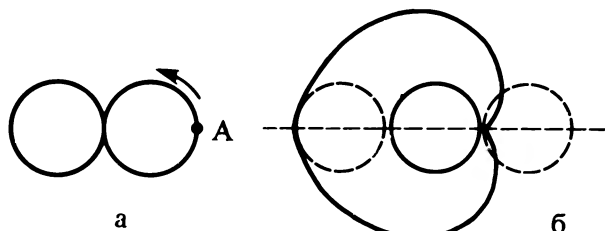


Рис. 216

## СПИРАЛЬ АРХИМЕДА

Пусть по радиусу равномерно вращающегося диска с постоянной скоростью ползет муравей. Проползая вперед, он одновременно смещается в сторону вращения диска. Таким образом, путь муравья представляет кривую (рис. 214). Она называется СПИРАЛЬЮ АРХИМЕДА (с латыни спираль означает изгиб, извив).

## СИНУСОИДА

Сделайте из плотной бумаги, свернув ее несколько раз, трубочку. Разрежьте эту трубочку наклонно. Если трубочку не разворачивать, то в сечении будет эллипс. Какую линию образует разрез, если развернуть одну из частей трубочки? Перерисуйте эту линию на лист бумаги (рис. 215).

Получится одна из замечательных кривых, называемая СИНУСОИДОЙ.

## КАРДИОИДА

Вырежьте два одинаковых картонных круга. Один из них закрепите неподвижно. Второй приложите к первому, отметьте на его краю точку А, наиболее удаленную от центра первого круга (рис. 216, а). Прокатите без скольжения подвижный круг по неподвижному и наблюдайте, какую линию опишет точка А. Нанесите эту линию.

Это кардиоида (рис. 216, б). Такое название она получила из-за сходства с сердцем (с греческого кардио означает сердце).

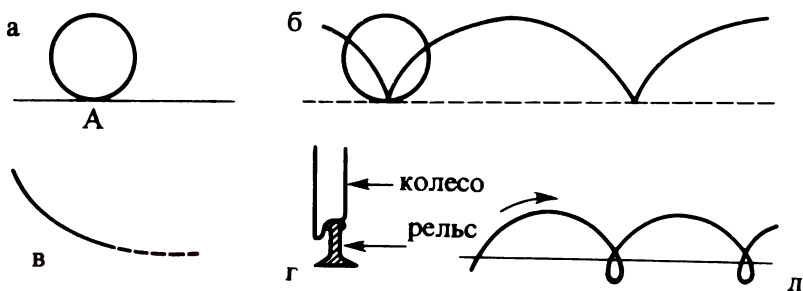


Рис. 217

## ЦИКЛОИДА

Представьте, что по прямой линии без скольжения катится круг. Проследите за траекторией, которую опишет при этом точка А, взятая на окружности этого круга (рис. 217, а). Начертите получившуюся кривую.

Она называется ЦИКЛОИДОЙ (рис. 217, б). Циклоида обладает многими замечательными свойствами. Вот одно из них. Давно математически пытались решить такую задачу: какой формы должен быть гладкий желоб, соединяющий две точки А и В (А выше, чем В), чтобы гладкий металлический шарик скатился по этому желобу из точки А в точку В под действием своего веса за кратчайшее время? Можно подумать, что желоб должен быть прямолинейным. Но это не так. Может быть, желоб следует выгнуть по дуге окружности, как думал великий итальянский физик, астроном и математик Галилео Галилей, живший на рубеже XVI-XVII вв.? Нет, Галилей ошибался. Только в 1696 г. швейцарский математик Иоганн Бернулли установил, что желоб должен быть выгнут по циклоиде, опрокинутой вниз (рис. 217, в).

В связи с циклоидами расскажем об одном интересном парадоксе (слово «парадокс» означает неожиданное явление, не соответствующее обычным представлениям). Допустим, что пассажирский поезд едет из Москвы в Киев. Оказывается, в каждый момент времени в этом поезде, более того, в каждом вагоне, есть точки, движущиеся в обратном направлении. Вы можете удивляться, но это так. Все дело в устройстве железнодорожных колес. Если смотреть вдоль рельс, то можно увидеть выступ на колесе (рис. 217, г), который опускается ниже рельса. Роль этого выступа очень велика, он не позволяет колесам сойти с рельс. Так вот, самая нижняя часть колеса, находящаяся ниже его опорной точки, движется в направлении, обратном движению всего колеса.

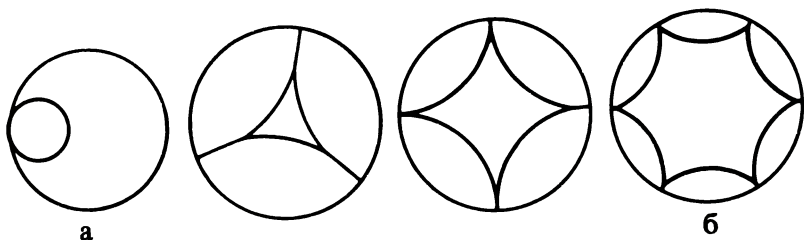


Рис. 218

Если выбрать крайнюю точку колеса, то линия, описываемая ею, будет выглядеть как на рис. 217, д. Обратное движение эта точка совершает в нижних частях маленьких петель.

### ГИПОЦИКЛОИДЫ

Возьмите кусок толстого картона и вырежьте в нем круг радиусом 12 см. Из того же материала вырежьте три кружка радиусами 4 см, 3 см и 2 см. Положите кусок картона с вырезанным в нем отверстием на лист бумаги, вложите в этот вырез первый из трех кружочков, чтобы он касался края, и отметьте на окружности этого кружка точку (рис. 218, а). Проследите за тем, какую линию опишет отмеченная точка, когда кружок покатится по окружности выреза без скольжения. Прodelайте то же самое со вторым и третьим кружками.

Получившиеся линии — ГИПОЦИКЛОИДЫ (рис. 218, б).

Во что превратится гипоциклоида, если радиус меньшего круга равен 6 см, в большего 12 см? Как выглядит гипоциклоида для кругов с радиусами 8 см, 9 см и 10 см?

## § 25. КРИВЫЕ ДРАКОНА

*Эта тема введет вас в мир интересного семейства линий, одна из которых нарисована ниже. Она заключена внутри дракона и своими изгибами обрисовывает его контур. Люди, видевшие драконов, подтверждают, что они выглядят именно так (рис. 219). Как получаются такие линии?*

Возьмите длинную полоску бумаги, левый конец которой пометьте точкой. Сверните ее пополам, чтобы точка оказалась закрытой, а потом еще пополам (всякий раз правый конец накладываем на левый). Разверните ее теперь так, чтобы линии сгибов отчетливо выделялись и положите на стол. Точка должна быть слева. У вас



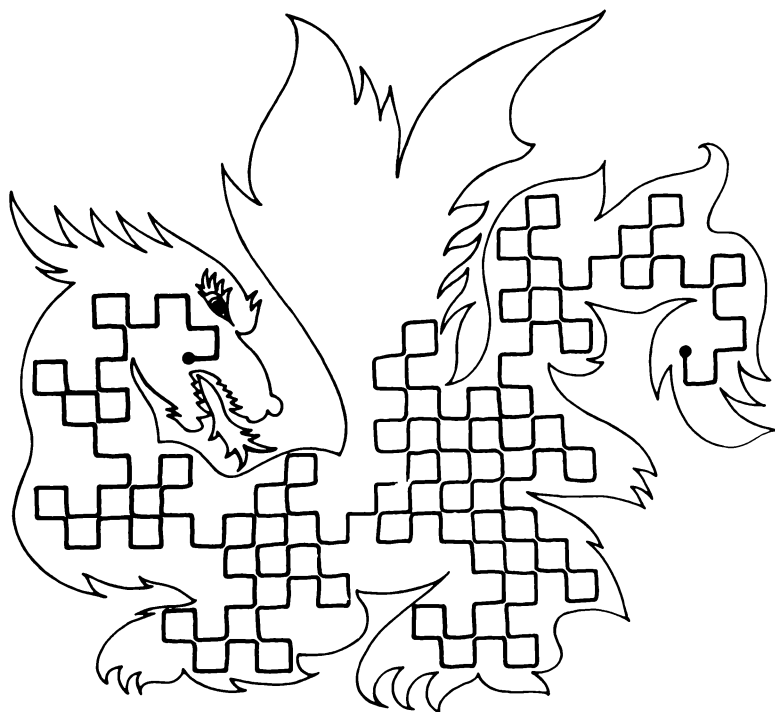


Рис. 219



Рис. 220



Рис. 221

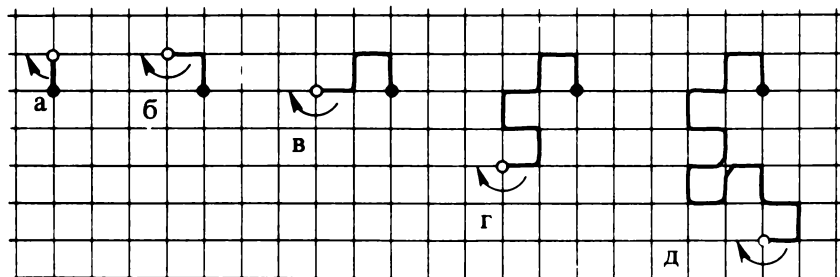


Рис. 222

получилась полоса (рис. 220). Изгибы идут в следующем порядке: вниз — вниз — вверх. Или, вводя обозначения Н—вниз, В—вверх, это запишется так: Н Н В.

Сложите полоску три раза пополам. Получится такая полоса (рис. 221). Изгибы теперь идут так: Н Н В Н В.

Сложите самостоятельно полоску четыре и пять раз и запишите, как будут чередоваться изгибы. У вас должны получиться следующие цепочки букв:

четыре раза Н Н В Н Н В В Н Н Н В В Н В В

пять раз Н Н В Н Н В В Н Н Н В В Н В В Н Н Н В Н Н В В В Н Н В В Н В В

Вы получили КОДЫ ДЛЯ РИСОВАНИЯ КРИВЫХ ДРАКОНА. Внимательно посмотрите на них и найдите некоторые закономерности. Возможно, вы сумели заметить, что:



1) число изгибов нечетное, причем, если на каком-то шаге их было  $K$ , то на следующем будет  $2K + 1 = 3$  изгиба, затем  $2 \times 3 + 1 = 7$ , потом  $2 \times 7 + 1 = 15$  и т. д.;

2) в середине всегда Н, а сгибы до этого среднего Н такие же, как и на предыдущем шаге;

3) и, самое главное, буквы, равноудаленные от среднего Н, всегда различны.

Следуя этим закономерностям, можно последовательно выписывать цепочки (коды) для полосок, сложенных любое число раз. Общее ПРАВИЛО ДЛЯ ПЕРЕХОДА ОТ ОДНОГО КОДА К ДРУГОМУ:



берем имеющийся код, приписываем к нему букву Н (под ней удобно поставить точку), затем выписываем в обратном порядке буквы, предшествующие этому Н, заменяя Н на В и наоборот (посмотрите на коды, соответствующие четвертому и пятому сгибам).

1. Пользуясь этим правилом, напишите цепочку-код для полоски, сложенной шесть раз.

Итак, мы научились получать коды сколь угодно длинные. Но все-таки, причем здесь «драконы», как следует расшифровывать эти коды для построения кривых дракона? Возьмем лист клетчатой бумаги и проведем в нем вертикальную черточку по стороне одной клетки (рис. 222, а). Заменим в коде букву Н на Л (левый поворот), а букву В на П (правый поворот) и продолжим проведенную черточку, следуя командам кода и поворачивая последовательно налево и направо на  $90^\circ$ . На рис. 222, б—д изображены «дракончики», соответствующие 1, 2, 3 и 4 складываниям.

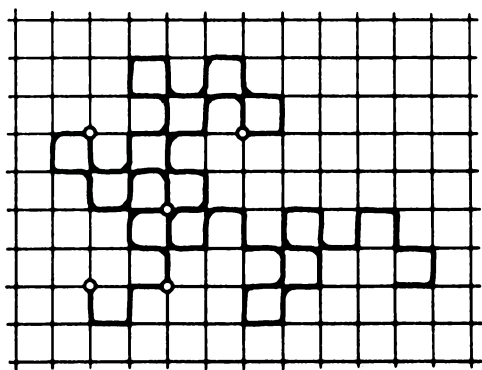


Рис. 223



Если всмотреться в эти линии, то можно увидеть, что каждую последующую (по количеству сгибов) кривую можно получить с помощью кальки, поворачивая всю уже имеющуюся кривую на  $90^\circ$  по часовой стрелке вокруг конца этой линии. Этим способом можно строить любые кривые дракона.

Повторение рисунка половины кривой при повороте на  $90^\circ$  (а следовательно, использование кальки для вычерчивания) можно объяснить с помощью исходной бумажной полоски. В свернутой полоске изгибы слоев повторяют друг друга. Развернем свернутую бумажную полоску, чтобы она стала двухслойной. Повернем один слой вокруг серединного сгиба на  $90^\circ$ : одна половина нашей кривой повернулась на  $90^\circ$ , повторив изгибы другой половины.

2. Постройте кривую, соответствующую шести сгибам полоски, из кривой в пять сгибов и обрисуйте ее контуром дракона.
3. Возьмите лист бумаги и нарисуйте разноцветными карандашами четырех драконов, «вырастающих» из одной точки (у первого дракона первая черточка идет вверх, у второго — вправо, у третьего — вниз, у четвертого — влево). Эти драконы получаются из исходного при помощи трех последовательных поворотов на  $90^\circ$ . Драконы не пересекаются и последовательно заполняют весь лист бумаги.

Оказывается, не обязательно при построении кривых дракона всякий раз поворачивать ранее полученную кривую на  $90^\circ$  в одном и том же направлении. Направления вращений (по или против часовой стрелки) можно чередовать произвольным образом. На рис. 223 изображена такая кривая. В углах, отмеченных кружочком (о), делается поворот против часовой стрелки, а в углах, отмеченных точкой (.), по часовой стрелке. Из этого дракона также можно получить еще трех, «растущих» из той же точки.

*Знаете ли вы один из самых прекрасных древнегреческих мифов о победе Тесея над Минотавром?*

*Критский царь Минос приказал знаменитому художнику и архитектору Дедалу построить лабиринт. В этот лабиринт, с бесчисленными коридорами, тупиками и переходами, Минос поселил Минотавра ( кровожадное существо с человеческим телом и головой быка) и потребовал у афинян, убивших его сына, раз в девять лет присылать на съедение чудовищу семерых сильнейших юношей и семерых красивейших девушек. Их отводили в лабиринт, и юные афиняне, блуждая там, становились жертвами Минотавра. Когда афиняне готовили кровавую дань в третий раз, сын афинского царя Эгея, Тесей, задумал освободить родной город от позорной обязанности. Вместе с очередной группой жертв Минотавра он отправился на Крит с целью убить чудовище. Дочь Миноса, Ариадна, полюбила мужественного Тесея и решила помочь ему. Она дала Тесею волшебный клубок, который помог ему найти выход из лабиринта. Привязав конец нити у входа, Тесей пошел на поиски Минотавра. Поединок закончился победой юноши, который затем, идя обратно по нити Ариадны, вышел из лабиринта и вывел оттуда всех обреченных.*

В 1900 г. английский археолог Артур Эванс провел раскопки на острове Крит, где обнаружил главный город Кносс и кносский дворец-лабиринт. Его архитектура поражает замысловатостью и отсутствием какой бы то ни было закономерности. На каждом шагу множество неожиданных переходов, причудливых лестниц и коридоров.

Лабиринты бывают самой разнообразной формы и устройства. До наших дней сохранились запутанно-сложные галереи, ходы пещер, извилистые планы на стенах и полах, обозначенные цветным мрамором или черепицей, извивающиеся тропинки на почве, рельефные извилины в скалах.

Слово «лабиринт» (греч.) означает ходы в подземельях.



**Как бы ни были сложны и запутаны эти ходы, всегда, однако, найдется выход. Безвыходных лабиринтов нет!**

Решение (т. е. маршрут, ведущий к цели) каждого лабиринта может быть найдено одним из трех сравнительно простых методов.

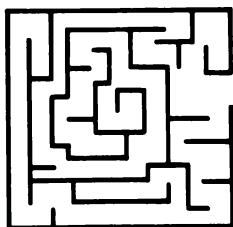


Рис. 224

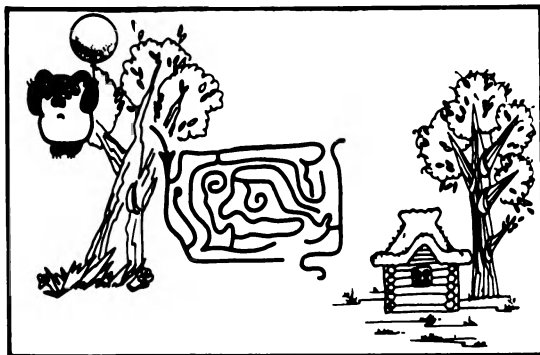


Рис. 225



**Первый метод — МЕТОД ПРОБ И ОШИБОК.** Выбирайте любой путь, а если он заведет вас в тупик, то возвращайтесь назад и начинайте все сначала.

**Второй метод — МЕТОД ЗАЧЕРКИВАНИЯ ТУПИКОВ.** Незачеркнутая часть коридоров будет выходом или маршрутом от входа к выходу (рис. 224).

**Третий метод — ПРАВИЛО ОДНОЙ РУКИ.** Если лабиринт имеет один выход, то идти по нему, не отрывая от стены правой (левой) руки.

Это правило не универсальное, но часто полезное. Им пользуются тогда, когда все стены, хотя и имеют сложные повороты и изгибы, но оставляют непрерывное продолжение наружной стены. Лабиринты не должны содержать замкнутых маршрутов. Разобравшись в правилах, попробуйте решить следующие лабиринты.

1. Помогите Винни Пуху пройти в домик Пятачка (рис. 225).
2. Как муравью достать из муравейника зернышко (рис. 226)?
3. Можно ли пройти по этим лабиринтам, пользуясь правилом одной руки (рис. 227)?
4. Пользуясь правилом одной руки, пройти к дереву по лабиринту, построенному в Англии в XIII в. (рис. 228).
5. Найдите путь к беседке, расположенной в парке (рис. 229).
6. Это лабиринт английского короля Вильгельма III, состоящий из аллей и изгородей (рис. 230). Нужно пройти в центр к деревьям и скамейкам под ними.

Именно по этому лабиринту блуждали герои книги Джерома К. Джерома «Трое в лодке, не считая собаки». Если вы не читали еще эту очень смешную книгу, то непременно прочтите ее.

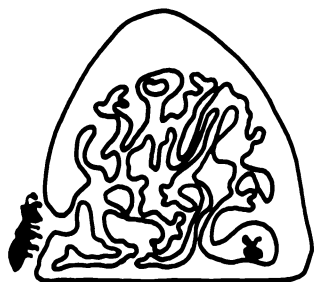


Рис. 226

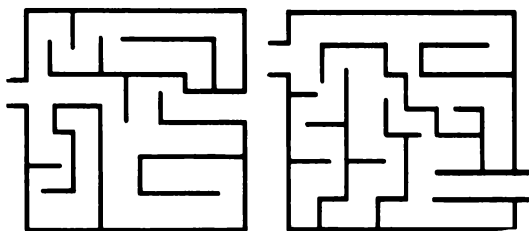


Рис. 227

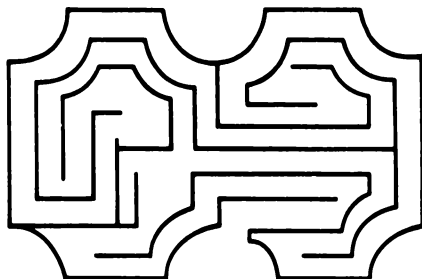


Рис. 228

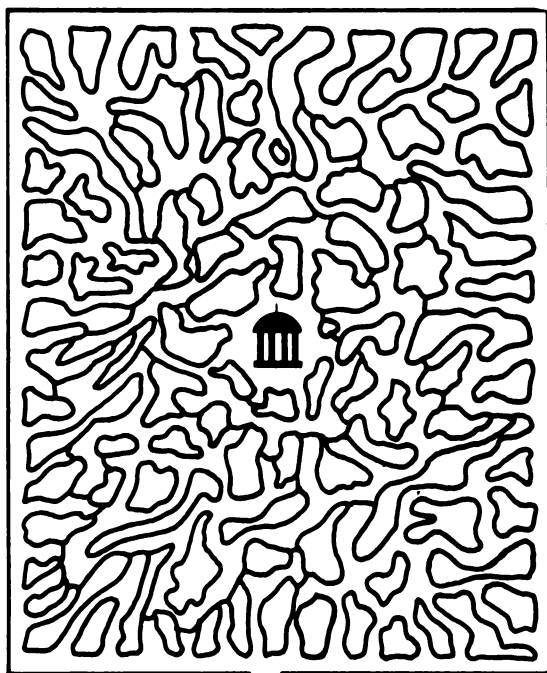


Рис. 229

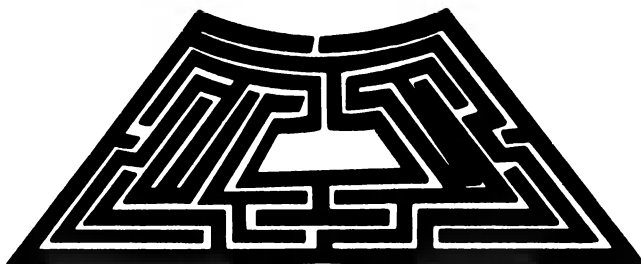


Рис. 230

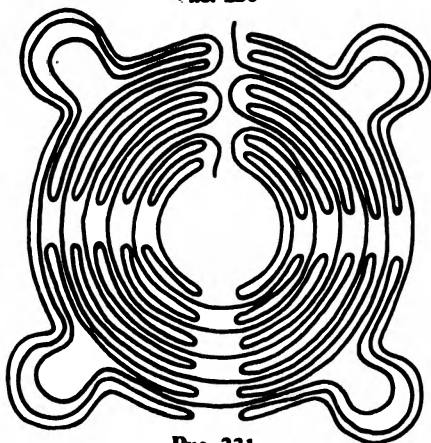


Рис. 231

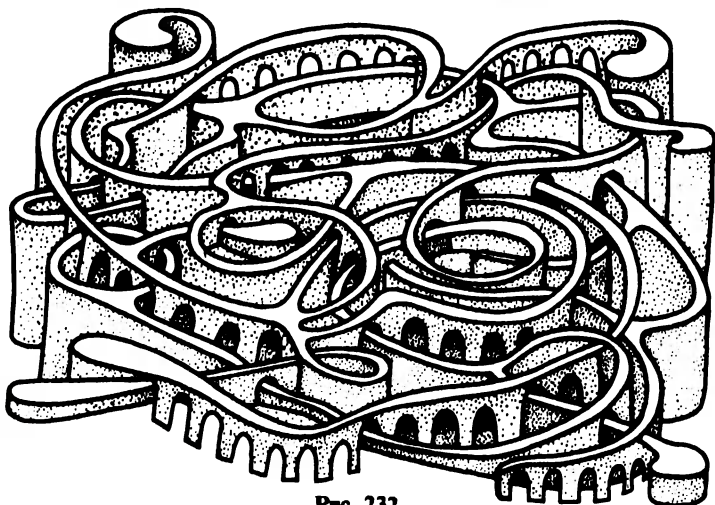


Рис. 232

7. Итальянский лабиринт XVI в. (рис. 231).
8. Пространственный лабиринт (рис. 232).

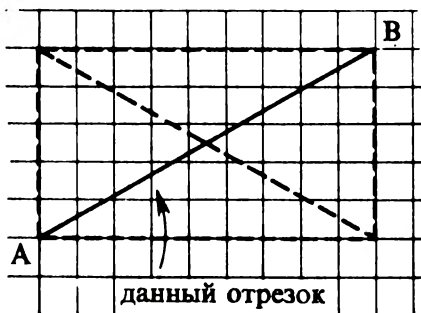


Рис. 233

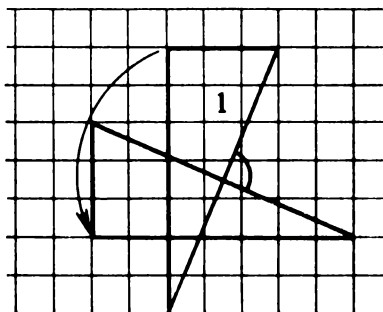


Рис. 234

## § 27. ГЕОМЕТРИЯ КЛЕТЧАТОЙ БУМАГИ

*Интересно, почему тетрадь по математике в клеточку? Наверное, чтобы удобнее было записывать в столбик числа. А еще, чтобы легче было чертить. Клеточки на бумаге позволяют многие построения проводить только с помощью одной линейки, причем на этой линейке может даже не быть делений (шкалы). Но нужно помнить свойства геометрических фигур, ведь именно они позволяют использовать клеточки в полной мере.*

Например, мы знаем, что диагонали прямоугольника при пересечении делятся пополам. Это свойство поможет нам разделить отрезок пополам (рис. 233):

- 1) чертим прямоугольник так, чтобы данный отрезок был его диагональю;
- 2) проводим в нем вторую диагональ.

Много полезного можно получить из ЭКСПЕРИМЕНТОВ с прямоугольным треугольником на клетчатой бумаге.

1. Начертите произвольный прямоугольный треугольник (1), а потом поверните его на  $90^\circ$  (рис. 234). Чему равен угол между большими сторонами получившихся треугольников? Измерьте его. Объясните результат.
2. Используя результат предыдущего опыта, постройте:
  - а) перпендикуляр к отрезку, соединившему два любых узла клетчатой бумаги;
  - б) перпендикуляр к отрезку, проведенный через его конец.
3. Постройте квадрат со стороной AB, где A и B — узлы клетчатой бумаги и отрезок AB не проходит по сторонам клеток.



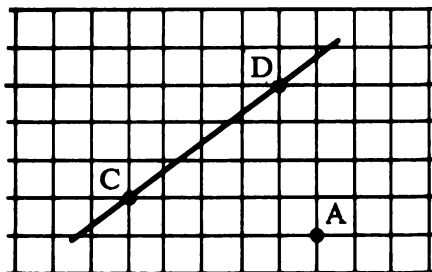


Рис. 235

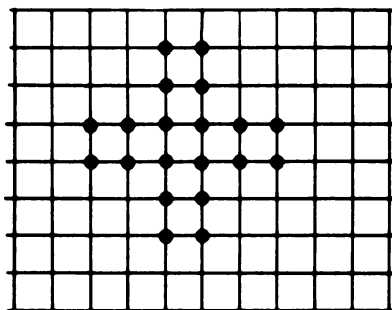


Рис. 236

4. Через точку A проведите прямую, параллельную прямой CD (рис. 235).
5. Постройте равнобедренный непрямоугольный треугольник (любой).
6. Начертите окружность радиусом 13 клеточек с центром в вершине клеточки (циркулем). Через какие точки она проходит? Сформулируйте рекомендации для изображения окружности от руки по клеточкам, используя слова вправо, влево, вверх, вниз. (Кстати, помните ли вы правило, позволяющее изображать от руки окружность на клетчатой бумаге?)
7. Вершины треугольника лежат в узлах клеток. Как найти площадь этого треугольника, если это:
  - а) прямоугольный треугольник, две стороны которого проходят по сторонам клеток;
  - б) прямоугольный треугольник, большая сторона которого проходит по сторонам клеток;
  - в) произвольный треугольник?
8. Сколько квадратов с вершинами в указанных точках (рис. 236) можно нарисовать? Попробуйте убрать шесть точек так, чтобы не осталось ни одного квадрата.
9. Нарисуйте два разных прямоугольных треугольника, у которых площади: а) равны двум клеткам; б) равны трем клеткам; в) равны 4,5 клеткам.
10. Нарисуйте квадрат площадью 10 клеток, 17 клеток, 26 клеток (используйте задания 7 и 9).
11. Нарисуйте несколько различных треугольников с вершинами в узлах, но таких, что ни внутри, ни на границе нет ни одного узла. Чему равна площадь каждого из изображенных вами треугольников?
12. Нарисуйте произвольный многоугольник с вершинами в узлах.

Оказывается, существует удобная формула, с помощью которой можно вычислять площадь любого многоугольника (эта формула названа именем немецкого математика Пика, открывшего ее). Пересчитаем число узлов внутри многоугольника (пусть это будет число  $a$ ), а затем число узлов на границе, включая вершины (обозначим это число  $b$ ). Тогда площадь многоугольника равна числу  $a + b/2 - 1$ . Проверьте справедливость этой формулы для изображенного вами многоугольника. Можно ли выбрать узлы клетчатой бумаги так, чтобы площадь получившегося многоугольника была равна  $7\frac{1}{2}$ ,  $3\frac{1}{3}$ ?

## § 28. ЗЕРКАЛЬНОЕ ОТРАЖЕНИЕ

---

*Ежедневно каждый из нас по несколько раз в день видит свое отражение в зеркале. Это настолько обычно, что мы не удивляемся, не задаем вопросов, не делаем открытий. И только философы и математики не теряют способности удивляться. Вот что написал немецкий философ Иммануил Кант о зеркальном отражении:*

*«Что может быть больше похоже на мою руку или мое ухо, чем их собственное отражение в зеркале? И все же руку, которую я вижу в зеркале, нельзя поставить на место настоящей руки...»*

---

Что же меняется в предмете при его отражении в зеркале? Проведем ОПЫТЫ С ЗЕРКАЛАМИ. Постарайтесь подметить особенности зеркального отражения и сделать из каждого опыта выводы. Выводы запишите в тетради.

Напишите свое имя печатными буквами в столбик и посмотрите на его отражение в зеркале. Поворачивает ли зеркало ваше имя? А имя ЮРА? Чем отличаются записи МАША и ЮРА (рис. 237)? Полоски с именами расположите параллельно поверхности зеркала.

Проверьте, меняет ли зеркало местами:

а) левую и правую стороны, верх и низ, предметы спереди и сзади вас, если вы стоите лицом к зеркалу (рис. 238)? А если вы встанете к зеркалу боком (рис. 239)?

б) последовательность предметов, лежащих на столе, если поверхность стола перпендикулярна зеркалу (рис. 240)?

Представьте себя стоящим на зеркальном полу. Что меняется местами (рис. 241)?

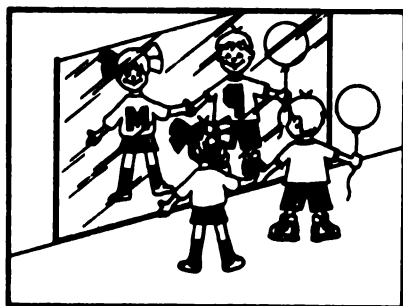


Рис. 237

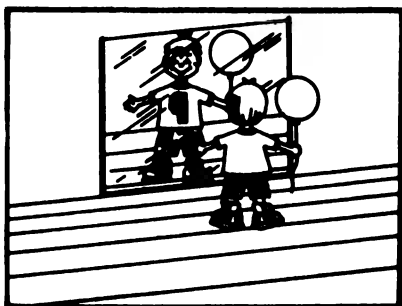


Рис. 238

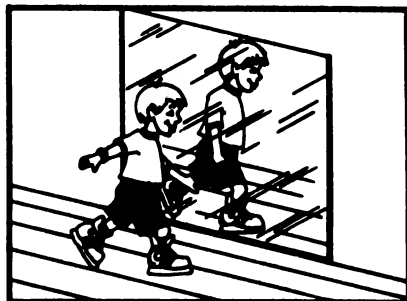


Рис. 239

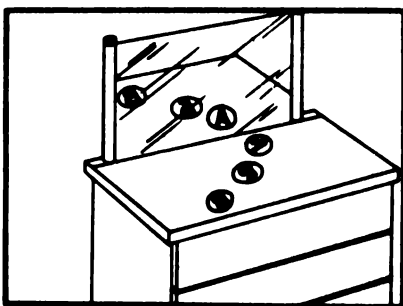


Рис. 240

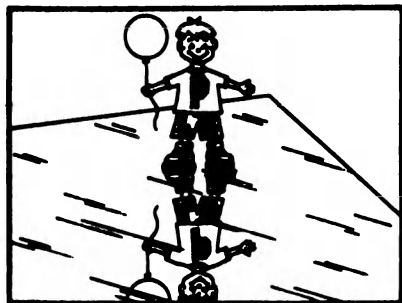


Рис. 241



Рис. 242

На полоске бумаги горизонтально печатными буквами написаны слова ЧАЙ и КОФЕ. Положите эту полоску перед зеркалом на стол. Почему зеркало не перевернуло слово КОФЕ и до неузнаваемости изменило слово ЧАЙ (рис. 242)?

Поставьте два зеркала под прямым углом друг к другу. Поменялись ли на изображении местами правая и левая стороны? В зеркалах, стоящих перпендикулярно друг к другу, мы видим себя такими, какими видят нас другие люди. Почему?

Интересно, а какое изображение получится, если линия соединений зеркал будет горизонтальной?

Помните ли вы волшебные картинки в калейдоскопе, которые менялись от его малейшего поворота? Они тоже получены путем отражения в нескольких зеркалах мелких кусочков разноцветного стекла. Сделайте свой калейдоскоп из двух плоских зеркал, поставленных на лист белой бумаги рядом друг с другом. На листе между зеркалами нарисуйте какую-нибудь фигуру или произвольную линию. Измените угол между зеркалами. Сколько раз зеркала отражаются друг в друге? Как зависит рисунок в вашем калейдоскопе от угла между зеркалами? Сравните рисунки, если угол между зеркалами равен  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  (эти углы начертите с помощью транспортира на листе бумаги под зеркалами). Попробуйте зарисовать их в тетради. Какой рисунок вам понравился больше всего?

Хоть и похожи друг на друга объект и его зеркальное отражение, но все-таки разница между ними огромная. Попробуйте прочитать книгу, глядя не в нее, а в ее отражение в зеркале. Удастся ли вам написать хоть строку, глядя не на лист бумаги, а на его зеркальное отражение?

## § 28. СИММЕТРИЯ

---

*Опыты с зеркалами позволили нам прикоснуться к удивительному математическому явлению — СИММЕТРИИ. В древности слово «симметрия» употреблялось как «гармония», «красота». Действительно, по-гречески слово означает «соразмерность, пропорциональность, одинаковость в расположении частей».*

---

Посмотрите на кленовый лист, снежинку, бабочку. Их объединяет то, что они симметричны. Если поставить зеркальце вдоль прочерченной на каждом рисунке прямой, то отраженная в зеркале половинка фигуры дополнит ее до целой (такой же, как исходная фигура). Поэтому такая симметрия называется **ЗЕРКАЛЬНОЙ** (или **ОСЕВОЙ**, если речь идет о плоскости). Прямая, вдоль которой поставлено зеркало, называется **ОСЬЮ СИММЕТРИИ**. Если симметричную фигуру сложить пополам вдоль оси симметрии, то ее части совпадут (рис. 243).

Среди фигур, изображенных на рис. 244, выберите симметричные и проведите в них всевозможные оси симметрии.

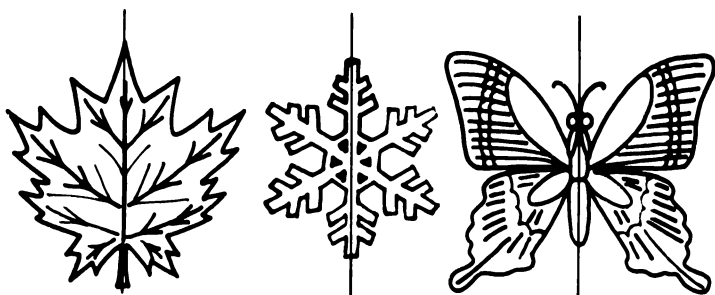


Рис. 243

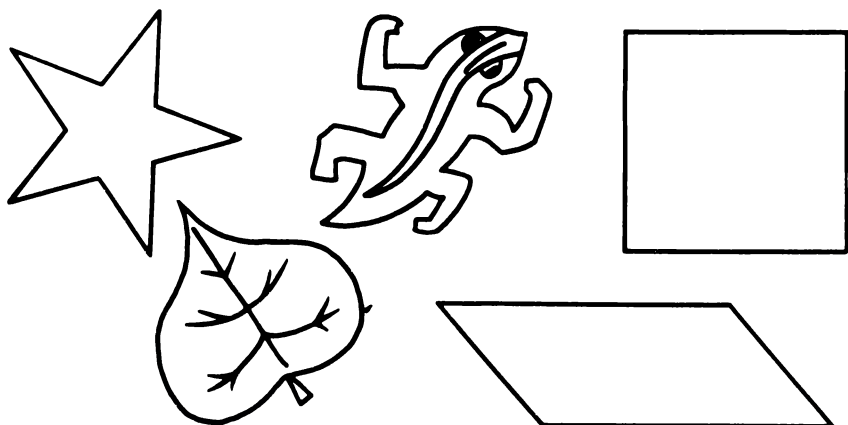


Рис. 244

Издавна человек использовал симметрию в архитектуре. Древним храмам, башням средневековых замков, современным зданиям она придает гармоничность, законченность (рис. 245).

**Найдите как можно больше симметричных предметов, сооружений в окружающей обстановке дома и на улице.**

Сравним две фигуры (кляксу и ажурную бумажную салфетку или «снежинку»). Клякса получилась так: на лист бумаги капнули чернил, сложили лист вдвое и затем разогнули. Линия сгиба — ось симметрии кляксы. Клякса (рис. 246) имеет одну (вертикальную) ось симметрии. Аналогичным образом получилась «снежинка», только лист бумаги согнули несколько раз, вырезали из этого «слоеного листа» кусок, а затем разогнули лист. У «снежинки» несколько линий сгиба, и все они являются осями симметрии. У этой «снежинки» (рис. 247) четыре оси симметрии. У геометрических фигур может быть одна или несколько осей симметрии, а может и не быть вовсе.



Рис. 245



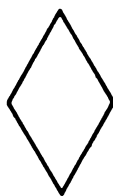
Рис. 246



Рис. 247



прямоугольник



ромб



квадрат



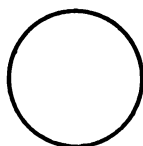
произвольный  
треугольник



равнобедренный  
треугольник



правильный  
треугольник



круг



произвольный  
параллелограмм



правильный  
шестиугольник

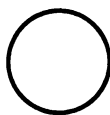
Рис. 248



1



2



3



4



5



6

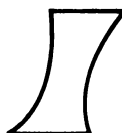
Рис. 249



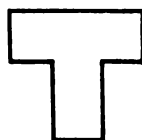
1



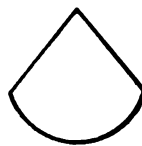
2



3



4



5

Рис. 250

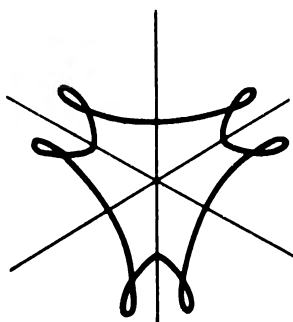


Рис. 251

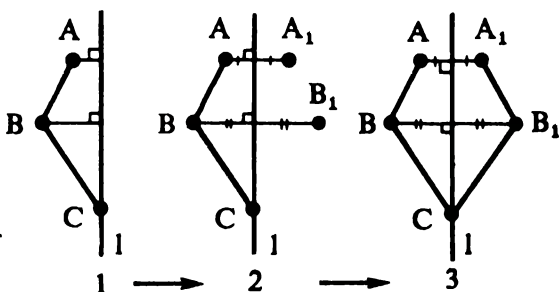


Рис. 252

Мысленно перегибая бумагу, определите, сколько осей симметрии имеет каждая из фигур, показанных на (рис. 248). Как расположены оси симметрии фигуры, если их больше двух?

Какая из изображенных на рис. 248 фигур «самая симметричная»?

Какая самая «несимметричная»?

Определите, что общего у фигур, изображенных на рис. 249.

Какая из фигур, приведенных на рис. 250, лишняя?

1. Известно, что фигура имеет две оси симметрии. Чему равен угол между осями?

Вспомним опыт №6 с двумя плоскими зеркалами (см. § 28). С помощью составленного из двух зеркал калейдоскопа нам удавалось получать симметричные фигуры. Зеркально отражаясь, нарисованная на бумаге линия сама «достраивала» себя до некоторой симметричной фигуры.

Например, если зеркала стоят под углом  $60^\circ$  друг к другу, то линия отражается шесть раз (рис. 251) и полученная фигура имеет три оси симметрии.

Изобразите в виде прямых два зеркала под углом  $90^\circ$  друг к другу. Затем нарисуйте в одном из углов какую-либо линию и, не пользуясь настоящими зеркалами, дорисуйте ее до симметричной фигуры, которая получилась бы при отражении в зеркалах.

В предыдущем задании построения выполнялись на глаз. А как точно нарисовать отражение фигуры в зеркале?

Представим, что прямая  $l$  — зеркало (или **ОСЬ СИММЕТРИИ**). Построим отражение ломаной  $ABC$  (рис. 252).



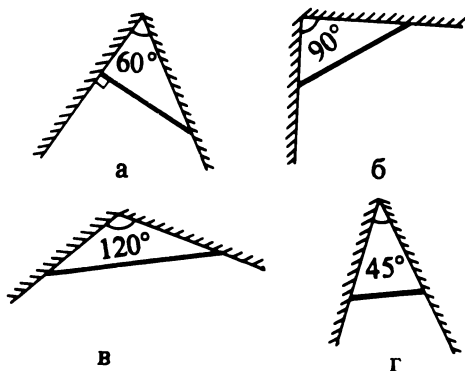


Рис. 253

1. Опускаем перпендикулярные отрезки на прямую  $l$  из точек отражаемой линии.
2. Продолжаем их «за зеркало» на такое же расстояние (равное длине соответствующего отрезка).
3. Соединяем полученные точки. Ломаная  $A_1B_1C_1$  — отражение  $ABC$ .

Пусть два зеркала поставлены параллельно друг другу отражающими поверхностями внутрь. Между ними на бумаге нарисована некоторая линия. Нарисуйте отражение этой линии в каждом из зеркал.

Два зеркала стоят перпендикулярно друг к другу. Между ними нарисована кривая, идущая от зеркала к зеркалу. Сколько раз отразится кривая в зеркалах? Сколько осей симметрии имеет полученная фигура? Прodelайте опыт.

Дорисуйте фигуру при ее отражении в зеркале (рис. 253). Сколько осей симметрии у каждой из получившихся фигур?

Две прямые, пересекающиеся под углом  $15^\circ$ , являются осями симметрии некоторого многоугольника. Какое наименьшее число вершин может иметь этот многоугольник?

Кроме осевой и зеркальной симметрии существует еще и ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ. Она характеризуется наличием центра симметрии — точки  $O$ , обладающей определенным свойством. Можно сказать, что



точка  $O$  является центром симметрии, если при повороте вокруг точки  $O$  на  $180^\circ$  фигура переходит сама в себя (рис. 254).

Но такое определение удобно лишь для плоскости. А как быть с пространственными фигурами (тeлaми)? Ведь понятие центральной симметрии распространяется и на трехмерное пространство.

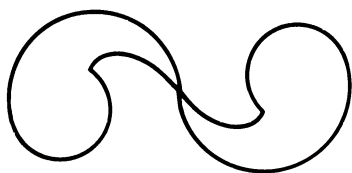


Рис. 254

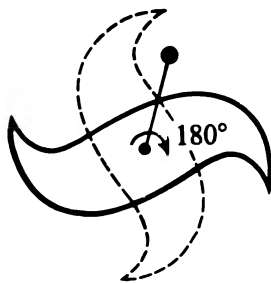


Рис. 255

Дайте определение центральной симметрии, удобное и для пространственных тел.

Приведите примеры плоских фигур, имеющих центр симметрии, но не имеющих оси симметрии. А теперь наоборот, фигур, имеющих ось (или оси) симметрии, но не имеющих центра симметрии.

Если фигура имеет и оси симметрии и центр симметрии, то подумайте каким может быть число осей симметрии такой фигуры?

Легко проверить, является ли фигура центрально-симметричной или нет, с помощью обычной иголки. Проколов фигуру в предполагаемом центре и обведя ее контур, надо повернуть фигуру на  $180^\circ$  вокруг иглолочки.

Если фигура «вошла» в свой контур, то она центрально-симметрична (рис. 255).

## § 30. БОРДЮРЫ

---

*«Симметрия... есть идея, с помощью которой человек веками пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство». Эти слова принадлежат известному математику нашего столетия Герману Вейлю.*

---

Как вырезаются бумажные снежинки? Лист бумаги, чаще квадратный, складывается вдвое по диагоналям; полученный таким образом равнобедренный треугольник складывается пополам так, чтобы совпали боковые стороны; новый треугольник складывается еще раз и т. д. (рис. 256). В сложенной бумаге вырезается

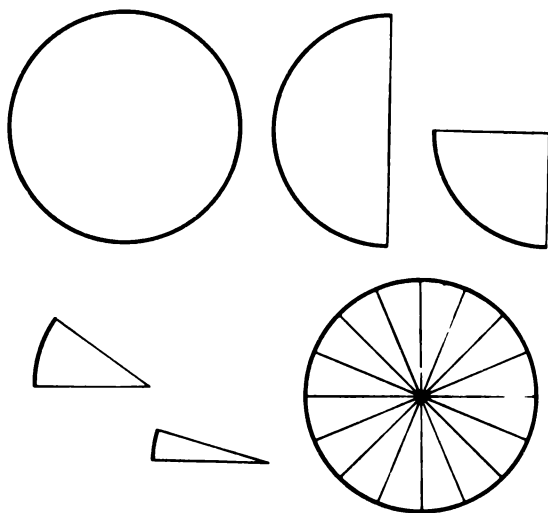


Рис. 256

При однократном перегибании бумаги вырезанная снежинка имеет одну ось симметрии. Сколько осей симметрии будет иметь «снежинка», если бумагу перегнуть 2, 3, 4, 5 раз? Во сколько раз новое перегибание увеличивает число существующих осей симметрии? Прозэкспериментируйте с бумагой (лучше, если это будет тонкая бумага) и ответьте на эти вопросы.

Все снежинки, которые у вас получились, не совсем настоящие. Дело в том, что у настоящих, природных снежинок ВСЕГДА ТРИ ОСИ СИММЕТРИИ. Как же сделать «настоящую» снежинку? Надо круг с помощью циркуля или транспортира разделить на шесть равных частей (подумайте, почему на шесть) и свернуть по диаметрам в любом порядке. Разметьте бумажный круг и вырежьте такую снежинку.

Подумайте, как получить «снежинку» с произвольным количеством осей симметрии? На сколько частей нужно разделить круг, чтобы у снежинки было  $n$  осей симметрии?

Из бумаги вырезаются и очень красивые симметричные ленты.

Возьмите полоску бумаги шириной 5 см и длиной около 20 см. Сложите ее «гармошкой» и нарисуйте какой-нибудь рисунок, касающийся линии сгиба (рис. 257, а). Вырежьте фигуру, оставляя участки на линиях сгиба неразрезанными (подумайте, почему); разверните полученную «гармошку».

У вас получилось кружево (рис. 257, б).

Если ленту предварительно сложить вдвое вдоль, а затем «гармошкой», то получится лента, симметричная относительно горизонтальной оси (рис. 258).

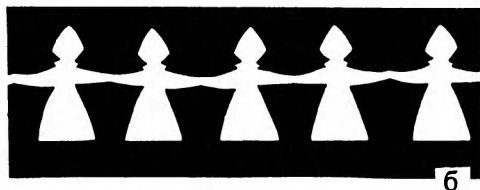
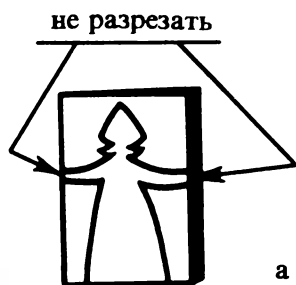


Рис. 257

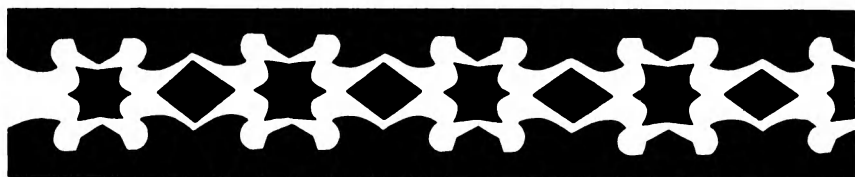


Рис. 258

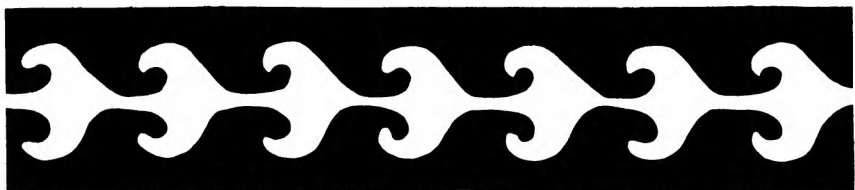


Рис. 259

А эта лента (рис. 259) не совсем обычная. У нее нет вертикальных осей симметрии. Рассмотрите внимательно слои этой ленты. Как она должна быть сложена? Такие ленты вырезаются не ножницами, а ножом или лезвием: бумага «наворачивается» на линейку или другую жесткую основу поперек, с двух сторон на ней рисуется одинаковый рисунок, и бумага прорезается до основы. Таким образом, четные и нечетные слои вырезаются отдельно.

Рассмотрев рисунки, вырежьте свои оригинальные ленты.

Орнаменты в виде лент (БОРДЮРЫ) применяют маляры и художники при оформлении комнат, зданий. Для выполнения этих орнаментов изготавливают ТРАФАРЕТ. Трафарет представляет рисунок, вырезанный на листе картона или какого-либо другого плотного материала. Маляр передвигает трафарет, переворачивая или не переворачивая его, обводит контур, повторяя рисунок, и получает орнамент.



а



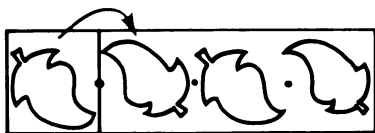
б

параллельный перенос



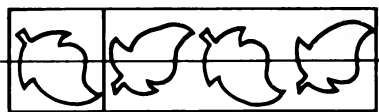
в

зеркальная симметрия  
относительно вертикальной оси



г

поворот на  $180^\circ$  вокруг точки  
 $O$  (центральная симметрия)



д

симметрия относительно  
горизонтальной оси +  
параллельный перенос

Рис. 260

**Какие бордюры можно получить из трафарета, сдвигая его, например вправо?**

Пусть мы вырезали несимметричный трафарет (рис. 260, а). Передвинем трафарет вправо на расстояние, равное ширине трафарета (такое преобразование называется ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПЕРЕНОСОМ). Получим бордюр, показанный на рис. 260, б. Отражаясь симметрично относительно вертикальной оси, трафарет даст бордюр, показанный на рис. 260, в. Если трафарет поворачивать вокруг точки  $O$  (центра симметрии) на  $180^\circ$ , то бордюр уже будет иным (рис. 260, г). Отражением относительно горизонтальной оси и последующим переносом трафарета получим еще один орнамент (рис. 260, д).

**Придумайте трафарет и нарисуйте с его помощью разные бордюры.**

**Возьмите трафарет, симметричный относительно вертикальной оси, например такой, как на рис. 261. Сколько различных бордюров можно получить с его помощью? Какие преобразования дают одинаковые бордюры? Объясните, почему так получается. Вырезав трафарет, изобразите эти бордюры.**



Рис. 261

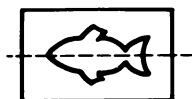


Рис. 262



Рис. 263

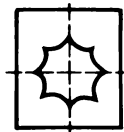


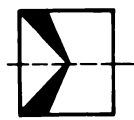
Рис. 264



а) несимметричный



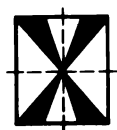
б) симметричный относительно вертикальной оси



в) симметричный относительно горизонтальной оси



г) центрально-симметричный



д) имеющий две оси симметрии

Рис. 265

Определите, сколько разных бордюров получится из трафарета, симметричного относительно горизонтальной оси (рис. 262). Какие преобразования дают одинаковый результат? Почему?

Мы можем взять и трафарет, рисунок которого совпадает сам с собой при повороте его на  $180^\circ$  вокруг центра (точки, лежащей внутри рисунка), например такой, как на рис. 263.

**Нарисуйте различные бордюры с его помощью. Совпадают ли результаты каких-либо преобразований? Дайте полный, обоснованный, ответ на этот вопрос.**

И последний вид трафарета — трафарет, имеющий две оси симметрии (вертикальную и горизонтальную; рис. 264).

**Сколько различных бордюров можно составить из него? Почему?**

Итак, мы рассмотрели пять видов трафаретов. Их схематично можно изобразить так, как на рис. 265, а — д.

**Придумайте и нарисуйте свои трафареты этих пяти видов.**

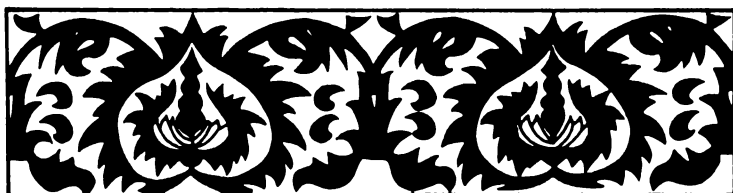
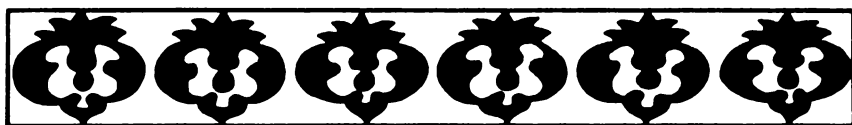


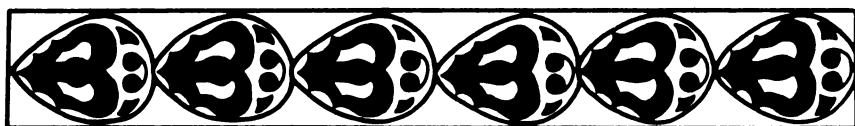
Рис. 266



а



б



в



г



д



е

Рис. 267

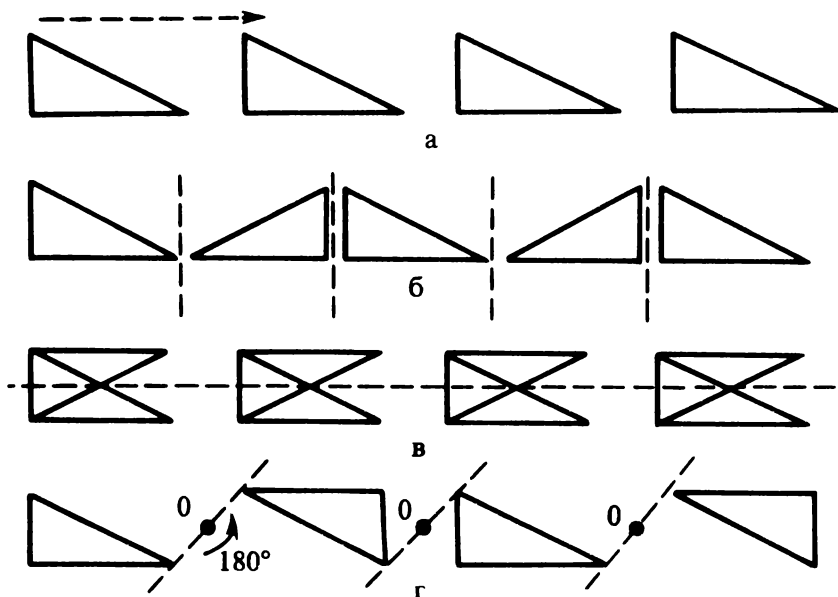


Рис. 268

На Руси издревле люди старались украсить терема, церкви. Они придумывали удивительные замысловатые орнаменты, в основном цветочные. В XVII в. русский зодчий Степан Иванов создал свой орнамент, который назвал «Павлинье око», так как он был похож на рисунок пера павлиньего хвоста.

Рассмотрите этот орнамент, выделите в нем трафарет. Подумайте, к какому типу можно его отнести. Как получен этот бордюр (рис. 266)?

Гуляя по улицам, найдите различные бордюры на зданиях, в переходах, в метро и т. д..

Определите, из какого трафарета и с помощью какого преобразования получены бордюры, показанные на рис. 267, а — е.

Нарисуйте какие-нибудь бордюры, используя в качестве трафарета буквы русского или латинского алфавита.



Еще раз напомним, какие преобразования мы использовали для создания линейных орнаментов - бордюров:

- 1) параллельный перенос (рис. 268, а);
- 2) зеркальная симметрия: а) с вертикальной осью (рис. 268, б); (б) с горизонтальной осью (рис. 268, в);
- 3) поворотная (центральная) симметрия (рис. 268, г).

Вдумайтесь в названия этих преобразований и объясните их.



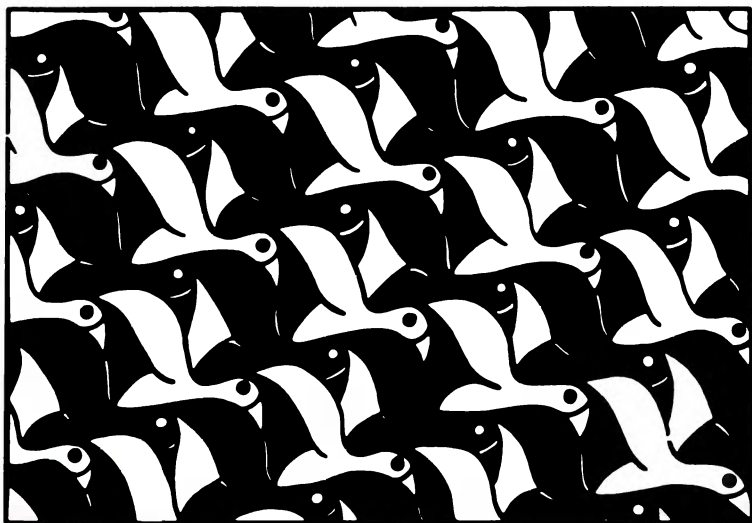


Рис. 269

## § 31. ОРНАМЕНТЫ

---

*«Искусство орнамента содержит в неявном виде наиболее древнюю часть известной нам высшей математики.»*

*Герман Вейль*

---

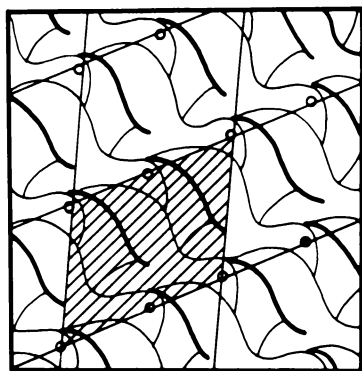
Кроме рассмотренных линейных орнаментов (бордюров) существуют плоские орнаменты, заполняющие лист бумаги (плоскость) без промежутков. Такие орнаменты называют ПАРКЕТАМИ. Это такие же паркетные доски, как в наших квартирах, как орнаменты на линолеуме, как рисунки на обоях.

**Рассмотрите паркет, созданный Морисом Эшером. Можете ли вы догадаться, как он получен (рис. 269)?**

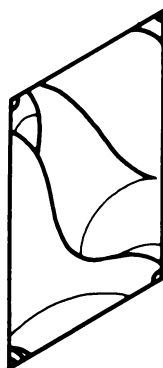
Кажется, что придумать такой затейливый орнамент невероятно сложно. Конечно, без таланта здесь никак не обойтись. Но нужны и некоторые геометрические знания и умения. Овладев ими, каждый школьник сможет нарисовать свой неповторимый орнамент (паркет).

На паркете Мориса Эшера нас будут интересовать лишь линии, их изгибы и повторы.

Расчертив рисунок параллельными прямыми и получив таким



a)



б)

Рис. 270

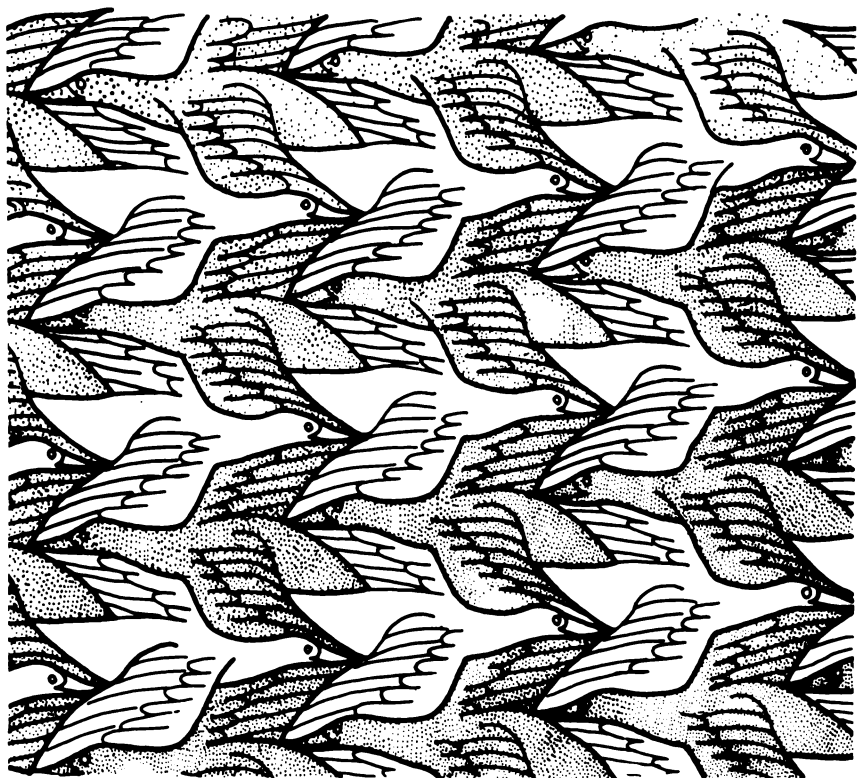


Рис. 271

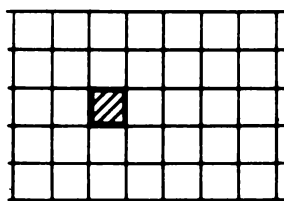


Рис. 272

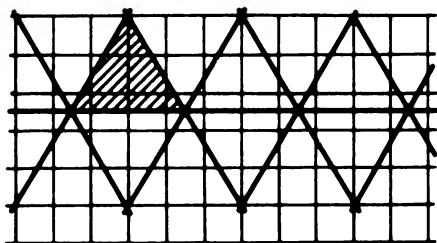


Рис. 274

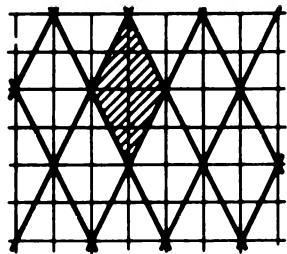
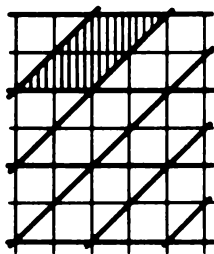
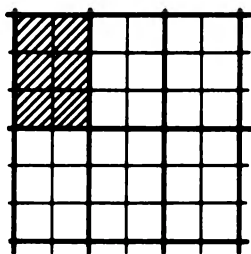


Рис. 273

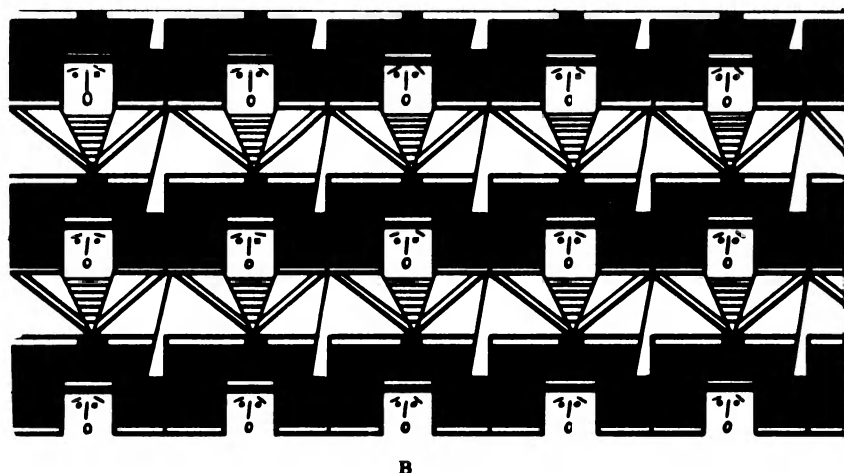
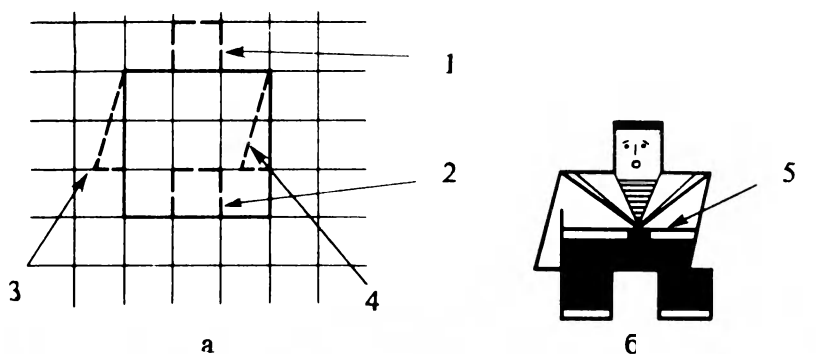
образом сетку параллелограммов (рис. 270, а), мы видим, что орнамент получен параллельными переносами параллелограммов, внутри которых проведены некоторые линии (рис. 270, б). Именно из них-то и складывается птичья стая.

**Выделите элементарную ячейку (трафарет) орнамента на рис. 271.**

Паркетные настолько часто встречаются в жизни, что мы не замечаем их. Тетрадный лист в клеточку (рис. 272) — пример паркета с квадратной ячейкой. На этой решетке можно составить и другие паркетные (их можно назвать РЕШЕТКАМИ), например такие, как на рис. 273.

За элементарную ячейку можно взять и правильный треугольник. В этом случае плоскость заполняется без промежутков путем поворота треугольников вокруг их вершин на  $60^\circ$  (рис. 274).

1. Можно ли составить паркет из копий произвольного треугольника? Попробуйте сделать это. К какому виду решетки сведется такое покрытие плоскости?
  2. Покрывается ли плоскость копиями произвольного четырехугольника?
  3. Придумайте пятиугольную элементарную ячейку, из которой можно составить паркет.
  4. Можно ли замостить плоскость равными шестиугольниками?
- Из рассмотренных выше решеток можно сделать паркет с более хитрыми ячейками.



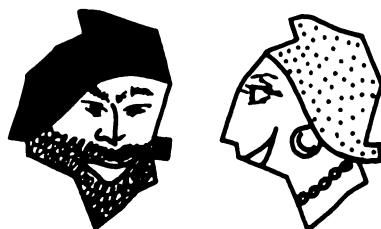
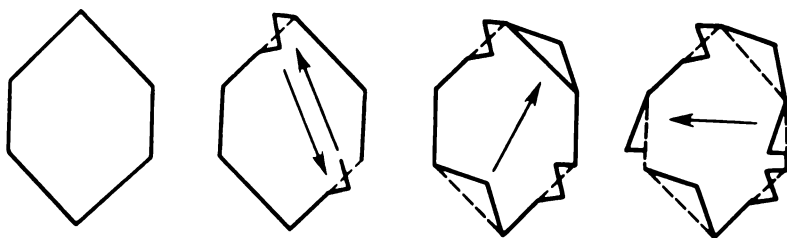
В  
Рис. 275

Например, возьмем за основу квадратную решетку (рис. 275, а). Ячейка — квадрат 3 х 3 клетки.

1. Изменим верхнюю сторону квадрата.
2. Тогда, чтобы ячейки «вдвинулись» одна в другую, так же надо изменить и противоположную сторону.
3. К левой стороне квадрата пририсует треугольник.
4. Такой же треугольник мы должны вырезать с противоположной стороны.
5. Вот какая получилась ячейка (рис. 275, б). А теперь разисуем ее.

У нас получился «Хор моряков» (рис. 275, в). Этот паркет составлен вашим сверстником — шестиклассником Борей Сторонкиным.

Придумайте и вы свой паркет!



а

«РАЗБОЙНИЧКИ»



б

Рис. 276

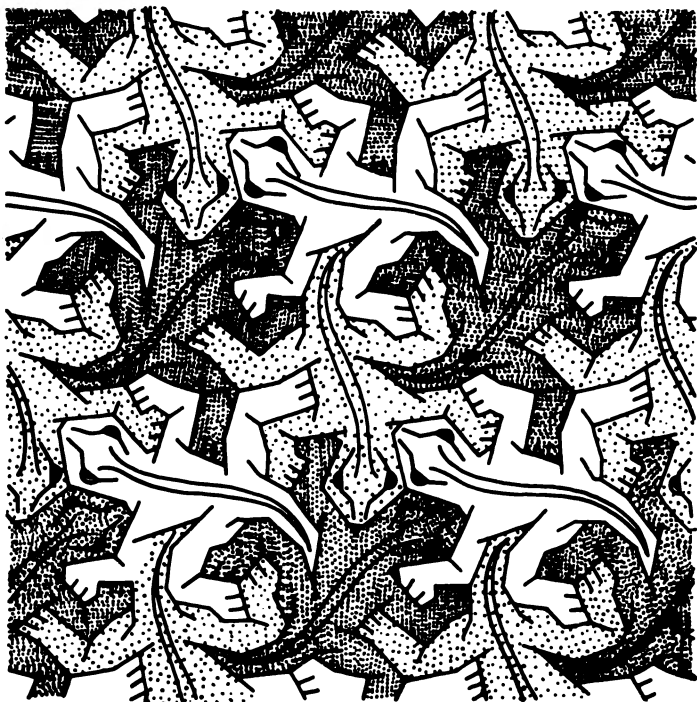


Рис. 277

Следующие образцы паркета еще раз покажут технологию изготовления плоских орнаментов и, может быть, натолкнут вас на собственное оригинальное решение (рис. 276, а).

Используя тот же контур, но с другим рисунком внутри, можно нарисовать таких симпатичных собачек (рис. 276, б).

5. На рисунке М.Эшера «Рептилии» выделите элементарную ячейку и выясните, с помощью каких геометрических преобразований получен этот орнамент (рис. 277).

## § 32. СИММЕТРИЯ ПОМОГАЕТ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ

*Впервые используя слово «симметрия» (см. § 29), мы дали его перевод с греческого языка — «одинаковость в расположении частей». Этот перевод, а также опыты, проведенные в § 28, думаю, помогут вам понять основные свойства симметрии, часто используемые при решении задач.*

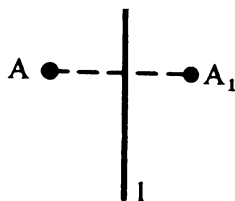


Рис. 278

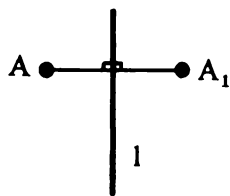


Рис. 279

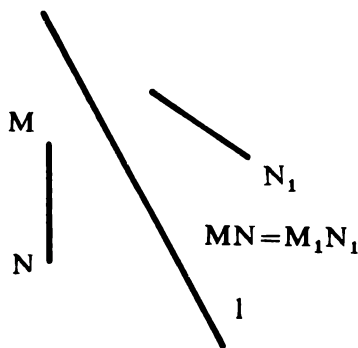


Рис. 280

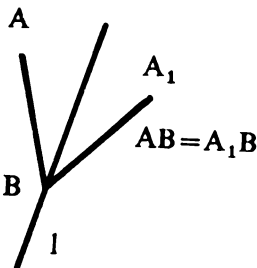


Рис. 281

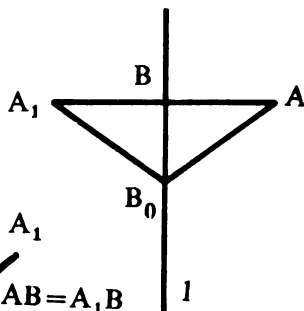


Рис. 282



1. Для любой точки плоскости всегда можно построить симметричную ей точку относительно некоторой прямой (рис. 278).

2. Отрезок, соединяющий симметричные точки, перпендикулярен оси симметрии и делится ею пополам (рис. 279).

3. Если отрезок  $MN$  симметричен отрезку относительно прямой  $l$ , то их длины равны (рис. 280).

4. Если точка  $A_1$  симметрична точке  $A$  относительно прямой  $l$ , то для любой точки  $B$  на этой прямой отрезки  $A_1B$  и  $AB$  равны (рис. 281).

Правило построения симметричных точек (см. § 29) и эти свойства применим для решения следующих геометрических задач.



Если  $A$  — некоторая точка плоскости, а  $B$  — точка на прямой  $l$ , то длина отрезка  $AB$  будет наименьшей, если отрезок  $AB$  перпендикулярен  $l$ .

Иными словами,

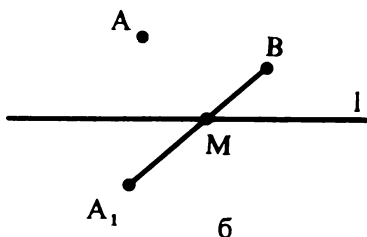
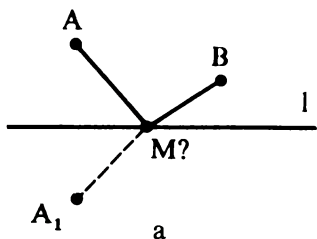


Рис. 283



кратчайшим путем от точки до прямой является путь по перпендикулярному к этой прямой направлению.

Докажем это. Возьмем точку  $B$  так, чтобы отрезок  $AB$  был перпендикулярен  $l$  (рис. 282). Пусть  $B_0$  — любая другая точка на  $l$ . Нам надо доказать, что  $AB$  меньше  $AB_0$ . Возьмем точку  $A_1$ , симметричную точке  $A$  относительно  $l$ . Тогда точка  $B$  будет лежать на отрезке  $AA_1$  (свойство 2) и  $AB = BA_1$  и  $AB_0 = B_0A_1$  (свойство 4). Отрезок  $AA_1$  короче ломаной  $AB_0A_1$ . Значит и  $AB$  меньше, чем  $AB_0$ , что требовалось доказать.

Если мы теперь нарисуем окружность с центром в точке  $A$ , проходящую через  $B$  (т.е.  $AB$  — радиус), то эта окружность будет иметь с прямой  $l$  единственную общую точку — точку  $B$ . В этом случае говорят, что окружность касается прямой  $l$  или что прямая  $l$  есть касательная к окружности.

По существу мы доказали одно очень важное свойство окружности и касательной к ней:



**прямая, перпендикулярная радиусу окружности и проходящая через конец этого радиуса, касается окружности.**

Следующая задача является классической задачей геометрии, входит в ее золотой фонд.

1. Дана прямая  $l$  и две точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от нее. Найдите на прямой такую точку  $M$ , чтобы путь из  $A$  в  $B$  через  $M$  был кратчайшим, т.е. длина ломаной  $AMB$  была наименьшей (рис. 283, а).

Задача решалась бы совсем легко, если бы точки  $A$  и  $B$  лежали по разные стороны от прямой  $l$ . Мы бы просто соединили их отрезком и на пересечении с прямой  $l$  получили бы точку  $M$ . Но мы знаем, что для точки  $A_1$ , симметричной точке  $A$  относительно прямой  $l$ ,  $A_1M = AM$ . Значит, путь  $A_1MB$  равен  $AMB$ . Отсюда и решение. Построим точку  $A_1$ , симметричную точке  $A$  относительно прямой  $l$  (рис. 283, б), проведем прямую  $A_1B$ . Тогда точка пересечения  $A_1B$  и  $l$  будет нужной нам точкой  $M$ .



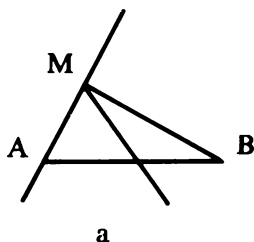


Рис. 284

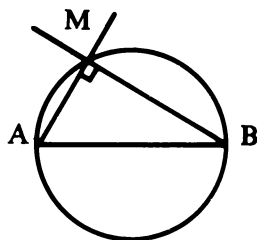
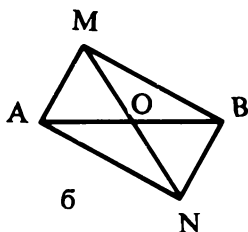


Рис. 285

Многие свойства окружности следуют из того, что она симметрична относительно любого своего диаметра.

Попробуйте объяснить (доказать) следующие два свойства окружности:

2. Две параллельные прямые пересекают окружность. Они отсекают на окружности две дуги, лежащие между этими прямыми. Оказывается, эти дуги всегда равны. Почему?
3. Возьмем окружность и точку A вне ее. Из этой точки к окружности можно провести две касательные. Пусть одна касается окружности в точке B, а другая — в точке C. Имеет ли место равенство  $AB = AC$ . Почему?

Кстати, именно это свойство симметрии окружности мы использовали в §20 при построении параллельных и перпендикулярных прямых.

4. Ученик нарисовал на доске окружность, отметил на ней точки A, B и C и стер ее, оставив лишь эти точки. Как восстановить окружность?
5. На плоскости дан острый угол и точка A внутри него. Найти на сторонах угла две точки M и N так, чтобы длина замкнутого пути AMNA ( $AM + MN + NA$ ) была наименьшей.

### § 33. ОДНО ВАЖНОЕ СВОЙСТВО ОКРУЖНОСТИ

*«Ни тридцать лет, ни тридцать столетий не оказывают никакого влияния на ясность или красоту геометрических истин.»*

*Так сказал английский математик Ч.Л.Догдсон, более известный во всем мире под псевдонимом Льюис Кэрролл, автор сказок о девочке Алисе.*

Каждая геометрическая фигура, и вы, конечно, это уже поняли, обладает многими интересными свойствами. Некоторые из этих свойств оказываются присущими только этой фигуре, являются характерными только для нее. Более того, используя эти свойства, можно совершенно иначе, с неожиданной точки зрения определить хорошо знакомую геометрическую фигуру. Ниже мы предлагаем несколько задач, две из которых с готовыми решениями. Хорошо разберитесь в них, чтобы суметь решить остальные задачи. Если это еще пока трудно для вас, не расстраивайтесь. Впереди достаточно времени: геометрия научит вас этому в старших классах.

1. Возьмем на плоскости какой-нибудь отрезок АВ. Проведем через точку А любую прямую и опустим из В перпендикуляр на эту прямую. Получим точку М (рис. 284, а). Из этой точки М отрезок АВ виден под прямым углом. Меняя прямую, проходящую через точку А, мы будем получать различные точки, точка М будет описывать некоторую линию. Так вот, оказывается, что точка М будет описывать окружность, у которой АВ является диаметром. Почему?

Попробуем это объяснить. Построим прямоугольный треугольник АМВ до прямоугольника АМВN (рис. 284, б).



Прямоугольник обладает тем свойством, что его диагонали равны между собой и делятся пополам в точке пересечения.

Если точка О — середина АВ, то ОМ — полдиагонали прямоугольника, т.е.  $ОМ = АВ/2$ . Если мы построим на АВ как на диаметре окружность и возьмем на ней любую точку М, то угол АМВ будет прямым. В самом деле если мы опустим из В перпендикуляр на прямую АМ, то, как мы уже знаем, основание этого перпендикуляра должно лежать на окружности, а значит, попасть в точку М, так как прямая и окружность пересекаются меньше, чем в двух или ровно в двух точках (рис. 285).

Полученный нами результат можно сформулировать также следующим образом.



Вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр, равен  $90^\circ$ .

Зная это свойство, можно пополнить набор построений, показанных в § 20.

2. Дана прямая  $l$  и точка А на ней. С помощью циркуля и линейки провести через А прямую, перпендикулярную  $l$ . Число проведенных при этом линий не должно быть больше трех (третьей должна быть искомая прямая).

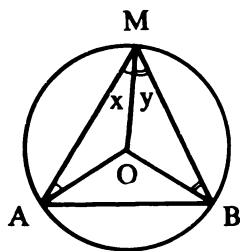


Рис. 286

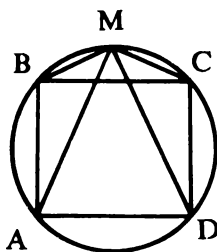


Рис. 287

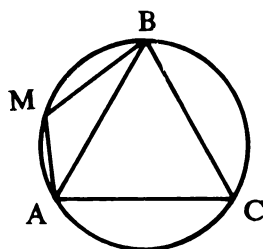


Рис. 288

Свойство угла, опирающегося на диаметр, является частным случаем следующего более общего свойства,



Возьмем окружность и две точки на ней A и B. Оказывается, какую бы точку M на окружности по одну сторону от AB мы ни взяли, все возникающие углы AMB будут равны между собой. Более того, если точка O (центр окружности) лежит с той же стороны от AB, что и точка M, то угол AMB равен половине угла AOB.

Чтобы объяснить, почему это так, нам потребуются два факта:

- а) сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ ;
- б) углы в равнобедренном треугольнике, лежащие против равных сторон, равны.

Пусть точка O лежит внутри треугольника AMB. Обозначим углы через X и Y, как на рис. 286, тогда угол AOB =  $180^\circ - 2X$ , а угол BOM =  $180^\circ - 2Y$ . Но сумма трех углов, сходящихся в точке O, равна  $360^\circ$ . Два из них мы знаем. Найдем угол AOB. Он равен  $360^\circ - (180^\circ - 2X) - (180^\circ - 2Y) = 2(X + Y)$ . Но угол AMB равен  $(X + Y)$ . Значит, в самом деле угол AOB в два раза больше угла AMB.

Рассмотрите самостоятельно случай, когда точка O расположена вне треугольника AMB (но M и O с одной стороны от AB). Теперь понятно, почему при перемещении точки M по дуге окружности угол AMB остается постоянным. y04

3. На рис. 287 ABCD — квадрат. Чему равны углы AMC, AMD, BMC?
4. На рис. 288 ABC — правильный треугольник. Чему равен угол AMB?
5. Чему равен угол ADC, если угол ABC равен  $40^\circ$  (рис. 289)?
6. На окружности радиусом 1 взяты три точки A, B, C так, что угол ACB равен  $30^\circ$ . Найдите длину отрезка AB.

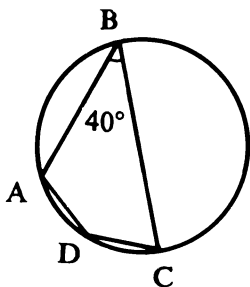


Рис. 289

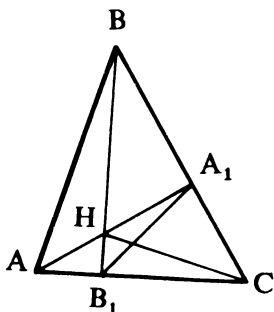


Рис. 290

7. В треугольнике ABC отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  перпендикулярны сторонам BC и AC (рис. 290). Докажите равенство углов  $HA_1B_1$  и  $HCB_1$ .
8. Через некоторую точку плоскости проведены три прямые, образующие между собой углы по  $60^\circ$ . Возьмем любую точку плоскости и опустим на эти три прямые перпендикуляры. Основания этих перпендикуляров служат вершинами правильного треугольника. Почему?

## § 34. ЗАДАЧИ, ГОЛОВОЛОМКИ, ИГРЫ

*Много прекрасных плодов растет в саду «Геометрия». Каждый может найти для себя задачу и интересную, и посильную. Но все же «В задачах тех ищи удачи, где получить рискуешь сдачи».*

1. Сколько граней у шестигранного карандаша?
2. Кузнецу принесли пять цепей, по три звена в каждой, и поручили соединить их в одну цепь. Кузнец решил раскрыть четыре кольца и снова их заковать. Нельзя ли выполнить ту же работу, раскрыв меньше колец?
3. Дан бумажный круг. Перегибанием бумаги найдите его центр.
4. Сделайте в тетрадном листке небольшой надрез, сквозь который можно пропустить монету.
5. ДЕСЯТЬ БАШЕН. В древности один правитель желал построить десять башен, соединенных между собой стенами. Стены должны тянуться пятью прямыми линиями, с четырьмя башнями на каждой линии. Приглашенный строитель

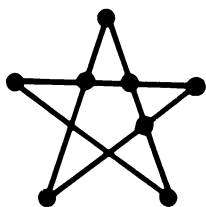


Рис. 291

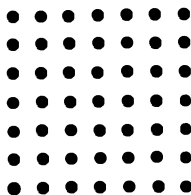


Рис. 292

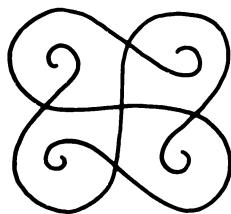


Рис. 293

представил план (рис. 291), но правитель остался недоволен им: ведь при таком расположении можно извне подойти к любой башне. А правителю хотелось, чтобы если не все, то хоть одна или две башни были защищены стеной от вторжения извне. Строитель возразил, что нельзя удовлетворить этому условию, но правитель настаивал на своем. Долго строитель ломал голову над задачей и наконец решил ее. Попробуйте и вы найти несколько решений этой проблемы.

6. ПЛОДОВЫЙ САД. В саду росло 49 деревьев (рис. 292). Садовник решил расчистить сад от лишних деревьев для цветников. Позвав работника, он дал ему такое распоряжение: «Оставь только пять рядов деревьев, по четыре дерева в каждом. Остальные сруби и возьми себе на дрова за работу». Когда вырубка закончилась, садовник вышел посмотреть на работу. К его огорчению, сад был почти опустошен: вместо 20 деревьев работник оставил всего только 10, срубив 39 деревьев.

- Почему ты вырубил так много? Ведь тебе сказано было оставить 20 деревьев! — распекал его садовник.

- Нет, не сказано: «20». Сказано было оставить 5 рядов по 4 дерева в каждом. Я так и сделал.

Как ухитрился он вырубить 39 деревьев и все-таки выполнить указание?

7. Всмотритесь внимательно в узор (рис. 293). Постарайтесь запомнить его хорошенько. А теперь нарисуйте этот узор по памяти!
8. Кусок бумаги имеет форму прямоугольника, одна сторона которого равна четырем, а другая — девяти единицам длины. Разрежьте этот прямоугольник на две равные части так, чтобы, сложив их определенным образом, получить квадрат.
9. Произвольный треугольник разрезать на три части так, чтобы можно было сложить прямоуголь-



Рис. 294

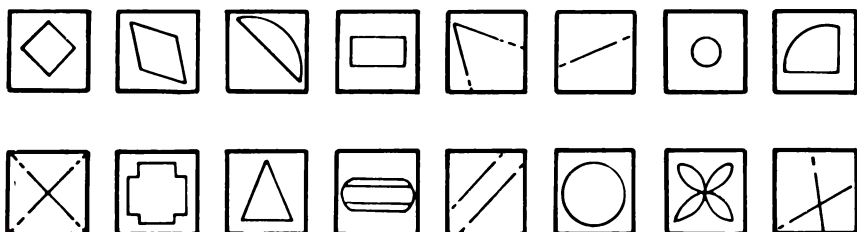


Рис. 295

10. Какое наибольшее число различных сторон может быть в шестиугольнике, имеющем ось симметрии?
11. Разрежьте правильную шестиконечную звезду на четыре части так, чтобы из них можно было составить параллелограмм.
12. Четвертые части квадрата и правильного треугольника отрезаны, как показано на рис. 294. Каждую из оставшихся частей этих фигур разделить на четыре равные части.
13. Дано игровое поле 4 x 4 и 16 квадратов с геометрическими фигурами, имеющими ось (одну или несколько) симметрии (рис. 295). Разместить квадраты в клетках поля так, чтобы ни по горизонтали, ни по вертикали не встречались фигуры, имеющие одинаковое число осей симметрии.
14. Игра-конкурс букв и слов:
  - а) назовите буквы, имеющие одну, две оси симметрии;
  - б) составьте слова, имеющие ось симметрии (горизонтальную или вертикальную), например, ТОПОТ, СОН.
15. Разделите лунный серп (рис. 296) двумя прямыми линиями на шесть частей.
16. Нарисуйте одним росчерком фигуры, изображенные на рис. 297 а, б.
17. Какое минимальное число плоских разрезов нужно сделать, чтобы разделить куб на 64 маленьких кубика? После каждого разреза разрешается перекладывать части куба как угодно.
18. Какой из восьми рисунков маляра накатал на стену изображенным на рис. 298 валиком?

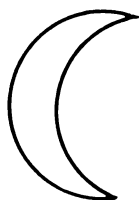
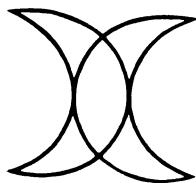
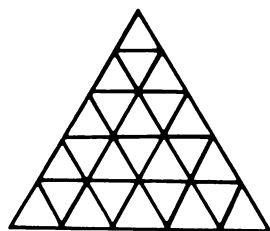


Рис. 296

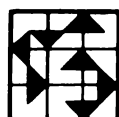
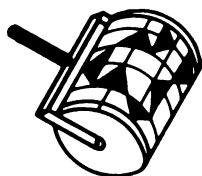


а

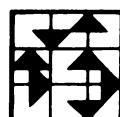
Рис. 297



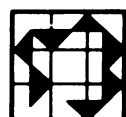
б



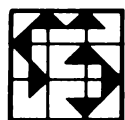
1



2



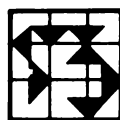
3



5



6



7



8

Рис. 298

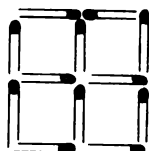


Рис. 299



Рис. 300

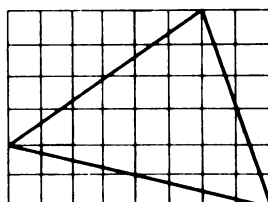
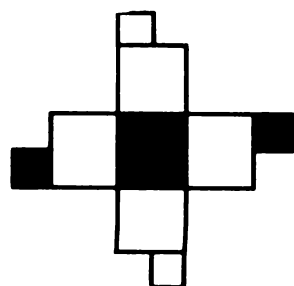


Рис. 301



1



2



3



4



5

Рис. 302

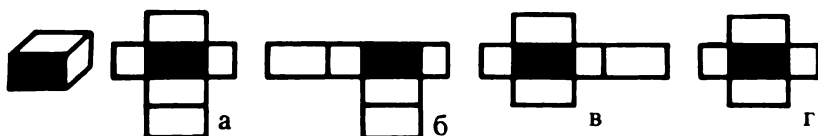


Рис. 303

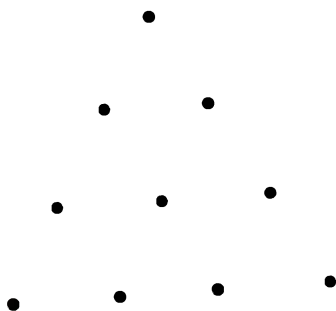


Рис. 304

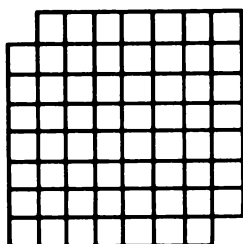


Рис. 305

19. Куб со стороной 1 м распилили на кубики со стороной 1 см. Получившиеся кубики выложили в ряд. Чему равна длина ряда?
20. Разрезать квадрат на пять прямоугольников так, чтобы у двух соседних прямоугольников стороны не совпадали.
21. Из 12 спичек сложены четыре квадрата (рис. 299). Сторона равна одной спичке. Переложите четыре спички так, чтобы получилось три квадрата. Переложите три спички так, чтобы получилось три квадрата.  
Переложите спички, чтобы получилось шесть квадратов.
22. Три спички расположены так, как показано на рис. 300. Добавьте еще только одну спичку так, чтобы концы спичек образовали квадрат.
23. Разрежьте правильный шестиугольник на девять одинаковых частей разными способами.
24. У мастера есть лист жести размером 22 x 15 кв.дм. Мастер хочет вырезать из него как можно больше прямоугольных заготовок размером 3 x 5 кв.дм. Помогите ему.
25. Найдите площадь треугольника, изображенного на рис. 301.
26. В математических рукописях XVIII в. можно встретить утверждение, что фигуры с равными периметрами ограничивают равные площади. Верно ли это? Приведите примеры.
27. Развертка какого куба дана на рис. 302?
28. Определите, из каких разверток можно сложить параллелепипед (рис. 303).
29. Десять точек расположены так, как показано на рис. 304.



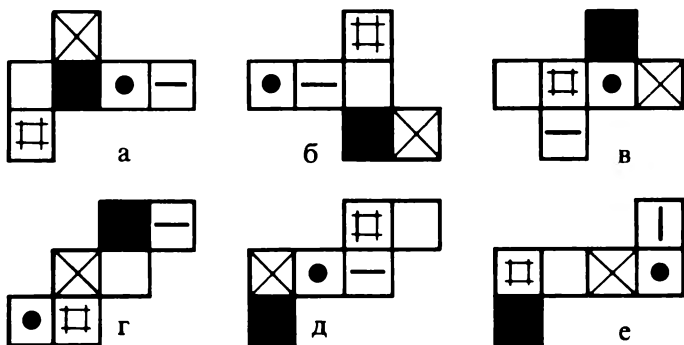


Рис. 306

Определите, сколько правильных треугольников можно построить, считая эти точки вершинами треугольников. Какое наименьшее количество точек надо отбросить, чтобы не осталось ни одного правильного треугольника?

30. На книжной полке стоит трехтомник. Толщина каждого тома 3,5 см. Книжный червяк прополз от первой страницы первого тома до последней страницы третьего тома (по прямой линии). Какой путь он проделал? Толщиной обложки пренебречь.
31. Можно ли костяшками домино (каждая кость из двух клеток) выложить доску 8 x 8 клеток с двумя вырезанными противоположными уголками (рис. 305)?
32. Может ли быть треугольник с очень большими сторонами и очень маленькой площадью? Приведите пример.
33. Какие фигуры могут получиться при пересечении двух треугольников? А при пересечении двух четырехугольников? Возможно ли, чтобы при пересечении двух четырехугольников образовалось два четырехугольника? А три четырехугольника?
34. В скольких точках прямая может пересекать контур треугольника? четырехугольника? пятиугольника и т.д.?
35. Равны ли два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?
36. Как посадить девять деревьев в десять рядов по три дерева в каждом ряду?
37. На сколько частей можно разбить плоскость двумя прямыми? тремя прямыми? четырьмя прямыми? На сколько частей разбивают плоскость прямые, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, если прямых: а) четыре; б) пять; в) шесть?
38. Для двух кубиков сделали по три развертки и перемешали их (рис. 306, а—е). Найдите развертки каждого кубика.

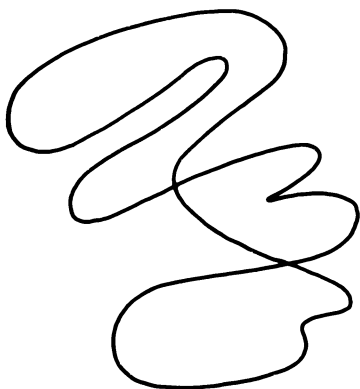


Рис. 307

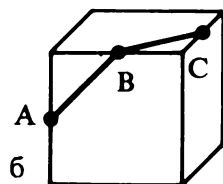
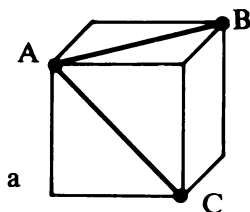
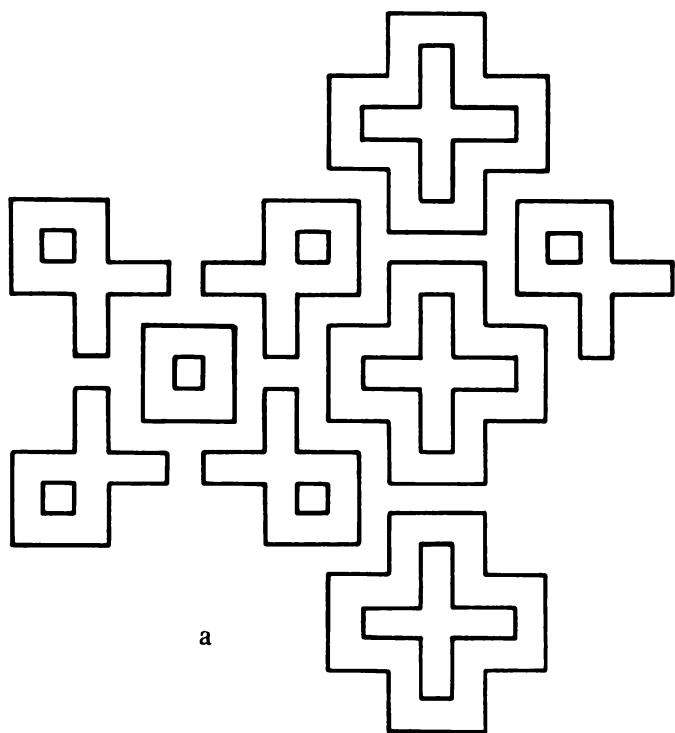
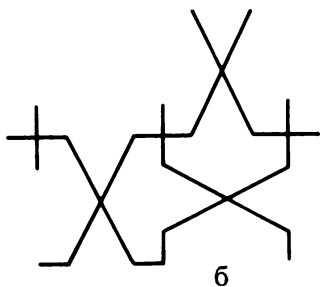


Рис. 308

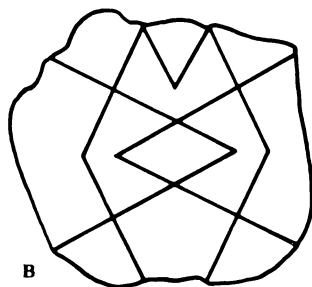
39. Вдоль бумажной ленты длиной 60 см проведена с двух сторон посередине прямая линия. Из этой ленты склеили лист Мебиуса. Какой путь проползет муравей вдоль отмеченной линии, пока не вернется в исходную точку?
40. На плоскости нарисована окружность. С помощью чертежного треугольника найти ее центр.
41. Расставьте на плоскости шесть точек таким образом, что если соединить первую точку со второй, вторую с третьей и т. д., а шестую вновь с первой, то каждый из шести отрезков ровно один раз пересекается с каким-либо другим отрезком.
42. На бумаге нарисована замкнутая линия (рис. 307). Перерисуйте эту линию в тетрадь. А теперь попробуйте другим цветом провести какую-нибудь замкнутую линию, не проходящую через точки самопересечения уже проведенной линии и не самопересекающуюся на этой линии. Постарайтесь провести линию так, чтобы число точек пересечения линий разного цвета было бы нечетным. Как вы думаете, возможно ли это?
43. Чему равны углы между отрезками, проведенными на гранях куба (рис. 308)?
44. На рис. 309, а—в изображены части некоторых орнаментов. Внимательно рассмотрите их и, обнаружив закономерность в их построении, дорисуйте.
45. Рассмотрим линейку длиной 6 см. Если поставить на ней две метки (одну на расстоянии 1 см от одного края, а другую на расстоянии 2 см от другого (рис. 310, а)). то с помощью этой линейки, сдвигая ее определенным образом,



a

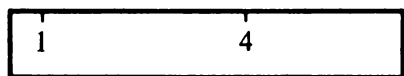


б

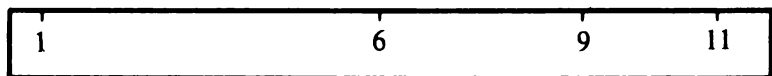


в

Рис. 309

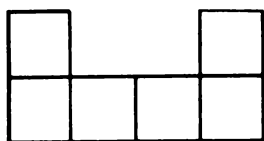


a

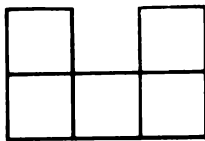


б

Рис. 310



а



б

Рис. 311

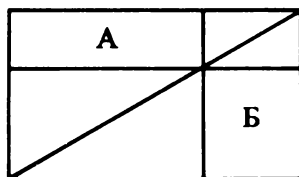


Рис. 312

мы можем измерить любой из отрезков длиной 1 см, 2 см, 3 см, 4 см, 5 см и 6 см. С помощью линейки на рис. 310, б можно измерить все целочисленные отрезки от 1 см до 13 см. Убедитесь в этом. Придумайте линейку длиной 9 см с тремя метками для измерения целочисленных отрезков от 1 см до 9 см. Придумайте линейку длиной 13 см с тремя метками внутри, отличную от уже рассмотренной.

46. Докажите, что в прямоугольном треугольнике, один из углов которого равен  $30^\circ$ , наибольшая сторона в два раза больше наименьшей.
47. Замостите плоскость одинаковыми «скобками», изображенными на рис. 311, а, б.
48. Ученик нарисовал на доске треугольник и отметил середины его сторон. Затем треугольник стерли, но отмеченные точки остались. Нельзя ли восстановить треугольник?
49. Как разрезать треугольник на два равнобедренных треугольника, если его углы равны: а)  $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$ ; б)  $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$ .
50. Разрезать на наименьшее число равнобедренных треугольников треугольник с углами: а)  $10^\circ, 70^\circ, 100^\circ$ ; б)  $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$ .
51. Даны две параллельные прямые и точка между ними. Как построить окружность, касающуюся данных прямых и проходящую через данную точку?
52. Разрежьте правильный треугольник на: а) три одинаковых трапеции (трапеция — это четырехугольник, у которого есть одна пара параллельных сторон); б) три одинаковых пятиугольника.
53. Разрезать квадрат на два равных пятиугольника; шестиугольника.
54. Через точку на диагонали прямоугольника провели прямые, параллельные его сторонам (рис. 312). У какого прямоугольника, А или Б, больше площадь?
55. Комната имеет вид шестиугольника (рис. 313). Укажите внутри комнаты точки, из которых видны целиком все его стороны. Попробуйте придумать комнату шестиугольной формы, внутри которой есть точки, из которых ни одна сторона не видна полностью.
56. Докажите, что меньший из квадратов (рис. 314) имеет площадь в четыре раза меньшую, чем больший.

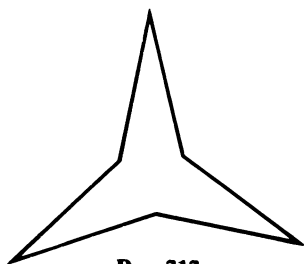


Рис. 313

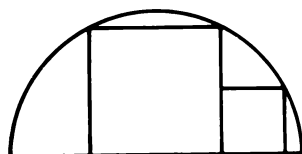


Рис. 314

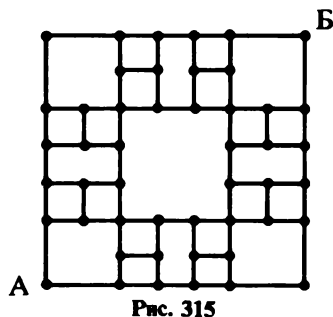


Рис. 315

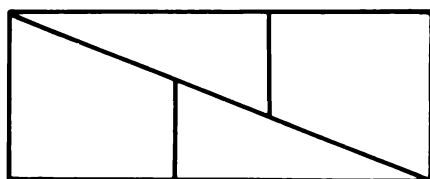
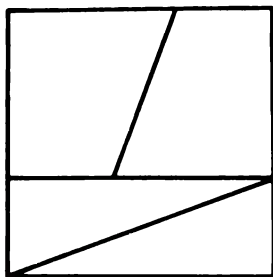


Рис. 316

- 57.** На рис. 315 изображен план городского сквера. В центре находится бассейн. В точках А и Б — вход и выход из сквера. Отрезки прямых — дорожки. Сколькими способами можно пройти из А в Б, если двигаться можно лишь вверх или вправо (можно идти по границе сквера и кромке бассейна)?
- 58.** Разрезать квадрат  $13 \times 13$  на пять прямоугольников так, чтобы все десять чисел, выражающих стороны прямоугольников, были бы различными целыми числами.
- 59.** Рассмотрим куб  $3 \times 3 \times 3$ , составленный из 27 одинаковых кубиков. Со всех шести сторон (спереди и сзади, справа и слева, сверху и снизу) мы видим квадрат  $3 \times 3$ . Какое наибольшее число кубиков можно убрать, чтобы со всех сторон был виден квадрат  $3 \times 3$  и при этом оставшаяся система кубиков не разваливалась?

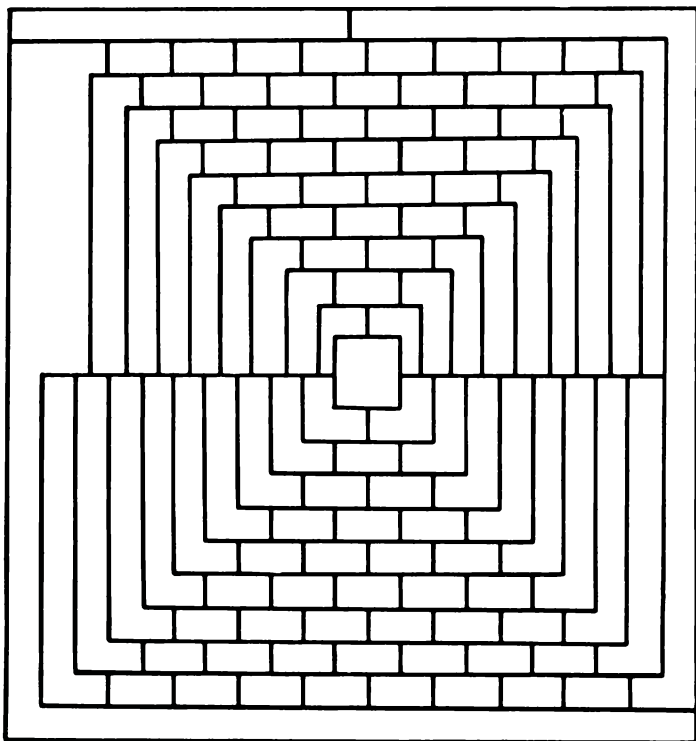
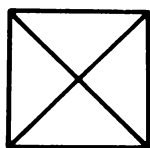


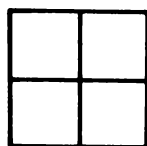
Рис. 317

60. На рис. 316 проиллюстрирован парадокс. Квадрат  $8 \times 8$  разрезан на части, из которых составлен прямоугольник  $13 \times 5$ . Постарайтесь объяснить, в чем здесь дело.
61. Если вы считаете, что в математике, в геометрии в частности, все уже известно, то очень и очень ошибаетесь. В ней великое множество нерешенных задач. Некоторые из них остаются нерешенными столетиями. Так, лишь в 1976 г. с помощью современных компьютеров математиками В.Хикеном и К.Аппелем была разрешена знаменитая проблема четырех красок. Они доказали, что любую географическую карту можно окрасить в четыре цвета так, что страны, имеющие общую границу, окрашены в разный цвет. Правда, в 1975 г. (за год до этого) в американском журнале «В мире науки» в апрельском номере была приведена карта, которую, как утверждал ее составитель, нельзя окрасить нужным образом в четыре цвета. Покажите, что это всего лишь первоапрельская шутка: раскрасьте эту карту (рис. 317) из 100 стран в четыре цвета так, чтобы соседние страны были окрашены в разный цвет.



а

Рис. 318



б

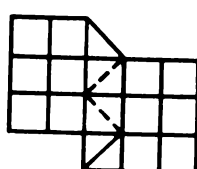


Рис. 319



Рис. 320

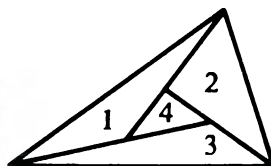


Рис. 321

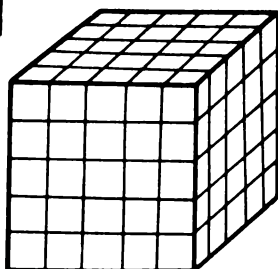


Рис. 322

## ПОДСКАЗКИ, ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ

### § 1

1. Сложите спички в виде пирамиды — три спички лежат на столе, образуя треугольник, а три оставшиеся концами упираются в вершины треугольника и сходятся в общей точке в пространстве.
2. Рис. 318, а, б.
3. Не отрывая карандаша от бумаги можно нарисовать открытый конверт: начинать надо с нижнего уголка. А почему не получается изображение закрытого конверта без отрыва руки, вы узнаете из § 15.
4. Рис. 319.
5. Если постараться, то можно из арбуза вырезать кусок в виде «столбика», идущего сквозь весь арбуз. У этого куска будут две корки, соединяемые арбузной мякотью. Оставшуюся часть арбуза можно разрезать на «нормальные» куски.
6. Рис. 320. Закрашенную часть после разрезания по пунктирным линиям перевернуть «наизнанку».
7. Рис. 321.
8. Всего после распиливания получилось  $5 \times 5 \times 5 = 125$  кубиков (рис. 322). По три окрашенных грани может быть только у угловых кубиков; их 8 штук. По две окрашенных грани у кубиков, расположенных вдоль ребер исходного куба: по три на каждом ребре. Всего ребер 12, значит,  $3 \times 12 = 36$  кубиков. Только одна закрашенная грань у тех кубиков, которые лежат «на поверхности», исключая кубики, прилежащие к ребрам, т.е. по девять штук на каждой грани. Граней шесть. Таким образом, кубиков с одной окрашенной гранью  $6 \times 9 = 54$ . Неокрашенных кубиков осталось 27.

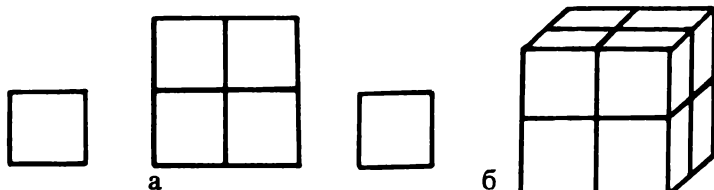


Рис. 323

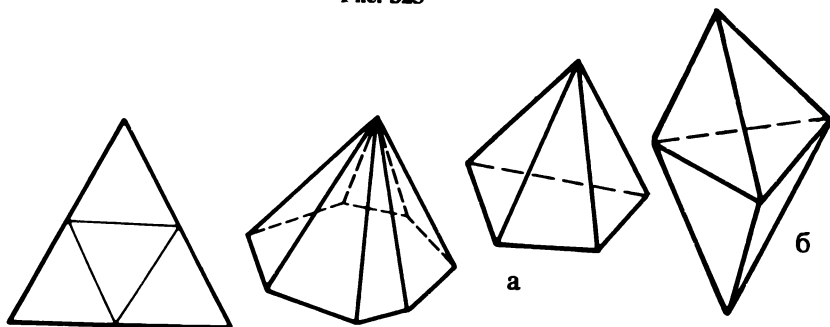


Рис. 324

Рис. 325

Рис. 326

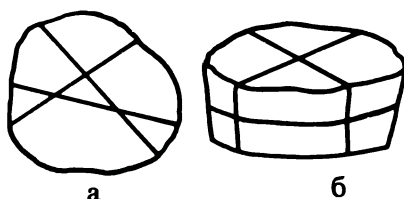


Рис. 327

## § 2

1. Если считать, что в два раза больший квадрат — это квадрат, сторона которого в два раза больше стороны исходного квадрата, то для его получения надо взять четыре одинаковых исходных квадрата. А кубиков — восемь (рис. 323, а, б).
2. Рис. 324. Надо соединить отрезками середины сторон треугольника.
3. Пример многогранника, у которого восемь вершин и восемь граней — пирамида, в основании которой лежит семиугольник (рис. 325).
4. Рис. 326, а, б.
5. Блин можно разрезать на семь частей (рис. 327, а); в отличие от блина каравай не плоский и его сначала можно разрезать горизонтально, а потом вертикально (рис. 327, б). Таким образом, каравай можно разрезать на восемь частей.



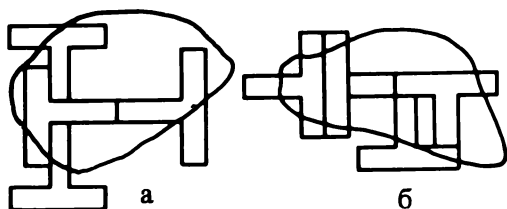


Рис. 328

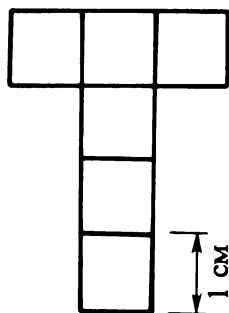


Рис. 329

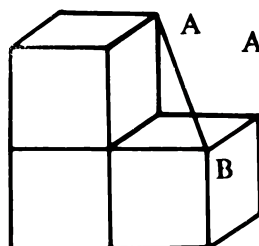


Рис. 330

АВ — диагональ

### § 3

1. Если считать только углы, не меньше  $180^\circ$ , то образуется 12 углов.
6. Если сложить квадрат вдвое по диагонали, то половинки его совпадут; треугольники, на которые делится квадрат своей диагональю, равны. Угол квадрата ( $90^\circ$ ) также складывается пополам, значит, между диагональю квадрата и его сторонами образуются углы по  $90^\circ : 2 = 45^\circ$ .
7. Углы не превосходят  $180^\circ$ , поэтому получаем  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $165^\circ$ .
8. Угол не изменится.

### § 4

2. Рис. 328, а, б.
4. Рис. 329. Буква Т составлена из шести квадратов со стороной 1 см.

### § 5

3. Развертками куба на рис. 27 являются 1, 2, 6, 7, 8, 9.
5. Из данной развертки можно склеить кубы а и в.
9. 1. Кубы располагаются так, как на рис. 330. При этом образуется выемка в форме такого же куба. Поэтому, приложив линейку от точки А до точки В, можно измерить его диагональ.  
2. Так как куб один, то полый куб, как в случае 1, можно получить сначала отметив на листе бумаги положение куба (обведя основание), а затем сдвинув его.

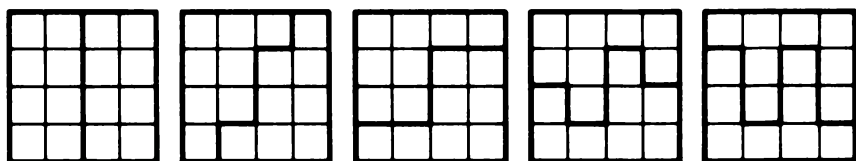


Рис. 331

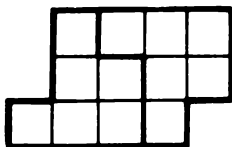


Рис. 332

12. Расчертив полоску на семь квадратов, перегните второй и шестой квадраты по диагонали, а затем уже сворачивайте полоску в куб.
13. Тень — шестиугольник. Убедитесь в этом экспериментально.
14. Шесть распилов.
15. В решении этой задачи поможет развертка куба. Сделайте ее и отметьте точками местонахождение паука и мухи. Кратчайшее расстояние укажет прямая, соединяющая эти точки. Интересно, что кратчайший путь от паука к мухе можно выбрать шестью разными способами. Каждый из них проходит через середину одного ребра куба, соединяющего свободные вершины.

## § 6

3. Рис. 331.
4. Рис. 332.
5. Рис. 333.

## § 7

1. Геометрическая теория утверждает, что сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ . Конечно, в результате измерения во всех случаях сумма углов вряд ли будет равной  $180^\circ$ . Но достаточно близкой к  $180^\circ$  она должна быть.
3. Если взять один треугольник с большим основанием, а другой с очень маленьким, то можно (рис. 334).
6. Пронумеруем вершины тетраэдра числами 1, 2, 3, 4. После каждого перекапывания появляется вершина с номером, которого не было на предыдущем треугольнике.
7. Чтобы из трех отрезков можно было составить треугольник, надо, чтобы сумма двух из них была больше третьего.

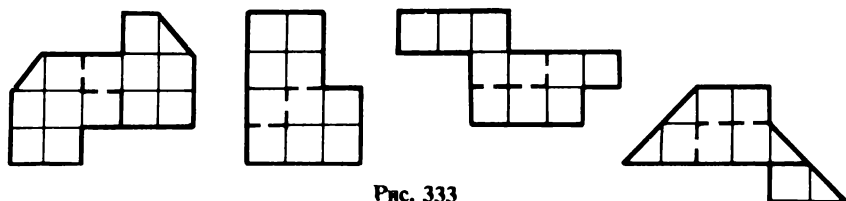
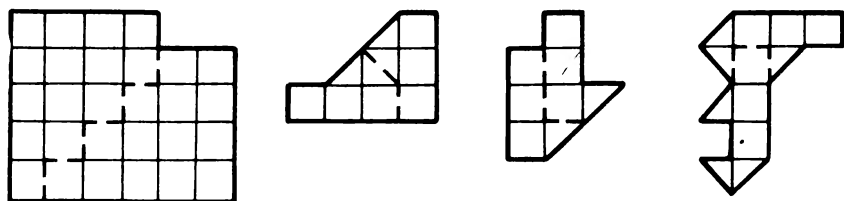


Рис. 333

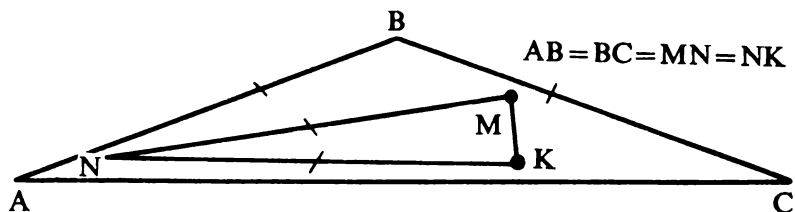


Рис. 334

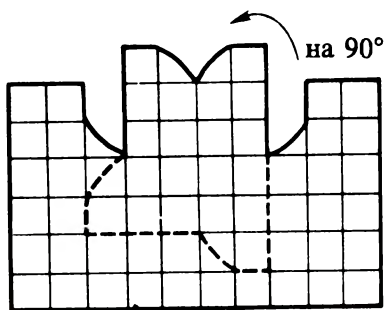


Рис. 335

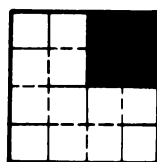


Рис. 336

## § 9

3. Рис. 335.
4. Рис. 336.
5. Составить треугольник из шести кусков нельзя.
6. Как сложить фигурки рис. 66, показано на рис. 337. А похожие фигурки на рис. 67 просто составлены по-разному из всех кусочков танграма.

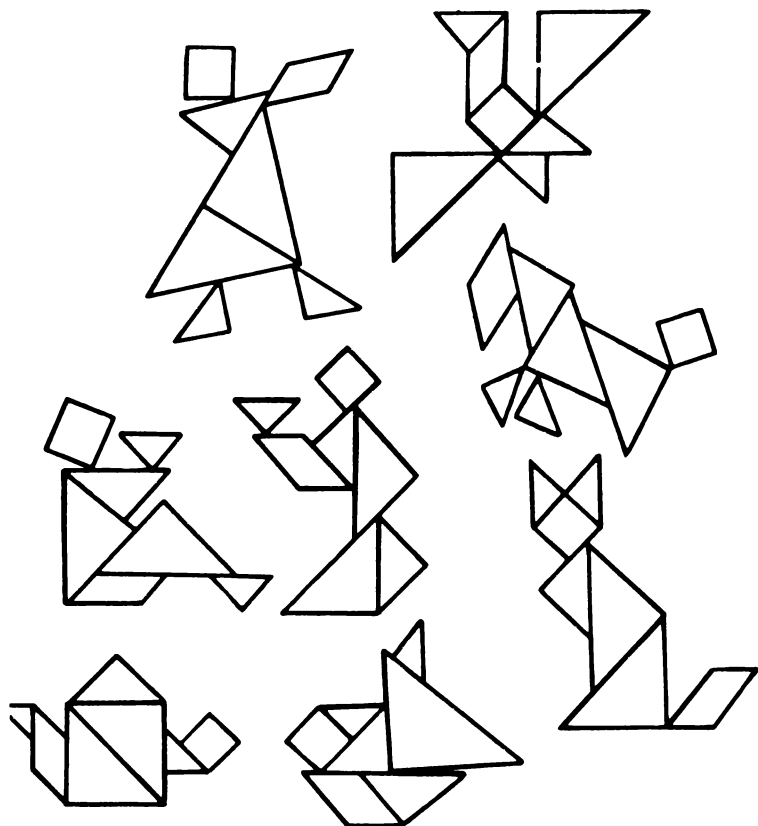


Рис. 337

## § 10

1. Так как 8,1 ялимов составляют 10,8 км, то 1 ялим равен  $10,8/8,1 = \frac{4}{3}$  км. Чтобы перевести расстояние из ялимов в километры, надо соответствующее число умножить на  $\frac{4}{3}$ . В нашем случае  $3,6 \times \frac{4}{3} = 4,8$  км.

## § 11

1. 1 кв. км = 1 000 000 000 000 кв. мм;  
 1 кв. верста = 2 250 000 кв. аршин;  
 1 кв. ярд = 9 кв. футов = 1296 кв. дюймов;  
 1 кв. миля = 3,43 кв. км;  
 1 куб. км = 1 000 000 000 000 куб. см;  
 1 куб. сажень =  $48 \cdot 48 \cdot 48$  куб. вершков = 110 592 куб. вершка;  
 1 аршин =  $2\frac{1}{3}$  фута, 1 куб. аршин =  $12\frac{1}{3}$  куб. футов.

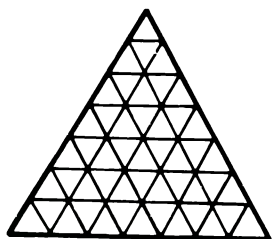


Рис. 338

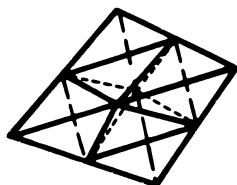
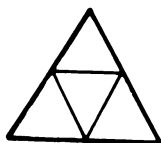


Рис. 339

2. Треугольник со сторонами 7 см (рис. 338) «выложен» треугольными сантиметрами. Подсчитайте их число.
3. Рис. 339. Пирамида разделится на пять частей: четыре треугольных пирамиды и «внутренность» (многогранник с шестью вершинами, двенадцатью ребрами и восемью гранями) — октаэдр.
4. Чтобы измерить толщину бумажного листа, можно поступить следующим образом. Измерим толщину стопки бумаги, подсчитаем число листов в стопке и разделим первое число на второе. Можно предложить следующий способ измерения объема булыжника. Возьмем полное ведро воды, погрузим в него булыжник, из ведра выльется вода, по объему равная объему булыжника: достанем из ведра булыжник и с помощью известной нам емкости (стакан, бутылка и др.) дольем ведро доверху.

## § 12

2. Площади плоских фигур при увеличении их сторон в  $n$  раз увеличиваются в  $n \times n$  раз.
3. Объемы тел при увеличении их ребер в  $n$  раз увеличиваются в  $n \times n \times n$  раз.
4. Площадь всего белого квадрата равна 25 клеткам. От квадрата отрезаны четыре равных треугольника, площади которых в сумме составляют 12 клеток. Значит, площадь заштрихованного квадрата равна  $25 - 12 = 13$  клеткам.
5. Рис. 340.
8. Рис. 341.
9. Сложите из закрашенных и незакрашенных частей одинаковые фигуры.
10. Сложите из трех «внешних» треугольников один треугольник, равный «внутреннему».
13. Разделите фигуры на прямоугольники, найдите по формуле площади этих прямоугольников и результаты сложите.
14. Надо разрезать фигуру на четыре части и затем переложить их так, чтобы внутри образовался квадрат площадью 1 кв. см (рис. 342).

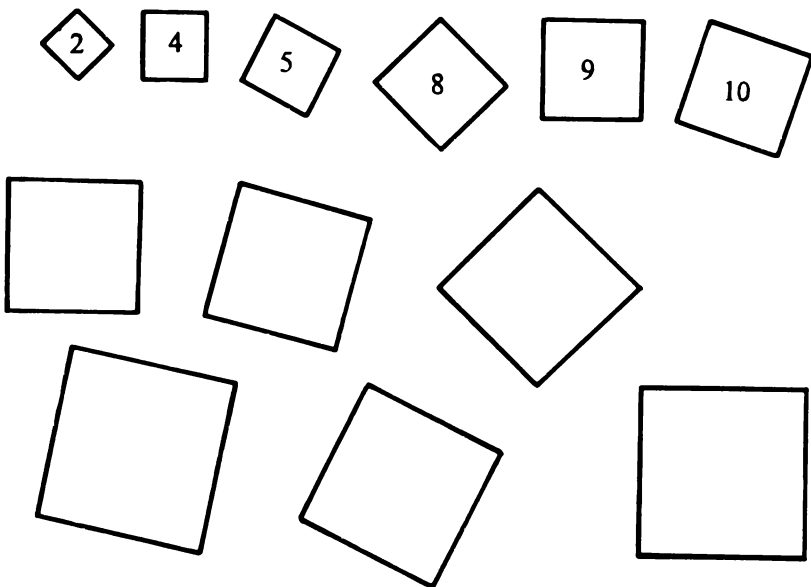


Рис. 340

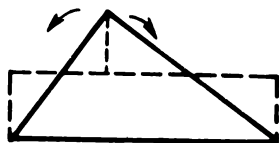


Рис. 341

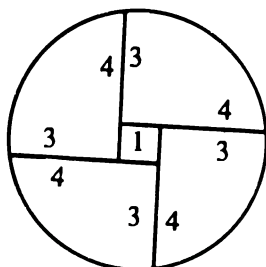


Рис. 342



Рис. 343

### § 13

1. Сравните сторону квадрата с его диагональю. Провалится ли крышка квадратного люка, если ее поставить вертикально по диагонали? Что можно сказать о диаметре окружности?
2. Перегните круг вместе с листком.
3. Рис. 343.
5. Рис. 344.
6. Катящийся пятак сделает два оборота. Проверьте это на опыте.
7. Проведите три луча из одной точки (города) под одинаковыми углами друг к другу и впишите окружности разных радиусов в образовавшиеся углы.

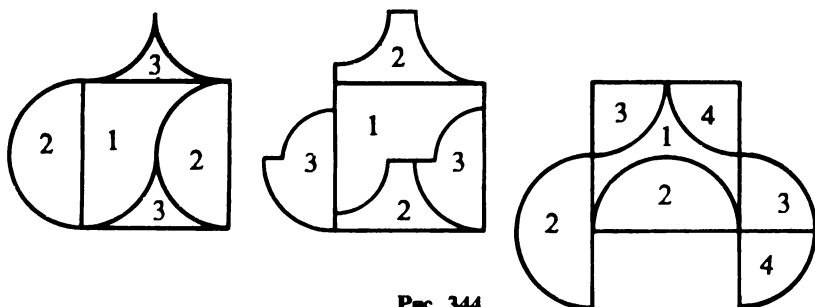


Рис. 344

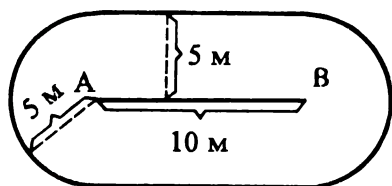


Рис. 345

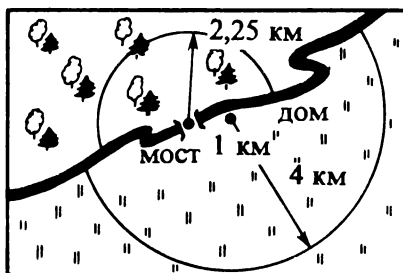


Рис. 346

8. Разрезав «кольцо» и сложив из него квадрат, увидим, что краски пойдет одинаковое количество (площади этих фигур равны).
10. Рис. 345.
11. Привязав веревку к колышку на берегу, надо обойти озерцо. Веревка зацепится за колышек на островке, и по возвращении человека в исходную точку станет в два раза короче (как раз от А до В) и окажется натянутой между кольями. Остальное — дело ловкости человека.
12. Мысленно проследите, какие шестеренки вращаются по часовой стрелке, а какие — против. Если какая-то шестеренка вращается в одну сторону, то соседние — в другую. Система может вращаться лишь в том случае, если число шестеренок четное. В нашем же случае их 17.
13. В решении задачи вам поможет эксперимент. Возьмите две линейки и круглый карандаш. Одна линейка — платформа, карандаш — бревна. Вторая линейка нужна для измерения пути. Линейку положите на карандаш так, чтобы ее конец был в 5 см от карандаша, и двигайте «платформу». Начало линейки пройдет путь 10 см. Как двигалась линейка? Как перемещался карандаш? Какой путь прошел карандаш от начала движения до его окончания?

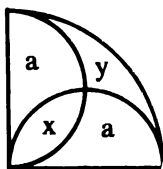


Рис. 347

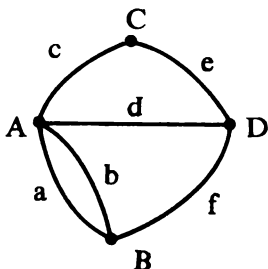


Рис. 348

14. Если бы Вася был, например, в поле и его скорость была 4 км/ч, то за 1 ч Вася мог бы отойти от начальной точки на 4 км. Направление движения он может выбирать сам, какое захочет. Поэтому точки, которых он может достичь за час, расположены на окружности радиусом 4 км и центром в том месте, где Вася находится в начале пути. Решение задачи смотрите на рис. 346.

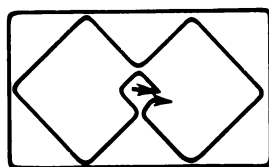
#### § 14

1. 10 отрезков.
3. 8 четырехугольников.
4. 13 треугольников.
8. 18 квадратов.
9. 12 равносторонних треугольников.
11. Две половинки маленьких кружочков в сумме составляют четверть большого круга (рис. 347), так как радиус маленького круга в два раза меньше радиуса большого круга. Введем обозначения, как на рисунке, и составим уравнение:  $2a + 2x = 2a + x + y$ . Из этого уравнения видно, что площади частей  $x$  и  $y$  равны.
12. На рис. 110, а большой квадрат разрезан на четыре прямоугольных треугольника и два квадрата со сторонами, равными меньшим сторонам треугольника. А на рис. 110, б этот же квадрат разрезан на четыре таких же треугольника и квадрат со стороной, равной большей стороне треугольника. Значит, сумма площадей двух маленьких квадратов (рис. 110, а) равна площади квадрата на рис. 110, б. Именно это и утверждает теорема Пифагора.

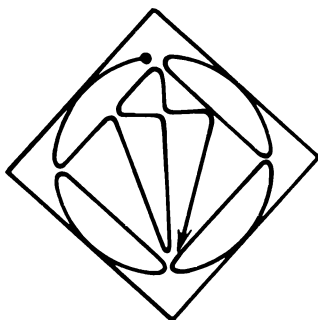
#### § 15

1. На рис. 348 изображен граф, соответствующий условию задачи. Обход надо начинать с D или B.
2. 1. Сделайте все узлы на рис. 348 четными.





а



б

Рис. 349

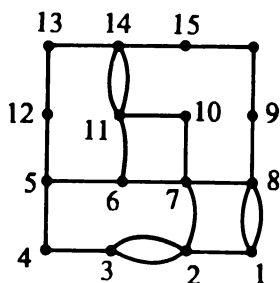


Рис. 350

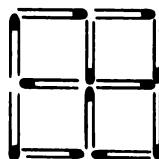


Рис. 351

2. Добавьте еще хотя бы два нечетных узла на рис. 348.
3. Ребра куба представляют собой пространственный граф. Подсчитайте в нем количество нечетных узлов и вы сможете ответить на вопрос.
4. Рис. 349, а, б.
5. Рис. 350.
6. Нарисуйте соответствующий граф и движение начните из нечетного узла.
7. Поставьте в каждой вершине графа число, равное количеству выходящих из него путей. Если мы сложим все эти числа, то получим четное число, так как каждый путь, соединяющий две вершины, считается дважды. Отсюда следует, что число нечетных вершин всегда четно.

## § 16

1. Рис. 351.
2. Рис. 352.
3. Рис. 353.
4. Рис. 354, а, б, в.
5. Рис. 355.
6. Рис. 356.

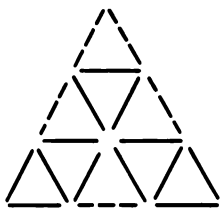


Рис. 352

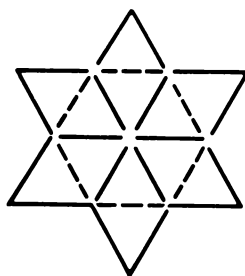
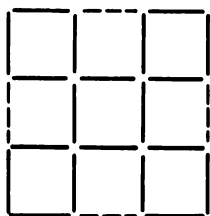
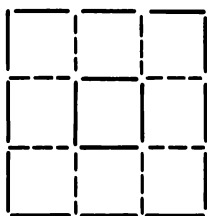


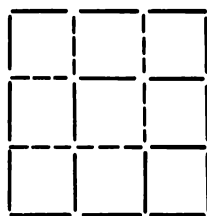
Рис. 353



а



б



в

Рис. 354

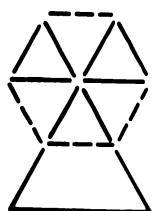


Рис. 355



Рис. 356

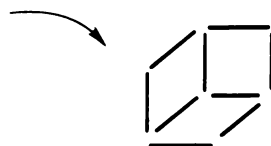


Рис. 357

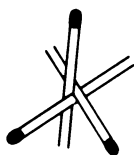


Рис. 358

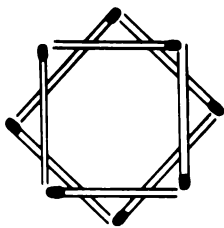


Рис. 359

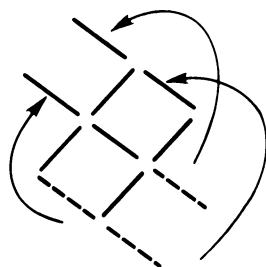


Рис. 360

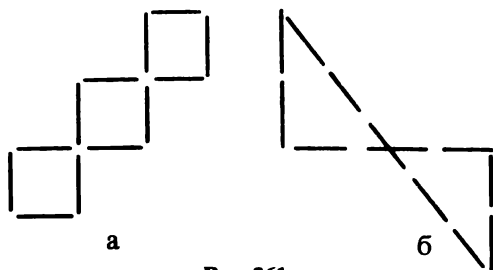


Рис. 361

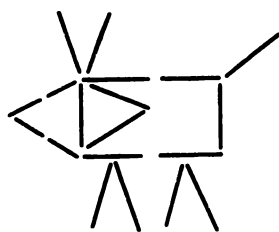


Рис. 362

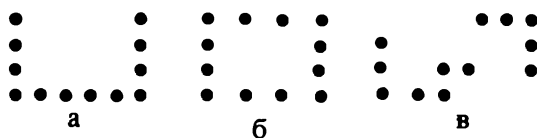


Рис. 363

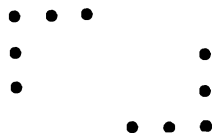


Рис. 364

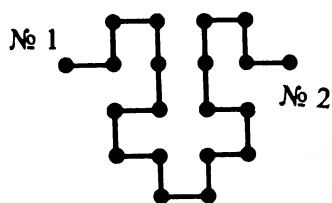


Рис. 365

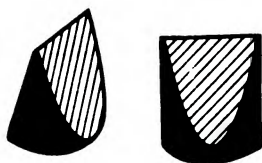


Рис. 366

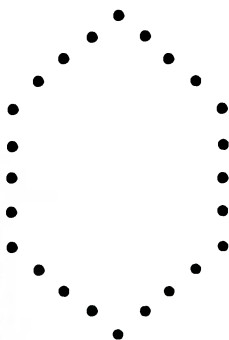


Рис. 367

7. Рис. 357.
8. Рис. 353.
9. Рис. 359.
10. Рис. 360.
11. Два варианта: рис. 361, а,б.
12. Рис. 362.

## § 18

1. Рис. 363, а, б, в.
2. Рис. 364.
3. Рис. 365.
4. Рис. 366.

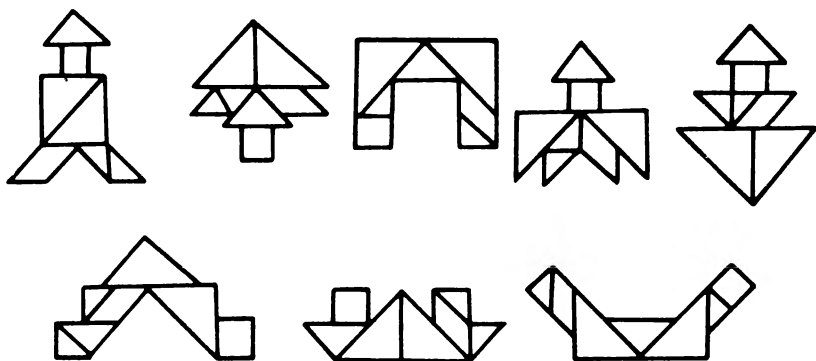


Рис. 368

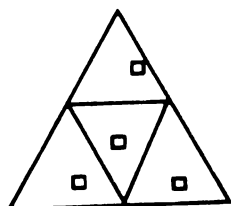


Рис. 369

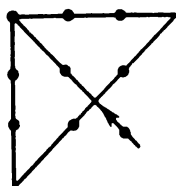


Рис. 370

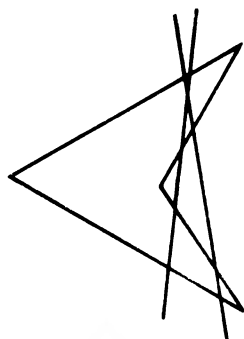


Рис. 371

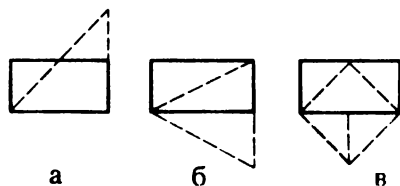


Рис. 372

8. Подсказка к задаче: если нужно попасть во двор, ограниченный забором, то, перемахнув через забор один раз, ты окажешься внутри двора, а дважды — вне этого двора.
9. Рис. 367.
10. 44 способами.
11. Рис. 368.
12. Рис. 369.
13. Рис. 370.
14. Рис. 371.
15. Рис. 372, а, б, в.

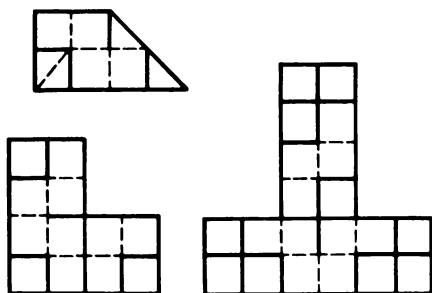


Рис. 373

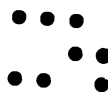


Рис. 374

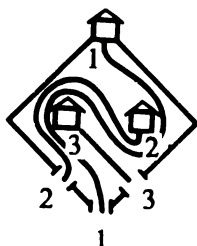


Рис. 375

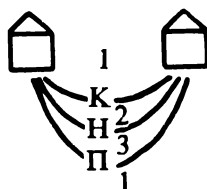


Рис. 376

16. Рис. 373.
17. Пятикопеечная монета вполне может пройти в это маленькое отверстие, если бумагу сложить вдвое и растянуть края прорези в стороны, слегка деформируя (сминая) бумагу.
18. Последовательность укладки: 2 7 5 6 1 3 4.
19. Способ а) приведет к третьему результату, способ б) ко второму.
21. Один из вариантов показан на рис. 374.
22. Для облегчения решения пронумеруйте точки и запишите все возможные 12 равносторонних треугольников тройками чисел: (1; 2; 3), (2; 3; 5), (2; 4; 5) и т.д. А затем вычеркивайте точки и треугольники, содержащие эти точки, по их номерам.
23. Порядок действий: 1) правой рукой делаем перекрещенную петлю посередине веревки и держим ее; 2) левую руку вдеваем в петлю, как бы завязывая узел так, чтобы «браслет» на левой руке оказался внутри петли; 3) пропускаем петлю под «браслетом» и вытягиваем ее из-под него; 4) левую руку вынимаем из этой петли, отпускаем веревку и растягиваем ее. Получаем узел.
24. Басня И.А.Крылова «Ворона и Лисица»: «Ворона каркнула во все воронье горло».

	ВИД спереди	ВИД сверху	ВИД слева
а			
б			
в			
г			
д			
е			

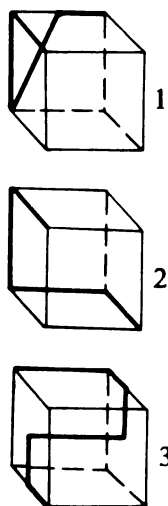
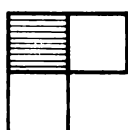
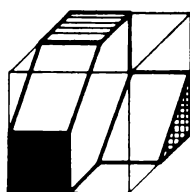
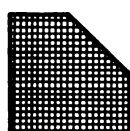
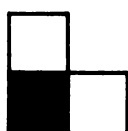
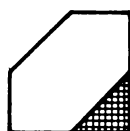
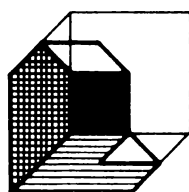
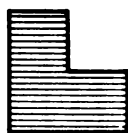
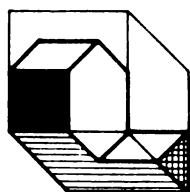


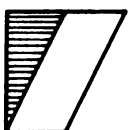
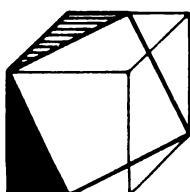
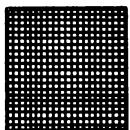
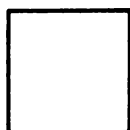
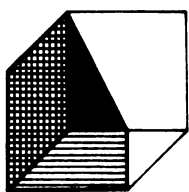
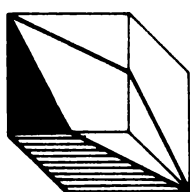
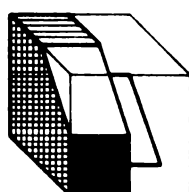
Рис. 378

Рис. 377

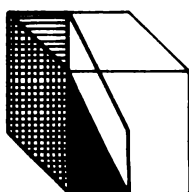
25. Винни Пух на дереве. Вид спереди.
26. Поскольку на рисунке не видны автобусные двери, то они находятся на невидимой для нас стороне автобуса, и автобус едет влево, т.е. в Москву.
27. а) куб; б) конус, пирамида; д) треугольная пирамида со срезанной вершиной — усеченная пирамида; е) усеченная пирамида; ж) четырехугольная пирамида.
28. Рис. 375.
31. Надо разрезать квадрат на пять полос.
34. Если соединить левый и правый домики с колодезем, навесом и погребом, то средний домик окажется в одной из трех образовавшихся областей (рис. 376). Это значит, что из среднего домика невозможно без пересечения «границы» области попасть либо к навесу (если домик в первой области), либо к погребу (если домик во второй области), либо к колодезю.
35. Условно замените краски числами 1, 2, 3 и начните нумеровать кружочки (с любого), соблюдая условие задачи

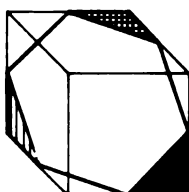
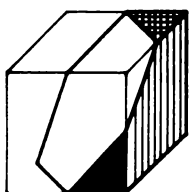
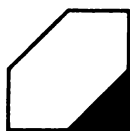
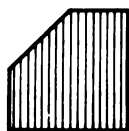
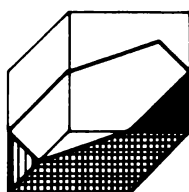
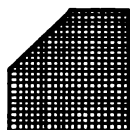
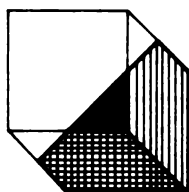


a



6





В

Рис. 379

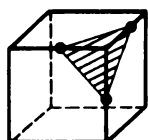


Рис. 380

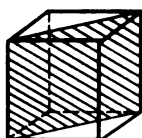
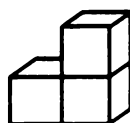


Рис. 381



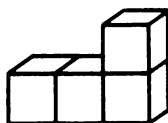
1



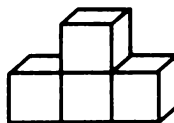
2



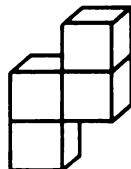
1



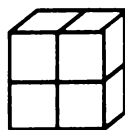
2



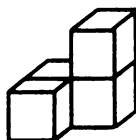
3



4



5



6

6

Рис. 382



(два соседних кружка не должны быть одинаково занумерованы). Что получается?

36. Сабля не сможет войти в ножны.

### § 19

1. а, б, г, е — один и тот же объект; в, д, ж — разные.
2. Рис. 377.
3. Рис. 378.
4. 1 В, 2 А, 3 Г, 4 Ж, 5 Е, 6 Б, 7 З, 8 Д.
6. Рис. 379.
7. Плоскость должна проходить параллельно грани куба.
8. В сечении получается прямоугольник, две стороны которого равны ребрам куба, а две — диагоналям граней (рис. 380).
10. Рис. 381, а, б, в.
11. Из трех кубиков можно построить в соответствии с условием задачи две различные фигуры (рис. 382, а), а из четырех — шесть (рис. 382, б).

### § 20

4. Углы 1, 4, 5, 7 равны; углы 2, 3, 6, 8 равны.

### § 22

2. На доске  $10 \times 10$  может разместиться 25 катеров: игровое поле можно разбить на квадраты  $2 \times 2$ , которых будет ровно 25, и в каждом из них по катеру. Но в каждом квадрате  $2 \times 2$  только один катер, иначе у него будут «соседи», значит, 26 катеров на поле  $10 \times 10$  уже не поместятся.
3. 26 выстрелов.
4. Доску разрезать на линкоры нельзя: при указанной окраске в четыре цвета различных по цвету квадратов получается неодинаковое число.
5. На рисунках должны получиться Буратино и бабочка.
6. Начертим на кальке вспомогательные оси координат, пусть единица равна полклетке. В этой системе отметим точки  $A_1(2; 1)$  и  $B_1(8; 2)$  и соединим их отрезком. На карте также проведем отрезок  $A_1B_1$ . Наложим кальку на карту так, чтобы точки А и  $A_1$  совпали и отрезок  $A_1B_1$  «пошел» по АВ. Найдем, во сколько раз отрезок АВ больше отрезка  $A_1B_1$ , и отодвинем вспомогательные оси во столько раз. Получим нужную систему координат. Затем в соответствии с точками А и В отмечаем единичные отрезки на полученных осях и находим место клада по координатам (6; 6).

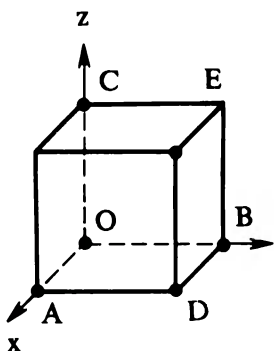


Рис. 383

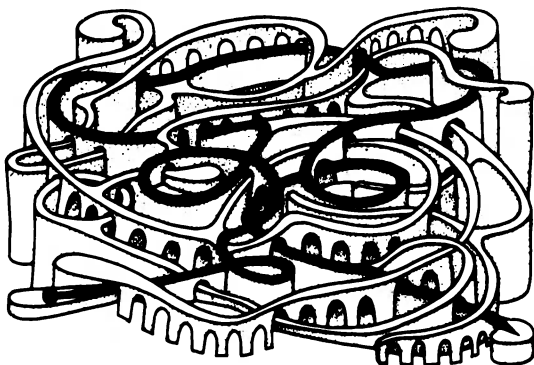


Рис. 384

8. Треугольник ABC — правильный, четырехугольник KLMN — квадрат.  
 9. Рис. 383;  $C(0; 1; 1)$ ;  $O(0; 0; 0)$ ;  $E(1; 1; 1)$ ;  $A(1; 0; 0)$ .

## § 26

8. Рис. 384.

## § 27

2. Постройте отрезок до прямоугольного треугольника и затем поверните его, как в задаче 1.
3. Три раза нужно выполнить построение перпендикуляра к отрезку, как в задаче 2, б.
4. Возьмите две точки на прямой CD и постройте прямоугольный треугольник с вершинами в этих точках. А затем такой же треугольник с вершиной в точке A.
5. Равнобедренный треугольник можно сложить пополам так, чтобы половинки совместились. Эти половинки будут прямоугольными треугольниками.
7. Нужно описать около треугольника прямоугольник, т.е. начертить такой прямоугольник, чтобы вершины треугольника лежали на его сторонах, а стороны прямоугольника шли по сторонам клеточек на бумаге. Затем считаем количество клеток в прямоугольнике и отбрасываем лишние.
8. 17 квадратов.
12. Можно выбрать узлы клетчатой бумаги так, чтобы площадь многоугольника была равна  $7\frac{1}{2}$ , и нельзя, если она  $3\frac{1}{3}$ . По формуле Пика  $S = a + b/2 - 1$ . Числа  $a$ ,  $b$  и 1 — целые, число  $b/2$  может быть смешанным числом, в знаменателе дробной части которого 2 (или число, кратное 2). 3 не равно 2 и не кратно 2, значит площадь в условиях нашей задачи не равна  $3\frac{1}{3}$ .

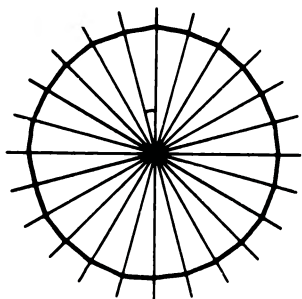


Рис. 385



Рис. 386

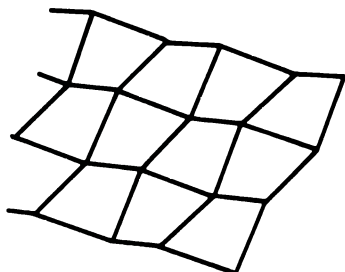


Рис. 387

### § 29

1. Угол равен  $90^\circ$ .
2. Пусть  $m$  и  $n$  — оси симметрии. Отражаясь от оси  $n$ , ось  $m$  перейдет в некоторую прямую  $m'$ , тоже являющуюся осью симметрии и пересекающуюся с  $n$  под углом  $15^\circ$ . Так, отражаясь друг от друга, прямые  $m$  и  $n$  вернуться в исходное положение. Между соседними осями симметрии углы по  $15^\circ$ . Значит осей симметрии всего  $180^\circ : 15^\circ = 12$ . Наименьшее число вершин равно числу осей, т. е. 12 (рис. 385).

### § 31

1. Два равных треугольника, положенные рядом определенным образом (рис. 386), составляют параллелограмм. А параллелограммами можно замостить плоскость.
2. Один из примеров на рис. 387.

### § 32

2. Так как окружность симметрична относительно любого своего диаметра, то она симметрична и относительно диаметра  $MN$ , перпендикулярного прямым  $AA_1$  и  $BB_1$ ; точка  $A$  симметрична  $A_1$ ,  $B$  симметрична  $B_1$ . Значит, все точки дуги  $AB$  симметричны точкам дуги  $A_1B_1$ , т. е. дуги  $AB$  и  $A_1B_1$  равны (рис. 388).
3. Проведем прямую  $OA$ . На ней лежит диаметр, относительно которого окружность симметрична. Касательная  $AB$  симметрична касательной  $AC$ . Точки  $B$  и  $C$  окружности симметричны. Значит и отрезки  $AB$  и  $AC$  симметричны, а значит равны (рис. 389).

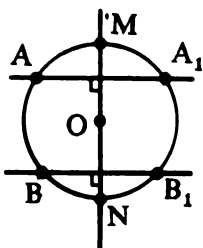


Рис. 388

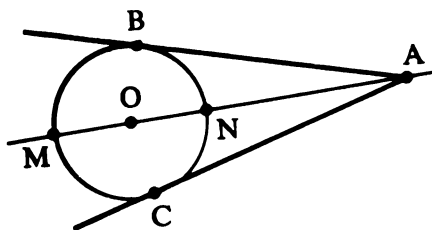


Рис. 389

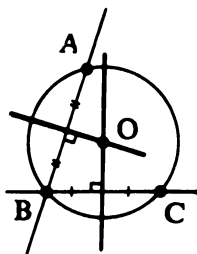


Рис. 390

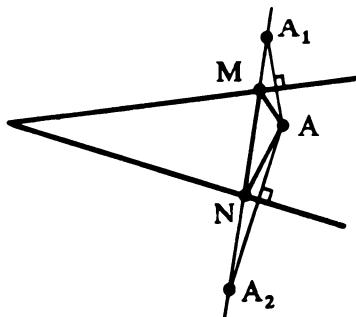


Рис. 391

4. Точки В и С симметричны относительно диаметра, проходящего через середину отрезка АВ и перпендикулярного ему. Аналогично и точки А и В. Таким образом, построив перпендикулярные прямые через середины к отрезкам АВ и ВС, мы получим точку их пересечения. Это центр окружности, так как через нее проходят оба диаметра (рис. 390).
5. Надо построить точки  $A_1$  и  $A_2$ , симметричные точке А относительно сторон угла. Прямая  $A_1A_2$  пересечет стороны угла в искомым точках М и N. Объясните это (рис. 391).

### § 33

2. Строим окружность с центром О вне нашей прямой, проходящей через А. Через В (вторую точку пересечения этой окружности) проводим диаметр ВС. Тогда АС — перпендикуляр к прямой l (рис. 392).
3.  $\angle AMC = 90^\circ$ ,  $\angle AMD = 45^\circ$ ,  $\angle BMC = 135^\circ$ .
4.  $\angle AMB = 120^\circ$ ,  $\angle ADC = 140^\circ$ .
6. Угол АОВ в два раза больше угла АСВ. Значит,  $\angle AOB = 60^\circ$ . Треугольник АОВ — равнобедренный, один из углов равен  $60^\circ$ . Значит, все его углы по  $60^\circ$ . А из этого следует, что этот треугольник является равносторонним,  $AB = AO = 1$  (рис. 393).

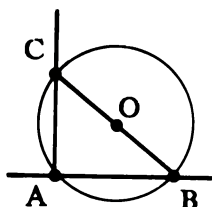


Рис. 392

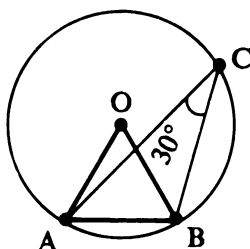


Рис. 393

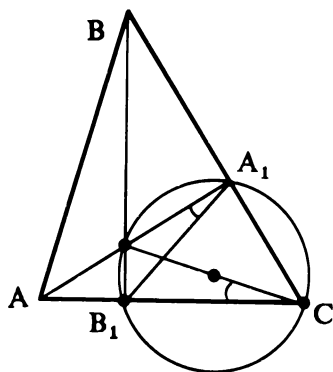


Рис. 394

7. Как мы знаем, окружность с диаметром  $CH$  проходит через  $A$  и  $B$ . В этой окружности углы  $HA_1B$  и  $HCB_1$  опираются на одну дугу. Следовательно, они равны (рис. 394).
8. Пусть все три прямые проходят через точку  $P$ , а  $M$  — некоторая точка плоскости.  $A, B, C$  — основания перпендикуляров, опущенных из  $M$  на данные прямые. Все пять точек ( $P, M, A, B, C$ ) лежат на одной окружности с диаметром  $PM$ . Значит, угол  $ABC$  равен углу  $APC$ , так как эти углы опираются на одну дугу окружности, т.е.  $ABC = 60^\circ$ . Точно так же покажем, что все углы треугольника  $ABC$  равны  $60^\circ$  (рис. 395).

### § 34

1. 8 граней.
2. Можно раскрыть три звена одной цепи, а потом этими звеньями соединить четыре оставшихся куска.
3. Если перегнуть круг так, чтобы половинки совпали, то линия сгиба пройдет через центр. Прделав эту операцию дважды, найдем центр круга.
4. Если в листе сделать разрез, как на рис. 396 (сплошная линия), то после этого лист можно растянуть наподобие длинной ленты. Сделав в этой ленте разрез посередине (пунктирная линия), получим достаточно большое отверстие.
5. На рис. 397 показано, как можно защитить одну и две башни.
6. Рис. 398.
8. Рис. 399. Получится квадрат со стороной 6 единиц.
9. Рис. 400.
10. Четыре неравные стороны, рис. 401.
11. Рис. 402.

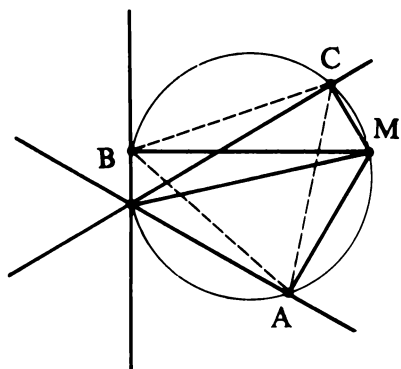


Рис. 395

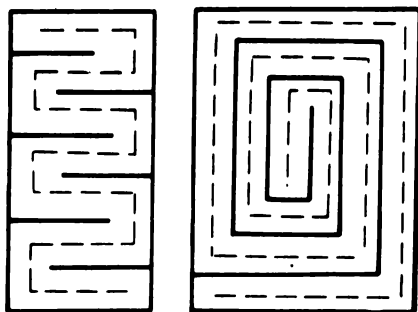


Рис. 396

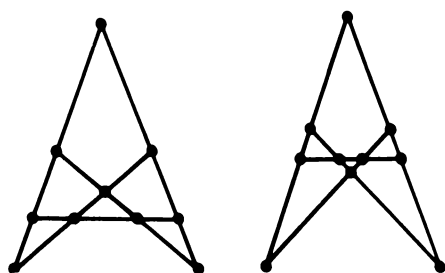


Рис. 397

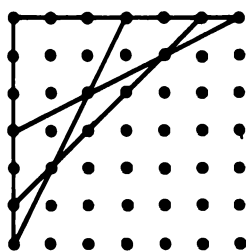


Рис. 398

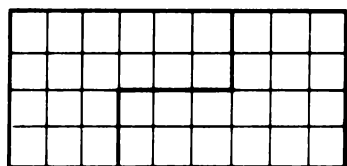


Рис. 399

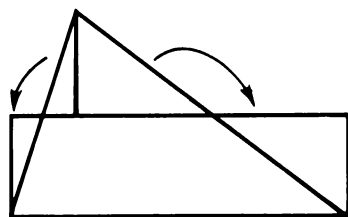


Рис. 400

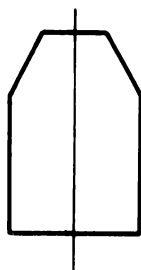


Рис. 401

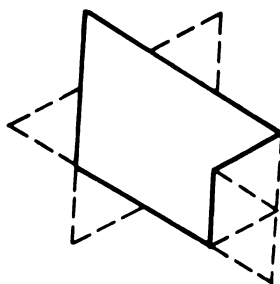


Рис. 402

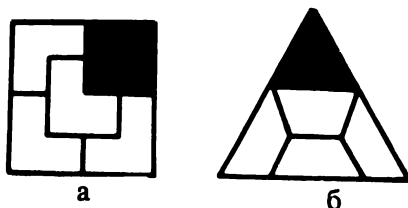


Рис. 403

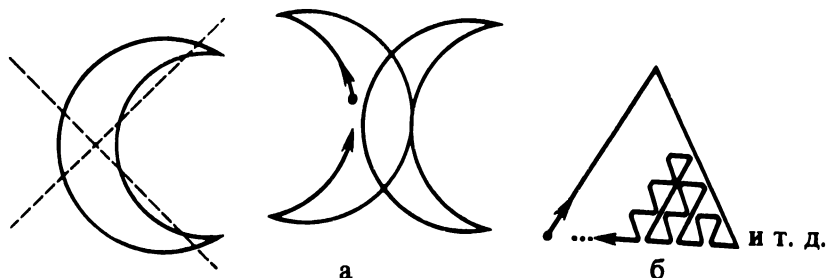


Рис. 404

Рис. 405

12. 403, а, б.
15. Рис. 404.
16. Рис. 405, а, б.
17. После каждого разреза число частей может возрасти не больше чем в два раза. Сначала был один куб. После первого разреза он распадается на две части, после второго не более чем на четыре. Затем число частей может быть 8, 16, 32 и 64. Значит, число разрезов не может быть меньше 6. Приведите способ, с помощью которого куб можно разрезать на 64 части за шесть разрезов.
18. Первый рисунок.
19. 10 км.
20. Рис. 406.
21. 1) рис. 407, а; 2) рис. 407, б; 3) сложите из спичек куб.
22. Рис. 408.
23. Рис. 409.
25. 22 клетки.
27. Развертка куба № 5.
28. а) и в).

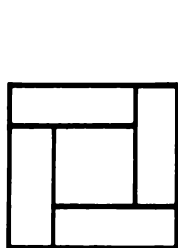
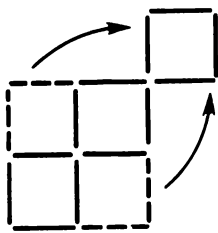
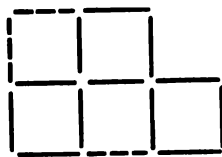


Рис. 406



а



б

Рис. 407

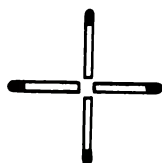


Рис. 408

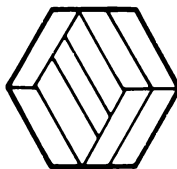
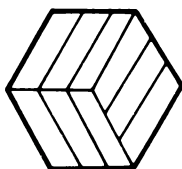


Рис. 409

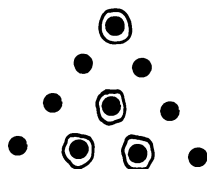


Рис. 410

29. 14 правильных треугольников. Можно убрать четыре точки (рис. 410).
30. Первая страница первого тома и последняя страница третьего тома примыкают ко второму тому. Так что путь червяка равен толщине второго тома, т.е. составляет 3,5 см.
31. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке в черный и белый цвета. Если бы доска была полной, то черных и белых клеток было бы по 32. На данной доске (если левый нижний угол черный) черных 32, а белых 30. Но каждая кость домино закрывает одну черную и одну белую клетку. Так что данную доску покрыть фишками нельзя.
32. Чтобы получить такой треугольник, надо взять стороны такими, чтобы сумма двух сторон мало отличалась от третьей стороны.
33. На рис. 411 показано, как при пересечении двух четырехугольников могут образоваться два четырехугольника, три четырехугольника и даже четыре четырехугольника.
35. Не обязательно. Возьмем, например, два треугольника: стороны первого 27, 36, 48, а второго 36, 48, 64. Поскольку второй треугольник получается из первого увеличением каждой стороны в  $\frac{4}{3}$  раза, то треугольники имеют равные углы.
36. Рис. 412.
37. Три прямые разбивают плоскость на семь частей (прямые не параллельны и не проходят через одну точку); см. рис. 413. Проведем четвертую прямую. Она пересечется с тремя



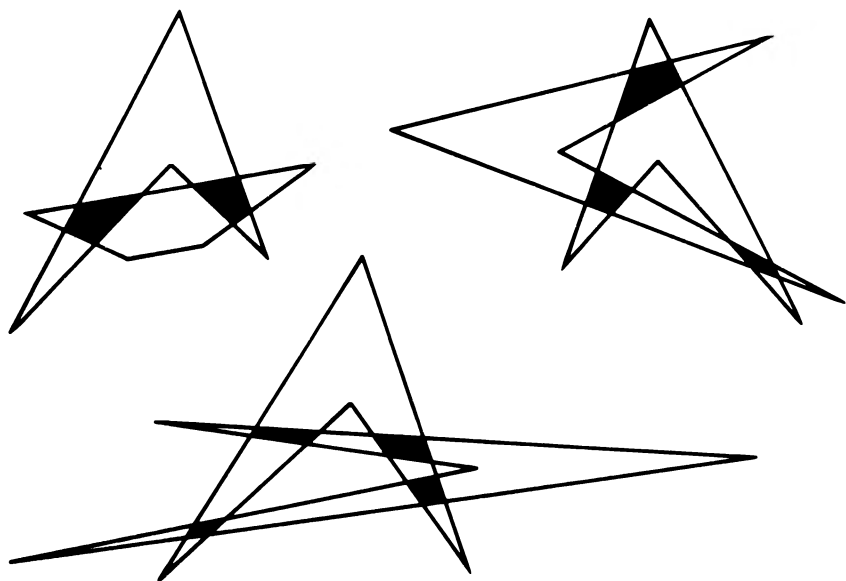


Рис. 411

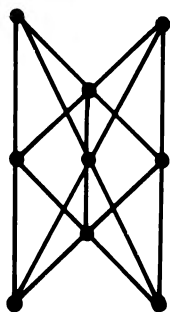


Рис. 412

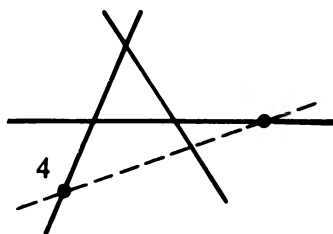


Рис. 413

предыдущими в трех точках. Эти точки разобьют четвертую прямую на четыре куска. Соответственно добавятся и четыре куска плоскости. Четыре прямые разобьют плоскость на  $7 + 4 = 11$  частей. Добавим пятую прямую. На ней образуется пять кусков и добавится пять кусков плоскости. Таким образом, пять прямых разобьют плоскость на  $7 + 4 + 5 = 16$  частей. Для шести прямых число частей равно  $16 + 6 = 22$ .

38. а, в, е; б, г, д.

39. 120 см.

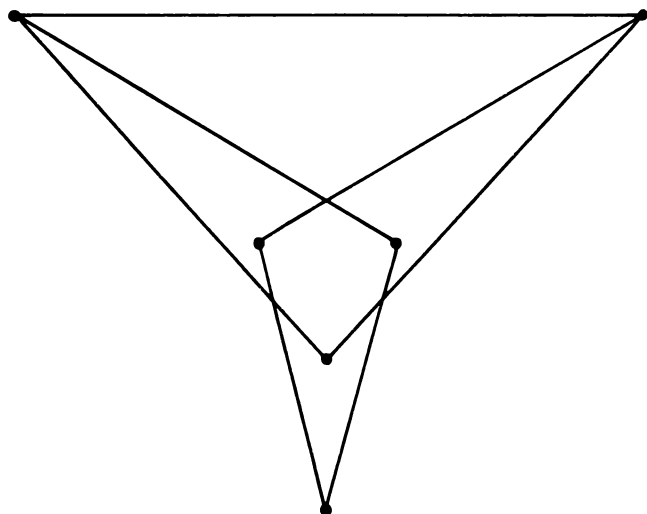
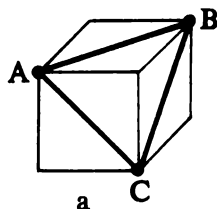
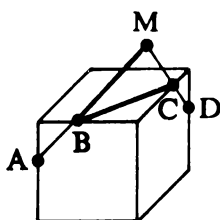


Рис. 414

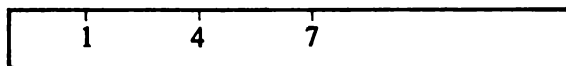


а

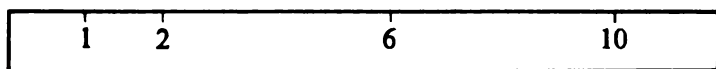
Рис. 415



б



а



б

Рис. 416

40. Если мы нарисуем прямой угол с вершиной на окружности, то прямая, соединяющая точки пересечения его сторон с окружностью, проходит через центр круга. Две такие прямые определяют центр.
41. Рис. 414.
42. На каждой «петле» таких точек будет четное число, а значит, и всего точек пересечения четное число.
43. а)  $60^\circ$ ; рис. 415, а;  $120^\circ$ , рис. 415, б.
45. Рис. 416, а, б.

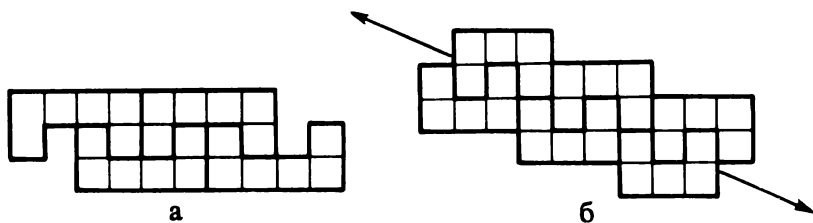


Рис. 417

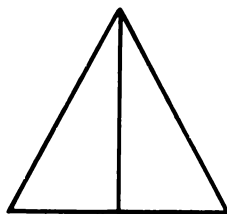


Рис. 418

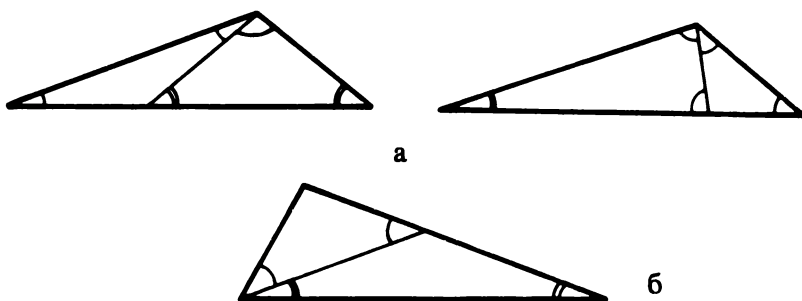


Рис. 419

47. Вымощиваем сначала полосу (рис. 417, а), а затем всю плоскость (рис. 417, б).
46. Из двух таких треугольников можно составить правильный треугольник (рис. 418).
48. Через каждую из трех точек надо провести прямую, параллельную прямой, проходящей через две другие точки.
49. Рис. 419, а, б.



Рис. 420

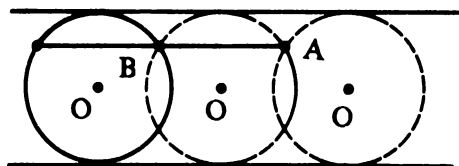


Рис. 421

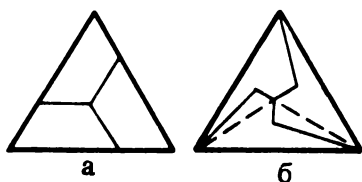
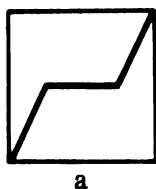
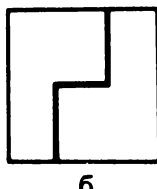


Рис. 422



а



б

Рис. 423

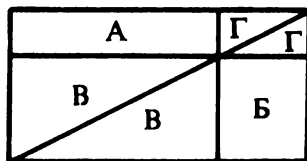


Рис. 424

50. а) рис. 420. б) возьмем центр окружности, проходящей через вершины треугольника, и соединим с вершинами. Треугольник будет разделен на три равнобедренных треугольника.
51. Постройте любую окружность, касающуюся прямых, проведите через А прямую, параллельную данным, и «передвиньте» центр построенной окружности в нужном направлении на АВ или АС (рис. 421).
52. а) рис. 422, а; б) рис. 422, б;
53. а) рис. 423, а; б) рис. 423, б.
54. Прямоугольники А и Б имеют равные площади. Это следует из того, что диагональ делит прямоугольник на равные треугольники. Значит, суммарная площадь А, В и Г равна площади Б, В и Г (рис. 424).

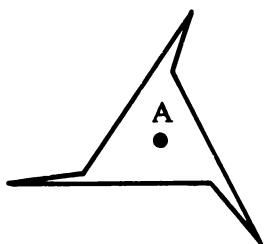


Рис. 425

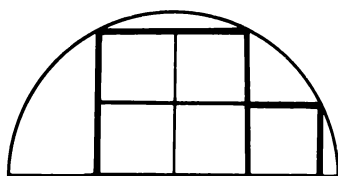


Рис. 426

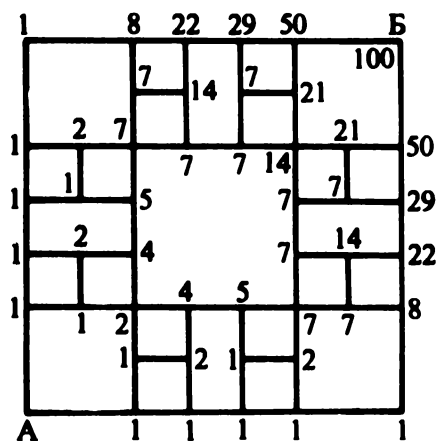


Рис. 427

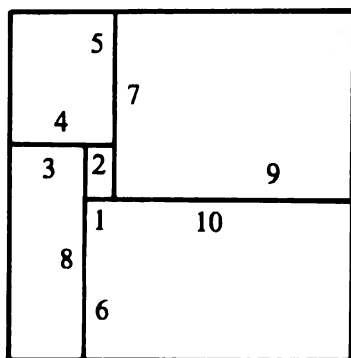


Рис. 428

55. Из точки А ни одна из сторон не видна целиком (рис. 425).
56. Рис. 426.
57. Будем последовательно двигаться из А и ставить в каждом узле число, равное количеству способов, какими можно попасть в этот узел. Тогда число в каждом следующем узле равно сумме чисел предшествующих узлов (тех, из которых попадаем в этот узел за один переход). В результате в точке В получим число 100. Столькими способами можно попасть из А в В (рис. 427).
58. Рис. 428.

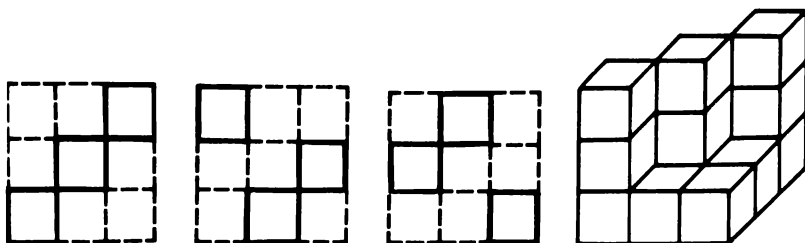


Рис. 429

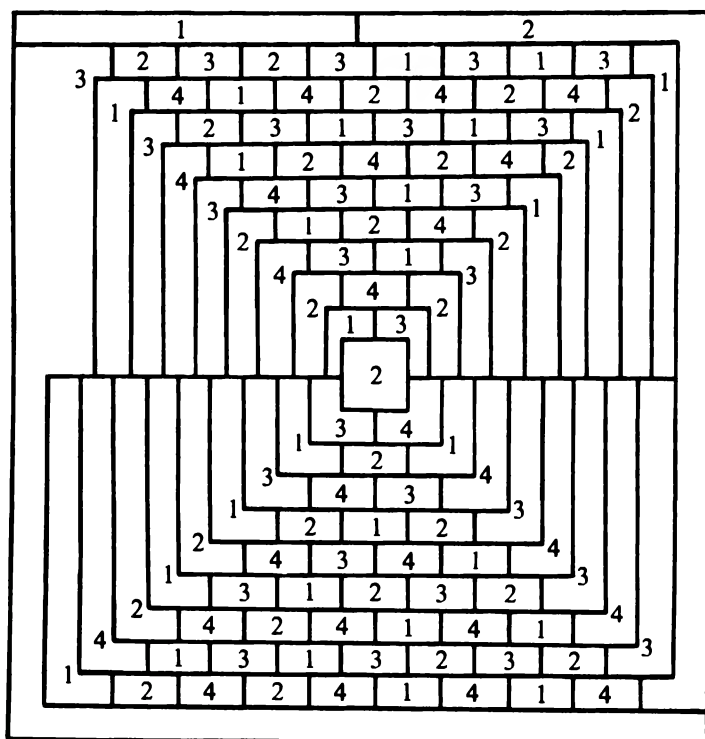


Рис. 430

59. а) оставим в каждом слое по три кубика (всего 9), как на рис. 429, а; б) рис. 429, б. Нижний слой заполнен целиком, всего 15 кубиков.
60. На втором рисунке диагональ на самом деле представляет очень узкий четырехугольник площадью 1. Если приложить друг к другу получившиеся после разрезания четырехугольник и треугольник, то соответствующие стороны не лежат на одной прямой.
61. Рис. 430.



## СОДЕРЖАНИЕ

§1. Первые шаги в геометрии . . . . .	9
§2. Пространство и размерность . . . . .	12
§3. Простейшие геометрические фигуры . . . . .	18
§4. Конструирование из Т . . . . .	21
§5. Куб и его свойства . . . . .	23
§6. Задачи на разрезание и складывание фигур . . . . .	28
§7. Треугольник . . . . .	30
§8. Правильные многогранники . . . . .	41
§9. Геометрические головоломки . . . . .	45
§10. Измерение длины . . . . .	48
§11. Вычисление площади и объема . . . . .	52
§12. Вычисление длины, площади и объема . . . . .	56
§13. Окружность . . . . .	62
§14. Геометрический тренинг . . . . .	71
§15. Топологические опыты . . . . .	73
§16. Задачи со спичками . . . . .	80
§17. Зашифрованная переписка . . . . .	82
§18. Задачи, головоломки, игры . . . . .	85
§19. Фигурки из кубиков и их частей . . . . .	93
§20. Параллельность и перпендикулярность . . . . .	99
§21. Параллелограммы . . . . .	104
§22. Координаты, координаты, координаты,.. . . .	108
§23. Оригами . . . . .	117
§24. Замечательные кривые . . . . .	122
§25. Кривые дракона . . . . .	127
§26. Лабиринты . . . . .	131
§27. Геометрия клетчатой бумаги . . . . .	135
§28. Зеркальное отражение . . . . .	137
§29. Симметрия . . . . .	139
§30. Бордюры . . . . .	145
§31. Орнаменты . . . . .	152
§32. Симметрия помогает решать задачи . . . . .	157
§33. Одно важное свойство окружности . . . . .	160
§34. Задачи, головоломки, игры . . . . .	163
Подсказки, ответы, решения . . . . .	174



*Игорь Федорович Шарыгин  
Лариса Николаевна Ерганжиева*

**Наглядная геометрия**  
*Учебное издание*

**Редактор Г.И. Чернышева**  
**Художественный редактор Г.П. Огурцова**  
**Технический редактор Ж.И. Яковлева**  
**Корректор Л.А. Синюхина**

**Н/К**

**Подписано в печать 14.12.92.**  
**Формат 60х90/16. Бумага офсетная N 1.**  
**Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Объем 13 печ. л.**  
**Тираж 100 000 экз. Заказ N 1699.**  
**Цена договорная**

**Издательство — Культурно-производственный центр «МАРТА»**

**Московская типография №7.**  
**Министерство печати и информации Российской Федерации.**  
**121019, г. Москва, пер. Аксакова, д. 13**

