



Р. ГАБАСОВ
Ф. М. КИРИЛЛОВА

ОСОБЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ



Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА. ОСОБЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

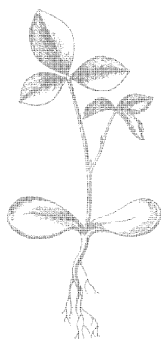


ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973**

Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА

ОСОБЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ



**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973**

6 ф6.5
Г 12
УДК 62-50

Особые оптимальные управления. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1973, 256 стр.

В монографии излагаются новые методы исследования вырожденных задач теории оптимальных процессов, связанных с особыми управлениями и скользящими режимами. Такие задачи часто встречаются в проблемах космической навигации, динамики полета и т. д. Принцип максимума и многие другие известные методы неэффективны при исследовании вырожденных задач.

Рассмотрены вопросы: аппарат скобок Пуассона для вычисления особых управлений, вариации сопряженных систем, пакеты вариаций, матричные импульсы, связь между критериями оптимальности, оптимальное сопряжение участков управления и др.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся задачами управления, а также на студентов и аспирантов факультетов прикладной математики университетов.

Илл. 6. Библ. 118 назв.

© Издательство «Наука», 1973 г.

Рафаил Габасов, Фаина Михайловна Кириллова
Особые оптимальные управления
(Серия: «Теоретические основы технической кибернетики»)

М., 1973 г., 256 стр. с илл.

Редактор *И. М. Овчинникова*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *Н. Б. Румянцева*

Сдано в набор 1/XII 1972 г. Подписано к печати 12/VI 1973 г.
Бумага 84 × 108¹/₃₂, тип. № 1. Физ. печ. л. 8. Условн. печ. л. 13,44, Уч.-изд. л. 14,28. Тираж 6600 экз. Т-08181. Цена книги 1 р. 14 к. Заказ № 420.

Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Г 3314—1775
042(02)—73 169-73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Введение	9
Глава I. Особые управления и способы их вычисления . . .	25
§ 1. Особые управления	25
§ 2. Вычисление одномерной особой экстремали	30
§ 3. Построение поверхности особого управления	42
§ 4. О вычислении многомерных особых управлений	43
Комментарии к главе I	45
Глава II. Исследование оптимальности одномерных особых управлений с помощью пакетов вариаций	46
§ 1. Условия Лежандра — Клебша	47
§ 2. Метод Келли исследования особых управлений	59
§ 3. Обобщение метода Келли	67
§ 4. Метод преобразований в пространствах вариаций	74
§ 5. Новая формула приращения функционала и ее применение к доказательству необходимых условий оптимальности особых управлений	78
§ 6. Метод преобразований в пространстве состояний	88
§ 7. Пакет вариаций	90
§ 8. Вторая вариация функционала на пакете вариаций управления	96
§ 9. Получение необходимых условий оптимальности с помощью простейших пакетов	110
§ 10. Исследование второй вариации функционала на пакете вариаций	116
§ 11. Исследование второй вариации функционала на пакете вариаций второго порядка	126
Комментарии к главе II	135

Глава III. Необходимые условия оптимальности многомерных особых управлений	137
§ 1. Метод преобразования многомерных вариаций	137
§ 2. Многомерные пакеты вариаций	150
§ 3. Многомерные пакеты вариаций (продолжение)	166
Комментарии к главе III	169
Глава IV. Исследование особых управлений с помощью матричных импульсов	170
§ 1. О возможности обобщения результатов гл. II на задачи с замкнутыми множествами управлений	170
§ 2. Формула приращения второго порядка	175
§ 3. Необходимые условия оптимальности второго порядка для задач с замкнутыми множествами управления	178
§ 4. Необходимые условия оптимальности высокого порядка в матричных импульсах	185
Комментарии к главе IV	191
Глава V. Связь между основными группами необходимых условий оптимальности	192
§ 1. Условие оптимальности Келли и условие оптимальности, выраженное через матричные импульсы	192
§ 2. Связь между двумя условиями оптимальности многомерных особых управлений	195
§ 3. Метод динамического программирования при исследовании особых управлений	195
§ 4. Связь между функцией Беллмана и матричными импульсами	199
Комментарии к главе V	203
Глава VI. Применение пакета вариаций к исследованию квази-особых экстремалей	204
§ 1. Необходимое условие оптимальности типа Лежандра—Клебша	204
§ 2. Условия оптимальности типа равенства	209
§ 3. Условие оптимальности типа Келли	214
Комментарии к главе VI	219
Глава VII. Исследование особых управлений методом приращений в пространстве состояний	220
§ 1. Доказательство принципа максимума	220
§ 2. Необходимое условие оптимальности особых управлений	223

§ 3. Доказательство условия Келли	225
§ 4. Новое необходимое условие оптимальности для особых управлений	227
Комментарии к главе VII	232
Глава VIII. Задача оптимального сопряжения участков управления	233
§ 1. Оптимальное сопряжение неособых управлений	234
§ 2. Сопряжение особых и неособых участков управления	238
§ 3. Вторая группа условий оптимального сопряжения особого и неособого участков управления	243
Комментарии к главе VIII	246
Заключение	247
Литература	249

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге рассматриваются специальные вопросы теории оптимальных процессов. Предполагается, что читатель знаком с основными фактами этой теории, хотя фундаментальный результат ее (принцип максимума) доказывается во Введении. Предметом изучения являются экстремали Понтрягина — объекты, составляющие существо уже ставшего классическим принципа максимума Понтрягина. Основная цель работы состоит в развитии новых методов исследования, позволяющих более детально и полно, чем это возможно в теории принципа максимума, проанализировать оптимальные управления.

Нам приятно поблагодарить Е. Е. Барбашину, С. Я. Гороховик, А. И. Калинина, В. П. Кирлицу, В. В. Крахотко, В. А. Сусякову, Т. А. Толстеневу за помощь при оформлении работы. Особую признательность мы выражаем Л. Т. Ащепкову за его большой труд по подготовке рукописи и рецензенту В. И. Гурману за ряд ценных замечаний.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

1. Предварительные замечания. Теория оптимальных процессов зародилась и получила бурное развитие лишь в последние двадцать лет. За этот короткий период в ней был получен ряд выдающихся результатов. Среди них особое место занимает *принцип максимума Понтрягина*. История вопроса, суть и особенности этого результата детально обсуждаются в известных монографиях. Принцип максимума привлекает внимание специалистов из самых разных областей, и поэтому для него было предложено много интересных доказательств. С другой стороны, принцип максимума усиленно распространялся на новые задачи, объекты. Эти вопросы лежат в стороне от главного направления книги, и мы их не будем касаться. В соответствии с основной задачей монографии нас будет интересовать другой аспект проблемы оптимизации, а именно, мы будем изучать лишь те управления, которые уже удовлетворяют принципу максимума. Для начала естественно ограничиться не очень сложным, но типичным случаем, не отягощенным второстепенными обстоятельствами, с тем, чтобы более ярко выявить особенности используемых методов и результатов.

В качестве «эталона» всюду рассматривается *задача терминального управления*. Для полноты изложения и удобства ссылок приведем сначала точную формулировку задачи, дадим элементарное доказательство принципа максимума, а затем уже перейдем к обсуждению темы, которой посвящена монография.

2. Задача терминального управления. Пусть на классе кусочно-непрерывных r -мерных функций $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, принимающих значения из множества U

$$u(t) \in U \quad (1)$$

(допустимые управления), минимизируется функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1)), \quad (2)$$

определенный с помощью траекторий динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}. \quad (3)$$

Моменты t_0, t_1 , вектор x_0 будем считать фиксированными. Относительно функций $\varphi(x)$, $f(x, u, t)$ предположим, что они непрерывны вместе с производными $\partial\varphi/\partial x$, $\partial f(x, u, t)/\partial x$. Решение задачи — управление $u^0(t)$, доставляющее минимум функционалу (2), — назовем *оптимальным*, а соответствующую ему траекторию $x^0(t)$ системы (3) — *оптимальной траекторией*.

3. Метод приращений. Кроме управления $u^0(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, рассмотрим «возмущенное» управление

$$\tilde{u}(t) = u^0(t) + \Delta u(t) \quad (4)$$

и вычислим приращение функционала (2). Имеем

$$\Delta J(u^0) = J(\tilde{u}) - J(u^0) = \varphi(\tilde{x}(t_1)) - \varphi(x^0(t_1)) = \Delta\varphi(x^0(t_1)), \quad (5)$$

где $\tilde{x}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, — траектория системы (3) при $u(t) = \tilde{u}(t)$.

Ясно, что при любом допустимом управлении (4) должно выполняться неравенство

$$\Delta J(u^0) \geq 0. \quad (6)$$

Метод приращений состоит в «расшифровке» этого неравенства. Из (5) имеем

$$\Delta J(u^0) = \frac{\partial\varphi'(x^0(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + o(\|\Delta x(t_1)\|)$$

$$(\Delta x(t) = \tilde{x}(t) - x^0(t)).$$

Но поскольку из формулы интегрирования по частям для любой n -мерной дифференцируемой функции $\psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, следует тождество

$$\begin{aligned} \psi'(t_1) \Delta x(t_1) - \psi'(t_0) \Delta x(t_0) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \Delta \dot{x}(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt, \end{aligned}$$

то, полагая

$$\psi(t_1) = - \frac{\partial \Phi(x^0(t_1))}{\partial x} \quad (7)$$

и вспоминая, что $\Delta x(t_0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = & - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \Delta \dot{x}(t) dt + o(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned} \quad (8)$$

Приращение $\Delta x(t)$, по определению, удовлетворяет уравнению

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x + \Delta x, u + \Delta u, t) - f(x, u, t), \quad \Delta x(t_0) = 0.$$

Поэтому, подставляя последнее выражение в (8) и вводя обозначение

$$H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t)$$

(гамильтониан), из (8) имеем

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = & \\ = & - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0, \psi, u^0 + \Delta u, t)}{\partial x} \Delta x dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [H(x^0, \psi, u^0 + \Delta u, t) - H(x^0, \psi, u^0, t)] dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} o_1(\|\Delta x(t)\|) dt + o(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned} \quad (9)$$

Определим функцию $\psi^0(t)$, $t_0 \leq t < t_1$, как решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{\psi}^0 = - \frac{\partial H(x^0(t), \psi^0, u^0(t), t)}{\partial x} \quad (10)$$

с начальным условием (7). Положив для сокращения

$$\Delta_\psi H(x, \psi, u, t) = H(x, \psi, v, t) - H(x, \psi, u, t),$$

из (9) получим формулу приращения

$$\Delta J(u^0) = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H(x^0, \psi^0, u^0, t) dt + \eta, \quad (11)$$

где $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$,

$$\eta_1 = o(\|\Delta x(t_1)\|), \quad \eta_2 = - \int_{t_0}^{t_1} o_1(\|\Delta x(t)\|) dt,$$

$$\eta_3 = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}} H'(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x} \Delta x dt.$$

4. Принцип максимума. Пусть приращение управления $u(t)$ есть *игольчатая* вариация

$$\Delta u(t) = \begin{cases} v - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0 & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases}$$

где v — некоторый вектор, удовлетворяющий условию (1), θ — точка из $[t_0, t_1]$, ε — достаточно малое положительное число.

В силу интегральной непрерывности и непрерывности по начальным данным решений системы (3) получаем

$$\|\Delta x(t)\| \leq K\varepsilon, \quad 0 < K < +\infty, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Используя эту оценку, из (11) видим, что $|\eta| \sim \varepsilon^2$. Но по теореме о среднем для первого слагаемого справа в (11) имеем

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H(x^0, \psi^0, u^0, t) dt &= \\ &= - \Delta_{\bar{u}} H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \varepsilon + o_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

Поэтому из (11) с учетом (6) получается неравенство

$$\Delta_{\bar{u}} H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \leq 0, \quad (12)$$

справедливое для всех $v \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1]$. Понятно, что неравенство (12) можно записать в виде

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t). \quad (13)$$

Это условие, которое должно выполняться вдоль оптимального управления $u^0(t)$ и при $x^0(t)$ и функции $\psi^0(t)$, удовлетворяющих уравнениям (3), (10), называется *условием максимума*, а все утверждение — *принципом максимума*.

5. Экстремали Понтрягина. Допустимое управление $u^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, назовем *экстремалью Понтрягина*, если оно вместе с функциями $x^*(t)$, $\psi^*(t)$ — решениями системы (3), (10), (7), удовлетворяет условию максимума (13). Из принципа максимума следует, что каждое оптимальное управление есть экстремаль Понтрягина. Поэтому задача оптимального управления сводится к выделению среди экстремалей Понтрягина наилучшего управления. Если в задаче оптимизации оптимальное управление существует, а экстремаль Понтрягина единственна, то она и есть оптимальное управление. Данная книга посвящена изучению экстремалей Понтрягина, выделению среди них оптимального управления и отсеиванию из них неоптимальных экземпляров.

Необходимые условия оптимальности, выраженные через импульсы $\psi(t)$, справедливы и для задач, в которых есть ограничения на правый конец траектории. Это известный факт, и доказывается он довольно просто. Принципиальные трудности возникают при доказательстве условий трансверсальности высокого порядка. Из этого не следует, что приведенные в работе условия нельзя использовать для задач с ограничением на правый конец, ибо в последние годы большую популярность приобрел метод штрафных функций, который сводит задачу оптимизации с ограничениями на правый конец к задачам со свободным правым концом.

6. Особые управления. Как известно, идея применения принципа максимума для вычисления оптимальных управлений состоит в следующем. Из условия максимума (13) при произвольных x , ψ , t исключаются параметры управления $u = u(x, \psi, t)$, результат подставляется в (3), (10). Таким образом получается система из $2n$ дифференциальных уравнений с краевыми условиями из (3) и (7). Среди решений этой системы находится и оптимальная траектория (если предположить, что оптимальное управление существует). Описанная процедура реализуема, если в условии (13) максимум справа

достигается в единственной точке. Может, однако, случиться, что максимум в (13) достигается в нескольких точках или же функция $H(x^0(t), \psi^0(t), u, t)$ совсем не зависит от параметров u . Такие случаи называются *особыми*, а управления $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, вдоль которых они реализуются, называют *особыми управлениями*.

Из приведенного определения видно, что каждое особое управление представляет собой экстремаль Понтрягина, но экстремаль со специальным свойством.

7. Особые управления в прикладных задачах. Математически условие особенности управления $u(t)$ записывается следующим образом: найдется множество $\omega(t) \subset U$, $t_0 \leq t \leq t_1$, такое, что

$$H(x(t), \psi(t), u, t) \equiv \text{const} \quad (14)$$

для всех $u \in \omega(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

На первый взгляд, ситуация, в которой реализуется свойство (14), является исключительной. Может быть, поэтому долгое время после введения Л. И. Розоноэром [2] особых управлений они почти не изучались. Постепенно накапливались задачи, в которых особые управления оказались неизбежными. Большинство таких задач связано с ракетодинамикой, космической навигацией и сопровождается уравнениями вида

$$\dot{x} = f(x, t) + \sum_{i=1}^r u_i g_i(x, t). \quad (15)$$

В последние годы особые управления обнаружены в задачах оптимизации, возникающих в электротехнике, металлургии и т. д. Видимо, со временем, по мере разработки соответствующих задач, особые управления появятся и в других приложениях.

8. Особые управления как признак сложности задачи. Неизбежность особых управлений в сложных задачах оптимизации может быть просто пояснена на языке принципа максимума и определения особого управления. Принцип максимума — это, по существу, некоторый критерий, определенный на изолированном управлении, позволяющий по свойствам функций — параметров задачи, — изменяющихся вдоль этих управлений, судить об оптимальности (а скорее о неоптимальности) рассматриваемых управлений. Трудно ожидать, что при такой

информации может получиться исчерпывающий ответ. Отсюда и локальность условий, доставляемых принципом максимума. Нетрудно представить ситуацию, когда на основании упомянутой ограниченной информации нельзя дать ответ на вопрос, оптимально управление или не оптимально. Как это выразить на языке гамильтониана, на языке условия максимума? Условие особенности (14) и есть одна из форм этого выражения. Оно говорит, что особое управление нельзя отбросить как неоптимальное, ибо оно удовлетворяет принципу максимума, но при этом трудно сказать что-нибудь в пользу оптимальности этого управления, ибо условие максимума на нем вырождается. Такое объяснение приводит к мысли, что условие особенности не есть признак вырожденности управления, исключительности ситуации, скорее, — это сигнал о том, что задача достаточно сложна и ее нельзя до конца исследовать лишь принципом максимума (необходимым условием первого порядка).

9. Особые управления и скользящие режимы. Косвенным подтверждением распространенности и важности особых управлений является и их связь со скользящими режимами. Изучение ряда задач динамики полета привело к открытию странных на первый взгляд режимов управления. Здравый смысл подсказывает, что реальное управление должно представлять нечто, подобное кусочно-непрерывной функции, т. е. управление периодами изменяется плавно и в некоторые моменты меняет свое значение скачком. Слишком частые скачки каждый разумный человек отнесет к режиму ненормальному. Тем удивительнее оказался тот факт, что в некоторых задачах оптимизации управление тем лучше, чем оно чаще «скачет». Эти так называемые скользящие оптимальные режимы — явление уникальное в теории оптимальных процессов. Но, по утверждению В. Ф. Кротова [5], отсутствие минимума в классе кусочно-непрерывных функций столь же типично, как и его наличие. Все это говорит о том, что скользящие режимы являются еще одним признаком сложности задачи оптимизации, если ее рассматривать в рамках традиционных математических моделей. Поскольку пока других (может быть, более адекватных) моделей не существует, то и мы будем обосновывать наши утверждения в традиционных

терминах. Для нас скользящие режимы интересны потому, что каждой задаче со скользящим режимом можно отнести другую задачу, в которой скользящих режимов не может быть, но зато в новой задаче обязательно появятся особые управления.

10. Особые управления и теоремы существования оптимальных управлений. По математическим конструкциям с предыдущим пунктом смыкается содержание настоящего пункта. Дело в том, что описанная выше ситуация возникновения скользящих режимов на математическом языке означает следующее. Встречаются задачи, в которых можно построить последовательность допустимых управлений, вдоль которых критерий качества стремится к нижней грани своих значений, но невозможно дать естественное определение предельного управления, на котором эта нижняя грань достигается. Все известные классы функций (кусочно-непрерывные, измеримые и т. д.), для которых удобен существующий аппарат, оказываются для этой цели непригодными. Выход был найден, когда определение скользящего режима дали не в терминах управления, а в терминах соответствующих им траекторий. Однако такое определение было мало конструктивным. В работе Р. В. Гамкрелидзе [1] был сделан новый кардинальный шаг, и с тех пор для исследования скользящих режимов, как правило, по исходной задаче строят с помощью простого правила вспомогательную, в которой можно всегда ограничиться известными классами управляющих функций. Другими словами, начиная с отмеченной выше работы Р. В. Гамкрелидзе, стали таким (нетривиальным) образом расширять класс управлений, что в новой задаче всегда существует оптимальное управление в традиционном классе измеримых функций. Второй способ обхода вопросов существования оптимального управления связан с введением мер и восходит к старым работам Л. Янга [1]. Казалось бы, что эти приемы открывают широкую дорогу для исследования задач оптимизации современными мощными методами типа принципа максимума и динамического программирования. На деле положение оказалось сложнее. Плата за теоремы существования была немалой. Введение вспомогательных задач избавляло исследователей от трудных вопросов исследования

существования оптимального управления, но взамен этого приводило к особым управлениям, для которых, как отмечено выше, традиционный аппарат необходимых и достаточных условий оптимальности неэффективен. В конечном счете выигрыш зависит от конкретной задачи, от цели, которая ставится в исследовании.

11. Особые управления и проблемы регуляризации. Поскольку в само определение особых управлений входит соотношение типа тождества (см. Введение (14)), то естественной является мысль «незначительно» изменить условия задачи с тем, чтобы подобное «редкое» явление в виде тождества исчезло. Общая идея модификации исходной задачи созвучна с идеей регуляризации некорректно поставленных задач, но, конечно, здесь существо дела другое. При вычислении оптимальных управлений введение последовательности задач с неособыми управлениями, которая по решениям сходится к задаче с особыми управлениями, может оказаться в некоторых случаях полезным. Однако надо помнить, что с приближением к исходной задаче поведение решений вспомогательных регуляризованных задач будет ухудшаться, станет походить на поведение решения исходной задачи с особыми управлениями. Именно это обстоятельство среди ряда других ставит остро вопрос о специальном изучении особых управлений. Ситуация здесь такая же, как в линейной алгебре. Там случаи, когда матрица особая или собственные числа кратные и т. п., являются с общей точки зрения исключительными и могут реализоваться точно весьма редко. Даже если они и встречаются, то есть, как правило, множество способов «чуть-чуть» изменить условия и эта особенность исчезнет. Но подобные «практические» соображения не могут отвлечь внимание математиков от изучения указанных особых случаев. Наоборот, они тщательно изучаются из-за их очевидной связи с задачами с плохо обусловленными матрицами. При этом довод об исключительности особых случаев «обращается» в другую сторону: реальные данные всегда известны лишь с ограниченной точностью, и поэтому предположение о неособенности становится шатким, при некоторых значениях задача в действительности не будет отличаться от особой.

12. Особые задачи вариационного исчисления. После того как стало постепенно выясняться значение особых управлений в теории оптимальных процессов, исследователи, наученные опытом, обратились к вариационному исчислению с надеждой найти соответствующие результаты. Этому способствовало и то, что серьезно особые управления и вообще вырожденные задачи стали изучаться специалистами по механике полета, у которых был большой опыт работы методами вариационного исчисления. Если до появления особых управлений аналогичные попытки были в некоторой степени успешными, поскольку многие результаты получили вариационное толкование, вариационное доказательство, то для особых управлений до сих пор не обнаружено скольконибудь стоящего аналога в вариационном исчислении. Можно утверждать, что само понятие особого управления — типичное явление лишь современной теории оптимальных процессов. В вариационном исчислении особый случай можно ввести с помощью известного условия Лежандра — Клебша, считая квадратичную форму из этого условия не определенно положительной, а лишь знакоположительной. Но последний случай упоминается в работах по вариационному исчислению обычно только для того, чтобы предупредить, что он-то в дальнейшем не рассматривается.

13. Условие Якоби. Условия первого порядка, выраженные через уравнения Эйлера, множители Лагранжа и т. п., в вариационном исчислении развивались лишь в предположении, что квадратичная форма из критерия Лежандра — Клебша определенно положительна. Именно при этом предположении получается условие Якоби об отсутствии сопряженных точек экстремалей. Таким образом, критерий Якоби — необходимое условие второго порядка — определен лишь в неособом случае и его непосредственное распространение на особые управления принципиально невозможно.

14. Неособые экстремали Понтрягина. Особыми управлениями не исчерпываются экстремали Понтрягина. Приведенными рассуждениями мы не старались создать впечатление, что в случае неособых экстремалей Понтрягина нет нерешенных проблем. Дело обстоит, видимо, так, что именно для последних нерешенных вопросов

больше всего. Выделение среди экстремалей Понтрягина более узкого подмножества, претендующего на оптимальность, — задача, на наш взгляд, чрезвычайно важная и трудная. Ее трудность объясняется тем, что сам принцип максимума — очень сильное необходимое условие оптимальности. В данной работе будут приведены некоторые результаты из этой области, но пока, по-видимому, проблема еще по-серьезному не изучалась. Хотя и вариационное исчисление не очень богато условиями высокого порядка, кто знает, может быть новая атака с позиций теории оптимальных процессов окажется более успешной. А переход к условиям высокого порядка диктуется не только потребностями конкретных вычислений, но и общим уровнем развития науки в других областях, где, как правило, работа с первыми приближениями признается уже недостаточной, грубой.

15. Краткий исторический обзор. Впервые понятие особого управления появилось в работе Л. И. Розоноэра [2] в 1959 г. Там на простом примере показывалось, как вычислять особые управления, если исходить прямо из определения. Этот прием получил развитие в работах С. Джонсона, Дж. Гибсона [1], Ю. И. Параева [1]. Позднее (1965 г.) много внимания ему уделялось в работе С. Джонсона [1]. В простых случаях можно довольно легко указать вид особого управления, однако выкладки чрезвычайно усложняются с повышением порядка и усложнением системы. Почти необозримы результаты для многомерных управлений. Определенное продвижение вопрос получил после того, как А. М. Летов [2] привлек к задаче вычисления особых управлений аппарат скобок Пуассона. Часть из новых результатов вошла в обзор авторов и Н. В. Тарасенко, В. А. Срочко [1—3], в диссертацию В. А. Срочко [2], более полно этот вопрос будет освещен в гл. I.

Долгое время за вычислениями особых управлений совершенно не затрагивался вопрос об их оптимальности. Понятно, в первые годы нужно было найти способы построения экстремалей Понтрягина на всем интервале их определения, и описанными способами старались решить эту задачу на самом трудном особом участке. В 1964 г. вопрос об оптимальности особых управлений исследовал Г. Келли [2]. Для доказательства

необходимого условия оптимальности Г. Келли была введена новая вариация управления. Эта вариация принципиально отличалась от распространенной в теории оптимальных процессов «игольчатой» вариации. Для дальнейшего развития теории немаловажным явилось и то, что окончательный результат Г. Келли [2] был выражен в очень изящной форме (А. Брайсон). Развивая идею Г. Келли о специальных вариациях, американские ученые Р. Копп, Г. Мойер [1] в 1965 г. получили ряд новых необходимых условий оптимальности особых управлений. В совместной работе этих же авторов и Г. Келли [1] условия Коппа — Мойера были получены еще одним методом, который более изящен, чем ранние, и не требует явного построения вариаций. Приблизительно в это время необходимые условия оптимальности особых управлений получены и Г. Роббинсом [1], но в форме менее изящной, чем у Г. Келли. Все перечисленные результаты относились к системе (3) с одним линейно входящим управлением. В работе Б. С. Гоха [1, 2] техника, аналогичная конструкции Г. Келли, Р. Коппа, Г. Мойера [1], перенесена на системы (3) с любым конечным числом управлений. В отличие от ранних работ, в многомерном случае стали выделять два типа необходимых условий оптимальности: условия типа равенства и условия типа неравенства. Первая группа условий не имела аналога в одномерном случае. Хотя обобщение результатов одномерного случая проведено Б. С. Гохом [1—3] весьма далеко, недостатком полученных результатов следует считать их форму представления. Позднее этот недостаток был устранен в работе И. Б. Вапнярского [1], где для одного частного случая результат Б. С. Гоха [1] трактовался весьма просто. Доказательства всех перечисленных результатов основывались на методах, предложенных Г. Келли, Р. Коппом, Г. Мойером [1]. Несложный анализ показывает, что указанные методы, по существу, используют открытость множества управлений U . Это обстоятельство более или менее четко подчеркивается в работах Г. Келли, Р. Коппа, Г. Мойера [1], поскольку почти очевидно, что все предложенные вариации (явные или неявные) по структуре двусторонние. Возник вопрос: верны ли результаты Г. Келли, Р. Коппа, Г. Мойера [1] только для открытых множеств

U или же они, как и принцип максимума, верны для произвольных множеств U , и дело упирается лишь в изобретение нового метода доказательства? Поскольку к 1965 г. довольно успешно была развита техника «раскрытия» многих замкнутых множеств, то казалось, что результаты Г. Келли, Р. Коппа, Г. Мойера и др. легко переносятся и на замкнутые множества.

К необходимым условиям оптимальности особых управлений для случая замкнутых множеств U подход с другой стороны был сделан авторами [2]. Основная идея состояла во введении матричных импульсов. Этот метод был развит в работах авторов [3], В. А. Срочко [2].

Анализ, проведенный авторами, показал, что условия Келли, Коппа — Мойера, Вапнярского невозможно полностью перенести на случай замкнутой области управления U и была высказана идея об одном типе вариаций, обобщающем вариации Г. Келли, Р. Коппа, Г. Мойера [1].

Новый тип вариаций, названный *пакетом вариаций*, впервые был представлен в докладе авторов и В. А. Срочко [1]. Пакет вариаций — это своего рода спрессованный набор «игольчатых» вариаций. Состав пакета может быть очень сложным, что делает его довольно мощным и гибким аппаратом. С помощью пакета вариаций авторами и В. А. Срочко [1] получены все известные условия в одномерном случае, доказан ряд новых, среди которых были условия и типа равенства, ранее не встречающиеся для одномерных управлений. Для многомерного случая впервые удалось показать, что условия типа неравенства можно получить независимо от условия типа равенства. Тем самым был устранен недостаток, имеющийся у Б. С. Гоха и у И. Б. Вапнярского. Среди первых результатов, полученных с помощью пакета вариаций, был и неожиданный результат о связи между условиями из работы Г. Келли [2] и условиями авторов [2]. До этого казалось, что эти два типа необходимых условий оптимальности, полученные из совершенно разных представлений, никак не связаны.

В дальнейшем метод пакета вариаций был развит Е. Е. Барбашиной [1, 2] на случай, когда U — замкнутое множество. Эти результаты будут изложены в гл. VI.

В работе Г. Келли [3] предложен еще один метод исследования особых управлений, названный автором *методом преобразований*. В отличие от работы Г. Келли, Р. Коппа, Г. Мойера [1], где операции ведутся в пространстве вариаций, преобразования Г. Келли [3] строятся в пространстве состояний. Конечная цель сохраняется: от задачи, для которой нельзя эффективно применить условие Лежандра — Клебша, переходят к задаче, в которой это условие может работать. Для осуществления преобразования нужно решить уравнение в частных производных или, что эквивалентно, найти все независимые первые интегралы некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Интересно отметить, что к такой же процедуре исследования особых управлений независимо пришел и В. И. Гурман [1—3], который отправлялся от «другого» формализма В. Ф. Кротова [5]. В работах В. И. Гурмана [1—3] более детально, чем у Г. Келли [3], исследуются особые управления.

Оптимальное управление, как правило, состоит из кусков особых и неособых управлений. Поэтому возникает задача оптимального сопряжения различных участков управления. Эта задача исследовалась Г. Келли, Р. Коппом, Г. Мойером [1].

Проблема достаточных условий оптимальности для особых управлений наиболее полно развита в рамках метода В. Ф. Кротова. Этим методом в работах В. И. Гурмана [4—8] исследованы особые управления в различных модельных задачах прикладного характера. Другие результаты по достаточным условиям оптимальности можно найти в обзоре авторов и В. А. Срочко, Н. В. Тарасенко [1—3].

Большая серия работ по особым управлениям принадлежит Д. Джекобсону [1—7]. В основу своих исследований он положил так называемое *дифференциальное динамическое программирование*.

Неособые экстремали Понтрягина исследованы менее тщательно, чем особые. В. Ф. Кротовым, В. З. Букреевым, В. И. Гурманом [1] установлена интересная связь между методом В. Ф. Кротова [4, 5] и условием Якоби (см. Г. Блисс [1]). Авторами [3] при исследовании

неособых экстремалей используется структура множества U и его образа $f(x, U, t)$.

Такова в общих чертах история вопроса по экстремалам Понтрягина. Другие детали будут сообщены по ходу изложения в дальнейшем.

16. О содержании монографии. Основной материал книги основан на исследованиях авторов и их сотрудников. Для полноты изложения в работу включены и результаты других авторов, но при этом были сделаны соответствующие изменения и дополнения или даны новые доказательства. Представление о конкретном содержании книги можно получить по оглавлению, которое составлено весьма подробно.

17. Основные обозначения. В книге используются, как правило, традиционные обозначения и символы; их список приводится в конце данного пункта. Несколько слов о системе ссылок.

Каждый параграф имеет автономную нумерацию теорем, формул и т. п. Внутри параграфов выделены пункты, имеющие самостоятельную нумерацию в пределах параграфа. В пределах каждого параграфа используется одинарная нумерация, она сохраняется и при ссылках внутри него. При ссылках на формулы другого параграфа используется двойная нумерация, где первая группа цифр означает номер параграфа, а вторая — номер формулы в параграфе. Если встречаются ссылки на другие главы, то применяется тройная нумерация, в которой первая цифра (римская) означает номер главы. Ссылки на цитированную литературу помещены в квадратные скобки, а сама литература вынесена в конец книги, где она приведена в алфавитном порядке.

Список обозначений и символов

' (штрих) — операция транспонирования;
 $x = \{x_1, \dots, x_n\}'$ — вектор-столбец с компонентами x_1, \dots, x_n ;
 x' — вектор-строка;
 $x'y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ — скалярное произведение векторов $x = \{x_1, \dots, x_n\}'$ и $y = \{y_1, \dots, y_n\}'$;

$\psi_{ij}x_ix_j = \sum_{k,l=1}^n \psi_{kl}x_kx_l$ — суммирование по одноименным повторяющимся индексам;

$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ — $m \times n$ матрица, i -я строка которой составлена из производных $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, если $f(x) = \{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ — m -мерная функция векторного аргумента $x = \{x_1, \dots, x_n\}'$; если $f(x)$ — скалярная функция, то

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \text{grad } f(x), \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right);$$

$\frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial x \partial u}$ — $(n \times r)$ -матрица, если $f(x, u)$ — скалярная функция от n -вектора x и r -вектора u ; для квадратной матрицы R неравенство $R \leq 0$ означает, что R — матрица коэффициентов знакоотрицательной квадратичной формы;

$[\gamma]$ — целая часть числа γ ;

$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ — производная по времени от $x(t)$;

$\frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=\theta+0}$ — правосторонняя производная функции $x(t)$ в точке $t = \theta$ (аналогично определяется левосторонняя производная от $x(t)$);

∂M — граница множества M ;

$\text{int } M$ — внутренняя часть множества M ;

$\dim M$ — размерность множества M ;

$\text{mes } M$ — лебегова мера множества M ;

E — единичная матрица.

ОСОБЫЕ УПРАВЛЕНИЯ И СПОСОБЫ ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ

В данной главе, являющейся во многом вводной и служащей соединительным звеном между теорией необходимых условий оптимальности первого порядка, с одной стороны, и условиями оптимальности высокого порядка — с другой, излагаются методы вычисления особых управлений в тех случаях, когда непосредственно из условия максимума это сделать не удастся. Рассматриваемая проблема в свое время занимала центральное место в теории особых управлений, да и сейчас ее решение представляет интерес во многих задачах оптимизации.

§ 1. Особые управления

Понятие особого управления тесно связано с видом необходимого условия оптимальности. В теории оптимальных процессов наиболее распространены три типа условий оптимальности первого порядка. В соответствии с этим в данном параграфе вводятся три типа особых управлений.

1. Особая экстремаль Понтрягина. Как показано во Введении (п. 4), каждое оптимальное управление в задаче терминального управления

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

$$x = \{x_1, \dots, x_n\}', \quad u = \{u_1, \dots, u_r\}',$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min_u,$$

где $u(t) \in U$, $u(t)$ — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяет неравенству

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) \geq H(x^0(t), \psi^0(t), u, t), \quad (1)$$

которое должно выполняться в каждой точке t , $t_0 \leq t \leq t_1$, и для каждого элемента u , $u \in U$.

В условии (1), которое, очевидно, эквивалентно условию максимума из принципа максимума Понтрягина, $x^0(t)$ — оптимальная траектория, $u^0(t)$ — оптимальное управление, $\psi^0(t)$ — решение сопряженной системы

$$\begin{aligned}\frac{d\psi^0(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x}, \\ \psi^0(t_1) &= -\frac{\partial \Phi(x^0(t_1))}{\partial x}.\end{aligned}$$

Условию (1) могут удовлетворять не только оптимальные управления.

Определение 1. Допустимое управление (кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, со значениями в U) назовем *экстремалью Понтрягина*, если оно вместе с порожденной им траекторией $x(t)$ системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

и траекторией $\psi(t)$ системы

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\psi(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x}, \\ \psi(t_1) &= -\frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial x},\end{aligned} \right\} \quad (3)$$

удовлетворяет условию максимума

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u, t).$$

Для дальнейшего важно отметить, что в определении 1 нет никаких предположений относительно структуры множества U .

Определение 2. Экстремаль Понтрягина называется *особой*, если при каждом t , $t_0 \leq t \leq t_1$ существует подмножество $\omega(t)$ множества U такое, что выполняются условия

$$H(x(t), \psi(t), u, t) \equiv H(x(t), \psi(t), u(t), t)$$

тождественно по всем элементам u множества $\omega(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Собственно особой экстремаль Понтрягина будет лишь в том случае, когда при каждом t , $t_0 \leq t \leq t_1$, за исключением, быть может множества меры нуль, множе-

ство $\omega(t)$ состоит из более чем одного элемента. В конкретных задачах экстремаль Понтрягина состоит, как правило, из особых и неособых участков (дуг). На неособых участках, очевидно, множество $\omega(t)$ состоит лишь из точки $u(t)$. В дальнейшем, если не оговорено другое, будем считать, что множество $\omega(t)$ при всех t , $t_0 \leq t \leq t_1$, состоит из двух и более элементов.

2. Квазиособая экстремаль. Пусть, в дополнение к сделанным предположениям, функция $f(x, u, t)$ дифференцируема по второму аргументу u , а множество U выпукло. Тогда оптимальное управление $u^0(t)$ при каждом t , $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяет условию

$$\frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} u^0(t) = \max_{u \in U} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u, t)}{\partial u} u. \quad (4)$$

Здесь $x^0(t)$ — оптимальная траектория уравнения (2), $\psi^0(t)$ — решение системы (3) при $x = x^0(t)$, $u = u^0(t)$.

Для рассматриваемой нами задачи этот результат является прямым следствием принципа максимума. Поэтому он слабее последнего. Значение условия (4) состоит не столько в том, что оно проще принципа максимума, сколько в том, что для более сложных случаев, чем рассматриваемый, оно может работать, а принцип максимума уже нет.

Определение 3. Допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, называется *квазиособой экстремалью*, если на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$ определено такое множество $\omega(t) \subset U$, что тождественно по $u \in \omega(t)$ выполняется условие

$$\frac{\partial H'(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} u \equiv \frac{\partial H'(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} u(t), \\ t_0 \leq t \leq t_1.$$

Как и в предыдущем пункте, при исследовании квазиособых экстремалей будем предполагать, что почти при всех t , $t_0 \leq t \leq t_1$, множество $\omega(t)$ состоит не менее чем из двух элементов.

3. Особая экстремаль. Если, сохранив предположение предыдущего пункта относительно функции $f(x, u, t)$, еще упростить множество U , предположив, что оно

открытое, то для оптимального управления будет выполняться новое условие,

$$\frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} \equiv 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (5)$$

Этот результат — прямое следствие принципа максимума или условия (1). Кроме (5), на оптимальном управлении выполняется неравенство

$$u' \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u^2} u \leq 0 \quad (6)$$

для всех t , $t_0 \leq t \leq t_1$, и r -мерных векторов u . Понятно, что неравенство (6) есть необходимое условие максимума гамильтониана в стационарной точке $u^0(t)$ из (5).

Определение 4. Допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, называется *особой экстремалью*, если вдоль него выполняются соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} &\equiv 0, \\ u' \frac{\partial^2 H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u^2} u &\leq 0, \\ \det \left(\frac{\partial^2 H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u^2} \right) &\equiv 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где t — произвольное число из интервала (t_0, t_1) , u — произвольный вектор r -мерного пространства.

Ситуация, рассматриваемая в данном пункте, наиболее близка к задачам классического вариационного исчисления. Условие (5), по существу, эквивалентно уравнению Эйлера. Неравенство (6) есть аналог условия Лежандра — Клебша. Тожество (7), входящее в определение особой экстремали, означает, что вдоль последней условие Лежандра — Клебша вырождается и поэтому критерий Якоби о сопряженных точках неприменим.

4. Связь между особыми управлениями. Основным объектом изучения в данной монографии являются экстремали Понтрягина. Введение дополнительных типов особых управлений вызвано следующим обстоятельством. Очевидно, что всякая особая экстремаль Понтрягина при условиях п. 3 является и квазиособой, и особой. Но, с другой стороны, особая или квазиособая экстремали могут быть и не особыми экстремальями

Понтрягина. Это позволяет через исследование особых и квазиособых экстремалей получить дополнительную информацию о неособых экстремальных Понтрягина. Изучение особых и квазиособых экстремалей — зачастую задача существенно более простая, чем аналогичная задача для экстремалей Понтрягина. В первом случае можно значительно шире использовать аналитический аппарат. Введение дополнительных типов особых управлений объясняется и тем, что для систем

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + \sum_{i=1}^r u_i f_i(x), \quad (8)$$

линейных по управлению и наиболее часто встречающихся в практике особых управлений, упомянутые понятия особых экстремалей очень близки.

Системы (8), как правило, рассматриваются вместе с множеством U специального вида

$$U = \{u: |u_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, r\}. \quad (9)$$

Для системы (8) и такого множества U (а вообще, для любого выпуклого множества U) определение особой экстремали Понтрягина и квазиособой экстремали совпадают.

Если же особая экстремаль Понтрягина $u(t)$ такова, что

$$|u_i(t)| < 1, \quad i = 1, \dots, r, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (10)$$

то она и квазиособа, и особа в смысле определения 4. И наоборот, особая экстремаль со свойством (10) является для системы (8) и множества (9) и квазиособой экстремалью, и особой экстремалью Понтрягина.

Замечание. Для систем (8) с ограничением (9) иногда применяется понятие особого управления по нескольким компонентам. Это означает, что неравенства (10) выполняются лишь по некоторым индексам i . Поскольку для систем вида (8) нас будут интересовать лишь особые экстремали, то мы, как правило, будем предполагать, что все компоненты экстремали удовлетворяют неравенствам (10).

В дальнейшем особые экстремали Понтрягина, квазиособые и особые экстремали именуются чаще *особыми управлениями*. При этом из контекста ясно, в каком смысле понимается особенность.

§ 2. Вычисление одномерной особой экстремали

В данном параграфе рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + u f_1(x), \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}', \quad (1)$$

со скалярным управлением u . Относительно функций $f_0(x)$, $f_1(x)$ будем предполагать, что они дифференцируемы достаточное число раз.

Для системы (1) гамильтониан $H(x, \psi, u) = \psi' [f_0(x) + f_1(x)u]$ можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\left. \begin{aligned} H(x, \psi, u) &= H_0(x, \psi) + u H_1(x, \psi), \\ H_0(x, \psi) &= \psi' f_0(x), \quad H_1(x, \psi) = \psi' f_1(x). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

На управление u не будем налагать ограничений. Это равносильно предположению, что особая экстремаль удовлетворяет условию (1.5).

При сделанных предположениях *кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, является особой экстремалью тогда и только тогда, когда*

$$H_1(x(t), \psi(t)) \equiv 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (3)$$

где $\psi(t)$ — решение уравнения

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = - \frac{\partial f'_0}{\partial x} \psi - u \frac{\partial f'_1}{\partial x} \psi. \quad (4)$$

Действительно, тождество (3) эквивалентно первому тождеству из (1.7), другие же соотношения из (1.7) в нашем случае в силу линейности системы (1) по управлению выполняются тривиально.

Условие (3), очевидно, всегда выполняется, если $\psi(t) \equiv 0$. Этот случай является вырожденным и в теории принципа максимума не рассматривается. Особая экстремаль, соответствующая этому случаю, называется *вырожденной*.

В дальнейшем траектории $x(t)$, $\psi(t)$ систем (1), (4), соответствующие особой экстремали, будем называть *особыми*.

Ниже используется еще одно понятие. Функция

$$S(x, \psi) = 0$$

называется *инвариантной относительно множества M* , если вдоль траекторий $x(t)$, $\psi(t)$ систем

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

начинающихся на множестве M ($\{x(t_0), \psi(t_0)\} \in M$), выполняется (независимо от выбора допустимого управления) тождество

$$S(x(t), \psi(t)) \equiv S(x(t_0), \psi(t_0)), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Весьма удобным инструментом для вычисления особых экстремалей является аппарат скобок Пуассона. Поэтому предварительно напомним основные сведения из теории скобок Пуассона (см. А. И. Лурье [1]).

1. Скобки Пуассона и их основные свойства. Пусть $v = v(x, \psi)$ и $w = w(x, \psi)$ — две скалярные функции от n -вектора x и n -вектора ψ , по которым они непрерывны и имеют достаточное число непрерывных производных.

Скобкой Пуассона от этих двух функций называется выражение

$$\{v, w\} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial \psi} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что скобка Пуассона обладает свойствами

$$\{v, w\} = -\{w, v\}, \quad (6)$$

$$\{v, v\} = 0, \quad (7)$$

$$\{v, w_1 + w_2\} = \{v, w_1\} + \{v, w_2\}, \quad (8)$$

где w_1, w_2 — функции того же типа, что и v, w .

Для нас в дальнейшем понадобится одно свойство скобок Пуассона, которое называется *тождеством Якоби*. Это свойство записывается в виде

$$\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} \equiv 0. \quad (9)$$

Докажем (9), следуя монографии А. И. Лурье [1]. Из определения скобки Пуассона (5) видно, что каждое слагаемое в (9) содержит вторые производные пары функций из u, v, w . Соберем в (9) члены, содержащие вторые производные от w . Ясно, что ими будут первый и второй члены; их сумму в силу (6) можно записать в виде

$$\{u, \{v, w\}\} - \{v, \{u, w\}\}.$$

Скобки $\{v, w\}$ и $\{u, w\}$ суть некоторые линейные формы от $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial \psi$ с коэффициентами, зависящими от функции v и u :

$$\{v, w\} = a' \frac{\partial w}{\partial x} + b' \frac{\partial w}{\partial \psi}, \quad \{u, w\} = c' \frac{\partial w}{\partial x} + d' \frac{\partial w}{\partial \psi}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \{u, \{v, w\}\} - \{v, \{u, w\}\} &= \\ &= c' \frac{\partial \{v, w\}}{\partial x} + d' \frac{\partial \{v, w\}}{\partial \psi} - a' \frac{\partial \{u, w\}}{\partial x} - b' \frac{\partial \{u, w\}}{\partial \psi} = \\ &= c' \left[\frac{\partial a'}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} a + \frac{\partial b'}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \psi} b \right] + \\ &+ d' \left[\frac{\partial a'}{\partial \psi} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial \psi \partial x} a + \frac{\partial b'}{\partial \psi} \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} b \right] - \\ &- a' \left[\frac{\partial c'}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} c + \frac{\partial d'}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \psi} d \right] - \\ &- b' \left[\frac{\partial c'}{\partial \psi} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \psi} c + \frac{\partial d'}{\partial \psi} \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} d \right]. \end{aligned}$$

Приведя подобные члены, видим, что вторые производные от функции w исчезают. Повторив аналогичные рассуждения для вторых производных функций u и v , убеждаемся, что в левой части выражения (9) не может быть вторых производных функций u , v , w . Это значит, в силу отмеченной выше структуры левой части из (9), что она тождественно по x , ψ равна нулю. Таким образом, тождество Якоби (9) доказано.

Пусть

$$S = S(x, \psi)$$

— некоторая гладкая функция переменных x , ψ . Полная производная по времени dS/dt вдоль траекторий $x(t)$, $\psi(t)$, удовлетворяющих системам

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H(x, \psi, u)}{\partial \psi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = - \frac{\partial H(x, \psi, u)}{\partial x}, \\ H(x, \psi, u) &= \psi' f(x, u), \end{aligned}$$

с помощью скобки Пуассона записывается в виде

$$\frac{dS}{dt} = \{S, H\}. \quad (10)$$

Доказательство проводится непосредственным счетом:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S'}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S'}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial S'}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial \psi} - \frac{\partial S'}{\partial \psi} \frac{\partial H}{\partial x} \equiv \{S, H\}.$$

2. Анализ особой экстремали. Пусть $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, — особая экстремаль. По определению (1.5) особой экстремали $u(t)$, вдоль траекторий $x(t)$, $\psi(t)$ систем (1), (4), соответствующих управлению $u(t)$, выполняется тождество

$$\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u)}{\partial u} = H_1(x(t), \psi(t)) \equiv 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (11)$$

Поэтому на отрезке $[t_0, t_1]$ выполняется и тождество

$$\frac{d}{dt} H_1(x(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Используя формулу (10) и свойство (8), получаем

$$\frac{d}{dt} H_1(x(t), \psi(t)) = \{H_1, H\} = -\{H_0, H_1\} + u(t)\{H_1, H_1\}. \quad (12)$$

По свойству (7) скобки Пуассона коэффициент $\{H_1, H_1\}$ при $u(t)$ равен нулю тождественно по x, ψ . Следовательно, в производной $\frac{d}{dt} H_1$ управление явно появиться не может. Имеем

$$\frac{d}{dt} H_1 = -\{H_0, H_1\}.$$

Но в силу (11), (12) должно выполняться и тождество

$$\frac{d^2}{dt^2} H_1 = -\frac{d}{dt} \{H_0, H_1\} \equiv 0,$$

которое с помощью (10) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} H_1 &= -\{\{H_0, H_1\}, H\} = \\ &= \{H_0, \{H_0, H_1\}\} + u(t)\{H_1, \{H_0, H_1\}\} \equiv 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь коэффициент $\{H_1, \{H_0, H_1\}\}$ при управлении $u(t)$, вообще говоря, не равен нулю. Поэтому для точек t , $t_0 \leq t \leq t_1$, где он отличен от нуля, получаем формулу для особой экстремали

$$u(t) = -\frac{\{H_0, \{H_0, H_1\}\}}{\{H_1, \{H_0, H_1\}\}}. \quad (14)$$

Если коэффициент при управлении $u(t)$ в (13) равен нулю на отрезке $\tau_1 \in [t_0, t_1]$, то формула (14) имеет смысл лишь на множестве $[t_0, t_1] \setminus \tau_1$. Для получения формулы особой экстремали на отрезке τ_1 продолжаем вычислять последовательные полные производные по времени от функции H_1 . Все они в силу (11) должны равняться нулю на отрезке τ_1 . Покажем, что впервые явно управление $u(t)$ может появиться лишь в выражении производной четного порядка.

Сначала убедимся, что в ряду производных $\frac{d^k}{dt^k} H_1$, $k = 1, 2, \dots$, первое выражение, содержащее $u(t)$, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} H_1 = & (-1)^k \underbrace{\{H_0, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}\}}_k + \\ & + (-1)^k u(t) \underbrace{\{H_1, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}\}}_{k-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

По предположению, производная $\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} H_1$ не содержит явно управления $u(t)$, т. е. коэффициент при u в этой производной тождественно по x, ψ равен нулю. Докажем, что в этом случае

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} H_1 = (-1)^{k-1} \underbrace{\{H_0, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}\}}_{k-1}. \quad (16)$$

При $k = 2, 3$ эта формула совпадает с доказанными (12) и (13). Допустим, что она верна для $k = m$, $2 \leq m < k - 1$, т. е.

$$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} H_1 = (-1)^{m-1} \underbrace{\{H_0, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}\}}_{m-1}.$$

Продифференцируем функцию H_1 еще раз по времени и воспользуемся формулой (10) и равенством (2):

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} H_1 = & (-1)^{m-1} \underbrace{\{\{H_0, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}\}, H\}}_{m-1} = \\ = & (-1)^m \underbrace{\{H_0, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}\}}_m + \\ & + (-1)^m u(t) \underbrace{\{H_1, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}\}}_{m-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

По предположению, в производных $d^m H_1/dt^m$ управление $u(t)$ явно не появляется. Поэтому в (17) коэффициент при $u(t)$ равен нулю, а оставшаяся часть доказывает справедливость формулы (16).

Чтобы доказать формулу (15), достаточно продифференцировать обе части формулы (16).

Теперь покажем, что число k в (15) может быть лишь четным. Для этого достаточно, очевидно, показать, что если

$$\{H_1, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m-1}\} \equiv 0 \text{ по всем } x, \psi, \quad (18)$$

то обязательно и

$$\{H_1, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m}\} \equiv 0 \text{ по всем } x, \psi. \quad (19)$$

Проверим это утверждение для $m = 1$. По предположению (18):

$$\{H_1, \{H_0, H_1\}\} \equiv 0 \text{ по всем } x, \psi. \quad (20)$$

Подсчитаем $\{H_1, \{H_0, \{H_0, H_1\}\}\}$. Полагая $u = H_1$, $v = H_0$, $w = \{H_0, H_1\}$, можно записать тождество Якоби:

$$\begin{aligned} \{H_1, \{H_0, \{H_0, H_1\}\}\} + \{H_0, \{\{H_0, H_1\}, H_1\}\} + \\ + \{\{H_0, H_1\}, \{H_1, H_0\}\} \equiv 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Последнее слагаемое слева из (21) равно нулю тождественно по x, ψ из-за свойств (6), (7). Второе слагаемое равно нулю тождественно по x, ψ в силу предположения (20). Таким образом, из (21) следует справедливость утверждения (19) при $m = 1$.

Пусть, вообще, при некотором m , $m < \infty$,

$$\{H_1, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m-1}\} \equiv 0 \text{ по всем } x, \psi. \quad (22)$$

Подсчитаем выражение

$$\{H_1, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m}\}. \quad (23)$$

Полагая $u = H_1$, $v = H_0$, $w = \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m-1}$, за-

пишем тождество Якоби. Из (9), (23) имеем

$$\begin{aligned} & \{H_1, \underbrace{\{H_0, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m}}\} + \\ & + \underbrace{\{H_0, \{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}, H_1\}\}}_{2m-1} + \\ & + \underbrace{\{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}, \{H_1, H_0\}\}}_{2m-1} \equiv 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Второе слагаемое в (24) равно тождественно по x, ψ нулю в силу (22). Третье слагаемое опять преобразуем с помощью тождества Якоби (9), полагая $u = H_0$, $v =$

$$= \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m-2}, \quad w = \{H_1, H_0\}. \quad \text{Имеем}$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}, \{H_1, H_0\}\}}_{2m-1} = \\ & = - \underbrace{\{\{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}, \{H_1, H_0\}\}, H_0\}}_{2m-2} - \\ & - \underbrace{\{\{H_1, H_0\}, H_0\}, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m-2}}_{2m-2}. \end{aligned} \quad (25)$$

В первом слагаемом в (25) преобразуем с помощью тождества Якоби множитель

$$\begin{aligned} & \underbrace{\{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}, \{H_1, H_0\}\}}_{2m-2} = \\ & = - \underbrace{\{\{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}, \{H_1, H_0\}\}, H_0\}}_{2m-3} - \\ & - \underbrace{\{\{H_1, H_0\}, H_0\}, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m-2}}_{2m-3}. \end{aligned} \quad (26)$$

Справа в (26) получились выражения того же типа, что

и в (25). Преобразуем теперь второе слагаемое справа в (25). Для этого опять воспользуемся тождеством Якоби (9). Имеем

$$\begin{aligned} & \{ \{ \{ H_1, H_0 \}, H_0 \}, \underbrace{\{ H_0, \dots, \{ H_0, H_1 \} \dots \}}_{2m-2} \} = \\ & = - \{ H_0, \underbrace{\{ \{ H_0, \dots, \{ H_0, H_1 \} \dots \}, \{ \{ H_1, H_0 \}, H_0 \} \}}_{2m-3} \} - \\ & - \{ \underbrace{\{ H_0, \dots, \{ H_0, H_1 \} \dots \}}_{2m-3}, \{ \{ \{ H_1, H_0 \}, H_0 \}, H_0 \} \}. \quad (27) \end{aligned}$$

Преобразуя по описанной схеме в первых слагаемых справа в (26) и (27) множители при H_0 , а вторые слагаемые полностью, нетрудно убедиться, что в первом случае придем к множителю $\{ \{ H_1, H_0 \}, \{ H_1, H_0 \} \}$, который, очевидно, тождественно по x, ψ равен нулю. Преобразование слагаемых второго типа приводит к выражению

$$\{ \underbrace{\{ H_0, \dots, \{ H_0, H_1 \} \dots \}}_m, \underbrace{\{ H_0, \dots, \{ H_0, H_1 \} \dots \}}_m \},$$

которое в силу свойства (7) скобки Пуассона тождественно по x, ψ равно нулю.

Таким образом, левая часть в (25) тождественно равна нулю, а поэтому в силу (24) таковым будет и выражение (23), т. е. утверждение (19) полностью доказано.

Доказанное утверждение позволяет записать формулу для особого управления.

При вычислении последовательных полных производных по времени от функции

$$H_1(x, \psi) \equiv \frac{\partial H(x, \psi, u)}{\partial u}$$

впервые управление явно может появиться в производной четного порядка $k = 2m$, в силу чего особое управление необходимо равно

$$u(t) = - \frac{\overbrace{\{ H_0, \{ H_0, \dots, \{ H_0, H_1 \} \dots \} \}}^{2m}}{\underbrace{\{ H_1, \{ H_0, \dots, \{ H_0, H_1 \} \dots \} \}}_{2m-1}} \quad (28)$$

на множестве точек $t \in [t_0, t_1]$, на котором выражение

$$H_2 = \{ H_1, \underbrace{\{ H_0, \dots, \{ H_0, H_1 \} \dots \}}_{2m-1} \}, \quad (29)$$

подсчитанное вдоль особых траекторий $x(t)$, $\psi(t)$, отлично от нуля.

Каково же особое управление на множестве нулей функции (29)?

Формула (28) получена для случая, когда в выражении

$$H = H_0 + uH_1$$

коэффициент H_1 при $u(t)$, $t \in \tau_1$, равен нулю, что не позволило сразу вычислить оптимальное управление. Теперь аналогичная ситуация возникла с выражением

$$0 \equiv \frac{d^{2m}}{dt^{2m}} H_1 = \underbrace{\{H_0, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}\}}_{2m} + \\ + u \{H_1, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m-1}\},$$

из которого нельзя найти управление в точках, где H_2 обращается в нуль. Изложенную выше для $H_1 = 0$ процедуру можно применить и к изучению этого случая

3. Синтез особой экстремали. До сих пор мы исходили из конкретной особой экстремали и искали соотношения, которым она необходимо удовлетворяет. Теперь рассмотрим в некотором смысле обратную задачу. Будем искать условия, при которых особая экстремаль может существовать, и найдем особую экстремаль в виде функции от переменных x, ψ .

По определению особой экстремали и особых траекторий особые траектории могут лежать лишь на многообразии M_0 :

$$H_1(x, \psi) = 0, \quad (30)$$

определенном в $2n$ -мерном фазовом пространстве систем (1), (4).

Поскольку особая экстремаль в задаче (1) является и экстремалью Понтрягина, то вдоль нее

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = c.$$

Из (2) следует, что особые траектории $x(t)$, $\psi(t)$ лежат на многообразии

$$H_0(x, \psi) = c, \quad (31)$$

где постоянная $c = H(x(t_0), \psi(t_0))$ зависит от конкретных особых траекторий. Значит, особые траектории, начинающиеся на многообразии M_0 , в дальнейшем движутся, вообще говоря, не по всему многообразию M_0 , а лишь по пересечению (30) с многообразием (31). Хотя приведенное замечание не позволяет отыскать особую экстремаль, оно уточняет структуру многообразий, на которых лежат особые траектории.

Если функция H_1 инвариантна относительно M_0 , то любые траектории $x(t)$, $\psi(t)$ с условием

$$H_1(x(t_0), \psi(t_0)) = 0,$$

будут удовлетворять соотношению (30) независимо от выбора управления $u(t)$. В этом частном случае многообразии (30) есть многообразие особых траекторий, на котором особая экстремаль может быть задана произвольным образом. Достаточным условием того, чтобы функция H_1 была инвариантной относительно M_0 , является, например, представление

$$\dot{f}_0(x) = \alpha(x) \dot{f}_1(x),$$

где $\alpha(x)$ — некоторая дифференцируемая скалярная функция. В общем случае для того, чтобы траектории $x(t)$, $\psi(t)$, начинающиеся на (30), оставались там, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{dH_1}{dt} \equiv -\{H_0, H_1\} + u\{H_1, H_1\} \equiv -\{H_0, H_1\} = 0.$$

Итак, особые траектории, вообще говоря, не заполняют всего многообразия (30), а лежат на пересечении многообразия (30) и многообразия M_1 :

$$\{H_0(x, \psi), H_1(x, \psi)\} = 0.$$

Остальные точки многообразия M_0 суть точки переключения неособых экстремалей.

Если теперь функция H_1 инвариантна относительно многообразия $M_2 = M_0 \cap M_1$, то опять на нем особые экстремали могут задаваться произвольным образом. В общем случае особые траектории, начинающиеся на M_2 , будут оставаться там тогда и только тогда, когда

$$\frac{d}{dt} \{H_0, H_1\} = -\{H_0, \{H_0, H_1\}\} - u\{H_1, \{H_0, H_1\}\} = 0 \quad (32)$$

при всех x, ψ из M_2 .

Если многообразие M_2 не пересекается с многообразием M_3 : $\{H_1, \{H_0, H_1\}\} = 0$, то особая экстремаль на M_2 определяется единственным образом

$$u(x, \psi) = - \frac{\{H_0, \{H_0, H_1\}\}}{\{H_1, \{H_0, H_1\}\}}.$$

Левая часть из (32) есть вторая производная со знаком минус по времени от функции H_1 . Как показано в п. 2, в общем случае впервые явно параметр управления u появляется в производной $d^k H_1 / dt^k$ четного порядка $k = 2m$, причем

$$\begin{aligned} \frac{d^{2m} H_1}{dt^{2m}} = & \underbrace{\{H_0, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}\}}_{2m} + \\ & + u \{H_1, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m-1}\} \equiv 0 \end{aligned} \quad (33)$$

и

$$\{H_0, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_k\} = 0, \quad k = 1, \dots, 2m - 1. \quad (34)$$

Из (33) получаем особую экстремаль

$$u(x, \psi) = - \frac{\overbrace{\{H_0, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}\}}^{2m}}{\underbrace{\{H_1, \{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}\}}_{2m-1}},$$

синтезированную в точках многообразия, являющегося пересечением многообразия (30) с многообразиями (34), но не лежащую на многообразии

$$\{H_1, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m-1}\} = 0. \quad (35)$$

Таким образом, неисследованным до конца остался случай, когда многообразие (35) имеет общие точки с упомянутым пересечением. Нетрудно видеть, что этот случай в некоторой степени аналогичен исходному, когда рассматривалось многообразие (30). Поэтому для его исследования применяем тот же метод — вычисление последовательных производных по времени от функции

$$\{H_1, \underbrace{\{H_0, \dots, \{H_0, H_1\} \dots\}}_{2m-1}\}.$$

4. П р и м е р ы

1. Пусть система имеет такой вид:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = ux_1^2.$$

Ясно, что

$$H_0(x, \psi) = \psi_1 x_2 + \psi_2 x_3 + \psi_3 x_4, \quad H_1(x, \psi) = \psi_2 + \psi_4 x_1^2.$$

Многообразие M_0 :

$$\psi_2 + \psi_4 x_1^2 = 0.$$

Построим многообразие M_1 . Имеем

$$-\{H_0, H_1\} \equiv -\psi_1 - \psi_3 x_1^2 + 2\psi_4 x_1 x_2 = 0.$$

Многообразие M_3 имеет вид

$$\{H_1, \{H_0, H_1\}\} = 4\psi_4 x_1 = 0.$$

Поэтому особое управление определено лишь на многообразии $M_2 = M_0 \cap M_1$ и равно

$$u = -\frac{\{H_0, \{H_0, H_1\}\}}{\{H_1, \{H_0, H_1\}\}} = \frac{4\psi_3 x_1 x_2 - \psi_2 x_1^2 - 2\psi_4 x_2^2 - 2\psi_4 x_1 x_3}{4\psi_4 x_1}$$

всюду, за исключением точек, лежащих на многообразии M_3 .Найдем особое управление на многообразии M_3 . Имеем

$$\frac{d}{dt} \psi_4 x_1 = \dot{\psi}_4 x_1 + \psi_4 \dot{x}_1.$$

Так как уравнения для сопряженных переменных имеют вид

$$\dot{\psi}_1 = -2\psi_4 x_1 u, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_2, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_3, \quad (36)$$

то

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_4 x_1 &= -\psi_3 x_1 + \psi_4 x_2, \\ \frac{d^2}{dt^2} \psi_4 x_1 &= \psi_2 x_1 + \psi_4 x_3 + \psi_4 u - 2\psi_3 x_2. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Коэффициент ψ_4 для невырожденных управлений отличен от нуля, ибо если $\psi_4 \equiv 0$, то из (36) получаем $\psi_3 \equiv 0$, $\psi_2 \equiv 0$, $\psi_1 \equiv 0$.Учитывая (28), из (37) находим особое управление на многообразии M_3

$$u = -\frac{\psi_2 x_1 + \psi_4 x_3 - 2\psi_3 x_2}{\psi_4} = -x_3.$$

2 Рассмотрим задачу:

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = -ux_1, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad |u| < 1, \quad T = [0, 1],$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) = x_2(1) \rightarrow \min.$$

Имеем

$$H = \psi_1 u + ux_1, \quad H_0(x, \psi) \equiv 0, \quad H_1(x, \psi) = \psi_1 + x_1,$$

$$\dot{\psi}_1 = -u, \quad \psi_1(1) = 0.$$

будет равен нулю:

$$S(x) = 0. \quad (2)$$

Множество точек x , удовлетворяющих уравнению (2), образует поверхность S особого управления, если выполнено условие залегания траектории на S :

$$\frac{dS(x)}{dt} = \frac{\partial S'(x)}{\partial x} (f_0(x) + u f_1(x)) = 0. \quad (3)$$

Из (3) при

$$\frac{\partial S'(x)}{\partial x} f_1(x) \neq 0$$

получаем выражение для особого управления:

$$u(x) = - \frac{\frac{\partial S'(x)}{\partial x} f_0(x)}{\frac{\partial S'(x)}{\partial x} f_1(x)}. \quad (4)$$

Поскольку в (1) минимальное число уравнений равно двум, то уравнение поверхности S особого управления всегда можно получить в системе (2.1) с $n = 1, 2$.

Пример. Дана система: $x_1 = u$, $x_2 = -x_1^2$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| < 1$, $\varphi(x) = x_2$.

Имеем

$$H(x, \psi, u) = \psi_1 u + x_1^2, \quad \dot{\psi}_1 = -2x_1, \quad \psi_1(1) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1 = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u} = -2x_1 = 0.$$

Отсюда заключаем, что поверхность особого управления характеризуется равенством $x_1 = 0$, особое управление в силу (4) равно $u = 0$.

§ 4. О вычислении многомерных особых управлений

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^r u_i f_i(x), \quad x(0) = x_0, \quad |u_i| < 1,$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min.$$

Гамильтониан $H(x, \psi, u)$ имеет вид

$$H(x, \psi, u) = H_0(x, \psi) + \sum_{i=1}^r u_i H_i(x, \psi),$$

где $H_i(x, \psi) = \psi' f_i(x)$. Необходимый и достаточный признак существования особой экстремали состоит в том, что вдоль особой траектории выполняются тождества

$$H_i(x(t), \psi(t)) \equiv 0, \quad t \in T, \quad i = 1, \dots, r, \quad (1)$$

где $\psi(t)$ — решение уравнения

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = - \frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial x}.$$

Следуя одномерному случаю, тождества (1) будем дифференцировать по времени. Имеем

$$\frac{dH_i(x, \psi)}{dt} = \{H_i, H\} = \{H_i, H_0\} + \sum_{j=1}^r \{H_i, H_j\} u_j = 0, \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, r.$$

В полученной линейной системе уравнений относительно u матрица коэффициентов в силу свойств скобок Пуассона кососимметрична, и поэтому при r нечетном — особая. Этот факт делает сомнительным возможность вычисления всех компонент u_1, \dots, u_r особого управления из уравнений (2). Положение здесь значительно серьезнее, чем может показаться с первого взгляда, ибо в действительности из уравнений (2) нельзя вычислить ни одной компоненты особого оптимального управления. Дело в том, что, как покажут результаты гл. III, тождества

$$\{H_i, H_j\} \equiv 0, \quad i \neq j, \quad i = 1, \dots, r$$

являются необходимыми условиями оптимальности. Поэтому, как и в одномерном случае, знание первых производных dH_i/dt ничего не дает для вычисления особых управлений и нужно переходить ко вторым производным d^2H_i/dt^2 , $i = 1, \dots, r$.

Ограничимся особым управлением, вдоль которого многомерное условие Келли (гл. III) эффективно, т. е. квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^r \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t))}{\partial u_j} u_i u_j \quad (3)$$

определенно положительна. Для вычисления такого управления достаточно знать выражения d^2H_i/dt^2 , $i = 1, \dots, r$.

Действительно, с одной стороны, по определению

$$H_i = \frac{\partial H}{\partial u_i},$$

а с другой, как нетрудно подсчитать,

$$\frac{d^2 H_i}{dt^2} = a_i(x, t) + \sum_{j=1}^r b_{ij}(x, t) u_j = 0, \quad (4)$$

и поэтому матрица коэффициентов

$$\{b_{ij}\} \quad (5)$$

в линейной системе (4) совпадает с матрицей коэффициентов квадратичной формы (3). Так как матрица (5) неособая, то особое управление однозначно находится из (4).

Комментарии к главе I

§ 1. Определение особого управления Л. И. Розоноэра [2] исходит из принципа максимума и поэтому в нашей терминологии соответствует особой экстремали Понтрягина. Особые экстремали наиболее естественны при использовании методов вариационного исчисления, так как в их определении используется классическое условие Лежандра — Клебша. Поскольку основным источником особых управлений до сих пор были системы линейные по управлению, то между двумя типами особых управлений во многих случаях нет разницы.

§§ 2, 3. Первый пример вычисления особого управления дан Л. И. Розоноэром [2]. Хотя идея метода вычисления одномерных особых управлений очевидна, но нельзя пока сказать, что вопрос решен полностью. Долгое время основной трудностью были громоздкие вычисления и неясность структуры производных. С введением А. М. Летовым [2] скобок Пуассона картина прояснилась (см. обзор авторов, совместный с В. А. Срочко, Н. В. Тарасенко [1]), хотя остался еще не ясным вопрос, как долго могут быть проводимыми вычисления.

§ 4. Вычисление многомерных управлений во многом аналогично одномерному случаю. Из-за связи схемы вычисления с необходимыми условиями оптимальности окончательное решение вопроса упирается в разработку полной теории необходимых условий оптимальности многомерных управлений.

По поводу вычисления особых управлений см. обзорные работы С. Джонсона [1], Г. Келли, Р. Коппа, Г. Мойера [1], работы М. Атанаса, П. Фалба [1], А. А. Болонкина [2], В. И. Буякаса [1, 2], Б. С. Гоха [1—3], Д. Дана [1], С. Джонсона, Дж. Гибсона [1], А. М. Летова [2], Ю. И. Параева [1], Р. Рорера, М. Собрела [1], В. Уонхема, С. Джонсона [1], Г. Хермеса, Г. Хейнеса [1], А. М. Чечельницкого [1, 2].

ГЛАВА II

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОДНОМЕРНЫХ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТОВ ВАРИАЦИЙ

По содержанию данная глава ближе всего примыкает к вариационному исчислению, хотя по форме ее результаты относятся к теории оптимальных процессов. Точнее, ниже будут исследованы задачи оптимального управления при условиях, типичных для вариационного исчисления. Среди этих условий наиболее существенным является предположение об открытости множества управления. С современных позиций это допущение может быть оценено как весьма стеснительное. Не следует, однако, спешить с выводами. Имея в виду некоторый опыт развития теории оптимальных процессов, нужно признать, что последняя не отвергла вариационного исчисления, а явилась обобщением его на новый круг задач, не укладывающихся в традиционные формы задач вариационного исчисления. В областях, где заведомо выполняются основные предположения классического вариационного исчисления, известные методы эффективны и применяются с успехом. Не принимать во внимание это обстоятельство было бы неразумно. Во-первых, указанные области достаточно обширны и связаны со многими важными приложениями, а во-вторых (для математика это особенно важно), условия классического вариационного исчисления менее стеснительны, более податливы для применения разнообразных аналитических методов, чем условия тех задач, на которых базируется теория оптимальных процессов. Все это заставляет разумно подходить к вопросу о путях дальнейшего развития теории оптимальных процессов. Наряду с разработкой методов исследования, применимых при жестких условиях некоторых современных задач, следует уделять внимание развитию и таких методов, которые имеют более узкую область применения, но допускают в силу этого существенно более глубокую разработку. Методы, рассматриваемые в данной главе, относятся ко второй группе. С общей точки зрения, исходящей из принципа

максимума, оптимальные управления, принадлежащие лишь ядру множества управления, встречаются редко. Но если вспомнить о предмете монографии, об особых управлениях, о прикладных задачах с особыми управлениями, то нетрудно признать, что нередко особые участки «проходят» именно по ядру множества управления. Поэтому случай открытого множества представляет не только академический интерес. Для нас более важно то, что для этого случая можно весьма глубоко развить технику исследования. Наиболее интересные из известных результатов в этой области излагаются ниже.

§ 1. Условие Лежандра — Клебша

В основу определения особого управления (§ 1, гл. I) положено условие Лежандра — Клебша. Это необходимое условие оптимальности является аналогом классического условия того же названия из вариационного исчисления. В этом параграфе сначала дается нетрадиционный вывод классического условия, затем приводится его аналог для задач теории оптимальных процессов. В заключение даны понятия, важные для понимания основных результатов по особым управлениям.

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Пусть на отрезке $T = [t_0, t_1]$ заданы r -мерные функции $y(t)$, непрерывные вместе с производной $\dot{y}(t)$ и удовлетворяющие условию $y(t_0) = y_0$. На этих функциях определим функционал

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_1} g(y(t), \dot{y}(t), t) dt, \quad (1)$$

где функция $g(y, \dot{y}, t)$ определена и непрерывна по аргументам вместе со вторыми производными.

Пусть требуется среди введенного класса функций $y(t)$, $t \in T$, найти ту $y^0(t)$, $t \in T$, на которой функционал (1) достигает минимального значения.

Сформулированная задача есть частный случай задачи рассмотренной во Введении (п. 2). Действительно, положим

$$\begin{aligned} \dot{y} &= u, & y(t_0) &= y_0, \\ \dot{y}_{r+1} &= g(y, u, t), & y_{r+1}(t_0) &= 0, \\ x &= \{y, y_{r+1}\}', & f(x, u, t) &= \{u, g(y, \dot{y}, t)\}', & \Phi(x) &= x_{r+1}. \end{aligned}$$

Тогда задача (1) станет эквивалентной задаче терминального управления (1) — (3) из Введения. В отличие от последней, здесь не накладываются ограничения на область значений управления. Другими словами, в задаче (1) можно считать, что U — открытое множество r -мерного евклидова пространства.

Как показано в п. 4 Введения, оптимальное управление $u^0(t)$ в задаче (1) — (3) (см. Введение) удовлетворяет условию максимума

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t), \quad (2)$$

где $H(x, \psi, u, t) = \bar{\psi}'u + \psi_{r+1}g(x, u, t)$, $\bar{\psi}$ — r -вектор, $\psi = \{\bar{\psi}, \psi_{r+1}\}'$, $\psi^0(t)$ — решение системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\psi}^0}{dt} &= - \frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} = \\ &= - \psi_{r+1}^0 \frac{\partial g(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x}, \quad \bar{\psi}^0(t_1) = 0, \\ \frac{d\psi_{r+1}^0}{dt} &= 0, \quad \psi_{r+1}^0(t_1) = -1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Исходя из (2), выпишем необходимые условия максимума функции $H(x^0(t), \psi^0(t), u, t)$ конечного числа переменных. Имеем

$$\left. \frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u, t)}{\partial u} \right|_{u=u^0(t)} = 0, \quad t \in T, \quad (4)$$

$$v' \left. \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u, t)}{\partial u^2} \right|_{u=u^0(t)} v \leq 0, \quad t \in T, \quad (5)$$

для всех r -векторов v . Перейдем к исходным переменным. Из (3) имеем

$$\begin{aligned} \psi_{r+1}^0(t) &\equiv -1, \\ \bar{\psi}^0(t) &= \int_{t_1}^t \frac{\partial g(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} dt = \int_{t_1}^t \frac{\partial g(y^0(t), \dot{y}^0(t), t)}{\partial y} dt. \end{aligned}$$

Поэтому условие (4) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\psi}^0(t) - \frac{\partial g(y^0(t), \dot{y}^0(t), t)}{\partial \dot{y}} \equiv \\ &\equiv \int_{t_1}^t \frac{\partial g(y^0(t), \dot{y}^0(t), t)}{\partial y} dt - \frac{\partial g(y^0(t), \dot{y}^0(t), t)}{\partial \dot{y}}, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, получилось уравнение Эйлера в интегральной форме. Если тождество (6) продифференцируем по времени t (это законно, ибо в этом тождестве один член заведомо дифференцируем), то получим привычное уравнение Эйлера

$$\frac{\partial g(y^0(t), \dot{y}^0(t), t)}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial g(y^0(t), \dot{y}^0(t), t)}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (7)$$

Вывод. Решение простейшей вариационной задачи удовлетворяет уравнению Эйлера.

Непрерывность производной $\dot{y}^0(t)$ мы использовали лишь при переходе от (6) к (7). Если $\dot{y}^0(t)$ — кусочно-непрерывная функция, то уравнение Эйлера (7) получается из (6) для всех точек непрерывности функции $\dot{y}^0(t)$. Поскольку $\bar{\psi}^0(t)$ — непрерывная функция, то из (6) следует, что и функция $\frac{\partial g(y^0(t), \dot{y}^0(t), t)}{\partial \dot{y}}$ непрерывна по t . Таким образом, во всех угловых точках τ функции $y^0(t)$ (точках, где функция $\dot{y}^0(t)$ терпит разрыв) выполняется равенство

$$\left. \frac{\partial g(y^0(t), \dot{y}^0(t), t)}{\partial \dot{y}} \right|_{t=\tau+0} = \left. \frac{\partial g(y^0(t), \dot{y}^0(t), t)}{\partial \dot{y}} \right|_{t=\tau-0}, \quad (8)$$

которое в вариационном исчислении называется *условием Вейерштрасса — Эрдмана*.

Условие (5) в исходных обозначениях имеет вид

$$v' \frac{\partial^2 g(y^0(t), \dot{y}^0(t), t)}{\partial \dot{y}^2} v \geq 0. \quad (9)$$

Полученное неравенство в вариационном исчислении называется *условием Лежандра — Клебша*, и ему, следовательно, удовлетворяют все решения простейшей вариационной задачи.

2. Условие Лежандра — Клебша в теории оптимальных процессов. Необходимые условия оптимальности (7) и (9) были получены из условий (4), (5), вытекающих из принципа максимума и справедливых для общей задачи терминального управления:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T, \\ u(t) &\in U, \quad U - \text{открытое множество}, \\ J(u) &= \Phi(x(t_1)) \rightarrow \min. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Поэтому естественно и в общем случае условие

$$\frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} = 0$$

также называть *уравнением Эйлера*, а неравенство

$$v' \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u^2} v \leq 0$$

— *условием Лежандра — Клебша*.

Условие Вейерштрасса — Эрдмана (8) в теории оптимальных процессов, оперирующей с переменными x, ψ , не играет никакой роли.

3. Вторая вариация функционала. Условие Лежандра — Клебша в вариационном исчислении получается с помощью второй вариации функционала. Поскольку в теории оптимальных особых управлений традиции вариационного исчисления довольно сильны, остановимся на понятии второй вариации. Попутно изложим традиционную технику вариационного исчисления, которая, как нетрудно будет заметить, принципиально отличается от изложенной во Введении техники теории оптимальных процессов.

Не будем возвращаться к простейшей задаче вариационного исчисления, а начнем с задачи терминального управления (см. Введение, п. 2). Пусть $u(t)$, $t \in T$, — допустимое управление и $J(u)$ — значение критерия качества на этом управлении. Рассмотрим еще одно допустимое управление $\tilde{u}(t) = u(t) + \Delta u(t) = u(t) + \varepsilon \delta u(t)$, где $\delta u(t)$ — некоторая кусочно-непрерывная функция, ε — число.

Приращение функционала

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) \quad (11)$$

при фиксированных прочих параметрах есть функция от ε . Если она допускает представление

$$\Delta J(u) = \varepsilon a_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 a_2 + o(\varepsilon^2),$$

где числа a_1, a_2 не зависят от ε , то a_1 называется *первой*, a_2 — *второй вариациями функционала* $J(u)$. Для них существуют специальные символы

$$a_1 = \delta J(u), \quad a_2 = \delta^2 J(u).$$

Таким образом, по определению,

$$\Delta J(u) = \varepsilon \delta J(u) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \delta^2 J(u) + o(\varepsilon^2). \quad (12)$$

Наша ближайшая цель — получить явные выражения для $\delta J(u)$, $\delta^2 J(u)$ через условия задачи.

Обозначим через $x(t)$ и $\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ — траектории системы (10), соответствующие управлениям $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= \varphi(\tilde{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) = \frac{\partial \varphi'(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) + o(\|\Delta x(t_1)\|^2). \end{aligned}$$

Согласно Введению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) &= -\psi'(t_1) \Delta x(t_1) = \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} [H(\tilde{x}(t), \psi(t), \tilde{u}(t), t) - H(x(t), \psi(t), u(t), t)] dt - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt = \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H'(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial H'(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} \Delta u(t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x^2} \Delta x(t) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x \partial u} \Delta u(t) + \frac{1}{2} \Delta u'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Delta u \right] dt - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} o_1(\|\Delta x\|^2 + \|\Delta x\| \cdot \|\Delta u\| + \|\Delta u\|^2) dt - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt. \end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые справа взаимно уничтожаются в силу определения сопряженных переменных. Поэтому приращение функционала $\Delta J(u)$ через

приращения управления $\Delta u(t)$ и траектории $\Delta x(t)$ представимо в виде

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} \Delta u(t) dt + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) - \right. \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Delta x + 2 \Delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \Delta u + \Delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Delta u \right] dt \left. \right\} - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} o_1(\|\Delta x\|^2 + \|\Delta x\| \cdot \|\Delta u\| + \|\Delta u\|^2) dt + o(\|\Delta x(t_1)\|^2). \quad (13) \end{aligned}$$

Для достижения цели осталось выделить в $\Delta x(t)$ главный член по ε , ибо

$$\Delta u(t) = \varepsilon \delta u(t). \quad (14)$$

Положим

$$\Delta x(t) = \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon, t), \quad (15)$$

где $\delta x(t)$ — вариация траектории. Такое представление $\Delta x(t)$ существует, и для $\delta x(t)$ можно получить простое уравнение. Действительно, по определению $\Delta x(t)$ имеем

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^t [f(x + \Delta x, u + \Delta u, t) - f(x, u, t)] dt.$$

Применяя к подынтегральному выражению последнего соотношения формулу Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon, t) = & \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} [\varepsilon \delta x + o(\varepsilon, t)] + \right. \\ & \left. + \varepsilon \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \delta u + o_1(\varepsilon, t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Поскольку эта формула верна при любых ε (в том числе и достаточно малых), то

$$\delta x(t) = \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \delta u \right] dt.$$

Отсюда после дифференцирования получаем линейное дифференциальное уравнение для вариации δx траектории

$$\frac{d \delta x}{dt} = \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \delta u, \quad \delta x(t_0) = 0, \quad (16)$$

известное как *уравнение в вариациях*.

Подставим (14), (15) в (13) и вспомним определение (12). Окончательно имеем

$$\delta J(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} \delta u(t) dt, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 J(u) = & \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x(t_1) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u + \delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u \right] dt. \end{aligned} \quad (18)$$

4. Новый вывод условия Лежандра—Клевша. Уже из определения (12) следует, что на оптимальном управлении $u^0(t)$ выполняются условия

$$\delta J(u^0) = 0, \quad \delta^2 J(u^0) \geq 0. \quad (19)$$

Действительно, если предположить, что не выполняется первое из них: $\delta J(u^0) = a \neq 0$, то очевидное неравенство $\Delta J(u^0) \geq 0$ приводит к следующему противоречию:

$$0 \leq \Delta J(u^0) = \varepsilon \left(a + \varepsilon \frac{\delta^2 J(u^0)}{2} + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon} \right) < 0,$$

если выбрать ε , знака, противоположного с a и по модулю достаточно малым

$$\left| \varepsilon \frac{\delta^2 J(u^0)}{2} + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon} \right| < |a|.$$

Подобным образом доказывается и второе необходимое условие оптимальности в (19). Понятно, что в обоих случаях условия выполняются для любых $\delta u(t)$. Используем этот факт для получения первых простых необходимых критериев оптимальности.

Из первого условия в (19) следует, что вдоль оптимального управления выполняется равенство

$$\frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} = 0, \quad t \in T, \quad (20)$$

которое выше было названо уравнением Эйлера. Докажем это.

Предположим, что (20) не выполняется, т. е. найдется момент $t = \theta$ и натуральное число i , $1 \leq i \leq r$, такое, что i -я компонента левой части из (20) при $t = \theta$ равна a , $a \neq 0$. В силу кусочной непрерывности функции $u^0(t)$ и непрерывности функций $x^0(t)$, $\psi^0(t)$, $f(x, u, t)$ найдется полуинтервал $\sigma \subset T$ конечной длины, содержащий точку θ , на котором указанная компонента сохраняет знак числа a . Выберем вариацию $\delta u(t)$ так, чтобы все ее компоненты, за исключением i -ой, равнялись нулю (тождественно на T), а i -я компонента была бы отлична от нуля лишь на построенном полуинтервале σ . На σ возьмем ее равной i -й компоненте левой части из (20). Тогда из (17) имеем

$$\delta J(u^0) = - \int_{\sigma} \left[\frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_i} \right]^2 dt < 0,$$

что противоречит (19).

Таким образом, уравнение Эйлера (20) нетрудно получить и чисто вариационным методом. Переход от первого условия (19) к (20) составляет существо основной леммы вариационного исчисления.

Вторая вариация функционала в вариационном исчислении используется, в частности, для доказательства условия Лежандра — Клебша. Поскольку в дальнейшем нам неоднократно придется иметь дело со второй вариацией, то в качестве первого опыта получим из нее условие Лежандра — Клебша.

Построим вариацию управления

$$\delta u(t) = \begin{cases} v - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \\ 0, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases} \quad (21)$$

где v — некоторый r -вектор. Соответствующая вариационная траектория, подсчитанная в силу (16) вдоль траектории $x^0(t)$ и управления $u^0(t)$, равна

$$\delta x(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq \theta, \quad \delta x(t) = a(t)\varepsilon + o(\varepsilon, t), \quad \theta < t \leq t_1, \quad (22)$$

где $a(t)$ — непрерывная ограниченная функция. Подставим вариацию (22) и соотношения (21) в (18) и выделим главный член по ε . Имеем

$$\begin{aligned}\delta^2 J(u^0) &= - \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} v' \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u^2} v dt + o(\varepsilon) = \\ &= - \varepsilon v' \frac{\partial^2 H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta)}{\partial u^2} v + o_1(\varepsilon).\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом второго условия, из (19) получаем критерий Лежандра — Клебша

$$v' \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u^2} v \leq 0, \quad t \in T.$$

5. Классическое доказательство условия Лежандра — Клебша. В предыдущем пункте условие Лежандра — Клебша получено из второй вариации функционала с помощью игольчатой вариации управления. При этом молчаливо предполагалось, что класс допустимых управлений не уже класса кусочно-непрерывных функций. Однако при использовании методов вариационного исчисления приходится рассматривать более узкие классы функций. Например, часто для законченности преобразований нужно предполагать, что допустимые функции непрерывны и кусочно-дифференцируемы. Цель настоящего пункта показать, что условие Лежандра — Клебша получается из (18), (19) и в том случае, когда допустимые управления непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные.

Докажем, что если вторая вариация $\delta^2 J$ неотрицательна на непрерывных функциях $\delta u(t)$ с кусочно-непрерывными производными и таких, что $\delta u(t_0) = \delta u(t_1) = 0$, то вдоль оптимального управления выполняется условие Лежандра — Клебша.

Предположим противное: найдутся момент $t = \theta$ и вектор v такие, что

$$v' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} v \Big|_{t=\theta} > 0. \quad (23)$$

Введем вариацию

$$\delta u(t) = \begin{cases} (t - \theta + \varepsilon) v, & t \in [\theta - \varepsilon, \theta], \\ -(t - \theta - \varepsilon) v, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon], \\ 0, & t \in [\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon], \end{cases} \quad \varepsilon > 0, \quad (24)$$

которая, как нетрудно проверить, непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную. Ясно, что $\delta u(t_0) = \delta u(t_1) = 0$.

Чтобы вычислить $\delta^2 J$ на вариации (24), оценим предварительно порядок соответствующей вариации траектории $\delta x(t)$. Из уравнения (16), очевидно, следует, что

$$\delta x(t) = 0, \quad t \in [t_0, \theta - \varepsilon].$$

В момент $t = \theta$ имеем

$$\delta x(\theta) = \delta x(\theta - \varepsilon) + \varepsilon \delta \dot{x}(\theta - \varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta \ddot{x}(\theta - \varepsilon) + o(\varepsilon^2).$$

Производные $\delta \dot{x}(\theta - \varepsilon)$, $\delta \ddot{x}(\theta - \varepsilon)$ вычислим из уравнения (16):

$$\delta \dot{x}(\theta - \varepsilon) = 0, \quad \delta \ddot{x}(\theta - \varepsilon) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{t=\theta} v + \dots$$

Таким образом,

$$\delta x(\theta) = \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{t=\theta} v + o(\varepsilon^2).$$

Для $t = \theta + \varepsilon$ точно так же получаем

$$\delta x(\theta + \varepsilon) = \delta x(\theta) + \varepsilon \delta \dot{x}(\theta) + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta \ddot{x}(\theta) + o(\varepsilon^2),$$

$$\delta \dot{x}(\theta) = \varepsilon \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{t=\theta} v + o(\varepsilon); \quad \delta \ddot{x}(\theta) = - \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{t=\theta} v + \dots$$

Следовательно,

$$\delta x(\theta + \varepsilon) = \varepsilon^2 \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{t=\theta} v + o(\varepsilon^2). \quad (25)$$

На отрезке $[\theta + \varepsilon, t_1]$ функция $\delta x(t)$ удовлетворяет однородному уравнению $\delta \ddot{x} = (\partial f / \partial x) \delta x$ с начальным условием (25), поэтому

$$\delta x(t) \sim \varepsilon^2, \quad t \in [\theta + \varepsilon, t_1].$$

Подставим вариации $\delta u(t)$ из (24) и $\delta x(t)$ в (18). Элементарный подсчет главного по ε члена дает

$$\delta^2 J = -2\varepsilon^3 \left(v' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} v \right) \Big|_{t=\theta} + o(\varepsilon^3). \quad (26)$$

При достаточно малом значении ε из условия (23) и из разложения (26) следует, что $\delta^2 J < 0$. Последнее противоречит сделанному предположению. Утверждение доказано.

Результат этого пункта можно сформулировать в форме, которая нам не один раз понадобится в дальнейшем: если во второй вариации имеется под интегралом член с $(\delta u)^2$, то он является главным для определения знака всей второй вариации. Короче: *коэффициент при $(\delta u)^2$ вдоль оптимального управления того же знака, что и $\delta^2 J$.*

6. Сравнение двух типов простейших вариаций. Еще не приступив к основной задаче монографии, мы уже ввели два вида вариаций и с успехом их использовали для получения необходимых условий оптимальности. Удачное введение новой вариации в вопросах подобного рода всегда играло большую роль. Особенно ярко это будет видно при получении условий оптимальности особых управлений. Рассмотренные выше вариации принадлежат к простейшим. Каждая из них имела и имеет в вопросах оптимизации выдающееся значение. Между ними легко усмотреть принципиальное различие. «Малость» вариации *)

$$\Delta u(t) = \varepsilon \delta u(t), \quad t \in T,$$

широко используемой в вариационном исчислении, измеряется в обычном смысле. Ее значения равномерно малы на всем отрезке T . В противоположность этому «малость» игольчатой вариации

$$\Delta u(t) = \begin{cases} v - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases}$$

основной в теории оптимальных процессов, измеряется длиной интервала, где она отлична от нуля и может

*) Наряду с $\delta u(t)$ и функцию $\varepsilon \delta u(t)$ называют *вариацией*, хотя в нашем понимании это приращение.

принимать там произвольное значение. Образно говоря, в первом случае в основу кладется «поперечная малость», во втором — «продольная малость», если в качестве направления взять ось времени.

В вариационном исчислении условия оптимальности, полученные из первой вариации функционала, называются *условиями оптимальности первого порядка*. Аналогично, условия, следующие из неотрицательности второй вариации функционала, называются *условиями оптимальности второго порядка*. По этой классификации уравнение Эйлера — условие первого порядка, условие Лежандра — Клебша — второго. Вспоминая определение вариаций функционала, можно сказать, что то или иное условие является условием первого или второго порядка, в зависимости от того, из рассмотрения каких членов в разложении приращения функционала оно получено. Если изучались лишь члены первой степени относительно ε , то это условие первого порядка, если же привлекались и члены второй степени по ε , то полученные условия суть условия второго порядка.

Но, как показано в п. 4, условие Лежандра — Клебша можно получить и через принцип максимума, рассматривая в ΔJ лишь члены первой степени относительно ε . При этом вариация предполагается не классической (14), а игольчатой (21). Поэтому с точки зрения теории оптимальных процессов условие Лежандра — Клебша — условие первого порядка, равно как и уравнение Эйлера. Указанное обстоятельство следует всегда иметь в виду при фактическом сравнении различных условий. Принцип максимума, будучи необходимым условием оптимальности лишь первого порядка, может оказаться сильнее многих других условий, имеющих более высокий порядок.

7. Условие Лежандра — Клебша и особые управления. Вниманию к условию Лежандра — Клебша было привлечено в силу следующих обстоятельств. Специалисты, столкнувшиеся с особыми управлениями и хорошо владеющие методами вариационного исчисления, попытались для исследования особых управлений применить более тонкие, чем уравнение Эйлера, результаты вариационного исчисления. Первым таким результатом является условие Лежандра — Клебша. Однако непосредствен-

ное эффективное использование его в теории особых управлений оказалось невозможным. Действительно, основные объекты, рассматриваемые в первые годы, описывались уравнением

$$\dot{x} = f_0(x) + u f_1(x),$$

где u — скаляр. Гамильтониан для данного случая линеен по u , и условие Лежандра — Клебша становится тривиальным ($0 = 0$). Попытка использовать другие условия второго порядка была также неудачной, ибо в вариационном исчислении сложилось такое положение, что дальнейшее развитие необходимых условий шло в основном через условия Лежандра — Клебша. Случай, когда последнее условие выполнялось со знаком равенства $v' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} v = 0$, не рассматривались. Собственно, последняя особая ситуация отмечалась в литературе лишь с тем, чтобы предупредить, что она не будет в дальнейшем исследоваться. Таким образом, классические результаты вариационного исчисления, следующие за условием Лежандра — Клебша, можно использовать лишь для неособых управлений; особые ситуации в вариационном исчислении игнорировались. Например, наиболее известное условие второго порядка — условие Якоби, — предполагает, что условие Лежандра — Клебша не вырождается: матрица $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$ определенно положительная.

§ 2. Метод Келли исследования особых управлений

В силу ситуации, описанной в конце предыдущего параграфа, нужны были новые методы для исследования особых управлений. Первый результат в этом направлении принадлежит Г. Келли [2]. Он исходил из второй вариации, но рассматривал ее не на традиционных вариациях управления, а на новых, которые принципиально отличались от известных. Как это часто бывает в науке, новое открытие имело близкие аналоги в старых работах. Вариации, очень похожие по структуре на вариацию Келли, использовались ранее в вариационном исчислении при доказательстве леммы Дю-Буа-Реймона и

для вывода условий Лежандра — Клебша. Однако истинное значение подобных вариаций обнаружилось лишь в связи с особыми управлениями, и первый шаг здесь сделан Г. Келли [2, 3].

1. Постановка задачи. Пусть решается задача

$$\dot{x} = f_0(x) + u f_1(x), \quad x(0) = x_0, \quad t \in T = [0, t_1],$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min,$$

где скалярное управление $u(t)$ может выбираться из класса кусочно-непрерывных функций. Будем считать, что на значения $u(t)$ ограничения не накладываются или они имеют вид $|u(t)| < 1$, что равносильно первому предположению и типично, если оптимальное управление является особым на отрезке T . Относительно функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\varphi(x)$ будем предполагать, что они определены и непрерывны при всех x вместе со вторыми производными.

Пусть $u(t)$, $t \in T$, — особое оптимальное управление. Тогда, по доказанному в § 1, оно удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t))}{\partial u} = 0, \quad t \in T, \quad (1)$$

где

$$H(x, \psi, u) = \psi' f_0(x) + u \psi' f_1(x),$$

$x(t)$, $\psi(t)$ — решение вдоль $u(t)$ системы уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad x(0) = x_0, \quad \psi(t_1) = - \text{grad } \varphi(x(t_1)).$$

Условие Лежандра — Клебша, как отмечено в предыдущем параграфе, вдоль $u(t)$ сводится к тривиальному равенству, так как гамильтониан $H(x, \psi, u)$ линеен по управлению.

2. Основная идея метода. Исследование первой вариации δJ вдоль особого управления $u(t)$, приведенное в § 1, привело к уравнению Эйлера (1). Вторая же вариация $\delta^2 J$ вдоль $u(t)$ пока ничего не дала, ибо известные (регулярные) методы здесь неэффективны. Основная идея метода Келли состоит в дополнительном исследовании второй вариации функционала с помощью специальных вариаций управления.

Вторая вариация функционала в рассматриваемом случае имеет вид

$$\delta^2 J(u) = \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x(t_1) - \\ - \int_0^{t_1} \left[\delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x(t) + 2 \delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u(t) \right] dt. \quad (2)$$

Чтобы отсюда получить удачные необходимые условия оптимальности, нужно выбрать вариацию управления, зависящую от параметра ϵ , подсчитать вариацию траектории, подставить все в (2), выделить главный член по ϵ и воспользоваться доказанным неравенством $\delta^2 J(u) \geq 0$. Если эту идею попытаться осуществить на вариациях (1.14), (1.21), то нетрудно убедиться, что самым «неудачным» членом в (2) является первое слагаемое. Поэтому естественна мысль рассматривать лишь такие вариации управления, при которых первое слагаемое заведомо не дает «представителей» в главную часть второй вариации.

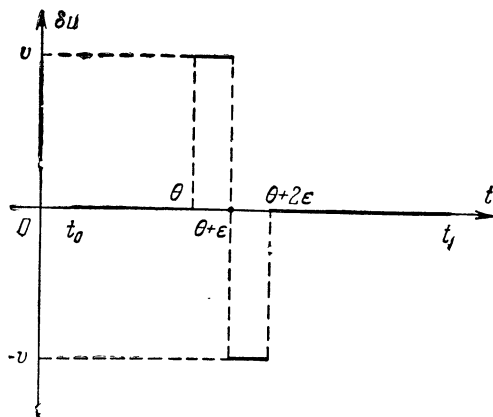


Рис. 1.

3. Вариации Келли. Наиболее просто последняя идея реализуется на вариации Келли (рис. 1)

$$\delta u(t) = \begin{cases} v, & t \in [\theta, \theta + \epsilon), \\ -v, & t \in [\theta + \epsilon, \theta + 2\epsilon), \\ 0, & t \notin [\theta, \theta + 2\epsilon), \end{cases} \quad (3)$$

где v — некоторое число. Ясно, что введенная вариация — двусторонняя, она принимает обязательно и положительные и отрицательные значения. Это свойство вариации Келли является главным препятствием для ее применения в задачах с замкнутыми множествами U . В этом случае управление $\tilde{u}(t) = u(t) + \delta u(t)$ может оказаться недопустимым, какие бы v и $\varepsilon > 0$ не выби-
 рались. Для открытых множеств U это затруднение

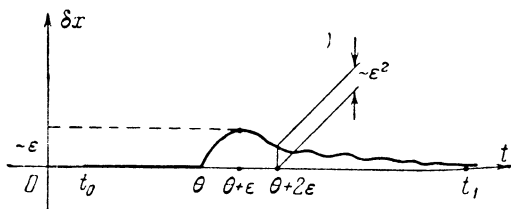


Рис. 2.

легко преодолевается соответствующим уменьшением числа v .

Из чисто физических представлений можно ожидать, что вариация траектории $\delta x(t)$, соответствующая в силу (1.16) вариации Келли $\delta u(t)$, ведет себя как на рис. 2, ибо на первом отрезке $[\theta, \theta + \varepsilon]$ управление $\delta u(t)$ «разгоняет» систему с помощью усилия v , на втором $[\theta + \varepsilon, \theta + 2\varepsilon]$ такой же длительности «тормозит» с прежней силой. Промах от исходного состояния (в данном случае состояния покоя) вызван нелинейной зависимостью функции $\delta x(t)$ от времени. Описанное управление уничтожает линейную (главную) часть промаха, остается промах порядка ε^2 .

Подтвердим эти соображения прямым подсчетом вариации траектории $\delta x(t)$, соответствующей вариации Келли. В силу (1.16) имеем

$$\delta x(t) = 0, \quad t \in [0, \theta].$$

Для момента $t = \theta + \varepsilon$ ($\delta x(\theta) = 0$) можно записать так:

$$\delta x(\theta + \varepsilon) = \varepsilon \delta \dot{x}(\theta) + o(\varepsilon). \quad (4)$$

Значение производной $\delta \dot{x}(\theta)$ находим из уравнения (1.16):

$$\delta \dot{x}(\theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \right) \Big|_{t=\theta+0} = v f_1 \Big|_{t=\theta}.$$

Подставив это значение $\delta \dot{x}(\theta)$ в 4, получим

$$\delta x(\theta + \varepsilon) = \varepsilon v f_1 \Big|_{t=\theta} + o(\varepsilon).$$

Аналогично, в момент $t = \theta + 2\varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} \delta x(\theta + 2\varepsilon) &= \delta x(\theta + \varepsilon) + \varepsilon \delta \dot{x}(\theta + \varepsilon) + o(\varepsilon), \\ \delta \dot{x}(\theta + \varepsilon) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \right) \Big|_{t=\theta+\varepsilon+0} = -v f_1 \Big|_{t=\theta} + \dots, \end{aligned}$$

и, окончательно,

$$\delta x(\theta + 2\varepsilon) \sim \varepsilon^2. \quad (5)$$

На отрезке $[\theta + 2\varepsilon, t_1]$ функция $\delta x(t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{d \delta x}{dt} = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \delta x \quad (6)$$

с начальным условием (5). Поэтому

$$\delta x(t) \sim \varepsilon^2, \quad t \in [\theta + 2\varepsilon, t_1].$$

4. Условие оптимальности Келли. Это интуитивно ожидаемое свойство вариации $\delta x(t)$ позволяет утверждать, что первое слагаемое во второй вариации функционала (2) имеет порядок ε^4 . Такой же порядок имеет в силу полученного свойства и интеграл

$$\int_{\theta+2\varepsilon}^{t_1} \delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x(t) dt.$$

Таким образом, главные члены (порядка ε^3) второй вариации $\delta^2 J$ могут содержаться лишь в выражении

$$\int_{\theta}^{\theta+2\varepsilon} \left[\delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x(t) + 2 \delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u \right] dt.$$

С учетом (1.16) нетрудно подсчитать, что

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x dt &= \frac{\varepsilon^3 v^2}{3} f_1' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} f_1 \Big|_{t=\theta} + o(\varepsilon^3), \\ \int_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\varepsilon} \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x dt &= \frac{\varepsilon^3 v^2}{3} f_1' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} f_1 \Big|_{t=\theta} + o(\varepsilon^3), \\ 2 \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u dt &= v^2 \varepsilon^2 f_1' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \Big|_{t=\theta} + \\ &+ \frac{\varepsilon^3 v^2}{3} \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial x} f_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \frac{d}{dt} f_1 + 2 f_1' \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] \Big|_{t=\theta} + \\ &+ o(\varepsilon^3), \\ 2 \int_{\theta+\varepsilon}^{\theta+2\varepsilon} \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u dt &= -v^2 \varepsilon^2 f_1' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \Big|_{t=\theta} + \\ &+ \frac{\varepsilon^3 v^2}{3} \left[-5 \frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial x} f_1 + \frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{d}{dt} f_1 - \right. \\ &\quad \left. - 4 f_1' \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] \Big|_{t=\theta} + o(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Складывая полученные выражения, получаем

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 J &= \frac{2}{3} L(\theta) v^2 \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3), \\ L(\theta) &= -f_1' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} f_1 + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial x} f_1 - \\ &\quad - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \frac{d}{dt} f_1 + f_1' \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Поскольку вдоль оптимального управления вторая вариация неотрицательна, то из (7) имеем следующее необходимое условие оптимальности:

$$L(\theta) \geq 0 \text{ для всех } \theta \in T. \quad (8)$$

А. Брайсон (см. работу Г. Келли [2]) показал, что полученный результат (8) можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \geq 0. \quad (9)$$

Это и есть условие Келли для особых управлений.

Теорема. Каждое особое оптимальное управление удовлетворяет условию Келли (9).

Замечание. На примере условия Келли можно еще раз (после принципа максимума) убедиться, что очень часто форма результата играет большую роль как для приложений, так и для развития теории. Можно с уверенностью сказать, что условие Келли, оставаясь оно в исходной форме (8), вряд ли заинтересовало бы кого-нибудь из прикладников. С другой стороны, теоретики, познакомившись с новой формой (9), не могут не подумать, что изящность результата должна отражать внутреннюю красоту проблемы, что использованный метод позволил коснуться существа задачи. В этой ситуации сразу возникает мысль попытаться проверить, нельзя ли развить идею метода и найти другие результаты типа (9). Такая попытка впервые была сделана Р. Коппом и Г. Мойером [1]. Первый их результат будет изложен в следующем параграфе.

5. Пример. Пусть система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad T = [0, 1].$$

Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \varphi(x(1)) = x_2(1)$$

на управлениях $u(t)$, стесненных ограничением

$$|u| \leq 1.$$

Составим гамильтониан

$$H(x, \psi, u) = \psi_1 u - \psi_2 x_1^2.$$

Сопряженная система имеет вид

$$\dot{\psi}_1 = 2x_1\psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \psi_1(1) = 0, \quad \psi_2(1) = -1.$$

Действуя по правилам гл. I, можно подсчитать, что особым является управление $u(t) \equiv 0$. Но в данной задаче оно не может быть оптимальным, ибо вдоль него не выполняется условие Келли.

Действительно, имеем

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u} = \dot{\psi}_1 = 2x_1\psi_2,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} = 2\dot{x}_1\psi_2 + 2x_1\dot{\psi}_2 = 2u\psi_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} = 2\psi_2 = -2 < 0.$$

Если несколько видоизменить условие примера и во втором уравнении взять вместо $-x_1^2$ величину x_1^2 , то нетрудно подсчитать,

что $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} = 2$ вдоль особого управления $u(t) \equiv 0$. В этом случае особое управление «претендует» на оптимальность (нетрудно проверить, что оно и в действительности оптимально).

6. Связь условия Келли с методом вычисления особых управлений. В теории особых управлений не сразу было замечено, что левая часть неравенства, выражающего условие Келли, уже встречалась ранее при вычислении особых управлений. Действительно, вспомним метод вычислений особых управлений. В гл. I было показано, что явно параметр управления при дифференцировании функции $\frac{\partial H}{\partial u}$ может появиться лишь в четной производной, в частности, при вычислении производной $\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u}$. Выражение $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u}$ представляет, очевидно, коэффициент при управлении в $\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u}$. Таким образом, при вычислении особых управлений одновременно решается вопрос и об их оптимальности. Оптимальные особые управления определены не на всех многообразиях, построенных в гл. I, а лишь на их части, выделяемой неравенством

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \equiv \{H_1, \{H_0, H_1\}\} \geq 0.$$

Если опять возвратиться к гл. I, то мы увидим, что там при вычислении особых управлений дело не ограничивалось производной $\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u}$, вычисления шли дальше и было показано, что управление явно появляется при четной производной $\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H}{\partial u}$. Что это значит с точки зрения первого полученного условия оптимальности? Вполне возможно, что в некоторых случаях выполняется тождество

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0, \quad t \in T,$$

и условие Келли не несет в себе определенной информации об испытуемом управлении. Конечно, это управление остается претендентом на оптимальное, но ситуация здесь похожа на ту, что рассмотрена при введении особых управлений. Поэтому нужны новые условия, базирующиеся на более обширной информации. Этой задачей мы займемся в следующем параграфе, а пока зададим себе такой вопрос. Условие Келли связано с выраже-

нием $\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u}$, важным с точки зрения вычислений особых управлений. Следующие выражения, важные с той же точки зрения, имеют вид $\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H}{\partial u}$, $k=2, 3, \dots$, и опять в них управления появляются линейно. Не обязаны ли коэффициенты при этих управлениях вести себя определенным образом, если подозреваемое управление оптимально? Другими словами, может быть и выражения

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H}{\partial u}, \quad k=2, 3, \dots,$$

вдоль оптимальных особых управлений принимают значения определенного знака? Конечно, для такой гипотезы у нас пока мало фактов, и действительная история особых управлений развивалась, не следуя этой гипотезе. Однако перед лицом предстоящих довольно утомительных вычислений мы высказываем ее, чтобы цель оставалась заманчивой.

Пока не ясно, почему условие Келли и последующие условия Коппа — Мойера, с одной стороны, и методы вычисления особых управлений, с другой, оказались связанными. Для доказательства необходимых условий оптимальности приходится проводить трудоемкие вычисления, а результат, оказывается, просто связан с методами, которые довольно прозрачны. Может быть, существуют элементарные доказательства условия Келли?

§ 3. Обобщение метода Келли

В конце предыдущего параграфа уже упоминалось, что в некоторых задачах вдоль особого управления условие Келли выполняется со знаком равенства

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0, \quad t \in T. \quad (1)$$

В силу причин, приведенных там же, будем говорить, что в таких случаях условие Келли неэффективно. Ситуация, возникшая с принципом максимума и приведшая к условию Келли, появляется снова, но теперь уже

на новом уровне и с условием Келли вместо принципа максимума. Нужны новые средства для исследования положения. Ниже приводится один результат Р. Коппа и Г. Мойера [1]. Он получен с помощью непосредственного обобщения метода Келли. Основная идея метода сохраняется, но выкладки становятся значительно сложнее.

1. Вариация Коппа — Мойера. В этом параграфе считается, что условие Келли неэффективно. Поэтому в формуле (2.7) для второй вариации функционала $\delta^2 J$ главные члены имеют порядок ε^4 . Можно, конечно, их выписать и получить некоторое необходимое условие оптимальности. Однако напомним, что среди этих членов обязательно будут представители от слагаемого $\delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \delta x(t_1)$. Вариация Коппа — Мойера такова, что на ней среди главных членов разложения $\delta^2 J$ по степеням ε не будет представителей от $\delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \delta x(t_1)$. Нетрудно сообразить, что для выполнения этой цели нужно построить такую вариацию $\delta u(t)$, чтобы соответствующая ей вариация $\delta x(t)$ обладала свойством

$$\delta x(t_1) \sim \varepsilon^3. \quad (2)$$

Проще всего этого можно добиться с помощью вариации вида

$$\delta u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [\theta, \theta + 4\varepsilon), \\ v, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \quad t \in [\theta + 3\varepsilon, \theta + 4\varepsilon), \\ -v, & t \in [\theta + \varepsilon, \theta + 3\varepsilon). \end{cases} \quad (3)$$

Построенная вариация опять двусторонняя. Интересно замечание авторов вариации об аналогии ее с δ -функцией Дирака. Действительно, есть некоторая аналогия между δ -функцией и «игольчатой» вариацией, между производной от δ -функции и вариацией Келли, между второй производной $\ddot{\delta}$ и вариацией Коппа — Мойера.

Покажем, что вдоль вариации (3) выполняется (2). Очевидно, что $\delta x(t) = 0$ для $t \in [0, \theta]$. Рассмотрим отрезок $[\theta, \theta + \varepsilon]$. Для нахождения $\delta x(\theta + \varepsilon)$ запишем разложение

$$\delta x(\theta + \varepsilon) = \varepsilon \delta \dot{x}(\theta) + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta \ddot{x}(\theta) + o(\varepsilon^2) \quad (\delta x(\theta) = 0).$$

Подставив сюда значения производных $\delta\dot{x}(\theta)$, $\delta\ddot{x}(\theta)$ из уравнения (1.16), получим

$$\delta x(\theta + \varepsilon) = \left[\varepsilon \dot{f}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{f}_1 + \frac{d}{dt} \dot{f}_1 \right) \right] \Big|_{t=\theta} v + o(\varepsilon^2). \quad (4)$$

На отрезке $[\theta + \varepsilon, \theta + 3\varepsilon]$ имеем

$$\begin{aligned} \delta x(\theta + 3\varepsilon) &= \delta x[(\theta + \varepsilon) + 2\varepsilon] = \\ &= \delta x(\theta + \varepsilon) + 2\varepsilon \delta\dot{x}(\theta + \varepsilon) + 2\varepsilon^2 \delta\ddot{x}(\theta + \varepsilon) + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5)$$

где значения производных в правой части, вычисленные согласно (1.16), равны

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}(\theta + \varepsilon) &= \left[-\dot{f}_1 + \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{f}_1 - \frac{d}{dt} \dot{f}_1 \right) \right] \Big|_{t=\theta} v + o(\varepsilon), \\ \delta\ddot{x}(\theta + \varepsilon) &= - \left[\frac{\partial f}{\partial x} \dot{f}_1 + \frac{d}{dt} \dot{f}_1 \right] \Big|_{t=\theta} v + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Из (4), (6) и (5) находим

$$\delta x(\theta + 3\varepsilon) = \left[-\varepsilon \dot{f}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{f}_1 - 7 \frac{d}{dt} \dot{f}_1 \right) \right] \Big|_{t=\theta} v + o(\varepsilon^2). \quad (7)$$

Наконец, для отрезка $[\theta + 3\varepsilon, \theta + 4\varepsilon]$ аналогичные вычисления дают

$$\begin{aligned} \delta x(\theta + 4\varepsilon) &= \delta x[(\theta + 3\varepsilon) + \varepsilon] = \\ &= \delta x(\theta + 3\varepsilon) + \varepsilon \delta\dot{x}(\theta + 3\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta\ddot{x}(\theta + 3\varepsilon) + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{x}(\theta + 3\varepsilon) &= \left[\dot{f}_1 + \varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \dot{f}_1 + 3 \frac{d}{dt} \dot{f}_1 \right) \right] \Big|_{t=\theta} v + o(\varepsilon), \\ \delta\ddot{x}(\theta + 3\varepsilon) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \dot{f}_1 + \frac{d}{dt} \dot{f}_1 \right] \Big|_{t=\theta} v + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

После подстановки в (8) соотношений (7) и (9) получаем

$$\delta x(\theta + 4\varepsilon) = o(\varepsilon^2). \quad (10)$$

Начиная с момента $t = \theta + 4\varepsilon$, вариация $\delta x(t)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.6) и поэтому имеет тот же порядок малости, что и начальные условия (10). Таким образом, для вариации Коппа—Мойера свойство (2) выполняется.

2. Условие Коппа—Мойера. Пусть рассматривается та же задача оптимизации, что и в предыдущем

параграфе. Поскольку исследуется особое управление, то опять

$$\delta^2 J(u) = \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \delta x(t_1) - \int_0^{t_1} \left[\delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x(t) + 2\delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u(t) \right] dt. \quad (11)$$

Выделим главный член по ε в разложении $\delta^2 J$ на вариации (3). В силу (2) первое слагаемое справа имеет порядок ε^6 . По той же причине с учетом структуры вариации $\delta u(t)$ можно, очевидно, утверждать, что главные члены разложения содержатся в выражении

$$\int_0^{\theta+4\varepsilon} \left[\delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x(t) + 2\delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u(t) \right] dt. \quad (12)$$

Вычисление интеграла (12) путем разложения в ряд по степеням ε связано с громоздкими выкладками. Применим к нему сначала несколько упрощающих преобразований. Введем в рассмотрение функции

$$\delta u_i(t) = \int_0^t \delta u_{i-1}(t) dt, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \delta u_0(t) \equiv \delta u(t). \quad (13)$$

Будем искать решение $\delta x(t)$ уравнения в вариациях (1.16) в виде линейной комбинации

$$\delta x(t) = a_1(t) \delta u_1(t) + a_2(t) \delta u_2(t) + a_3(t) \delta u_3(t) + a_4(t) \delta u_4(t) + \xi(t), \quad (14)$$

где a_1, \dots, a_4, ξ — пока не известные функции. Подставив выражение $\delta x(t)$ из (14) в (1.16) и приравнявая коэффициенты при одинаковых множителях, получим

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= f_1, \quad a_2 = \frac{\partial f}{\partial x} a_1 - \dot{a}_1, \\ a_3 &= \frac{\partial f}{\partial x} a_2 - \dot{a}_2, \quad a_4 = \frac{\partial f}{\partial x} a_3 - \dot{a}_3, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\dot{\xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial x} a_4 - \dot{a}_4 \right) \delta u_4, \quad \xi(0) = 0. \quad (16)$$

Заметим, что функция $\delta u_4(t)$ на отрезке $[0, \theta + 4\varepsilon]$ имеет порядок ε^4 , следовательно, решение $\xi(t)$ системы (16)

при $t \in [\theta, \theta + 4\varepsilon]$ есть величина порядка ε^5 . Заменяем $\delta x(t)$ в (12) равной ему величиной (14) и выпишем главные по ε члены второй вариации. Имеем

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & -2 \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u_1 \delta u \, dt - \\ & - \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} \left(a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_1 \delta u_1^2 + 2a'_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u_2 \delta u \right) dt - \\ & - 2 \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} \left(a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_2 \delta u_1 \delta u_2 + a'_3 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u_3 \delta u \right) dt - \\ & - \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} \left(a'_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_2 \delta u_2^2 + 2a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_3 \delta u_1 \delta u_3 + \right. \\ & \left. + 2a'_4 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u_4 \delta u \right) dt. \quad (17) \end{aligned}$$

Интегрированием по частям с учетом (13) и свойства $\delta u_1(\theta + 4\varepsilon) = \delta u_2(\theta + 4\varepsilon) = 0$ можно добиться того, что все подынтегральные члены в (17) будут иметь множителями только δu_1^2 или δu_2^2 . Соответствующие вычисления приведены ниже:

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u_1 \delta u \, dt &= -\frac{1}{2} \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} \frac{d}{dt} \left(a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) \delta u_1^2 \, dt, \\ \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} a'_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u_2 \delta u \, dt &= \\ &= - \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} a'_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u_1^2 \, dt + \frac{1}{2} \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} \frac{d^2}{dt^2} \left(a'_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) \delta u_2^2 \, dt, \\ \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_2 \delta u_1 \delta u_2 \, dt &= -\frac{1}{2} \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} \frac{d}{dt} \left(a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_2 \right) \delta u_2^2 \, dt, \\ \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} a'_3 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u_3 \delta u \, dt &= \frac{3}{2} \int_{\theta}^{\theta+4\varepsilon} \frac{d}{dt} \left(a'_3 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) \delta u_2^2 \, dt, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\theta+4\epsilon} a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_3 \delta u_1 \delta u_3 dt = - \int_0^{\theta+4\epsilon} a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_3 \delta u_2^2 dt + o(\epsilon^5),$$

$$\int_0^{\theta+4\epsilon} a'_4 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u_4 \delta u dt = \int_0^{\theta+4\epsilon} a'_4 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u_2^2 dt + o(\epsilon^5).$$

После подстановки полученных выражений в (17) имеем

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & - \int_0^{\theta+4\epsilon} \left[a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_1 - 2a'_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} - \frac{d}{dt} \left(a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) \right] \delta u_1^2 dt - \\ & - \int_0^{\theta+4\epsilon} \left[a'_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_2 - 2a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_3 + 2a'_4 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} - \right. \\ & \left. - \frac{d}{dt} \left(a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_2 \right) + 3 \frac{d}{dt} \left(a'_3 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{d^2}{dt^2} \left(a'_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) \right] \delta u_2^2 dt. \quad (18) \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части (18) равен нулю, поскольку в обозначениях (15)

$$a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_1 - 2a'_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} - \frac{d}{dt} \left(a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) = - \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u}$$

и по предположению (1) условие Келли неэффективно. Второй интеграл в (18), как нетрудно видеть, имеет порядок ϵ^5 . По теореме о среднем получаем

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 J = & -4\epsilon \delta u_2^2 (\theta + 4\mu\epsilon) M(\theta) + o(\epsilon^5), \\ 0 < \mu < 1, \quad \delta u_2^2 (\theta + \mu 4\epsilon) & \sim \epsilon^4, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} M(\theta) = & \left[a'_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_2 - 2a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_3 + 2a'_4 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} - \right. \\ & \left. - \frac{d}{dt} \left(a'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} a_2 \right) + 3 \frac{d}{dt} \left(a'_3 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(a'_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) \right] \Big|_{t=\theta}. \end{aligned}$$

Необходимое условие $\delta^2 J(u^0) \geq 0$ в силу (19) влечет новое необходимое условие оптимальности Коппа — Мойера

$$M(t) \leq 0, \quad t \in T. \quad (20)$$

К этому условию можно предъявить те же претензии, что и к оригинальному результату (2.8) Келли. Однако и здесь удача сопутствовала ученым. Г. Роббинс показал [1], что условие (20) можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial H}{\partial u} \leq 0. \quad (21)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно расписать последнее условие.

Таким образом, доказана

Теорема. Для каждого особого оптимального управления, вдоль которого неэффективно условие Келли (1), должно выполняться условие Коппа — Мойера (21).

3. П р и м е р. Рассмотрим систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{x}_3 = -x_1^2, \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = 0, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

На управлениях $u(t)$, стесненных неравенством

$$|u(t)| \leq 1,$$

требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) = x_3(1).$$

Гамильтониан системы имеет вид

$$H(x, \psi, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - \psi_3 x_1^2.$$

Система сопряженных уравнений такова:

$$\dot{\psi}_1 = 2\psi_3 x_1, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_3 = 0, \quad \psi_1(1) = \psi_2(1) = 0, \quad \psi_3(1) = -1.$$

Методом гл. I нетрудно показать, что особые управления определены на многообразии $x_1 = 0$ и равны там $u(t) = 0$.

Проверим это управление на оптимальность. Начнем с условия Келли:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= \psi_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u} = \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \\ \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} &= -\dot{\psi}_1 = -2\psi_3 x_1, \\ \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Условие Келли неэффективно. Можно применить критерий Коппа — Мойера. Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial H}{\partial u} &= -2\dot{\psi}_3 x_1 - 2\psi_3 \dot{x}_1 = -2\psi_3 x_2, \\ \frac{d^1}{dt^1} \frac{\partial H}{\partial u} &= -2\dot{\psi}_3 x_2 - 2\psi_3 \dot{x}_2 = -2\psi_3 u, \\ \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial H}{\partial u} &= -2\psi_3 = 2 > 0.\end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче особые управления не могут быть оптимальными.

§ 4. Метод преобразований в пространствах вариаций

Метод Келли можно развивать и дальше. Нетрудно построить соответствующие новые вариации управления, которые опять можно сравнить с более высокими производными δ -функции, однако, по предыдущему параграфу нетрудно убедиться, что объем вычислений будет быстро расти. Во избежание этого Р. Коппом, Г. Мойером [1] предложен другой метод доказательства условий оптимальности для особых управлений. Там уже не используется явный вид вариаций $\delta u(t)$, а проводятся некоторые преобразования над $\delta u(t)$. Идея этих преобразований довольно прозрачна. Из вида вариации Келли (2.3) нетрудно усмотреть, что вдоль нее

$$\int_0^{t_1} \delta u(t) dt = 0. \quad (1)$$

Вариация Коппа — Мойера (3.3) кроме этого удовлетворяет еще одному равенству:

$$\int_0^{t_1} dt \int_0^t \delta u(\tau) d\tau = 0. \quad (2)$$

Указанные свойства, как мы уже видели в § 3, являются основными при разложении $\delta^2 J$. Ниже будет показано, что условия (1), (2) позволяют весьма просто получить условия Келли, Коппа — Мойера.

Метод этого параграфа не зачеркивает значения методов из §§ 2, 3. Последние остаются весьма ценными из-за исключительной простоты и наглядности идеи, на

которой они построены. При работе в новых областях проникновение в сущность рассматриваемых проблем чрезвычайно важно. Методы из §§ 2, 3, кроме того, важны и из практических соображений. Действительно, если, например, вдоль некоторого особого управления условие Келли не выполняется, то вариация Келли доставляет нам простейшее средство улучшения исходного управления в том смысле, что соответствующее ее добавление к исходному управлению дает уменьшение критерия качества. Аналогично дело обстоит и с вариацией Коппа — Мойера (3.3). Следует заметить, что использование для этих целей традиционных вариаций не гарантирует успеха.

1. Новое доказательство условий Келли. Опять будем исходить из второй вариации $\delta^2 J$, которая на особом управлении имеет вид

$$\delta^2 J = \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \delta x(t_1) - \int_0^{t_1} \left[\delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x(t) + 2\delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u(t) \right] dt. \quad (3)$$

Как доказано в п. 4 § 1, вторая вариация $\delta^2 J$ неотрицательна при всех вариациях $\delta u(t)$. От этих исходных вариаций перейдем к новым $\delta v(t)$ через соотношение

$$\delta v(t) = \int_0^t \delta u(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Дополнительно преобразуем и вариацию траектории: вместо $\delta x(t)$ рассмотрим функцию $\delta y(t)$,

$$\delta y(t) = \delta x(t) - \frac{\partial f}{\partial u} \delta v(t). \quad (5)$$

Ясно, что

$$\delta v(0) = 0, \quad \delta y(0) = 0.$$

Будем рассматривать лишь такие вариации $\delta u(t)$, вдоль которых выполняется равенство (см. (1))

$$\delta v(t_1) = 0. \quad (6)$$

Непосредственным дифференцированием показывается, что $\delta y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\delta \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x} \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta v.$$

Действительно, из (5) с учетом (4) и (1.16) имеем

$$\begin{aligned} \delta \dot{y} &= \delta \dot{x} - \delta v(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} \delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x - \delta v(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta v(t). \end{aligned}$$

Запишем теперь вторую вариацию $\delta^2 J$ в новых переменных. Из (5) при условии (6) имеем $\delta y(t_1) = \delta x(t_1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta^2 J &= \delta y'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \delta y(t_1) - \\ &- \int_0^{t_1} \left[\delta y + \frac{\partial f}{\partial u} \delta v \right]' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \left[\delta y + \frac{\partial f}{\partial u} \delta v \right] dt - \\ &- 2 \int_0^{t_1} \left[\delta y + \frac{\partial f}{\partial u} \delta v \right]' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta v dt. \quad (7) \end{aligned}$$

В полученном выражении поясним преобразование двух членов:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \delta y' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta v dt &= - \int_0^{t_1} \left[\delta \dot{y}' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \delta y' \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] \delta v dt = \\ &= - \int_0^{t_1} \delta y' \left[\frac{\partial f'}{\partial x} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] \delta v dt - \\ &- \int_0^{t_1} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right]' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} (\delta v)^2 dt, \\ \int_0^{t_1} \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta v \delta v dt &= \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \frac{d}{dt} (\delta v)^2 dt = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (\delta v)^2 \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] dt \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (7), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & \delta y'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \delta y(t_1) + \int_0^{t_1} L(t) (\delta v)^2 dt - \\ & - \int_0^{t_1} \left[\delta y' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta y + 2\delta y' \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial f'}{\partial x} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) \delta v \right] dt, \quad (8) \end{aligned}$$

где $L(t)$ определено согласно формуле (2.7).

По структуре $\delta^2 J$ совпадает с прежним представлением, изменились лишь коэффициенты. Связь между δy и δv аналогична той, что существовала между δx и δu . Функция $\delta v(t)$, по определению (4), непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную. Вторая вариация $\delta^2 J$ (8) неотрицательна для всех таких функций $\delta v(t)$, обладающих, кроме того, свойством $\delta v(0) = \delta v(t_1) = 0$. Поэтому мы вправе воспользоваться результатом п. 5 § 1, где приводилось классическое доказательство условия Лежандра — Клебша. А этот результат состоял в том, что коэффициент при квадрате вариации управления совпадает по знаку с $\delta^2 J$. Таким образом, доказано, что

$$L(t) \geq 0, \quad t \in T,$$

а это условие эквивалентно [см. (2.8), (2.7)] условию Келли (2.9).

2. Новое доказательство условия Коппа — Мойера. Если условие Келли (2.9) неэффективно, то описанный в предыдущем пункте метод можно применить ко второй вариации (8). Конкретно, введем новые вариации $\delta w(t)$ и $\delta z(t)$, связанные с $\delta v(t)$ и $\delta y(t)$ равенствами

$$\delta w(t) = \int_0^t \delta v(\tau) d\tau, \quad \delta z(t) = \delta y(t) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta w.$$

Опять будем рассматривать лишь такие вариации, для которых $\delta w(t_1) = 0$. В терминах исходных вариаций получаем

$$\delta w(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau \delta u(s) ds, \quad \int_0^{t_1} dt \int_0^t \delta u(\tau) d\tau = 0.$$

О последнем свойстве вариаций Коппа — Мойера мы уже упоминали.

Нет смысла приводить все преобразования над (8) по схеме предыдущего пункта. Они элементарны и могут быть осуществлены читателями в качестве упражнений. Результат, несомненно, приведет к условию (3.21).

Изложенный метод преобразований вариаций приводит к условиям Келли и Коппа — Мойера заметно проще, чем метод изложенный в §§ 2, 3. Формальная сторона метода тоже очень проста и допускает дальнейшие обобщения. По существу же, методы §§ 3, 4 очень близки: достаточно вспомнить вывод условия Лежандра — Клебша, — там и в методе Келли используется один тип вариации. Отличие метода настоящего параграфа от метода § 3 состоит, таким образом, в том, что здесь удалось избежать несущественных деталей. В качестве недостатка удалось указать то, что метод преобразований дает условия в развернутом, а не в компактном виде. Хотя результаты последующего развития метода уже угадываются, но обосновать их дело нелегкое. В следующем параграфе излагается еще один метод получения необходимых условий оптимальности, который свободен от этого недостатка.

§ 5. Новая формула приращения функционала и ее применение к доказательству необходимых условий оптимальности особых управлений

Ниже предпринимается новая атака на особые управления, направление ее резко отличается от предыдущих попыток. В основу кладется новая формула приращения функционала. Результат этого параграфа еще раз показывает, что в теории оптимальных процессов важную роль может сыграть и вид формулы приращения функционала.

1. Формула приращения функционала. Пусть по-прежнему рассматривается задача терминального управления:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad u - \text{скаляр},$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min.$$

Приращение функционала J равно

$$\Delta J = \Delta \varphi(x(t_1)) = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \Delta x(t_1) + o(\|\Delta x(t_1)\|). \quad (1)$$

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\psi(t) + \Delta \psi(t)]' \Delta x(t) = \\ = [\dot{\psi}(t) + \Delta \dot{\psi}(t)]' \Delta x(t) + [\psi(t) + \Delta \psi(t)]' \Delta \dot{x}(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\psi(t)$, $\Delta \psi(t)$ — некоторые n -мерные дифференцируемые функции. Интегрируем тождество (2):

$$\begin{aligned} [\psi(t_1) + \Delta \psi(t_1)]' \Delta x(t_1) - [\psi(t_0) + \Delta \psi(t_0)]' \Delta x(t_0) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{\psi}(t) + \Delta \dot{\psi}(t)]' \Delta x(t) dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} [\psi(t) + \Delta \psi(t)] \Delta \dot{x}(t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем рассматривать лишь такие функции $\psi(t)$, $\Delta \psi(t)$, для которых

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}, \\ \Delta \dot{\psi} &= -\frac{\partial H(x + \Delta x, \psi + \Delta \psi, u + \Delta u, t)}{\partial x} + \frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial x}, \\ \Delta \psi(t_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В силу (1) — (4) ($\Delta x(t_0) = 0$) получим

$$\begin{aligned} \Delta J = - \int_{t_0}^{t_1} [H(x + \Delta x, \psi + \Delta \psi, u + \Delta u, t) - \\ - H(x, \psi + \Delta \psi, u, t)] dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x + \Delta x, \psi + \Delta \psi, u + \Delta u, t)}{\partial x} \Delta x dt + o(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned} \quad (5)$$

2. Вторая вариация. Из (5) найдём новую формулу второй вариации функционала. Техника ее получения такая же, как в п. 1.3. В приращении критерия (5) выделим квадратичные относительно ε члены при следующем выборе $\Delta u(t)$:

$$\Delta u(t) = \varepsilon \delta u(t), \quad t \in T.$$

В п. 1.3 было доказано, что главная часть (относительно ε) приращения $\Delta x(t)$ имеет вид $\varepsilon \delta x(t)$, где $\delta x(t)$ — решение уравнения в вариациях (1.16).

Найдём теперь главную часть $\delta \psi(t)$ приращения $\Delta \psi(t)$. Из (4) имеем

$$\begin{aligned} \Delta \psi(t) &= \varepsilon \delta \psi(t) + o(\varepsilon) = \\ &= - \int_{t_1}^t \left[\frac{\partial H(x + \Delta x, \psi + \Delta \psi, u + \Delta u, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial H(x, \psi, u, \tau)}{\partial x} \right] d\tau = \\ &= - \int_{t_1}^t \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \psi} \Delta \psi + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \Delta u + \right. \\ &\quad \left. + o_1(\|\Delta x\| + \|\Delta \psi\| + \|\Delta u\|) \right] d\tau = \\ &= - \varepsilon \int_{t_1}^t \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u \right] d\tau + o_1(\varepsilon). \end{aligned}$$

Равенство должно выполняться при всех ε , поэтому

$$\delta \psi(t) = - \int_{t_1}^t \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u \right] d\tau,$$

что равносильно тому, что $\delta \psi(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\dot{\delta \psi} = - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \psi} \delta \psi - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u, \quad \delta \psi(t_1) = 0. \quad (6)$$

Чтобы выполнить задачу пункта, выделим из $o(\|\Delta x\|)$ один член

$$o(\|\Delta x(t_1)\|) = \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) + o_2(\|\Delta x(t_1)\|^2).$$

Наконец, подсчитаем

$$\begin{aligned}
 H(x + \Delta x, \psi + \Delta\psi, u + \Delta u, t) - H(x, \psi + \Delta\psi, u, t) = \\
 = \frac{\partial H'}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial H'}{\partial u} \Delta u + \frac{1}{2} \Delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Delta x + \\
 + \Delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \psi} \Delta \psi + \Delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \Delta u + \Delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \psi} \Delta \psi + \\
 + \frac{1}{2} \Delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Delta u + o_3(\|\Delta x\| + \|\Delta u\|^2), \\
 \frac{\partial H'(x + \Delta x, \psi + \Delta\psi, u + \Delta u, t)}{\partial x} \Delta x = \\
 = \frac{\partial H'}{\partial x} \Delta x + \Delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Delta x + \Delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \psi} \Delta \psi + \\
 + \Delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \Delta u + o_4(\|\Delta x\| + \|\Delta u\|^2, \|\Delta \psi\|).
 \end{aligned}$$

Коэффициенты в правых частях разложений вычислены вдоль функций $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$. Подставляя эти разложения в (5), получим

$$\begin{aligned}
 \Delta J = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'}{\partial u} \delta u \, dt + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x(t_1) + \right. \\
 + \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x - 2\delta\psi' \frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial u} \delta u - \right. \\
 \left. \left. - \delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u \right] dt \right\} + o(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Таким образом, вторую вариацию можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \delta^2 J = \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x(t_1) + \\
 + \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x - 2\delta\psi' \frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial u} \delta u - \delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u \right] dt. \quad (7)
 \end{aligned}$$

3. Преобразование второй вариации вдоль особого управления. Для особого управления в формуле (7) исчезает член:

$$\delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u = 0. \quad (8)$$

Дальнейшее преобразование второй вариации осуществляется на основе тождества

$$\frac{d}{dt} \delta x' \delta \psi \equiv -\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + \delta \psi' \frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial u} \delta u - \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u.$$

Отсюда имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x - \delta \psi' \frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial u} \delta u \right] dt = - \int_{t_0}^{t_1} \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u dt.$$

С учетом последнего равенства и свойства (8) получаем выражение для второй вариации вдоль особого управления:

$$\begin{aligned} \delta^2 J = \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x(t_1) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \delta u' \left[\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \psi} \delta \psi \right] dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Займемся преобразованием интегральной части в (9). Введем символ дифференциала $\delta a(x, \psi)$ векторной функции $a(x, \psi)$, положив (по определению)

$$\delta a = \frac{\partial a}{\partial x} \delta x + \frac{\partial a}{\partial \psi} \delta \psi. \quad (10)$$

Ясно, что при условии (8) выполняется равенство

$$\delta \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \psi} \delta \psi.$$

Поэтому интегральная часть в (9) равна

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta u' \delta \frac{\partial H}{\partial u} dt. \quad (11)$$

Рассмотрим вспомогательные функции $\delta v_s(t)$, $s = 1, \dots, q$, которые определим рекуррентными соотношениями

$$\delta v_s(t) = \int_{t_0}^t \delta v_{s-1}(t) dt, \quad s = 1, 2, \dots, q, \quad \delta v_0(t) \equiv \delta u(t). \quad (12)$$

Заметим, что фактически $\delta v_s(t)$ есть s -кратный интеграл

$$\delta v_s(t) = \underbrace{\int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t}_{s} \delta u(t) dt \dots dt = \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{s-1}}{(s-1)!} \delta u(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Допустим, что рассматриваются лишь такие вариации $\delta u(t)$, что

$$\delta v_1(t_1) = \delta v_2(t_1) = \dots = \delta v_q(t_1) = 0. \quad (14)$$

Тогда q -кратным интегрированием по частям из (11) получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta u' \delta \frac{\partial H}{\partial u} dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d^q}{dt^q} \delta v_q \right)' \delta \frac{\partial H}{\partial u} dt = \\ &= (-1)^q \int_{t_0}^{t_1} \delta v_q' \frac{d^q}{dt^q} \delta \frac{\partial H}{\partial u} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее, очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{d^q}{dt^q} \delta \frac{\partial H}{\partial u} &= \underbrace{\int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t}_{q} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \delta \frac{\partial H}{\partial u} dt \dots dt + \\ &+ \sum_{s=0}^{q-1} \frac{d^{s+q}}{dt^{s+q}} \delta \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{t=t_0} (t-t_0)^s = \\ &= \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!} \left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \delta \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=\tau} d\tau + \\ &+ \sum_{s=0}^{q-1} \frac{d^{s+q}}{dt^{s+q}} \delta \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{t=t_0} (t-t_0)^s. \end{aligned}$$

Поэтому (15) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta u' \delta \frac{\partial H}{\partial u} dt = & \\ = (-1)^q \int_{t_0}^{t_1} \delta v'_q(t) \left[\int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!} \left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \delta \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=\tau} + \right. & \\ \left. + \sum_{s=0}^{q-1} \frac{d^{s+q}}{dt^{s+q}} \delta \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{t=t_0} (t-t_0)^s \right] dt. & \quad (16) \end{aligned}$$

Для дальнейшего преобразования предположим, что особое управление таково, что при дифференцировании $\frac{\partial H}{\partial u}$ впервые параметр управления явно появится в производной $\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u}$, т. е.

$$\frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial H}{\partial u} = a_k(x, \psi), \quad k = 1, \dots, 2q-1, \quad (17)$$

где $a_k(x, \psi)$ — линейные по ψ функции.

Непосредственным вычислением нетрудно проверить, что для любой гладкой функции $a(x, \psi)$ типа $a_k(x, \psi)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \delta a(x, \psi) = \delta \frac{d}{dt} a(x, \psi). \quad (18)$$

Таким образом, с учетом (18), операции d^m/dt^m и δ в (16) можно переставить. Формула для второй вариации (9) на особом управлении, удовлетворяющем (8), и вариациях $\delta u(t)$, удовлетворяющих (13), принимает вид

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Psi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x(t_1) - \\ & - (-1)^q \int_{t_0}^{t_1} \delta v'_q(t) \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} \delta x + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} \delta \psi + \left. \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right]_{t=\tau} d\tau dt + \\ & + (-1)^q \int_{t_0}^{t_1} \delta v'_q(t) \left[\sum_{s=0}^{q-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{d^{q+s}}{dt^{q+s}} \frac{\partial H}{\partial u} \delta x + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{d^{q+s}}{dt^{q+s}} \frac{\partial H}{\partial u} \delta \psi + \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{q+s}}{dt^{q+s}} \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right) \right]_{t=t_0} (t-t_0)^s dt. \quad (19) \end{aligned}$$

4. Необходимые условия оптимальности высокого порядка. Докажем следующее утверждение.

Теорема. Пусть вдоль особого допустимого управления рассматриваемой задачи выполняются условия

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad k = 1, \dots, q-1. \quad (20)$$

Тогда для его оптимальности необходимо

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} \leq 0.$$

Схема доказательства. Как показано в гл. I, условия (20) эквивалентны (17). Поэтому для доказательства теоремы можно привлечь формулу (19) для второй вариации $\delta^2 J$. Поскольку вариации $\delta u(t)$ удовлетворяют условиям (14), то, задавая $\delta u(t)$ отличным от нуля лишь на отрезке $[\theta, \theta + \varepsilon] \subset [t_0, t_1]$, нетрудно подсчитать (ниже это показано), что

$$\delta x(t) \sim \varepsilon^{q+1}, \quad \delta \psi(t) \sim \varepsilon^{q+1}, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (21)$$

Поэтому основной вклад по ε внесет в $\delta^2 J$ третий подынтегральный член из (19). Вспоминая, что вдоль оптимального управления $\delta^2 J \geq 0$, отсюда получим утверждение теоремы.

Идея доказательства свойств (21) очень проста и состоит в том, чтобы выразить вариации δx , $\delta \psi$ через δu по формуле Коши и затем оценить порядок их роста.

Поскольку $\delta u(t)$ отлично от нуля лишь на отрезке $[\theta, \theta + \varepsilon]$, то соотношения (12), (14) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \delta v_s(t) &= \int_{\theta}^t \delta v_{s-1}(t) dt, \quad s = 1, 2, \dots, q, \quad \delta v_0(t) \equiv \delta u(t), \\ \delta v_1(\theta + \varepsilon) &= \delta v_2(\theta + \varepsilon) = \dots = \delta v_q(\theta + \varepsilon) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Очевидно, $\delta x(t) = 0$, $t \in [t_0, \theta]$. Обозначим через $F(t)$ фундаментальную матрицу решений уравнения в вариациях (1.16):

$$\dot{F} = \frac{\partial f}{\partial x} F, \quad F(\theta) = E,$$

и запишем решение $\delta x(t)$ по формуле Коши:

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= F(t) \int_{\theta}^t F^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \, d\tau = \\ &= F(t) \left[\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} F^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \, d\tau + \int_{\theta+\varepsilon}^t F^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \, d\tau \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

Чтобы учесть здесь свойства (22) вариации δu , вычислим первый интеграл q -кратным интегрированием по частям. Имеем

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} F^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \, dt = (-1)^q \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \frac{d^q}{dt^q} \left(F^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \delta v_q \, dt.$$

Далее из (22) получим

$$\begin{aligned} \|\delta v_q(t)\| &= \left\| \int_{\theta}^t \frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!} \delta u(\tau) \, d\tau \right\| \leq \\ &\leq \max_{\theta \leq t \leq \theta+\varepsilon} \|\delta u(t)\| \int_{\theta}^t \frac{(t-\tau)^{q-1}}{(q-1)!} \, d\tau \leq \frac{1}{q!} \max_{\theta \leq t \leq \theta+\varepsilon} \|\delta u(t)\| \varepsilon^q. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} F^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \, dt \right\| &\leq \\ &\leq \frac{1}{q!} \max_{\theta \leq t \leq \theta+\varepsilon} \left\| \frac{d^q}{dt^q} \left(F^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \right\| \max_{\theta \leq t \leq \theta+\varepsilon} \|\delta u(t)\| \varepsilon^{q+1}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} F^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \, dt \sim \varepsilon^{q+1}. \quad (24)$$

Из (24) и (23) следует, что

$$\delta x(t) \sim \varepsilon^{q+1}, \quad t \in [\theta + \varepsilon, t_1]. \quad (25)$$

Записав по формуле Коши решение $\delta\psi(t)$ системы (6) и принимая во внимание (25), убеждаемся, что

$$\delta\psi(t) \sim \varepsilon^{q+1}, \quad t \in [\theta + \varepsilon, t_1]. \quad (26)$$

Для $t = \theta$ имеем

$$\delta\psi(\theta) = F^{-1}(\theta + \varepsilon) \delta\psi(\theta + \varepsilon) + \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} F^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u \right) dt. \quad (27)$$

Преобразуем интегральный член в (27). В силу (23) первое слагаемое равно

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} F^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x dt &= \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} F^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F \int_{\theta}^t F^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \delta u d\tau dt = \\ &= \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left(\int_t^{\theta+\varepsilon} F^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F d\tau \right) F^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} \delta u dt, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} F^{-1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u \right) dt &= \\ &= \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left[\left(\int_t^{\theta+\varepsilon} F^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F d\tau \right) F^{-1} \frac{\partial f}{\partial u} + F^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] \delta u dt. \end{aligned}$$

Сравнивая это равенство с (24), заключаем, что его правая часть имеет порядок ε^{q+1} . Следовательно, из (26) и (27) имеем $\delta\psi(\theta) \sim \varepsilon^{q+1}$. На отрезке $[t_0, \theta]$ величина $\delta\psi(t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\delta\dot{\psi} = - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \psi} \delta\psi$$

с начальным условием $\delta\psi(\theta) \sim \varepsilon^{q+1}$. Отсюда следует, что $\delta\psi(t) \sim \varepsilon^{q+1}$, $t \in [t_0, \theta]$.

Итак, свойства (21) установлены для всех t из отрезка $[t_0, t_1]$, кроме $t \in (\theta, \theta + \varepsilon)$. Фактическое знание вариаций $\delta x(t)$, $\delta\psi(t)$ внутри отрезка $[\theta, \theta + \varepsilon]$ для доказательства теоремы и не нужно, достаточно знать их значения на концах этого отрезка.

§ 6. Метод преобразований в пространстве состояний

Оригинальный метод исследования особых управлений предложен в работах В. И. Гурмана [3], Г. Келли [3]. Специалистам, воспитанным на идеях вариационного исчисления, известно, что особое неудобство вызывают простейшие задачи (1.1), в которых \dot{y} входят линейно. Такие задачи называются вырожденными. С этой точки зрения задача терминального управления из § 2 вырождена. Различные частные приемы решения подобных задач были известны и до 1964 г. (см., например, работы Д. Е. Охоцимского [1], Д. Е. Охоцимского, Т. М. Энеева [1]). По своему духу эти приемы весьма характерны для специалистов-прикладников, которые, основываясь на глубоком знании конкретных задач, изошренно вводят новые переменные. Однако лишь в упомянутых работах В. И. Гурманом и Г. Келли основная идея этих приемов получила общую форму. Суть нового метода состоит в специфической замене переменных состояния. Специфика же преобразований заключается в использовании первых интегралов системы, непосредственно связанной с исходной. Такие «естественные» замены оказались весьма плодотворными и в других областях прикладной математики (например, в асимптотических методах с использованием пространства первых интегралов). Конечная цель преобразований остается та же, что и в методах §§ 2—5. После замены переменных задача становится, вообще говоря, невырожденной и к ней можно применить условие Лежандра — Клебша. Следует отметить и то обстоятельство, что преобразованные задачи имеют меньшую размерность, чем исходные.

1. Схема метода. Пусть рассматривается задача

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x, t) + u f_1(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}, \\ u(t) &\in U, \quad t \in T, \quad J(u) = \Phi(x(t_1)) \rightarrow \min. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Вместо n переменных x_1, \dots, x_n введем новые n переменных z_1, \dots, z_{n-1}, z_n , положив

$$z_i = r_i(x, t), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad z_n = x_k,$$

где k — такой индекс, что

$$f_{1k}(x, t) \neq 0. \quad (2)$$

Ясно, что требуемое k найдется. Функции $r_1(x, t), \dots, r_{n-1}(x, t)$ подберем так, чтобы дифференциальные уравнения для новых переменных z_1, \dots, z_{n-1} не содержали управления. Поскольку

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial x_j} f_{0j}(x, t) + u \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial x_j} f_{1j}(x, t) + \frac{\partial r_i}{\partial t}, \quad (3)$$

то цель будет достигнута, если $r_i(x, t)$ — решения уравнений в частных производных

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial x_j} f_{1j}(x, t) = 0. \quad (4)$$

Будем решать эти уравнения методом характеристик. Дифференциальные уравнения характеристик

$$\frac{dx_i}{d\tau} = f_{1i}(x, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

В этих уравнениях τ — новая независимая переменная, t играет роль параметра.

Пусть

$$\varphi_1(x, t), \dots, \varphi_{n-1}(x, t) \quad (6)$$

— первые независимые интегралы уравнения (5). Ясно, что каждая из этих функций является решением уравнения (4). Поэтому, если положить

$$r_i(x, t) \equiv \varphi_i(x, t),$$

то в уравнениях (3) управление не появится.

Для новых переменных исходные уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &= b_i(z_1, \dots, z_n, t), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{dz_n}{dt} &= b_n(z_1, \dots, z_n, t) + u a_n(z_1, \dots, z_n, t), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где функции $b_i, a_n, i = 1, \dots, n-1$, выражаются через исходные f_0, f_1 и найденные $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$.

Из (7) видно, что полученная система имеет специальную структуру. Заманчива идея выделить из (7) первые $n-1$ уравнений, в которых переменную z_n

считать управлением. После того как задача оптимизации в новых переменных будет решена, т. е. будут найдены оптимальные z_1, \dots, z_n , это решение подставим в последнее уравнение из (7), откуда найдем оптимальное управление

$$u = -\frac{b_n}{a_n} + \frac{\dot{z}_n}{a_n}.$$

При этом $a_n \neq 0$ в силу (2).

Такова схема решения задачи (1) методом преобразований в пространстве состояний.

2. Об обосновании метода. Наиболее трудной частью описанного метода является задача нахождения независимых первых интегралов системы и доказательство эквивалентности задач. Как это часто бывает в методах подобного типа (которые явились обобщением удачных находок в конкретных задачах), для многих модельных задач эта трудность легко преодолевается. В общем случае вопрос еще не решен, хотя известно, что задачи исходная и преобразованная могут оказаться неэквивалентными. Подробнее об этом можно узнать в монографии В. Ф. Кротова, В. З. Букреева, В. И. Гурмана [1].

§ 7. Пакет вариаций

Выше достаточно подробно изложена основная идея введения вариации Келли, отмечены свойства этой вариации, которые, с одной стороны, позволили развить первоначальную идею, а с другой, — упростить доказательство результатов. Возможен еще один взгляд на сущность новой вариации. Описанием этого взгляда мы и займемся в настоящем параграфе.

1. Пакеты вариаций. Вариацию Келли можно представить как жесткую комбинацию двух определенных игольчатых вариаций. Аналогично, вариации Коппа — Мойера суть жесткая связка трех строго определенных игольчатых вариаций. При этой конкретизации возникает естественная мысль рассмотреть связки игольчатых вариаций произвольного вида. Действие такой связки на систему может оказаться более разнообразным, что должно привести к новым критериям. Заманчива и

идея изменения схемы использования вариаций. Как было отмечено выше, как вариация Келли, так и вариации Коппа — Мойера вводились из чисто физических соображений, каждый раз цель заключалась в достижении определенных свойств у вариации траектории. При таком подходе всегда остается сомнение, нет ли родственных идей, которые также упрощают исследование? Даже если они есть, додуматься до них дело нелегкое. Гораздо продуктивнее, видимо, является другой подход. Через систему пропускается связка вариаций произвольного состава. Поскольку решается задача оптимизации, то разумно состав связки определять из этой задачи оптимизации, из результатов прохождения пакета через систему, из действия его на критерий, а не заранее. Хотя сопутствующие вычисления при этом будут более громоздкими, но описанный путь позволяет более широко исследовать задачу и, главное, он универсален и меньше зависит от удачи. Конкретно эта общая идея будет описана ниже, а пока остановимся на вариациях.

Пакетом вариаций первого порядка (нулевой степени) назовем вариацию $\delta u(t)$, $t \in T$, отличную от нуля лишь на отрезке $[\theta, \theta + \varepsilon]$, где θ — некоторая точка из $[t_0, t_1]$, ε — достаточно малое положительное число. На отрезке $[\theta, \theta + \varepsilon]$ вариация $\delta u(t)$ состоит из суммы игольчатых вариаций $\delta u^i(t)$, $i = 1, \dots, p$:

$$\delta u^i(t) = \begin{cases} a_i, & \theta \leq t < \theta + q_i \varepsilon \\ 0, & t \in [\theta, \theta + q_i \varepsilon), \end{cases} \quad (1)$$

где a_i — произвольные r -векторы, q_i — числа, удовлетворяющие неравенствам: $0 < q_1 < q_2 < \dots < q_{p-1} < q_p = 1$.

Каждая из вариаций $\delta u^i(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 3. Составляющие всего пакета вариаций (нулевой степени) показаны на рис. 4.

Пакет вариаций, соответствующий рис. 4, изображен на рис. 5.

Таким образом, пакет вариаций характеризуется параметрами $a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p$. Выбирая эти параметры, можно получить разнообразные конкретные вариации $\delta u(t)$. В частности, игольчатая вариация получается при следующем составе $p = 1$, $q_1 = 1$, $a_1 = v$.

Вариации Келли (2) соответствуют

$$p=2, \quad q_1=\frac{1}{2}, \quad q_2=1, \quad a_1=2v, \quad a_2=-v.$$

Если положить

$$p=3, \quad q_1=\frac{1}{4}, \quad q_2=\frac{3}{4}, \quad q_3=1, \quad a_1=2v, \quad a_2=-2v, \quad a_3=v,$$

то из пакета получается вариация Коппа — Мойера (3.3).

Пакет вариаций с игольчатой вариацией роднит то, что обе вариации отличны от нуля лишь на отрезке

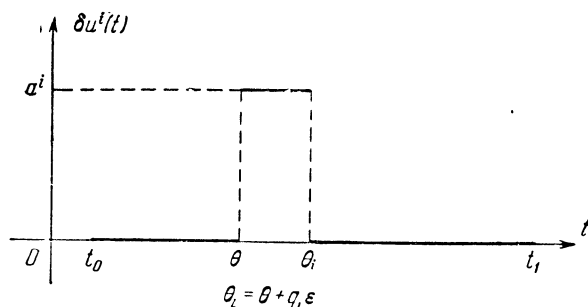


Рис. 3.

длины ε . Но по составу пакет значительно богаче игольчатой вариации, и это позволяет надеяться, что пакет — более тонкое и универсальное средство исследования задач оптимизации.

Пакет нулевой степени составлен из игольчатых вариаций, каждая из которых кусочно-постоянная функция. Если в основу пакета положить кусочно-линейные игольчатые вариации (рис. 6), то получим пакет первой степени, который богаче пакета нулевой степени и содержит последний в качестве частного случая.

Аналогично можно ввести пакеты сколь угодно большой степени. В общем случае можно каждую игольчатую вариацию пакета составлять из кусков произвольных функций.

Другое направление обобщения пакета вариаций получается из следующих построений. Наряду с игольчатыми вариациями вида (1) в состав пакета включим

игольчатые вариации типа

$$\delta u^j(t) = \begin{cases} b_i, & \theta \leq t < \theta + p_i \varepsilon^2, \\ 0, & t \in [\theta, \theta + p_i \varepsilon^2), \end{cases} \quad (2)$$

где p_i — положительные числа, $p_1 < p_2 < \dots < p_q = 1$.

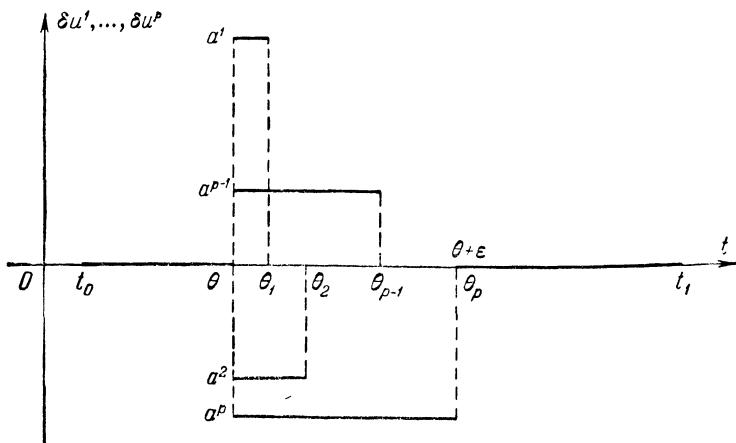


Рис. 4.

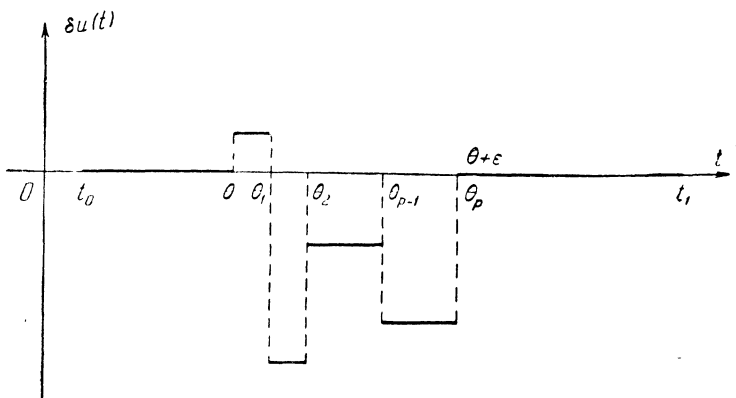


Рис. 5.

Пакет, составленный из вариаций (1) и (2), назовем *пакетом вариаций второго порядка* (нулевой степени). Совершенно аналогично вводятся пакеты более

высокого порядка. Идея введения пакетов высокого порядка довольно прозрачна. При получении необходимых условий оптимальности приходится рассматривать малые значения параметра ε . При уменьшении ε в пакете первого порядка происходит лишь «прессовка» игольчатых вариаций, в пакете же высокого порядка при этом происходит постоянное «перемешивание». Но главная цель введения пакетов высокого порядка состоит в том, чтобы при анализе оптимальных управлений учесть «комбинационные эффекты» от разных групп вариаций.

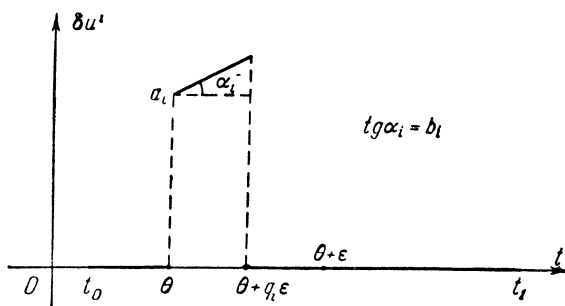


Рис. 6.

2. Общая схема использования пакетов вариаций.

При исследовании оптимальных управлений, как правило, появляются соотношения в виде неравенств, справедливые для вариаций того или иного класса. Эти соотношения, являясь необходимыми (а может быть, и достаточными) условиями оптимальности, сами неудобны (громоздки) для того, чтобы служить эффективными критериями. Возникает задача получения из этих соотношений более простых условий оптимальности. Для подтверждения сказанного приведем примеры. Очевидно, что приращение функционала $\Delta J(u)$ вдоль оптимального управления неотрицательно на любых допустимых вариациях

$$\Delta J(u^0) \geq 0. \quad (3)$$

Это условие необходимо и достаточно для оптимальности управления. В п. 1.4 доказано, что вдоль оптимального управления вторая вариация $\delta^2 J$ неотрицательна

для любых допустимых двусторонних вариаций

$$\delta^2 J(u^0) \geq 0. \quad (4)$$

Оба условия (3), (4) при конкретном счете неудобны, так как они требуют больших вычислений.

Для описания общей схемы применения пакета вариаций предположим, что известно соотношение

$$A(u^0, \delta u) \geq 0, \quad (5)$$

справедливое для всех вариаций определенного класса.

Рассмотрим пакеты такого состава, который образует допустимую вариацию при любых ε , $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon} < \infty$. Левую часть соотношения (5) вычислим на пакете вариаций, а результат представим в виде разложения по степеням ε :

$$A(u^0, \delta u) = \varepsilon A_1(u^0, Q) + \varepsilon^2 A_2(u^0, Q) + \dots \\ \dots + \varepsilon^{\nu} A_{\nu}(u^0, Q) + o(\varepsilon^{\nu}) \geq 0, \quad (6)$$

Здесь символом Q обозначена совокупность параметров, характеризующих пакет.

Теперь использование пакета может идти по двум направлениям.

1) Из неравенства (6), справедливого при любых ε , $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, следует, что

$$A_1(u^0, Q) \geq 0 \quad (7)$$

для всех Q , образующих допустимую вариацию. Выбирая тот или иной конкретный состав пакета из (7), получаем различные упрощенные критерии оптимальности.

2) Не исключено, что множество Q содержит такое подмножество P элементов, на котором

$$A_1(u^0, P) = \dots = A_{m-1}(u^0, P) = 0.$$

В этом случае условие (6) принимает вид

$$\varepsilon^m A_m(u^0, P) + o(\varepsilon^m) \geq 0,$$

откуда следует, что

$$A_m(u^0, P) \geq 0 \quad (8)$$

для всех пакетов, параметры которых входят в P . Выбирая среди них конкретные, из (8) получим разнообразные упрощенные критерии.

На каждом из описанных направлений могут получиться условия двух типов. Если в (7) или в (8) выбором параметров из Q или из P нельзя «заставить» левую часть принимать значения разных знаков, то из (7) или (8) получаются необходимые условия типа неравенства. Если же левая часть (7) (или (8)) знакопеременна на допустимых элементах Q (или P), то из (7) (соответственно из (8)) получаются условия типа равенства

$$A_1(u^0, \bar{Q}) = 0 \quad (A_m(u^0, \bar{P}) = 0),$$

где \bar{Q} , \bar{P} означает некоторый фиксированный состав.

§ 8. Вторая вариация функционала на пакете вариаций управления

Общая схема использования пакета вариаций, описанная в § 7, в следующих параграфах реализуется на конкретной функции $A(u^0, Q)$, в качестве которой выбрана вторая вариация функционала $\delta^2 J$. Данный параграф носит вспомогательный характер и подготавливает материал для последующего.

1. Вычисление вариаций траектории на пакете. Вторая вариация $\delta^2 J$ вдоль особого управления имеет вид (§ 1):

$$\begin{aligned} -\delta^2 J = & -\delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x(t_1) + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x(t) + 2 \delta x'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u \right] dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Чтобы найти разложение $\delta^2 J$ по степеням ϵ , нужно сначала вычислить разложение $\delta x(t)$. В силу линейности уравнения, которому удовлетворяет функция $\delta x(t)$, последнюю можно представить в виде

$$\delta x(t) = \sum_{i=1}^p \delta x^i(t), \quad (2)$$

где $\delta x^i(t)$ — вариация траектории, соответствующая вариации $\delta u^i(t)$, входящей в пакет. Конечно, а) ясно, что $\delta x^i(t) \equiv 0$, $t_0 \leq t \leq \theta$, б) на отрезке $[\theta, \theta_i]$ имеем

$$\delta \dot{x}^i(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x^i(t) + \frac{\partial f}{\partial u} a_i, \quad \delta x^i(\theta) = 0, \quad \theta \leq t \leq \theta_i. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\delta x^i(t) = \delta x^i(\theta) + \delta \dot{x}^i(t) \Big|_{t=\theta} (t - \theta) + \dots \\ \dots + \frac{1}{\gamma!} \frac{d^\gamma \delta x^i(t)}{dt^\gamma} \Big|_{t=\theta} (t - \theta)^\gamma + o_1((t - \theta)^\gamma).$$

Из уравнения (3) легко подсчитать, что

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \delta x^i(\theta) = \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} \delta x^i(\theta) + \\ + C_k^1 \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} \delta \dot{x}^i(\theta) + \dots + C_k^m \frac{d^{k-m}}{dt^{k-m}} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} \times \\ \times \frac{d^m}{dt^m} \delta x^i(\theta) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} \frac{d^k}{dt^k} \delta x^i(\theta) + \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{t=\theta} a_i \quad (4)$$

(C_k^m — число сочетаний из k элементов по m , $m \leq k$, $k = 0, 1, \dots$).

Обозначим через A_0 коэффициент при a_i в выражении для $\delta \dot{x}^i(\theta)$. Аналогично, пусть n -мерный вектор A_k — коэффициент при a_i в выражении $\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \delta x^i(\theta)$. Из (3) имеем $A_0 = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{t=\theta}$. Остальные коэффициенты A_k в силу (4) подсчитываются по рекуррентной формуле:

$$A_k = \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{t=\theta} + C_k^1 \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} A_0 + \\ + C_k^2 \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} A_1 + \dots + C_k^m \frac{d^{k-m}}{dt^{k-m}} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} A_{m-1} + \dots \\ \dots + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} A_{k-1}, \quad A_0 = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{t=\theta}, \\ k = 1, \dots; m = 1, 2, \dots, k. \quad (5)$$

В новых обозначениях вариация $\delta x^i(t)$ имеет такой вид:

$$\delta x^i(t) = A_0 a_i(t - \theta) + \frac{1}{2} A_1 a_i(t - \theta)^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{\gamma!} A_{\gamma-1} a_i(t - \theta)^\gamma + o_1((t - \theta)^\gamma) = \\ = \sum_{m=1}^{\gamma} \frac{1}{m!} A_{m-1} a_i(t - \theta)^m + o_1((t - \theta)^\gamma), \quad \theta \leq t \leq \theta_i. \quad (6)$$

с) Вычислим теперь $\delta x^i(t)$ на отрезке $[\theta_i, \theta + \varepsilon]$. В силу (1.16), (7.1), (6) дифференциальное уравнение и начальное условие таковы:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{x}^i(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} \delta x^i(t), \quad \theta_i \leq t \leq \theta + \varepsilon, \\ \delta x^i(\theta_i) &= \sum_{m=1}^{\gamma} \frac{1}{m!} A_{m-1} a_i \varepsilon_i^m + o_1(\varepsilon_i^{\gamma}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Снова решение уравнения (7) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \delta x^i(t) &= \delta x^i(\theta_i) + \delta \dot{x}^i(\theta_i)(t - \theta_i) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\gamma!} \frac{d^{\gamma}}{dt^{\gamma}} \delta x^i(\theta_i)(t - \theta_i)^{\gamma} + o_2((t - \theta_i)^{\gamma}), \quad \theta_i \leq t \leq \theta + \varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Положим

$$\frac{d^k}{dt^k} \delta x^i(\theta_i) = B_k(\theta_i) \delta x^i(\theta_i).$$

Из (7) следует, что $n \times n$ матричные функции $B_k(t)$ определяются рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} B_k(t) &= \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \frac{\partial f}{\partial x} B_0 + C_{k-1}^1 \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \frac{\partial f}{\partial x} B_1(t) + \dots \\ &\dots + C_{k-1}^m \frac{d^{k-m-1}}{dt^{k-m-1}} \frac{\partial f}{\partial x} B_m(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x} B_{k-1}(t), \\ k &= 1, 2, \dots; \quad m = 1, \dots, k-1; \quad B_0 = E. \end{aligned}$$

Разложение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta x^i(t) &= B_0 \delta x^i(\theta_i) + B_1(\theta_i) \delta x^i(\theta_i)(t - \theta_i) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\gamma!} B_{\gamma}(\theta_i) \delta x^i(\theta_i)(t - \theta_i)^{\gamma} + o_2((t - \theta_i)^{\gamma}) = \\ &= \sum_{l=0}^{\gamma} \frac{1}{l!} B_l(\theta_i) \delta x^i(\theta_i)(t - \theta_i)^l + o_2((t - \theta_i)^{\gamma}). \end{aligned}$$

Поскольку

$$(t - \theta_i)^l = \sum_{h=0}^l (-1)^h C_l^h (t - \theta)^{l-h} \varepsilon_i^h,$$

$$\begin{aligned} B_l(\theta_i) &= B_l(\theta) + \dot{B}_l(\theta) \varepsilon_i + \dots + \frac{1}{\gamma!} \frac{d^{\gamma}}{dt^{\gamma}} B_l(\theta) \varepsilon_i^{\gamma} + o_3(\varepsilon_i^{\gamma}) = \\ &= \sum_{r=0}^{\gamma} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dt^r} B_l(\theta) \varepsilon_i^r + o_3(\varepsilon_i^{\gamma}), \quad l = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

то с учетом (6) получаем

$$\begin{aligned} \delta x^i(t) = & \sum_{l=0}^{\gamma-1} \sum_{r=0}^{\gamma-1} \sum_{m=1}^{\gamma} \sum_{h=0}^l \frac{(-1)^h C_l^h}{l! r! m!} \frac{d^r}{dt^r} B_l(\theta) \times \\ & \times A_{m-1} a_i e^{m+r+h}(t-\theta)^{l-h} + o(\varepsilon_i^\gamma) + \\ & + o_2((t-\theta_i)^\gamma), \quad \theta_i \leq t \leq \theta + \varepsilon. \quad (9) \end{aligned}$$

Итак, вариация $\delta x^i(t)$, удовлетворяющая уравнению (1.16) при $\delta u = \delta u^i(t)$, тождественно равна нулю на $[t_0, \theta]$, описывается разложением (6) на $[\theta, \theta_i]$ и разложением (9) на $[\theta_i, \theta + \varepsilon]$.

Вариация $\delta x(t)$, $t \in [\theta, \theta + \varepsilon]$ на пакете вычисляется по формуле (2). В частности, при $t = \theta + \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} \delta x(\theta + \varepsilon) = & \sum_{i=1}^p \delta x^i(\theta + \varepsilon) = \\ = & \sum_{l=0}^{\gamma-1} \sum_{r=0}^{\gamma-1} \sum_{m=1}^{\gamma} \sum_{h=0}^l \frac{(-1)^h C_l^h}{l! r! m!} \frac{d^r}{dt^r} B_l(\theta) A_{m-1} \times \\ & \times \sum_{i=1}^p a_i q_i^{m+r+h} e^{m+r+l} + o(\varepsilon^\gamma). \end{aligned}$$

Упростим последнее выражение. Введем индекс $\alpha = m + r + l$, $\alpha = 1, 2, \dots, \gamma$, исключим из рассмотрения индекс $r : r = \alpha - m - l \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta x(\theta + \varepsilon) = & \sum_{\alpha=1}^{\gamma} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} \sum_{m=1}^{\alpha} \sum_{h=0}^l \frac{(-1)^h C_l^h}{l! (\alpha - m - l)! m!} \times \right. \\ & \left. \times \frac{d^{\alpha-m-l}}{dt^{\alpha-m-l}} B_l(\theta) A_{m-1} \sum_{i=1}^p a_i q_i^{\alpha+h-l} \right) \varepsilon^\alpha + o(\varepsilon^\gamma). \end{aligned}$$

Положим далее $\eta = \alpha + h - l$, $\eta = 1, \dots, \alpha$; $h = \eta - \alpha + l \geq 0$. В результате имеем

$$\delta x(\theta + \varepsilon) = \sum_{\alpha=1}^{\gamma} \left(\sum_{\eta=1}^{\alpha} \sum_{l=0}^{\alpha-1} \sum_{\substack{m=1 \\ \eta+l \geq \alpha, m+l \leq \alpha}}^{\alpha} \frac{(-1)^{\eta-\alpha+l} C_l^{\eta-\alpha+l}}{l! (\alpha-m-l)! m!} \times \right. \\ \left. \times \frac{d^{\alpha-m-l} B_l(\theta)}{dt^{\alpha-m-l}} A_{m-1} \sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta} \right) \varepsilon^{\alpha} + o(\varepsilon^{\gamma}).$$

Пусть

$$D_{\eta\mu} = \sum_{\substack{l=\mu \\ m+l \leq \eta+\mu}}^{\eta+\mu-1} \sum_{m=1}^{\eta+\mu} \frac{(-1)^{l-\mu} C_l^{l-\mu}}{l! (\eta+\mu-m-l)! m!} \frac{d^{\eta+\mu-m-l} B_l(\theta)}{dt^{\eta+\mu-m-l}} A_{m-1}, \quad (10)$$

где $\mu = \alpha - \eta$, $\mu = 0, 1, \dots, \alpha - 1$; $\alpha = \mu + \eta$. Тогда окончательно получим

$$\delta x(\theta + \varepsilon) = \sum_{\alpha=1}^{\gamma} \left[\sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+\eta=\alpha}}^{\alpha-1} \sum_{\eta=1}^{\alpha} D_{\eta\mu} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta} \right) \right] \varepsilon^{\alpha} + o(\varepsilon^{\gamma}). \quad (11)$$

d) На отрезке $[\theta + \varepsilon, t_1]$ вариация $\delta x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\delta \dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x(t)$$

с начальным условием (11). Введем $n \times n$ -матричную функцию $F(t)$ уравнением

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} F(t), \quad F(t_0) = E. \quad (12)$$

Тогда

$$\delta x(t) = F(t) F^{-1}(\theta + \varepsilon) \delta x(\theta + \varepsilon), \quad \theta + \varepsilon \leq t \leq t_1. \quad (13)$$

Из (12) следует уравнение для обратной матрицы $F^{-1}(t)$:

$$\frac{d}{dt} F^{-1}(t) = -F^{-1}(t) \frac{\partial f}{\partial x}, \quad F^{-1}(t_0) = E. \quad (14)$$

Разложим $F^{-1}(\theta + \varepsilon)$ по степеням ε в окрестности точки $t = \theta$ с учетом (14). Имеем

$$F^{-1}(\theta + \varepsilon) = F^{-1}(\theta) \left(\sum_{\beta=0}^{\gamma} \frac{1}{\beta!} G_{\beta} \varepsilon^{\beta} \right) + o_4(\varepsilon^{\gamma}).$$

Здесь $n \times n$ -матрицы G_k вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} G_k = & - \left(G_{k-1} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} + C_{k-1}^1 G_{k-2} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} + \dots \right. \\ & \left. \dots + C_{k-1}^m G_{k-m-1} \frac{d^m}{dt^m} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} + \dots + G_0 \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{t=\theta} \right), \\ G_0 = & E, \quad k = 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Таким образом, вариация $\delta x(t)$, порожденная пакетом первого порядка, на отрезке $[\theta + \varepsilon, t_1]$ равна

$$\begin{aligned} \delta x(t) = & F(t) F^{-1}(\theta) \left[\sum_{\alpha=1}^{\gamma} \sum_{\substack{\beta=0 \\ \mu+\eta+\beta=\alpha}}^{\alpha-1} \sum_{\eta=1}^{\alpha} \sum_{\mu=0}^{\alpha-1} \frac{1}{\beta!} G_{\beta} D_{\eta\mu} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta} \right) \varepsilon^{\alpha} \right] + \\ & + o(\varepsilon^{\gamma}), \quad \theta + \varepsilon \leq t \leq t_1. \quad (15) \end{aligned}$$

2. Разложение второй вариации функционала на пакете. Положим

$$\begin{aligned} \delta x_1^i(t) &= \delta x^i(t), \quad \theta \leq t \leq \theta_i, \\ \delta x_2^i(t) &= \delta x^i(t), \quad \theta_i \leq t \leq \theta + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (6), (9) получим

$$\delta x_1^i(t) = \sum_{m=1}^{\gamma} K_m^i (t - \theta)^m + o_1((t - \theta)^{\gamma}), \quad \theta \leq t \leq \theta_i, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \delta x_2^i(t) = & \sum_{\mu=0}^{\gamma-1} L_{\mu}^i (t - \theta)^{\mu} + o_2((t - \theta_i)^{\gamma}) + \\ & + o(\varepsilon_i^{\gamma}), \quad \theta_i \leq t \leq \theta + \varepsilon, \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$K_m^i = \frac{1}{m!} A_{m-1} a_i, \quad (18)$$

$$L_\mu^i = \sum_{l=\mu}^{\gamma-1} \sum_{r=0}^{\gamma-1} \sum_{m=1}^{\gamma} \frac{(-1)^{l-\mu} C_l^{l-\mu}}{l! r! m!} \frac{d^r B_l(\theta)}{dt^r} A_{m-1} a_i e^{m+r+l-\mu}. \quad (19)$$

$m+r+l \leq \gamma$

Упростим выражение (19). Положим $\eta = m + r + l - \mu$, $\eta = 1, \dots, \gamma - \mu$. Исключая в (19) индекс $r = \eta + \mu - m - l \geq 0$, получим

$$L_\mu^i = \sum_{\eta=1}^{\gamma-\mu} \sum_{\substack{l=\mu \\ m+l \leq \eta+\mu}}^{\eta+\mu-1} \sum_{m=1}^{\eta+\mu} \frac{(-1)^{l-\mu} C_l^{l-\mu}}{l! (\eta + \mu - m - l)! m!} \frac{d^{\eta+\mu-m-l} B_l(\theta)}{dt^{\eta+\mu-m-l}} A_{m-1} a_i e_i^\eta,$$

или [см. (10)]

$$L_\mu^i = \sum_{\eta=1}^{\gamma-\mu} D_{\eta\mu} a_i e_i^\eta. \quad (20)$$

Пусть, далее,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \sum_{j=0}^{\gamma} P_j (t - \theta)^j + o((t - \theta)^\gamma), \quad P_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Big|_{t=\theta},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} = \sum_{j=0}^{\gamma} Q_j (t - \theta)^j + o((t - \theta)^\gamma), \quad Q_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} \Big|_{t=\theta}.$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (1) на промежутке $[\theta_{s-1}, \theta_s] \subset [\theta, \theta + \varepsilon]$, $s = 1, \dots, p$, $\theta_0 = \theta$, $\theta_p = \theta + \varepsilon$ ($\theta_s = \theta + q_s \varepsilon = \theta + \varepsilon_s$ — точки, фигурирующие в определении пакета). На этом отрезке

$$\delta u(t) = \sum_{i=s}^p a_i,$$

$$\delta x(t) = \sum_{i=1}^{s-1} \delta x_2^i(t) + \sum_{i=s}^p \delta x_1^i(t), \quad \theta_{s-1} \leq t \leq \theta_s.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta_{s-1}}^{\theta_s} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt = \\
& = \int_{\theta_{s-1}}^{\theta_s} \sum_{i_1, i_2=1}^{s-1} \delta x_2^{i_1'} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x_2^{i_2} dt + \\
& + \int_{\theta_{s-1}}^{\theta_s} \sum_{i_1, i_2=s}^p \delta x_1^{i_1'} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta \dot{x}_1^{i_2} dt + \\
& + 2 \int_{\theta_{s-1}}^{\theta_s} \sum_{i_1=1}^{s-1} \sum_{i_2=s}^p \delta x_2^{i_1'} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x_1^{i_2} dt + \\
& + 2 \int_{\theta_{s-1}}^{\theta_s} \sum_{i_1=1}^{s-1} \sum_{i_2=s}^p \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x_2^{i_1} a_{i_2} dt + \\
& + 2 \int_{\theta_{s-1}}^{\theta_s} \sum_{i_1, i_2=s}^p \frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \delta x_1^{i_1} a_{i_2} dt = \\
& = \sum_{i_1, i_2=1}^{s-1} \sum_{v=0}^{\gamma-1} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+\mu_2+j=v}}^v \sum_{\mu_2=0}^v \sum_{j=0}^v L_{\mu_1}^{i_1'} P_j L_{\mu_2}^{i_2} \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \varepsilon_{s-1}^{v+1}}{v+1} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=s}^p \sum_{v=2}^{\gamma-1} \sum_{\substack{m_1=1 \\ m_1+m_2+j=v}}^{v-1} \sum_{m_2=1}^{v-1} \sum_{j=0}^{v-2} K_{m_1}^{i_1'} P_j K_{m_2}^{i_2} \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \varepsilon_{s-1}^{v+1}}{v+1} + \\
& + 2 \sum_{i_1=1}^{s-1} \sum_{i_2=s}^p \sum_{v=1}^{\gamma-1} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+m+j=v}}^{v-1} \sum_{m=1}^v \sum_{j=0}^{v-1} L_{\mu}^{i_1'} P_j K_m^{i_2} \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \varepsilon_{s-1}^{v+1}}{v+1} + \\
& + 2 \sum_{i_1=1}^{s-1} \sum_{i_2=s}^p \sum_{v=0}^{\gamma-1} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+j=v}}^v \sum_{j=0}^v Q_j' L_{\mu}^{i_1} a_{i_2} \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \varepsilon_{s-1}^{v+1}}{v+1} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=s}^p \sum_{v=1}^{\gamma-1} \sum_{\substack{m=1 \\ m+j=v}}^v \sum_{j=0}^{v-1} Q_j' K_m^{i_1} a_{i_2} \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \varepsilon_{s-1}^{v+1}}{v+1} + o(\varepsilon^\gamma), \quad (21)
\end{aligned}$$

где $o(\varepsilon^v)$ — совокупность всех остаточных членов. Очевидно, что

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt = \\ = \sum_{s=1}^p \int_{\theta_{s-1}}^{\theta_s} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt.$$

Непосредственным суммированием легко проверяются тождества для произвольных функций $\lambda(i_1, i_2)$:

$$\sum_{s=2}^p \sum_{i_1, i_2=1}^{s-1} \lambda(i_1, i_2) \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \varepsilon_{s-1}^{v+1}}{v+1} = \\ = \sum_{i_1, i_2=1}^p \lambda(i_1, i_2) \frac{\varepsilon_p^{v+1}}{v+1} - \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{i_1} \lambda(i_1, i_2) \frac{\varepsilon_{i_1}^{v+1}}{v+1} - \\ - \sum_{i_2=2}^p \sum_{i_1=1}^{i_2-1} \lambda(i_1, i_2) \frac{\varepsilon_{i_2}^{v+1}}{v+1}, \quad \sum_{s=1}^p \sum_{i_1, i_2=s}^p \lambda(i_1, i_2) \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \varepsilon_{s-1}^{v+1}}{v+1} = \\ = \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=i_1}^p \lambda(i_1, i_2) \frac{\varepsilon_{i_1}^{v+1}}{v+1} + \sum_{i_2=1}^{p-1} \sum_{i_1=i_2+1}^p \lambda(i_1, i_2) \frac{\varepsilon_{i_2}^{v+1}}{v+1}, \\ \sum_{s=2}^p \sum_{i_1=1}^{s-1} \sum_{i_2=s}^p \lambda(i_1, i_2) \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \varepsilon_{s-1}^{v+1}}{v+1} = \\ = \sum_{i_2=2}^p \sum_{i_1=1}^{i_2-1} \lambda(i_1, i_2) \frac{\varepsilon_{i_2}^{v+1}}{v+1} - \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p \lambda(i_1, i_2) \frac{\varepsilon_{i_1}^{v+1}}{v+1}.$$

Учитывая эти равенства, просуммируем выражение (21)

по s от 1 до p . Имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\theta+\varepsilon} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt = \\
 & = \sum_{v=0}^{v-1} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+\mu_2+j=v}}^v \sum_{\mu_2=0}^v \sum_{j=0}^v \left(\sum_{i_1, i_2=1}^p L_{\mu_1}^{i_1} P_j L_{\mu_2}^{i_2} \frac{\varepsilon_{\rho}^{v+1}}{v+1} - \right. \\
 & - \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{i_1} L_{\mu_1}^{i_1} P_j L_{\mu_2}^{i_2} \frac{\varepsilon_{i_1}^{v+1}}{v+1} - \sum_{i_2=2}^p \sum_{i_1=1}^{i_2-1} L_{\mu_1}^{i_1} P_j L_{\mu_2}^{i_2} \frac{\varepsilon_{i_2}^{v+1}}{v+1} \Big) + \\
 & + \sum_{v=2}^{v-1} \sum_{\substack{m_1=1 \\ m_1+m_2+j=v}}^{v-1} \sum_{m_2=1}^{v-1} \sum_{j=0}^{v-2} \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=i_1}^p K_{m_1}^{i_1} P_j K_{m_2}^{i_2} \frac{\varepsilon_{i_1}^{v+1}}{v+1} + \right. \\
 & + \sum_{i_2=1}^{p-1} \sum_{i_1=i_2+1}^p K_{m_1}^{i_1} P_j K_{m_2}^{i_2} \frac{\varepsilon_{i_2}^{v+1}}{v+1} \Big) + \\
 & + 2 \sum_{v=1}^{v-1} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+m+j=v}}^{v-1} \sum_{m=1}^v \sum_{j=0}^{v-1} \left(\sum_{i_2=2}^p \sum_{i_1=1}^{i_2-1} L_{\mu}^{i_1} P_j K_m^{i_2} \frac{\varepsilon_{i_2}^{v+1}}{v+1} - \right. \\
 & - \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p L_{\mu}^{i_1} P_j K_m^{i_2} \frac{\varepsilon_{i_1}^{v+1}}{v+1} \Big) + \\
 & + 2 \sum_{v=0}^{v-1} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+j=v}}^v \sum_{j=0}^v \left(\sum_{i_2=2}^p \sum_{i_1=1}^{i_2-1} Q_j' L_{\mu}^{i_1} a_{i_2} \frac{\varepsilon_{i_2}^{v+1}}{v+1} - \right. \\
 & - \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p Q_j' L_{\mu}^{i_1} a_{i_2} \frac{\varepsilon_{i_1}^{v+1}}{v+1} \Big) + \\
 & + 2 \sum_{v=1}^{v-1} \sum_{\substack{m=1 \\ m+j=v}}^v \sum_{j=0}^{v-1} \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=i_1}^p Q_j' K_m^{i_1} a_{i_2} \frac{\varepsilon_{i_1}^{v+1}}{v+1} + \right. \\
 & + \sum_{i_2=1}^{p-1} \sum_{i_1=i_2+1}^p Q_j' K_m^{i_1} a_{i_2} \frac{\varepsilon_{i_2}^{v+1}}{v+1} \Big) + o(\varepsilon^v).
 \end{aligned}$$

Подставляя вместо K_m^i , L_μ^i их значения (18), (19), получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{\theta+\varepsilon}^{\theta} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt = \\
 & = \sum_{v=0}^{\gamma-3} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+\mu_2+v=\gamma}}^v \sum_{\substack{\mu_2=0 \\ j=0}}^v \sum_{j=0}^v \sum_{\substack{\eta_1=1 \\ \eta_1+\eta_2+v+1 \leq \gamma}}^{\gamma-v-2} \sum_{\eta_2=1}^{\gamma-v-2} D'_{\eta_1 \mu_1} P_j D_{\eta_2 \mu_2} \times \\
 & \times \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_2}^{\eta_2} q_{i_1}^{\eta_1} - \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^{\eta_1+v+1} q_{i_2}^{\eta_2} - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{i_2=2}^p \sum_{i_1=1}^{i_2-1} a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^{\eta_1} q_{i_2}^{\eta_2+v+1} \right) \frac{e^{\eta_1+\eta_2+v+1}}{v+1} + \\
 & + \sum_{v=2}^{\gamma-1} \sum_{\substack{m_1=1 \\ m_1+m_2+j=v}}^{\gamma-1} \sum_{\substack{m_2=1 \\ j=0}}^{\gamma-1} \sum_{j=0}^{\gamma-2} \frac{1}{m_1! m_2!} A'_{m_1-1} P_j A_{m_2-1} \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=i_1}^p a_{i_1} a_{i_2} \times \right. \\
 & \quad \left. \times q_{i_1}^{v+1} + \sum_{i_2=1}^{p-1} \sum_{i_1=i_2+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^{v+1} \right) \frac{e^{v+1}}{v+1} + \\
 & + 2 \sum_{v=1}^{\gamma-2} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+m+j=v, \eta+v+1 \leq \gamma}}^{\gamma-1} \sum_{j=0}^{\gamma-1} \sum_{m=1}^v \sum_{\eta=1}^{\gamma-v-1} \frac{1}{m!} D'_{\eta \mu} P_j A_{m-1} \left(\sum_{i_2=2}^p \sum_{i_1=1}^{i_2-1} a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^{\eta} \times \right. \\
 & \quad \left. \times q_{i_2}^{v+1} - \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^{\eta+v+1} \right) \frac{e^{\eta+v+1}}{v+1} + \\
 & + 2 \sum_{v=0}^{\gamma-2} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+j=v, \eta+v+1 \leq \gamma}}^v \sum_{j=0}^v \sum_{\eta=1}^{\gamma-v-1} Q'_j D_{\eta \mu} \times \\
 & \times \left(\sum_{i_2=2}^p \sum_{i_1=1}^{i_2-1} a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^{\eta} q_{i_2}^{v+1} - \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^{\eta+v+1} \right) \times \\
 & \times \frac{e^{\eta+v+1}}{v+1} + 2 \sum_{v=1}^{\gamma-1} \sum_{m=1}^v \sum_{j=0}^{\gamma-1} \frac{1}{m!} Q'_j A_{m-1} \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=i_1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^{v+1} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i_2=1}^{p-1} \sum_{i_1=i_2+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_2}^{v+1} \right) \frac{e^{v+1}}{v+1} + o(\varepsilon^\gamma),
 \end{aligned}$$

Переходя во всех слагаемых к новому индексу z , $z = 1, 2, \dots, \gamma$, получим окончательный вид разложения первого члена в правой части (1) по степеням ε :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\theta+\varepsilon} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt = \\ & = \sum_{z=2}^{\gamma} (V_z + W_z) \varepsilon^z + \sum_{z=3}^{\gamma} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+\eta_1+\eta_2+l=z}}^{z-3} \sum_{\substack{\mu_2=0 \\ \mu_2+j+\eta_1+\eta_2+l=z}}^{z-3} \sum_{\substack{j=0 \\ \eta_1=1}}^{z-3} \sum_{\substack{\eta_2=1}}^{z-2} \frac{1}{z - \eta_1 - \eta_2} \times \\ & \times D'_{\eta_1 \mu_1} P_j D_{\eta_2 \mu_2} \left(\sum_{i_1=1}^p a_{i_1} q_{i_1}^{\eta_1} \right) \left(\sum_{i_2=1}^p a_{i_2} q_{i_2}^{\eta_2} \right) \varepsilon^z + o(\varepsilon^\gamma). \quad (22) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} V_z = & \sum_{\substack{m_1=1 \\ m_1+m_2+j+l=z}}^{z-2} \sum_{\substack{m_2=1 \\ m_2+j+l=z}}^{z-2} \sum_{j=0}^{z-3} \frac{1}{z \cdot m_1! m_2!} A'_{m_1-1} P_j A_{m_2-1} \times \\ & \times \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=i_1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^z + \sum_{i_2=1}^{p-1} \sum_{i_1=i_2+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_2}^z \right) + \\ & + \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+m+j+\eta+l=z}}^{z-3} \sum_{j=0}^{z-3} \sum_{m=1}^{z-2} \sum_{\eta=1}^{z-2} \frac{2}{m! (z - \eta)} D'_{\eta \mu} P_j A_{m-1} \times \\ & \times \left(\sum_{i_2=2}^p \sum_{i_1=1}^{i_2-1} a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^{\eta} q_{i_2}^{z-\eta} - \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^z \right) - \\ & - \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+\eta_1+\eta_2+l=z}}^{z-3} \sum_{\substack{\mu_2=0 \\ \mu_2+j+\eta_1+\eta_2+l=z}}^{z-3} \sum_{j=0}^{z-3} \sum_{\eta_1=1}^{z-2} \sum_{\eta_2=1}^{z-2} \frac{1}{z - \eta_1 - \eta_2} D'_{\eta_1 \mu_1} P_j D_{\eta_2 \mu_2} \times \\ & \times \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=i_1}^{i_1} a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^{z-\eta_2} q_{i_2}^{\eta_2} + \sum_{i_2=2}^p \sum_{i_1=1}^{i_2-1} a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^{\eta_1} q_{i_2}^{z-\eta_1} \right), \\ & V_2 = 0; \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_z = & \sum_{\mu=0}^{z-2} \sum_{j=0}^{z-2} \sum_{\eta=1}^{z-1} \frac{2}{z-\eta} Q'_j D_{\eta\mu} \left(\sum_{i_2=2}^p \sum_{i_1=1}^{i_2-1} a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^\eta q_{i_2}^{z-\eta} - \right. \\
& \left. - \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^z \right) + \sum_{m=1}^{z-1} \sum_{j=0}^{z-2} \frac{2}{z \cdot m!} Q'_j A'_{m-1} \times \\
& \times \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=i_1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^z + \sum_{i_3=1}^{p-1} \sum_{i_1=i_2+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_2}^z \right). \quad (24)
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь члены второй вариации, определенные на $[\theta + \varepsilon, t_1]$:

$$\int_{\theta+\varepsilon}^{t_1} \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x dt - \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x(t_1), \quad (25)$$

где δx описывается разложением (15).

Пусть

$$S(\varepsilon) = \sum_{\alpha=1}^{\gamma} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{\eta=1}^{\alpha} \sum_{\mu=0}^{\alpha-1} \frac{1}{\beta!} G_\beta D_{\eta\mu} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^\eta \right) \varepsilon^\alpha.$$

Тогда

$$\delta x(t) = F(t) F^{-1}(\theta) S(\varepsilon) + o(\varepsilon^\gamma), \quad \theta + \varepsilon \leq t \leq t_1.$$

Подставим это выражение в (25). Получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta+\varepsilon}^{t_1} \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x dt - \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \delta x(t_1) = \\
& = S'(\varepsilon) F^{-1'}(\theta) \left[\int_{\theta}^{t_1} F'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F(t) dt - F'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} F(t_1) \right] \times \\
& \times F^{-1}(\theta) S(\varepsilon) - S'(\varepsilon) F^{-1'}(\theta) \left(\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} F'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F(t) dt \right) \times \\
& \times F^{-1}(\theta) S(\varepsilon) + o(\varepsilon^\gamma). \quad (26)
\end{aligned}$$

Положим

$$\Psi(t) =$$

$$= F^{-1'}(t) \left[\int_t^{t_1} F'(\tau) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F(\tau) d\tau - F'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} F(t_1) \right] F^{-1}(t), \quad (27)$$

$$\bar{K}(t) = F'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F(t). \quad (28)$$

Тогда из (26) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\theta+\varepsilon}^{t_1} \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x dt - \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \delta x(t_1) = \\ & = S'(\varepsilon) \Psi(\theta) S(\varepsilon) - S'(\varepsilon) F^{-1'}(\theta) \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \bar{K}(t) dt \cdot F^{-1}(\theta) S(\varepsilon) = \\ & = \sum_{z=2}^y \sum_{\beta_1=0}^{z-2} \sum_{\substack{\beta_2=0 \\ \beta_1+\beta_2+\mu_1+\mu_2+\eta_1+\eta_2=z}}^{z-2} \sum_{\mu_1=0}^{z-2} \sum_{\mu_2=0}^{z-2} \sum_{\eta_1=1}^{z-1} \sum_{\eta_2=1}^{z-1} \frac{1}{\beta_1! \beta_2!} \times \\ & \times D'_{\eta_1 \mu_1} G'_{\beta_1} \Psi(\theta) G_{\beta_2} D_{\eta_2 \mu_2} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta_2} \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta_1} \right) \varepsilon^z - \\ & - \sum_{z=3}^y \sum_{\beta_1=0}^{z-3} \sum_{\substack{\beta_2=0 \\ \beta_1+\beta_2+\mu_1+\mu_2+\eta_1+\eta_2+\nu=z}}^{z-3} \sum_{\mu_1=0}^{z-3} \sum_{\mu_2=0}^{z-3} \sum_{\eta_1=1}^{z-2} \sum_{\eta_2=1}^{z-2} \sum_{\nu=1}^{z-2} \frac{1}{\beta_1! \beta_2! \nu!} \times \\ & \times D'_{\eta_1 \mu_1} G_{\beta_1} F^{-1'}(\theta) \frac{d^{v-1} \bar{K}(\theta)}{dt^{v-1}} F^{-1}(\theta) \times \\ & \times G_{\beta_2} D_{\eta_2 \mu_2} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta_1} \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta_2} \right) \varepsilon^z + o(\varepsilon^y). \quad (29) \end{aligned}$$

Введем обозначение, положив

$$\begin{aligned} N_z = & \sum_{\beta_1=0}^{z-2} \sum_{\substack{\beta_2=0 \\ \beta_1+\beta_2+\mu_1+\mu_2+\eta_1+\eta_2=z}}^{z-2} \sum_{\mu_1=0}^{z-2} \sum_{\mu_2=0}^{z-2} \sum_{\eta_1=1}^{z-1} \sum_{\eta_2=1}^{z-1} \frac{1}{\beta_1! \beta_2!} D'_{\eta_1 \mu_1} G'_{\beta_1} \times \\ & \times \Psi(\theta) G_{\beta_2} D_{\eta_2 \mu_2} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta_1} \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta_2} \right), \quad z = 2, 3, \dots \quad (30) \end{aligned}$$

Сравнивая выражения (22) и (29), получим формулу разложения второй вариации (1) по степеням параметра ε :

$$\begin{aligned} -\delta^2 J &= \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt + \\ &+ \int_{\theta+\varepsilon}^{t_1} \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x dt - \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \delta x(t_1) = \\ &= \sum_{z=2}^{\gamma} (V_z + W_z + N_z) \varepsilon^z + o(\varepsilon^\gamma). \end{aligned} \quad (31)$$

Коэффициенты этого разложения V_z , W_z , N_z вычисляются по формулам (23), (24), (30) и зависят, очевидно, как от параметров задачи — функций $f(x, u, t)$, $\Phi(x(t_1))$, $H(x, \psi, u, t)$, подсчитанных вдоль исследуемого особого управления, так и от параметров пакета: a_1, \dots, a_p , q_1, \dots, q_p .

§ 9. Получение необходимых условий оптимальности с помощью простейших пакетов

При использовании пакетов удачный выбор параметров пакета может упростить вычисления. В данном параграфе эта мысль иллюстрируется на простейших пакетах. Надо отметить, что «удача» полностью определяется формулой разложения (8.31), и не требует какой-то изобретательности.

1. Пакет с единственным условием и условие Келли. Пусть пакет вариаций удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^p a_i q_i = 0. \quad (1)$$

В силу (8.31) достаточно взять здесь $p = 2$, т. е. рассмотреть пакет со свойством

$$a_1 q_1 + a_2 = 0, \quad (q_2 = 1, \quad 0 < q_1 < 1).$$

Из (8.31), $\gamma = 3$, получаем

$$\delta^2 J = L(\theta) \frac{(1 - q_1)^2}{3} a_2^2 \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3),$$

где

$$L = - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \left(2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \\ + \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u}. \quad (2)$$

Поскольку $\frac{(1-q_1)^2}{3} a_2^2 \geq 0$ при любых a_2, q_1 ($0 < q_1 < 1$), то из требования $\delta^2 J \geq 0$ вытекает, что на оптимальном особом управлении $L(\theta) \geq 0$. Компактная форма записи выражения (2) для систем, линейных по управлению, указана в п. 4 § 2 [формула (2.8)]. Этот результат справедлив и в общем случае, что следует из равенства

$$L = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}.$$

Так как $\theta \in T$ произвольно, то приходим к утверждению.

Теорема. Пусть в задаче п. 1 § 5 вектор-функция $f(x, u, t)$ трижды дифференцируема по совокупности своих аргументов. Для оптимальности кусочно-непрерывного и кусочно-гладкого допустимого управления $u(t)$, особого на T , необходимо, чтобы для всех $t \in T$ выполнялось неравенство

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} \right) \geq 0. \quad (3)$$

Замечания. 1. Используя результаты гл. I, необходимое условие (3) можно записать также с помощью скобок Пуассона:

$$L = \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u}, \frac{\partial H}{\partial u} \right\} \geq 0.$$

2. Пакет со свойством (1) удовлетворяет условию

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta u(t) dt = 0, \quad (4)$$

положенному в основу доказательства условия Келли в п. 1 § 4.

Действительно,

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta u^i(t) dt = a_i q_i \varepsilon, \quad i = 1, \dots, p.$$

Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta u(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^p \delta u^i(t) dt = \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \varepsilon = 0,$$

что совпадает с (4).

2. Пакет с двумя специальными условиями. Наложим на пакет два условия:

$$\sum_{i=1}^p a_i q_i = 0, \quad \sum_{i=1}^p a_i q_i^2 = 0. \quad (5)$$

Вариация $\delta x(t)$, соответствующая этому пакету в силу (8.15), имеет порядок ϵ^3 на $[0 + \epsilon, t_1]$. Из разложения (8.31), $\gamma = 5$, $p = 3$, с учетом (5), получаем

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=0} \frac{(1-q_2)^2 (1-q_1)}{3q_2} a_3^2 \epsilon^3 + \\ & + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] \Big|_{t=0} \Phi_1(q_1, q_2) a_3^2 \epsilon^4 + \\ & + \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] \right\}_{t=0} \Phi_2(q_1, q_2) - \\ & - \bar{L}(0) \frac{(1-q_2)^2 (1-q_1) (3q_2 - q_1^2 - q_2^2 - q_1 q_2)}{60q_2} \Big\} a_3^2 \epsilon^5 + o(\epsilon^5), \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{L} = & \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial f'}{\partial x} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - 3 \frac{d}{dt} \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \\ & - 2 \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \\ & + 3 \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \\ & + 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} - \\ & - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial f}{\partial u} + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \\ & - 3 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \\ & + \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial f}{\partial u} - \\ & - \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} - 3 \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \\ & + \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial f}{\partial u} - 4 \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} - \\ & - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \\ & - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1(q_1, q_2) &= \frac{1}{4}(c_1^2 q_1^4 + c_2^2 q_2^4 + 1) + \\ &+ \frac{1}{3}(c_2 c_1 q_2^3 q_1 - c_1 q_1 - c_2 q_2) + \frac{1}{6}(c_1 c_2 q_1^4 - c_1 q_1^4 - c_2 q_2^4), \\ \Phi_2(q_1, q_2) &= \frac{1}{15}(c_1^2 q_1^5 + c_2^2 q_2^5 + 1) + \\ &+ \frac{1}{12}(c_2 c_1 q_2^4 q_1 - c_1 q_1 - c_2 q_2) + \frac{1}{20}(c_1 c_2 q_1^5 - c_1 q_1^5 - c_2 q_2^5), \\ c_1 &= \frac{q_2 - 1}{q_1(q_2 - q_1)}, \quad c_2 = \frac{1 - q_1}{q_2(q_2 - q_1)}.\end{aligned}$$

Пусть $u(t)$ — особое управление, на котором условие Келли неэффективно, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} \right) \equiv 0, \quad t \in T. \quad (7)$$

Тогда в (6) коэффициенты при ϵ^3 , ϵ^4 и первое слагаемое в коэффициенте при ϵ^5 вследствие (7) равны нулю. Поскольку выражение

$$\frac{(1 - q_2)^2 (1 - q_1) (3q_2 - q_1^2 - q_2^2 - q_1 q_2)}{60q_2}$$

неотрицательно при любых q_1, q_2 , $0 < q_1 < q_2 < 1$, то из свойства оптимальности $\delta^2 J \geq 0$ и выражения (6) следует неравенство $\bar{L}(\theta) \leq 0$. Компактная форма этого условия совпадает с (4.21). Значит, справедлива

Теорема. *Предположим, что в задаче п. 1 § 5 вектор-функция $f(x, u, t)$ непрерывна по аргументам вместе со всеми своими производными до четвертого порядка включительно. Пусть $u(t)$, $t \in T$ — особое управление с кусочно-непрерывными производными $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t)$, вдоль которого условие Келли неэффективно. Для оптимальности управления $u(t)$ необходимо, чтобы всюду на T выполнялось неравенство*

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} \right) \leq 0 \quad (8)$$

З а м е ч а н и я. 1. Это неравенство в § 3 доказано для систем, линейных по управлению.

2. Покажем, что пакет со свойством (5) удовлетворяет условиям

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta u(t) dt = 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^t \delta u(\tau) d\tau = 0, \quad (9)$$

которые в § 3 положены в основу доказательства результата типа (8). Действительно, ранее было доказано первое из равенств (9). Далее, согласно (7.1) имеем

$$\int_{t_0}^t \delta u^i(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq \theta, \\ a_i(t - \theta), & \theta \leq t \leq \theta_i, \\ a_i q_i \varepsilon, & \theta_i \leq t \leq t_1, \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^t \delta u^i(\tau) d\tau = a_i q_i \varepsilon (t_1 - \theta) - a_i q_i^2 \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^t \delta u(\tau) d\tau = \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \varepsilon (t_1 - \theta) - \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right) \frac{\varepsilon^2}{2} = 0,$$

что и доказывает замечание.

Пример конкретного пакета со свойством (9) получается из (5) при $p=3$, $q_1=1/3$, $q_2=2/3$, $q_3=1$, $a_1=3v$, $a_2=-3v$, $a_3=v$, v — произвольное число:

$$\delta u(t) = \begin{cases} v, & \theta \leq t < \theta + \frac{1}{3}\varepsilon, \\ -2v, & \theta + \frac{1}{3}\varepsilon \leq t < \theta + \frac{2}{3}\varepsilon, \\ v, & \theta + \frac{2}{3}\varepsilon \leq t < \theta + \varepsilon, \\ 0, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases}$$

3. Пакеты со специальными условиями и условия Колла — Мойера. Пусть теперь пакет удовлетворяет системе

$$\sum_{i=1}^p a_i q_i^\eta = 0, \quad \eta = 1, 2, \dots, k. \quad (10)$$

Такой выбор пакета возможен, так как линейная система (10) всегда разрешима относительно a_1, \dots, a_p . Действительно, определитель матрицы коэффициентов этой системы равен (с точностью до положительного множителя) определителю Вандермонда, который при

сделанных предположениях ($0 < q_j < q_{j+1} \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, p-1$; $q_p = 1$) отличен от нуля. Отсюда же следует, что минимальное число составляющих пакета, для которого могут выполняться условия (10), равно $k+1$, $p = k+1$. При этом система (10) имеет бесчисленное множество отличных от нуля решений.

Нетрудно видеть, что на пакете, удовлетворяющем (10), коэффициент N_z в разложении (8.31) обращается в нуль:

$$N_z(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) = 0, \quad z = 2, 3, \dots, 2k+1,$$

что существенно упрощает структуру второй вариации. Физический смысл условий (10) легко усмотреть из (8.15). Коэффициенты при ε , ε^2 , ..., ε^k в разложении $\delta x(t)$, $\theta + \varepsilon \leq t \leq t_1$, за счет условий (10) на параметры пакета обращаются в нуль. Таким образом, вариация $\delta x(t)$, порожденная пакетом, удовлетворяющим (10), имеет на $[\theta + \varepsilon, t_1]$ порядок ε^{k+1} :

$$\delta x(t) \sim \varepsilon^{k+1}, \quad \theta + \varepsilon \leq t \leq t_1. \quad (11)$$

Если в разложении (8.31) ограничиться членами порядка ε^{2k+1} включительно, то в силу свойства (11) члены второй вариации, определенные на $[\theta + \varepsilon, t_1]$, имеют порядок ε^{2k+2} и могут считаться остаточными. Главные члены в этом случае получаются из разложения по степеням ε только второго слагаемого в правой части (8.1). Предположим, что

$$(-1)^v \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2v}}{dt^{2v}} \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0, \quad v = 1, \dots, k-1.$$

Тогда, по аналогии с предыдущим, из (8.31) $\gamma = 2k+1$ получается необходимое условие оптимальности особого управления:

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \leq 0. \quad (12)$$

З а м е ч а н и е. Этот результат для систем, линейных по управлению, получен в § 5.

§ 10. Исследование второй вариации функционала на пакете вариаций

В этом параграфе общая схема, описанная в § 7, реализуется в полном объеме на примере второй вариации функционала и пакета вариаций первого порядка нулевой степени.

1. Формула разложения второй вариации до ϵ^4 . Разложение (8.31) с точностью до $o(\epsilon^4)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 -\delta^2 J = & M(\theta) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right)^2 \epsilon^2 + \\
 & + \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \left[S(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right) \right] + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right) \Big|_{t=0} \epsilon^3 + \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] \times \right. \\
 & \quad \times \left[S(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) - \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right)^2 \right] + \\
 & \quad + \frac{1}{8} \frac{d^2 M}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right)^2 + M_1 \left[\frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^3 \right) - \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right)^2 \right] \right\} \Big|_{t=0} \epsilon^4 + o(\epsilon^4). \quad (1)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$M = \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u}, \quad (2)$$

$$M_1 = \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} g_2 + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi g_2, \quad (3)$$

n -вектор $g_2(t)$ вычисляется по рекуррентной формуле:

$$g_{k+1} = \frac{d}{dt} g_k - \frac{\partial f}{\partial x} g_k, \quad g_0 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad k = 0, 1, \dots;$$

матрица $\Psi(t)$ размеров $n \times n$ вычисляется по формуле (8.27),

$$\begin{aligned} S(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) &= \\ &= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^p a_i^2 q_i^3 + \frac{1}{3} \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^3 + \sum_{i_1=2}^p \sum_{i_2=1}^{i_1-1} a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^2 q_{i_2}, \\ S_1(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) &= \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^p a_i^2 q_i^4 + \frac{1}{6} \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^4 + \frac{1}{3} \sum_{i_1=2}^p \sum_{i_2=1}^{i_1-1} a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^3 q_{i_2}. \end{aligned}$$

Все производные по времени в (1) предполагаются правосторонними.

Реализация общей идеи использования пакета вариаций приводит в данном случае к следующим необходимым условиям оптимальности особых управлений.

2. Необходимое условие оптимальности на произвольном пакете. Поскольку пакет произволен, то главный член в разложении (1) имеет порядок ε^2 с неотрицательным коэффициентом $\left(\sum_{i=1}^p a_i q_i\right)^2$. Поэтому справедлива

Теорема. Пусть в задаче п. 1 § 5 функция $f(x, u, t)$ определена и непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно. Для оптимальности особого управления $u(t)$ необходимо выполнение неравенства

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 H(x(t), \psi(t), u(t), t)'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} + \\ &+ \frac{\partial f(x(t), u(t), t)'}{\partial u} \Psi(t) \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} \leq 0, \quad t \in T, \quad (4) \end{aligned}$$

где $\Psi(t)$ определена по (8.27).

Из (8.27) с учетом (8.14) легко получить уравнение для $\Psi(t)$:

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial f'}{\partial x} \Psi(t) - \Psi(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad \Psi(t_1) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}.$$

Для иллюстрации теоремы рассмотрим

Пример. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = -ux_1$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $|u| \leq 1$, $T = [0, 1]$, $\Phi(x) = x_2$.

На особом управлении $u = 0$ все условия (9.12) неэффективны:

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0.$$

В данном случае матрица $\Psi(t) \equiv 0$ (поскольку $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$).
Условие (4) не выполняется, так как

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} = 1 \leq 0.$$

Следовательно, особое управление $u = 0$ неоптимально.

3. Необходимое условие оптимальности на пакете с одним условием. Выберем пакет со свойством

$$\sum_{i=1}^p a_i q_i = 0.$$

Тогда члены порядка ϵ^2 в (1) уничтожаются, и главный член при $p = 2$ принимает вид

$$-\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=0} \frac{(1-q_1)^2}{3} a_2^2 \epsilon^3.$$

Поскольку коэффициент $\frac{(1-q_1)^2}{3} a_2^2 \geq 0$ при любых a_2 , q_1 , то отсюда следует необходимое условие оптимальности (9.3).

З а м е ч а н и е. Приведенное доказательство показывает, что условия (9.3), (4) получаются независимо друг от друга.

Для иллюстрации эффективности необходимого условия (9.3) рассмотрим

П р и м е р. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = -x_1^2 + u^4$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| < 1$, $\Phi(x) = x_2$.

Здесь $H = \psi_1 u + x_1^2 - u^4$, $\dot{\psi}_1 = -2x_1$, $\psi_1(1) = 0$. На управлении $u = 0$ функция H достигает строгого максимума, т. е. оно согласно принципу максимума может быть оптимальным. С другой стороны, $u = 0$ — особая экстремаль. Условие (9.3) на нем имеет вид $-2 \geq 0$, т. е. исследуемое управление не может быть оптимальным.

4. Необходимое условие оптимальности особого управления с дополнительным свойством. Нам удалось получить необходимые условия из первых двух слагаемых в (1). Нетрудно видеть, что выделить третье слагаемое в качестве главного члена в (1) за счет выбора

условий только на параметры пакета нельзя. Иными словами, на основе третьего слагаемого из (1) нельзя получить необходимого условия оптимальности, независимого от (9.3), (4).

Предположим, что на оптимальном особом управлении выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \Big|_{t=\theta} = 0. \quad (5)$$

Выберем пакет удовлетворяющим условию

$$S(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right) = 0. \quad (6)$$

Тогда главным членом разложения (1) становится третье слагаемое

$$\frac{1}{2} \frac{dM}{dt} \Big|_{t=\theta} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right) e^3.$$

Нетрудно убедиться, что уже при $p = 2$ существуют ненулевые a_1, a_2 , удовлетворяющие (6):

$$a_1 = \frac{3q_1 - 3 - 2q_1^2 \pm \sqrt{D}}{2q_1^2} a_2,$$

$$D = (3 - 3q_1 + 2q_1^2)^2 - 4q_1 > 0, \quad 0 < q_1 < 1.$$

Коэффициент $\left(\sum_{i=1}^2 a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^2 a_i q_i^2 \right)$ при главном члене разложения (1) для таких вариаций a_1, a_2 неотрицателен.

Таким образом, для оптимальности особого управления, удовлетворяющего (5), необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{dM}{dt} \Big|_{t=\theta+0} \leq 0, \quad \theta \neq t_1. \quad (7)$$

Пусть $u(t)$ — особое управление, непрерывное на T слева. Тогда с помощью пакета, заданного на $(\theta - \varepsilon, \theta]$, придем к условию: для оптимальности

особого управления $u(t)$ со свойством (5) в точке θ необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{t=\theta-0} \geq 0, \quad \theta \neq t_0$$

(здесь под $\frac{d}{dt}$ понимается левосторонняя производная).

Пример. $\dot{x}_1 = u + x_1$, $\dot{x}_2 = u + 1$, $\dot{x}_3 = -u x_1 x_2$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| < 1$, $\Phi(x) = x_3$.

Здесь $u = 0$ — особое управление. Необходимое условие (9.3) на нем выполняется, так как

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 1 + 2t \geq 0, \quad t \in T.$$

Равенство (5) справедливо в начальный момент времени $t = 0$. Применение условия (7) для $t = 0$ приводит к неравенству $\left. \frac{dM}{dt} \right|_{t=0} = 1 \leq 0$. Особое управление $u = 0$ неоптимально.

5. Применение к предыдущему случаю простейшего пакета. Продолжим исследование коэффициента при ϵ^3 . Пусть особое управление удовлетворяет (5). Рассмотрим пакет с $p = 1$. В этом случае $S(a_1, q_1) = S(a_1) = \frac{2}{3} a_1^2 (q_1 = 1)$, и главный член в (1) имеет вид

$$\frac{1}{6} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) + 3 \frac{dM}{dt} \right]_{t=\theta+0} a_1^2 \epsilon^3.$$

Если управление считать непрерывным слева, то с помощью вариации, заданной на $(\theta - \epsilon, \theta]$, получим, что главный член в (1) имеет вид

$$\frac{1}{6} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) - 3 \frac{dM}{dt} \right]_{t=\theta-0} a_1^2 \epsilon^3.$$

Теорема. Пусть вектор-функция $f(x, u, t)$ определена и непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка включительно. Тогда для оптимальности кусочно-непрерывного и кусочно-гладкого особого управления $u(t)$, удовлетворяющего (5), необходимо, чтобы

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) + 3 \frac{dM}{dt} \right]_{t=\theta+0} \leq 0, \quad \theta \neq t_1, \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) - 3 \frac{dM}{dt} \right]_{t=\theta-0} \leq 0, \quad \theta \neq t_0. \quad (9)$$

Проиллюстрируем применение полученных необходимых условий.

Пример. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_3 = -ux$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $\varphi(x) = x_3$, $|u| \leq 1$.

Здесь $H = \psi_1 u + \psi_2(x_1 + x_2) + ux_3$, $\dot{\psi}_1 = -\psi_2$, $\psi_1(1) = 0$, $\dot{\psi}_2 = -\psi_2 - u$, $\psi_2(1) = 0$. Нетрудно убедиться, что $u = 0$ — особое управление в рассматриваемой задаче. Условие Келли (9.3) на нем выполняется:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 2 > 0,$$

условие (4) неэффективно: $M(t) \equiv 0$, $t \in T$. Так как (5) справедливо в любой точке $\theta \in T$, то необходимые условия (8), (9) в данном случае можно проверять на всем интервале T . Они всюду имеют противоречивый вид: $2 \leq 0$, что указывает на неоптимальность рассматриваемого особого управления.

6. Необходимые условия оптимальности для особого управления, вдоль которого условие Келли неэффективно.

Итак, получены все возможные необходимые условия, вытекающие из рассмотрения коэффициентов при ϵ^2 , ϵ^3 в (1). Перейдем теперь к исследованию коэффициента при ϵ^4 . Сделаем заранее следующие предположения: вектор-функция $f(x, u, t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов вместе с производными до четвертого порядка включительно; исследуемые особые управления $u(t)$ кусочно-непрерывны на T вместе с $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t)$.

Выберем пакет так, чтобы

$$\sum_{i=1}^p a_i q_i = 0, \quad \sum_{i=1}^p a_i q_i^2 = 0, \quad (10)$$

и пусть особое управление таково, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right|_{t=\theta} = 0. \quad (11)$$

В этом случае главный член разложения имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_{t=\theta} S_1(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) \epsilon^4. \quad (12)$$

Нетрудно подсчитать, что при условии (10) ($p = 3$)

$$S_1 = - \frac{(1 - q_2)^2 (1 - q_1) (q_1 + q_2)}{6q_2} a_3^2 \leq 0.$$

Поэтому для особого оптимального управления, удовлетворяющего (11), справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right]_{t=\theta+0} \geq 0, \quad \theta \neq t_1. \quad (13)$$

З а м е ч а н и е. 1. Если условие (11) не выполняется, то слагаемое (12) нельзя сделать главным членом разложения (1). Чтобы это имело место, необходимо подобрать такой состав пакета, при котором

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^p a_i q_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^p a_i q_i^2 &= 0, \\ S(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Если бы пакет, удовлетворяющий системе (14), существовал, то из разложения (1) было бы выделено слагаемое (12) в качестве главного члена. В зависимости от знака $S_1(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p)$ мы из (12) получили бы необходимое условие оптимальности, независимое от выполнения равенства (11). Оказывается, что пакета с ненулевыми параметрами, удовлетворяющими системе (14), не существует. Для доказательства этого утверждения достаточно, очевидно, построить пример, в котором особое оптимальное управление, не удовлетворяющее условию (11), не удовлетворяет (13) и ему противоположно.

Пр и м е р. 1. $\dot{x}_1 = ux_2$, $\dot{x}_2 = u - 1$, $\dot{x}_3 = x_1^2$, $x_1(0) = x_3(0) = 0$, $x_2(0) = 2$, $T = [0, 3]$, $|u| < 1$, $\varphi(x) = x_3$.

На особом оптимальном управлении $u = 0$ для $t \neq 2$ условие (11) не выполняется, и выражение

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] = -4(-t + 2)$$

меняет знак на $[0, 3]$, т. е. не может являться необходимым условием оптимальности особых управлений *).

2. Если управление $u(t)$ непрерывно слева и используются левосторонние производные, то вместо (13) получается условие

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right] \right]_{t=\theta-0} \leq 0, \quad \theta \neq t_0.$$

*) Здесь и далее (стр. 123), по существу, предложен новый метод доказательства неразрешимости некоторых систем нелинейных алгебраических уравнений.

7. Развитие предыдущего случая. Пакет удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^p a_i q_i = 0.$$

Особое управление таково, что

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] \Big|_{t=0} = 0. \quad (15)$$

В этом случае из разложения (1) выделяется главный член

$$\frac{1}{8} \left(\frac{d^2 M}{dt^2} - 2M_1 \right) \Big|_{t=0} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right)^2 \epsilon^4. \quad (16)$$

Теорема. Для оптимальности особого управления $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяющего равенству (15), необходимо выполнение неравенства

$$\left(\frac{d^2 M}{dt^2} - 2M_1 \right) \Big|_{t=0} \leq 0, \quad (17)$$

где M , M_1 определяются по (2), (3).

Пример. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_3 = x_2 + u$, $\dot{x}_4 = ux_3$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$, $|u| \leq 1$, $T = [0, 1]$, $\Phi(x) = x_4$.

Исследуем на оптимальность особое управление $u = 0$. На этом управлении

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial H}{\partial u} \right) = -2 < 0,$$

т. е. условие (9.8) выполняется. Условие (4) также оставляет управление $u = 0$ в числе претендентов на оптимальное:

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} = -1 < 0.$$

Применение условия (17) дает неравенство: $2 \leq 0$, т. е. особое управление $u = 0$ неоптимально.

З а м е ч а н и е. Выполнение условий (15) существенно для справедливости неравенства (17). Пакет, выделяющий слагаемое (16) независимо от выполнения (15), должен удовлетворять системе

$$\sum_{i=1}^p a_i q_i = 0,$$

$$S(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) = 0,$$

$$S_1(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) = 0.$$

Оказывается, что данная система не совместна для $a_i \neq 0$. Идея доказательства этого утверждения такая же, как в аналогичном случае из п. 6. Достаточно построить пример, в котором оптимальное особое управление не удовлетворяло бы условию (15) и условию (17). В этом проще всего убедиться на примере.

Пример. $\dot{x}_1 = ux_2$, $\dot{x}_2 = u + 1$, $\dot{x}_3 = x_1^2$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $|u| < 1$, $T = [0, 1]$, $\varphi(x) = x_3$. На особом оптимальном управлении $u = 0$ условие (15) не выполняется и неравенство (17) нарушается.

8. Необходимое условие оптимальности особого управления, удовлетворяющего двум дополнительным условиям. Рассмотрим следующий возможный случай: пакет выбран из условия

$$\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 = 0, \quad (18)$$

особое управление в точке $\theta \in T$ удовлетворяет (5) и (15). Главный член разложения (1) в этом случае равен

$$\frac{1}{3} M_1(\theta) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^3 \right) \varepsilon^4.$$

Коэффициент $\left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^3 \right)$ при условии (18) для $p = 3$ представляется в виде квадратичной формы $-a_1^2 q_1^3 (1 - q_1)^2 - a_1 a_2 q_1 q_2 (1 - q_1)(1 - q_2)(q_1 + q_2) - a_2^2 q_2^3 (1 - q_2)^2$, которая, как нетрудно видеть, является знакопеременной:

$$\begin{aligned} & -q_1^3 (1 - q_1)^2 < 0, \\ & \left| \begin{array}{cc} -q_1^3 (1 - q_1)^2 & -\frac{1}{2} q_1 q_2 (1 - q_1)(1 - q_2)(q_1 + q_2) \\ -\frac{1}{2} q_1 q_2 (1 - q_1)(1 - q_2)(q_1 + q_2) & -q_2^3 (1 - q_2)^2 \end{array} \right| = \\ & = -\frac{1}{4} q_1^2 q_2^2 (1 - q_1)^2 (1 - q_2)^2 (q_1 - q_2)^2 < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана

Теорема. Для оптимальности особого управления, удовлетворяющего (5), (15), необходимо выполнение равенства

$$M_1(\theta) = 0. \quad (19)$$

З а м е ч а н и е. Условие (19) является первым условием типа равенства, полученным для одномерных особых управлений.

Эффективность условия (19) проиллюстрируем на примере.

П р и м е р. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_3 = x_2 + x_3$, $\dot{x}_4 = -ux_3$, $x_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, 4$; $T = [0, 1]$, $|u| \leq 1$, $\varphi(x) = x_4$.

Здесь $u = 0$ — особое управление. Вдоль него

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \equiv 0,$$

т. е. условия (4) (9.3) неэффективны. Условие (19) не выполняется ($M_1 = 1 \neq 0$). Управление $u = 0$ неоптимально.

9. Еще одно необходимое условие оптимальности.

Рассмотрим пакет с $p = 1$ и предположим, что на особом управлении выполняется (5) и

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) + 3 \frac{dM}{dt} \right]_{t=\theta+0} = 0. \quad (20)$$

Главным членом разложения становится выражение

$$\frac{1}{8} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] + \frac{d^2 M}{dt^2} + \frac{2}{3} M_1 \right\}_{t=\theta+0} a_1^2 e^4.$$

Теорема. Для оптимальности особого управления, удовлетворяющего (5), (20), необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] + \frac{d^2 M}{dt^2} + \frac{2}{3} M_1 \right\} \Big|_{t=\theta} \leq 0, \quad \theta \neq t_1. \quad (21)$$

З а м е ч а н и е. Если непрерывное слева особое управление удовлетворяет (5) и, кроме того,

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) - 3 \frac{dM}{dt} \right] \Big|_{t=\theta-0} = 0,$$

то для оптимальности управления $u(t)$ необходимо, чтобы было

$$\left\{ -\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] + 3 \frac{d^2 M}{dt^2} + 2M_1 \right\} \Big|_{t=\theta-0} \leq 0, \quad \theta \neq t_0. \quad (22)$$

Эффективность полученных условий проиллюстрируем на примере.

П р и м е р $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_3 = x_2 + x_3$, $\dot{x}_4 = -ux_3$, $x_1(0) = \dots = x_4(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| \leq 1$, $\varphi(x) = x_4$.

Вдоль особого управления $u = 0$ условие (21) имеет вид $2/3 \leq 0$; условие (22): $2 \leq 0$, т. е. рассматриваемое управление неоптимально.

§ 11. Исследование второй вариации функционала на пакете вариаций второго порядка

Проиллюстрируем эффективность применения пакета второго порядка.

1. Вариация траектории. Рассмотрим разложение второй вариации (8.1) по степеням параметра ε , когда в качестве вариации управления выбран пакет второго порядка в точке $\theta \in T$, $\theta \neq t_1$:

$$\delta u(t) = \sum_{i_1=1}^p \delta^1 u^{i_1}(t) + \sum_{i_2=1}^q \delta^2 u^{i_2}(t), \quad t \in T, \quad (1)$$

где

$$\delta^1 u^{i_1}(t) = \begin{cases} a_{i_1}, & \theta \leq t < \theta'_{i_1}, \\ 0, & t \in [\theta, \theta'_{i_1}), \end{cases}$$

$$\delta^2 u^{i_2}(t) = \begin{cases} b_{i_2}, & \theta \leq t < \theta''_{i_2}, \\ 0, & t \in [\theta, \theta''_{i_2}), \end{cases}$$

$$a_{i_1}, \quad b_{i_2} = \text{const}, \quad \theta'_{i_1} = \theta + \varepsilon'_{i_1}, \quad \varepsilon'_{i_1} = q_{i_1} \varepsilon;$$

$$\theta''_{i_2} = \theta + \varepsilon''_{i_2}, \quad \varepsilon''_{i_2} = p_{i_2} \varepsilon^2.$$

Вариация $\delta x^{i_1}(t)$, $\theta \leq t \leq \theta + \varepsilon$, соответствующая в силу (1.16) вариации $\delta^1 u^{i_1}(t)$, представляется формулами (8.16), (8.17). Для $\delta^2 u^{i_2}(t)$ имеем аналогичным образом

$$\bar{\delta} x_1^{i_2}(t) = \sum_{m=1}^{\nu} \bar{K}_m^{i_2} (t - \theta)^m + o_1((t - \theta)^\nu), \quad \theta \leq t \leq \theta''_{i_2},$$

$$\bar{\delta} x_2^{i_2}(t) = \sum_{\mu=0}^{\nu-2} \bar{L}_\mu^{i_2} (t - \theta)^\mu + o_2((t - \theta''_{i_2})^\nu) + o(\varepsilon''_{i_2}^\nu),$$

$$\theta''_{i_2} \leq t \leq \theta + \varepsilon, \quad (2)$$

где

$$\bar{K}_m^{i_2} = \frac{1}{m!} A_{m-1} b_{i_2}, \quad \bar{L}_\mu^{i_2} = \sum_{\eta=1}^{\nu-\mu} D_{\eta\mu} b_{i_2} \varepsilon''_{i_2}{}^\eta.$$

В момент $t = \theta + \varepsilon$ в силу (1) получаем

$$\delta x(\theta + \varepsilon) = \sum_{i_1=1}^p \delta x_1^{i_1}(\theta + \varepsilon) + \sum_{i_2=1}^q \bar{\delta} x_2^{i_2}(\theta + \varepsilon).$$

Подставим сюда значения для $\delta x_2^{i_1}(\theta + \varepsilon)$ и $\bar{\delta} x_2^{i_2}(\theta + \varepsilon)$ из (8.17), (2); тогда

$$\delta x(\theta + \varepsilon) = \sum_{\alpha=1}^{\gamma} c_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} + \sum_{\beta=2}^{\gamma} \bar{c}_{\beta} \varepsilon^{\beta} + o(\varepsilon^{\gamma}), \quad (3)$$

где

$$c_{\alpha} = \sum_{\mu=0}^{\alpha-1} \sum_{\substack{\eta=1 \\ \mu+\eta=\alpha}}^{\alpha} D_{\eta\mu} \left(\sum_{i_1=1}^p a_{i_1} q_{i_1}^{\eta} \right),$$

$$\bar{c}_{\beta} = \sum_{\mu=0}^{\beta-2} \sum_{\substack{\eta=1 \\ \mu+2\eta=\beta}}^{[\beta/2]} D_{\eta\mu} \left(\sum_{i_2=1}^q b_{i_2} p_{i_2}^{\eta} \right).$$

На $[\theta + \varepsilon, t_1]$ вариация $\delta x(t)$ описывается формулой (8.13), в которой $\delta x(\theta + \varepsilon)$ вычисляется по (3).

2. Вторая вариация функционала. Вторую вариацию (8.1) для $\delta u(t)$ в виде (1) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} -\delta^2 J = & \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon^2} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt + \\ & + \int_{\theta+\varepsilon^2}^{\theta+\varepsilon} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt + \\ & + \int_{\theta+\varepsilon}^{t_1} \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x dt - \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \delta x(t_1). \quad (4) \end{aligned}$$

Ясно, что разложение $\delta^2 J$ по степеням ε на пакете второго порядка (1) будет содержать уже известное разложение (8.31) для пакета первого порядка. Члены, входящие в разложение (8.31), в дальнейшем не выписываются.

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (4):

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon^2} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt \quad (5)$$

на отрезке $[\theta''_{s-1}, \theta''_s] \subset [\theta, \theta + \varepsilon^2]$, $s = 1, \dots, q$; $\theta''_0 = \theta$, $\theta''_q = \theta + \varepsilon^2$. Для этого «частичного» отрезка

имеем

$$\begin{aligned}\delta u(t) &= \sum_{i=1}^p a_{i_1} + \sum_{i=s}^q b_i, \\ \delta x(t) &= \sum_{i=1}^p \delta x_{i_1}^i(t) + \sum_{i=s}^q \bar{\delta} x_{i_1}^i(t) + \sum_{i=1}^{s-1} \bar{\delta} x_2^i(t), \\ \theta_{s-1}'' &\leq t \leq \theta_s''.\end{aligned}$$

Подставим $\delta u(t)$, $\delta x(t)$ в (5) и вычислим аналогично проделанному в § 8 интеграл

$$\int_{\theta_{s-1}''}^{\theta_s''} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt.$$

Далее, используя равенства ($\lambda(i)$ — произвольная функция)

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^p \sum_{i=s}^p \lambda(i) (\varepsilon_s'' - \varepsilon_{s-1}'') &= \sum_{i=1}^p \lambda(i) \varepsilon_i'', \\ \sum_{s=2}^p \sum_{i=1}^{s-1} \lambda(i) (\varepsilon_s'' - \varepsilon_{s-1}'') &= \sum_{i=1}^p \lambda(i) \varepsilon_p'' - \sum_{i=1}^p \lambda(i) \varepsilon_i'',\end{aligned}$$

приходим к результату

$$\begin{aligned}&\int_{\theta}^{\theta + \varepsilon^2} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt = \\&= \sum_{s=1}^q \int_{\theta_{s-1}''}^{\theta_s''} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt = \\&= \sum_{z=3}^y \sum_{\substack{m_1=1 \\ m_1+m_2+j+1=z}}^{z-2} \sum_{m_2=1}^{z-2} \sum_{j=0}^{z-3} \frac{1}{m_1! m_2!} A'_{m_1-1} P_j A_{m_2-1} \times \\&\times \left[\left(\sum_{i=1}^p a_i \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^z \right) \right] \frac{\varepsilon^{2z}}{z} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \sum_{z=3}^{\gamma} \sum_{\substack{m=1 \\ m+\mu+\eta+j+l=z}}^{z-2} \sum_{\mu=0}^{z-3} \sum_{\eta=1}^{z-2} \sum_{j=0}^{z-3} \frac{1}{m!} D'_{\eta\mu} P_j A_{m-1} \times \\
 & \times \left[\left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta} \right) - \left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^z \right) \right] \frac{\varepsilon^{2z}}{z-\eta} + \\
 & + \sum_{z=3}^{\gamma} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+\eta_1+\eta_2+l=z}}^{z-3} \sum_{\mu_2=0}^{z-3} \sum_{j=0}^{z-3} \sum_{\eta_1=1}^{z-2} \sum_{\eta_2=1}^{z-2} \frac{1}{z-\eta_1-\eta_2} D'_{\eta_1\mu_1} P_j D_{\eta_2\mu_2} \times \\
 & \times \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_1} \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_2} \right) \varepsilon^{2z} + 2 \sum_{z=2}^{\gamma} \sum_{\substack{m=1 \\ m+j+l=z}}^{z-1} \sum_{j=0}^{z-2} \frac{1}{m!} Q'_j A_{m-1} \times \\
 & \times \left[\left(\sum_{i=1}^p a_i \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^z \right) \right] \frac{\varepsilon^{2z}}{z} + \\
 & + 2 \sum_{z=2}^{\gamma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+j+\eta+l=z}}^{z-2} \sum_{j=0}^{z-2} \sum_{\eta=1}^{z-1} Q'_j D_{\eta\mu} \left[\left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta} \right) - \right. \\
 & \left. - \left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^z \right) \right] \frac{\varepsilon^{2z}}{z-\eta} + \Sigma_1 + o(\varepsilon^{2\gamma}), \quad (6)
 \end{aligned}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{z=2}^{\gamma} (\bar{V}_z + \bar{W}_z) \varepsilon^{2z},$$

а коэффициенты \bar{V}_z , \bar{W}_z подсчитываются по формулам (8.23), (8.24), записанным для пакета

$$\delta u(t) = \sum_{i=1}^q \delta^2 u^i(t), \quad t \in T,$$

(т. е. в (8.23), (8.24) следует заменить a_i , q_i , p на b_i , p_i , q соответственно).

Перейдем к рассмотрению второго слагаемого из (4);

$$\int_{\theta+\varepsilon^2}^{\theta+\varepsilon} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt. \quad (7)$$

Пусть $[\theta'_{s-1}, \theta'_s] \subset [\theta + \varepsilon^2, \theta + \varepsilon]$, $s = 1, \dots, p$; $\theta'_0 = \theta + \varepsilon^2$, $\theta'_p = \theta + \varepsilon$. На этом отрезке

$$\delta u(t) = \sum_{i=s}^p a_i,$$

$$\delta x(t) = \sum_{i_2=1}^q \bar{\delta} x_2^{i_2}(t) + \sum_{i=s}^p \delta x_1^i(t) + \sum_{i=1}^{s-1} \delta x_2^i(t), \quad \theta'_{s-1} \leq t \leq \theta'_s.$$

Подставляя эти выражения в (7) и суммируя результат по $s = 1, \dots, p$, после несложных преобразований получаем разложение

$$\begin{aligned} & \int_{\theta+\varepsilon^2}^{\theta+\varepsilon} \left(\delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \delta x \delta u \right) dt = \\ &= \sum_{z=5}^{\gamma} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+2(\eta_1+\eta_2)+1=z}}^{z-5} \sum_{\substack{\mu_2=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+2(\eta_1+\eta_2)+1=z}}^{z-5} \sum_{\substack{j=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+2(\eta_1+\eta_2)+1=z}}^{z-5} \sum_{\substack{\eta_1=1 \\ \mu_1+\mu_2+j+2(\eta_1+\eta_2)+1=z}}^{\left[\frac{z-3}{2}\right]} \sum_{\eta_2=1}^{\left[\frac{z-3}{2}\right]} D'_{\eta_1 \mu_1} P_j D_{\eta_2 \mu_2} \times \\ & \times \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_1} \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_2} \right) \frac{\varepsilon^z}{z - 2(\eta_1 + \eta_2)} + \\ & + 2 \sum_{z=4}^{\gamma} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+2\eta_1+\eta_2+1=z}}^{z-4} \sum_{\substack{\mu_2=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+2\eta_1+\eta_2+1=z}}^{z-4} \sum_{\substack{j=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+2\eta_1+\eta_2+1=z}}^{z-4} \sum_{\eta_1=1}^{\left[\frac{z-2}{2}\right]} \sum_{\eta_2=1}^{z-3} D'_{\eta_1 \mu_1} P_j D_{\eta_2 \mu_2} \times \\ & \times \left[\left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_1} \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta_2} \right) - \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_1} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{z-2\eta_1} \right) \right] \frac{\varepsilon^z}{z - \eta_2 - 2\eta_1} - \\ & - \sum_{z=3}^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+\eta_1+\eta_2+1=z}}^{z-3} \sum_{\substack{\mu_2=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+\eta_1+\eta_2+1=z}}^{z-3} \sum_{\substack{j=0 \\ \mu_1+\mu_2+j+\eta_1+\eta_2+1=z}}^{z-3} \sum_{\eta_1=1}^{z-2} \sum_{\eta_2=1}^{z-2} D'_{\eta_1 \mu_1} P_j D_{\eta_2 \mu_2} \times \\ & \times \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_1} \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_2} \right) \frac{\varepsilon^{2z}}{z - \eta_1 - \eta_2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \sum_{z=3}^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+m+j+\eta+l=z}}^{z-3} \sum_{m=1}^{z-2} \sum_{\substack{j=0 \\ \eta=1}}^{z-3} \sum_{\eta=1}^{z-2} \frac{1}{m!} D'_{\eta\mu} P_j A_{m-1} \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^\eta \right) \times \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \frac{e^{2z}}{z-\eta} + \\
& + 2 \sum_{z=4}^{\gamma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+m+j+2\eta+l=z}}^{z-4} \sum_{m=1}^{z-3} \sum_{\substack{j=0 \\ \eta=1}}^{z-4} \sum_{\eta=1}^{\left[\frac{z-2}{2}\right]} \frac{1}{m!} D'_{\eta\mu} P_j A_{m-1} \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^\eta \right) \times \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{z-2\eta} \right) \frac{e^z}{z-2\eta} - \\
& - \sum_{z=3}^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \sum_{\substack{m_1=1 \\ m_1+m_2+j+l=z}}^{z-2} \sum_{m_2=1}^{z-2} \sum_{j=0}^{z-3} \frac{1}{m_1! m_2!} A'_{m_1-1} P_j A_{m_2-1} \left(\sum_{i=1}^p a_i \right)^2 \frac{e^{2z}}{z} + \\
& + 2 \sum_{z=3}^{\gamma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+j+2\eta+l=z}}^{z-3} \sum_{j=0}^{z-3} \sum_{\eta=1}^{\left[\frac{z-1}{2}\right]} Q'_j D_{\eta\mu} \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^\eta \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{z-2\eta} \right) \frac{e^z}{z-2\eta} - \\
& - 2 \sum_{z=2}^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+j+\eta+l=z}}^{z-2} \sum_{j=0}^{z-2} \sum_{\eta=1}^{z-1} Q'_j D_{\eta\mu} \left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^z \right) \frac{e^{2z}}{z-\eta} - \\
& - 2 \sum_{z=2}^{\left[\frac{\gamma}{2}\right]} \sum_{m=1}^{z-1} \sum_{j=0}^{z-2} \frac{1}{m!} Q'_j A_{m-1} \left(\sum_{i=1}^p a_i \right)^2 \frac{e^{2z}}{z} + \Sigma_2 + o(e^\gamma), \quad (8)
\end{aligned}$$

где Σ_2 совпадает с правой частью выражения (8.22).

Рассмотрим последние два слагаемых в правой части (4). Учитывая разложение (3) и обозначения (8.27),

(8.28), получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta+\varepsilon}^{t_1} \delta x' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x dt - \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \delta x(t_1) = \\
& = \sum_{z=4}^{\gamma} \sum_{\beta_1=0}^{z-4} \sum_{\beta_2=0}^{z-4} \sum_{\mu_1=0}^{z-4} \sum_{\mu_2=0}^{z-4} \sum_{\eta_1=1}^{\left[\frac{z-2}{2}\right]} \sum_{\eta_2=1}^{\left[\frac{z-2}{2}\right]} \frac{1}{\beta_1! \beta_2!} D'_{\eta_1 \mu_1} G'_{\beta_1} \Psi(\theta) \times \\
& \quad \times G_{\beta_2} D_{\eta_2 \mu_2} \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_1} \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_2} \right) \varepsilon^z + \\
& + 2 \sum_{z=3}^{\gamma} \sum_{\beta_1=0}^{z-3} \sum_{\beta_2=0}^{z-3} \sum_{\mu_1=0}^{z-3} \sum_{\mu_2=0}^{z-3} \sum_{\eta_1=1}^{z-2} \sum_{\eta_2=1}^{\left[\frac{z-1}{2}\right]} \frac{1}{\beta_1! \beta_2!} D'_{\eta_1 \mu_1} G'_{\beta_1} \times \\
& \quad \times \Psi(\theta) G_{\beta_2} D_{\eta_2 \mu_2} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta_1} \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_2} \right) \varepsilon^z - \\
& - \sum_{z=5}^{\gamma} \sum_{\beta_1=0}^{z-5} \sum_{\beta_2=0}^{z-5} \sum_{\mu_1=0}^{z-5} \sum_{\mu_2=0}^{z-5} \sum_{\eta_1=1}^{\left[\frac{z-3}{2}\right]} \sum_{\eta_2=1}^{\left[\frac{z-3}{2}\right]} \sum_{\nu=1}^{z-4} \frac{1}{\nu! \beta_1! \beta_2!} D'_{\eta_1 \mu_1} \times \\
& \quad \times G'_{\beta_1} F^{-1'}(\theta) \frac{d^{\nu-1} \bar{K}(\theta)}{dt^{\nu-1}} F^{-1}(\theta) G_{\beta_2} D_{\eta_2 \mu_2} \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_1} \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_2} \right) \varepsilon^z - \\
& - 2 \sum_{z=4}^{\gamma} \sum_{\beta_1=0}^{z-4} \sum_{\beta_2=0}^{z-4} \sum_{\mu_1=0}^{z-4} \sum_{\mu_2=0}^{z-4} \sum_{\eta_1=1}^{z-3} \sum_{\eta_2=1}^{\left[\frac{z-2}{2}\right]} \sum_{\nu=1}^{z-3} \frac{1}{\nu! \beta_1! \beta_2!} D'_{\eta_1 \mu_1} \times \\
& \quad \times G'_{\beta_1} F^{-1'}(\theta) \frac{d^{\nu-1} \bar{K}(\theta)}{dt^{\nu-1}} F^{-1}(\theta) G_{\beta_2} D_{\eta_2 \mu_2} \times \\
& \quad \times \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^{\eta_1} \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^{\eta_2} \right) \varepsilon^z + \Sigma_3 + o(\varepsilon^\gamma), \quad (9)
\end{aligned}$$

где Σ_3 — правая часть выражения (8.29).

Складывая выражения (6), (8), (9) и приводя подобные члены, получим разложение второй вариации $\delta^2 J$ на пакете второго порядка. Выпишем это разложение с точностью до $o(\epsilon^4)$:

$$\begin{aligned} -\delta^2 J = & M(\theta) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right)^2 \epsilon^2 + \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \times \right. \\ & \times \left[S(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right) + \\ & + 2M \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i \right) \Big|_{t=0} \epsilon^3 + \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] \times \right. \\ & \times \left[S_1(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) - \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{3} M_1 \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^3 \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{d^2 M}{dt^2} - 2M_1 \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) + \frac{dM}{dt} \right] \times \\ & \times \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i \right) + M \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i \right)^2 \Big|_{t=0} \epsilon^4 + o(\epsilon^4). \quad (10) \end{aligned}$$

3. Необходимое условие оптимальности. Из (10), очевидно, могут быть получены все необходимые условия оптимальности, приведенные в § 10. Новое необходимое условие, отличное от выведенных ранее, получается из рассмотрения коэффициента при ϵ^4 в (10) при следующих предположениях. Пусть пакет удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^p a_i q_i = 0, \quad (11)$$

а исследуемое особое управление таково, что

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] \Big|_{t=0} = 0. \quad (12)$$

Тогда разложение (10) принимает вид

$$-\delta^2 J = \frac{1}{8} \left[\left(\frac{d^2 M}{dt^2} - 2M_1 \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right)^2 + \right. \\ \left. + 4 \frac{dM}{dt} \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i \right) + 8M \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i \right)^2 \right] \Big|_{t=0} \varepsilon^4 + o(\varepsilon^4),$$

При условии (11) сумма $\sum_{i=1}^p a_i q_i^2$ может принимать любые действительные значения. Таким образом, требование $\delta^2 J \geq 0$ эквивалентно условию неположительности квадратичной формы:

$$\left(\frac{d^2 M}{dt^2} - 2M_1 \right) \Big|_{t=0} \eta_1^2 + 4 \frac{dM}{dt} \Big|_{t=0} \eta_1 \eta_2 + 8M(0) \eta_2^2 \leq 0. \quad (13)$$

Из (13) вытекают три условия на коэффициенты форм:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 M}{dt^2} - 2M_1 \right) \Big|_{t=0} &\leq 0, \\ M(0) &\leq 0, \\ \left[\left(\frac{dM}{dt} \right)^2 - 2 \left(\frac{d^2 M}{dt^2} - 2M_1 \right) M \right] \Big|_{t=0} &\leq 0. \end{aligned}$$

Первые два неравенства совпадают с ранее выведенными условиями (10.17), (10.4); последнее доставляет новое необходимое условие оптимальности, полученное на основе пакета второго порядка.

Теорема. Пусть вектор-функция $f(x, u, t)$ определена и непрерывна вместе с производными по всем своим аргументам до четвертого порядка включительно. Для оптимальности особого управления, удовлетворяющего (12), необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\left[4MM_1 + \left(\frac{dM}{dt} \right)^2 - 2M \frac{d^2 M}{dt^2} \right] \Big|_{t=0} \leq 0, \quad (14)$$

где M, M_1 определяются по (10.2), (10.3).

Проиллюстрируем применение данного условия.

Пример. $\dot{x}_1 = -x_3$, $\dot{x}_2 = u + 1$, $\dot{x}_3 = u - 1$, $\dot{x}_4 = (u - 1)(x_2 x_3 + x_1)$.
 $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| < 2$, $\varphi(x) = x_4$.
 Имеем $H = -\psi_1 x_3 + \psi_2(u + 1) + \psi_3(u - 1) - (u - 1)(x_2 x_3 + x_1)$,
 $\dot{\psi}_1 = u - 1$, $\psi_1(1) = 0$, $\dot{\psi}_2 = (u - 1)x_3$, $\psi_2(1) = 0$, $\dot{\psi}_3 = (u - 1)x_2 + \psi_1$,
 $\psi_3(1) = 0$.

Нетрудно проверить, что управление $u(t) \equiv 1$ является особым на T . Исследуем его на оптимальность. Последовательность (9.12) необходимых условий в данном случае неэффективна:

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

условие (10.4) оставляет это управление в числе претендентов на оптимальное:

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} = -2t \leq 0, \quad t \in [0, 1],$$

условие (10.17)) неэффективно: $\frac{d^2 M}{dt^2} - 2M_1 \equiv 0$. Применение условия (14) приводит к противоречивому результату ($4 \leq 0$), т. е. особое управление $u(t) \equiv 1$ неоптимально.

Комментарии к главе II

§ 1. Условие Лежандра — Клебша можно найти в любом учебнике по вариационному исчислению. В теории оптимальных процессов оно почти не упоминается, так как для типичных задач, рассматриваемых этой теорией, условие Лежандра — Клебша является простым следствием принципа максимума. В теории оптимальных особых управлений условие Лежандра — Клебша играет большую роль не только из-за места этого условия в самом определении особого управления, но, главным образом, из-за схемы получения его из второй вариации. Из дальнейшего будет видно, что многие методы исследования особых управлений состоят в том, чтобы случаи с особым управлением свести к ситуации, из которой получается условие Лежандра — Клебша.

§ 2. Метод Келли [2] впервые описан в 1964 г. Мы не следовали полностью цитируемой работе. Той интерпретации основной идеи метода, которая содержится в данном параграфе, в оригинальной работе Г. Келли нет. Вполне возможно, что автор исходил из других представлений.

Упоминание о А. Брайсоне содержится в работе Г. Келли [2], хотя там нет ссылок на его работы по особым управлениям.

Связь условия Келли с методом вычисления особых управлений отмечена в обзоре авторов и В. А. Срочко, Н. В. Тарасенко [1, 2].

§ 3. Вариация Коппа — Мойера (3.3) отличается от оригинальной, построенной в работе Р. Коппа, Г. Мойера [1]. В последней работе она довольно сложна. Но опять, как и в случае с вариацией Келли, вариации (3.3) и оригинальная вариация Коппа — Мойера эквивалентны с точки зрения нашей интерпретации основной идеи метода Келли. Можно думать, что структура вариации из работы

Р. Коппа, Г. Мойера [1] во многом определилась взглядом авторов на вариацию как на аналог δ -функции и ее производных.

§ 4. Метод этого параграфа изложен в работе Г. Келли, Р. Коппа, Г. Мойера [1]. Из-за своей простоты метод удобен для доказательства результатов §§ 2, 3. Он легко обобщается на многомерные особые управления (см. гл. III). Новых результатов для одномерного случая с помощью этого метода пока не получено, но, видимо, метод преобразований в пространствах вариаций еще не исчерпал себя.

§ 5. Формула приращения (5.5) наряду с другими доказана Р. Габасовым [1]. Вторая вариация из нее получается элементарно. Некоторые элементы схемы преобразования второй вариации приведены Г. Келли, Р. Коппом, Г. Мойером [1] и по заявлению авторов последней работы сообщены им Г. Роббинсом. Окончательная форма второй вариации в § 5 отличается от той, что дана Г. Келли, Р. Коппом, Г. Мойером [1].

§ 6. Метод преобразований в пространстве состояний является частным случаем метода кратных максимумов В. И. Гурмана [3].

§ 7. Идея пакета вариаций высказана авторами [2]. Первые результаты в этом направлении доложены на V Международной конференции по нелинейным колебаниям (Киев, 1969 г.).

Большую работу по развитию техники пакета вариаций выполнил В. А. Срочко [2].

§§ 8—11. Изложение материала здесь следует в основном работе В. А. Срочко [2].

ГЛАВА III

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ

В этой главе основные методы, описанные в гл. II для исследования одномерного особого управления, развиваются на многомерный случай. Следует отметить, что это обобщение наряду с формальными моментами содержит ряд принципиально новых явлений, неизвестных ранее.

§ 1. Метод преобразования многомерных вариаций

Техника преобразования в пространствах вариаций, описанная в § 4 гл. II, довольно просто может быть перенесена на многомерные управления.

1. Постановка задачи. Пусть на траекториях системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ x &= \{x_1, \dots, x_n\}', \quad u = \{u_1, \dots, u_r\}'\end{aligned}\quad (1)$$

с помощью кусочно-непрерывных управлений, принимающих значения из открытого множества

$$|u_i| < 1, \quad i = 1, \dots, r,$$

минимизируется функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1)).$$

В этом случае, как известно (§ 1 гл. II), вдоль оптимального управления $u^0(t)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} = 0 \quad (2)$$

(уравнение Эйлера),

$$v' \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u^2} v \leq 0 \quad (3)$$

(условие Лежандра — Клебша).

Как уже отмечалось в п. 7 § 1 гл. II, важным классом задач с особыми управлениями являются задачи, в

которых уравнение (1) содержит некоторые компоненты управления линейно. Если u_r в (1) входит линейно, то вдоль оптимального управления

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_r^2} \equiv 0. \quad (4)$$

Поэтому определители всех 2×2 -матриц

$$\left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 H}{\partial u_i^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_r} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u_r \partial u_i} & 0 \end{array} \right\}, \quad i = 1, \dots, r-1,$$

равны

$$-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_r \partial u_i}\right)^2, \quad i = 1, \dots, r-1.$$

Отсюда и из условия (3) получаем

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_r \partial u_i} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, r-1.$$

Следовательно, матрица $\partial^2 H / \partial u^2$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} R_H & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

где R_H — блок размеров $(r-1) \times (r-1)$.

Аналогично, если в правую часть уравнения (1) входят линейно $r-m$, $m \leq r$, компонент управления (пусть для определенности ими будут u_{m+1}, \dots, u_r), то матрица $\partial^2 H / \partial u^2$ представима в виде (5) с неособым $m \times m$ -блоком R_H .

2. Преобразование второй вариации. В общем случае, когда матрица вторых производных $\partial^2 H / \partial u^2$ — особая ранга m , $m < r$, существует такое невырожденное преобразование G вариаций управления

$$\delta u = G \delta v, \quad (6)$$

что матрица $\bar{R} = G' R G$ имеет вид

$$\bar{R} = \begin{Bmatrix} R_H & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Здесь R_H — $m \times m$ -блок ранга m .

Запишем в новых обозначениях выражение (II. 1.18) для второй вариации функционала. Имеем

$$\begin{aligned} \delta^2 J = \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x(t_1) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} (\delta x' P \delta x + 2 \delta x' Q \delta u + \delta u' R \delta u) dt, \quad (7) \\ P = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad Q = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}, \quad R = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}, \end{aligned}$$

где вариации δx , δu связаны линейным дифференциальным уравнением

$$\delta \dot{x} = A \delta x + B \delta u, \quad \delta x(t_0) = 0, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}. \quad (8)$$

После замены (6) уравнение в вариациях (8) принимает вид

$$\delta \dot{x} = A \delta x + \bar{B} \delta v, \quad \delta x(t_0) = 0, \quad \bar{B} = BG,$$

и вторая вариация (7) такова:

$$\begin{aligned} \delta^2 J = \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x(t_1) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} (\delta x' \bar{P} \delta x + 2 \delta x' \bar{Q} \delta v + \delta v' \bar{R} \delta v) dt, \quad (9) \\ \bar{P} = P, \quad \bar{Q} = QG, \quad \bar{R} = G'RG. \end{aligned}$$

Сделаем следующее разбиение:

$G = \{G_H, G_0\}$, где $G_H - r \times m$ -матрица, $G_0 - r \times (r - m)$ -матрица,

$$\bar{Q} = \{\bar{Q}_H, \bar{Q}_0\} = \{QG_H, QG_0\},$$

$$\bar{B} = \{\bar{B}_H, \bar{B}_0\} = \{BG_H, BG_0\},$$

где $\bar{Q}_H, \bar{B}_H - n \times m$ -матрицы, $\bar{Q}_0, \bar{B}_0 - n \times (r - m)$ -матрицы, $\delta v = \{\delta v_H, \delta v_0\}'$, где $\delta v_H - m$ -вектор, $\delta v_0 - (r - m)$ -вектор.

Приступим к непосредственному обобщению метода преобразований § 4 гл. II.

Поскольку вариации δv_H соответствуют невырожденной части матрицы \bar{K} , то их оставим без изменения. К вариациям δv_0 применим преобразование (II.4.4). Заменяем также вариации δx на δx_1 с таким расчетом, чтобы дифференциальное уравнение для δx_1 не содержало δv_0 . Положим

$$\left. \begin{aligned} \delta u_1 &= \{\delta u_{1H}, \delta u_{10}\}', & \delta u_{1H} &= \delta v_H, \\ \delta u_{10}(t) &= \int_{t_0}^t \delta v_0(t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\delta x_1 = \delta x - \bar{B}_0 \delta u_{10}. \quad (11)$$

Легко проверить, что

$$\delta \dot{x}_1 = A \delta x_1 + B_1 \delta u_1, \quad \delta x_1(t_0) = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \{B_{1H}, B_{10}\} = \{\bar{B}_H, A\bar{B}_0 - \dot{\bar{B}}_0\} = \\ &= \left\{ BG_H, ABG_0 - \frac{d}{dt}(BG_0) \right\}. \end{aligned}$$

Вычислим вторую вариацию $\delta^2 J$ в новых переменных

Будем в дальнейшем считать, что вариации δv_0 обладают свойством

$$\delta u_{10}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \delta v_0(t) dt = 0. \quad (13)$$

В силу (13) из (11) имеем $\delta x_1(t_1) = \delta x(t_1)$. Первое слагаемое в правой части (9) остается, таким образом, без изменения. Для остальных слагаемых на основании (10), (11) получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta x' \bar{P} \delta x dt &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta x_1 + \bar{B}_0 \delta u_{10})' \bar{P} (\delta x_1 + \bar{B}_0 \delta u_{10}) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta x_1' \bar{P} \delta x_1 + 2 \delta x_1' \bar{P} \bar{B}_0 \delta u_{10} + \delta u_{10}' \bar{B}_0' \bar{P} \bar{B}_0 \delta u_{10}) dt, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
2 \int_{t_0}^{t_1} \delta x' \bar{Q} \delta v dt &= 2 \int_{t_0}^{t_1} (\delta x_1 + \bar{B}_0 \delta u_{10})' \{ \bar{Q}_H, \bar{Q}_0 \} \left\{ \frac{\delta u_{1H}}{\delta \dot{u}_{10}} \right\} dt = \\
&= 2 \int_{t_0}^{t_1} (\delta x_1 + \bar{B}_0 \delta u_{10})' (\bar{Q}_H \delta u_{1H} + \bar{Q}_0 \delta \dot{u}_{10}) dt = \\
&= 2 \int_{t_0}^{t_1} \delta x_1' \bar{Q}_H \delta u_{1H} dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \delta u_{10}' \bar{B}_0' \bar{Q}_H \delta u_{1H} dt + \\
&\quad + 2 \int_{t_0}^{t_1} \delta x_1' \bar{Q}_0 \delta \dot{u}_{10} dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \delta u_{10}' \bar{B}_0' \bar{Q}_0 \delta \dot{u}_{10} dt. \quad (15)
\end{aligned}$$

Преобразуем два последних члена в правой части (15) интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}
2 \int_{t_0}^{t_1} \delta x_1' \bar{Q}_0 \delta \dot{u}_{10} dt &= 2 \delta x_1' \bar{Q}_0 \delta u_{10} \Big|_{t_0}^{t_1} - \\
&\quad - 2 \int_{t_0}^{t_1} \delta \dot{x}_1' \bar{Q}_0 \delta u_{10} dt - 2 \int_{t_0}^{t_1} \delta x_1' \bar{Q}_0' \delta u_{10} dt. \quad (16)
\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
2 \int_{t_0}^{t_1} \delta u_{10}' \bar{B}_0' \bar{Q}_0 \delta \dot{u}_{10} dt &= \\
&= 2 \delta u_{10}' \bar{B}_0' \bar{Q}_0 \delta u_{10} \Big|_{t_0}^{t_1} - 2 \int_{t_0}^{t_1} \delta \dot{u}_{10}' \bar{B}_0' \bar{Q}_0 \delta u_{10} dt - \\
&\quad - 2 \int_{t_0}^{t_1} \delta u_{10}' \frac{d}{dt} (\bar{B}_0' \bar{Q}_0) \delta u_{10} dt. \quad (17)
\end{aligned}$$

Терминальные члены в (16), (17) равны нулю в силу (10), (13). Если предположить, что

$$\bar{B}_0' \bar{Q}_0 = \bar{Q}_0' \bar{B}_0, \quad (18)$$

то из (17) получим

$$2 \int_{t_0}^{t_1} \delta u_{10}' \bar{B}_0' \bar{Q}_0 \delta \dot{u}_{10} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \delta u_{10}' \frac{d}{dt} (\bar{B}_0' \bar{Q}_0) \delta u_{10} dt. \quad (19)$$

Подставим (14) — (17) и (19) в (9):

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x_1(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta x'_1 \bar{P} \delta x_1 + \right. \\ & + 2 \delta x'_1 \bar{Q}_H \delta u_{1H} + 2 \delta x'_1 [\bar{P} \bar{B}_0 - A' \bar{Q}_0 - \dot{\bar{Q}}_0] \delta u_{10} + \\ & + \delta u'_{1H} R_H \delta u_{1H} + 2 \delta u'_{10} [\bar{B}'_0 \bar{Q}_H - \bar{Q}'_0 \bar{B}_H] \delta u_{1H} + \\ & \left. + \delta u'_{10} \left[\bar{B}'_0 \bar{P} \bar{B}_0 - \frac{d}{dt} (\bar{B}'_0 \bar{Q}_0) - B'_{10} \bar{Q}_0 - \bar{Q}'_0 B_{10} \right] \delta u_{10} \right\} dt. \end{aligned}$$

Другими словами, при выполнении (18) вторую вариацию можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2} \delta x_1(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} (\delta x'_1 P_1 \delta x_1 + \\ & + 2 \delta x'_1 Q_1 \delta u_1 + \delta u'_1 R_1 \delta u_1) dt, \quad (20) \end{aligned}$$

где вариация $\delta x_1(t)$ удовлетворяет уравнению (12),

$$\begin{aligned} P_1 &= \bar{P} = P, \quad Q_1 = \{Q_{1H}, Q_{10}\}, \quad Q_{1H} = \bar{Q}_H = Q G_H, \\ Q_{10} &= P \bar{B}_0 - A' \bar{Q}_0 - \dot{\bar{Q}}_0 = P B G_0 - A' Q G_0 - \frac{d}{dt} (Q G_0), \\ R_1 &= \begin{Bmatrix} R_H & R'_{10H} \\ R_{10H} & R_{10} \end{Bmatrix}, \\ R_{10H} &= \bar{B}'_0 \bar{Q}_H - \bar{Q}'_0 \bar{B}_H = G'_0 (B' Q - Q' B) G_H, \\ R_{10} &= \bar{B}'_0 P \bar{B}_0 - \frac{d}{dt} (\bar{B}'_0 \bar{Q}_0) - B'_{10} \bar{Q}_0 - \bar{Q}'_0 B_{10} = \\ &= G'_0 B' P B G_0 - \frac{d}{dt} (G'_0 B' Q G_0) - B'_{10} Q G_0 - G'_0 Q' B_{10}, \\ B_{10} &= A B G_0 - \frac{d}{dt} (B G_0). \end{aligned}$$

3. Необходимые условия оптимальности типа неравенства. Раньше (§ 1 гл. II) было доказано, что из неотрицательности второй вариации вида (20) следует, что матрица R_1 неположительна, т. е.

$$v' R_1 v \leq 0 \quad \text{для всех } r\text{-векторов } v. \quad (21)$$

В этом состоит необходимое условие оптимальности типа неравенства. Напомним, что (21) получено в предположении симметричности матрицы $\bar{B}'_0 \bar{Q}_0$.

4. Следствия. Приведем следствия из условия (21).

1. Пусть $\text{rank } R = 0$. Тогда $m = 0$, $R_H = 0$, $u = u_0$, $\bar{Q} = \bar{Q}_0 = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}$, $\bar{Q}_H = 0$, $\bar{B}_H = 0$, $\bar{B}_0 = \frac{\partial f}{\partial u}$. Матрица R_1 имеет вид

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{10}, \\ R_{10} &= \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] - \\ &\quad - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right)' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}. \end{aligned} \quad (22)$$

Так же как в § 2 гл. II, можно проверить, что

$$\{R_{10}\}_{ij} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_j} \right\}.$$

Поэтому в силу (22), (21) справедливо следующее необходимое условие оптимальности:

$$\sum_{i,j=1}^r \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_j} v_i v_j \geq 0. \quad (23)$$

2. Пусть $r = 2$ и

$$R = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \neq 0.$$

В этом случае $m = 1$,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_H &= \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u_1}, & \bar{Q}_0 &= \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u_2}, & \bar{B}_H &= \frac{\partial f}{\partial u_1}, & \bar{B}_0 &= \frac{\partial f}{\partial u_2}, \\ u_H &= u_1, & u_0 &= u_2. \end{aligned}$$

Условие (18):

$$\frac{\partial f'}{\partial u_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u_2} = \frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u_2} \frac{\partial f}{\partial u_2}$$

выполняется тривиально. Неравенство (21) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} v_1^2 + \left[\frac{\partial f'}{\partial u_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f'}{\partial u_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u_2} \right) - \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right)' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u_2} \right] \cdot v_2^2 + \\ + 2 \left(\frac{\partial f'}{\partial u_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u_1} - \frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u_2} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) v_1 v_2 \leq 0. \quad (24) \end{aligned}$$

Коэффициент при v_2^2 , очевидно, (§ 2 гл. II) можно написать в виде

$$- \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2}.$$

Непосредственно проверяется, что коэффициент при $v_1 v_2$ в (24) равен $-2 \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_1}$. Поэтому окончательный результат для случая 2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} v_1^2 - 2 \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_1} v_1 v_2 - \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} v_2^2 \leq 0.$$

Из этой формы видно, что если $\text{rank } R \neq 0$, то необходимое условие типа неравенства представляет собой комбинацию условий типа Келли и типа Лежандра — Клебша.

3. Рассмотрим теперь случай, который обсуждался в п. 1. Пусть в системе

$$\dot{x} = f_0(x, w, t) + \sum_{i=1}^k \alpha_i f_{1i}(x, w, t) \quad (25)$$

управление $u = \{\alpha, w\}'$ состоит из двух векторов: m -мерного w и k -мерного α , причем вторая группа параметров управления $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ входит в уравнение (25) линейно. Описываемый случай характерен для задач ракетодинамики.

Предположим, что матрица $\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}$ вдоль исследуемого управления невырождена, т. е.

$$\det \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \neq 0.$$

Ясно, что теперь

$$R = \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \text{rank } R_H = \text{rank } \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} = m,$$

и поэтому можно воспользоваться результатом п. 3. В данном случае

$$\bar{Q}_H = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial w}, \quad \bar{Q}_0 = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \alpha}, \quad \bar{B}_H = \frac{\partial f}{\partial w}, \quad \bar{B}_0 = \frac{\partial f}{\partial \alpha},$$

$$u_H = w, \quad u_0 = \alpha.$$

Поэтому условие (18) принимает вид

$$\frac{\partial f'}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \alpha} = \frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Это условие можно записать в компактной форме

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0. \quad (26)$$

Воспользовавшись преобразованиями предыдущего следствия, приходим к следующему критерию оптимальности: *если вдоль особого оптимального управления $u_0(t)$ системы (25) выполняется условие (26), то необходимо выполняется и условие*

$$\delta \alpha' \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha + 2 \delta \alpha' \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial w} \right) \delta w - \delta w' \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \delta w \geq 0$$

для всех k -мерных векторов $\delta \alpha$ и m -мерных векторов δw .

5. Пример. $\dot{x}_1 = u_2$, $\dot{x}_2 = x_1^2 + 4x_1 u_1 + u_1^2$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $|u_1| \leq 1$, $|u_2| \leq 1$, $T = [0, 1]$, $\varphi(x) = x_2$.

$$H = \psi_1 u_2 - x_1^2 - 4x_1 u_1 - u_1^2, \quad \dot{\psi}_1 = 2x_1 + 4u_1, \quad \psi_1(1) = 0.$$

Управление $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ особое на $[0, 1]$, так как

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = -4x_1 - 2u_1 = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = \psi_1 = 0,$$

матрица $R = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ имеет ранг, равный единице.

На этом управлении

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u_1} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u_2} \frac{\partial f}{\partial u_1} = -4,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) = 2.$$

Квадратичная форма $-2v_1^2 - 8v_1v_2 - 2v_2^2$ знакопеременна, что противоречит условию (24). Рассмотренное особое управление не может быть оптимальным.

6. Необходимые условия оптимальности типа равенства. В пп. 3, 4 необходимые условия оптимальности получались при дополнительном предположении, что вдоль испытываемого управления выполняется условие (18). Ниже будет показано, что само это условие есть необходимое условие оптимальности.

Предположим, что матрица $\bar{B}'_0\bar{Q}_0$ — несимметрическая

$$\bar{B}'_0\bar{Q}_0 \neq \bar{Q}'_0\bar{B}_0. \quad (27)$$

Разобьем $n \times (r - m)$ -матрицы \bar{Q}_0, \bar{B}_0 на блоки

$$\bar{Q}_0 = \{\bar{Q}_0^*, \bar{Q}_0^{**}\}, \quad \bar{B}_0 = \{\bar{B}_0^*, \bar{B}_0^{**}\},$$

где $\bar{Q}_0^*, \bar{B}_0^* - (n \times m^*)$ -матрицы, $\bar{Q}_0^{**}, \bar{B}_0^{**} - n \times (r - m - m^*)$ -матрицы. Неотрицательное число m^* , $0 \leq m^* \leq r - m$ выберем так, чтобы оно было наименьшим, при котором матрица $\bar{B}_0^{**'}\bar{Q}_0^{**}$ — симметрическая. Такое число всегда найдется, так как при $m^* = r - m - 1$ матрица $\bar{B}_0^{**'}\bar{Q}_0^{**}$ является матрицей первого порядка и потому симметрическая. Ясно, что

$$\bar{Q}'_0\bar{B}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \bar{Q}_0^{*'} \\ \bar{Q}_0^{**'} \end{array} \right\} \quad \{\bar{B}_0^*, \bar{B}_0^{**}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \bar{Q}_0^{*'}\bar{B}_0^* & \bar{Q}_0^{*'}\bar{B}_0^{**} \\ \bar{Q}_0^{**'}\bar{B}_0^* & \bar{Q}_0^{**'}\bar{B}_0^{**} \end{array} \right\}.$$

Докажем, что при выбранном разбиении, определяемом числом m^* , выполняется матричное условие

$$\bar{Q}_0^{**'}\bar{B}_0^* \neq \bar{B}_0^{**'}\bar{Q}_0^*. \quad (28)$$

Если предположить $\bar{Q}_0^{**'}\bar{B}_0^* = \bar{B}_0^{**'}\bar{Q}_0^*$, то это значит, что последний столбец матрицы $\bar{Q}_0^{**'}\bar{B}_0^*$ после транспонирования совпадает с последней строчкой матрицы $\bar{Q}_0^{*'}\bar{B}_0^{**}$. Если эти столбец и строчку вместе с последним диагональным элементом матрицы $\bar{Q}_0^{*'}\bar{B}_0^{**}$ добавить слева — сверху к симметрической матрице $\bar{Q}_0^{**'}\bar{B}_0^{**}$, то получим, очевидно, новую симметрическую $(r - m - m^* + 1) \times (r - m - m^* + 1)$ -матрицу. Но это противоречит выбору числа m^* , значит, выполняется (28).

Чтобы доказать, что вдоль оптимального особого управления неравенство (27) не может выполняться, и доказать тем самым, что $m^* = 0$ (т. е. матрица $\bar{B}'_0 \bar{Q}_0$ симметрическая), обратимся к выводу необходимого условия оптимальности типа неравенства.

В основе этого вывода лежит преобразование второй вариации $\delta^2 J$ с использованием симметричности матрицы $\bar{B}'_0 \bar{Q}_0$. Поскольку в обсуждаемом случае симметрической является только матрица $\bar{B}^{**'}_0 \bar{Q}^{**}$, то в преобразование $\delta^2 J$ нужно внести некоторые изменения. Эти изменения касаются разбиения матриц \bar{Q} , \bar{B} и вариации δv . Вместо рассмотренного ранее разбиения введем новое,

$$\bar{Q} = \{\check{\bar{Q}}_H, \check{\bar{Q}}_0\}, \quad \bar{B} = \{\check{\bar{B}}_H, \check{\bar{B}}_0\}, \quad \delta v = \{\delta \check{v}_H, \delta \check{v}_0\},$$

где $\check{\bar{Q}}_H = \{\bar{Q}_H, \bar{Q}^*\}$, $\check{\bar{B}}_H = \{\bar{B}_H, \bar{B}^*\} - n \times (m + m^*)$ -матрицы, $\check{\bar{Q}}_0 = \bar{Q}^{**}_0$, $\check{\bar{B}}_0 = \bar{B}^{**}_0 - n \times (r - m - m^*)$ -матрицы, $\delta \check{v}_H - (m + m^*)$ -вектор, $\delta \check{v}_0 - (r - m - m^*)$ -вектор. После этого вторая вариация примет вид (20), где вместо \bar{Q}_H , \bar{Q}_0 , \bar{B}_H , \bar{B}_0 будут стоять матрицы $\check{\bar{Q}}_H$, $\check{\bar{Q}}_0$, $\check{\bar{B}}_H$, $\check{\bar{B}}_0$. Матрица R_1 в (20) теперь заменится на $r \times r$ -матрицу \check{R}_1 ,

$$\check{R}_1 = \begin{Bmatrix} \check{R}_H & \check{R}'_{10H} \\ \check{R}_{10H} & \check{R}_{10} \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

блоки которой имеют размеры

$$\begin{aligned} \check{R}_H &= (m + m^*) \times (m + m^*), \\ \check{R}_{10H} &= (r - m - m^*) \times (m + m^*), \\ \check{R}_{10} &= (r - m - m^*) \times (r - m - m^*). \end{aligned}$$

Вычислим две матрицы:

$$\check{R}_H = \begin{Bmatrix} R_H & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \check{R}_{10H} &= \check{B}'_0 \check{\bar{Q}}_H - \check{\bar{Q}}'_0 \check{\bar{B}}_H = \bar{B}^{**'}_0 \{\bar{Q}_H, \bar{Q}^*\} - \bar{Q}^{**'}_0 \{\bar{B}_H, \bar{B}^*\} = \\ &= \{\bar{B}^{**'}_0 \bar{Q}_H, \bar{B}^{**'}_0 \bar{Q}^*\} - \{\bar{Q}^{**'}_0 \bar{B}_H, \bar{Q}^{**'}_0 \bar{B}^*\}. \end{aligned}$$

Если ввести матрицы

$$R_{10H}^* = \bar{B}_0^{**'} \bar{Q}_H - \bar{Q}_0^{**'} \bar{B}_H, \quad R_{10H}^{**} = \bar{B}_0^{**'} \bar{Q}_0^* - \bar{Q}_0^{**'} \bar{B}_0^*, \quad (30)$$

то $\check{R}_{10H} = \{R_{10H}^*, R_{10H}^{**}\}$ и матрица (29) принимает вид

$$\check{R}_1 = \begin{Bmatrix} R_H & 0 & R_{10H}^{*'} \\ 0 & 0 & R_{10H}^{**'} \\ R_{10H}^* & R_{10H}^{**} & \check{R}_{10} \end{Bmatrix}.$$

По доказанному в § 1 гл. II, матрица \check{R}_1 должна быть знакоотрицательной

$$v' \check{R}_1 v \leq 0 \quad \text{для всех } r\text{-векторов } v. \quad (31)$$

Пусть $v = \{\underbrace{0, \dots, 0}_m, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, где \tilde{v} — m^* -вектор, \tilde{w} — $(r - m - m^*)$ -вектор. Тогда из (31) следует неравенство

$$\{\tilde{v}, \tilde{w}\}' \begin{Bmatrix} 0 & R_{10H}^{*'} \\ R_{10H}^{**} & \check{R}_{10} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix} = 2\tilde{w}' R_{10H}^{**} \tilde{v} + \tilde{w}' \check{R}_{10} \tilde{w} \leq 0,$$

справедливое для всех \tilde{v}, \tilde{w} . Выбирая при фиксированном \tilde{v} ($R_{10H}^{**} \tilde{v} \neq 0$) достаточно малые \tilde{w} , нетрудно придать левой части как положительные, так и отрицательные значения, если $R_{10H}^{**} \neq 0$. Поэтому можно считать доказанным, что $R_{10H}^{**} = 0$.

Вспоминая определение (30), видим, что полученный результат противоречит (28) [а потому и (27)].

Таким образом, возвращаясь к началу пункта, убеждаемся, что условие

$$\bar{Q}_0' \bar{B}_0 = \bar{B}_0' \bar{Q}_0$$

является необходимым условием оптимальности.

7. Дальнейшее развитие схемы. Вернемся к п. 2. В результате выполненных там преобразований вторая вариация (20) не изменила своей структуры, и единственное отличие нового вида $\delta^2 J$ от старого состоит лишь в том, что вместо матриц Q, R теперь в $\delta^2 J$ фигурируют матрицы Q_1, R_1 и изменилось уравнение в вариациях. Ранг m_1 матрицы R_1 удовлетворяет неравенствам $m \leq m_1 \leq r$. Если $m_1 < r$, то процесс преобразований, описанный в п. 2, можно продолжить.

Предположим, что описанная процедура повторилась несколько раз и мы пришли к матрицам Q_{k+1} , R_{k+1} , где

$$Q_{k+1, H} = \{Q_{k+1, H}, Q_{k+1, 0}\}, \quad Q_{k+1, H} = Q_k G_{kH}, \\ Q_{k+1, 0} = P B_k G_{k0} - A' Q_k G_{k0} - \frac{d}{dt} (Q_k G_{k0}).$$

$r \times m_k$ -матрица G_{kH} , $r \times (r - m_k)$ -матрица G_{k0} суть блоки $r \times r$ -матрицы G_k , такой, что $r \times r$ -матрица $G'_k R_k G_k$ ранга m_k имеет вид

$$\begin{Bmatrix} R_{kH} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

где R_{kH} — неособая $m_k \times m_k$ -матрица,

$$R_{k+1} = \begin{Bmatrix} R_{kH} & R'_{k+1, 0H} \\ R_{k+1, 0H} & R_{k+1, 0} \end{Bmatrix},$$

$$R_{k+1, 0H} = G'_{k0} (B'_k Q_k - Q'_k B_k) G_{kH},$$

$$R_{k+1, 0} = G'_{k0} B'_k P B_k G_{k0} - \frac{d}{dt} (G'_{k0} B'_k Q_k G_{k0}) - \\ - B'_{k+1, 0} Q_k G_{k0} - G'_{k0} Q'_k B_{k+1, 0},$$

$$B_{k+1} = \{B_{k+1, H}, B_{k+1, 0}\} = \left\{ B_k G_{kH}, A B_k G_{k0} - \frac{d}{dt} (B_k G_{k0}) \right\}.$$

Это позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема. Если вдоль особого оптимального управления $u^0(t)$, $t \in T$, при некотором k ($k = 0, 1, \dots$) выполняются условия

$$\text{rank } R_0 = m \leq \text{rank } R_1 = m_1 \leq \text{rank } R_2 = \\ = m_2 \leq \dots \leq \text{rank } R_k = m_k < r \quad (R_0 \equiv R),$$

то необходимо, чтобы

$$G'_{k0} B'_k Q_k G_{k0} = G'_{k0} Q'_k B_k G_{k0}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Если выполняется это условие типа равенства, то должно выполняться и необходимое условие типа неравенства

$$v' R_{k+1} v \leq 0 \quad \text{для всех } v.$$

§ 2. Многомерные пакеты вариаций

Ниже на многомерные особые управления развивается техника исследования задач с помощью пакетов вариаций. Как и следовало ожидать, этот метод позволяет получить принципиально новые результаты.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать задачу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), & x(t_0) &= x_0, & t &\in T = [t_0, t_1], \\ x &= \{x_1, \dots, x_n\}', & u &= \{u_1, u_2\}', & u(t) &\in U, \\ J(u) &= \Phi(x(t_1)) \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где U — открытое плоское множество, функции $f(x, u, t)$, $\Phi(x)$ определены, непрерывны и достаточное число раз дифференцируемы.

В данном параграфе рассматриваются особые управления, вдоль которых

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} &\equiv 0, & t &\in T, \\ \text{rank } \Gamma(t) &\equiv 0, & t &\in T, & \Gamma &= \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что под наше рассмотрение попадают и все особые управления в системах, линейных по управлению

$$\dot{x} = f_0(x, t) + \sum_{i=1}^2 \alpha_i f_i(x, t).$$

2. Вторая вариация функционала на пакете. Будем исходить из следующей формулы второй вариации,

$$-\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta u' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u + 2 \delta u' \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \right) \delta x \right] dt, \quad (1)$$

где $\delta u = \{\delta u_1, \delta u_2\}'$, $\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u$, $\delta x(t_0) = 0$, $n \times n$ -матричная функция $\Psi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial f'}{\partial x} \Psi - \Psi \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad \Psi(t_1) = -\frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Такое выражение для $\delta^2 J$ получается из формулы приращения функционала второго порядка, которая бу-

дет доказана в гл. IV, и имеем более простую структуру по сравнению с общепринятым в литературе [см. (1.7)].

Представим δx в виде суммы вариаций

$$\delta x = \delta^1 x + \delta^2 x,$$

где

$$\delta^1 \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \delta^1 x + \frac{\partial f}{\partial u_1} \delta u_1, \quad \delta^1 x(t_0) = 0,$$

$$\delta^2 \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \delta^2 x + \frac{\partial f}{\partial u_2} \delta u_2, \quad \delta^2 x(t_0) = 0.$$

Введем обозначение

$$\Lambda_s = \frac{\partial^2 H}{\partial u_s \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u_s} \Psi.$$

Вторая вариация (1) принимает вид

$$\begin{aligned} -\delta^2 J = & -\delta^2 J_1 - \delta^2 J_2 + \\ & + 2 \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \delta u_1 \delta u_2 + \Lambda'_1 \delta^2 x \delta u_1 + \Lambda'_2 \delta^1 x \delta u_2 \right) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$-\delta^2 J_s = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_s^2} \delta u_s^2 + 2\Lambda'_s \delta^s x \delta u_s \right) dt, \quad s = 1, 2.$$

Пусть $\delta u_1(t)$, $\delta u_2(t)$ — пакеты вариаций первого порядка в точке $t = \theta$, т. е.

$$\delta u_1(t) = \sum_{i=1}^p \delta^i u_1(t), \quad t \in T, \quad (4)$$

$$\delta^i u_1(t) = \begin{cases} a_i, & \theta \leq t < \theta_i^1, \\ 0, & t \in [\theta, \theta_i^1), \end{cases}$$

$$a_i = \text{const}, \quad \theta_i^1 = \theta + e_i, \quad e_i = q_i e, \quad 0 < q_i < q_{i+1} \leq 1, \\ q_p = 1 \quad i = 1, \dots, p;$$

$$\delta u_2(t) = \sum_{j=1}^q \delta^j u_2(t), \quad t \in T, \quad (5)$$

$$\delta^j u_2(t) = \begin{cases} b_j, & \theta \leq t < \theta_j^2, \\ 0, & t \in [\theta, \theta_j^2), \end{cases}$$

$$b_j = \text{const}, \quad \theta_j^2 = \theta + \tau_j, \quad \tau_j = p_j e, \quad 0 < p_j < p_{j+1} \leq 1, \\ j = 1, \dots, q.$$

Предположим, что точки $\theta_j^2 \in [\theta, \theta + \varepsilon]$, $j = 1, \dots, q$, располагаются относительно точек $\theta_i^1 \in [\theta, \theta + \varepsilon]$, $i = 1, \dots, p$, следующим образом. На отрезке $[\theta, \theta_1^1]$ находятся j_1 точек θ_j^2 : $\theta_0^2 = \theta$, $\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_{j_1}^2$, т. е. $\theta = \theta_0^2 < \theta_1^2 < \theta_2^2 < \dots < \theta_{j_1}^2 \leq \theta_1^1$, $0 \leq j_1 \leq q$ (не исключается случай, когда на $[\theta, \theta_1^1]$ нет точек θ_j^2 , т. е. $j_1 = 0$). На $[\theta, \theta_2^1]$ расположены точки $\theta_0^2 = \theta$, $\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_{j_1}^2, \theta_{j_1+1}^2, \dots, \theta_{j_2}^2$; $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq q$ (в частности, может быть $j_2 = j_1$, что означает отсутствие точек θ_j^2 на $[\theta_1^1, \theta_2^1]$). Наконец, на $[\theta, \theta_s^1]$ расположены точки $\theta_0^2, \theta_1^2, \dots, \theta_{j_1}^2, \dots, \theta_{j_s}^2, \dots, \theta_{j_s}^2$, причем $\theta = \theta_0^2 < \theta_1^2 \leq \dots \leq \theta_{j_1}^2 \leq \dots \leq \theta_{j_2}^2 \leq \dots \leq \theta_{j_s}^2 \leq \theta_s^1$, $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_s$, $s = 1, \dots, p$; $j_p = q \geq 1$.

При сделанных предположениях получим разложение второй вариации (3) по степеням ε для пакетов вариаций (4), (5). Поскольку такие разложения уже получены в гл. II для $-\delta^2 J_1, -\delta^2 J_2$ [см. (II.8.31)], то перейдем к рассмотрению последнего слагаемого в правой части (3), которое на вариациях (4), (5) представляется в виде

$$-\delta^2 J_{12} = 2 \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \delta u_1 \delta u_2 + \Lambda'_1 \delta^2 x \delta u_1 + \Lambda'_2 \delta^1 x \delta u_2 \right) dt. \quad (6)$$

Вариация $\delta^1 x^i(t)$

$$\left(\delta^1 \dot{x}^i = \frac{\partial f}{\partial x} \delta^1 x^i + \frac{\partial f}{\partial u_1} \delta^i u_1, \delta^1 x^i(t_0) = 0, i = 1, \dots, p \right)$$

на $[\theta, \theta + \varepsilon]$ равна [по аналогии с (II.8.6), (II.8.9)]

$$\begin{aligned} \delta^1 x_1^i(t) &= \sum_{m=1}^{\gamma} \frac{1}{m!} A_{m-1}^i a_i(t - \theta)^m + o_1((t - \theta)^{\gamma}) = \\ &= \sum_{m=1}^{\gamma} K_m^i(t - \theta)^m + o_1((t - \theta)^{\gamma}), \quad \theta \leq t < \theta_1^1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\delta^1 x_2^l(t) &= \sum_{\mu=0}^{\gamma} \sum_{\eta=1}^{\gamma-\mu} \sum_{l=\mu}^{\eta+\mu-1} \sum_{\substack{m=1 \\ m+l \leq \eta+\mu}}^{\eta+\mu} \left[\frac{(-1)^{l-\mu} C_l^{l-\mu}}{l! (\eta+\mu-m-l)! m!} \times \right. \\
&\times \left. \frac{d^{\eta+\mu-m-l} B_l(\theta)}{dt^{\eta+\mu-m-l}} A_{m-1}^l a_l q_l^\eta \varepsilon^\eta \right] (t-\theta)^\mu + o_2((t-\theta_l)^\gamma) + o_3(\varepsilon_l^\gamma) = \\
&= \sum_{\mu=0}^{\gamma} \sum_{\eta=1}^{\gamma-\mu} (D_{\eta\mu}^l a_l q_l^\eta \varepsilon^\eta) (t-\theta)^\mu + o_2((t-\theta_l)^\gamma) + o_3(\varepsilon_l^\gamma) = \\
&= \sum_{\mu=0}^{\gamma} L_\mu^l (t-\theta)^\mu + o_2((t-\theta_l)^\gamma) + o_3(\varepsilon_l^\gamma), \quad \theta_l \leq t \leq \theta + \varepsilon. \quad (8)
\end{aligned}$$

Здесь A_{m-1}^l получается заменой u на u_1 в выражении (II. 8.5) для A_{m-1} .

Соответственно, для вариации $\delta^2 x^l(t)$

$$(\delta^2 \dot{x}^j = \frac{\partial f}{\partial x} \delta^2 x^j + \frac{\partial f}{\partial u_2} \delta^j u_2, \quad \delta^2 x^j(t_0) = 0, \quad j = 1, \dots, q)$$

на $[\theta, \theta + \varepsilon]$ имеем:

$$\begin{aligned}
\delta^2 x_1^l(t) &= \sum_{m=1}^{\gamma} \frac{1}{m!} A_{m-1}^2 b_l (t-\theta)^m + o_1((t-\theta)^\gamma) = \\
&= \sum_{m=1}^{\gamma} \bar{K}_m^l (t-\theta)^m + o_1((t-\theta)^\gamma), \quad \theta \leq t \leq \theta_j^2; \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 x_2^l(t) &= \sum_{\mu=0}^{\gamma} \sum_{\eta=1}^{\gamma-\mu} \sum_{l=\mu}^{\eta+\mu-1} \sum_{\substack{m=1 \\ m+l \leq \eta+\mu}}^{\eta+\mu} \left[\frac{(-1)^{l-\mu} C_l^{l-\mu}}{l! (\eta+\mu-m-l)! m!} \times \right. \\
&\times \left. \frac{d^{\eta+\mu-m-l} B_l(\theta)}{dt^{\eta+\mu-m-l}} A_{m-1}^2 b_l p_l^\eta \varepsilon^\eta \right] (t-\theta)^\mu + o_2((t-\theta_j^2)^\gamma) + o_3(\tau_j^\gamma) = \\
&= \sum_{\mu=0}^{\gamma} \sum_{\eta=1}^{\gamma-\mu} (D_{\eta\mu}^2 b_l p_l^\eta \varepsilon^\eta) (t-\theta)^\mu + o_2((t-\theta_j^2)^\gamma) + o_3(\tau_j^\gamma) = \\
&= \sum_{\mu=0}^{\gamma} \bar{L}_\mu^l (t-\theta)^\mu + o_2((t-\theta_j^2)^\gamma) + o_3(\tau_j^\gamma), \quad \theta_j^2 \leq t \leq \theta + \varepsilon. \quad (10)
\end{aligned}$$

Здесь коэффициент A_{m-1}^2 получается заменой u на u_2 в выражении (II.8.5). Имеем

$$\Lambda_s = \sum_{h=0}^v Q_h^s (t - \theta)^h + o((t - \theta)^v),$$

$$Q_h^s = \frac{1}{h!} \left. \frac{d^h \Lambda_s}{dt^h} \right|_{t=\theta}, \quad s = 1, 2.$$

Рассмотрим интеграл в (6) на отрезке $[\theta_{\mu-1}^2, \theta_\mu^2] \subset (\theta_{s-1}^1, \theta_s^1] \subset [\theta, \theta + \varepsilon]$, $\mu = j_{s-1} + 2, \dots, j_s$; $s = 1, \dots, p$:

$$\int_{\theta_{\mu-1}^2}^{\theta_\mu^2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \delta u_1 \delta u_2 + \Lambda_1' \delta^2 x \delta u_1 + \Lambda_2' \delta^1 x \delta u_2 \right) dt. \quad (11)$$

Для $t \in [\theta_{\mu-1}^2, \theta_\mu^2]$ имеем

$$\delta u_1 = \sum_{i_1=s}^p a_{i_1}, \quad \delta u_2 = \sum_{i_2=\mu}^q b_{i_2},$$

$$\delta^1 x(t) = \sum_{i_1=s}^p \delta^1 x_1^{i_1}(t) + \sum_{i_1=1}^{s-1} \delta^1 x_2^{i_1}(t),$$

$$\delta^2 x(t) = \sum_{i_2=\mu}^q \delta^2 x_1^{i_2}(t) + \sum_{i_2=1}^{\mu-1} \delta^2 x_2^{i_2}(t).$$

Подставляя эти выражения в (11) и интегрируя последнее выражение, получаем

$$\int_{\theta_{\mu-1}^2}^{\theta_\mu^2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \delta u_1 \delta u_2 + \Lambda_1' \delta^2 x \delta u_1 + \Lambda_2' \delta^1 x \delta u_2 \right) dt =$$

$$= \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=\mu}^q \sum_{v=0}^{v-1} a_{i_1} b_{i_2} \frac{1}{v!} \left. \frac{d^v}{dt^v} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{t=\theta} \times$$

$$\times \frac{\tau_{\mu}^{v+1} - \tau_{\mu-1}^{v+1}}{v+1} + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=\mu}^q \sum_{v=1}^{v-1} \sum_{m=1}^v \sum_{m+j=v}^{v-1} Q_j^{i_1'} \bar{K}_m^{i_2} a_{i_1} \frac{\tau_{\mu}^{v+1} - \tau_{\mu-1}^{v+1}}{v+1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=1}^{\mu-1} \sum_{\nu=0}^{\gamma-1} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+j=\nu}}^{\nu} \sum_{j=0}^{\nu} Q_j^{1'} \bar{L}_{\mu_1}^{i_2} a_{i_1} \frac{\tau_{\mu}^{\nu+1} - \tau_{\mu-1}^{\nu+1}}{\nu+1} + \\
& + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=\mu}^q \sum_{\nu=1}^{\gamma-1} \sum_{\substack{m=1 \\ m+j=\nu}}^{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} Q_j^{2'} K_m^{i_1} b_{i_2} \frac{\tau_{\mu}^{\nu+1} - \tau_{\mu-1}^{\nu+1}}{\nu+1} + \\
& + \sum_{i_1=1}^{s-1} \sum_{i_2=\mu}^q \sum_{\nu=0}^{\gamma-1} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+j=\nu}}^{\nu} \sum_{j=0}^{\nu} Q_j^{2'} L_{\mu_1}^{i_1} b_{i_2} \frac{\tau_{\mu}^{\nu+1} - \tau_{\mu-1}^{\nu+1}}{\nu+1} + o(\varepsilon^{\gamma}).
\end{aligned}$$

Вычислим интегралы

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta_{s-1}^1}^{\theta_{j_{s-1}+1}^2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \delta u_1 \delta u_2 + \Lambda_1' \delta^2 x \delta u_1 + \Lambda_2' \delta^1 x \delta u_2 \right) dt = \\
& = \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^q \sum_{\nu=0}^{\gamma-1} a_{i_1} b_{i_2} \frac{1}{\nu!} \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{t=\theta} \frac{\tau_{j_{s-1}+1}^{\nu+1} - \varepsilon_{s-1}^{\nu+1}}{\nu+1} + \\
& + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^q \sum_{\nu=1}^{\gamma-1} \sum_{\substack{m=1 \\ m+j=\nu}}^{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} Q_j^{1'} \bar{K}_m^{i_2} a_{i_1} \frac{\tau_{j_{s-1}+1}^{\nu+1} - \varepsilon_{s-1}^{\nu+1}}{\nu+1} + \\
& + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=1}^{j_{s-1}} \sum_{\nu=0}^{\gamma-1} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+j=\nu}}^{\nu} \sum_{j=0}^{\nu} Q_j^{1'} \bar{L}_{\mu_1}^{i_2} a_{i_1} \frac{\tau_{j_{s-1}+1}^{\nu+1} - \varepsilon_{s-1}^{\nu+1}}{\nu+1} + \\
& + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^q \sum_{\nu=1}^{\gamma-1} \sum_{\substack{m=1 \\ m+j=\nu}}^{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} Q_j^{2'} K_m^{i_1} b_{i_2} \frac{\tau_{j_{s-1}+1}^{\nu+1} - \varepsilon_{s-1}^{\nu+1}}{\nu+1} + \\
& + \sum_{i_1=1}^{s-1} \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^q \sum_{\nu=0}^{\gamma-1} \sum_{\substack{\mu_1=0 \\ \mu_1+j=\nu}}^{\nu} \sum_{j=0}^{\nu} Q_j^{2'} L_{\mu_1}^{i_1} b_{i_2} \frac{\tau_{j_{s-1}+1}^{\nu+1} - \varepsilon_{s-1}^{\nu+1}}{\nu+1} + o(\varepsilon^{\gamma}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta_{j_s}^2}^{\theta_s^1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \delta u_1 \delta u_2 + \Lambda'_1 \delta^2 x \delta u_1 + \Lambda'_2 \delta^1 x \delta u_2 \right) dt = \\
& = \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_s+1}^q \sum_{v=0}^{\gamma-1} a_{i_1} b_{i_2} \frac{1}{v!} \frac{d^v}{dt^v} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{t=\theta} \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \tau_{j_s}^{v+1}}{v+1} + \\
& + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_s+1}^q \sum_{v=1}^{\gamma-1} \sum_{m=1}^v \sum_{j=0}^{v-1} Q_j^{1'} \bar{K}_m^{i_2} a_{i_1} \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \tau_{j_s}^{v+1}}{v+1} + \\
& + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=1}^{j_s} \sum_{v=0}^{\gamma-1} \sum_{\mu_1=0}^v \sum_{j=0}^{v-1} Q_j^{1'} \bar{L}_{\mu_1}^{i_2} a_{i_1} \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \tau_{j_s}^{v+1}}{v+1} + \\
& + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_s+1}^q \sum_{v=1}^{\gamma-1} \sum_{m=1}^v \sum_{j=0}^{v-1} Q_j^{2'} K_m^{i_2} b_{i_2} \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \tau_{j_s}^{v+1}}{v+1} + \\
& + \sum_{i_1=1}^{s-1} \sum_{i_2=j_s+1}^q \sum_{v=0}^{\gamma-1} \sum_{\mu_1=0}^v \sum_{j=0}^{v-1} Q_j^{2'} L_{\mu_1}^{i_1} b_{i_2} \frac{\varepsilon_s^{v+1} - \tau_{j_s}^{v+1}}{v+1} + o(\varepsilon^\gamma).
\end{aligned}$$

Используя очевидное равенство

$$\int_{\theta_{s-1}^1}^{\theta_s^1} = \int_{\theta_{s-1}^1}^{\theta_{j_{s-1}+1}^2} + \sum_{\mu=j_{s-1}+2}^{j_s} \int_{\theta_{\mu-1}^2}^{\theta_\mu^2} + \int_{\theta_{j_s}^2}^{\theta_s^1} \quad (12)$$

и учитывая полученные выражения для интегралов в правой части (12), находим

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta_{s-1}^1}^{\theta_s^1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \delta u_1 \delta u_2 + \Lambda'_1 \delta^2 x \delta u_1 + \Lambda'_2 \delta^1 x \delta u_2 \right) dt = \\
& = \sum_{v=0}^{\gamma-1} \frac{1}{v!} \frac{d^v}{dt^v} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{t=\theta} \left(\sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_s+1}^q a_{i_1} b_{i_2} \frac{\varepsilon_s^{v+1}}{v+1} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^{j_s} a_{i_1} b_{i_2} \frac{\tau_{i_2}^{v+1}}{v+1} - \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} \frac{e_{s-1}^{v+1}}{v+1} \Big) + \\
& + \sum_{v=1}^{v-1} \left(\sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_s+1}^q a_{i_1} \frac{e_s^{v+1}}{v+1} - \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^q a_{i_1} \frac{e_{s-1}^{v+1}}{v+1} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^{j_s} a_{i_1} \frac{\tau_{i_2}^{v+1}}{v+1} \right) \sum_{m=1}^v \sum_{\substack{j=0 \\ m+j=v}}^{v-1} Q_j^{1'} \bar{K}_m^{i_2} + \\
& + \sum_{v=0}^{v-1} \left(\sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=1}^{j_s} a_{i_1} \frac{e_s^{v+1}}{v+1} - \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=1}^{j_{s-1}} a_{i_1} \frac{e_{s-1}^{v+1}}{v+1} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^{j_s} a_{i_1} \frac{\tau_{i_2}^{v+1}}{v+1} \right) \sum_{\mu=0}^v \sum_{\substack{j=0 \\ \mu+j=v}}^v Q_j^{1'} \bar{L}_\mu^{i_2} + \\
& + \sum_{v=1}^{v-1} \left(\sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_s+1}^q b_{i_2} \frac{e_s^{v+1}}{v+1} - \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^q b_{i_2} \frac{e_{s-1}^{v+1}}{v+1} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i_1=s}^p \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^{j_s} b_{i_2} \frac{\tau_{i_2}^{v+1}}{v+1} \right) \sum_{m=1}^v \sum_{\substack{j=0 \\ m+j=v}}^{v-1} Q_j^{2'} K_m^{i_1} + \\
& + \sum_{v=0}^{v-1} \left(\sum_{i_1=1}^{s-1} \sum_{i_2=j_s+1}^q b_{i_2} \frac{e_s^{v+1}}{v+1} - \sum_{i_1=1}^{s-1} \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^q b_{i_2} \frac{e_{s-1}^{v+1}}{v+1} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i_1=1}^{s-1} \sum_{i_2=j_{s-1}+1}^{j_s} b_{i_2} \frac{\tau_{i_2}^{v+1}}{v+1} \right) \sum_{\mu=0}^v \sum_{\substack{j=0 \\ \mu+j=v}}^v Q_j^{2'} L_\mu^{i_1} + o(\varepsilon^v).
\end{aligned}$$

Суммируя это выражение по s , $s = 1, \dots, p$, и подставляя в него значения коэффициентов $K_m^{i_1}$, $L_\mu^{i_1}$, $\bar{K}_m^{i_2}$, $\bar{L}_\mu^{i_2}$ из

(7) — (10), приходим к окончательному разложению:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\theta+\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \delta u_1 \delta u_2 + \Lambda'_1 \delta^2 x \delta u_1 + \Lambda'_2 \delta^1 x \delta u_2 \right) dt = \\
 &= \sum_{v=0}^{\gamma-1} \frac{1}{v!} \frac{d^v}{dt^v} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{t=0} \left(\sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=j_{i_1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^{v+1} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{j_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} p_{i_2}^{v+1} \right) \frac{\varepsilon^{v+1}}{v+1} + \\
 & \quad + \sum_{z=2}^{\gamma} \sum_{m=1}^{z-1} \sum_{\substack{j=0 \\ m+j+1=z}}^{z-2} \frac{1}{m!} (Q_j^{1'} A_{m-1}^2 + Q_j^{2'} A_{m-1}^1) \times \\
 & \quad \times \left(\sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=j_{i_1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^z + \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{j_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} p_{i_2}^z \right) \frac{\varepsilon^z}{z} + \\
 & \quad + \sum_{z=2}^{\gamma} \sum_{\mu=0}^{z-2} \sum_{j=0}^{z-2} \sum_{\substack{\eta=1 \\ \mu+j+\eta+1=z}}^{z-1} \left[Q_j^{1'} D_{\eta\mu}^2 \left(\sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{j_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^{z-\eta} p_{i_2}^{\eta} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{j_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} p_{i_2}^z \right) + Q_j^{2'} D_{\eta\mu}^1 \left(\sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=j_{i_1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^{\eta} p_{i_2}^{z-\eta} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=j_{i_1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^z \right) \right] \frac{\varepsilon^z}{z-\eta} + o(\varepsilon^{\gamma}). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Совместно с полученным ранее разложением (II.8.31), подсчитанным для $u = u_1(-\delta^2 J_1)$ и для $u = u_2(-\delta^2 J_2)$, выражение (13) дает формулу разложения второй вариации функционала на пакете первого порядка в случае двумерного управления. Исследуем члены этой формулы, содержащие ε , ε^2 , ε^3 . Предварительно приведем некоторые тождества, используемые в дальнейшем.

Непосредственным дифференцированием нетрудно проверить каждое из равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_j} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_i \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_j} - \frac{\partial^2 H'}{\partial u_j \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) = \\ = - \frac{\partial f'}{\partial u_i} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 H'}{\partial u_i \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_j} + \\ + \frac{\partial^2 H'}{\partial u_j \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_i} - \frac{\partial^2 H'}{\partial u_i \partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H'}{\partial u_j \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f'}{\partial u_i} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H'}{\partial u_i \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H'}{\partial u_j \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_i} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} = \\ = \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_i \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u_i} \Psi \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_j} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_j} \right) + \\ + \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_j \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u_j} \Psi \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_i} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right), \quad (15) \end{aligned}$$

$i, j = 1, 2.$

Кроме того, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{I_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^\alpha p_{i_2}^\beta + \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=I_{i_1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^\alpha p_{i_2}^\beta = \\ = \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^\alpha \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^\beta \right), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Положим $\gamma = 3$ в (II.8.31), (13) и вычислим коэффициенты при ϵ , ϵ^2 , ϵ^3 этих разложений. Группируя слагаемые и учитывая выписанные выше равенства, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} -\delta^2 J = \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \left(\sum_{i=1}^p a_i^2 q_i + 2 \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=I_{i_1}+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \left(\sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=I_{i_1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1} + \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{I_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} p_{i_2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} \left(\sum_{i=1}^q b_i^2 p_i + 2 \sum_{i_1=1}^{q-1} \sum_{i_2=i_1+1}^q b_{i_1} b_{i_2} p_{i_1} \right) \Big|_{t=0} \varepsilon + \\
& + \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \left(\sum_{i=1}^p a_i^2 q_i^2 + 2 \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^2 \right) + \right. \\
& + \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \left(\sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=j_{i_1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^2 + \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{j_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} p_{i_2}^2 \right) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} \left(\sum_{i=1}^q b_i^2 p_i^2 + 2 \sum_{i_1=1}^{q-1} \sum_{i_2=i_1+1}^q b_{i_1} b_{i_2} p_{i_2}^2 \right) + \\
& + \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\partial f'}{\partial u_1} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right)^2 + \\
& + 2 \left(\frac{\partial f'}{\partial u_1} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i \right) + \\
& + \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial f'}{\partial u_2} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i \right)^2 + \\
& + \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) \times \\
& \times \left(\sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=j_{i_1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^2 - \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{j_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} p_{i_2}^2 + \right. \\
& \left. + 2 \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{j_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1} p_{i_2} \right) \Big|_{t=0} \varepsilon^2 + \\
& + \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \left(\sum_{i=1}^p a_i^2 q_i^3 + 2 \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^3 - 2s_1 \right) + \right. \\
& + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \left(\sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=j_{i_1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^3 + \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{j_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} p_{i_2}^3 - 2s_{12} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} \left(\sum_{i=1}^q b_i^2 p_i^3 + 2 \sum_{i_1=1}^{q-1} \sum_{i_2=i_1+1}^q b_{i_1} b_{i_2} p_{i_1}^3 - 2s_2 \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} \right) s_1(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p) + \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} \right) \right] \times \\
& \times s_{12}(a_1, \dots, a_p, q_1, \dots, q_p, b_1, \dots, b_q, p_1, \dots, p_q) + \\
& + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) s_2(b_1, \dots, b_q, p_1, \dots, p_q) + \\
& + \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) \times \\
& \times \left(\sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_{i_1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^3 - \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{i_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} p_{i_2}^3 - \right. \\
& \left. - \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_{i_1}+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1} p_{i_2}^2 + \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{i_{i_1}} a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^2 p_{i_2} \right) + \\
& + 3 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u_1} \Psi \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_1} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) \times \\
& \times \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right) + 3 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u_1} \Psi \right) \times \\
& \times \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^2 \right) + \\
& + 3 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u_2} \Psi \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_1} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) \times \\
& \times \left(\sum_{i=1}^p a_i q_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i \right) + 3 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u_2} \Psi \right) \times \\
& \times \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i \right) \left(\sum_{i=1}^q b_i p_i^2 \right) \Bigg|_{t=0} \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3).
\end{aligned}
\tag{16}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 2 \sum_{i=1}^p a_i^2 q_i^3 + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1}^3 + 3 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^p a_{i_1} a_{i_2} q_{i_1} q_{i_2}^2, \\
 S_2 &= 2 \sum_{i=1}^q b_i^2 p_i^3 + \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{i_2=i_1+1}^q b_{i_1} b_{i_2} p_{i_1}^3 + 3 \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{i_2=i_1+1}^q b_{i_1} b_{i_2} p_{i_1} p_{i_2}^2, \\
 S_{12} &= \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^3 + \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1} b_{i_2} p_{i_2}^3 + \\
 &\quad + \frac{3}{2} \sum_{i_1=1}^{p-1} \sum_{i_2=i_1+1}^q a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1} p_{i_2}^2 + \frac{3}{2} \sum_{i_1=1}^p \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1} b_{i_2} q_{i_1}^2 p_{i_2}.
 \end{aligned}$$

3. Первое необходимое условие оптимальности типа неравенства. Используем пакет при $p = 1$, $q = 1$, $p_1 = 1$ («игольчатая» вариация). Разложение $-\delta^2 J$ принимает вид

$$\begin{aligned}
 -\delta^2 J &= \left[\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\partial f'}{\partial u_1} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) a_1^2 + \right. \\
 &\quad + \left(2 \frac{\partial f'}{\partial u_1} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) a_1 b_1 + \\
 &\quad + \left. \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial f'}{\partial u_2} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) b_1^2 \right] \Big|_{t=0} \epsilon^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} \right) 2a_1^2 + \right. \\
 &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} \right) \right] 2a_1 b_1 + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) 2b_1^2 + \\
 &\quad + 3 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u_1} \Psi \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_1} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) a_1^2 + \\
 &\quad + 3 \left[\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u_1} \Psi \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \right. \\
 &\quad + \left. \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u_2} \Psi \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_1} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) \right] a_1 b_1 + \\
 &\quad + \left. 3 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial u_2} \Psi \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) b_1^2 \right] \Big|_{t=0} \epsilon^3 + o(\epsilon^3).
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Отсюда при рассмотрении коэффициента при ε^2 получается

Теорема. Пусть функция $f(x, u, t)$ определена и непрерывна вместе с производными до второго порядка (включительно) по всем аргументам.

Для оптимальности особого ($\text{rank } \Gamma = 0$) управления $u(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}'$ необходимо, чтобы

$$\sum_{m, s=1}^2 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_m \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_s} + \frac{\partial f'}{\partial u_m} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_s} \right) \eta_m \eta_s \leq 0, \quad (18)$$

где матрица Ψ удовлетворяет уравнению (2).

4. Второе необходимое условие оптимальности. Следующее условие оптимальности доставляет коэффициент при ε^3 в (17). Пусть особое управление таково, что существуют ненулевые η_1, η_2 , при которых левая часть (18) обращается в нуль в некоторой точке $\theta \in T$, т. е.

$$\sum_{m, s=1}^2 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_m \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_s} + \frac{\partial f'}{\partial u_m} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_s} \right) \Big|_{t=\theta} \eta_m \eta_s = 0. \quad (19)$$

При этом главным членом разложения (17) становится коэффициент при ε^3 . Преобразуя его с учетом тождества (15), приходим к утверждению.

Теорема. Пусть функция $f(x, u, t)$ определена и непрерывна вместе с производными до третьего порядка (включительно) по всем аргументам.

Для оптимальности особого ($\text{rank } \Gamma = 0$) кусочно-непрерывного и кусочно-гладкого управления $u(t)$ в точке $t = \theta$ ($\theta \neq t_1$) необходимо, чтобы

$$\sum_{m, s=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_s} \right) + \right. \\ \left. + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_m \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_s} + \frac{\partial f'}{\partial u_m} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_s} \right) \right] \Big|_{t=\theta} \eta_m \eta_s \leq 0 \quad (20)$$

для всех η_m, η_s , удовлетворяющих (19).

5. Первое необходимое условие типа равенства. Рассмотрим разложение (16) на пакете, удовлетворяющем условию

$$\sum_{i=1}^p a_i q_i = 0, \quad \sum_{i=1}^q b_i p_i = 0.$$

Пусть $p = q = 2$, $j_s = s$, $s = 1, 2$ (т. е. $0 < p_1 \leq q_1 < p_2 = q_2 = 1$). В этих предположениях разложение (16) имеет вид

$$\begin{aligned} -\delta^2 J = & \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) \Big|_{t=0} a_1 b_1 p_1 (1 - q_1) (q_1 - p_1) \varepsilon^2 + \\ & + \frac{1}{3} \left\{ - \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} \right) a_1^2 q_1^2 (1 - q_1)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} \right) \right] a_1 b_1 p_1 (1 - q_1) (p_1^2 + q_1^2 - 2q_1) - \\ & - \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) b_1^2 p_1^2 (1 - p_1)^2 + \\ & + \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) a_1 b_1 p_1 \times \\ & \times (1 - q_1) (q_1^2 - p_1^2) \Big\} \Big|_{t=0} \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3). \quad (21) \end{aligned}$$

Поскольку параметры пакета a_1 , b_1 принимают произвольные значения, то коэффициенту при ε^2 в (21) выбором a_1 , b_1 можно придать как положительный, так и отрицательный знаки. Отсюда получается следующее условие типа равенства.

Теорема. Для оптимальности особого ($\text{rank } \Gamma = 0$) управления $u(t)$ необходимо, чтобы

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} = 0. \quad (22)$$

Условие (22) может быть записано также в эквивалентной форме

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_1} \right) = \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) = 0.$$

З а м е ч а н и я. 1. Поскольку равенство

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_1} \right) = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) = 0$$

очевидно, то можно считать установленным, что вдоль особого оптимального управления

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_j} \right) = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (23)$$

Это значит, что при вычислении многомерного оптимального особого управления в системах, линейных по управлению, уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, 2,$$

бесполезны, — в них параметр u не входит.

2. Условия типа равенства можно трактовать как условия автономности компонент оптимального особого управления по отношению к специальным возмущениям друг друга. Конечно, здесь следует автономность понимать в обобщенном смысле (см. монографию авторов [5]).

6. Необходимое условие оптимальности типа Келли.

В пакете, рассмотренном в п. 5, положим дополнительно $p_1 = q_1$. Тогда главным членом разложения (21) становится слагаемое

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} \right) a_1^2 + \right. \\ & \quad + \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} \right) \right] a_1 b_1 + \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) b_1^2 \right\} \Big|_{t=0} q_1^2 (1 - q_1)^2 \varepsilon^3. \end{aligned}$$

Поэтому справедлива

Теорема. Пусть $u(t)$, $t \in T$, кусочно-непрерывное, кусочно-гладкое, особое ($\text{rank } \Gamma = 0$) управление. Для оптимальности управления $u(t)$ необходимо, чтобы

$$\sum_{m, s=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_s} \right) \eta_m \eta_s \geq 0. \quad (24)$$

Замечания. 1. Условие (24) получено за счет специального выбора пакета без предположения, что выполнено (22). Иными словами, критерии (22), (24) независимы.

Подчеркнем, что при использовании других методов приходилось предполагать выполненным условие типа равенства (23). Это предположение оказалось, к счастью, лишь недостатком методов доказательства.

2. Если на особом управлении выполнено условие

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) = 0,$$

то, как следует из (14), матрица квадратичной формы (24) является симметрической:

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} \right).$$

§ 3. Многомерные пакеты вариаций (продолжение)

Используем теперь пакеты вариаций для исследования особых управлений, вдоль которых $\text{rank } \Gamma(t) \equiv 1$. Как покажут результаты настоящего параграфа, этот случай отличается от предыдущего нетривиальными особенностями. В этом еще одна специфическая черта многомерных особых управлений.

1. Предварительные замечания. Пусть

$$Q = \left\{ \eta_1, \eta_2: \sum_{m, s=1}^2 \frac{\partial^2 H}{\partial u_m \partial u_s} \eta_m \eta_s = 0, \eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0 \right\}.$$

Для особых ($\text{rank } \Gamma = 1$) управлений множество Q не пусто. Вычислим квадратичную форму

$$\sum_{m, s=1}^2 \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_m \partial u_s} \eta_m \eta_s$$

на элементах множества Q . Так как $\text{rank } \Gamma = 1$ и $\eta' \Gamma \eta \leq 0$, то хотя бы один элемент этой матрицы, стоящий на главной диагонали, отличен от нуля. Предположим, что $\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \neq 0$. На особом управлении

$$\det \Gamma = \left[\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \right)^2 \right] = 0.$$

Поэтому для элементов множества Q выполняется равенство

$$\eta_1 = - \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \right)^{-1} \eta_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m, s=1}^2 \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_m \partial u_s} \eta_m \eta_s &= \\ &= \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \right)^2 - 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \right)^2 \right] \eta_2^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \right)^{-2} = \\ &= \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \right)^2 + \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \right)^2 \right] \eta_2^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} \right)^{-2} = 0, \end{aligned}$$

Итак,

$$\sum_{m, s=1}^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_m \partial u_s} \right) \eta_m \eta_s = 0, \quad \{\eta_m, \eta_s\} \in Q. \quad (1)$$

Введем обозначения:

$$N(\eta_1, \eta_2) = \sum_{m, s=1}^2 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_m \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_s} + \frac{\partial f'}{\partial u_m} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_s} \right) \eta_m \eta_s,$$

$$\frac{d}{dt} N(\eta_1, \eta_2) = \sum_{m, s=1}^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_m \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_s} + \frac{\partial f'}{\partial u_m} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_s} \right) \eta_m \eta_s.$$

2. Условие типа неравенства. Рассмотрим разложение (2.16) на пакете с параметрами $p = q = 1$, $p_1 = 1$, $a_1 = \eta_1$, $b_1 = \eta_2$ и пусть $\{\eta_1, \eta_2\} \in Q$. Тогда с учетом (1), (2.14) из (2.16) получаем

$$-\delta^2 J = N(\eta_1, \eta_2) \varepsilon^2 + \frac{1}{6} \left[\sum_{m, s=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_s} \right) \eta_m \eta_s + \right. \\ \left. + 3 \frac{d}{dt} N(\eta_1, \eta_2) \right] \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3). \quad (2)$$

Вывод. Для оптимальности особого ($\text{rank } \Gamma = 1$) управления необходимо, чтобы

$$N(\eta_1, \eta_2) \leq 0, \quad \{\eta_1, \eta_2\} \in Q.$$

3. Другие необходимые условия оптимальности.

а) Предположим, что существует множество $Q_1 \subset Q$, на котором

$$N(\eta_1, \eta_2) = 0, \quad \{\eta_1, \eta_2\} \in Q_1.$$

Из (2) вытекает следующее необходимое условие оптимальности особого ($\text{rank } \Gamma = 1$) управления:

$$\sum_{m, s=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_s} \right) \eta_m \eta_s + 3 \frac{d}{dt} N(\eta_1, \eta_2) \leq 0,$$

$$\{\eta_1, \eta_2\} \in Q_1.$$

б) Пусть параметры пакета удовлетворяют условиям:

$$p = q = 2, \quad p_1 = q_1, \quad p_2 = 1, \quad \sum_{i=1}^2 a_i q_i = 0, \\ \sum_{i=1}^2 b_i p_i = 0, \quad a_1 = \eta_1, \quad b_1 = \eta_2.$$

На элементах множества $Q(\{\eta_1, \eta_2\} \in Q)$ вторая вариация (2.16) имеет вид

$$-\delta^2 J = \frac{1}{3} \left\{ \frac{3}{2} \sum_{m, s=1}^2 \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u_m \partial u_s} \eta_m \eta_s - \right. \\ \left. - \sum_{m, s=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_s} \right) \eta_m \eta_s (1 - q_1) \right\} \Big|_{t=0} q_1^2 (1 - q_1) \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3). \quad (3)$$

Выделяя главный член в правой части (3) по $(1 - q_1)$, приходим к необходимому условию:

$$\sum_{m, s=1}^2 \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u_m \partial u_s} \eta_m \eta_s \leq 0, \quad \{\eta_1, \eta_2\} \in Q. \quad (4)$$

с) Рассмотрим теперь выражение (3) при малых q_1 ($q_1 \rightarrow 0$). Выделяя в (3) главный относительно параметра q_1 член, получаем следующее необходимое условие оптимальности:

$$\sum_{m, s=1}^2 \left[\frac{3}{2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u_m \partial u_s} - \frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_s} \right) \right] \eta_m \eta_s \leq 0, \quad \{\eta_1, \eta_2\} \in Q.$$

Итак, при переходе к случаю $\text{rank } \Gamma = 1$ форма необходимых условий (2.18), (2.20) сохраняется. Обобщенное условие Келли (2.24) справедливо только в случае, когда левая часть (4) обращается в нуль. Равенство (2.22) перестает быть необходимым условием оптимальности особых ($\text{rank } \Gamma = 1$) управлений.

Пример. $\dot{x}_1 = u_1 x_2 - u_2$, $\dot{x}_2 = u_1$, $\dot{x}_3 = x_1^2 + (u_1 x_2 - u_2)^2$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $|u_1| \leq 2$, $|u_2| \leq 2$, $T = [0, 1]$, $\varphi(x) = x_3$. Управление $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = t$ здесь особое ($\text{rank } \Gamma = 1$) оптимальное. Вдоль него условие (2.22)

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial u_1 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial^2 H'}{\partial u_2 \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_1} = -2 \neq 0$$

и условие (2.24) (левая часть неравенства (4) не нуль)

$$\sum_{m, s=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_s} \right) \eta_m \eta_s = - \frac{4\eta_2^2}{t^2} \leq 0, \quad \{\eta_1, \eta_2\} \in Q$$

не выполняются.

Комментарии к главе III

§ 1. Первые результаты по многомерным особым управлениям принадлежат Б. С. Гоцу [1—3]. Хотя исследование особых управлений в них проведено достаточно далеко, ряд случаев остался без внимания. Сами результаты представлены в форме, очень далекой от сколько-нибудь удобной физической интерпретации. Приведенное нами доказательство заметно проще оригинального и принадлежит С. Я. Гороховик. Работа И. Б. Вапнярского [1] выгодно отличается от цитированных работ Б. С. Гоца [1, 2]. Хотя И. Б. Вапнярским получены более частные результаты (см. следствие 3, стр. 144), но им придана ясная трактовка. Близкие результаты имеются в работе А. А. Болонкина [1].

§§ 2, 3. В изложении этих параграфов мы в основном придерживаемся работы В. А. Срочко [2]. Применение пакета вариаций без особых затруднений привело к принципиально новому результату о независимости условия типа Келли (2.24) от условия типа равенства (2.22). Несомненно, что в многомерном случае возможности пакетов чрезвычайно широки.

ГЛАВА IV

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЧНЫХ ИМПУЛЬСОВ

В этой главе мы впервые избавляемся от предположения об открытости множества управления U . Здесь также ослабляются некоторые требования дифференцируемости. Все это сближает содержание главы с актуальными задачами теории оптимальных процессов. Основной аппарат главы связан с матричными импульсами, новым понятием, возникшим в связи с изучением особых управлений.

§ 1. О возможности обобщения результатов гл. II на задачи с замкнутыми множествами управлений

В данном параграфе обсуждаются особенности применения результатов гл. II; показывается, что предположение об открытости множества U определено не недостатками методов доказательства, а существом дела.

Пусть объект управления описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

где $x = \{x_1, \dots, x_n\}'$ — n -вектор состояния объекта, $u = \{u_1, \dots, u_r\}'$ — r -вектор управляющих воздействий, t — время. С помощью кусочно-непрерывных функций $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_r(t)\}'$, принимающих значения из множества U ,

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (2)$$

требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \Phi(x(t_1)), \quad (3)$$

определенный на траекториях $x(t)$, $t \in T$, системы (1), начинающихся в точке x_0 .

Относительно функций $f(x, u, t)$ будем считать выполненными те свойства, при которых производимые операции имеют смысл.

1. Примеры использования критериев гл. II. Сначала проиллюстрируем применение условия Келли (II.9.3).

Пример 1. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = -x_1^2$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| \leq 1$, $\varphi(x) = x_2$.
Имеем

$$H = \psi_1 u - \psi_2 x_1^2, \quad \dot{\psi}_1 = 2\psi_2 x_1, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \psi_1(1) = 0, \quad \psi_2(1) = -1,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = -2x_1, \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = -2u.$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] = -2.$$

Из определения (I.1.7) следует, что

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \equiv 0.$$

Поэтому $u \equiv 0$. Проверка убеждает, что $u \equiv 0$ — особое управление, но оно не является оптимальным, так как не выполняется условие Келли (II.9.3). Если в условии (II.9.3) левая часть тождественно равна нулю, то можно воспользоваться условиями Коппа — Мойера (II.9.12).

Пример 2. $\dot{x}_1 = x_2 + x_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$, $\dot{x}_3 = -ux_2$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| \leq 1$, $\varphi(x) = x_3$.

Определяем

$$H = \psi_1(x_1 + x_2) + \psi_2(x_1 + u) + ux_2,$$

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1 - \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -u - \psi_1, \quad \psi_1(1) = \psi_2(1) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = x_2 + \psi_2, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = x_1 - \psi_1,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = x_1 + x_2 + \psi_1 + \psi_2, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] \equiv 0.$$

Левая часть (II.9.3) тождественно равна нулю. Поэтому воспользуемся условием (II.9.12), $k = 2$. Имеем

$$\frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = 2x_1 + x_2 - 2\psi_1 - \psi_2,$$

$$\frac{d^4}{dt^4} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = 3x_1 + 2x_2 + 2u + 3\psi_1 + 2\psi_2, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^4}{dt^4} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] = 2 > 0.$$

Особое управление $u \equiv 0$ не является оптимальным.

Отметим особенности применения критерия (II.9.12) для нелинейных по управлению систем. Уже при $k = 1$ это условие предполагает, что особое управление кусочно-гладкое. При $k > 1$ повышенная гладкость требуется и для особых управлений в системах, линейных

по управлению. Другая особенность условий (II.9.3), (II.9.12) состоит в том, что уже в простейших случаях они могут оказаться неэффективными.

Пример 3. $\dot{x}_1 = x_1 + u$, $\dot{x}_2 = -ux_1$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$,
 $T = [0, 1]$, $|u| \leq 1$, $\Phi(x) = x_2$.
 Имеем

$$H = \psi_1(u + x_1) + ux_1, \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = \psi_1 + x_1 + 2u,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] = 2 > 0.$$

Хотя особое управление $u \equiv 0$ заведомо не является оптимальным, условие (II.9.3) на нем выполняется. В примерах 4, 5 все условия (II.9.12), $k \geq 1$, выполняются, хотя особые управления неоптимальны.

Пример 4. $\dot{x}_1 = -u$, $\dot{x}_2 = ux_1$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $T = [0, 1]$,
 $|u| \leq 1$, $\Phi(x) = x_2$.
 Управление $u = 0$ особое, неоптимальное.

Пример 5. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = \frac{\pi u}{2} \cos \frac{\pi x_1}{2}$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$,
 $T = [0, 1]$, $|u| \leq 2$, $\Phi(x) = x_2$.
 Управление $u \equiv 0$ особое, неоптимальное.

Наконец, отметим, что определение (I.1.7) особого управления может включить в число управлений, подозрительных на оптимальность, заведомо неоптимальные управления, которые не удовлетворяют даже принципу максимума (I.1.1).

Пример 6. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = -x_1^3 - u^3$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$,
 $T = [0, 1]$, $|u| \leq 1$, $\Phi(x) = x_2$.

Имеем $H = \psi_1 u + x_1^3 + u^3$. Управление $u \equiv 0$ неособое в смысле принципа максимума, но особое по (I.1.7):

$$\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u^2} = 0.$$

Но оно не может быть оптимальным, ибо не удовлетворяет условию максимума. С другой стороны, ни при каком $k \geq 1$ условия (II.9.12) не могут исключить это управление из числа претендентов на оптимальное, поскольку на этом управлении левые части из (II.9.12) тождественно равны нулю.

2. Контрпримеры. Принцип максимума Понтрягина возник в связи с появлением задач оптимизации, в которых управляющие величины выбираются из замкнутых множеств. Классические необходимые условия оптимальности обычно получаются с помощью двусторонних вариаций, в то время как принцип максимума Понтря-

гина в общем случае построен на односторонних («игольчатых») вариациях. Вариации, использованные Г. Келли [2], Г. Роббинсом [1], Р. Коппом, Г. Мойером [1] для получения условий (II.9.3), (II.9.12), являются, по существу, двусторонними, и поэтому их нельзя, вообще говоря, использовать для задач с замкнутыми множествами U .

Приведем примеры, показывающие, что неравенства (II.9.12) не являются необходимыми условиями оптимальности, если множество U в задаче (1)–(3) замкнуто.

Пример 7. $\dot{x}_1 = u(u+1)$, $\dot{x}_2 = -x_1^2$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $U = \{u : u=0, u=1\}$, $\varphi(x) = x_2$.

Определяем

$$\begin{aligned} H &= \psi_1 u(u+1) + x_1^2, \quad \dot{\psi}_1 = -2x_1, \quad \psi_1(1) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= \psi_1(2u+1), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = -2x_1(2u+1) + 2\psi_1 \dot{u}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) &= -2u(u+1)(2u+1) - 8x_1 \dot{u} + 2\psi_1 \ddot{u}, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] &= -2(u+1)(2u+1) - 2u(2u+1) - 4u(u+1). \end{aligned}$$

Для особого оптимального управления $u \equiv 0$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] = -2,$$

что противоречит (II.9.12), $k=1$.

Условие (II.9.12) может оказаться неверным и для систем (1), линейных по управлению.

Пример 8. $\dot{x}_1 = \frac{u-1}{2}$; $\dot{x}_2 = \frac{u+1}{2}$, $\dot{x}_3 = \frac{u-1}{2} x_1 x_2$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| \leq 1$, $\varphi(x) = x_3$.

Имеем

$$\begin{aligned} H &= \psi_1 \frac{u-1}{2} + \psi_2 \frac{u+1}{2} - \frac{u-1}{2} x_1 x_2, \\ \dot{\psi}_1 &= \frac{u-1}{2} x_2, \quad \dot{\psi}_2 = \frac{u-1}{2} x_1, \quad \psi_1(1) = \psi_2(1) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) - \frac{x_1 x_2}{2}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = -\frac{1}{2} x_1, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) &= -\frac{u-1}{4}, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

В данном примере управление $u^0(t) = 1$ является оптимальным и особым на $[0, 1]$, но условие (II.9.3) на нем не выполняется.

Перейдем к управлениям, особым по нескольким компонентам.

Пример 9.

$$\dot{x}_1 = \frac{u_1 - 1}{2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{u_2 - 1}{2}, \quad \dot{x}_3 = \frac{(u_1 - 1)x_2}{2},$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0,$$

$$T = [0, 1], \quad U = \{u_1, u_2: |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}, \quad \varphi(x) = x_3.$$

Нетрудно подсчитать:

$$H = \psi_1 \frac{u_1 - 1}{2} + \psi_2 \frac{u_2 - 1}{2} - \frac{u_1 - 1}{2} x_2,$$

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = \frac{u_1 - 1}{2}, \quad \psi_1(1) = \psi_2(1) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{1}{2}(\psi_1 - x_2), \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{1}{2}\psi_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u_1} \right) = -\frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u_2} \right) = \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}.$$

В этом примере ни коэффициенты при u_1 , u_2 , ни свободные члены в выражениях (III.2.23) не равны нулю. Особые управления можно найти из уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u_1} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u_2} \right) = 0.$$

Они суть $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ и являются оптимальными.

Второе условие оптимальности (III.2.24) может также нарушаться на особых управлениях.

Пример 10.

$$\dot{x}_1 = \frac{u_1 - 1}{2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{u_1 + 1}{2}, \quad \dot{x}_3 = \frac{u_2 - 1}{2}, \quad \dot{x}_4 = \frac{u_2 + 1}{2},$$

$$\dot{x}_5 = \frac{u_1 - 1}{2} x_1 x_2 + \frac{u_2 - 1}{2} x_3 x_4,$$

$$x_1(0) = \dots = x_5(0) = 0, \quad T = [0, 1], \quad |u_1| \leq 1,$$

$$|u_2| \leq 1, \quad \varphi(x) = x_5.$$

Определяем:

$$\begin{aligned}
 H &= \psi_1 \frac{u_1 - 1}{2} + \psi_2 \frac{u_1 + 1}{2} + \psi_3 \frac{u_2 - 1}{2} + \\
 &\quad + \psi_4 \frac{u_2 + 1}{2} - \frac{u_1 - 1}{2} x_1 x_2 - \frac{u_2 - 1}{2} x_3 x_4, \\
 \dot{\psi}_1 &= \frac{u_1 - 1}{2} x_2, \quad \dot{\psi}_2 = \frac{u_1 + 1}{2} x_1, \quad \dot{\psi}_3 = \frac{u_2 - 1}{2} x_4, \quad \dot{\psi}_4 = \frac{u_2 + 1}{2} x_3, \\
 \psi_1(1) &= \dots = \psi_4(1) = 0, \\
 \frac{\partial H}{\partial u_1} &= \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} - \frac{x_1 x_2}{2}, \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{\psi_3 + \psi_4}{2} - \frac{x_3 x_4}{2}, \\
 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u_1} \right) &= -\frac{u_1 - 1}{4}, \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u_2} \right) = -\frac{u_2 - 1}{4}, \\
 \frac{\partial}{\partial u_1} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u_1} \right) \right] &= -\frac{1}{4}, \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u_1} \right) \right] = 0, \\
 \frac{\partial}{\partial u_1} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u_2} \right) \right] &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u_2} \right) \right] = -\frac{1}{4}, \\
 \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right) \right] u_i u_j &= -\frac{1}{4} (u_1^2 + u_2^2) \leq 0,
 \end{aligned}$$

что противоречит условию (III.2.24).

§ 2. Формула приращения второго порядка

Найдем приращение функционала

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) \quad (1)$$

вдоль траекторий системы

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \quad (2)$$

Пусть $u(t)$, $\tilde{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, — допустимые управления (кусочно-непрерывные r -мерные функции). Обозначим через $x(t)$, $\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ — соответствующие им решения уравнения (2). Тогда

$$\begin{aligned}
 \Delta J(u) &= J(\tilde{u}) - J(u) = \varphi(\tilde{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) = \\
 &= \frac{\partial \varphi'(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) + \\
 &\quad + o(\|\Delta x(t_1)\|^2). \quad (3)
 \end{aligned}$$

Во Введении было показано, что с помощью векторных импульсов $\psi(t)$, удовлетворяющих уравнению

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \Phi(x(t_1))}{\partial x}, \quad (4)$$

можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi'(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) = & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x, \psi, u, t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [H(\tilde{x}, \psi, \tilde{u}, t) - H(x, \psi, \tilde{u}, t)] dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x, \psi, u, t)}{\partial x} \Delta x(t) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} H(\tilde{x}, \psi, \tilde{u}, t) - H(x, \psi, \tilde{u}, t) = & \frac{\partial H'(x, \psi, \tilde{u}, t)}{\partial x} \Delta x(t) + \\ & + \frac{1}{2} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x, \psi, \tilde{u}, t)}{\partial x^2} \Delta x(t) + o_2(\|\Delta x(t)\|^2), \end{aligned}$$

то равенство (5) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi'(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) = & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x, \psi, u, t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x, \psi, u, t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_1} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x, \psi, \tilde{u}, t)}{\partial x^2} \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|^2) dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Займемся преобразованием второго слагаемого в (3). Очевидно тождество

$$\Delta x'(t) \Psi(t) \Delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \Delta x'(t) \Psi(t) \Delta x(t) dt,$$

где $\Psi(t)$, $t \in T$, — произвольная кусочно-гладкая симметрическая матричная функция размера $n \times n$. Положим

$$\Psi(t_1) = -\frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2};$$

тогда из предыдущего равенства имеем ($\Delta x(t_0) = 0$):

$$\begin{aligned} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) = & - \int_{t_0}^{t_1} [\Delta \dot{x}'(t) \Psi(t) \Delta x(t) + \\ & + \Delta x'(t) \dot{\Psi}(t) \Delta x(t) + \Delta x'(t) \Psi(t) \Delta \dot{x}(t)] dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Учтем здесь, что в силу (2)

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} = f(\tilde{x}, \tilde{u}, t) - f(x, u, t) = \\ = \Delta_{\tilde{u}} f(x, u, t) + \frac{\partial f(x, \tilde{u}, t)}{\partial x} \Delta x + o_1(\|\Delta x\|). \end{aligned} \quad (8)$$

После подстановки (8) в (7) получаем

$$\begin{aligned} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) = & -2 \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} f'(x, u, t) \Psi(t) \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\dot{\Psi}(t) + \frac{\partial f'(x, \tilde{u}, t)}{\partial x} \Psi(t) + \Psi(t) \frac{\partial f(x, \tilde{u}, t)}{\partial x} \right] \Delta x(t) dt - \\ & - 2 \int_{t_0}^{t_1} o'_1(\|\Delta x(t)\|) \Psi(t) \Delta x(t) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Умножим обе части (9) на $1/2$ и сложим почленно с (6). Вспоминая представление (3), имеем

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x, \psi, u, t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x, \psi, u, t)}{\partial x} + \Delta_{\tilde{u}} f'(x, u, t) \Psi(t) \right] \Delta x(t) dt - \eta, \\ & \eta = \eta_1 + \eta_2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \eta_2 = & \int_{t_0}^{t_1} o'_1(\|\Delta x(t)\|) \Psi(t) \Delta x(t) dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|^2) dt - o(\|x(t_1)\|^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Величина

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\dot{\Psi}(t) + \frac{\partial f'(x, \tilde{u}, t)}{\partial x} \Psi(t) + \Psi(t) \frac{\partial f(x, \tilde{u}, t)}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 H(x, \psi, \tilde{u}, t)}{\partial x^2} \right] \Delta x(t) dt$$

имеет, очевидно, второй порядок малости по ε на игольчатой вариации управления. Выбором производной $\dot{\Psi}(t)$ можно искусственно увеличить ее порядок на единицу. Действительно, возьмем в качестве функции $\Psi(t)$, $t \in T$, решение матричного уравнения

$$\dot{\Psi} = - \frac{\partial f'(x(t), u(t), t)}{\partial x} \Psi - \Psi \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} - \\ - \frac{\partial^2 H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x^2}, \quad (12) \\ \Psi(t_1) = - \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2}.$$

Тогда

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \Delta \tilde{u} \left[\frac{\partial f'(x, u, t)}{\partial x} \Psi(t) + \Psi(t) \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 H(x, \psi, u, t)}{\partial x^2} \right] \Delta x(t) dt. \quad (13)$$

Итак, приращение функционала (1) вдоль траекторий системы (2) описывается формулой (10), в которой функции $\psi(t)$ и $\Psi(t)$, $t \in T$, определены из уравнений (4) и (12), и остаточные члены η_1 , η_2 имеют вид (13), (11).

§ 3. Необходимые условия оптимальности второго порядка для задач с замкнутыми множествами управления

1. Необходимые условия оптимальности с матричными импульсами. Докажем справедливость следующего утверждения.

Теорема. Пусть функции $f(x, u, t)$, $\varphi(x)$ определены и непрерывны вместе с $\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f(x, u, t)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2}$.

Для того чтобы кусочно-непрерывное управление $u^0(t) = \{u_1^0(t), \dots, u_r^0(t)\}'$, особое на участке $\sigma \subset T$, мес $\sigma > 0$, было оптимальным в задаче (1.1) – (1.3), необходимо;

1) выполнение условия максимума на множестве $T \setminus \sigma$

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t),$$

2) выполнение неравенства

$$\Delta_v f'(x^0(t), u^0(t), t) \Psi^0(t) \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) + \\ + \psi^{0'}(t) \frac{\partial \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \leq 0 \quad (1)$$

для всех $v \in \omega(t)$, $t \in \sigma$, где $\omega(t)$, $t \in T$, — кусочно постоянное многозначное отображение.

Здесь $x^0(t)$ — оптимальная траектория, соответствующая управлению $u^0(t)$, $\psi^0(t) = \{\psi_1^0(t), \dots, \psi_n^0(t)\}'$ — решение уравнения

$$\dot{\psi}^0(t) = - \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \psi^0(t), \quad \psi^0(t_1) = - \frac{\partial \Phi(x^0(t_1))}{\partial x},$$

$\Psi^0(t)$ — $n \times n$ -матричная непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\Psi}^0(t) = - \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Psi^0(t) - \\ - \Psi^0(t) \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} - \\ - \frac{\partial^2 \psi^{0'}(t) f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x^2}, \quad \Psi^0(t_1) = - \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t_1))}{\partial x^2},$$

$$\Delta_v f(x, u, t) = f(x, v, t) - f(x, u, t).$$

Первое утверждение представляет собой принцип максимума, который доказан во Введении (п. 4). Поэтому докажем только второе утверждение теоремы.

Предположим противное: найдутся моменты времени $t = \theta$, $\theta \in \text{int } \sigma$ и точка $v \in \omega(\theta)$, для которых левая часть (1) при $t = \theta$ становится равной α , $\alpha > 0$.

Построим игольчатую вариацию управления

$$\Delta_{\theta v} u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ v - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases} \quad (2)$$

где ε — малое положительное число. В силу (1.1) легко показать, что соответствующее приращение $\Delta_{\theta v} x^0(t)$, $t \in T$, оптимальной траектории обладает свойствами

$$\Delta_{\theta v} x^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \theta], \\ \varepsilon \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) + o(\varepsilon), & t = \theta + \varepsilon, \end{cases} \quad (3)$$

и имеет порядок ε при $t \in [\theta + \varepsilon, t_1]$.

Подсчитаем по формуле (2.10) приращение функционала, вызванное вариацией (2). Учитывая определение особого управления и свойства приращения траектории, имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta v} J(u^0) &= \\ &= - \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \left[\frac{\partial \Delta_v H'(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x} + \Delta_v f'(x^0, u^0, t) \Psi^0(t) \right] \times \\ &\quad \times \Delta_{\theta v} x^0(t) dt - \eta, \\ \eta_1 &= \frac{1}{2} \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \Delta_{\theta v} x^0(t) \Delta_v \left[\frac{\partial f'(x^0, u^0, t)}{\partial x} \Psi^0(t) + \Psi^0(t) \frac{\partial f(x^0, u^0, t)}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial x^2} \right] \Delta_{\theta v} x^0(t) dt \sim \varepsilon^3, \\ \eta_2 &= \int_{\theta}^{t_1} o_1(\|\Delta_{\theta v} x^0(t)\|) \Psi^0(t) \Delta_{\theta v} x^0(t) dt + \int_{\theta}^{t_1} o_2(\|\Delta_{\theta v} x^0(t)\|^2) \times \\ &\quad \times dt - o(\|\Delta_{\theta v} x^0(t_1)\|^2) \sim \varepsilon^3. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (3) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta v} J(u^0) &= -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\frac{\partial \Delta_v H'}{\partial x} \Delta_v f + \Delta_v f' \Psi^0 \Delta_v f \right]_{t=\theta} - o(\varepsilon^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \alpha - o(\varepsilon^2) = -\varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Величина α не зависит от ε и, по предположению, положительна, а $o(\varepsilon^2)/\varepsilon^2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Уменьшим, если потребуется, ε настолько, чтобы выполнялось неравен-

ство $\frac{1}{2} \alpha + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} > 0$. Тогда из (4) следует $\Delta_{\theta} J(u^0) < 0$, что противоречит оптимальности управления $u^0(t)$, $t \in T$. Если множество σ состоит из объединения замкнутых интервалов и точка θ попадает в правый или левый конец одного из них, то небольшие видоизменения игольчатой вариации (2) позволяют учесть и эти случаи при той же схеме доказательства. Итак, утверждение теоремы справедливо для всех $\theta \in \sigma$. Предложение доказано.

Использование доказанной теоремы проиллюстрируем на рассмотренных в § 1 примерах с сохранением их нумерации.

Пример 1. Для управления $u \equiv 0$, особого на $[0, 1]$, имеем $\psi_1(t) = 0$, $\psi_2(t) = -1$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\Psi}_{11} & \dot{\Psi}_{12} \\ \dot{\Psi}_{21} & \dot{\Psi}_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2x_1 & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2x_1 & 0 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Psi_{11}(1) & \Psi_{12}(1) \\ \Psi_{21}(1) & \Psi_{22}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку $x_1 \equiv 0$ при $u \equiv 0$, то $\Psi_{11}(t) = -2(t-1)$, $\Psi_{ij}(t) \equiv 0$, $i, j \neq 1$, $\Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) = \{v, 0\}$.

Условие (1) принимает вид: $-2(t-1)v^2 \leq 0$ для всех $v \in [-1, 1]$, $t \in [0, 1]$. Это невозможно. Управление $u \equiv 0$ не является оптимальным.

Пример 2. На особом управлении $u \equiv 0$ имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\Psi}_{11} & \dot{\Psi}_{12} & \dot{\Psi}_{13} \\ \dot{\Psi}_{21} & \dot{\Psi}_{22} & \dot{\Psi}_{23} \\ \dot{\Psi}_{31} & \dot{\Psi}_{32} & \dot{\Psi}_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -u & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -u & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Psi_{11}(1) & \Psi_{12}(1) & \Psi_{13}(1) \\ \Psi_{21}(1) & \Psi_{22}(1) & \Psi_{23}(1) \\ \Psi_{31}(1) & \Psi_{32}(1) & \Psi_{33}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда $\Psi_{ij}(t) \equiv 0$, $\Delta_v f(x(t), u(t), t) = \{0, v, 0\}$,

$$\psi'(t) \frac{\partial \Delta_v f(x(t), u(t), t)}{\partial x} = \{0, v, 0\}.$$

Условие (1) в данном случае при $v \neq 0$ приводит к противоречивому неравенству $v^2 \leq 0$. Управление $u \equiv 0$ неоптимально.

Пример 3. Вдоль особого управления $u \equiv 0$ имеем $x_1(t) = x_2(t) = \psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) = -1$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\Psi}_{11} & \dot{\Psi}_{12} \\ \dot{\Psi}_{21} & \dot{\Psi}_{22} \end{pmatrix} &= \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\quad \begin{pmatrix} \Psi_{11}(1) & \Psi_{12}(1) \\ \Psi_{21}(1) & \Psi_{22}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда $\Psi_{ij} \equiv 0$. Далее, $\Delta_v f(0, 0, t) = \{v, 0\}$, $\psi'(t) \frac{\partial \Delta_v f(0, 0, t)}{\partial x} = \{v, 0\}$.

Условие (1) приводит к противоречивому неравенству $v^2 \leq 0$ при $v \neq 0$. Управление $u \equiv 0$ неоптимально.

Пример 4. Для особого управления $u \equiv 0$ имеем $x_1(t) = x_2(t) = \psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) = -1$, $H = -\psi_1 u - u x_1$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\Psi}_{11} & \dot{\Psi}_{12} \\ \dot{\Psi}_{21} & \dot{\Psi}_{22} \end{pmatrix} &= \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\quad \begin{pmatrix} \Psi_{11}(1) & \Psi_{12}(1) \\ \Psi_{21}(1) & \Psi_{22}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{ij}(t) \equiv 0, \\ &\quad \Delta_v f(x(t), u(t), t) = \{-v, 0\}, \\ &\quad \frac{\partial \Delta_v f(x(t), u(t), t)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Условие (1) не выполняется, ибо имеем $v^2 \leq 0$. Управление $u \equiv 0$ не является оптимальным.

Пример 5. Рассматриваемая задача эквивалентна следующей:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad T = [0, 1], \quad |u| \leq 2, \quad \varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{2}.$$

Имеем $H = \psi u$. На особом управлении $u(t) = 1$ выполняются равенства $x(t) = t$, $\psi(t) = 0$, $\Psi_{11} = -0' \cdot \Psi_{11} - \Psi_{11} \cdot 0 = 0$, $\Psi_{11}(1) = -\pi^2/4$.

Отсюда $\Psi_{11}(t) = \pi^2/4$, $\Delta_v f(x(t), u(t), t) = v - 1$

Условие (1) не выполняется $\left(\frac{\pi^2}{4} (v - 1)^2 \leq 0 \right)$. Управление $u(t) \equiv 1$ не является оптимальным.

Пример 7. Для особого управления $u \equiv 0$ имеем $x_1(t) = x_2(t) = \psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) \equiv -1$,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\Psi}_{11} & \dot{\Psi}_{12} \\ \dot{\Psi}_{21} & \dot{\Psi}_{22} \end{Bmatrix} = \\ = - \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -2x_1 & 0 \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -2x_1 & 0 \end{Bmatrix} - \\ - \begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \Psi_{11}(1) & \Psi_{12}(1) \\ \Psi_{21}(1) & \Psi_{22}(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда $\Psi_{11}(t) = -2(t-1)$, $\Psi_{ij}(t) \equiv 0$, $i, j \neq 1$, $\Delta_v f(x(t), u(t), t) = \{v(v+1), 0\}$.

Условие (1) принимает вид $-2(t-1)v^2(v+1)^2 \leq 0$. Поскольку параметр v может принимать лишь два значения: 0 и -1 , то условие (1) выполнено. Управление $u = 0$ подозрительно на оптимальность.

Пример 8. На особом управлении $u(t) \equiv 1$ выполняются равенства: $x_1(t) = x_3(t) = \psi_1(t) = \psi_2(t) = 0$, $x_2(t) = t$, $\psi_3(t) \equiv -1$,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\Psi}_{11} & \dot{\Psi}_{12} & \dot{\Psi}_{13} \\ \dot{\Psi}_{21} & \dot{\Psi}_{22} & \dot{\Psi}_{23} \\ \dot{\Psi}_{31} & \dot{\Psi}_{32} & \dot{\Psi}_{33} \end{Bmatrix} = \\ = - \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{u-1}{2} x_2 & \frac{u-1}{2} x_1 & 0 \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} \end{Bmatrix} - \\ - \begin{Bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{u-1}{2} x_2 & \frac{u-1}{2} x_1 & 0 \end{Bmatrix} - \\ - \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{u-1}{2} & 0 \\ -\frac{u-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \Psi_{11}(1) & \Psi_{12}(1) & \Psi_{13}(1) \\ \Psi_{21}(1) & \Psi_{22}(1) & \Psi_{23}(1) \\ \Psi_{31}(1) & \Psi_{32}(1) & \Psi_{33}(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \Psi_{ij}(t) \equiv 0. \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{\partial \Delta_v f(x(t), u(t), t)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{v-1}{2} t & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_v f(x(t), u(t), t) = \left\{ \frac{v-1}{2}, \frac{v-1}{2}, 0 \right\}.$$

Условие (1) принимает вид $-\frac{(v-1)^2}{4} t \leq 0$, т. е. управление $u(t) \equiv 1$ остается претендентом на оптимальное.

Пример 9. Для особых управлений $u_1 = u_2 \equiv 1$ выполняются равенства: $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = \psi_1(t) = \psi_2(t) \equiv 0$, $\psi_3(t) \equiv -1$,

$$\begin{pmatrix} \dot{\Psi}_{11} & \dot{\Psi}_{12} & \dot{\Psi}_{13} \\ \dot{\Psi}_{21} & \dot{\Psi}_{22} & \dot{\Psi}_{23} \\ \dot{\Psi}_{31} & \dot{\Psi}_{32} & \dot{\Psi}_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_1-1}{2} & 0 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_1-1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11}(1) & \Psi_{12}(1) & \Psi_{13}(1) \\ \Psi_{21}(1) & \Psi_{22}(1) & \Psi_{23}(1) \\ \Psi_{31}(1) & \Psi_{32}(1) & \Psi_{33}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{ij}(t) \equiv 0,$$

$$\Delta_v f(x(t), u(t), t) = \left\{ \frac{v_1-1}{2}, \frac{v_2-1}{2}, 0 \right\},$$

$$\frac{\partial \Delta_v f(x(t), u(t), t)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_1-1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие (1) принимает вид $-\frac{1}{4}(v_1-1)(v_2-1) \leq 0$. Управления $u_1 = u_2 \equiv 1$ подозрительны на оптимальность.

Пример 10. Вычисления идут по схеме примера 8, но ввиду громоздкости (большой порядок) опущены. Управления $u_1(t) = u_2(t) \equiv 1$ удовлетворяют условию (1) и поэтому могут быть оптимальными.

Рассмотренные примеры показывают, что необходимое условие оптимальности (1) применимо как в частном случае, когда $u^0(t) \in \text{int } U$, так и в общем случае —

$u(t) \in U$. В примере 1 оба условия (II.9.3), (1) «различили» неоптимальное особое управление. В примере 2 условие (II.9.3) неэффективно, но условия (II.9.12), $k = 2$, и (1) позволили «отсеять» неоптимальные особые управления. В примерах 3—5 все условия (II.9.12), $k \geq 1$, неэффективны, а условие (1) «распознало» неоптимальные особые управления. В примере 6 § 1 неоптимальное управление, особое в смысле (I.1.7), можно распознать, исходя из принципа максимума (I.1.1), хотя этого нельзя сделать с помощью всех условий (II.9.12), $k \geq 1$. Примеры 8—10 показывают, что условие (1) «работает» и в тех случаях, когда условия (II.9.3), (II.9.12), (III.2.23), (III.2.24) неприменимы.

§ 4. Необходимые условия оптимальности высокого порядка в матричных импульсах

Теорема, доказанная в п. 1 § 3, доставляет лишь необходимые условия оптимальности и поэтому может оказаться, что приводимое там условие в некоторых случаях будет неэффективным, т. е. критерий (3.1) вдоль допустимого управления выполняется со знаком равенства. Ниже рассматривается более грубый случай особого управления.

1. Формула приращения h -го порядка. Выведем формулу приращения функционала

$$J(u) = \varphi(x(t_1)), \quad (1)$$

заданного на траекториях уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ x &= \{x_1, \dots, x_n\}', \quad u = \{u_1, \dots, u_r\}'. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $u(t)$, $\tilde{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, — кусочно-непрерывные векторные функции со значениями из множества U , $x(t)$, $\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$, — соответствующие им траектории системы (2). Для целого положительного числа h в силу (1) имеем

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= \varphi(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)) = \\ &= \sum_{k=1}^h \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \varphi(x(t_1))}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} \Delta x_{j_1}(t_1) \dots \Delta x_{j_k}(t_1) + o(\|\Delta x(t_1)\|^h). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь индекс j_k при каждом k , $k = 1, 2, \dots, h$, принимает значения $1, 2, \dots, n$.

Как и ранее, для преобразования (3) рассмотрим тождества

$$\begin{aligned} \psi_{j_1 \dots j_k}(t) \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_k}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \psi_{j_1 \dots j_k}(t) \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_k}(t) dt, \quad (4) \end{aligned}$$

где $\psi_{j_1 \dots j_k}(t)$, $t \in T$, $k = 1, \dots, h$, — произвольные кусочно-гладкие функции. Положив в (4)

$$\psi_{j_1 \dots j_k}(t_1) = - \frac{\partial^k \varphi(x(t_1))}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}, \quad \Delta x_{j_k}(t_0) = 0,$$

перепишем (3) в виде

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^h \frac{1}{k!} \psi_{j_1 \dots j_k}(t) \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_k}(t) dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^h \sum_{l=1}^k \frac{1}{k!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_{k-1}}(t) \Delta x_{j_1}(t) \dots \\ \dots \Delta x_{j_{l-1}}(t) \Delta \dot{x}_j(t) \Delta x_{j_l}(t) \dots \\ \dots \Delta x_{j_{k-1}}(t) dt + o(\|\Delta x(t_1)\|^h). \quad (5) \end{aligned}$$

Займемся преобразованием второго слагаемого в правой части равенства (5). Подставим в подынтегральное выражение значение производной $\Delta \dot{x}_j$ из (2):

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_j = f_j(\tilde{x}, \tilde{u}, t) - f_j(x, u, t) = \\ = \Delta_{\tilde{u}} f_j(x, u, t) + \sum_{m=1}^{h-k+1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_j(x, \tilde{u}, t)}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_{k+m-1}}} \Delta x_{j_k} \dots \Delta x_{j_{k+m-1}} + \\ + o_j(\|\Delta x\|^{h-k+1}). \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}
 \Delta J(u) = & - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^h \frac{1}{k!} \dot{\psi}_{j_1 \dots j_k}(t) \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_k}(t) dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^h \sum_{l=1}^k \frac{1}{k!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_l \dots j_{k-1}}(t) \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_{l-1}}(t) \times \\
 & \quad \times \Delta \bar{u}_{f_j}(x(t), u(t), t) \Delta x_{j_l}(t) \dots \Delta x_{j_{k-1}}(t) dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^h \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^{h-k+1} \frac{1}{k! m!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_l \dots j_{k-1}}(t) \times \\
 & \quad \times \frac{\partial^m f_j(x(t), \bar{u}(t), t)}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_{k+m-1}}} \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_{k+m-1}}(t) dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^h \sum_{l=1}^k \frac{1}{k!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_l \dots j_{k-1}}(t) \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_{l-1}}(t) \times \\
 & \quad \times o_j(\|\Delta x(t)\|^{h-k+1}) \Delta x_{j_l}(t) \dots \Delta x_{j_{k-1}}(t) dt + o(\|\Delta x(t_1)\|^h).
 \end{aligned} \tag{6}$$

В тройной сумме введем новый индекс суммирования $m' = k + m - 1$ и изменим порядок суммирования. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^h \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^{h-k+1} \frac{1}{k! m!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_l \dots j_{k-1}}(t) \frac{\partial^m f_j(x(t), \bar{u}(t), t)}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_{k+m-1}}} \times \\
 & \quad \times \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_{k+m-1}}(t) dt = \\
 & = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m=1}^h \sum_{l=1}^m \sum_{k=l}^m \frac{1}{k! (m-k+1)!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} j_l j_l \dots j_{k-1}}(t) \times \\
 & \quad \times \frac{\partial^{m-k+1} f_j(x(t), \bar{u}(t), t)}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_m}} \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_m}(t) dt. \tag{7}
 \end{aligned}$$

(Здесь для простоты m' заменено на m .)

Выражение (7) подставим в (6) вместе с функциями $\psi_{j_1 \dots j_m}(t)$, $t \in T$, вычисленными согласно системе

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_{j_1 \dots j_m}(t) = \\ = - \sum_{l=1}^m \sum_{k=l}^m \frac{m!}{k!(m-k+1)!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} l j_l \dots j_{k-1}}(t) \times \\ \times \frac{\partial^{m-k+1} f_j(x(t), u(t), t)}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_m}}, \\ \psi_{j_1 \dots j_m}(t_1) = - \frac{\partial^m \Phi(x(t_1))}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}}, \quad m = 1, 2, \dots, h. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Тогда получим формулу приращения следующего вида:

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = & - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m=1}^h \sum_{l=1}^m \frac{1}{m!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} l j_l \dots j_{m-1}}(t) \Delta x_{j_1}(t) \dots \\ & \dots \Delta x_{j_{l-1}}(t) \Delta_{\bar{u}} f_j(x(t), u(t), t) \Delta x_{j_l}(t) \dots \Delta x_{j_{m-1}}(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m=1}^h \sum_{l=1}^m \sum_{k=l}^m \frac{1}{k!(m-k+1)!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} l j_l \dots j_{k-1}}(t) \times \\ & \times \frac{\partial^{m-k+1} \Delta_{\bar{u}} f_j(x(t), u(t), t)}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_m}} \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_m}(t) dt - \eta_1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 = & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m=1}^h \sum_{l=1}^m \frac{1}{m!} \psi_{j_1 \dots j_m}(t) \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_{l-1}}(t) \times \\ & \times o_{j_l}(\|\Delta x(t)\|^{h-m+1}) \Delta x_{j_{l+1}}(t) \dots \Delta x_{j_m}(t) dt + o(\|\Delta x(t_1)\|^h). \end{aligned}$$

Наконец, введя обозначение

$$\begin{aligned} Q_{j_1 \dots j_m}(x, \psi, u, t) = & \sum_{l=1}^{m+1} \frac{1}{(m+1)!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} l j_l \dots j_m} f_j(x, u, t) + \\ & + \sum_{l=1}^m \sum_{k=l}^m \frac{1}{k!(m-k+1)!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} l j_l \dots j_{k-1}} \frac{\partial^{m-k+1} f_j(x, u, t)}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_m}}, \\ & m = 1, 2, \dots, h-1, \end{aligned} \quad (10)$$

перепишем (9) в компактной форме:

$$\Delta J(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \psi_{j_1}(t) \Delta_v f_{j_1}(x(t), u(t), t) dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{m=1}^{h-1} \Delta_v Q_{j_1 \dots j_m}(x(t), \psi(t), u(t), t) \Delta x_{j_1}(t) \dots \\ \dots \Delta x_{j_m}(t) dt - \eta, \quad (11)$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2,$$

$$\eta_2 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=1}^h \sum_{k=l}^h \frac{1}{k! (h-k+1)!} \psi_{j_1 \dots j_{l-1} j_l \dots j_{k-1}}(t) \times \\ \times \frac{\partial^{h-k+1} \Delta_v f_{j_1}(x(t), u(t), t)}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_h}} \Delta x_{j_1}(t) \dots \Delta x_{j_h}(t) dt. \quad (12)$$

Таким образом, приращение функционала (1) на траекториях системы (2) вычисляется по формуле (11), в которой функции $\psi_{j_1 \dots j_m}$, $Q_{j_1 \dots j_{m-1}}$ определены соотношениями (8), (10) и остаточные члены η_1 , η_2 имеют вид (9), (12).

2. Необходимые условия оптимальности порядка h . Оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, назовем особым управлением h -го порядка, если вдоль него выполняются равенства

$$\left. \begin{aligned} \psi_{j_1}^{0'}(t) \Delta_v f_{j_1}(x^0(t), u^0(t), t) &= 0, \\ \Delta_v Q_{j_1 \dots j_m}(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) &= 0, \\ m &= 1, 2, \dots, h-1, \\ v &\in U, \quad t \in T, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где $\psi_{j_1}^0(t), \dots, \psi_{j_1 \dots j_m}^0(t)$ — решения уравнений (8) при $u = u^0$, $x = x^0$.

Для получения необходимых условий оптимальности особого управления h -го порядка воспользуемся формулой приращения (11). Зададим игольчатую вариацию управления $u^0(t)$ вида (3.2). Тогда главный по ε член в приращении $\Delta_{\theta_v} J(u^0)$ вдоль управления $u^0(t)$, $t \in T$,

имеет порядок ε^{h+1} и может быть записан в форме

$$\Delta_{\theta v} J(u^0) = -\frac{1}{h+1} \varepsilon^{h+1} \Delta_v Q_{i_1 \dots i_h} \Delta_v f_{i_1} \dots \Delta_v f_{i_h} \Big|_{t=\theta} + o(\varepsilon^{h+1}). \quad (14)$$

Поскольку в представлении (14) левая часть неотрицательна, то приходим к следующему заключению.

Теорема. Пусть функции $f(x, u, t)$, $\varphi(x)$ определены и непрерывны вместе со своими производными

$$\partial^\alpha f / \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\alpha}, \quad \partial^\alpha \varphi / \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, h+1.$$

Для оптимальности кусочно-непрерывного управления $u^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяющего условиям (13), необходимо, чтобы при всех t, v , $t \in T$, $v \in U$ выполнялось неравенство

$$\Delta_v Q_{i_1 \dots i_h}(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) \Delta_v f_{i_1}(x^0(t), u^0(t), t), \dots \\ \dots \Delta_v f_{i_h}(x^0(t), u^0(t), t) \leq 0, \quad (15)$$

где $Q_{i_1 \dots i_h}$ определены формулой (10).

Пример. В качестве иллюстрации теоремы рассмотрим задачу $\dot{x} = x^3 + u$, $x(0) = 0$, $-1 \leq u \leq 0$, $\varphi(x) = x^3$, $T = [0, 1]$.

Управление $u = 0$ — особое второго порядка. Для него

$$\psi_1(t) = \psi_{11}(t) \equiv 0 \text{ и } \psi_{111}(t) = -6, \quad \psi_1 \Delta_v f = \Delta_v Q_1 = 0, \quad 1 \leq v \leq 0, \quad t \in T.$$

Условие (15) при $h = 2$ не выполняется: $-3v^3 \leq 0$. Следовательно, рассматриваемое управление неоптимально.

Замечания. 1. Если множество U выпукло и функция f дифференцируема по u , то из неравенства (15) вытекает новое необходимое условие оптимальности особых управлений h -го порядка

$$\frac{\partial Q_{i_1 \dots i_h}(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_{i_1}} \frac{\partial f_{i_1}(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_{i_2}} \dots \\ \dots \frac{\partial f_{i_h}(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_{i_{h+1}}} \Delta_v u_{i_1}^0(t) \dots \Delta_v u_{i_{h+1}}^0(t) \leq 0.$$

Здесь индекс i_s при каждом s , $s = 1, \dots, h+1$, пробегает значения $1, 2, \dots, r$; $\Delta_v u = v - u$.

2. Если множество U открыто, то при нечетном h вдоль особого управления h -го порядка выполняется неравенство

$$\frac{\partial Q_{j_1 \dots j_h}(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_{i_1}} \frac{\partial f_{j_1}(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_{i_2}} \dots \dots \frac{\partial f_{j_h}(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_{i_{h+1}}} v_{i_1} \dots v_{i_{h+1}} \leq 0$$

для всех чисел $v_{i_1}, \dots, v_{i_{h+1}}$.

При четном h имеет место условие

$$\frac{\partial Q_{j_1 \dots j_h}(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_{i_1}} \frac{\partial f_{j_1}(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_{i_2}} \dots \dots \frac{\partial f_{j_h}(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_{i_{h+1}}} = 0.$$

Комментарии к главе IV

§ 1. Вопрос о распространении результатов работ Г. Келли, Р. Коппа, Г. Мойера [1] на задачи оптимизации с замкнутыми множествами управления возник, по-видимому, давно. Как уже отмечалось, оперировать с открытыми множествами удобно, там хорошо работает аналитический аппарат. Часто при предварительных исследованиях принимаются любые допущения, облегчающие путь к результату. Наиболее, быть может, известный тому пример — динамическое программирование. После того как результат оказался интересным, стараются усовершенствовать технику доказательства и избавиться от стеснительных предположений. В случае особых управлений в начальный период, видимо, предполагалось идти по такому же пути. Результаты для открытого множества управлений были хороши, в теории необходимых условий оптимальности первого порядка были известны успешные попытки «раскрытия» замкнутых множеств, и дело оставалось за малым — объединить эти результаты. Такая мысль встречается в некоторых работах, но конкретной реализации она не получила.

Как показывают примеры данного параграфа, критерии, приведенные в гл. II, нельзя распространить на случай замкнутых множеств управлений.

§§ 2, 3. Эти результаты имеются в работах авторов [2, 3].

§ 4. Здесь мы следуем нашей монографии [5].

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОСНОВНЫМИ ГРУППАМИ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Вопрос о связи между различными условиями оптимальности интересен прежде всего из-за возможности более глубокого проникновения в существо рассматриваемых задач. В свое время открытие Л. И. Розоноэром [1—3] связи между принципом максимума и динамическим программированием помогло не только по-новому взглянуть на эти теории, но и заставило еще настойчивее обратиться к вариационному исчислению и сопоставить с ним теорию оптимальных процессов. В данной главе основное внимание уделяется установлению связи между критерием Келли и условием, полученным в гл. IV.

§ 1. Условие оптимальности Келли и условие оптимальности, выраженное через матричные импульсы

Среди необходимых условий оптимальности особых управлений, полученных в гл. II для открытых множеств U на основе рассмотрения второй вариации $\delta^2 J$, выделяются два критерия:

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \leq 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \geq 0. \quad (2)$$

Только они являются безусловными в том смысле, что могут быть применены для исследования на оптимальность любого особого управления, независимо от выполнения вдоль него каких-либо предварительных соотношений. Условия (1), (2) получаются из второй вариации функционала независимо друг от друга на основе использования различных типов вариаций управления. Так, для получения необходимого условия (1) достаточно ограничиться «игольчатой» вариацией, которая выделяется из пакета при $p = 1$. Условие (2) требует

для своего получения применения двусторонних вариаций со свойством (II.9.4), что эквивалентно свойству (II.9.1) пакета. Рассматриваемые условия были получены с принципиально разных позиций и послужили источником двух направлений в теории особых управлений. Поэтому представляет интерес исследование связи между этими условиями.

Предположим, что оптимальное особое управление таково, что в некоторой точке $\theta \in T$:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \Big|_{t=\theta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \Big|_{t=\theta \pm 0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Тогда из (II.10.8) и (II.10.9) следует, что для этого управления

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=\theta} \leq 0,$$

что не противоречит (II.9.3) только в случае, когда

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=\theta} = 0. \quad (4)$$

Поэтому справедливо следующее утверждение:

Теорема. Пусть $u(t)$, $t \in T$, — особое управление, удовлетворяющее в некоторой точке $\theta \in T$ условиям (3). Тогда для оптимальности этого управления в точке $t = \theta$ необходимо выполнение условия типа равенства (4).

З а м е ч а н и я. 1. Таким образом, на оптимальном особом управлении из равенств (3) следует (4). Обратное, вообще говоря, неверно.

П р и м е р. $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $\dot{x}_3 = x_1^2$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| < 1$, $\Phi(x) = x_3$.

Управление $u = 0$ — особое, оптимальное. Нетрудно подсчитать, что на этом управлении условия (2), (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) &\equiv 0, \\ \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{2}{3} (t-1)^3 \leq 0, \quad t \in T. \end{aligned}$$

2. Из приведенной теоремы следует, что если на оптимальном особом управлении левая часть (1) тождественно равна нулю на T (условие (1) не эффективно), то левая часть (2) на таком управлении также обращается в тождественный нуль (условие (2) также «не работает»).

3. Условие типа равенства (4) может быть весьма эффективным критерием.

Пример. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{x}_3 = -ux_2$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| < 1$, $\varphi(x) = x_3$.

На особом управлении $u = 0$:

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 2 > 0.$$

Хотя условие (2) выполняется, особое управление неоптимально в силу доказанной теоремы.

4. В общем случае условия (1), (2) независимы в том смысле, что в некоторых случаях неоптимальное особое управление «распознает» одно, но не «распознает» другое условие, и наоборот.

Примеры. 1. $\dot{x}_1 = x_1 + u$, $\dot{x}_2 = -ux_1$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $|u| < 1$, $T = [0, 1]$, $\varphi(x) = x_2$.

На особом управлении $u = 0$ условие (2) выполняется:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) = 2 > 0.$$

Однако в силу (1)

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} = 1 > 0,$$

закключаем, что $u = 0$ не может быть оптимальным.

2. Дана система

$$\dot{x}_1 = \frac{u-1}{2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{u+1}{2}, \quad \dot{x}_3 = \frac{u-1}{2} x_1 x_2,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0,$$

где $|u| < 2$, $T = [0, 1]$, $\varphi(x) = x_3$.

Здесь на особом управлении $u = 1$ выполняется условие (1):

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{t}{4} \leq 0, \quad t \in [0, 1],$$

но не выполняется условие (2):

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) = -\frac{1}{4} < 0.$$

Управление $u = 1$ неоптимально.

§ 2. Связь между двумя условиями оптимальности многомерных особых управлений

Для многомерных особых управлений в гл. III получены два типа необходимых условий оптимальности,

$$\sum_{m, s=1}^2 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_m \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_s} + \frac{\partial f'}{\partial u_m} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_s} \right) \eta_m \eta_s \leq 0,$$

$$\sum_{m, s=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_s} \right) \eta_m \eta_s \geq 0.$$

Каждое из этих условий независимо от другого в смысле, указанном в предыдущем параграфе. Поскольку эти условия в оригинальных работах были получены из разных соображений, то интересно сравнить их между собой. Оказывается справедливым утверждение, аналогичное теореме из § 1.

Теорема. Пусть особое оптимальное управление удовлетворяет условию

$$\sum_{m, s=1}^2 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_m \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_s} + \frac{\partial f'}{\partial u_m} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_s} \right) \Big|_{t=0} \eta_m \eta_s = 0$$

и, кроме того,

$$\sum_{m, s=1}^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u_m \partial x} \frac{\partial f}{\partial u_s} + \frac{\partial f'}{\partial u_m} \Psi \frac{\partial f}{\partial u_s} \right) \Big|_{t=0} \eta_m \eta_s = 0.$$

Тогда

$$\sum_{m, s=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_m} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_s} \right) \Big|_{t=0} \eta_m \eta_s = 0.$$

Доказательство сразу же вытекает из необходимых условий оптимальности (III.2.20) и (III.2.24).

§ 3. Метод динамического программирования при исследовании особых управлений

1. Предварительные замечания. Известно, что в теории оптимальных процессов большую роль играет метод динамического программирования Беллмана. В этом методе основные рассуждения базируются на эвристи-

ческом принципе оптимальности, который позволяет составлять соответствующие дифференциальные уравнения процесса. В задаче оптимизации

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ u(t) &\in U, \quad J(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min_u, \\ x &= \{x_1, \dots, x_n\}', \quad u = \{u_1, \dots, u_r\}' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

уравнение Беллмана имеет вид

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_{u \in U} \frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} f(x, u, t), \quad S(x, t_1) = \varphi(x). \quad (2)$$

Пусть $S(x, t)$ — гладкое решение уравнения (2). Тогда оптимальное управление $u^0(x, t)$ находится из условия

$$\frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} f(x, u^0(x, t), t) = \min_{u \in U} \frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} f(x, u, t). \quad (3)$$

В регулярных случаях оптимальное управление из условия (3) определяется однозначно. Однако при решении широкого круга задач возникает положение, когда правая часть из (3) не зависит от управления на некотором множестве Ω элементов x, t . Подобные случаи назовем *особыми*.

Допустим, что задача (1) не имеет решения в классе измеримых функций $u(t)$, $t \in T$, со значениями в ограниченном множестве U . Перейдем к вспомогательной задаче

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(y, v_i(t), t), \quad y(t_0) = x_0, \quad t \in T, \\ \alpha_i(t) &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) = 1, \quad v_i(t) \in U, \quad i = 1, \dots, n+1, \\ J(\alpha, v) &= \varphi(y(t_1)) \rightarrow \min_{\alpha, v}, \quad y = \{y_1, \dots, y_n\}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для задачи (4) уравнение Беллмана имеет вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \tilde{S}(y, t)}{\partial t} &= \min_{\alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1, v_i \in U} \frac{\partial \tilde{S}'(y, t)}{\partial y} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(y, v_i, t), \\ \tilde{S}(y, t_1) &= \varphi(y). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (5) сводится к следующему:

$$-\frac{\partial \tilde{S}(y, t)}{\partial t} = \min_{v \in U} \frac{\partial \tilde{S}'(y, t)}{\partial y} f(y, v, t), \quad \tilde{S}(y, t) = \varphi(y),$$

которое с точностью до обозначений совпадает с уравнением (2).

Отсюда следует, что уравнения Беллмана для задач, не имеющих решения, и их модификаций, обладающих решением, совпадают, а условия, из которых во второй задаче находятся оптимальные управления, не зависят от группы управляющих параметров. Таким образом, переход к вспомогательной задаче всегда приводит к появлению особого случая, и уравнение Беллмана для его вычисления становится неэффективным.

2. Дифференциальные уравнения для оптимального процесса в особом случае. Вложим задачу (1) в совокупность задач

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= f(x, u, \tau), \quad x(t) = x, \quad \tau \in T_t = [t, t_1], \quad u(\tau) \in U, \\ J(u) &= \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min_u, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

зависящих от n -вектора x и скаляра t .

Введем функцию Беллмана

$$S(x, t) = \min_{u(\tau) \in U, \tau \in T_t} J(u).$$

Для любых \bar{x}, \bar{t} очевидно неравенство

$$S(x, t) \leq S(\bar{x}, \bar{t}), \quad (7)$$

где $\bar{x} = x(\bar{t})$ — положение в момент $\tau = \bar{t}$ точки $x(\tau)$, движущейся по траектории уравнения (6) с допустимым управлением $u(\tau)$, $\tau \in T_t$. Неравенство (7) означает, что любое приращение функции $S(x, t)$ вдоль допустимой траектории системы (6) неотрицательно:

$$\Delta S(x, t) \big|_{(6), u(\tau) \in U} \geq 0. \quad (8)$$

Разделим обе части этого неравенства на $\Delta \tau = \bar{t} - t$ и устремим $\Delta \tau$ к нулю. Если предел в левой части существует, то из (8) получаем

$$\frac{dS(x, t)}{dt} \bigg|_{(6), u \in U} \geq 0, \quad (9)$$

Может оказаться, что на некотором множестве $\Omega_1 = \Omega$ элементов x, t условие (9) выполняется как равенство. Тогда из (8) легко следует (если соответствующий предел существует) неравенство

$$\left. \frac{d^2 S(x, t)}{dt^2} \right|_{(6), u \in U} \geq 0. \quad (10)$$

Пусть аналогично на некоторых множествах Ω_m выполняются равенства

$$\left. \frac{d^m S(x, t)}{dt^m} \right|_{(6), u \in U} = 0, \quad m = 1, \dots, k. \quad (11)$$

Тогда из (8) получается неравенство

$$\left. \frac{d^{k+1} S(x, t)}{dt^{k+1}} \right|_{(6), u \in U} \geq 0, \quad \{x, t\} \in \Omega_k. \quad (12)$$

С другой стороны, если точка \bar{x} лежит на оптимальной траектории $\bar{x} = x^0(\bar{t})$, то, очевидно, имеем

$$S(x, t) = S(\bar{x}, \bar{t}),$$

т. е. приращение $\Delta S(x, t)$ вдоль оптимальной траектории тождественно равно нулю,

$$\Delta S(x, t)|_{(6), u^0(\tau)} \equiv 0.$$

Это значит, что для оптимального управления u^0 выполняются равенства

$$\left. \frac{d^m S(x, t)}{dt^m} \right|_{(6), u^0} = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Объединяя (9) с (13), при $k = 1$ получаем

$$\min_{u \in U} \left. \frac{dS(x, t)}{dt} \right|_{(6), u} = 0. \quad (14)$$

Аналогично из (12), (13) с учетом условия (11) следует

$$\min_{u \in U} \left. \frac{d^k S(x, t)}{dt^k} \right|_{(6), u} = 0, \quad \{x, t\} \in \Omega_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (15)$$

При явной записи операторов d^h/dt^h через условия задачи из уравнений (14), (15) получаются уравнения

в частных производных. Например, при $k = 1$ имеем

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_{u \in U} \frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} f(x, u, t),$$

что совпадает с уравнением Беллмана (2). Пусть $k=2$ и выполняется (11), $m=1$. Тогда на множестве Ω_1 функция $S(x, t)$ в силу (15) при $k=2$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial t^2} = \min_{u \in U} \left[2 \frac{\partial^2 S'}{\partial x \partial t} f(x, u, t) + \right. \\ \left. + f'(x, u, t) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} f(x, u, t) + \frac{\partial S'}{\partial x} \frac{d}{dt} f(x, u, t) \right]_{(6), u}.$$

Приведенные уравнения суть уравнения в частных производных, которым необходимо удовлетворяет функция $S(x, t)$. Аргументы x, t в этих уравнениях следует брать из множеств Ω_{k-1} , а вычисления производных проводить обычным образом.

Граничные условия для этих уравнений следуют из определения функции $S(x, t)$ и условий сопряжения на множествах Ω_k . Оптимальные управления также получаются из (12), (13). При $k=1$ имеем (3), при $k=2$ функция $u^0(x, t)$ на Ω_1 удовлетворяет условию

$$2 \frac{\partial^2 S'(x, t)}{\partial x \partial t} f(x, u^0(x, t), t) + \\ + f'(x, u^0(x, t), t) \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} f(x, u^0(x, t), t) + \\ + \frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} \frac{d}{dt} f(x, u, t) \Big|_{(6), u=u^0(x, t)} = \\ = \min_{u \in U} \left[2 \frac{\partial^2 S'(x, t)}{\partial x \partial t} f(x, u, t) + f'(x, u, t) \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} f(x, u, t) + \right. \\ \left. + \frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} \frac{d}{dt} f(x, u, t) \right]_{(6), u}.$$

§ 4. Связь между функцией Беллмана и матричными импульсами

1. Предварительные замечания. Докажем тождество

$$\Psi^0(t) = -\frac{\partial^2 S(x^0(t), t)}{\partial x^2},$$

связывающее матричный импульс $\Psi^0(t)$, $t \in T$, — решение

уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}^0(t) = & - \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Psi^0(t) - \\ & - \Psi^0(t) \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 H(x^0(t), \Psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x^2}, \\ \dot{\Psi}^0(t_1) = & - \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t_1))}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (1)$$

с функцией Беллмана вдоль траектории $x^0(t)$, $t \in T$, порожденной особым оптимальным управлением $u^0(t)$, $t \in T$.

Оптимальное управление в форме обратной связи обозначим через $u^0(x, t)$. Из уравнения Беллмана (3.2) следует, что справедливо тождество

$$\frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} f(x, u^0(x, t), t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \equiv 0, \quad t < t_1. \quad (2)$$

Будем предполагать, что функция Беллмана $S(x, t)$ имеет непрерывные частные производные по x и t до третьего порядка включительно, $u^0(x, t)$ — дважды непрерывно дифференцируема по x , а $f(x, u, t)$ имеет непрерывные частные производные по x и по u до второго порядка включительно.

2. Случай открытой области допустимых управлений. Если U — открытое множество, то на оптимальном управлении

$$\frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} \frac{\partial f(x, u^0(x, t), t)}{\partial u} \equiv 0. \quad (3)$$

Продифференцируем тождество (2) по x_i . Получим

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x_i \partial x_k} f_k(x, u^0(x, t), t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial x_i} + \\ & + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial u_s} \frac{\partial u_s^0(x, t)}{\partial x_i} + \\ & + \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x_i \partial t} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, r.\end{aligned}\quad (4)$$

В силу (3) тождество (4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x_i \partial x_k} f_k(x, u^0(x, t), t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial x_i} + \\ + \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x_i \partial t} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Дифференцируем тождество (3) по x_i :

$$\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial u_s} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial x_i \partial u_s} + \\ + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial u_m \partial u_s} \frac{\partial u_m^0(x, t)}{\partial x_i} \equiv 0, \quad (6) \\ i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, r.$$

Дифференцируя (5) по x_j и учитывая (6), получим

$$\frac{\partial^3 S(x, t)}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} f_k(x, u^0(x, t), t) + \frac{\partial^3 S(x, t)}{\partial t \partial x_i \partial x_j} + \\ + \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial x_i} + \\ + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial x_i \partial x_j} - \\ - \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial u_m \partial u_s} \frac{\partial u_m^0(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial u_s^0(x, t)}{\partial x_j} \equiv 0, \quad (7) \\ i, j = 1, \dots, n$$

(изменение порядка дифференцирования законно в силу сделанных выше предположений).

Пусть $x^0(t)$, $u^0(t)$, $t \in T$, — оптимальные траектории и управление в задаче (3.1). Очевидно, $u^0(x^0(t), t) = u^0(t)$. Подставим в тождество (7) функцию $x = x^0(t)$. Из определения особого управления следует тождество

$$\frac{\partial S(x^0(t), t)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f_k(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u_m \partial u_s} \equiv 0, \quad m, s = 1, \dots, r. \quad (8)$$

В силу (8) после указанной подстановки получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^2 S(x^0(t), t)}{\partial x_i \partial x_j} \right] = & - \frac{\partial^2 S(x^0(t), t)}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial f_k(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x_j} - \\ & - \frac{\partial^2 S(x^0(t), t)}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial f_k(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x_i} - \\ & - \frac{\partial S(x^0(t), t)}{\partial x_k} \frac{\partial^2 f_k(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned} \quad (9)$$

Кроме того, имеем

$$\frac{\partial^2 S(x^0(t_1), t_1)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t_1))}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Сравнивая дифференциальные уравнения (9) и (1) и учитывая, что

$$\psi_i^0(t) = - \frac{\partial S(x^0(t), t)}{\partial x_i}$$

(см. работу Л. И. Розоноэра [3]), получим

$$\Psi_{ij}^0(t) = - \frac{\partial^2 S(x^0(t), t)}{\partial x_i \partial x_j},$$

или

$$\Psi^0(t) = - \frac{\partial^2 S(x^0(t), t)}{\partial x^2}.$$

3. Случай произвольной области допустимых управлений. Будем считать, что U — произвольное множество в r -мерном евклидовом пространстве. Покажем, что и в этом случае имеет место тождество (1).

Пусть \bar{x} — произвольная точка фазового пространства, \bar{t} — момент времени, не превосходящий t_1 , а $\bar{u}(t)$ и $\bar{x}(t)$ — соответственно оптимальные управление и траектория для указанных начальных значений \bar{x} , \bar{t} .

Рассмотрим функцию фазовых координат

$$B(x, t) = \frac{\partial S'(x, t)}{\partial x} f(x, \bar{u}(t), t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t}, \quad \bar{t} \leq t < t_1.$$

В точке $x = \bar{x}(t)$ эта функция достигает минимума, следовательно,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial B(x, t)}{\partial x_i} \right|_{x=\bar{x}(t)} = & \frac{\partial^2 S(\bar{x}(t), t)}{\partial x_i \partial x_k} f_k(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + \\ & + \frac{\partial S(\bar{x}(t), t)}{\partial x_k} \frac{\partial f_k(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 S(\bar{x}(t), t)}{\partial x_i \partial t} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$i = 1, \dots, n.$

Вычислим (10) в момент $t = \bar{t}$. Так как $\bar{x}(\bar{t}) = \bar{x}$, $\bar{u}(\bar{t}) = u^0(\bar{x}, \bar{t})$, а точка $\{\bar{x}, \bar{t}\}$ — произвольная, то заключаем, что

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i \partial x_k} f_k(x, u^0(x, t), t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial x_i} + \\ + \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x_i \partial t} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Сравнивая (11) с (4), приходим к тождеству

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial x_k} \frac{\partial f_k(x, u^0(x, t), t)}{\partial u_s} \frac{\partial u_s^0(x, t)}{\partial x_j} \equiv 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Далее доказательство проводится по схеме п. 1. Вместе с тождества (3), которое в случае произвольной области управления, вообще говоря, не имеет места, используется тождество (12).

Комментарии к главе V

§ 1. Впервые связь между условием Келли и условием оптимальности, выраженным через матричные импульсы, обнаружена в работе В. А. Срочко [1].

§ 2. Здесь мы следуем работе В. А. Срочко [2].

§ 3. Развитие динамического программирования на особые управления с получением новых уравнений для функции Беллмана осуществлено в работе авторов [4].

§ 4. Соотношение между матричными импульсами и функцией Беллмана, вскрывающее физическую основу первых, доказано А. И. Калининым.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА ВАРИАЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАЗИОСОБЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

Как видно из определения квазиособых экстремалей, последние в теории оптимальных процессов занимают место, промежуточное между особыми экстремалами и экстремалами Понтрягина. Это позволяет надеяться, не делая, как и в принципе максимума, слишком стеснительных предположений, по возможности шире использовать аппарат, доступный в теории особых экстремалей. В данной главе техника оперирования с пакетами вариаций развивается на случай, когда множество управления замкнуто.

§ 1. Необходимое условие оптимальности типа Лежандра — Клебша

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

где $x = \{x_1, \dots, x_n\}'$ — вектор фазовых координат, $u = \{u_1, \dots, u_r\}'$ — вектор управляющих воздействий, t_0, t_1 — заданные числа.

Пусть множество допустимых значений кусочно-непрерывных управлений $u(t)$ представляет ограниченное замкнутое тело r -мерного пространства E_r :

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \quad (2)$$

Допустим, что на траекториях системы (1), порожденных допустимыми управлениями (2), требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1)). \quad (3)$$

Из принципа максимума (см. Введение) следует, что для оптимальности управления $u^0(t)$ в задаче (1) — (3)

необходимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} u^0(t) = \\ = \max_{u \in U} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} u. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть $u^0(t)$ — оптимальная квазиособая экстремаль, т. е. существует такое подмножество $\omega(t) \subset U$ ($\dim \omega(t) \leq r$), что

$$\frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} u^0(t) = \frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} u \quad (5)$$

для всех $u \in \omega(t)$, $t \in T$.

Обозначим через $E(t)$ линейное многообразие наименьшей размерности, которому принадлежит множество $\omega(t)$:

$$E(t) = \left\{ v: \frac{\partial H'}{\partial u}(v - u^0(t)) = 0 \right\}, \quad \omega(t) = E(t) \cap U.$$

Рассмотрим случай, когда $\dim \omega(t) = k \leq r$ и особое оптимальное управление $u^0(t)$ при изменении времени t движется по гладкой границе $\partial \omega(t)$ множества $\omega(t)$ с касательным многообразием $L(t)$ в точке $u^0(t)$. Тогда любой достаточно малый вектор $c \in \partial \omega(t)$, отложенный из точки $u^0(t)$, допускает разложение

$$c = c^- + c^\perp, \quad (6)$$

где

$$c^- \in L(t), \quad c^\perp \perp L(t), \quad \|c^\perp\| = o(\|c^-\|).$$

Представлением (6) вариации c управления будем часто пользоваться в дальнейшем.

2. Условие Лежандра — Клебша в случае произвольной границы множества U . Так как $u^0(t)$ — оптимальное управление, то выполняется принцип максимума Понтрягина

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t). \quad (7)$$

Отсюда для $\tilde{u}(t) = u^0(t) + c(t)$ имеем

$$\Delta_{\tilde{u}} H = \frac{\partial H'}{\partial u} c(t) + \frac{1}{2} c'(t) \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} c(t) + o(\|c\|^2) \leq 0. \quad (8)$$

Если $c(t) \in \omega(t)$, то $\frac{\partial H'}{\partial u} c = 0$. Поэтому из (8) следует необходимое условие оптимальности

$$c' \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u^2} c \leq 0 \quad (9)$$

для всех $c \in \omega(t)$.

Теорема. Пусть $u^0(t)$ — оптимальная квазисобая экстремаль, $u^0(t) \in \omega(t)$. Тогда необходимо выполняется условие (9).

3. Случай гладкой границы. Рассмотрим случай, когда квазисобая оптимальная экстремаль $u^0(t)$ лежит на границе: $u^0(t) \in \partial\omega(t)$, а граница $\partial\omega(t)$ множества $\omega(t)$ гладкая в окрестности $u^0(t)$ и имеет касательную гиперплоскость $L(t)$ ($\dim L(t) = k - 1$). В этом случае вектор $c \in \partial\omega(t)$, построенный в точке $u^0(t)$, допускает разложение (6) и поэтому неравенство (9) примет вид

$$(c^-)' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} c^- + 2(c^-)' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} c^\perp + (c^\perp)' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} c^\perp \leq 0.$$

Выделяя главный член в левой части последнего неравенства, получим

$$(c^-)' \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u^2} c^- \leq 0. \quad (10)$$

Касательная плоскость $L(t)$ разделяет линейное многообразие $E(t)$ на две части, одна из которых, $E^+(t)$, содержит множество $\omega(t)$, и другая, $E^-(t)$, не содержит множества $\omega(t)$.

Предположим, что касательная плоскость $L(t)$ не включается ни в одно из множеств $E^+(t)$ и $E^-(t)$.

Пусть $c_\mu(t) = \mu c(t)$ — произвольный вектор. Очевидно, что вектор $c_\mu = \mu c(t)$ принадлежит многообразию $E(t)$, $c_\mu \in E(t)$ тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих включений: либо $c_\mu(t) \in E^+(t)$ либо $c_\mu(t) \in E^-(t)$, либо $c_\mu \in L(t)$.

Если $c_\mu \in E^+(t)$, то при μ достаточно малом c_μ принадлежит множеству $\omega(t)$ и, следовательно, для этого c_μ будет справедливо неравенство (9).

Если $c_\mu \in E^-(t)$, то при достаточно малом μ вектор $d_\mu = -c_\mu$ будет также принадлежать множеству $\omega(t)$ и, следовательно, для $d_\mu = -c_\mu$ также будет справед-

ливо неравенство (9):

$$(-c_\mu)' \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial u^2} (-c_\mu) \leq 0.$$

Отсюда следует выполнение неравенства (9) для $c_\mu \in E^-(t)$.

Если вектор $c_\mu \in L(t)$, то для него справедливо неравенство (10). Следовательно, для произвольного вектора $c_\mu \in E(t)$ справедливо неравенство

$$c'_\mu \frac{\partial^2 H(x^0, \psi^0, u^0, t)}{\partial u^2} c_\mu \leq 0.$$

Таким образом, доказана

Теорема. Пусть оптимальная квазиисобая экстремаль $u^0(t)$ принадлежит гладкой границе множества $\omega(t)$ с касательной плоскостью $L(t)$ ($\dim L(t) = \dim E(t) - 1$). Тогда

$$c' \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u^2} c \leq 0, \quad (11)$$

где $c \in E(t)$.

Если $\frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0$, то $\omega(t) = U$ и из доказанных теорем вытекают **следствия**:

1. Если вдоль оптимального управления $u^0(t)$ выполняется тождество $\frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0$, то вдоль $u^0(t)$ выполняется и неравенство

$$c' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} c \leq 0$$

для всех c таких, что $u^0(t) + c \in U$.

2. Если вдоль $u^0(t)$ выполняется тождество $\frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0$ и граница ∂U множества U в окрестности точки $u^0(t)$ гладкая с касательным многообразием $L(t)$, то справедливо условие

$$c' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} c \leq 0 \quad \text{для всех } c \in E_r.$$

4. Примеры. В условии (9) п. 2 существенно, что $c \in \omega(t)$.

$$1. \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_3 = x_1^2 + x_2^2 + u_1^2 - (u_2 - 1)^2 + 1,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, \quad T = [0, 1],$$

$$U = \{u_1, u_2: |u_1| \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1\}, \quad \varphi(x) = x_3.$$

Управление $u^0(t) = \{0, 0\}'$ оптимально. Имеем

$$H = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 - \psi_3 (-u_1^2 + (u_2 - 1)^2 - 1 - x_1^2 - x_2^2),$$

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) \equiv 0, \quad \psi_3(t) \equiv -1,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \psi_1 - 2u_1, \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = \psi_2 + 2(u_2 - 1),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} = 0,$$

$$\omega(t) = \{u_1, u_2: -1 \leq u_1 \leq 1, u_2 = 0\}.$$

Критерий (9) выполняется для $c \in \omega(t) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} c_1^2 < 0 \right)$ и не выполняется для $c \in \omega(t) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} c_2^2 > 0 \right)$.

Критерий (9) — эффективное условие оптимальности.

2. В предыдущем примере заменим в правой части третьего дифференциального уравнения u_1^2 на $-u_1^2$, оставив без изменения все остальные параметры задачи. Тогда получим

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \psi_1 + 2u_1, \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = \psi_2 + 2(u_2 - 1),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} = 2.$$

Вдоль управления $u(t) \equiv \{0, 0\}'$ имеем

$$\omega(t) = \{u_1, u_2: -1 \leq u_1 \leq 1, u_2 = 0\}.$$

Для управления $u(t) \equiv 0$ необходимое условие оптимальности (4) выполняется, так как

$$\frac{\partial H'}{\partial u} (u - u(t)) = -2u_2 \leq 0, \quad u_2 \in [0, 1].$$

Но условие (9) не имеет места:

$$c' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} c = 2c_1^2 + 2c_2^2 > 0.$$

Значит, управление $u(t) = 0$ неоптимально.

Критерий (11) нельзя усилить; если не существует касательной плоскости в точке $u^0(t)$ к множеству $\omega(t)$, то условие (11) может не выполняться вдоль

оптимального особого управления.

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_3 = x_1^2 + x_2^2 + u_1 u_2, \\
 & x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, \quad T = [0, 1], \\
 & U = \{u_1, u_2: 0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1\}, \quad \varphi(x) = x_3. \\
 & \text{Управление } u^0(t) = \{0, 0\} \text{ оптимально. Имеем} \\
 & H = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 - x_1^2 - x_2^2 - u_1 u_2, \\
 & \dot{\psi}_1 = 2x_1, \quad \dot{\psi}_2 = 2x_2, \quad \psi_1(t) = \psi_2(t) \equiv 0, \\
 & \frac{\partial H}{\partial u_1} = \psi_1 - u_2, \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = \psi_2 - u_1, \\
 & \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2} = -1, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} \equiv 0, \quad \omega(t) \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Условие (11) не выполняется: форма $c' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} c = -2c_1 c_2$ знакопеременна.

§ 2. Условия оптимальности типа равенства

1. Формула приращения функционала на пакете. Рассмотрим пакет

$$\delta u(t) = \sum_{s=1}^p \varphi_s(t), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}
 \varphi_s(t) &= \begin{cases} c_s(t), & t \in [\theta, \theta_s], \\ 0, & t \in T \setminus [\theta, \theta_s], \end{cases} \\
 \theta_s &= \theta + q_s \varepsilon, \quad s = 1, 2, \dots, p-1, \\
 0 &< q_s < q_{s+1} < 1, \quad q_p = 1.
 \end{aligned}$$

С помощью техники, развитой в §§ 7, 8 гл. II, получается следующая формула приращения:

$$\begin{aligned}
 -\Delta J(u) &= \varepsilon \left\{ \frac{\partial H'}{\partial u} \sum_{s=1}^p c_s q_s + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{s=1}^p c'_s \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \sum_{k=1}^s c_k q_k + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{p-1} c'_s q_s \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \sum_{k=s+1}^p c_k \left. \right\} + \\
 &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H'}{\partial u} \sum_{k=1}^p c_k q_k^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{s=1}^p c'_s \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \sum_{k=1}^s c_k q_k^2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{s=1}^{p-1} c'_s q_s^2 \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \sum_{k=s+1}^p c_k \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=1}^p c'_s q_s \frac{\partial f'}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \sum_{k=1}^p c_k q_k + \\
& + \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{k=s+1}^p q_s c'_s \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] c_k (q_s - q_k) \Bigg\} + \\
& + \frac{\varepsilon^3}{6} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H'}{\partial u} \sum_{k=1}^p c_k q_k^3 \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{s=1}^p c'_s \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \sum_{k=1}^s c_k q_k^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{s=1}^{p-1} c'_s q_s^3 \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \sum_{k=s+1}^p c_k \right) + \right. \\
& + 3 \sum_{s=1}^p c'_s q_s^2 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right)' \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \sum_{k=1}^p c_k q_k + \\
& + 3 \sum_{s=1}^p c'_s q_s^2 \frac{\partial f'}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \sum_{k=1}^p c_k q_k + \\
& + \sum_{s=1}^p c'_s q_s \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H'}{\partial u} - \right. \\
& - 2 \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Bigg] \sum_{k=1}^p c_k q_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{p-1} q_s \sum_{k=s+1}^p (q_s - q_k)^2 \times \\
& \times c'_s \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H'}{\partial u} - 2 \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right] c_k + \\
& + \sum_{s=1}^p c'_s q_s \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] \sum_{k=1}^p c_k q_k^2 + \\
& + \sum_{k=1}^p c'_k q_k^2 \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] \sum_{s=1}^p c_s q_s + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{k=s+1}^p q_s (q_s - q_k)^2 \left[c'_s \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) c_k + \right. \\
& \quad \left. + c'_k \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) c_s \right] + \\
& + \frac{3}{2} \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{k=s+1}^p q_s (q_s^2 - q_k^2) \frac{d}{dt} \left[c'_s \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) c_k \right] \Bigg\} + o(\varepsilon^3). \quad (2)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right)' \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right)$$

есть матрица элементов

$$\left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u_i} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right)' \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u_j} + \Psi \frac{\partial f}{\partial u_j} \right) \right\},$$

выражение

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u}$$

есть матрица элементов $\left\{ \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_j} \right\}$ и т. д., $\Psi(t)$, $t \in T$, — матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\Psi} = - \frac{\partial f'}{\partial x} \Psi - \Psi \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad \Psi(t_1) = - \frac{\partial^2 \Phi(x(t_1))}{\partial x^2}.$$

2. Доказательство необходимого условия оптимальности. Пусть $\dim E(t) = 2$. Среди пакетов (1) выберем следующий:

$$\left. \begin{aligned} p=2, \quad c_s = c_s^- + c_s^\perp, \quad s=1, 2, \\ c_s^- \in L(t), \quad c_s^\perp \perp L(t), \quad c_s(t) \in \partial \omega(t), \\ \|c_s^\perp\| = o(\|c_s^-\|), \quad c_2^- = -q_1 c_1^-. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Рассмотрим разложение функционала на пакете (3) для управления $u^0(t)$, $t \in T$, вдоль которого выполняется условие максимума (1.5) и матрица вторых производных гамильтониана обращается в нуль, т. е.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, r. \quad (4)$$

Выделяя в (1) главный по ε член разложения, получим

$$\begin{aligned} -\Delta J(u) = & \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ (c_1^\perp q_1 + c_2^\perp)' \frac{\partial f'}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \times \right. \\ & \times (c_1^\perp q_1 + c_2^\perp) + (c_1^- + c_1^\perp)' q_1 \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] (c_1^\perp q_1 + c_2^\perp) \right\} + o(\varepsilon^2). \quad (5) \end{aligned}$$

Если управление $u^0(t)$ оптимально, то из условия $-\Delta J(u^0) \leq 0$ следует, что коэффициент при ϵ^2 в правой части (5) неположителен. Неположительным будет и главный член его по вариациям управления

$$q_1(c_1^-)' \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) (c_1^\perp q_1 + c_2^\perp) \leq 0.$$

Из этого неравенства при $q_1 \rightarrow 0$ вытекает, что

$$(c^-)' \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) c^\perp \leq 0, \quad (6)$$

где c^- , c^\perp — произвольные векторы такие, что $c^- \in L(t)$, $c^\perp \perp L(t)$. Но на векторах $-c^-$ и c^\perp справедливо неравенство, противоположное (6). Значит, имеем равенство:

$$(c^-)' \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] c^\perp = 0. \quad (7)$$

Пусть $d_1(t)$, $d_2(t)$ — произвольные векторы такие, что

$$d_1(t) \in E(t), \quad d_2(t) \in E(t).$$

Справедливо следующее разложение:

$$\begin{aligned} d_1'(t) \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] d_2(t) = \\ = (d_1^-)' \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] d_2^- + \\ + (d_1^-)' \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] d_2^\perp + \\ + (d_1^\perp)' \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] d_2^- + \\ + (d_1^\perp)' \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] d_2^\perp, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$d_s^-(t) \in L(t), \quad d_s^\perp(t) \perp L(t), \quad s = 1, 2.$$

В силу кососимметричности матрицы

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}$$

и равенства (7) все слагаемые справа в (8) равны нулю. Поэтому

$$d_1' \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] d_2 = 0. \quad (9)$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \left[\frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} \right], \quad (10)$$

то при $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \equiv 0$ условие (9) записывается в виде

$$d'_1 \frac{\partial}{\partial u} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u} d_2 = 0.$$

Значит, если предположить, что функции f , φ достаточно гладкие и считать U выпуклым замкнутым телом, то можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема. Пусть: 1) особое оптимальное управление $u^0(t)$ таково, что $u^0(t) \in \partial \omega$ при $t \in [\theta, \theta + \varepsilon]$, 2) $\dim E(t) = 2$, 3) существует касательная плоскость $L(t)$ к $\omega(t)$ в точке

$u^0(t)$ $t \in [\theta, \theta + \varepsilon]$, $\dim L(t) = 1$, 4) $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \equiv 0$, $t \in [\theta, \theta + \varepsilon]$.

Тогда

$$d'_1 \frac{\partial}{\partial u} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u} d_2 = 0, \quad t \in [\theta, \theta + \varepsilon], \quad (11)$$

где $d_1(t)$, $d_2(t) \in E(t)$.

Избавиться от предположения о существовании касательной в общем случае невозможно.

Пример. $\dot{x}_1 = \frac{u_1 - 1}{2}$, $\dot{x}_2 = \frac{u_2 - 1}{2}$, $\dot{x}_3 = \frac{(u_1 - 1)x_2}{2}$,

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, \quad T = [0, 1],$$

$$U = \{u_1, u_2: |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}, \quad \varphi(x) = x_3.$$

Имеем

$$H = \psi_1 \frac{u_1 - 1}{2} + \psi_2 \frac{u_2 - 1}{2} - \frac{u_1 - 1}{2} x_2,$$

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = \frac{u_1 - 1}{2}, \quad \psi_1(1) = \psi_2(1) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{1}{2} (\psi_1 - x_2), \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{1}{2} \psi_2,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_1} = -\frac{1}{4} u_2 + \frac{1}{4}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{1}{4} u_1 - \frac{1}{4},$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_1} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{1}{4}.$$

Управление $u^0 = \{1, 1\}'$ — особое оптимальное, вдоль него $\omega(t) = U$, E совпадает со всей плоскостью.

Условие (11) вдоль оптимального управления не выполняется.

§ 3. Условие оптимальности типа Келли

Рассмотрим пакеты (2.1), удовлетворяющие условиям

$$\left. \begin{aligned} c_s &= c_s^- + c_s^\perp, \quad s = 1, 2, \dots, p, \\ c_s^- &\in L(t), \quad c_s^- \perp c_s^\perp, \quad c_s \in \partial \omega(t), \\ c_s^- &= a_s e^-(t), \quad c_s^\perp = b_s e^\perp(t), \\ e^-(t) &\in L(t), \quad e^\perp(t) \perp L(t), \\ \|e^-(t)\| &= \|e^\perp(t)\| = 1, \\ b_s &= o(|a_s|), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где a_s, b_s не зависят от t .

Выделим в приращении $-\Delta J$ (2.2) главный член по вариациям управления с учетом условий (1.5) и (2.4):

$$\begin{aligned} & \frac{e^2}{2} \left\{ \sum_{s=1}^p (c_s^-)' q_s \frac{\partial f'}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \sum_{k=1}^p c_k^- q_k + \right. \\ & + \sum_{s=1}^p \sum_{k=s+1}^p q_s (c_s^-)' \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) c_k^- (q_s - q_k) \Big\} + \\ & + \frac{e^3}{6} \left\{ 3 \sum_{s=1}^p (c_s^-)' q_s^2 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right)' \times \right. \\ & \times \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \sum_{k=1}^p c_k^- q_k + \\ & + 3 \sum_{s=1}^p (\dot{c}_s^-)' q_s^2 \frac{\partial f'}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \sum_{k=1}^p c_k^- q_k + \\ & + \sum_{s=1}^p (\dot{c}_s^-)' q_s \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H'}{\partial u} \right] \sum_{k=1}^p c_k^- q_k^2 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{p-1} q_s \sum_{k=s+1}^p (q_s - q_k)^2 (c_s^-)' \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H'}{\partial u} \right] c_k^- + \\ & + \sum_{s=1}^p (\dot{c}_s^-)' q_s \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] \sum_{k=1}^p c_k^- q_k^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^p (\dot{c}_k^-)' q_k^2 \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right] \sum_{s=1}^p c_s^- q_s + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{k=s+1}^p q_s (q_s - q_k)^2 \left[(\dot{c}_s^-)' \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) c_k^- + \right. \\
& \quad \left. + (\dot{c}_k^-)' \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) c_s^- \right] + \\
& + \frac{3}{2} \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{k=s+1}^p q_s (q_s^2 - q_k^2) \frac{d}{dt} \left[(c_s^-)' \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) c_k^- \right] \Bigg\}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Выражение (2) отличается от правой части формулы (2.2) лишь тем, что в нем все члены вида $\frac{\partial H}{\partial u_i}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j}$ равны нулю и вектор c_s заменен на вектор c_s^- ($c_s^- \in L(t)$).

Среди пакетов (1), $p = 2$, оставим лишь те, для которых выполняется условие $a_2 = -q_1 a_1$. В силу $-\Delta J(u) \leq 0$ главный член по ε в формуле (2) неположителен:

$$\begin{aligned}
& -q_1^2 (q_1 - 1)^2 a_1^2 \left[(e^-)' \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} e^- + \right. \\
& \quad \left. + (\dot{e}^-)' \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial x \partial u} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \right) e^- \right] \leq 0.
\end{aligned}$$

Воспользуемся условием типа равенства (2.11). Тогда из последнего неравенства получаем следующее (необходимое) условие оптимальности:

$$c' \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} c \geq 0,$$

где $c \in L(t)$.

Итак, если функции $f(x, u, t)$, $\varphi(x)$ достаточно гладкие, а U — выпуклое замкнутое тело, то справедливо следующее утверждение:

Теорема. Пусть: 1) особое оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет условию $u^0(t) \in \partial \omega(t)$ при $t \in [0, \theta + \varepsilon]$, 2) $\dim E = 2$, 3) существует касательная

плоскость $L(t)$ к $\partial\omega(t)$ в точке $u^0(t)$, $t \in [\theta, \theta + \varepsilon]$, $\dim L(t) = 1$, 4) $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 0$, $t \in [\theta, \theta + \varepsilon_0]$.

Тогда необходимо справедливо следующее условие оптимальности:

$$c' \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} c \geq 0, \quad t \in [\theta, \theta + \varepsilon_0], \quad (3)$$

где $c \in L(t)$.

В критерии (3) существенно то, что $c \in L(t)$.

Пример.

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = -\frac{u_2}{2}, \quad \dot{x}_3 = \frac{-u_2 + 2}{2}, \quad \dot{x}_4 = -\frac{u_2}{2} x_2 x_3 + x_1^2,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0, \quad T = [0, 1],$$

$$U = \{u_1, u_2: -1 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 2\}, \quad \varphi(x) = x_4.$$

Управление $u^0(t) = \{0, 0\}'$ — оптимальное. Имеем

$$H = \psi_1 u_1 - \psi_2 \frac{u_2}{2} + \psi_3 \left(-\frac{u_2}{2} + 1 \right) + \frac{u_2}{2} x_2 x_3 - x_1^2,$$

$$\dot{\psi}_1 = 2x_1, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{u_2}{2} x_3, \quad \dot{\psi}_3 = -\frac{u_2}{2} x_2,$$

$$\psi_1(1) = \psi_2(1) = \psi_3(1) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \psi_1, \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = -\frac{1}{2} \psi_2 - \frac{1}{2} \psi_3 + \frac{1}{2} x_2 x_3,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{1}{2} x_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_1} = 2x_1,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} = -\frac{1}{4} u_2, \quad \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} = 2u_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} = 2,$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{u}_2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} = 0, \quad \omega(t) = U,$$

$$L(t) = \{u_1, u_2: u_2 = 0\}.$$

Условие (3) выполняется при $c \in L(t)$, так как

$$c' \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} c = 2c_1^2 - \frac{1}{4} c_2^2.$$

Если не существует касательной плоскости к множеству $\omega(t)$ в точке $u^0(t)$, то условие (3) может не выполняться.

Пример. Пусть

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} (-u_1 - u_2), \quad \dot{x}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} (-u_1 - u_2 + 2\sqrt{2}), \\ \dot{x}_3 &= \frac{\sqrt{2}}{4} (u_1 - u_2), \quad \dot{x}_4 = \frac{\sqrt{2}}{4} (u_1 - u_2 + 2\sqrt{2}), \\ \dot{x}_5 &= \frac{\sqrt{2}}{4} (-u_1 - u_2)x_1x_2 + \frac{\sqrt{2}}{4} (u_1 - u_2)x_3x_4, \quad T = [0, 1], \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = 0, \\ U &= U_1 \cup U_2,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}U_1 &= \{u_1, u_2: 0 \leq u_1 \leq \sqrt{2}, u_1 \leq u_2 \leq -u_1 + 2\sqrt{2}\}, \\ U_2 &= \{u_1, u_2: -\sqrt{2} \leq u_1 \leq 0, -u_1 \leq u_2 \leq u_1 + 2\sqrt{2}\}, \\ \varphi(x) &= x_5.\end{aligned}$$

Управление $u^0(t) = \{0, 0\}'$ — особое оптимальное с множеством $\omega(t) = U$.

Имеем

$$\begin{aligned}H &= \psi_1 \frac{\sqrt{2}}{4} (-u_1 - u_2) + \psi_2 \frac{\sqrt{2}}{4} (-u_1 - u_2 + 2\sqrt{2}) + \\ &+ \psi_3 \frac{\sqrt{2}}{4} (u_1 - u_2) + \psi_4 \frac{\sqrt{2}}{4} (u_1 - u_2 + 2\sqrt{2}) + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} (u_1 + u_2)x_1x_2 + \frac{\sqrt{2}}{4} (-u_1 + u_2)x_3x_4, \\ \dot{\psi}_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{4} (u_1 + u_2)x_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} (u_1 + u_2)x_1, \\ \dot{\psi}_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{4} (-u_1 + u_2)x_4, \quad \dot{\psi}_4 = -\frac{\sqrt{2}}{4} (-u_1 + u_2)x_3, \\ \frac{\partial H}{\partial u_1} &= -\psi_1 \frac{\sqrt{2}}{4} - \psi_2 \frac{\sqrt{2}}{4} + \psi_3 \frac{\sqrt{2}}{4} + \psi_4 \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} x_1x_2 - \frac{\sqrt{2}}{4} x_3x_4, \\ \frac{\partial H}{\partial u_2} &= -\psi_1 \frac{\sqrt{2}}{4} - \psi_2 \frac{\sqrt{2}}{4} - \psi_3 \frac{\sqrt{2}}{4} - \psi_4 \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} x_1x_2 + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} x_2x_4, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_1} &= \frac{\sqrt{2}}{4} (x_1 - x_3), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (x_1 + x_3), \\ \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} &= -\frac{1}{4} u_1, \quad \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} = -\frac{1}{4} u_2, \\ \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} &= -\frac{1}{4}, \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

словие типа Келли (3) не выполняется ни для какого $c \in \omega(t)$.

Для иллюстрации условия (3) рассмотрим пример:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -u_1, \quad \dot{x}_2 = -u_1 + 2, \quad \dot{x}_3 = -u_2, \quad \dot{x}_4 = -u_2 + 2, \\ \dot{x}_5 &= -u_1 x_1 x_2 - u_2 x_3 x_4 + u_2, \quad T = [0, 1], \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = 0, \\ U &= \{u_1, u_2: -2 \leq u_1 \leq 2, 0 \leq u_2 \leq 2\}, \\ \Phi(x) &= x_5.\end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}H &= -\psi_1 u_1 + \psi_2 (-u_1 + 2) - \psi_3 u_2 + \psi_4 (-u_2 + 2) + \\ &\quad + u_1 x_1 x_2 + u_2 x_3 x_4 - u_2, \\ \frac{\partial H}{\partial u_1} &= -\psi_1 - \psi_2 + x_1 x_2, \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} = -\psi_3 - \psi_4 + x_3 x_4 - 1, \\ \dot{\psi}_1 &= -u_1 x_2, \quad \dot{\psi}_2 = -u_1 x_1, \quad \dot{\psi}_3 = -u_2 x_4, \quad \dot{\psi}_4 = -u_2 x_3, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_1} &= 2x_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial u_2} = 2x_3, \\ \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} &= -2u_1, \quad \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} = -2u_2, \\ \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} &= -2, \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} = -2, \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_1} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u_2} = 0.\end{aligned}$$

Управление $u^0 = \{0, 0\}'$ является особым, причем вдоль него $\omega(t) = \{u_1, u_2: u_2 = 0, -2 \leq u_1 \leq 2\}$. Условие (3) не выполняется:

$$c \in \omega(t), \quad c' \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} c = 2 \cdot c_1^2 < 0.$$

Следовательно, управление $u^0 = \{0, 0\}'$ не может быть оптимальным. Однако для него выполняется условие из § 4 гл. 4

$$c' \frac{\partial f'}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) c \leq 0,$$

где матрица $\Psi(t)$ (размеров 5×5) есть решение уравнения

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial f'}{\partial x} \Psi - \Psi \frac{\partial f}{\partial x}$$

с начальным условием $\Psi(1) = 0$.

Вычисляем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 x_2 & -u_1 x_1 & -u_2 x_4 & -u_2 x_3 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x \partial u} = \begin{Bmatrix} x_2 & 0 \\ x_1 & 0 \\ 0 & x_4 \\ 0 & x_3 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ -x_1 x_2 & -x_3 x_4 + 1 \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \begin{Bmatrix} 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_2 & 0 \\ 0 & 0 & -u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Находим матрицу Ψ : $\Psi \equiv 0$.

Следовательно,

$$c' \frac{\partial f'}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} + \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) c = c' \begin{Bmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -2t \end{Bmatrix} c = -2tc_1^2 - 2tc_2^2 \leq 0,$$

и необходимые условия оптимальности, выраженные через матричные импульсы, не в состоянии забраковать рассматриваемое неоптимальное управление.

Комментарии к главе VI

§ 1. Результаты параграфа носят предварительный характер. Однако уже здесь видна главная особенность задач, рассматриваемых в главе.

§§ 2, 3. Специфика пакета, в котором компоненты не «заморожены», позволяет распространить в некоторой степени технику гл. II на задачи с замкнутыми множествами управлений.

Материал гл. VI основан на результатах Е. Е. Барбашиной.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ МЕТОДОМ ПРИРАЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

До сих пор основным методом исследования был метод приращений, причем приращения строились в пространстве управлений. В соответствии с этим доказывались формулы приращений для функционалов и из них получались необходимые условия оптимальности. Анализ этого процесса показывает, что для доказательства необходимых условий оптимальности использование формул приращения в пространстве управлений имеет вспомогательное значение. Построенные формулы слишком универсальны для решения частной задачи получения необходимых условий оптимальности. Поэтому, анализируя приведенные выше доказательства, нетрудно заметить, что в конце концов от доказанных формул нам нужны такие элементы, которые с формулами приращений в пространстве управлений мало связаны. При доказательстве формул приращения мы из пространства состояний с помощью определенных тождеств переходили в пространство управлений, а затем получили результат, сформулированный в терминах пространства состояний. Возникает мысль — избавиться от цикла «пространство состояний — пространство управлений — пространство состояний» и вести рассуждения лишь в пространстве состояний. Указанная идея частично реализуется в данной главе. При этом приводятся лишь простейшие результаты, которых, однако, на наш взгляд достаточно, чтобы уловить основные моменты нового метода исследования.

§ 1. Доказательство принципа максимума

Пусть дана система

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (1)$$

где $x = \{x_1, \dots, x_n\}'$, $u = \{u_1, \dots, u_r\}'$, и требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1)). \quad (2)$$

Предположим, что $u^0(t)$ — оптимальное управление в задаче (1), (2). Траекторию, соответствующую управлению $u^0(t)$ и начальному состоянию $\{x_0, t_0\}$ ($x(t_0) = x_0$), обозначим через $x^0(t)$. Введем в рассмотрение функцию $\Phi(x, t)$. По определению, $\Phi(\check{x}, \check{t}) \equiv \varphi(x(\check{x}, \check{t}, t_1))$, где $x(\check{x}, \check{t}, t)$ — траектория уравнения

$$\dot{x} = g(x, t) = f(x, u^0(t), t), \quad (3)$$

исходящая из начального состояния $\{\check{x}, \check{t}\}$.

Опираясь на теорему о дифференцируемости решений обыкновенного дифференциального уравнения по начальным данным (см., например, монографию Ф. Хартмана [1]), легко показать, что если непрерывные функции $f(x, u, t)$ и $\varphi(x)$ имеют непрерывные частные производные по x до k -го порядка включительно, то функция $\Phi(x, t)$ в области определения X имеет непрерывные частные производные до k -го порядка по x и непрерывно дифференцируема по t в области определения X .

Далее предположим, что непрерывные функции $f(x, u, t)$ и $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x .

Так как функция $\Phi(x, t)$ постоянна вдоль любой траектории уравнения (3), то справедливо тождество

$$\left. \frac{d\Phi(x, t)}{dt} \right|_{(3)} \equiv \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} f(x, u^0(t), t) + \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \equiv 0. \quad (4)$$

Дифференцируя тождество (4) для всех чисел $t \in T$ и n -векторов $x \in X$ по x и полагая $x = x^0(t)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t)}{\partial x^2} f(x^0(t), u^0(t), t) + \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t)}{\partial t \partial x} + \\ + \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \frac{\partial \Phi(x^0(t), t)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношение (5) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi(x^0(t), t)}{\partial x} \right] = - \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \frac{\partial \Phi(x^0(t), t)}{\partial x}. \quad (6)$$

Из определения функции $\Phi(x, t)$ следует

$$\frac{\partial \Phi(x^0(t_1), t_1)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x}. \quad (7)$$

Наряду с функцией $u^0(t)$ рассмотрим управление

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u^0(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ v, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases}$$

где v — произвольный вектор из множества U , θ — некоторый момент времени, не превосходящий t_1 (имеется в виду, что $\theta + \varepsilon \leq t_1$). Очевидно, управление $\tilde{u}(t)$ будет допустимым. Траекторию, соответствующую управлению $\tilde{u}(t)$ и начальному состоянию $\{x_0, t_0\}$, обозначим через $\tilde{x}(t)$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} J(\tilde{u}) - J(u^0) &= \Phi(\tilde{x}(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon) - \Phi(x^0(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon) = \\ &= \frac{\partial \Phi'(x^0(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x} \Delta x(\theta + \varepsilon) + o(\|\Delta x(\theta + \varepsilon)\|) \geq 0. \end{aligned}$$

Так как

$$\Delta x(\theta + \varepsilon) = \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\varepsilon), \theta) \varepsilon + o_1(\varepsilon),$$

то

$$\frac{\partial \Phi'(x^0(\theta), \theta)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \varepsilon + o_2(\varepsilon) \geq 0. \quad (8)$$

Поскольку ε может быть сколь угодно малым, то из (8) получаем, что для всех $v \in U$ и $t \in T$, $t \neq t_1$, необходимо выполняется условие

$$\frac{\partial \Phi'(x^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \geq 0. \quad (9)$$

Введем функцию

$$\psi^0(t) = - \frac{\partial \Phi(x^0(t), t)}{\partial x}.$$

Тогда соотношения (6), (7) и (9) очевидным образом превращаются в следующий принцип максимума:

$$\dot{\psi}^0(t) = - \frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x}, \quad \psi^0(t_1) = - \frac{\partial \Phi(x^0(t_1))}{\partial x},$$

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t).$$

§ 2. Необходимое условие оптимальности особых управлений

Воспользуемся описанной схемой и получим необходимое условие оптимальности для управлений, особых в смысле принципа максимума (гл. I). Дополнительно предположим, что непрерывные функции $\varphi(x)$ и $f(x, u, t)$ имеют непрерывные частные производные по x до третьего порядка (включительно).

Дифференцируя дважды тождество (1.4) по x и полагая $x = x^0(t)$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 \Phi(x^0(t), t)}{\partial x^3} f(x^0(t), u^0(t), t) + \frac{\partial^3 \Phi(x^0(t), t)}{\partial t \partial x^2} + \\ & + \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t)}{\partial x^2} \times \\ & \times \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi(x^0(t), t)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношение (1) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t)}{\partial x^2} \right] = & - \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t)}{\partial x^2} - \\ & - \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t)}{\partial x^2} \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} - \\ & - \frac{\partial^2 f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi(x^0(t), t)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из определения функции $\Phi(x, t)$ следует

$$\frac{\partial^2 \Phi(x^0(t_1), t_1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Так как $u^0(t)$ — оптимальное управление, то

$$\begin{aligned} J(\tilde{u}) - J(u^0) = & \Phi(\tilde{x}(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon) - \Phi(x^0(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon) = \\ = & \frac{\partial \Phi(x^0(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x} \Delta x(\theta + \varepsilon) + \\ + & \frac{1}{2} \Delta x'(\theta + \varepsilon) \frac{\partial^2 \Phi(x^0(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x^2} \Delta x(\theta + \varepsilon) + \\ & + o(\|\Delta x(\theta + \varepsilon)\|^2) \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Но

$$\begin{aligned}\Delta x(\theta + \varepsilon) &= \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [f(\tilde{x}(t), v, t) - \\ &\quad - f(x^0(t), u^0(t), t)]|_{t=\theta} \varepsilon^2 + o_1(\varepsilon^2), \\ \frac{\partial \Phi(x^0(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi(x^0(\theta), \theta)}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi(x^0(t), t)}{\partial x} \right] \Big|_{t=\theta} \varepsilon + o_2(\varepsilon), \\ \frac{\partial^2 \Phi(x^0(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Phi(x^0(\theta), \theta)}{\partial x^2} + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Поэтому неравенство (4) принимает такой вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \Phi'(x^0(\theta), \theta)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \varepsilon + \\ &\quad + \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi'(x^0(t), t)}{\partial x} \right] \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \right\} \Big|_{t=\theta} \varepsilon^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi'(x^0(\theta), \theta)}{\partial x} \frac{d}{dt} [f(\tilde{x}(t), v, t) - f(x^0(t), u^0(t), t)]|_{t=\theta} \varepsilon^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta_v f'(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \frac{\partial^2 \Phi(x^0(\theta), \theta)}{\partial x^2} \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \varepsilon^2 + \\ &\quad + o_3(\varepsilon^2) \geq 0. \quad (5)\end{aligned}$$

Если управление $u^0(t)$ — особое, то необходимо выполняется равенство

$$\frac{\partial \Phi'(x^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) = 0 \quad (6)$$

для всех $v \in \omega(t)$, $t \in T$.

Преобразуем неравенство (5), учитывая (1.6) и (6). Имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi'(x^0(t), t)}{\partial x} \right] \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \right\} \Big|_{t=\theta} \varepsilon^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi'(x^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \right] \Big|_{t=\theta} \varepsilon^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi'(x^0(\theta), \theta)}{\partial x} \frac{d}{dt} [f(\tilde{x}(t), v, t) - f(x^0(t), v, t)]|_{t=\theta} \varepsilon^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta_v f'(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \frac{\partial^2 \Phi(x^0(\theta), \theta)}{\partial x^2} \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \varepsilon^2 + \\ &\quad + o_3(\varepsilon^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi'(x^0(\theta), \theta)}{\partial x} \frac{\partial \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta)}{\partial x} \times \\ &\quad \times \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \Delta_v f'(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \times \\ &\quad \times \frac{\partial^2 \Phi(x^0(\theta), \theta)}{\partial x^2} \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \varepsilon^2 + o_3(\varepsilon^2) \geq 0. \quad (7)\end{aligned}$$

Из (7) получим: для всех $v \in \omega(t)$ и $t \in T$ необходимо выполняется условие

$$\frac{\partial \Phi'(x^0(t), t)}{\partial x} \frac{\partial \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) + \\ + \Delta_v f'(x^0(t), u^0(t), t) \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t)}{\partial x^2} \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \geq 0. \quad (8)$$

Введем функцию

$$\Psi(t) = - \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t)}{\partial x^2}.$$

Тогда в соотношениях (2), (3), (8) нетрудно распознать необходимое условие оптимальности для особых управлений, доказанное в гл. IV.

§ 3. Доказательство условия Келли

В этом параграфе предположим, что функция $f(x, u, t)$ линейна по u , u — скаляр, $u^0(t) \in \text{int } U$, $t \in T$.

Рассмотрим управление

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u^0(t), & t \in [\theta, \theta + 2\varepsilon), \\ u_0(t) + a, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ u_0(t) - a, & t \in [\theta + \varepsilon, \theta + 2\varepsilon). \end{cases}$$

Очевидно, для достаточно малых по абсолютной величине чисел a управление $\bar{u}(t)$ будет допустимым. Траекторию, соответствующую управлению $\bar{u}(t)$ и начальному состоянию $\{x_0, t_0\}$, обозначим через $\bar{x}(t)$.

Нетрудно видеть, что

$$J(\bar{u}) - J(u^0) = \Phi(\bar{x}(\theta + 2\varepsilon), \theta + 2\varepsilon) - \Phi(x^0(\theta + 2\varepsilon), \theta + 2\varepsilon) = \\ = \frac{\partial \Phi'(x^0(\theta + 2\varepsilon), \theta + 2\varepsilon)}{\partial x} \Delta x(\theta + 2\varepsilon) + \\ + \frac{1}{2} \Delta x'(\theta + 2\varepsilon) \frac{\partial^2 \Phi(x^0(\theta + 2\varepsilon), \theta + 2\varepsilon)}{\partial x^2} \Delta x(\theta + 2\varepsilon) + \\ + o(\|\Delta x(\tau + 2\varepsilon)\|^2) \geq 0. \quad (1)$$

Вычислим приращение траектории $\Delta x(t)$ в момент времени $t = \theta + 2\varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta x(\theta + 2\varepsilon) = & \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right) a\varepsilon^2 + \\ & + \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial u} \right] a\varepsilon^3 + \\ & + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \right. \\ & \left. - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right) a^2 \varepsilon^3 + o_1(\varepsilon^3). \quad (2) \end{aligned}$$

Ясно также, что

$$\frac{\partial \Phi(x^0(\theta + 2\varepsilon), \theta + 2\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \varepsilon + o_2(\varepsilon). \quad (3)$$

Все величины в правых частях равенств (2), (3) вычислены в точках θ , $x^0(\theta)$, $u^0(\theta)$.

Используя (2), (3) в (1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right) a\varepsilon^2 + \\ + 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right) a\varepsilon^3 + \\ + \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial u} \right] a\varepsilon^3 + \\ + \frac{1}{3} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} \right) a^2 \varepsilon^3 + o_3(\varepsilon^3) \geq 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Преобразуем неравенство (4), используя (1.6). Имеем

$$\begin{aligned} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right] a\varepsilon^2 - \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right] a\varepsilon^3 - \\ - \frac{1}{3} \left[- \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u} + 2 \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial u} \right] a^2 \varepsilon^3 + \\ + o_3(\varepsilon^3) \geq 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Положим, как и раньше,

$$\psi(t) = - \frac{\partial \Phi(x^0(t), t)}{\partial x}.$$

Так как выражения, стоящие при ae^2 , ae^3 , равны, очевидно, нулю, то из (5) следует неравенство

$$- \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u} + 2 \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \\ - \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \geq 0, \quad t \in T.$$

Полученное условие можно представить (§ 2 гл. II) в компактной форме

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \geq 0,$$

в которой мы узнаем условие Келли.

§ 4. Новое необходимое условие оптимальности для особых управлений

Пусть $u^0(t)$ — особое оптимальное управление в задаче (1) — (2) причем $u^0(t) \in \text{int } U$. Предположим, что непрерывная функция $f(x, u, t)$ имеет непрерывные частные производные по x и u до третьего порядка включительно, а непрерывная функция $\varphi(x)$ трижды непрерывно дифференцируема по x .

Введем в рассмотрение функцию $\Phi(x, t, c)$. По определению,

$$\Phi(\check{x}, \check{t}, c) \equiv \varphi(x(\check{x}, \check{t}, c, t_1)),$$

где $x(\check{x}, \check{t}, c, t)$ — траектория уравнения

$$\dot{x} = g(x, t, c) = f(x, u^0(t) + c, t), \quad (1)$$

отвечающая начальному состоянию $\{\check{x}, \check{t}\}$, c — произвольный вектор размерности r .

Как и в § 1, воспользуемся теоремой о дифференцируемости решений обыкновенного дифференциального уравнения по начальным данным и параметру (см. Ф. Хартман [1]); функция $\Phi(x, t, c)$ будет иметь непрерывные частные производные по аргументам x , c до третьего порядка включительно и непрерывную производную по t .

Так как функция $\Phi(x, t, c)$ постоянна вдоль любой траектории уравнения (1), то справедливо тождество

$$\frac{\partial \Phi(x, t, c)}{\partial x} f(x, u^0(t) + c, t) + \frac{\partial \Phi(x, t, c)}{\partial t} \equiv 0. \quad (2)$$

Дифференцируя тождество (2) по x и c , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial f'}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &\equiv 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x \partial c} f + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial c} + \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &\equiv 0, \\ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} f + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial f'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f'}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &\equiv 0, \\ \frac{\partial^3 \Phi'}{\partial x^2 \partial c} f + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t \partial x \partial c} + \frac{\partial f'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial c} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u} + \\ &+ \frac{\partial^2 f'}{\partial x \partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \equiv 0, \\ \frac{\partial^3 \Phi'}{\partial x \partial c^2} f + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t \partial c^2} + \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial c} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \\ &+ \frac{\partial^2 f'}{\partial u^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь все величины вычислены в точках $x, t, u^0(t) + c$. В тождества (3) поставим $x = x^0(t), c = 0$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] = - \frac{\partial f'}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial c} \right] = - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] = - \frac{\partial f'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f'}{\partial x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial c} \right] = - \frac{\partial f'}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial c} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial^2 f'}{\partial u \partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial c^2} \right] = - \frac{\partial f'}{\partial u} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial c} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial^2 f'}{\partial u^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (8)$$

Из определения функции $\Phi(x, t, c)$ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x^0(t_1), t_1, 0)}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi(x^0(t_1))}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t_1), t_1, 0)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t_1))}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \Phi(x^0(t_1), t_1, 0)}{\partial c} &= \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t_1), t_1, 0)}{\partial x \partial c} = \frac{\partial^2 \Phi(x^0(t_1), t_1, 0)}{\partial c^2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Но $u^0(t)$ — особое управление, поэтому из (5) и (9) получаем

$$\frac{\partial \Phi(x^0(t), t, 0)}{\partial c} \equiv 0. \quad (10)$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi^*(x, t) = \Phi(x, t, S \Delta x(t)),$$

где $\Delta x(t) = x - x^0(t)$, S — произвольная $r \times n$ -матрица. Легко видеть, что

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x} + S' \frac{\partial \Phi}{\partial c}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + S' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c^2} S + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial c} S + S' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c \partial x}. \quad (12)$$

Введем управление

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u^0(t), & t \in [t_0, \theta], \\ v, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon], \\ u^0(t) + S \Delta x(\theta + \varepsilon), & t \in [\theta + \varepsilon, t_1], \end{cases}$$

где $\Delta x(\theta + \varepsilon) = \hat{x}(\theta + \varepsilon) - x^0(\theta + \varepsilon)$, $v \in U$. Через $\hat{x}(t)$ обозначим траекторию, соответствующую управлению $\hat{u}(t)$ и начальному состоянию $\{x_0, t_0\}$. Справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} J(\hat{u}) - J(u^0) &= \Phi^*(\hat{x}(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon) - \Phi^*(x^0(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon) = \\ &= \frac{\partial \Phi^*(x^0(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x} \Delta x(\theta + \varepsilon) + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta x'(\theta + \varepsilon) \frac{\partial^2 \Phi^*(x^0(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x^2} \Delta x(\theta + \varepsilon) + \\ &+ o(\|\Delta x(\theta + \varepsilon)\|^2) \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу (10) из (11) получаем

$$\frac{\partial \Phi^*(x^0(t), t)}{\partial x} \equiv \frac{\partial \Phi(x^0(t), t, 0)}{\partial x}.$$

Из неравенства (13) (см. § 2) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^*(x^0(t), t)}{\partial x} \frac{\partial \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) + \\ + \Delta_v f'(x^0(t), u^0(t), t) \frac{\partial^2 \Phi^*(x^0(t), t)}{\partial x^2} \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь введем обозначения, положив

$$\begin{aligned}\psi(t) &= -\frac{\partial \Phi^*(x^0(t), t)}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi(x^0(t), t, 0)}{\partial x}, \\ \Psi^*(t) &= -\frac{\partial^2 \Phi^*(x^0(t), t)}{\partial x^2}, \quad \Psi(t) = -\frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t, 0)}{\partial x^2}, \\ P(t) &= -\frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t, 0)}{\partial x \partial c}, \quad R(t) = -\frac{\partial^2 \Phi(x^0(t), t, 0)}{\partial c^2}.\end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема. Пусть $u^0(t)$ — особое оптимальное управление ($u^0(t) \in \text{int } U$). Тогда необходимо

$$\begin{aligned}& \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) + \\ & + \Delta_v f'(x^0(t), u^0(t), t) \Psi^*(t) \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \leq 0. \quad (15) \\ & t \in T, \quad v \in U.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Psi^*(t) &= \Psi(t) + S'R(t)S + P(t)S + S'P'(t), \quad (16) \\ \dot{\Psi}(t) &= -\frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Psi(t) - \Psi(t) \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} - \\ & - \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x^2}, \quad \Psi(t_1) = -\frac{\partial^2 \Phi(x^0(t_1))}{\partial x^2}, \\ \dot{P}(t) &= -\frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} P(t) - \Psi(t) \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} - \\ & - \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x \partial u}, \quad P(t_1) = 0, \\ \dot{R}(t) &= -\frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} P(t) - P'(t) \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial u}, \\ & R(t_1) = 0\end{aligned}$$

(S — произвольная $r \times n$ -матрица).

Соотношение (15) следует из (14), (16), из (12), а уравнения для определения $\Psi(t)$, $P(t)$, $R(t)$ из (4) — (9).

Следствия. 1. Вдоль особого оптимального управления $u^0(t)$ ($u^0(t) \in \text{int } U$) необходимо выполняется условие

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi^* \frac{\partial f}{\partial u} \leq 0, \quad t \in T. \quad (17)$$

2. Если $u^0(t)$ — особое оптимальное управление ($u^0(t) \in \text{int } U$), то

$$R(t) \leq 0, \quad t \in T. \quad (18)$$

Допустим, что (18) не выполняется. Тогда найдутся такие момент $\theta \in T$ и вектор c_0 , что $c_0' R(\theta) c_0 > 0$. Если

$$\frac{\partial f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta)}{\partial u} \neq 0,$$

то можно подобрать матрицу S_1 и вектор c_1 такие, что

$$S_1 \frac{\partial f}{\partial u} c_1 = c_0.$$

Отсюда

$$c_1' \frac{\partial f'}{\partial u} S_1' R(\theta) S_1 \frac{\partial f}{\partial u} c_1 > 0. \quad (19)$$

Из (19) следует, что для матриц вида $S = \lambda S_1$ (λ — положительное число) при достаточно больших λ будет выполняться неравенство

$$c_1' \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} c_1 + c_1' \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi^* \frac{\partial f}{\partial u} c_1 > 0,$$

что противоречит (17). Таким образом, если

$$\frac{\partial f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta)}{\partial u} \neq 0,$$

то $R(\theta) \leq 0$.

В точках, где $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$, выполняется равенство $\dot{R} = 0$.

На этом закончим пояснения следствия 2.

Пример. Рассмотрим задачу: $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_3 = -ux_2$, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $|u| \leq 1$, $\varphi(x) = x_3$.

Управление $u(t) \equiv 0$ является особым управлением, так как вдоль него $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = \psi_1(t) = \psi_2(t) \equiv 0$ и функция $H(x, \psi, u, t) = \psi_1 u + \psi_2(x_1 + x_2) - \psi_3 u x_2$ не зависит от u . Легко убедиться, что

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right] \equiv 2 > 0.$$

Таким образом, необходимое условие оптимальности для особых управлений (II.10.4) и условие Келли здесь неэффективны.

Уравнения для $p_i(t)$ имеют вид

$$\begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} p_1(1) \\ p_2(1) \\ p_3(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Отсюда $p_1(t) = e^{1-t} + t - 2$, $p_2(t) = e^{1-t} - 1$, $p_3(t) \equiv 0$ и, значит,

$$\dot{R} = -2 \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{1-t} + t - 2 \\ e^{1-t} - 1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$R(1) = 0, \quad R(t) = 2e^{1-t} - t^2 + 4t - 5.$$

Нетрудно видеть, что при t , достаточно близких к нулю, $R(t) > 0$, что противоречит (18). Следовательно, управление $u(t) \equiv 0$ — неоптимальное.

Комментарии к главе VII

§ 1. Функция $\Phi(x, t)$ отличается от известной по динамическому программированию функции Беллмана. Можно сказать, что функция $\Phi(x, t)$, как правило, гладкая, в то время как функция Беллмана, как правило, недифференцируема. Физический смысл функции $\Phi(x, t)$ ясен из ее определения. В теорию оптимальных процессов функции $\Phi(x, t)$ введена Л. И. Розоноэром [3] при установлении связи между динамическим программированием и принципом максимума. Однако в дальнейшем она систематически не использовалась.

§§ 2—3. Необходимое условие оптимальности (8) методом приращений в пространстве состояний получено А. И. Калинин. Тем же методом он получил и условие Келли. Имеется некоторая аналогия между приведенным методом и методом дифференциального динамического программирования Д. Джекобсона [1—3], но идеи, лежащие в основе этих методов, различны, отличается и техника оперирования. Метод приращений в пространстве состояний возник вне зависимости от работ Д. Джекобсона и оформлен после анализа работы Л. И. Розоноэра [1—3] и опыта работы с формулами приращений различного порядка.

§ 4. Оригинальный результат этого параграфа получен А. И. Калинин с помощью новой функции $\Phi(x, t, c)$.

ГЛАВА VIII

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО СОПРЯЖЕНИЯ УЧАСТКОВ УПРАВЛЕНИЯ

В вариационном исчислении проблема сопряжения экстремалей занимает особое положение, и есть специальное условие Вейерштрасса — Эрдмана для оптимального сопряжения. Внимание к этой проблеме объясняется тем, что основные необходимые условия оптимальности (например, уравнение Эйлера) получаются для гладких кривых. Понятно, что в задачах, где решения допускают изломы (угловые точки), нужно специально рассмотреть вопрос о сопряжении двух гладких экстремалей. Условие Вейерштрасса — Эрдмана является неформальным критерием. Это действенное средство отсеивания неоптимальных в целом кривых, составленных из кусков экстремалей.

С появлением теории оптимальных процессов интерес к условиям сопряжения, к условиям типа критерия Вейерштрасса — Эрдмана пропал. Объяснить это можно тем, что новые методы были «нечувствительны» к таким особенностям допустимых кривых как негладкость, разрывность. С одной стороны, это обстоятельство говорило в пользу новых методов, так как позволяло расширить их область приложения. С другой стороны, при этом обнаруживался недостаток новых методов, из-за которого пропадала информация о поведении оптимального управления. Например, для принципа максимума безразлично, рассматривается ли точка непрерывности управления или точка разрыва. Между тем ясно, что в точке разрыва происходит качественное изменение управления, и это должно найти отражение в условии оптимальности. Невнимание к условиям сопряжения можно объяснить и тем, что классическое условие Вейерштрасса — Эрдмана в терминах теории оптимальных процессов выражалось в тривиальном требовании (см. § 1 гл II). Из-за этого могло создаться впечатление, что такова судьба и других условий сопряжения.

Цель настоящей главы привлечь внимание к условиям сопряжения. Будет показано, что эти условия далеко не тривиальны и весьма эффективны. При исследовании проблемы сопряжения первым встает вопрос о смысле самого понятия сопряжения. В вариационном исчислении точка сопряжения — угловая точка экстремали. В теории оптимальных процессов, видимо, трудно найти такой простой объект. Поэтому будем исходить из поведения необходимых условий оптимальности. Точками сопряжения будут те, в которых условия оптимальности по некоторым признакам вырождаются. Точное определение будет дано ниже. В качестве примеров точек сопряжения можно указать точки переключения управления.

§ 1. Оптимальное сопряжение неособых управлений

В этом параграфе объектом исследования будут управления, удовлетворяющие принципу максимума (см. Введение). Во многих задачах такие управления ведут себя неодинаково на всем отрезке определения в том смысле, что если, как правило, вдоль них принцип максимума не вырождается, то на отрезке имеются такие точки, в которых можно определенно сказать о вырождении.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ u &\in U, \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}', \quad u = \{u_1, \dots, u_r\}', \\ J(u) &= \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Относительно свойств входящих в задачу функций будем предполагать, что они достаточно «хороши» с аналитической точки зрения (т. е. достаточно гладкие). Можно надеяться, что, исходя из опыта предыдущих глав, каждый может расшифровать смысл последнего выражения.

Пусть $u^0(t)$, $t \in T$, — оптимальное управление. Как известно, оно обязано в каждой точке $t \in T$ удовлетворять принципу максимума

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u(t), t).$$

Если при некотором $\theta \in T$ найдется множество $\omega(\theta) \subset U$ такое, что

$$H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), v, \theta) \equiv H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta)$$

для всех $v \in \omega(\theta)$, то мы будем говорить, что θ — особая точка (принципа максимума).

Из этого определения следует, что для особого управления $u(t)$, $t \in T$, все точки из T являются особыми точками. Очевидно и то, что особые точки могут встретиться и у неособых управлений (достаточно вспомнить точки переключения оптимальных управлений).

В особых точках принцип максимума не позволяет исключить управление из задачи. Однако если эти точки составляют множество меры нуль, то на результат решения задачи оптимизации с помощью принципа максимума такое обстоятельство не повлияет. С этой точки зрения особые точки не представляют интереса. Но если вернуться к тому обоснованию необходимости рассматривать особые управления, которое приведено во Введении, то нетрудно согласиться, что особые точки могут хранить существенную информацию об оптимальном управлении. Наличие особых точек можно опять рассматривать как сигнал о сложности испытываемого управления, как сигнал о преждевременности выводов только по условию первого порядка. Участок управления между особыми точками назовем неособым участком, а особую точку — точкой сопряжения неособых участков управления.

2. Необходимое условие оптимального сопряжения. Пусть $u^0(t)$, $t \in T$, — оптимальное управление, представляющее кусочно-непрерывную функцию с кусочно-непрерывной производной. Приращение функционала вдоль $u^0(t)$ равно (§ 2 гл. IV)

$$\Delta J = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)} H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \Delta_{\bar{u}} H'(x^0, \psi^0, u^0, t)}{dx} + \Delta_{\bar{u}} f'(x^0, u^0, t) \Psi^0(t) \right] \Delta x^0(t) dt - \eta.$$

Подсчитаем ΔJ на игольчатой вариации (IV.3.2), где θ — особая точка. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = & -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\frac{d}{dt} \Delta_v H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) + \right. \\ & + \Delta_v f'(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \Psi^0(\theta) \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) + \\ & \left. + \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \right] + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Поэтому из условия $\Delta J(u^0) \geq 0$ следует

Теорема. Для того чтобы особая точка была точкой оптимального сопряжения, необходимо

$$\left[\frac{d}{dt} \Delta_v H + \Delta_v f' \Psi \Delta_v f + \frac{\partial \Delta_v H'}{\partial x} \Delta_v f \right]_{t=\theta+0} \leq 0 \quad (1)$$

для всех $v \in \omega(\theta)$.

З а м е ч а н и е. Из доказательства теоремы видно, что в условии (1) вместо постоянного вектора v можно взять любое допустимое управление $v(t)$, гладкое справа в точке θ , такое, что $v(\theta) = v$.

П р и м е р ы. 1. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = -x_1^2$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$,

$$T = [0, 1], \quad U = \{u : |u| \leq 1\}, \quad J(u) = x_2(1).$$

Гамильтониан и сопряженная система имеют вид

$$\begin{aligned} H(x, \psi, u) &= \psi_1 u - \psi_2 x_1^2, \quad \dot{\psi}_1 = 2\psi_2 x_1, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \\ \psi_1(1) &= 0, \quad \psi_2(1) = -1. \end{aligned}$$

Принцип максимума:

$$\psi_1(t) u(t) = \max_{|u| \leq 1} \psi_1(t) u. \quad (2)$$

Все точки θ , где $\psi_1(\theta) = 0$, суть особые точки. Управление

$$u(t) = \text{sign} \cos \frac{3\pi t}{2} \quad (3)$$

удовлетворяет принципу максимума (2), причем нули функции $\psi_1(t)$, соответствующей управлению (3), совпадают с нулями функции $\cos \frac{3\pi t}{2}$. Поэтому $\theta = 1/3$ — особая точка, $\omega(\theta) = U$.

Все условия теоремы в данном примере выполнены. Критерий (1) приводит к противоречию. Значит, в точке $\theta = 1/3$ неособые экстремали сопрягаются не оптимально, а потому управление (3) не может быть оптимальным.

2. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = -x_1^2 - u^2$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $T = [0, 1]$,

$$U = \{u : |u| \leq 1\}, \quad J(u) = x_2(1).$$

Имеем

$$H(x, \psi, u) = \psi_1 u - \psi_2 x_1^2 - \psi_2 u^2, \\ \dot{\psi}_1 = 2\psi_2 x_1, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \psi_1(1) = 0, \quad \psi_2(1) = -1.$$

Управление

$$u(t) = \operatorname{sign} \cos \frac{9\pi t}{2} \quad (4)$$

удовлетворяет принципу максимума

$$\psi_1(t)u(t) - \psi_2(t)u^2(t) = \max_{|u| \leq 1} [\psi_1(t)u - \psi_2(t)u^2]. \quad (5)$$

Поскольку $\psi_2(t) \equiv -1$, а нули функции $\psi_1(t)$ совпадают с нулями функции $\cos \frac{9\pi t}{2}$, то при $\theta = 1/9$ максимум в правой части условия (5) достигается на двух элементах $u = -1$, $u = +1$. Таким образом, $\theta = 1/9$ — особая точка и $\omega(\theta) = \{v : v = 1, v = -1\}$.

Условия приведенной выше теоремы выполнены. Критерий (1) показывает, что в точке $\theta = 1/9$ неособые участки управления (4) сопряжены неоптимально. Управление (4) не может быть оптимальным.

3. Необходимое условие оптимального сопряжения при выпуклом множестве скоростей. Если множество $\omega(\theta) = U$ таково, что его образ $f(x(t), U, t)$ — выпуклое множество, то для любого $v \in U$ и числа ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$, найдется вектор $v(\varepsilon) \in U$ такой, что

$$f(x(t), v(\varepsilon), t) = f(x(t), u(t), t) + \\ + \varepsilon [f(x(t), v, t) - f(x(t), u(t), t)]. \quad (6)$$

Поскольку условие (1) выполняется для всех $v \in U$, то оно верно и на $v(\varepsilon)$ при всех ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Подставим $v(\varepsilon)$ в (1) и учтем (6):

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \Delta_v H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) \big|_{t=\theta} + o(\varepsilon) \leq 0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема. Для оптимального сопряжения при выпуклом множестве скоростей необходимо, чтобы

$$\frac{d}{dt} \Delta_v H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) \big|_{t=\theta} \leq 0, \quad v \in U. \quad (7)$$

З а м е ч а н и е. Для стационарных систем выполняется тождество

$$\frac{d}{dt} H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t)) \equiv 0, \quad t \in T.$$

В этом случае критерий (7) принимает вид

$$\frac{d}{dt} H(x^0(t), \psi^0(t), v) \Big|_{t=\theta} \leq 0$$

для любых $v \in \omega(\theta)$.

4. Оптимальное сопряжение при выпуклом множестве управления. Пусть $\omega(\theta) = U$ — выпуклое множество. Тогда из (1) следует утверждение.

Теорема. Если θ — точка оптимального сопряжения, то

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} (v - u^0(t)) \right] \Big|_{t=\theta} \leq 0$$

для всех $v \in U$.

Доказательство такое же, как в предыдущем случае.

§ 2. Сопряжение особых и неособых участков управления

При рассмотрении особых управлений до сих пор для простоты считалось, что управление особое на всем отрезке определения. Между тем особое управление, как правило, появляется лишь на некоторых участках. Условия оптимальности от этого не меняются внутри участков, но возникает проблема оптимального сопряжения особых и неособых участков.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + u f_1(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ |u| &\leq 1, \quad J(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min, \\ x &= \{x_1, \dots, x_n\}', \quad u - \text{скаляр}. \end{aligned}$$

Точку $\theta \in T$ назовем точкой сопряжения особого и неособого участков управления, если в левосторонней окрестности ее управление особое, в правосторонней — неособое.

Аналогично определяется точка сопряжения неособого и особого участков.

Из постановки задачи видно, что на неособых участках управление принимает предельное значение ± 1 . Далее будем считать, что внутри особых участков управление не выходит на границу.

Задача настоящего параграфа — выяснить, какими свойствами обладает оптимальное сопряжение особых и неособых участков.

2. Первый тип сопряжения. Пусть $\theta \in T$ — точка сопряжения особого и неособого участков оптимального управления и сопряжение имеет следующий характер:

- а) $u(t)$ разрывно в точке $t = \theta$,
- б) наименьший индекс k , при котором в точке $t = \theta$ выражение

$$(-1)^k \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{\partial H}{\partial u} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

отрицательно, равен q :

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=\theta} < 0, \quad (1)$$

- с) $u(\theta) = u(\theta + 0) = 1$.

Поскольку в силу принципа максимума $u(t) = \text{sign} \frac{\partial H}{\partial u}$, $t > \theta$, то из свойства с) следует, что найдется такое $\delta > 0$, что

$$\frac{\partial H}{\partial u} > 0, \quad t \in (\theta, \theta + \delta).$$

Другими словами, первая отличная от нуля производная $\frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial H}{\partial u}$ в точке $t = \theta$ положительна. С учетом этого из свойства б) следует

$$\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} = [a(x, \psi) + ub(x, \psi)]_{t=\theta} > 0. \quad (2)$$

С другой стороны, в силу особенности управления имеем

$$\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} = [a(x, \psi) + ub(x, \psi)]_{t=\theta-0} = 0. \quad (3)$$

Из (2), (3) вследствие непрерывности функций $x(t)$, $\psi(t)$ и свойства а) получаем

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=\theta} > 0. \quad (4)$$

Если q — четное, то вывод (4) противоречит предположению б).

Таким образом, для оптимальности описанного типа сопряжения необходимо, чтобы число q в (1) было нечетным.

З а м е ч а н и е. Если вместо с) выполняется с') $u(\theta) = -1$, то при оптимальном сопряжении в (1) q должно быть также нечетным.

3. Второй тип сопряжения. Пусть в точке сопряжения $t = \theta$ выполнены свойства: а') $t = \theta$ — угловая точка непрерывного управления $u(t)$, ($\dot{u}(\theta - 0) > 0$) и свойства б), с) из п. 2.

Тогда, с одной стороны,

$$\frac{d^{2q+1}}{dt^{2q+1}} \frac{\partial H}{\partial u} = \left[\frac{d}{dt} a(x, \psi) + u \frac{d}{dt} b(x, \psi) + \dot{u} b(x, \psi) \right]_{t=\theta} > 0;$$

с другой стороны,

$$\frac{d^{2q+1}}{dt^{2q+1}} \frac{\partial H}{\partial u} = \left[\frac{d}{dt} a(x, \psi) + u \frac{d}{dt} b(x, \psi) + \dot{u} b(x, \psi) \right]_{t=\theta-0} = 0.$$

В силу непрерывности функций $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$ в точке $t = \theta$ заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=\theta} < 0.$$

Если q — нечетное, то полученное неравенство противоречит (1).

Следовательно, для оптимальности рассмотренного в этом пункте типа сопряжения необходимо, чтобы число q в (1) было четным.

З а м е ч а н и е. Аналогично показывается, что если вместо с) выполняется с'), то в (1) при оптимальном сопряжении индекс q опять должен быть четным.

4. Общий случай. Допустим, что сопряжение имеет следующий характер:

а) на особом участке:

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=\theta} < 0 \quad (5)$$

и q — наименьший индекс, при котором левая часть (5) отлична от нуля;

b) на неособом участке:

$$u(t) \equiv 1, \quad t \in [\theta, \theta + \delta), \quad \delta > 0;$$

c) в момент сопряжения

$$\left. \begin{aligned} u(\theta - 0) &= u(\theta), \\ \dot{u}(\theta - 0) &= \dot{u}(\theta), \dots, u^{(p-1)}(\theta - 0) = u^{(p-1)}(\theta), \\ u^{(p)}(\theta - 0) &\neq u^{(p)}(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из свойства b) следует, что

$$\dot{u}(\theta) = \ddot{u}(\theta) = \dots = u^{(p-1)}(\theta) = 0.$$

Отсюда с учетом c) получим (на особом участке)

$$u(t) = u(\theta) + \frac{1}{p!} u^{(p)}(\theta - 0) (t - \theta)^p + o((t - \theta)^p), \quad t < \theta. \quad (7)$$

Поскольку $u(t) - u(\theta) < 0$, $t < \theta$ (особое управление лежит внутри допустимой области), то из (7) имеем

$$\begin{aligned} u^{(p)}(\theta - 0) &< 0, \quad p - \text{четное}, \\ u^{(p)}(\theta - 0) &> 0, \quad p - \text{нечетное}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из свойства a) следует, что впервые управление u появляется в производной $\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u}$:

$$\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} = a(x, \psi) + ub(x, \psi). \quad (9)$$

Продифференцируем (9) по времени p раз. Результат, очевидно, может быть представлен в виде

$$\frac{d^{2q+p}}{dt^{2q+p}} \frac{\partial H}{\partial u} = A(x, \psi, u, \dot{u}, \dots, u^{(p-1)}) + u^{(p)}b(x, \psi). \quad (10)$$

Свойство b) означает, что

$$\frac{\partial H}{\partial u} > 0, \quad t \in (\theta, \theta + \delta).$$

Другими словами, первая отличная от нуля производная $\frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial H}{\partial u}$, $k = 1, 2, \dots$ положительна. Из c) следует, что это будет производная, в которую впервые

войдет $u^{(p)}$, т. е. производная порядка $2q + p$ (10). Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{t=\theta} &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2q + p - 1, \\ \frac{d^{2q+p}}{dt^{2q+p}} \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{t=\theta} &= [A(x, \psi, u, \dots, u^{(p-1)}) + u^{(p)} b(x, \psi)]|_{t=\theta} > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

С другой стороны, в силу особенности управления $u(t)$, $t < \theta$

$$\begin{aligned} \frac{d^{2q+p}}{dt^{2q+p}} \frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{t=\theta-0} &= \\ &= [A(x, \psi, u, \dots, u^{(p-1)}) + u^{(p)} b(x, \psi)]|_{t=\theta-0} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу непрерывности в точке $t = \theta$ функций $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$, $\dot{u}(t)$, \dots , $u^{(p-1)}(t)$ получаем

$$\begin{aligned} A(x, \psi, u, \dots, u^{(p-1)})|_{t=\theta} &= A(x, \psi, u, \dots, u^{(p-1)})|_{t=\theta-0}, \\ B(x, \psi)|_{t=\theta} &= b(x, \psi)|_{t=\theta-0}. \end{aligned}$$

Из (11), (12) следует неравенство

$$u^{(p)}(\theta - 0) b(x, \psi)|_{t=\theta} < 0,$$

или [с учетом (9)]

$$u^{(p)}(\theta - 0) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \frac{\partial H}{\partial u} \right)_{t=\theta} < 0. \quad (13)$$

Предположим, что число p в с) четное. Тогда по доказанному [см. (8)] $u^{(p)}(\theta - 0) < 0$, и для справедливости неравенства (13) число q в (5) должно быть нечетным. Аналогично, если p — нечетное число, то на оптимальном управлении число q в (5) должно быть четным.

Так же исследуется случай, когда $u(\theta) = -1$. Вывод остается прежним.

Теорема. Пусть управление $u(t)$ содержит особые и неособые участки, и $\theta \in T$ — точка сопряжения двух из них. Предположим, что на особом участке управление удовлетворяет условию (5) и в момент сопряжения — условиям (6). Если число p в (6) четное (нечетное), то

для оптимальности управления $u(t)$ в точке $t = \theta$ необходимо, чтобы число q было нечетным (соответственно четным) и наоборот.

§ 3. Вторая группа условий оптимального сопряжения особого и неособого участков управления

Условия оптимального сопряжения можно получить и с помощью специальных вариаций, построенных в точках сопряжения.

1. Сопряжение особого и неособого участков. Пусть $\theta \in T$ — точка сопряжения особого и неособого участков управления $u(t)$. Введем следующую вариацию управления:

$$\delta u(t) = \begin{cases} a, & \theta - 2\varepsilon < t < \theta - \varepsilon, \quad \theta \leq t < \theta + \varepsilon, \\ -a, & \theta - \varepsilon \leq t < \theta, \quad \theta + \varepsilon \leq t < \theta + 2\varepsilon, \\ 0, & t \in (\theta - 2\varepsilon, \theta + 2\varepsilon), \end{cases} \quad (1)$$

где a — произвольное число, $\varepsilon > 0$.

Соответствующее $\delta u(t)$ разложение приращения функционала по степеням ε имеет вид

$$\begin{aligned} -\Delta J(u) = & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_{t=\theta+0} a^2 \varepsilon + \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_{t=\theta+0} a^2 \varepsilon^2 + \\ & + \frac{2}{3} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_{t=\theta+0} a^2 \varepsilon^3 - \\ & - \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right] \Big|_{t=\theta+0} a^2 \varepsilon^3 - \\ & - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=\theta-0} a^2 \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим, что функции $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$ непрерывны в точке $t = \theta$ вдоль рассматриваемого управления $u(t)$. Тогда из (2) следует: для оптимальности управления $u(t)$ в точке сопряжения $t = \theta$ необходимо выполнение неравенства

$$\begin{aligned} \left[3 \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right] \Big|_{t=\theta+0} - \\ - \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) \Big|_{t=\theta-0} \leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим теперь приращение $\Delta J(u)$ на «игольчатой» вариации, заданной в точке θ :

$$\delta u(t) = \begin{cases} a, & \theta \leq t < \theta + \varepsilon, \\ 0, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases}$$

В данном случае разложение $\Delta J(u)$ по степеням ε имеет такой вид:

$$\begin{aligned} -\Delta J(u) = & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_{t=\theta+0} a^2 \varepsilon + \\ & + \frac{1}{4} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \right] \Big|_{t=\theta+0} a^2 \varepsilon^2 + \\ & + \frac{1}{12} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \right] \Big|_{t=\theta+0} a^2 \varepsilon^3 + \\ & + o(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Отсюда получаем: для оптимальности управления $u(t)$ в точке $t = \theta$ сопряжения особого и неособого участков необходимо, чтобы

$$a) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_{t=\theta+0} \leq 0,$$

$$b) \text{ если } \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_{t=\theta+0} = 0,$$

то

$$\left[2 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right] \Big|_{t=\theta+0} \leq 0,$$

с) если а), б) неэффективны, то

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \right] \Big|_{t=\theta+0} \leq 0.$$

Здесь левые части неравенств подсчитываются со стороны неособого управления.

Проверка условий а), б), с) не связана с особым управлением, что может оказаться полезным в задачах, где вычисление особого управления затруднительно.

2. Сопряжение неособого и особого участков. Пусть $\theta \in T$ — точка стыка неособого и особого участков управления $u(t)$, $t \in T$.

Рассмотрение $\Delta J(u)$ на вариации (1) приводит к необходимому условию оптимальности в виде неравен-

ства (3), где $\theta \neq 0$ следует заменить на $\theta = 0$, и наоборот.

Из рассмотрения $\Delta J(u)$ на вариации

$$\delta u(t) = \begin{cases} a, & \theta - \varepsilon < t \leq \theta, \\ 0, & t \in (\theta - \varepsilon, \theta], \end{cases}$$

получаются следующие необходимые условия оптимальности управления $u(t)$ в точке $t = \theta$:

$$a) \quad \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right|_{t=\theta-0} \leq 0, \quad (4)$$

b) если а) неэффективно, то

$$\left[2 \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right] \Big|_{t=\theta-0} \leq 0, \quad (5)$$

с) если левые части неравенств в а), б) обращаются в нуль, то

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) - 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} \right) \right] \Big|_{t=\theta-0} \leq 0.$$

Проиллюстрируем эффективность полученных условий на примере.

Пусть дана система $\dot{x}_1 = -u$, $\dot{x}_2 = x_1^2 + x_1 u^3 + \frac{1}{4}(t^2 - 1)u^4$, для которой $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $T = [0, 2]$,

$$U = \{u: -0,5 < u < 1,5\}, \quad \varphi(x) = x_2.$$

Рассмотрим управление

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad (6)$$

с особым участком $[1, 2]$. На неособом промежутке $[0, 1]$ управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{u=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right|_{u=1} = -3(t-1)^2 \leq 0.$$

На особом участке $[1, 2]$ управление $u(t)$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} \right) &= 2 > 0, \\ \frac{\partial^2 H'}{\partial u \partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f'}{\partial u} \Psi \frac{\partial f}{\partial u} &= 2(t-2) \leq 0. \end{aligned}$$

Проверим рассматриваемое управление на оптимальность в точке $t = 1$ сопряжения неособого и особого участков с помощью необходимых условий из данного пункта. Условие (4) неэффективно, так как $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_{t=1-0} = 0$. Применение неравенства (5) приводит к противоречию: $2 \leq 0$. Таким образом, исследуемое управление (6) неоптимально.

3. О сопряжении участков с различными особыми управлениями. Используя результаты § 10 гл. II, нетрудно получить условия оптимального сопряжения особых управлений различного порядка вырожденности. Пусть, например, $\theta \in T$ — точка сопряжения особых управлений, одно из которых таково, что $M(t) \equiv 0$, $t \leq \theta$, для другого же $M(t) \neq 0$, $t > \theta$. Тогда для оптимальности их сопряжения необходимо выполнение неравенства (II. 10.8). Неравенство (II. 10.9) используется, если, наоборот, $M(t) \neq 0$, $t < \theta$, $M(t) \equiv 0$, $t \geq \theta$. Если эти условия неэффективны, то для дальнейшего исследования можно применять неравенства (II. 10.21), (II. 10.22).

Комментарии к главе VIII

§ 1. Основные результаты этого параграфа содержатся в статье авторов [3]. Особые точки принципа максимума в литературе до сих пор не исследовались.

§ 2. Материал параграфа взят из обзора авторов и В. А. Срочко, Н. В. Тарасенко [3].

§ 3. В изложении материала мы следуем диссертации В. А. Срочко [2]. Задаче сопряжения участков управления посвящены также работы Р. Габасова, В. А. Срочко [1], С. Джонсона [1], Г. Келли, Р. Коппа, Г. Мойера [1], Ю. А. Клиха, О. Ф. Макарова, В. А. Плотникова [1, 2], Г. Роббинса [1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из содержания монографии, она посвящена изложению методов исследования особых управлений в непрерывных системах. Конечно, авторы не могли изложить все известные методы. Материал книги основан на методах решения двух проблем теории оптимальных процессов: проблемы вычисления особых управлений и проблемы необходимых условий оптимальности. Первая проблема, с одной стороны, естественно связана с уже классическими результатами по принципу максимума, а с другой, — с теорией необходимых условий оптимальности особых управлений, т. е. со второй основной проблемой, рассмотренной в монографии. С изложенной точки зрения данная работа непосредственно примыкает к известной монографии Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко [1] и монографии авторов [5] и содержит первые результаты по дальнейшему развитию теории оптимальных процессов.

Из других проблем, относящихся к особым управлениям, которые довольно подробно исследованы в литературе, отметим проблему достаточных условий оптимальности. Эта важная проблема рассматривалась в работах В. И. Гурмана [3], Д. Джекобсона [8, 9], Р. Габасова [4]. Здесь очень ценной оказалась одна особенность, присущая методу В. Ф. Кротова [4, 5] и не имеющая аналога в динамическом программировании.

При исследовании частных задач успешно работают специфические приемы. Из таких приемов исследования особых управлений в двумерных системах отметим метод А. Миеле [3], основанный на известной теореме Грина. Хорошее изложение этого приема имеется в монографии А. М. Летова [2].

Важным разделом теории особых управлений, которому авторы не смогли уделить внимания, является исследование практических задач с помощью изложенных методов. Таких задач в литературе накопилось уже много. Среди них большое число нетривиальных.

На современном этапе практическая актуальность теории особых управлений не вызывает сомнений. В последнее время обнаружилось чисто теоретическое значение проблемы особых управлений для внутренних проблем теории оптимальных процессов, в частности, для теории существования оптимальных управлений.

ЛИТЕРАТУРА

Альсевич В. В.

1. Некоторые необходимые условия оптимальности второго порядка, Тезисы докл. Третьей республ. конференции математиков Белоруссии (Минск, 1971), изд-во Белорусского гос. ун-та, 1971, стр. 88.

Атанс М., Кеннон М. (Athans M., Cannon M. D.)

1. On the full optimal singular control of nonlinear secondorder systems. IEEE Trans. Automatic Control, v. AC-9, No. 3, 1964, pp. 360—370.

Атанс М., Фалб П.

1. Оптимальное управление, изд-во «Машиностроение», М., 1968.

Барбашина Е. Е.

1. Необходимые условия оптимальности второго порядка типа Келли, Тезисы докл. II Всесоюзн. конференции по проблемам теорет. кибернетики (Новосибирск, 1971), изд-во Сибирского отд. АН СССР, 1971, стр. 24.
2. Необходимое условие оптимальности типа Келли, Тезисы докл. Третьей республ. конференции математиков Белоруссии (Минск, 1971), изд-во Белорусского гос. ун-та, 1971, стр. 89.

Басс Р., Вебер Р. (Bass R. W., Weber R. F.)

1. On synthesis of optimal bang-bang feedback control systems with quadratic performance criterion, Proc. 6th Joint Automatic Control Conference, Troy, New York, 1965, pp. 213—219.

Беллман Р.

1. Динамическое программирование, ИЛ, М., 1960.

Блисс Г. А.

1. Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, М., 1950.

Болонкин А. А.

1. Специальные экстремали в задачах оптимального управления, Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, 1969, № 2, стр. 187—198.
2. Метод решения оптимальных задач, в сб. «Сложные системы управления», изд-во «Наукова думка», Киев, 1965, стр. 34—90.

Брайсон А., Хо Ю. (Bryson A. E., Ho Y. C.)

1. Applied optimal control, Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1969.

Бриквел Дж. (Breakwell J. V.)

1. A doubly singular problem in optimal interplanetary guidance, SIAM J. Control, 1965, No. 3, pp. 71—77.

Бриквел Дж., Спейер Дж., Брайсон А. (Breakwell J. V., Speyer J. L., Bryson A. E.)

1. Optimization and control of nonlinear systems using the second variation, SIAM J. Control, 1963, v. 1, No. 2, pp. 193—223.

Бриквел Дж., Хо Ю. (Breakwell J. V., Ho Y. C.)

1. On the conjugate point condition for the control problem, Internat. J. Engrg. Sci., 1965, v. 2, No. 6, pp. 565—579.

Буякас В. И.

1. Оптимальное управление системами с переменной структурой, Автоматика и телемеханика, 1966, т. XXVII, № 4, стр. 57—68.
2. Оптимальное управление системами с переменной структурой при постоянно действующем возмущении, Автоматика и телемеханика, 1966, т. XXVII, № 7, стр. 92—101.

Васильев О. В.

1. Об оптимальности особого управления в системах с распределенными параметрами, Тезисы докл. II Всесоюз. конференции по проблемам теорет. кибернетики (Новосибирск, 1971), изд-во Сибирского отд. АН СССР, 1971, стр. 26—27.

Васильев О. В., Тятюшкин А. И.

1. Численное решение задач оптимального управления с использованием второй вариации, Тезисы докл. Третьей республ. конференции математиков Белоруссии (Минск, 1971), изд-во Белорусского гос. ун-та, 1971, стр. 92.

Вапнярский И. Б.

1. Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее приложения и необходимые условия оптимальности скользящих и особых режимов, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1967, т. 7, № 2, стр. 259—283.

Габасов Р.

1. Об одной задаче теории оптимальных процессов, Автоматика и телемеханика, 1967, т. XXVIII, № 8, стр. 5—15.
2. К теории необходимых условий оптимальности особых управлений, ДАН СССР, 1968, т. 183, № 2, стр. 300—302.
3. Об условиях оптимальности для особых управлений, Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика, 1968, № 5, стр. 34—43.
4. Об оптимальности особых управлений, Дифференц. уравнения, 1968, т. IV, № 6, стр. 1000—1011.
5. Управляемость динамических систем в критических случаях и особые оптимальные управления, Аннотации докл. III Всесоюз. съезда по теоретич. и прикл. мех., изд-во «Наука», 1968, стр. 84.

Габасов Р., Кириллова Ф. М.

1. Принцип максимума для экстремалей Л. С. Понтрягина, Дифференц. уравнения, 1968, т. IV, № 6, стр. 963—972.
2. Оптимальные управления с особыми участками, Автоматика и телемеханика, 1969, т. XXX, № 10, стр. 15—25.
3. К теории необходимых условий оптимальности высокого порядка, Дифференц. уравнения, 1970, т. VI, № 4, стр. 665—676.
4. Метод динамического программирования в теории оптимальных особых управлений, Автоматика и телемеханика, 1970, т. XXXI, № 8, стр. 5—10.
5. Качественная теория оптимальных процессов, изд-во «Наука», 1971.
6. High-order necessary conditions for optimality, SIAM J. Control, 1972, v. 9, No. 1, pp. 127—168.

7. Современное состояние теории оптимальных процессов (обзор), Автоматика и телемеханика, 1972, № 10, стр. 31—62.
- Габасов Р., Кириллова Ф. М., Срочко В. А.
1. К теории оптимальных особых управлений, Тезисы V Междун. конференции по нелинейным колебаниям (Киев, 1969), Изд-во АН УССР, 1969, стр. 59—60.
- Габасов Р., Кириллова Ф. М., Срочко В. А., Тарасенко Н. В.
1. Условия оптимальности высокого порядка. I. Вычисление особых управлений, Автоматика и телемеханика, 1971, № 5, стр. 5—22.
 2. Условия оптимальности высокого порядка. II. Необходимые условия оптимальности высокого порядка, Автоматика и телемеханика, 1971, № 6, стр. 5—24.
 3. Условия оптимальности высокого порядка. III. Достаточные условия оптимальности высокого порядка, Автоматика и телемеханика, 1971, № 7, стр. 5—34.
- Габасов Р., Срочко В. А.
1. Исследование особых управлений с помощью пакета вариаций, Дифференц. уравнения, 1970, т. VI, № 2, стр. 260—275.
- Гамкрелидзе Р. В.
1. О скользящих оптимальных режимах, ДАН СССР, 1962, т. 143, № 6, стр. 1243—1245.
- Гиндес В. Б.
1. Об особом управлении в оптимальных системах, Изв. вузов, Математика, 1967, № 7, стр. 34—42.
- Гоx Б. С. (Goh B. S.)
1. The second variation for the singular Bolza problem, SIAM J. Control, 1966, v. 4, No. 2, pp. 309—325.
 2. Necessary conditions for singular extremals involving multiple control variables, SIAM J. Control, 1966, v. 4, No. 4, pp. 716—731.
 3. Optimal singular control for multi-input linear systems, J. Math. Anal. and Applic., 1967, v. 20, No. 3, pp. 534—539.
- Гурман В. И.
1. Об оптимальных процессах особого управления, Автоматика и телемеханика, 1965, т. XXVI, № 5, стр. 782—791.
 2. Метод исследования одного класса оптимальных скользящих режимов, Автоматика и телемеханика, 1965, т. XXVI, № 7, стр. 1169—1176.
 3. Метод кратных максимумов и условия относительной оптимальности вырожденных режимов, Автоматика и телемеханика, 1967, т. XXVIII, № 11, стр. 38—45.
 4. Об оптимальных траекториях реактивного аппарата в центральном поле, Космические исследования, 1965, т. III, № 3, стр. 368—373.
 5. Об оптимальных переходах между компланарными эллиптическими орбитами в центральном поле, Космические исследования, 1966, т. IV, № 1, стр. 26—39.
 6. К вопросу об оптимальности особых режимов движения ракет в центральном поле, Космические исследования, 1966, т. IV, № 4, стр. 499—509.

7. Структура оптимальных режимов движения ракет в однородном гравитационном поле, Космические исследования, 1966, т. IV, № 6, стр. 815—822.
 8. Метод кратных максимумов и задачи оптимизации космических маневров, Труды вторых Всесоюзн. чтений, посвященных К. Э. Циолковскому (Калуга, 1967), секция «Механика космического полета», изд-во «Наука», 1968, стр. 39—51.
- Гурман В. И., Никулин А. М.
1. Вопросы реализации оптимального циклического режима торможения вращения спутника, Труды третьих Всесоюзн. чтений, посвященных К. Э. Циолковскому (Калуга, 1968), секция «Механика космического полета», изд-во «Наука», 1969, стр. 36—48.
- Дан Д. (Dunn D.)
1. On the classification of singular and nonsingular extremals for the Pontryagin maximum principle, J. Math. Anal. and Applic., 1967, v. 17, No. 1, pp. 1—36.
- Дайер П., Мак Рейнольдс С. (Dyer P., McReynolds S. R.)
1. On optimal control problems with discontinuities, J. Math. Anal. and Applic., 1968, v. 23, No. 3, pp. 585—603.
- Джекобсон Д. Г. (Jacobson D. H.)
1. New second-order and first-order algorithms for determining optimal control: a differential dynamic programming approach, J. Optim. Theory and Appl., 1968, v. 2, No. 4, pp. 411—440.
 2. Second-order and second-variation, methods for determining optimal control: a comparative study using differential dynamic programming, Internat. J. Control, 1968, v. 7, No. 2, pp. 175—196.
 3. Differential dynamic programming methods for solving bang-bang control problems, IEEE Trans. Automatic Control, 1968, v. AC-13, No. 6, pp. 661—675.
 4. A new necessary condition of optimality for singular control problems, SIAM J. Control, 1969 v. 7, No. 4, pp. 578—595.
 5. On conditions of optimality for singular control problems, IEEE Trans. Automatic Control, 1970, v. AC-15, No. 2, pp. 109—110.
 6. Sufficient conditions for nonnegativity of the second variation on singular and nonsingular control problems, SIAM J. Control, 1970, v. 8, No. 3, pp. 403—423.
 7. A general sufficiency theorem for the second variation. J. Math. Anal. and Applic., 1971, v. 31, No. 3, pp. 578—589.
- Джекобсон Д., Гершвин С., Лиил М. (Jacobson D. H., Gershwin S. B., Leile M. M.)
1. Computation of optimal singular controls, IEEE Trans. Automatic Control, 1970, v. AC-15, No. 1, pp. 67—73.
- Джекобсон Д., Мейн Д. (Jacobson D. H., Mayne D. Q.)
1. Differential dynamic programming, American Elsevier, New York, 1970.
- Джекобсон Д., Снейер Дж. (Jacobson D. H., Speyer J. L.)
1. Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems: a limit approach, J. Math. Anal. and Applic., 1971, v. 34, No. 2, pp. 239—266.

Джонсон С. (Johnson C. D.)

1. Singular solutions in optimal control problems in «Advances in control systems. Theory and applications» (ed. by Leondes C. T.), Acad. Press, New-York—London, 1965, v. 2, pp. 209—267.

Джонсон С., Гибсон Дж. (Johnson C. D., Gibson J. E.)

1. Singular solutions in problems of optimal control, IEEE Trans. Automatic Control, 1963, v. AC-8, No. 1, pp. 4—15.

Добелл А., Хо Ю. (Dobell A. R., Ho Y. C.)

1. Optimal investment policy: an example of a control in economic theory, IEEE Trans. Automatic Control, 1967, v. AC-12, No. 1, pp. 4—14.

Егоров В. А.

1. О решении одной вырожденной задачи и оптимальном подъеме космической ракеты, ПММ, 1958, XXII, вып. 1, стр. 16—26.

Калинин А. И.

1. Метод Кротова для особых управлений, Тезисы докл. Третьей республик. конференции математиков Белоруссии (Минск, 1971), изд-во Белорусского гос. ун-та, 1971, стр. 101.

Келли Г. (Kelley H. J.)

1. Singular extremals in Lawden's problem of optimal rocket fight, J. AIAA, 1963, v. 1, No. 7, pp. 1578—1580.
2. Необходимое условие для особых экстремалей, основанное на второй вариации, Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 8, стр. 26—29.
3. A transformation approach to singular subarcs in optimal trajectory and control problems, SIAM J. Control, 1964, v. 2, No. 2, pp. 234—240.

Келли Г., Копп Р., Мойер Г. (Kelley H. J., Корр R. E., Мoyer H. G.)

1. Singular extremals, in «Topics in Optimization», (ed. by Leitman G.) Acad. Press, New York — London, 1967, pp. 63—101.

Клих Ю. А., Макаров О. Ф., Плотников В. О.

1. О включении особых участков в оптимальную траекторию. Матем. физ. Республ. межвед. сб., вып. 4, Киев, изд-во АН УССР, 1968, стр. 42—49.
2. Про спряження особливих та неособливих екстремалей, Доповіді АН УРСР, сер. А, 1967, № 9, стр. 963—972.

Койвуниemi А., Гамильтон В. (Koivuniemi A. J., Hamilton W. E.)

1. An algorithm for the solution to an optimal singular control problem, Proc. Nat. Electron. Conf., Chicago, 1967, part III, v. 23, pp. 90—94.

Контенсу П. (Contensou P.)

1. Etude theorique des trajectoires dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique, Astronaut. Acta, 1962, v. 8, No. 2, pp. 134—150.

Копп Р., Мойер Г. (Корр R. E., Мoyer H. G.)

1. Необходимые условия оптимальности особых экстремалей, Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 8, стр. 84—91.

Кротов В. Ф.

1. Разрывные решения вариационных задач, Изв. вузов, Математика, 1960, № 5, стр. 86—98.

2. О разрывных решениях в вариационных задачах, Изв. вузов, Математика, 1961, № 2, стр. 75—89.
 3. Об абсолютном минимуме функционала на совокупности функций с ограниченной производной, ДАН СССР, 1961, т. 140, № 3, стр. 525—528.
 4. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, I, Автоматика и телемеханика, 1962, т. XXIII, № 12, стр. 1571—1583.
 5. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, II, Автоматика и телемеханика, 1963, т. XXIV, № 5, стр. 581—598.
- Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И.
1. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета, изд-во «Машиностроение», 1969.
- Лейтман Г.
1. Вариационные задачи с ограниченными управлениями (в сб. «Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета», гл. V), перев. с англ., изд-во «Наука», 1965.
- Лен В. (Lehn W. H.)
1. On singular fuel-optimal control of nonlinear systems, IEEE Trans. Automatic Control, 1970, v. AC-15, No. 1, pp. 115—116.
- Летов А. М.
1. Проблематика научных исследований в области автоматического управления, Автоматика и телемеханика, 1966, т. 27, № 8, стр. 167—173.
 2. Динамика полета и управление, изд-во «Наука», 1969.
 3. Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления, Дифференц. уравнения, 1970, т. 6, № 4, стр. 592—615.
- Лоуден Д. (Lawden D. F.)
1. Optimal intermediate-thrust arcs in a gravitational field, Astronaut. Acta, 1962, v. 8, No. 1, pp. 106—123.
 2. Оптимальные траектории для космической навигации, изд-во «Мир», 1966.
- Лурье А. И.
1. Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.
- Мак Данел Дж., Пауэрс В. (McDanell J. P., Powers W. F.)
1. New Jacobi-type necessary and sufficient conditions for restricted classes of singular optimization problems, University of Michigan, Report No. 02677-I-T, Michigan, 1969.
- Месерли И., Полак И. (Messerli E. J., Polak E.)
1. On second order necessary condition of optimality, SIAM J. Control, 1969, v. 7, No. 2, pp. 272—291.
- Миеэле А. (Miele A.)
1. Optimum climbing technique for a rocket powered, Jet propulsion, J. Amer. Rocket Society, 1955, v. 25, No. 8, pp. 385—391.
 2. Flight mechanics and variational problems of linear type, J. Aero/Space Sci., 1958, v. 25, No. 9, pp. 581—590.
 3. Определение экстремумов криволинейных интегралов по теореме Грина (в сб.: «Методы оптимизации с приложениями к меха-

- нике космического полета», гл. III), перев. с англ., изд-во «Наука», 1965.
- Мур Дж., Андерсон Б. (Moore J. B., Anderson B. D. O.)
1. Spectral factorization of time-varying covariance functions: the singular case, *Mathem. Systems Theory*, 1970, v. 4, No. 1, pp. 10—23.
- Никulin А. М.
1. Реализация движения вдоль линии нулевой близости скользящих оптимальных режимов, *Изв. вузов, Авиационная техника*, 1969, № 4, стр. 17—24.
- Овсайд С. (Wovside C. M.)
1. Singular arcs accuring in optimal electric steel refining, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1970, v. AC-15, No. 5, pp. 549—556.
- Островский Г. М., Волин Ю. М., Борисов В. В.
1. Оптимизация сложных систем с помощью метода второго порядка, в сб. «Поиск экстремума», изд-во Томского университета, Томск, 1969, стр. 301—306.
- Охотимский Д. Е.
1. К теории движения ракет, *ПММ*, 1946, т. X, вып. 2, стр. 251—272.
- Охотимский Д. Е., Энеев Т. М.
1. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли, *Успехи физ. наук*, 1957, т. LXIII, вып. 1а, стр. 5—32.
- Параев Ю. И.
1. Об особом управлении в оптимальных процессах, линейных относительно управляющих воздействий, *Автоматика и телемеханика*, 1962, т. XXIII, № 9, стр. 1202—1209.
- Пауэрс В. (Powers W. F.)
1. Techniques for improved convergence in neighboring optimum guidance, *AIAA J.*, 1970, v. 8, No. 12, pp. 2235—2241.
- Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.
1. Математическая теория оптимальных процессов, изд-во «Наука», 1969.
- Роббинс Г. (Robbins H. M.)
1. Оптимальность активных участков промежуточной тяги траекторий ракеты, *Ракетная техника и космонавтика*, 1965, № 6, стр. 139—145.
- Розоноэр Л. И.
1. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, I, *Автоматика и телемеханика*, 1959, т. XX, № 10, стр. 1320—1334.
 2. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, II, *Автоматика и телемеханика*, 1959, т. XX, № 11, стр. 1442—1458.
 3. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, III, *Автоматика и телемеханика*, 1959, т. XX, № 12, стр. 1561—1578.
- Рорер Р., Собрел М. (Rohrer R. A., Sobral M.)
1. Optimal singular solutions for linear multi-input systems, *Trans. ASME*, 1966, ser. D, v. 88, No. 2, pp. 323—328.

Сноу Д. (Snow D. R.)

1. Singular optimal controls for a class of minimum effort problems, *SIAM J. Control*, 1964, v. 2, No. 2, pp. 203—219.

Спейер Дж., Джекобсон Д. (Spreyer J. L., Jacobson D. H.)

1. Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems. A transformation Approach, *J. Math. Anal. and Applic.*, 1971, v. 33, No. 1, pp. 163—186.

Срочко В. А.

1. Связь между двумя необходимыми условиями оптимальности особых управлений, *Дифференц. уравнения*, 1970, т. VI, № 2, стр. 387—389.
2. Особые управления в оптимальных системах, Автореферат кандидатск. диссертации, изд-во Иркутского гос. ун-та, 1971.
3. Особые многомерные управления в обыкновенных динамических системах, Тезисы докл. Третьей республ. конференции математиков Белоруссии (Минск, 1971), изд-во Белорусского гос. ун-та, 1971, стр. 122.

Уонхем В. М., Джонсон С. Д. (Wonham W. M., Johnson C. D.)

1. Optimal bang-bang control with quadratic index of performance, *Trans. ASME, J. Basic Engrg*, 1964, ser. D, v. 86, No. 1, pp. 107—115.

Хартман Ф.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения, изд-во «Мир», 1970.

Хермес Г. (Hermes H.)

1. Controllability and the singular problem, *SIAM J. Control* 1964, v. 2, No. 2, pp. 241—260.

Хермес Г., Хейнес Г. (Hermes H., Haynes G. W.)

1. On the nonlinear control problem with control appearing linearly, *SIAM J. Control*, 1963, v. 1, No. 1, pp. 85—108.

Челельницкий А. М.

1. Динамика вырожденных оптимальных движений, *Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика*, 1969, № 2, стр. 3—14.
2. Оптимальные движения со многими особыми управлениями и приведенные системы. *Изв. АН СССР, ОТН, Техническая кибернетика*, 1969, № 4, стр. 34—39.

Чистов В. П., Бондаренко В. И., Святославский В. А.

1. Оптимальное управление электрическими приводами, изд-во «Энергия», 1968.

Элуашвили М. Г.

1. Метод вычисления особых управлений, Тезисы докл. Третьей республ. конференции математиков Белоруссии (Минск, 1971), изд-во Белорусского гос. ун-та, 1971, стр. 126—127.
2. Метод вычисления особых управлений, *Автоматика и телемеханика*, 1971, № 11, стр. 26—35.

Янг Л. (Young L. C.)

1. Lectures on the calculus of variations and optimal theory, Saunders Co., Philadelphia, 1969.

