МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

основные
понятия
примеры
задачи

В.Н. ТУРЧИН
Е.В. ТУРЧИН

В.Н. ТУРЧИН, Е.В. ТУРЧИН

МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

основные понятия, примеры, задачи

Учебное пособие для студентов высших учебных заведений

Издание второе, переработанное и дополненное

Рекомендовано Министерством образования и науки, молодежи и спорта Украины

Дніпро | «ЛізуновПрес» | 2017

УДК 519.21
ББК 22.17я73
Т89

Рецензенты: *Ю.В. Козаченко,* д-р физ.-мат. наук, проф. (Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко),
В.В. Булдыгин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Национальный технический университет Украины «КПИ»).

Рекомендовано Министерством образования и науки, молодежи и спорта Украины в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений (письмо №1/11 — 857 от 30.01.13).

Навчальний посібник є елементарним вступом до теорії марковських ланцюгів — області сучасної теорії ймовірностей із широкою сферою застосувань. Викладено основні поняття і факти теорії марковських ланцюгів. Теоретичні положення проілюстровано численними прикладами. До кожної глави наведено набір завдань для самостійної роботи. Для читання книги досить знань теорії ймовірностей у обсязі дискретної моделі та вищої математики в обсязі стандартного курсу вищих навчальних закладів.

Для студентів вищих навчальних закладів.

Турчин В.М., Турчин Є.В.
Т89 Марковські ланцюги: Основні поняття, приклади, задачі: Навч. посіб. для студентів вищих навчальних закладів. — Дніпро: ЛізуновПрес, 2017. — 212 с.

ISBN 978-966-2575-84-2

Учебное пособие представляет собой элементарное введение в теорию марковских цепей — широко используемую в приложениях область современной теории вероятностей. Изложены основные понятия и факты теории марковских цепей. Теоретические положения проиллюстрированы многочисленными примерами. К каждой главе приведен набор задач для самостоятельной работы. Для чтения книги достаточно знания теории вероятностей в объеме дискретной модели и высшей математики в объеме стандартного курса высших учебных заведений.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 519.21
ББК 22.17я73

В оформлении обложки использован фрагмент картины художника Леонида Антонюка.

ISBN 978-966-2575-84-2

100
лет
Днепропетровскому
национальному университету
1918 - 2018

Предисловие

Настоящее учебное пособие является элементарным введением в теорию случайных процессов, которая является содержательной, широко используемой в приложениях областью современной теории вероятностей. Оно написано на основе лекций, читаемых авторами в Днепропетровском национальном университете имени Олеся Гончара. Во втором издании исправлены замеченные опечатки и неточности.

Марковские цепи представляют собой простейший тип случайных процессов, для которых характерно "отсутствие памяти". Книга охватывает традиционную тематику курса "Марковские цепи": матрицы переходных вероятностей и задание марковской цепи, возвратность, классификация состояний, классы эквивалентности, эргодическая теорема, эргодические и стационарные распределения, предельное поведение марковской цепи, марковская цепь, описывающая очередь, задача о разорении игрока, марковские цепи с непрерывным временем, пуассоновский процесс, процессы рождения и гибели, обратные и прямые дифференциальные уравнения Колмогорова, эргодическая теорема для процесса рождения и гибели, обслуживание с ожиданием, дифференцируемость переходных вероятностей и время пребывания в состоянии.

Изложение материала иллюстрируется многочисленными примерами и задачами, в частности, из теории массового обслуживания.

Учебным пособием могут пользоваться как студенты механико-математических факультетов, факультетов прикладной математики и кибернетики университетов, так и технических, педагогических, экономических высших учебных заведений.

Авторы признательны Анастасии Розливан — студентке 3-го курса ДНУ имени Олеся Гончара специальности "Статистика" за подготовку к печати рисунков к этой книге.

Предложения, пожелания и замечания относительно содержания книги просим присылать по адресу: Украина, 49010, Днепр-10, пр. Гагарина, 72, Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара, механико-математический факультет, кафедра статистики и теории вероятностей, В. Н. Турчину или по адресу vnturchyn@gmail.com

Авторы.

Глава 1

Цепи Маркова — основные понятия и факты

Детерминированные и стохастически детерминированные системы. В различных областях естествознания, науки и техники мы имеем дело с системами, состояние которых в данный момент определяет их дальнейшую эволюцию. Такие системы называют детерминированными. Естественным обобщением детерминированных систем являются стохастически детерминированные системы. Они эволюционируют случайным образом, но состояние системы в данный момент времени определяет ее распределение (вероятности пребывания в состояниях) во все последующие моменты времени. Такие системы называются марковскими.

Мы будем изучать марковские системы, множество возможных состояний X которых — фазовое пространство — конечно либо счетно (будем считать X множеством целых чисел или его частью). При этом переходы марковской системы из одного состояния в другое возможны либо только в целочисленные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ (математическими моделями таких систем являются цепи Маркова с дискретным временем), либо переходы системы из состояния в состояние возможны в любой момент времени $t \in [0, +\infty)$, математическими моделями таких систем являются цепи Маркова с непрерывным временем.

1.1 Определение цепи Маркова. Простейшие свойства

Далее множество состояний цепи — фазовое пространство X — множество целых чисел или его часть.

Определение. Последовательность $\{\xi_k\}$ целочисленных случайных величин таких, что

$$P\{\xi_{k+1} = i_{k+1} | \xi_k = i_k, \xi_{k-1} = i_{k-1}, ..., \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\} =$$

$$= P\{\xi_{k+1} = i_{k+1} | \xi_k = i_k\} \tag{1.1.1}$$

для каждого $k \geq 0$ и любых $i_0, i_1, ..., i_{k+1}$ из фазового пространства X будем называть *цепью Маркова* (*марковской цепью*).

Предполагается, что все условные вероятности, участвующие в определении марковской цепи, определены.

Равенство (1.1.1) называют *марковским свойством.*

Так что *марковская цепь — это последовательность целочисленных случайных величин, для которой имеет место марковское свойство.*

Случайную величину ξ_k будем называть *состоянием системы* (*цепи*) в момент времени $t = k$, $k = 0, 1, ...$, вероятность $P\{\xi_k = i\}$, $i \in X$, — *вероятностью пребывания* цепи в состоянии i, а вероятностное распределение $P\{\xi_k = i\}$, $i \in X$, будем называть распределением цепи в момент $t = k$, $k = 0, 1, ...$

Переходные вероятности марковской цепи. Условную вероятность $P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\}$ называют *одношаговой переходной вероятностью* из состояния i в состояние j и обозначают $P_{ij}(k, k+1)$:

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\} = P_{ij}(k, k+1).$$

Условную вероятность $P\{\xi_{k+n} = j | \xi_k = i\}$ называют *n-шаговой переходной вероятностью* из состояния i в состояние j и обозначают $P_{ij}(k, k+n)$, т. е.

$$P\{\xi_{k+n} = j | \xi_k = i\} = P_{ij}(k, k+n).$$

Вероятность $P_{ij}(k, k+n)$ еще называют вероятностью перехода цепи из i в j за n шагов.

В общем случае переходные вероятности зависят не только от начального i и конечного j состояний цепи, но и от k (момента перехода).

Определение. Марковскую цепь будем называть *стационарной*, если ее n-шаговые переходные вероятности $P_{ij}(k, k+n)$ не зависят от k. В этом случае переходные вероятности называют *стационарными* и обозначают $P_{ij}(n)$:

$$P_{ij}(k, k+n) = P_{ij}(n).$$

По определению

$$P_{ii}(0) = 1,\ P_{ij}(0) = 0,\ j \neq i.$$

Одношаговые стационарные переходные вероятности обозначают через P_{ij}, т. е.

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\} = P_{ij}.$$

Вероятность P_{ij} еще называют вероятностью перехода цепи из i в j за один шаг.

Далее мы будем рассматривать только стационарные марковские цепи.

Если $\xi_k = i, \xi_{k+1} = j$, то мы будем говорить, что цепь за один шаг переходит из состояния i в состояние j. Если $\xi_k = i$, $\xi_{k+n} = j$, то будем говорить, что цепь за n шагов переходит из состояния i в состояние j.

Матрицы переходных вероятностей. Пусть $\{\xi_k\}$ — марковская цепь с фазовым пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$. Матрицу, составленную из элементов $P_{ij}(n)$, называют *матрицей n-шаговых переходных вероятностей* и обозначают

$$\mathbb{P}(n) = [P_{ij}(n)] = \begin{bmatrix} P_{00}(n) & P_{01}(n) & \ldots \\ P_{10}(n) & P_{11}(n) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i0}(n) & P_{i1}(n) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

В частности, если $n = 1$, то матрицу $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}$, составленную из элементов $P_{ij}(1) = P_{ij}$, называют *матрицей одношаговых переходных вероятностей* и обозначают

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \ldots \\ P_{10} & P_{11} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i0} & P_{i1} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Матрица n-шаговых переходных вероятностей (в частности, матрица одношаговых переходных вероятностей) обладает свойствами:

$$1^\circ\ P_{ij}(n) \geq 0,\ i,j = 0,1,\ldots;$$

$$2^\circ\ \sum_j P_{ij}(n) = 1,\ i = 0,1,\ldots$$

Свойство 1° очевидно (поскольку $P_{ij}(n)$ являются вероятностями).

Свойство 2° следует из свойства счетной аддитивности вероятности — достаточно заметить, что условная вероятность $P(\cdot/\{\xi_0 = i\})$ относительно события $\{\xi_0 = i\}$ является вероятностью, а

$$\bigcup_j \{\xi_n = j\} = \Omega,\ \{\xi_n = k\} \cap \{\xi_n = l\} = \emptyset,\ k \neq l.$$

Тогда

$$1 = P(\Omega | \{\xi_0 = i\}) = \sum_j P\{\xi_n = j | \xi_0 = i\} = \sum_j P_{ij}(n).$$

Свойства $1^\circ, 2^\circ$ обозначают, что каждая строка матрицы n-шаговых переходных вероятностей является вероятностным распределением на фазовом пространстве цепи.

Определение. Матрица $[P_{ij}]$, элементы которой удовлетворяют условиям

$$P_{ij} \geq 0,\ i,j \in X,$$

$$\sum_j P_{ij} = 1,\ i \in X,$$

называется *стохастической.*

Матрица n-шаговых переходных вероятностей является стохастической.

Следующее утверждение является непосредственным следствием марковского свойства.

Теорема 1.1.1 (уравнение Колмогорова-Чепмена). *В марковской цепи для любых i, j из фазового пространства X и любых целых положительных чисел r, s*

$$P_{ij}(r+s) = \sum_{k \in X} P_{ik}(r) P_{kj}(s) \tag{1.1.2}$$

или в матричном виде:

$$\mathbb{P}(r+s) = \mathbb{P}(r)\mathbb{P}(s).$$

Доказательство. Очевидно,

$$\{\xi_{r+s} = j, \xi_0 = i\} = \bigcup_k \{\xi_0 = i, \xi_r = k, \xi_{r+s} = j\},$$

причем события в правой части несовместны. Отсюда, учитывая, что для $\{\xi_n\}$ имеет место марковское свойство, получаем

$$P\{\xi_{r+s} = j | \xi_0 = i\} = \sum_k P\{\xi_{r+s} = j, \xi_r = k | \xi_0 = i\} =$$

$$= \sum_k \frac{P\{\xi_{r+s} = j, \xi_r = k, \xi_0 = i\}}{P\{\xi_0 = i\}} =$$

$$= \sum_k \frac{P\{\xi_{r+s} = j | \xi_r = k, \xi_0 = i\} P\{\xi_r = k, \xi_0 = i\}}{P\{\xi_0 = i\}} =$$

$$= \sum_k P\{\xi_{r+s} = j | \xi_r = k\} P\{\xi_r = k | \xi_0 = i\} = \sum_k P_{ik}(r) P_{kj}(s).$$

Так что

$$P_{ij}(r+s) = \sum_k P_{ik}(r) P_{kj}(s), \ i, j \in X.$$

Совокупность этих равенств можно записать в матричном виде так:

$$\mathbb{P}(r+s) = \mathbb{P}(r)\mathbb{P}(s).$$

Непосредственно из равенства (1.1.2) имеем.

Следствие 1.

$$P_{ij}(r+s) \geq P_{ik}(r) P_{kj}(s), \ k \in X.$$

Следствие 2. *Для любых $i, j \in X$ и целых положительных r, s, t*

$$P_{ij}(r+s+t) = \sum_{k,u \in X} P_{ik}(r) P_{ku}(s) P_{uj}(t),$$

или в матричном виде

$$\mathbb{P}(r+s+t) = \mathbb{P}(r)\mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t).$$

Следствие 3.

$$P_{ij}(r+s+t) \geq P_{ik}(r)P_{ku}(s)P_{uj}(t),\ \ k,u \in X.$$

Из уравнения Колмогорова-Чепмена следует, что по матрице одношаговых переходных вероятностей всегда можно выписать матрицу n-шаговых переходных вероятностей.

Следствие 4. *Матрица n-шаговых переходных вероятностей равна n-й степени матрицы одношаговых переходных вероятностей:*

$$\mathbb{P}(n) = (\mathbb{P})^n.$$

Доказательство. В силу теоремы

$$\mathbb{P}(r+s) = \mathbb{P}(r)\mathbb{P}(s).$$

В частности,

$$\mathbb{P}(n) = \mathbb{P}\mathbb{P}(n-1) = \mathbb{P}(\mathbb{P}\mathbb{P}(n-2)) = (\mathbb{P})^2\mathbb{P}(n-2) = \ldots = (\mathbb{P})^n.$$

Примеры марковских цепей. К следующим примерам марковских цепей мы будем неоднократно возвращаться.

Пример 1.1.1 (одномерное случайное блуждание). *Частица движется по целочисленной решетке* $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, *меняя свое положение в целочисленные моменты времени. Обозначим через* $\xi_k, k = 0, 1, 2, \ldots$, *положение (координату) частицы в момент времени* k. *За единицу времени (за один шаг) частица перемещается из точки с координатой* i *в точку с координатой* $(i-1)$ *с вероятностью* q_i, *в точку* $(i+1)$ *— с вероятностью* p_i, *либо остается в точке* i *с вероятностью* r_i $(p_i + q_i + r_i = 1)$ *— будем говорить, что частица принимает участие в одномерном случайном блуждании по целочисленной решетке. Последовательность случайных величин* $\{\xi_k\}$ *еще называют одномерным случайным блужданием.*

Убедимся, что $\{\xi_k\}$ *образует марковскую цепь и найдем ее матрицу одношаговых переходных вероятностей.*

Покажем, что последовательность $\{\xi_k\}$ обладает марковским свойством. Для этого выпишем

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_0 = i_0\},\ \ P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\}.$$

По определению случайного блуждания по одномерной целочисленной решетке,

$$P\{\xi_{k+1} = j|\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0\} =$$

$$= \begin{cases} p_i, & \text{если } j = i+1; \\ q_i, & \text{если } j = i-1; \\ r_i, & \text{если } j = i; \end{cases}$$

$$P\{\xi_{k+1} = j|\xi_k = i\} = \begin{cases} p_i, & \text{если } j = i+1; \\ q_i, & \text{если } j = i-1; \\ r_i, & \text{если } j = i. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Так что

$$P\{\xi_{k+1} = j|\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots \xi_0 = i_0\} = P\{\xi_{k+1} = j|\xi_k = i\},$$

т. е. для последовательности случайных величин $\{\xi_k\}$ имеет место марковское свойство и, следовательно, $\{\xi_k\}$ является марковской цепью.

Равенства (1.1.3) задают элементы матрицы одношаговых переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$. Подробнее:

$$P\{\xi_{k+1} = i+1|\xi_k = i\} = P_{i,i+1} = p_i,$$

$$P\{\xi_{k+1} = i-1|\xi_k = i\} = P_{i,i-1} = q_i,$$

$$P\{\xi_{k+1} = i|\xi_k = i\} = P_{i,i} = r_i,$$

где $p_i \geq 0, q_i \geq 0, r_i \geq 0$, $p_i + q_i + r_i = 1, i = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Если фазовым пространством X марковской цепи является множество целых неотрицательных чисел, то матрица переходных вероятностей случайного блуждания, очевидно, имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{1.1.4}$$

Ясно, что $p_0 + r_0 = 1$. Если при этом $p_0 = 1$ (а значит $r_0 = 0$), то нулевое состояние обладает свойством отражающего экрана (в нуле находится упругая стенка). Если $p_0 = 0$, $r_0 = 1$, то состояние нуль ведет себя как поглощающий экран — попав в состояние нуль, частица остается в нем навсегда. Если $p_0 > 0$, $r_0 > 0$, то состояние нуль — частично отражающий экран.

Если фазовое пространство случайного блуждания ограничено, например, $X = \{0, 1, \ldots, n\}$, то матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{n-1} & r_{n-1} & p_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q_n & r_n \end{bmatrix}. \qquad (1.1.5)$$

Состояния 0 и n могут быть экранами перечисленных выше типов.

Одношаговые вероятности перехода марковской цепи часто удобно задавать так называемой диаграммой переходов цепи, на которой точками изображают состояния цепи, дугами со стрелками и числами — возможные переходы за один шаг и вероятности переходов соответственно.

Задание диаграммы переходов марковской цепи равносильно заданию ее матрицы одношаговых переходных вероятностей.

На рис. 1.1.1 изображена диаграмма переходов случайного блуждания с фазовым пространством $X = \{0, 1, \ldots, n\}$ и матрицей одношаговых переходных вероятностей (1.1.5).

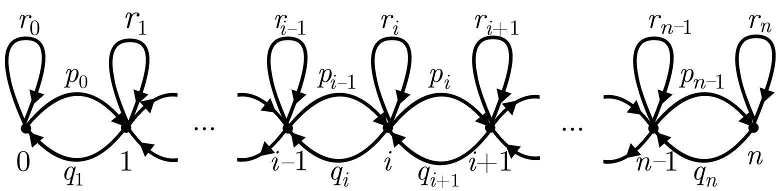

Рис. 1.1.1: Диаграмма переходов случайного блуждания с матрицей одношаговых переходных вероятностей (1.1.5)

П р и м е р 1.1.2 (азартная игра). *Игрок* G_m *с капиталом* m *играет в азартную игру с игроком* G_M *с капиталом* M*, участвуя в серии последовательных партий игры (суммарный капитал игроков* $n = m + M$*). В результате каждой партии капитал игрока* G_m *с вероятностью* p *увеличивается на* 1 *(за счет игрока* G_M*) и с вероятностью* $q = 1 - p$ *уменьшается на* 1 *(в пользу игрока* G_M*). Результат каждой партии не зависит от результатов предыдущих партий. Игра прекращается, если* *капитал игрока G_m становится равным 0 или n — разоряется игрок G_m или игрок G_M.*

Обозначим через ξ_k капитал игрока G_m после k-й партии. Покажем, что последовательность $\{\xi_k\}$ образует марковскую цепь, найдем ее матрицу переходных вероятностей.

Решение. Обозначим через v_k результат k-й партии — изменение капитала игрока G_m в результате k-й партии, v_k — случайная величина с распределением

$$P\{v_k = 1\} = p,\ P\{v_k = -1\} = q,$$

$p > 0, q > 0, p+q = 1, k = 1, 2, \ldots$ Случайные величины $v_1, v_2, \ldots$ независимы.

Очевидно,

$$\xi_{k+1} = \xi_k + v_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots,\ \xi_0 = m$$

или, что то же,

$$\xi_{k+1} = \xi_0 + \sum_{i=1}^{k+1} v_i,\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ \xi_0 = m.$$

Убедимся, что для последовательности $\{\xi_k\}$ имеет место марковское свойство. Для этого выпишем

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\},$$

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\}.$$

Имеем:

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\} =$$

$$= \frac{P\{\xi_{k+1} = j, \xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}}{P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}} =$$

$$= \frac{P\{\xi_k + v_{k+1} = j, \xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}}{P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}} =$$

$$= \frac{P\{i + v_{k+1} = j, \xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}}{P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}} =$$

$$= \frac{P\{v_{k+1} = j - i\} P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1} \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}}{P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}} =$$

$$= P\{v_{k+1} = j - i\},$$

воспользовались независимостью событий

$$\{v_{k+1} = j - i\},\ \{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}.$$

Аналогично получаем

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\} = P\{v_{k+1} = j - i\}$$

(чтобы сумма $\xi_{k+1} = \xi_k + v_{k+1}$ была равна j, при условии, что $\xi_k = i$, слагаемое v_{k+1} должно быть равно $j - i$).

Поэтому последовательность случайных величин $\{\xi_k\}$ обладает марковским свойством и, следовательно, является марковской цепью. Элементы ее матрицы переходных вероятностей

$$P_{ij} = P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\} = P\{v_{k+1} = j - i\},$$

$i = 1, 2, \ldots, n - 1$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Далее,

$$P\{\xi_{k+1} = 0 | \xi_k = 0\} = 1,$$

$$P\{\xi_{k+1} = n | \xi_k = n\} = 1,$$

два последних равенства следуют из того, что события $\{\xi_k = 0\}$ и $\{\xi_k = n\}$ обозначают разорение соответственно игрока G_m или игрока G_M и, как следствие, прекращение игры.

Цепь стационарная, поскольку переходные вероятности

$$P_{ij} = P\{v_{k+1} = j - i\}$$

не зависят от k (случайные величины $v_k, k = 1, 2, \ldots$, одинаково распределены).

Подробнее элементы матрицы переходных вероятностей запишутся так

$$P_{00} = P\{\xi_{k+1} = 0 | \xi_k = 0\} = 1,$$

$$P_{nn} = P\{\xi_{k+1} = n | \xi_k = n\} = 1,$$

$$P_{i,i+1} = P\{\xi_{k+1} = i + 1 | \xi_k = i\} = p,\ i = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

$$P_{i,i-1} = P\{\xi_{k+1} = i - 1 | \xi_k = i\} = q,\ i = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

все неперечисленные $P_{i,j}$ равны нулю. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\xi_k\}$ имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Состояния 0 и n являются поглощающими экранами.

Диаграмма переходов марковской цепи примера 1.1.2 изображена на рис. 1.1.2.

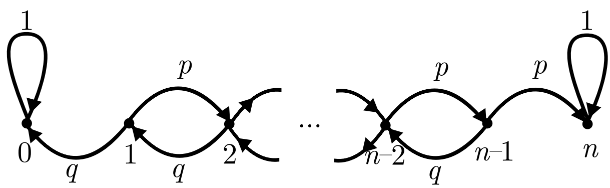

Рис. 1.1.2: Диаграмма переходов марковской цепи, описывающей азартную игру (пример 1.1.2)

Если капитал игрока G_M неограничен ($M = \infty$), матрица переходных вероятностей цепи $\{\xi_k\}$ имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad (1.1.6)$$

(состояние 0 является поглощающим экраном).

Марковская цепь, описанная в примере 1.1.2, является частным случаем случайного блуждания (см. пример 1.1.1 и рис. 1.1.1).

Пример 1.1.3 (сумма независимых случайных величин как марковская цепь). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$ — независимые неотрицательные целочисленные случайные величины, каждая с распределением*

$$P\{\xi_k = l\} = p_l, \ l = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \ n = 1, 2, \ldots$$

Покажем, что последовательность $\{\eta_n\}$ *образует марковскую цепь и найдем ее матрицу переходных вероятностей.*

Решение. Аналогично тому, как мы это делали в примере 1.1.2, получаем

$$P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_1 = i_1\} = P\{\xi_{n+1} = j - i\},$$

$$P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i\} = P\{\xi_{n+1} = j - i\}$$

(чтобы сумма $\eta_{k+1} = \eta_k + \xi_{k+1}$ была равна j при условии, что $\eta_k = i$, слагаемое ξ_{k+1} должно быть равно $j - i$).

Из двух последних равенств следует, что, во-первых, $\{\eta_n\}$ — марковская цепь (для $\{\eta_n\}$ выполняется марковское свойство), а во-вторых, матрица переходных вероятностей $\{\eta_n\}$ имеет вид

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = [P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i\}] = [P\{\xi_{n+1} = j - i\}]\,, \, i, j = 0, 1, \ldots$$

Подробнее

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ & & \cdots & & \end{bmatrix}.$$

Замечание. Сумма независимых целочисленных случайных величин будет марковской цепью и без предположения об их неотрицательности.

Задание марковской цепи. Случайная величина ξ задается своим распределением P_ξ, случайный вектор $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ — совместным распределением $P_{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n}$ случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, бесконечная последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ (в частности, марковская цепь) задана, если для каждого n ($n = 0, 1, \ldots$) известно распределение случайного вектора $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ — известны конечномерные распределения последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ Но оказывается, чтобы задать марковскую цепь — бесконечную последовательность случайных величин, для которой имеет место марковское свойство, достаточно задать распределение начального состояния ξ_0 цепи и матрицу $[P_{ij}]$ одношаговых переходных вероятностей.

Теорема 1.1.2. *Марковская цепь задается матрицей одношаговых переходных вероятностей* $[P_{ij}]$ *и своим распределением в начальный момент времени.*

Доказательство. Достаточно показать, что конечномерные распределения $P_{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n}$ марковской цепи $\{\xi_n\}$ вычисляются по ее одношаговым переходным вероятностям P_{ij} и распределению $\{p_k\}$ случайной величины ξ_0:

$$P\{\xi_0 = k\} = p_k,\ k = 0, 1, \ldots$$

Пользуясь марковским свойством, получаем

$$\begin{gathered} P_{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n}(i_0, i_1, \ldots, i_n) = \\ = P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n\} = \\ = P\{\xi_n = i_n | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\}\times \\ \times P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} = \\ = P\{\xi_n = i_n | \xi_{n-1} = i_{n-1}\} P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} = \\ = P_{i_{n-1},i_n} P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} = \ldots \\ \ldots = p_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \ldots P_{i_{n-1} i_n}. \end{gathered}$$

Так что

$$P_{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n}(i_0, i_1, \ldots, i_n) = p_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \ldots P_{i_{n-1} i_n}. \tag{1.1.7}$$

Замечание. Поскольку одношаговые переходные вероятности

$$P_{ij} = P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\} = P\{\xi_{k+1} = j, \xi_k = i\} / P\{\xi_k = i\},$$

то для задания марковской цепи достаточно знать только ее двумерные распределения

$$P\{\xi_{k+1} = j, \xi_k = i\},\ i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

одномерные распределения выражаются через двумерные:

$$P\{\xi_k = i\} = \sum_s P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = s\}.$$

Определение. При каждом фиксированном ω последовательность $\xi_0(\omega), \xi_1(\omega), \ldots, \xi_k(\omega), \ldots$ будем называть *траекторией марковской цепи* $\{\xi_n\}$.

Соотношение (1.1.7) задает вероятность того, что траектория марковской цепи в моменты времени $0, 1, \ldots, n$ пройдет соответственно через точки $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n$.

Теорема 1.1.3. *Распределение*

$$P\{\xi_n = j\},\ j \in X,$$

марковской цепи $\{\xi_n\}$ в момент времени $t = n$ задается ее распределением

$$p_i = P\{\xi_0 = i\},\ i \in X,$$

в момент времени $t = 0$ и матрицей n-шаговых переходных вероятностей, а именно:

$$P\{\xi_n = j\} = \sum_{i \in X} p_i P_{ij}(n),\ j \in X. \qquad (1.1.8)$$

Доказательство. Поскольку события $\{\xi_0 = i\}$, $i \in X$, образуют полную группу:

$$\bigcup_{i \in X} \{\xi_0 = i\} = \Omega,\ \{\xi_0 = k\} \cap \{\xi_0 = l\} = \emptyset,\, k \neq l,$$

то согласно формуле полной вероятности

$$P\{\xi_n = j\} = \sum_{i \in X} P\{\xi_n = j | \xi_0 = i\} P\{\xi_0 = i\} = \sum_{i \in X} p_i P_{ij}(n).$$

Замечание 1. Формула (1.1.8) дает представление для вероятности пребывания $P\{\xi_n = j\}$ через начальное распределение $\{p_i\}$ и n-шаговые переходные вероятности.

Замечание 2. Из равенства (1.1.8) следует, что предельное поведение распределения

$$Q_n(j) = P\{\xi_n = j\},\ j \in X,$$

марковской цепи при $n \to \infty$ определяется предельным поведением n-шаговых переходных вероятностей цепи (и, возможно, ее начальным распределением $P\{\xi_0 = i\} = p_i$, $i \in X$).

Каждая стохастическая матрица задает марковскую цепь, а именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1.4. *Для данной стохастической матрицы найдется марковская цепь, матрица переходных вероятностей которой с ней совпадает.*

Доказательство. Пусть $[P_{ij}]$ — стохастическая матрица, $\{p_i\}$ — вероятностное распределение на $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Определим на множестве $\{0, 1, 2, \ldots\}$ семейство вероятностных распределений $P(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ — для каждого n и любых $i_0, i_1, \ldots, i_n$ положим

$$P(i_0, i_1, \ldots, i_n) = P_{i_{n-1}i_n} P_{i_{n-2}i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0}. \tag{1.1.9}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\sum_{i_n, i_{n-1}, \ldots, i_0} P_{i_{n-1}i_n} P_{i_{n-2}i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0} = 1.$$

Последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ определим так, чтобы её конечномерные распределения, т. е. распределения векторов $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, при каждом n совпадали с распределениями (1.1.9):

$$P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n\} =$$

$$= P_{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n}(i_0, i_1, \ldots, i_n) = P_{i_{n-1}i_n} P_{i_{n-2}i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0}$$

(такая последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ всегда существует).

Убедимся, что последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ обладает марковским свойством. Имеем

$$P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\} =$$

$$= \frac{P\{\xi_{n+1} = j, \xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\}}{P\{\xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\}} =$$

$$= \frac{P_{ij} P_{i_{n-1}i} P_{i_{n-2}i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0}}{P_{i_{n-1}i} P_{i_{n-2}i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0}} = P_{ij},$$

$$P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\} = \frac{P\{\xi_{n+1} = j, \xi_n = i\}}{P\{\xi_n = i\}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_{n-1}, i_{n-2}, \ldots, i_0} P\{\xi_{n+1} = j, \xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\}}{\sum\limits_{i_{n-1}, i_{n-2}, \ldots, i_0} P\{\xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_{n-1},i_{n-2},\ldots,i_0} P_{ij}P_{i_{n-1}i}P_{i_{n-2}i_{n-1}}\ldots P_{i_1i_2}P_{i_0i_1}p_{i_0}}{\sum\limits_{i_{n-1},i_{n-2},\ldots,i_0} P_{i_{n-1}i}P_{i_{n-2}i_{n-1}}\ldots P_{i_1i_2}P_{i_0i_1}p_{i_0}} = P_{ij}. \quad (1.1.10)$$

Так что для последовательности случайных величин $\{\xi_k\}$ имеет место марковское свойство и, следовательно, $\{\xi_k\}$ является марковской цепью, причем ее матрица переходных вероятностей

$$[P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\}],\ i,j = 0,1,2,\ldots$$

совпадает с данной стохастической матрицей $[P_{ij}]$, т. е.

$$P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\} = P_{ij},\ i,j = 0,1,2,\ldots$$

(см. равенство (1.1.10)).

Замечание. Стохастическая матрица $[P_{ij}]$ равенством (1.1.9) всегда задает на множестве $\{0,1,2,\ldots\}$ семейство распределений, а вместе с ним и последовательность случайных величин $\xi_0,\xi_1,\ldots$ с конечномерными распределениями (1.1.9). Такой вид конечномерных распределений случайных величин $\xi_0,\xi_1,\ldots$ гарантирует выполнение для них марковского свойства.

Пример 1.1.4. *Марковская цепь с фазовым пространством* $X = \{1,2,3\}$ *описывается матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Найти вероятность того, что:

1° *цепь, стартовав из состояния* 1, *через два шага окажется в состоянии* 3;

2° *цепь, стартовав из состояния* 2, *через три шага окажется в состоянии* 3.

Найти распределение цепи в момент $t = 2$ (*через два шага после старта*), *если в момент* $t = 0$ *цепь с равными вероятностями находится в одном из своих состояний.*

Решение. Ясно, что необходимо найти

$$P\{\xi_2 = 3|\xi_0 = 1\} = P_{1,3}(2),\ P\{\xi_3 = 3|\xi_0 = 2\} = P_{2,3}(3),$$

или, что то же, элемент $P_{1,3}(2)$ матрицы $\mathbb{P}(2)$ и элемент $P_{2,3}(3)$ матрицы $\mathbb{P}(3)$. Матрицы $\mathbb{P}(2)$ и $\mathbb{P}(3)$ находим по матрице $\mathbb{P}$ одношаговых переходных вероятностей: $\mathbb{P}(2) = (\mathbb{P})^2$, $\mathbb{P}(3) = (\mathbb{P})^3$.

Распределение цепи в момент $t = 2$ (распределение случайной величины ξ_2) получим по известному начальному распределению

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

цепи и матрице $\mathbb{P}(2)$ двухшаговых переходных вероятностей, воспользовавшись равенством (1.1.8).

Ответы:

1° $P\{\xi_2 = 3 \,|\xi_0 = 1\} = 1/4$;

2° $P\{\xi_3 = 3 \,|\xi_0 = 2\} = 3/8$.

Распределение цепи в момент $t = 2$:

$$P\{\xi_2 = 1\} = 1/3,\ P\{\xi_2 = 2\} = 1/3,\ P\{\xi_2 = 3\} = 1/3.$$

1.2 Возвратность

Каждое состояние марковской цепи характеризуется временем первого возвращения.

Представим множество $\{\xi_0 = i\}$ в виде объединения следующих непересекающихся подмножеств:

$$\{\xi_0 = i, \xi_1 = i\},\ \{\xi_0 = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \dots\},$$

$$\{\xi_0 = i, \xi_n = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \dots, n-1\},\ n = 2, 3, \dots$$

И определим случайную величину $\theta_i = \theta_i(\omega)$, называемую *временем первого возвращения* в состояние i, так: на множестве $\{\xi_0 = i, \xi_1 = i\}$ она принимает значение 1, на множестве $\{\xi_0 = i, \xi_n = i, \xi_\nu \neq i, \nu = 1, 2, \dots, n-1\}$ $(n \geq 2)$ — значение n, на множестве $\{\xi_0 = i, \xi_\nu \neq i, \nu = 1, 2, \dots\}$ — значение $+\infty$ (на дополнении к $\{\xi_0 = i\}$ случайную величину θ_i будем считать равной 0). Из определения $\theta_i = \theta_i(\omega)$ следует, что

$$\{\theta_i = 1\} = \{\xi_0 = i, \xi_1 = i\},$$

$$\{\theta_i = \infty\} = \{\xi_0 = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \dots\},$$

$$\{\theta_i = n\} = \{\xi_0 = i, \xi_n = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \dots, n-1\},\ n = 2, 3, \dots$$

Обозначим

$$f_{ii}(n) = P\{\theta_i = n|\xi_0 = i\} =$$

$$= P\{\xi_0 = i, \xi_n = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \dots, n-1 | \xi_0 = i\},$$

$n = 1, 2, \dots$, значение $f_{ii}(0)$ положим равным 0 (по определению). Вероятностное распределение

$$P\{\theta_i = n | \xi_0 = i\} = f_{ii}(n),\ n = 0, 1, \dots,$$

будем называть *распределением времени первого возвращения в состояние* i.

По отношению ко времени первого возвращения все состояния делятся на возвратные и невозвратные.

Определение. Состояние i будем называть *возвратным*, если

$$P\{\theta_i < \infty | \xi_0 = i\} = 1$$

(если время первого возвращения θ_i с вероятностью 1 конечно).

Состояние i будем называть *невозвратным*, если

$$P\{\theta_i = \infty | \xi_0 = i\} > 0$$

(если время первого возвращения θ_i бесконечно с ненулевой вероятностью).

Вероятность $P\{\theta_i < \infty | \xi_0 = i\}$ называют *вероятностью возвращения в состояние* i.

Так как

$$\{\theta_i < \infty\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\theta_i = n\},$$

то вероятность возвращения можно записать в виде

$$P\{\theta_i < \infty | \xi_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\theta_i = n | \xi_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n),$$

её обычно обозначают через f_{ii}^*:

$$f_{ii}^* = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n).$$

В терминах f_{ii}^* состояние i возвратно, если

$$f_{ii}^* = 1$$

и невозвратно, если

$$f_{ii}^* < 1.$$

Среднее время возвращения

$$M\theta_i = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}(n)$$

у возвратного состояния может быть как конечным, так и бесконечным.

У невозвратного состояния среднее время возвращения равно бесконечности.

Производящие функции. Напомним теорему о произведении абсолютно сходящихся степенных рядов.

Теорема 1.2.1. *Если степенные ряды*

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k,\ |s| < 1,\ \text{и}\ B(s) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l s^l,\ |s| < 1,$$

абсолютно сходятся, то абсолютно сходится и ряд

$$C(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n,\ |s| < 1,$$

где

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и имеет место равенство

$$A(s)B(s) = C(s). \tag{1.2.1}$$

Ряд $C(s)$ называется *произведением* рядов $A(s)$ и $B(s)$.

Определение. Сумму

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k,\ |s| < 1,$$

абсолютно сходящегося степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ будем называть *производящей функцией* последовательности $\{a_k\}$.

В частности,

$$\tilde{P}_{ii}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}(k)s^k, \ |s| < 1, \ \ \tilde{F}_{ii}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}(k)s^k, \ |s| < 1,$$

— производящие функции соответственно последовательностей $\{P_{ii}(k)\}$ и $\{f_{ii}(k)\}$.

Производящие функции $\tilde{P}_{ii}(s)$ и $\tilde{F}_{ii}(s)$ определены, т. к. при $|s| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_{ii}(k)s^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |s|^k = \frac{1}{1-|s|},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_{ii}(k)s^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |s|^k = \frac{1}{1-|s|}.$$

Нам понадобится следующая лемма Абеля.

Лемма 1.2.1 (лемма Абеля). 1° *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$, $|s| < 1$, *абсолютно сходится в точке* $s = 1$, *то существует* $\lim\limits_{s\to 1-0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ *и*

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \qquad (1.2.2)$$

2° *Если существует* $\lim\limits_{s\to 1-0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ (*конечный или бесконечный*), *то в предположении, что* $a_k \geq 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$,

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение 1°.

Из абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ в точке $s = 1$, очевидно, следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ при $|s| < 1$.

Для доказательства равенства (1.2.2) оценим разность

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right|$$

в окрестности точки $s = 1$. Очевидно,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k (s^k - 1)\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{N} a_k (s^k - 1)\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k (s^k - 1)\right|$$

(N выберем далее).

Сначала оценим сверху слагаемое

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k (s^k - 1)\right|.$$

Запишем a_k в терминах остатков $A_k = a_k + a_{k+1} + \ldots$ ряда $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_l$:

$$a_k = A_k - A_{k+1}.$$

Имеем

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k (s^k - 1) = \sum_{k=N+1}^{\infty} (A_k - A_{k+1})(s^k - 1) =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k (s^k - 1) - \sum_{k=N+1}^{\infty} A_{k+1} (s^k - 1) =$$

$$= A_{N+1}(s^{N+1} - 1) + \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k (s^k - 1) - \sum_{k=N+1}^{\infty} A_{k+1} (s^k - 1) =$$

$$= A_{N+1}(s^{N+1} - 1) + \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k (s^k - 1) - \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k (s^{k-1} - 1) =$$

$$= A_{N+1}(s^{N+1} - 1) + \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k(s^k - s^{k-1}).$$

Поскольку A_k — остаток сходящегося ряда $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_l$, то для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $k \geq N$ имеют место неравенства $|A_k| \leq \varepsilon$. Зафиксируем это N, для него

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(s^k - 1)\right| \leq |A_{N+1}||(s^{N+1} - 1)| + \sum_{k=N+2}^{\infty} |A_k||s^k - s^{k-1}| \leq$$

$$\leq \varepsilon|s^{N+1} - 1| + \varepsilon \sum_{k=N+2}^{\infty} |s^{k-1}||s - 1| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon + \varepsilon|s|^{N+1}|s - 1|\frac{1}{1 - |s|} =$$

$$= 2\varepsilon + \varepsilon|s|^{N+1}(1 - s)\frac{1}{1 - s} \leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Осталось заметить, что для фиксированного N при $s \to 1$ сумма $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k(s^k - 1) \to 0$ (в силу непрерывности функции $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k(s^k - 1)$).

Убедимся теперь в справедливости утверждения 2° теоремы.

Пусть $a_k \geq 0,\ k = 0, 1, \ldots$, и существует $\lim\limits_{s \to 1-0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$. Рассмотрим два случая:

$$\text{a)}\ \lim_{s \to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = +\infty; \qquad \text{b)}\ \lim_{s \to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k < \infty.$$

а) Из

$$\lim_{s \to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = +\infty$$

и неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

(при $0 < s < 1$) следует, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$, поэтому

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

b) Пусть

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = a < \infty.$$

Переходя в неравенстве

$$\sum_{k=0}^{n} a_k s^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$$

к пределу сначала при $s \to 1-0$, а потом при $n \to \infty$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = a < \infty.$$

Так что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится, и в силу утверждения 1° леммы

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Лемма доказана.

Необходимые и достаточные условия возвратности состояния. Далее мы получим условия невозвратности и возвратности состояния i в терминах сходимости и расходимости ряда $\sum\limits_{n} P_{ii}(n)$.

Теорема 1.2.2 (необходимое и достаточное условие возвратности состояния). *Для того, чтобы состояние i было возвратным, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ расходился.*

Доказательство. Для производящих функций $\tilde{P}_{ii}(s)$, $\tilde{F}_{ii}(s)$ соответственно последовательностей $\{P_{ii}(n)\}$ и $\{f_{ii}(n)\}$ имеет место равенство

$$\tilde{P}_{ii}(s) = \frac{1}{1 - \tilde{F}_{ii}(s)}, \ |s| < 1. \tag{1.2.3}$$

Чтобы убедиться в этом сначала установим, что последовательности $\{P_{ii}(n)\}$ и $\{f_{ii}(n)\}$ связаны соотношением

$$P_{ii}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k), \ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.2.4}$$

(при $n = 0$ равенство не имеет места). Для этого представим событие $\{\xi_n = i, \xi_0 = i\}$ в виде объединения непересекающихся событий

$$E_1 = \{\xi_n = i, \xi_0 = i, \xi_1 = i\};$$

$$E_k = \{\xi_n = i, \xi_0 = i, \xi_k = i, \xi_\nu \neq i, \ \nu = 1, 2, \ldots, k-1\},$$

$k = 2, 3, \ldots, n$ (событие E_k состоит в том, что в моменты 0 и n цепь находится в состоянии i, и первое возвращение в состояние i происходит на k-м шаге):

$$\{\xi_n = i, \xi_0 = i\} = \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Отсюда

$$P\{\xi_n = i | \xi_0 = i\} = \sum_{k=1}^{n} P\{E_k | \xi_0 = i\}. \tag{1.2.5}$$

И поскольку

$$P\{E_k | \xi_0 = i\} =$$

$$= \frac{P\{\xi_n = i, \xi_0 = i, \xi_k = i, \xi_\nu \neq i, \ \nu = 1, 2, \ldots, k-1\}}{P\{\xi_0 = i\}} =$$

$$= P\{\xi_n = i | \xi_k = i, \xi_0 = i, \xi_\nu \neq i, \ \nu = 1, 2, \ldots, k-1\} \times$$

$$\times P\{\xi_k = i, \xi_0 = i, \xi_\nu \neq i, \ \nu = 1, 2, \ldots, k-1\} / P\{\xi_0 = i\} =$$

$$= P\{\xi_n = i | \xi_k = i\} \times$$

$$\times P\{\xi_k = i, \xi_0 = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \ldots, k-1 | \xi_0 = i\} =$$
$$= P_{ii}(n-k) f_{ii}(k),$$

$k = 2, 3, \ldots, n$, равенство (1.2.5) перепишется так:

$$P_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k),$$

или, учитывая что $f_{ii}(0) = 0$, так:

$$P_{ii}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k)$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$

Для произведения абсолютно сходящихся при $|s| < 1$ степенных рядов

$$\tilde{F}_{ii}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}(k) s^k \quad \text{и} \quad \tilde{P}_{ii}(s) = \sum_{l=0}^{\infty} P_{ii}(l) s^l$$

имеем (см. теорему 1.2.1)

$$\tilde{F}_{ii}(s)\tilde{P}_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k) \right) s^n =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{0} f_{ii}(k) P_{ii}(0-k) \right) s^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k) \right) s^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}(n) s^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}(n) s^n + P_{ii}(0) s^0 - P_{ii}(0) s^0 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) s^n - 1 = \tilde{P}_{ii}(s) - 1$$

(воспользовались равенством (1.2.4)). Отсюда получаем, что

$$\tilde{P}_{ii}(s) = \frac{1}{1 - \tilde{F}_{ii}(s)}.$$

Далее, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n) = f_{ii}^*$ сходится абсолютно ($f_{ii}^* \le 1$), поэтому в силу леммы Абеля (см. лемму 1.2.1), во-первых, существует предел

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n)s^n = \lim_{s\to 1-0} \tilde{F}_{ii}(s)$$

и, во-вторых, этот предел равен $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n) = f_{ii}^*$, т. е.

$$\lim_{s\to 1-0} \tilde{F}_{ii}(s) = f_{ii}^*$$

(для возвратного состояния i значение $f_{ii}^* = 1$, для невозвратного $f_{ii}^* < 1$). Из существования $\lim\limits_{s\to 1-0} \tilde{F}_{ii}(s) = f_{ii}^*$ и равенства (1.2.3) следует, что при $s \to 1-0$ существует

$$\lim_{s\to 1-0} \tilde{P}_{ii}(s) = \lim_{s\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)s^n,$$

(бесконечный, если $f_{ii}^* = 1$, и конечный, если $f_{ii}^* < 1$), а из леммы Абеля следует, что

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)s^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n).$$

Так что если $f_{ii}^* = 1$ (состояние i возвратно), то

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) = \infty,$$

если $f_{ii}^* < 1$ (состояние i невозвратно), то

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) < \infty.$$

Следствие. *Для того чтобы состояние i было невозвратным, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ сходился.*

Состояния нулевые, ненулевые, возвратные и невозвратные. Состояние i называется *нулевым*, если при $n \to \infty$

$$P_{ii}(n) \to 0.$$

Состояние i называется *ненулевым*, если $P_{ii}(n)$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Возвратное состояние i может быть как нулевым так и ненулевым — у расходящегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ общий член $P_{ii}(n)$ может как сходиться к нулю, так и не сходиться.

Невозвратное состояние i всегда нулевое — у сходящегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ общий член $P_{ii}(n)$ сходиться к нулю.

Нулевое состояние i может быть как возвратным, так и невозвратным — если $P_{ii}(n) \to 0$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ может как сходиться, так и расходиться.

Ненулевое состояние i всегда возвратно — если $P_{ii}(n)$ не сходится к нулю при $n \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ является расходится.

Время пребывания цепи в состоянии. *Временем пребывания* марковской цепи с дискретным временем, стартующей из состояния i, в состоянии i будем называть случайную величину

$$\tau_i = \min\{k : \xi_k = i, \xi_{k+1} \neq i, \xi_0 = i\} =$$

$$= \min\{k : \xi_0 = i, \xi_1 = i, \ldots, \xi_k = i, \xi_{k+1} \neq i\}.$$

Теорема 1.2.3 (время пребывания цепи в состоянии). *Время пребывания марковской цепи с дискретным временем в состоянии i имеет геометрическое распределение с параметром $(1 - P_{ii})$:*

$$P\{\tau_i = k|\xi_0 = i\} = (1 - P_{ii})P_{ii}^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Воспользовавшись марковским свойством, получим

$$P\{\tau_i = k|\xi_0 = i\} =$$

$$= P\{\xi_0 = i, \xi_1 = i, \ldots, \xi_k = i, \xi_{k+1} \neq i|\xi_0 = i\} =$$

$$= \frac{1}{P\{\xi_0 = i\}} P\{\xi_0 = i, \xi_1 = i, \ldots, \xi_k = i, \xi_{k+1} \neq i\} =$$

$$= \frac{1}{P\{\xi_0 = i\}} P\{\xi_{k+1} \neq i | \xi_k = i\} P\{\xi_k = i | \xi_{k-1} = i\} \times$$

$$\ldots \times P\{\xi_1 = i | \xi_0 = i\} P\{\xi_0 = i\} =$$

$$= (1 - P_{ii}) P_{ii} P_{ii} \ldots P_{ii} = (1 - P_{ii}) P_{ii}^k.$$

Так что

$$P\{\tau_i = k | \xi_0 = i\} = (1 - P_{ii}) P_{ii}^k, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пример 1.2.1 (одномерное случайное блуждание, продолжение). *Рассмотрим одномерное случайное блуждание по целочисленной решетке — марковскую цепь, описывающую движение частицы, которая за единицу времени перемещается с вероятностью p на единицу вправо и с вероятностью q на единицу влево $(p + q = 1)$; состояние ξ_n цепи — координата частицы в момент времени n (см. также пример* 1.1.1 *и рис.* 1.1.1).

Исследовать на возвратность состояние 0 *описанной марковской цепи.*

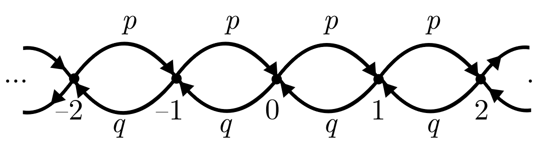

Рис. 1.2.3: Диаграмма переходов одномерного случайного блуждания (пример 1.2.1)

Решение. Необходимым и достаточным условием возвратности состояния 0 является расходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{00}(n)$ (см. теорему 1.2.2). Исследуем этот ряд на сходимость. Очевидно, $P_{00}(2n + 1) = 0$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{00}(2n).$$

Выпишем подробнее выражение для $P_{00}(2n)$ — вероятности того, что цепь, стартовав из состояния 0, вернется в состояние 0 за

$2n$ шагов. Вероятность того, что цепь, стартовав из состояния 0, вернется в состояние 0, пройдя по данному пути

$$\{\xi_0 = 0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{2n-1} = i_{2n-1}, \xi_{2n} = 0\},$$

равна

$$P\{\xi_0 = 0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{2n} = 0 | \xi_0 = 0\} = P_{0i_1} P_{i_1 i_2} \ldots P_{i_{2n-1}0}$$

(см. (1.1.7)). При этом число перемещений вправо равно числу перемещений влево. Поэтому в последнем произведении n сомножителей равно p и n сомножителей — q. Само произведение $P_{0i_1} P_{i_1 i_2} \ldots P_{i_{2n-1}0}$ равно $p^n q^n$. Вероятность того, что цепь, стартовав из состояния 0, вернется в состояние 0 за $2n$ шагов

$$P_{00}(2n) = P\{\xi_{2n} = 0 | \xi_0 = 0\}$$

равна сумме вероятностей $p^n q^n$ по всем путям из 0 в 0 длиной $2n$. Путь из 0 в 0 длиной $2n$ определяется словом длиной $2n$, составленным из двух букв: П — вправо и Л — влево. Число всех таких слов, а вместе с ними и путей из 0 в 0, равно C_{2n}^n. И, следовательно,

$$P_{00}(2n) = C_{2n}^n p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n.$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad \text{при } n \to \infty,$$

получим, что

$$P_{00}(2n) = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n \sim$$

$$\sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi 2n}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} p^n q^n = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} (pq)^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}},$$

т. е.

$$P_{00}(2n) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Поэтому оба ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}(2n) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

сходятся или оба являются расходящимися.

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$ на сходимость. При $0 \le p \le 1$, $p + q = 1$ произведение pq принимает значения из промежутка $[0; 1/4]$, причем наибольшее значение, равное $1/4$, принимает при $p = q = 1/2$, что следует из равенств

$$pq = p(1-p) = p - p^2,\ 0 \le p \le 1.$$

Поэтому при $p = q = 1/2$, т. е. у симметричного случайного блуждания по одномерной целочисленной решетке,

$$P_{00}(2n) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \tag{1.2.6}$$

при $n \to \infty$. Ряд с общим членом $1/\sqrt{\pi n}$ расходится и, следовательно, состояние 0 возвратно (см. теорему 1.2.2).

Если $p \ne q$, то значение $4pq = c < 1$, а

$$\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{c^n}{\sqrt{\pi n}},$$

ряд с таким общим членом сходится, поэтому при $p \ne q$ состояние 0 невозвратно (см. следствие из теоремы 1.2.2).

1.3 Существенные состояния. Классы эквивалентности

Определение. Будем говорить, что состояние j *достижимо* из состояния i (обозначение $i \to j$), если найдется такое $n \ge 0$, что $P_{ij}(n) > 0$, другими словами, j достижимо из i, если из i можно попасть в j (с ненулевой вероятностью).

Поскольку $P_{ii}(0) = 1$, то i всегда достижимо из i.

Транзитивность свойства достижимости: *если j достижимо из i, а k достижимо из j, то k достижимо из i.*

Действительно, из уравнения Колмогорова—Чепмена (следствие 1) имеем

$$P_{ik}(n+m) \geq P_{ij}(n)P_{jk}(m).$$

И так как $i \to j$, а $j \to k$, то найдутся такие $n > 0$ и $m > 0$, что $P_{ij}(n) > 0$, $P_{jk}(m) > 0$, поэтому

$$P_{ik}(n+m) \geq P_{ij}(n)P_{jk}(m) > 0.$$

Неравенство же

$$P_{ik}(n+m) > 0$$

и обозначает, что k достижимо из i.

Определение. Состояния i и j будем называть *сообщающимися*, если i достижимо из j, и j достижимо из i.

Тот факт, что состояния i и j сообщающиеся, будем обозначать так: $i \leftrightarrow j$.

Из определения следует, что если состояния i и j не являются сообщающимися, то либо $P_{ij}(n) = 0$ для всех $n > 0$, либо $P_{ji}(m) = 0$ для всех $m > 0$.

Из транзитивности свойства достижимости следует транзитивность свойства сообщаемости: *если $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k$, то $i \leftrightarrow k$.*

Определение. Состояние i называется *существенным*, если для каждого состояния j, достижимого из i, состояние i достижимо из j.

Состояние i существенное, если, стартовав из i, в i всегда можно вернуться.

Определение. Состояние i называется *несущественным*, если найдется состояние j, достижимое из i, из которого i не достижимо.

Состояние i несущественное, если найдется состояние j, в которое из i можно попасть, но обратно в i вернуться невозможно.

Несущественное состояние i является невозвратным и, как следствие, нулевым.

В самом деле, если i — несущественное состояние, то найдется состояние j, достижимое из i с ненулевой вероятностью p такое, что состояние i не достижимо из j. Поэтому

$$P\{\theta_i = \infty | \xi_0 = i\} \geq p > 0.$$

Последнее и обозначает, что i — невозвратное состояние.

Определение. Пусть M_i — множество положительных чисел m, для которых $P_{ii}(m) > 0$. Наибольший общий делитель

$d(i)$ совокупности M_i будем называть *периодом состояния* i. Если $M_i = \emptyset$, то по определению полагаем $d(i) = 0$. Если $d(i) = 1$, то состояние i будем называть *непериодическим.*

Из того, что состояние i периодично с периодом d, не следует, что $P_{ii}(d) > 0$. Например, в марковской цепи с фазовым пространством $X = \{1, 2, \dots, 7\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

состояние 1 имеет период 2, но $P_{11}(2) = 0$, см. также рис. 1.3.1.

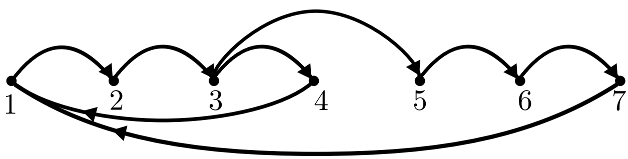

Рис. 1.3.1: К определению периода состояния

Пример 1.3.1. *Марковская цепь с фазовым пространством* $X = \{1, 2, 3\}$ *описывается матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния цепи: указать состояния сообщающиеся, несообщающиеся, существенные, несущественные, нулевые, ненулевые, периодические, непериодические, возвратные, невозвратные.

Решение. Состояние 2 достижимо из состояния 1. Состояние 1 недостижимо ни из 2, ни из 3. Состояние 1 несущественное, состояния 2 и 3 — существенные. Состояния 2 и 3 сообщающиеся, 1 и 2 — не сообщаются.

Матрица n-шаговых переходных вероятностей $\mathbb{P}(n) = (\mathbb{P})^n$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для всех $n = 2, 3, \dots$

$$\mathbb{P}(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому состояния 2 и 3 ненулевые, возвратные. Состояние 1 невозвратное, поскольку оно несущественное.

Состояние 1 имеет период, равный нулю. Далее, состояние i заведомо непериодическое, если с ненулевой вероятностью из i можно вернуться в i за один шаг. Поэтому состояния 2 и 3 — непериодические.

Пример 1.3.2. *Классифицировать состояния марковской цепи, описывающей азартную игру, см. пример* 1.1.2 (*с.* 12).

Решение. Если капитал игрока G_M конечен (равен M), то состояния 0 и $n\,(n = m + M)$ являются поглощающими экранами; состояния $1, 2, \ldots, n-1$ являются несущественными, а, следовательно, и невозвратными.

Если капитал игрока G_M бесконечен, то состояние 0 является поглощающим экраном; состояния $1, 2, \ldots,$ являются несущественными и невозвратными.

Классы эквивалентности. Множество всех состояний марковской цепи “распадается” на несущественные состояния и существенные, последние, в свою очередь, образуют непересекающиеся классы существенных сообщающихся между собой состояний.

Теорема 1.3.1. *Множество всех существенных состояний марковской цепи представимо в виде объединения непересекающиеся классов, каждый из которых состоит из сообщающихся между собой состояний.*

Доказательство. Для каждого существенного состояния i рассмотрим класс состояний S_i, включающий в себя состояние i и все существенные состояния, с ним сообщающиеся. Так определенные классы либо не пересекаются, либо совпадают.

Если S_i и S_j пересекаются, то они совпадают. В самом деле, пусть $k \in S_i \cap S_j$. Тогда для любого состояния $l \in S_i$ имеем: $l \leftrightarrow i \leftrightarrow k \leftrightarrow j$, т. е. $l \leftrightarrow j$. Последнее обозначает, что $l \in S_j$. И так как l произвольное из класса S_i, то $S_i \subset S_j$. Аналогично имеем $S_j \subset S_i$, поэтому $S_i = S_j$.

Определение. Класс всех существенных сообщающихся между собой состояний марковской цепи называется *классом эквивалентности.*

Классы эквивалентности мы, как правило, будем обозначать буквой C, возможно с индексами.

Определение. Марковская цепь, все состояния которой образуют один класс существенных сообщающихся состояний, называется *неприводимой или неразложимой* марковской цепью.

Если марковская цепь содержит несущественные состояния или более одного класса существенных сообщающихся состояний (или и то, и другое), то ее называют *приводимой* (*разложимой*) марковской цепью.

В неприводимой марковской цепи каждое состояние достижимо из каждого.

Если в матрице одношаговых переходных вероятностей вычеркнуть строки и столбцы, соответствующие состояниям, не входящим в данный класс эквивалентности, то полученная матрица будет стохастической.

Марковская цепь, попав в класс эквивалентности, покинуть его не может.

Марковскую цепь, полученную из данной цепи сужением ее фазового пространства X до класса эквивалентности C, также будем называть классом эквивалентности. Матрица переходных вероятностей этой цепи получается из матрицы переходных вероятностей $[P_{ij}]$ данной цепи и имеет вид $[P_{ij}]$, $i, j \in C$.

Теорема 1.3.2 (солидарности). *В неприводимой марковской цепи все состояния принадлежат одному типу:* 1) *если одно возвратно, то все возвратны;* 2) *если одно нулевое, то все нулевые;* 3) *если одно периодично с периодом* d, *то все периодичны с периодом* d.

Доказательство. Пусть i и j — различные состояния. Для любых n, s, m

$$P_{ii}(n+s+m) \geq P_{ij}(n)P_{jj}(s)P_{ji}(m)$$

(в силу следствия 3 из уравнения Колмогорова–Чепмена, теорема 1.1.1). Так как цепь неприводимая, то найдутся числа n и m (зафиксируем их), такие что

$$P_{ij}(n) = \alpha > 0, \ P_{ji}(m) = \beta > 0,$$

поэтому

$$P_{ii}(n+s+m) \geq \alpha\beta P_{jj}(s). \tag{1.3.1}$$

Аналогично

$$P_{jj}(m+r+n) \geq \alpha\beta P_{ii}(r). \tag{1.3.2}$$

Поскольку r и s произвольны, то можно выбрать r так, чтобы $m+r+n=s$. Тогда последнее неравенство перепишется так:

$$P_{jj}(s) \geq \alpha\beta P_{ii}(s-(n+m)). \tag{1.3.3}$$

Из неравенств (1.3.1) и (1.3.3) имеем

$$\alpha\beta P_{ii}(s-(n+m)) \le P_{jj}(s) \le \frac{1}{\alpha\beta} P_{ii}(s+(n+m)).$$

Отсюда следует, что асимптотические свойства $P_{ii}(k)$ и $P_{jj}(k)$ одинаковы: если $P_{ii}(k) \to 0$ (состояние i нулевое), то ясно, что и $P_{jj}(k) \to 0$ (состояние j нулевое); если

$$\sum_k P_{ii}(k) = \infty$$

(состояние i возвратное), то и

$$\sum_k P_{jj}(k) = \infty$$

(состояние j возвратное).

Установим, что $d(i) = d(j)$ — все состояния имеют один и тот же период.

В силу неприводимости цепи найдется r такое, что

$$P_{ii}(r) > 0,$$

и такие n и m, что

$$P_{jj}(m+r+n) \ge \alpha\beta P_{ii}(r) > 0$$

(см. (1.3.2)), а вместе с ними и

$$P_{jj}(m+2r+n) \ge \alpha\beta P_{ii}(2r) \ge \alpha\beta P_{ii}(r) P_{ii}(r) > 0.$$

Так что

$$P_{jj}(m+2r+n) > 0 \ \text{ и } \ P_{jj}(m+r+n) > 0.$$

Из определения периода $d(j)$ состояния j следует, что $d(j)$ — делитель чисел $(m+r+n)$ и $(m+2r+n)$, а, следовательно, и числа $(m+2r+n)-(m+r+n) = r$. Так что $d(j)$ — делитель чисел $r > 0$, для которых $P_{ii}(r) > 0$, а $d(i)$, как период i, — наибольший общий делитель таких чисел, поэтому $d(j) \le d(i)$. Аналогично $d(i) \le d(j)$, следовательно $d(i) = d(j)$.

Тем самым теорема доказана.

Из теоремы солидарности следует корректность таких определений.

Определение. Неприводимую марковскую цепь будем называть *ненулевой*, если хотя бы одно ее состояние ненулевое, *нулевой*, если хотя бы одно ее состояние нулевое, *возвратной*, если хотя бы одно ее состояние возвратное, *периодической* с периодом d, если хотя бы одно ее состояние периодическое с периодом d, и т. д.

Аналогично класс эквивалентности будем называть *ненулевым*, если хотя бы одно его состояние ненулевое, *нулевым*, если хотя бы одно его состояние нулевое, *возвратным*, если хотя бы одно его состояние возвратное, и т. д.

Теорема 1.3.3. *В нулевом классе эквивалентности для любых* i, j

$$P_{i,j}(m) \to 0$$

при $m \to +\infty$.

Доказательство. Действительно,

$$P_{jj}(n+m) \geq P_{ji}(n)P_{ij}(m). \tag{1.3.4}$$

Поскольку i, j принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, найдется такое n, что $P_{ji}(n) > 0$. Поэтому из неравенства (1.3.4), учитывая, что $P_{jj}(n+m) \to 0$ при $m \to +\infty$, получаем, что и $P_{ij}(m) \to 0$ при $m \to +\infty$.

Теорема 1.3.4 (асимптотика нулевой цепи). *Неприводимая нулевая марковская цепь* $\{\xi_n\}$ *с фазовым пространством* $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *при* $n \to +\infty$ *сходится по вероятности к* $+\infty$: *для любого* $M > 0$ *при* $n \to \infty$

$$P\{\xi_n \geq M\} \to 1.$$

Доказательство. Пусть $P\{\xi_0 = k\} = p_k, k = 0, 1, \ldots$ Для произвольного фиксированного M оценим $P\{\xi_n \leq M\}$, воспользовавшись (1.1.8):

$$P\{\xi_n \leq M\} = \sum_{i=0}^{M} P\{\xi_n = i\} = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=0}^{\infty} p_k P_{ki}(n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{M} P_{ki}(n) = \sum_{k=0}^{K} p_k \sum_{i=0}^{M} P_{ki}(n) + \sum_{k=K+1}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{M} P_{ki}(n) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{K} p_k \sum_{i=0}^{M} P_{ki}(n) + \sum_{k=K+1}^{\infty} p_k.$$

Последнее слагаемое можно сделать меньше данного ε за счет выбора K, а первое слагаемое за счет выбора n — в неприводимой нулевой марковской цепи для любых k, i при $n \to +\infty$

$$P_{ki}(n) \to 0.$$

Тем самым теорема доказана.

Следствие. *Вероятность нулевой марковской цепи остаться в любом ограниченном множестве фазового пространства при $n \to \infty$ стремится к нулю, т. е. для любого $M > 0$*

$$P\{\xi_n < M\} \to 0.$$

Теорема 1.3.5 (асимптотика невозвратной цепи). *Неприводимая невозвратная марковская цепь $\{\xi_n\}$ с фазовым пространством $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ при $n \to +\infty$ сходится по вероятности к $+\infty$: для любого $M > 0$ при $n \to \infty$*

$$P\{\xi_n \geq M\} \to 1.$$

Доказательство. Невозвратная марковская цепь является нулевой.

Следствие. *Вероятность невозвратной марковской цепи остаться в любом ограниченном множестве фазового пространства при $n \to \infty$ стремится к нулю, т. е. для любого $M > 0$*

$$P\{\xi_n < M\} \to 0.$$

Замечание. Утверждения, аналогичные теоремам 1.3.4, 1.3.5 и следствиям из них, имеют место и для марковской цепи с фазовым пространством $X = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Теорема 1.3.6. *Вероятность марковской цепи, стартовав из несущественного состояния i, остаться в любом ограниченном множестве класса T несущественных состояний при $n \to \infty$ стремится к нулю, т. е. для любого $M > 0$*

$$P\{\xi_n \leq M, \xi_n \in T | \xi_0 = i\} \to 0.$$

Доказательство. Оценим $P\{\xi_n \le M, \xi_n \in T|\xi_0 = i\}$ сверху:

$$P\{\xi_n \le M, \xi_n \in T|\xi_0 = i\} =$$

$$= \sum_{j\in[0,M]\cap T} P\{\xi_n = j|\xi_0 = i\} = \sum_{j\in[0,M]\cap T} P_{i,j}(n).$$

Конечную сумму $\sum\limits_{j\in[0,M]\cap T} P_{i,j}(n)$ можно сделать меньше данного ε за счет выбора n достаточно большим — поскольку j несущественное состояние, то оно и невозвратное, а, следовательно, нулевое: $P_{ij}(n) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Тем самым теорема доказана.

Конечные цепи Маркова. Далее посмотрим, что можно сказать о состояниях марковской цепи, если цепь конечна — конечно ее фазовое пространство.

Теорема 1.3.7. *Конечная неприводимая цепь Маркова является ненулевой.*

Доказательство. Пусть M — число состояний конечной неприводимой цепи. Стартуя из состояния i, за n шагов цепь с вероятностью 1 окажется в одном из своих возможных состояний, поэтому

$$\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(n) = 1. \qquad (1.3.5)$$

Если предположить, что цепь нулевая, то для любых i, j из фазового пространства

$$P_{ij}(n) \to 0$$

при $n \to \infty$ (см. теорему 1.3.3). Переходя в равенстве (1.3.5) к пределу при $n \to \infty$, получаем противоречие: $0 = 1$. Так что в конечной цепи все состояния ненулевые.

Следствие 1. *Конечная неприводимая марковская цепь возвратна.*

Поскольку в конечной неприводимой марковской цепи каждое состояние i ненулевое — $P_{ii}(n)$ при $n \to \infty$ не стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n} P_{ii}(n)$ расходится, и, следовательно, состояние i возвратно.

Следствие 2. *Невозвратный класс эквивалентности не может быть конечным.*

Теорема. *В конечной марковской цепи хотя бы одно состояние существенное.*

Доказательство. Обозначим через $X = \{1, 2, \ldots, M\}$ фазовое пространство конечной марковской цепи. Предположим, что все состояния цепи несущественные. Пусть в начальный момент цепь находится в состоянии i_1. Так как i_1 — несущественное, то найдется состояние i_2, в которое из i_1 можно попасть с ненулевой вероятностью, но вернуться из i_2 в i_1 невозможно. Состояние i_2 также несущественное, поэтому найдется состояние i_3, в которое из i_2 можно попасть, но вернуться в i_2 невозможно, невозможно из i_3 попасть и в i_1, так как тогда из i_2 можно было бы вернуться в i_1 (через i_3), что невозможно, и так далее. За M или меньшее число шагов мы окажемся в некотором состоянии i_m $(m \le M)$, из которого нельзя попасть в i_1,$i_2, \ldots$, i_{m-1} по построению, а в другие (если такие еще останутся) нельзя попасть, в силу их недостижимости из i_m. Поэтому цепь с вероятностью 1 остается в состоянии i_m, т. е. за каждый последующий шаг она переходит с вероятностью 1 из i_m в i_m. Последнее обозначает, что i_m — существенное состояние. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Возвратные и невозвратные классы эквивалентности. Понятие возвратности состояния введено безотносительно к другим состояниям цепи. Здесь мы рассмотрим возвратные и невозвратные классы состояний.

Пусть $j \ne i$. Введем обозначения

$$f_{ij}(k) = P\{\xi_0 = i, \xi_k = j, \xi_\nu \ne j,\ \nu = 1, 2, \ldots, k-1 | \xi_0 = i\},$$

$k = 2, 3, \ldots$, для $k = 0$ и 1 положим

$$f_{ij}(0) = 0,\ f_{ij}(1) = P\{\xi_0 = i, \xi_1 = j | \xi_0 = i\};$$

$f_{ij}(k)$ — вероятность первого достижения состояния j из состояния i на k-м шаге.

Обозначим вероятность достижения j из i $(j \ne i)$ через f^*_{ij}, ясно, что

$$f^*_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}(k).$$

Мы часто будем пользоваться приведенными далее соотношениями между f^*_{ii} и f^*_{ij}.

Уравнения для $\boldsymbol{f^*_{ij}}$ и для $\boldsymbol{f^*_{ii}}$. *Для i, j из данного класса эквивалентности C*

$$f^*_{ij} = P_{ij} + \sum_{k \in C \setminus \{j\}} P_{ik} f^*_{kj}. \tag{1.3.6}$$

$$f_{ii}^* = P_{ii} + \sum_{k\in C\setminus\{i\}} P_{ik} f_{ki}^*. \tag{1.3.7}$$

Далее через $\tilde{P}_{ij}(s)$ будем обозначать производящую функцию последовательности $\{P_{ij}(n)\}$:

$$\tilde{P}_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ij}(k) s^k, \ |s| < 1,$$

а через $\tilde{F}_{ij}(s)$ — производящую функцию последовательности $\{f_{ij}(n)\}$:

$$\tilde{F}_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}(k) s^k, \ |s| < 1.$$

Аналогично тому, как было получено соотношение (1.2.4), получаем

$$P_{ij}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}(k) P_{jj}(n-k), \ n \geq 0, \ j \neq i. \tag{1.3.8}$$

Перемножив степенные ряды $\tilde{F}_{ij}(s)$ и $\tilde{P}_{jj}(s)$, с учетом теоремы 1.2.1 и равенства (1.3.8), получим соотношение

$$\tilde{P}_{ij}(s) = \tilde{F}_{ij}(s)\tilde{P}_{jj}(s), \ |s| < 1 \tag{1.3.9}$$

(аналогично тому, как было получено соотношение (1.2.3)).

Теорема 1.3.8 (необходимые и достаточные условия невозвратности состояния в классе). *Пусть i, j принадлежат одному классу эквивалентности. Для того, чтобы состояние j было невозвратным, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ сходился.*

Доказательство. Поскольку $f_{ij}^* = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_{ij}(k) \leq 1$, то в силу леммы Абеля всегда существует $\lim\limits_{s\to 1-0} \tilde{F}_{ij}(s)$ и

$$\lim_{s\to 1-0} \tilde{F}_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}(k).$$

Если j — невозвратное состояние, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{jj}(n)$ сходится, и в силу леммы Абеля

$$\lim_{s\to 1-0} \tilde{P}_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}(n).$$

Поэтому при $s \to 1-0$ существует конечный предел правой части равенства

$$\tilde{P}_{ij}(s) = \tilde{F}_{ij}(s)\tilde{P}_{jj}(s),$$

а, следовательно, и левой, и в силу леммы Абеля

$$\lim_{s\to 1-0} \tilde{P}_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n).$$

Так что если j невозвратно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ сходится.

Установим, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ следует невозвратность состояния j.

Из равенства (1.3.9) имеем

$$\tilde{P}_{jj}(s) = \tilde{P}_{ij}(s)/\tilde{F}_{ij}(s). \tag{1.3.10}$$

Из сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_{ij}(k)$ следует существование конечных пределов $\lim\limits_{s\to 1-0} \tilde{P}_{ij}(s)$ и $\lim\limits_{s\to 1-0} \tilde{F}_{ij}(s)$ (см. лемму Абеля), а вместе с ними существование конечного предела $\lim\limits_{s\to 1-0} \tilde{P}_{jj}(s)$ (см. равенство (1.3.10)). Поэтому в силу леммы Абеля ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{jj}(n)$ сходится, а, следовательно, состояние j невозвратно.

Следствие 1. *Пусть i, j принадлежат одному классу эквивалентности. Для того, чтобы состояние j было возвратным, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ расходился.*

С л е д с т в и е 2. *Для любых i, j из невозвратного класса эквивалентности при $n \to \infty$*

$$P_{ij}(n) \to 0.$$

Коль скоро состояние j невозвратное, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ сходится и, следовательно, $P_{ij}(n) \to 0$.

Т е о р е м а 1.3.9 (f^*_{ji} в невозвратном классе). *В невозвратном классе эквивалентности C для каждого состояния i найдется состояние j $(j \neq i)$ такое, что*

$$f^*_{ji} < 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (1.3.7) имеем

$$f^*_{ii} = P_{ii} + \sum_{k \in C \setminus \{i\}} P_{ik} f^*_{ki}.$$

Если предположить, что в невозвратном классе C значения $f^*_{ki} = 1$ для всех $k \in C \setminus \{i\}$, то последнее равенство можно переписать так:

$$f^*_{ii} = P_{ii} + \sum_{k \in C \setminus \{i\}} P_{ik}$$

или так:

$$f^*_{ii} = \sum_{k \in C} P_{ik}.$$

Отсюда имеем

$$f^*_{ii} = 1,$$

что противоречит невозвратности класса.

С л е д с т в и е. *Если в классе эквивалентности C найдется состояние i такое, что для всех $j \in C$ $(j \neq i)$ значение $f^*_{ji} = 1$, то класс C возвратный.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В невозвратном классе для каждого i найдется j, такое, что $f^*_{ji} < 1$.

Т е о р е м а 1.3.10 (f^*_{ji} в возвратном классе). *В возвратном классе эквивалентности C для каждой пары $j, i \in C$*

$$f^*_{ji} = 1.$$

Доказательство. Из равенств (1.3.6) и (1.3.7) имеем, что для любого n $(n = 2, 3, \dots)$

$$f_{ii}^* = P_{ii}(n) + \sum_{k \in C \setminus \{i\}} P_{ik}(n) f_{ki}^*, \tag{1.3.11}$$

а поскольку цепь возвратна, т. е. $f_{ii}^* = 1$, то для каждого n $(n = 1, 2, \dots)$

$$1 = P_{ii}(n) + \sum_{k \in C \setminus \{i\}} P_{ik}(n) f_{ki}^*. \tag{1.3.12}$$

С другой стороны, для любого n $(n = 1, 2, \dots)$

$$1 = P_{ii}(n) + \sum_{k \in C \setminus \{i\}} P_{ik}(n). \tag{1.3.13}$$

Вычитая из равенства (1.3.13) равенство (1.3.12), получим

$$\sum_{k \in C \setminus \{i\}} P_{ik}(n)(1 - f_{ki}^*) = 0 \tag{1.3.14}$$

для всех $n = 1, 2, \dots$ Если предположить, что найдется пара j, i $(j \neq i)$, у которой $f_{ji}^* < 1$, то из равенства (1.3.14) следует, что для всех $n = 1, 2, \dots$ значения $P_{ij}(n)$ равны нулю, а, следовательно, j не достижимо из i, последнее противоречит тому, что j, i принадлежат одному классу эквивалентности.

Осталось доказать равенство (1.3.11). Из равенства (1.3.6) имеем

$$f_{ij}^* = P_{ij} + \sum_{k \in C \setminus \{j\}} P_{ik} f_{kj}^*,$$

$$f_{kj}^* = P_{kj} + \sum_{u \in C \setminus \{j\}} P_{ku} f_{uj}^*,$$

$$f_{ij}^* = P_{ij} + \sum_{k \in C \setminus \{j\}} P_{ik} f_{kj}^* = P_{ij} + \sum_{k \in C \setminus \{j\}} P_{ik} \Big(P_{kj} + \sum_{u \in C \setminus \{j\}} P_{ku} f_{uj}^* \Big) =$$

$$= P_{ij} + \sum_{k \in C \setminus \{j\}} P_{ik} P_{kj} + \sum_{u \in C \setminus \{j\}} f_{uj}^* \Big(\sum_{k \in C \setminus \{j\}} P_{ik} P_{ku} \Big) =$$

$$= P_{ij} - P_{ij}P_{jj} + P_{ij}(2) + \sum_{u \in C\setminus\{j\}} f^*_{uj}(P_{iu}(2) - P_{ij}P_{ju}) =$$

$$= P_{ij}(2) + \sum_{u \in C\setminus\{j\}} P_{iu}(2)f^*_{uj} + P_{ij}\Big(1 - P_{jj} - \sum_{u \in C\setminus\{j\}} P_{ju}f^*_{uj}\Big) =$$

$$= P_{ij}(2) + \sum_{u \in C\setminus\{j\}} P_{iu}(2)f^*_{uj} + P_{ij}(1 - f^*_{jj}) = P_{ij}(2) + \sum_{u \in C\setminus\{j\}} P_{iu}(2)f^*_{uj}$$

($1 - f^*_{jj} = 0$ в силу возвратности класса C), т. е.

$$f^*_{ij} = P_{ij}(2) + \sum_{u \in C\setminus\{j\}} P_{iu}(2)f^*_{uj}.$$

И так далее, за n “шагов” получим равенство

$$f^*_{ij} = P_{ij}(n) + \sum_{u \in C\setminus\{j\}} P_{iu}(n)f^*_{uj},$$

из которого при $j = i$ имеем (1.3.11).

Следствие. *Если в классе эквивалентности найдется пара состояний j, i таких, что $f^*_{ji} < 1$, то класс является невозвратным.*

В самом деле, в возвратном классе для любых j, i значение $f^*_{ji} = 1$.

Теорема 1.3.11 (о вероятности посещения состояния). *Марковская цепь с вероятностью 1 посещает возвратное состояние бесконечно много раз, а невозвратное с вероятностью 1 посещает конечное число раз.*

Доказательство. Введем обозначения

$$A^*_{ii} = \{\text{цепь посещает состояние } i \text{ бесконечно много раз}\},$$

$$A^{(N)}_{ii} = \{\text{цепь посещает состояние } i \text{ не менее } N \text{ раз}\}.$$

Ясно, что

$$A^{(N+1)}_{ii} \subset A^{(N)}_{ii},\ N = 1, 2, \ldots,$$

$$A^*_{ii} = \bigcap_{N=1}^{\infty} A^{(N)}_{ii},$$

в справедливости равенства убеждаемся непосредственной проверкой.

Вычислим $P(A^*_{ii}|\xi_0 = i)$. Воспользуемся свойством непрерывности вероятности:

$$P(A^*_{ii}|\xi_0 = i) = \lim_N P(A^{(N)}_{ii}|\xi_0 = i).$$

Обозначим

$$Q^{(N)}_{ii} = P(A^{(N)}_{ii} \,|\, \xi_0 = i).$$

Очевидно,

$$Q^{(N)}_{ii} = Q^{(N-1)}_{ii} f^*_{ii},\ N = 2, 3, \ldots$$

Отсюда

$$Q^{(N)}_{ii} = (f^*_{ii})^N,\ N = 2, 3, \ldots$$

$$P(A^*_{ii}|\xi_0 = i) = \lim_N Q^{(N)}_{ii} = \lim_N (f^*_{ii})^N.$$

Поэтому если состояние i возвратно, т. е. $f^*_{ii} = 1$, то

$$P(A^*_{ii}|\xi_0 = i) = 1,$$

а если состояние i невозвратно, т. е. $f^*_{ii} < 1$, то

$$P(A^*_{ii}|\xi_0 = i) = 0.$$

Тем самым теорема доказана.

Резюме. *Состояния марковской цепи делятся на несущественные и существенные.*

Множество существенных состояний распадается на непересекающиеся классы существенных сообщающихся между собой состояний — классы эквивалентности.

Каждый класс эквивалентности является нулевым или ненулевым.

Нулевой класс эквивалентности может быть как возвратным, так и невозвратным.

Периодические цепи. Пусть $\{\xi_k\}$ — марковская цепь с матрицей переходных вероятностей $[P_{ij}]$. Для данного фиксированного целого $t > 0$ определим последовательность случайных величин $\{\zeta_k\}$:

$$\zeta_k = \xi_{kt},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Последовательность $\{\zeta_k\}$ образует марковскую цепь (для $\{\zeta_k\}$ выполняется марковское свойство). Обозначим ее матрицу переходных вероятностей через $\mathbb{Q} = [Q_{ij}]$:

$$Q_{ij} = P\{\zeta_{k+1} = j|\zeta_k = i\},\ i, j \in X.$$

Из определения цепи $\{\zeta_k\}$ имеем, что для любого $s = 1, 2, 3, \ldots$

$$Q_{ij}(s) = P\{\zeta_{k+s} = j|\zeta_k = i\} = P\{\xi_{(k+s)t} = j|\xi_{kt} = i\} =$$

$$= P\{\xi_{kt+st} = j|\xi_{kt} = i\} = P_{ij}(st),$$

т. е.

$$Q_{ij}(s) = P_{ij}(st),\ i, j \in X, \tag{1.3.15}$$

или в матричной форме

$$\mathbb{Q}(s) = \mathbb{P}(st).$$

В частности

$$Q_{ij} = P_{ij}(t),\ i, j \in X, \tag{1.3.16}$$

или в матричной форме

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P}(t).$$

Марковскую цепь с матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P}$ будем называть $\mathbb{P}$-*цепью.*

Из определения $\mathbb{P}$-цепи $\{\xi_k\}$, $\mathbb{Q}$-цепи $\{\zeta_k\}$ и равенства

$$Q_{ij}(s) = P_{ij}(st),\ i, j \in X,$$

следует, что *состояние j достижимо из i в $\mathbb{Q}$-цепи за s шагов тогда и только тогда, когда в $\mathbb{P}$-цепи j достижимо из i за st шагов.*

Теорема 1.3.12 (о структуре периодической марковской цепи). 1° *В неприводимой периодической с периодом t марковской $\mathbb{P}$-цепи фазовое пространство G представимо в виде объединения t непересекающихся классов состояний $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$, при этом $\mathbb{P}$-цепь за один шаг из класса G_ν переходит в класс $G_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, t-2)$, из класса G_{t-1} в класс G_0, а за st шагов $(s = 1, 2, \ldots)$ из класса G_ν в класс G_ν.*

2° *В $\mathbb{Q}$-цепи $(\mathbb{Q} = \mathbb{P}(t))$ каждый из классов состояний $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$ является непериодическим классом эквивалентности, причем возвратным, если $\mathbb{P}$-цепь возвратна.*

Доказательство. Сначала докажем, что для периодической с периодом t марковской цепи имеет место следующее свойство:

Лемма. *Если в неприводимой периодической с периодом t цепи состояние i достижимо из состояния j за n_1 и за n_2 шагов ($P_{ji}(n_1) > 0$, $P_{ji}(n_2) > 0$), то n_1 и n_2 представимы в виде*

$$n_1 = \nu + s_1 t, \ n_2 = \nu + s_2 t, \ 0 \le \nu \le t-1, \tag{1.3.17}$$

причем ν определяется единственным образом.

Из следствия 1 теоремы 1.1.1 (уравнение Колмогорова–Чепмена) имеем

$$P_{jj}(n_1 + m) \ge P_{ji}(n_1) P_{ij}(m),$$

$$P_{jj}(n_2 + m) \ge P_{ji}(n_2) P_{ij}(m).$$

Из неприводимости цепи следует существование хотя бы одного m, для которого $P_{ij}(m) > 0$, далее m минимальное из таких чисел (оно единственно). Поэтому

$$P_{jj}(n_1 + m) > 0,$$

$$P_{jj}(n_2 + m) > 0.$$

Отсюда, поскольку цепь периодична с периодом t, следуют представления

$$n_1 + m = s_1' t,$$

$$n_2 + m = s_2' t,$$

или

$$n_1 = s_1' t - m,$$

$$n_2 = s_2' t - m,$$

или

$$n_1 = (st - m) + (s_1' t - st) = \nu + s_1 t,$$

$$n_2 = (st - m) + (s_2' t - st) = \nu + s_2 t,$$

s выбрано так, что $(s-1)t < m \le st$, а $\nu = st - m$ (ν определяется единственным образом как остаток от деления n_1 на t).

Тем самым лемма доказана.

Представление

$$n = \nu + st, \ \ 0 \le \nu \le t-1,$$

для числа n шагов, за которое в периодической с периодом t цепи состояние i достижимо из состояния j, дает возможность разбить фазовое пространство G марковской цепи на t непересекающихся классов состояний следующим образом. Поскольку цепь неприводима, то каждое состояние достижимо из состояния 1, причем в силу леммы только за число шагов вида

$$n = \nu + st, \quad 0 \le \nu \le t - 1.$$

Отнесем в класс G_0 все состояния марковской цепи, достижимые из состояния 1 за

$$n = 0 + st$$

шагов. В класс G_1 отнесем все состояния, достижимые из 1 за

$$n = 1 + st$$

шагов, и т. д., в класс G_ν отнесем все состояния, достижимые из 1 за

$$n = \nu + st$$

шагов ($0 \le \nu \le t-1$). А поскольку ν в представлении $n = \nu + st$ единственно, то классы G_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, t-1$, не пересекаются.

Далее, пусть цепь находится в состоянии i из класса G_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, t-2$), т. е. состояние i достижимо из состояния 1 за $st + \nu$ шагов. За один шаг из состояния i класса G_ν цепь перейдет в некоторое состояние j. Состояние j достижимо из 1 за $(st+\nu)+1 = st + (\nu+1)$ шагов, поэтому j принадлежит классу $G_{\nu+1}$. Таким образом, $\mathbb{P}$-цепь из класса состояний G_ν за один шаг переходит в класс $G_{\nu+1}$, а из класса G_{t-1} за один шаг цепь переходит в класс G_0.

Пусть $i \in G_\nu$, т. е. i достижимо из состояния 1 за $\nu + s't$ шагов, и пусть сделано st шагов, при этом цепь оказалась в некотором состоянии j, которое достижимо из состояния 1 за $\nu + s't + st = \nu + (s'+s)t$ шагов. Поэтому $j \in G_\nu$. Так что за st шагов цепь переходит из класса G_ν в класс G_ν.

Убедимся, что в $\mathbb{Q}$-цепи каждый из классов состояний G_ν образует класс эквивалентности. Пусть $i, j \in G_\nu$. Поскольку $\mathbb{P}$-цепь неприводима, то состояния i, j в $\mathbb{P}$-цепи сообщаются, причем только за число шагов вида st, т. е. для данных i, j найдутся числа s_1 и s_2 такие, что $P_{ij}(s_1 t) > 0$, $P_{ji}(s_2 t) > 0$. А в силу равенства (1.3.15) значения $Q_{ij}(s_1) > 0$, $Q_{ji}(s_2) > 0$. Два последних неравенства обозначают, что состояния i, j из класса G_ν сообщаются в $\mathbb{Q}$-цепи. Далее, в $\mathbb{Q}$-цепи состояния из класса G_ν сообщаются только с состояниями из G_ν. Действительно, пусть $i \in G_\nu$

и $i \to j$, т. е. существует такое s, что $Q_{ij}(s) > 0$, а, следовательно, и $P_{ij}(st) > 0$. Но за st шагов из класса G_ν можно перейти только в класс G_ν, поэтому $j \in G_\nu$.

Убедимся, что класс эквивалентности G_ν в $\mathbb{Q}$-цепи непериодический. Предположим обратное. И пусть $j \in G_\nu$ и н. о. д. тех чисел u, для которых $Q_{jj}(u) > 0$, равен $d > 1$, т. е. числа u имеют вид

$$u = vd.$$

При этом

$$0 < Q_{jj}(u) = P_{jj}(ut) = P_{jj}((vd)t) = P_{jj}(v(dt)).$$

Отсюда следует, что период состояния j в $\mathbb{P}$-цепи не меньший dt, причем $dt > t$. Но период $\mathbb{P}$-цепи равен t. Это противоречие и доказывает, что $\mathbb{Q}$-цепь является непериодической.

Осталось проверить, что если $\mathbb{P}$-цепь возвратна, то каждый из классов эквивалентности G_ν в $\mathbb{Q}$-цепи возвратен. Пусть $i \in G_\nu$. Учитывая (1.3.15), имеем

$$\sum_s Q_{ii}(s) = \sum_s P_{ii}(st) = \sum_n P_{ii}(n)$$

— последнее равенство имеет место поскольку в $\mathbb{P}$-цепи из состояния i можно вернуться в i только за st шагов (остальные переходные вероятности равны нулю). Ряд $\sum\limits_n P_{ii}(n)$ расходится (состояние i возвратно), а вместе с ним расходится и ряд $\sum\limits_s Q_{ii}(s)$. Так что i — возвратное состояние в $\mathbb{Q}$-цепи.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е о единственности разбиения фазового пространства. Состояние i периодической с периодом t $\mathbb{P}$-цепи мы включаем в класс G_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, t-1$), если оно достижимо из состояния 1 за $n = \nu + st$ шагов. Тем самым получаем разбиение

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{t-1}$$

фазового пространства с описанными в теореме свойствами. А если состояние 1, из которого начинается процедура разбиения, заменить на другое? Каким при этом получится разбиение фазового пространства?

Пусть i' — состояние из фазового пространства $G = G_0 \cup \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{t-1}$. Оно попадает в один из классов, скажем в класс G_ν. Будем проводить разбиение по описанной выше процедуре

— в класс $G_{\nu'}$ отнесем все те состояния, которые достижимы из i' за $\nu' + s't$ шагов ($\nu' = 0, 1, \ldots, t-1$). Получим разбиение

$$G = G_0' \cup G_1' \cup \ldots \cup G_{t-1}'.$$

Далее, поскольку $i' \in G_\nu$, а в класс G_0' мы относим все состояния j, достижимые из i' за $0+s't$ шагов, то состояния j из класса G_0' достижимы из состояния 1 за $(\nu + st) + s't = \nu + (s + s')t$ шагов, и, следовательно, $G_0' = G_\nu$ и так далее: $G_1' = G_{\nu+1}$, $G_2' = G_{\nu+2}$, ... Так что результат разбиения фазового пространства G единственный с точностью до "сдвига" нумерации классов.

Замечание Если в периодической с периодом t марковской цепи состояние i достижимо из $j \in G_f$ за n шагов, то

$$n = \nu + st,\ 0 \le \nu \le t-1,$$

при этом за первые ν шагов цепь, последовательно переходя из класса в класс, перейдет в класс $G_{f+\nu}$, а затем за каждые последующие t шагов будет переходить из класса $G_{f+\nu}$ в класс $G_{f+\nu}$, пока не окажется в состоянии i.

Пример 1.3.3 ($\mathbb{Q}$-цепь для случайного блуждания). *Рассмотрим одномерное случайное блуждание по целочисленной решетке с вероятностью p перехода на единицу вправо и с вероятностью q перехода на единицу влево ($p + q = 1$, $0 < p < 1$), см. также пример* 1.2.1. *$\mathbb{P}$-цепь неприводима и имеет период* 2. *А потому матрица переходных вероятностей $\mathbb{Q}$-цепи*

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{P})^2.$$

Фазовое пространство $\mathbb{Z}$ представимо в виде объединение двух непересекающихся классов G_0 и G_1, а именно

$$G_0 = \{\ldots, -2n, \ldots, -2, 0, 2, \ldots, 2n, \ldots\},$$

$$G_1 = \{\ldots, -(2n+1), \ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots, 2n+1, \ldots\}.$$

При этом мы за один шаг в $\mathbb{P}$-цепи переходим из класса G_0 в класс G_1, а из G_1 в G_0. В $\mathbb{Q}$-цепи G_0 и G_1 являются непериодическими классами эквивалентности.

П р и м е р 1.3.4. *Марковская цепь с фазовым пространством* $\{1, 2, 3, 4\}$ *задана матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния марковской цепи. Убедиться, что цепь периодична. Пусть t — *период цепи, представить фазовое пространство в виде:*

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{t-1}.$$

В $\mathbb{Q}$*-цепи* ($\mathbb{Q} = \mathbb{P}(t)$) *найти матрицу переходных вероятностей для классов эквивалентности* $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$. *Классифицировать состояния в классах эквивалентности* G_ν, $\nu = 0, 1, \ldots \ldots, t-1$.

Р е ш е н и е. Цепь неприводимая.

Из состояния 1 в состояние 1 можно попасть только за четное число шагов: $2, 4, 6, \ldots$ Поэтому состояние 1, а вместе с ним и цепь, периодична с периодом 2.

Фазовое пространство G (согласно теореме 1.3.12) представимо в виде

$$G = G_0 \cup G_1 = \{1, 2\} \cup \{3, 4\}.$$

Класс G_0 образуют состояния, в которые из состояния 1 можно попасть за $st + 0 = s \cdot 2 + 0$ шагов, такими состояниями являются $\{1, 2\}$. Класс G_1 образуют состояния, в которые из 1 можно попасть за $st + 1 = s \cdot 2 + 1$ шаг, такими состояниями являются $\{3, 4\}$.

Каждый из классов G_0 и G_1 в $\mathbb{Q} = \mathbb{P}(2)$-цепи является непериодическим возвратным классом эквивалентности.

Матрица переходных вероятностей $\mathbb{Q}$-цепи

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P}(2) = (\mathbb{P})^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Матрица переходных вероятностей $\mathbb{Q}_0$ класса эквивалентности G_0:

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица переходных вероятностей $\mathbb{Q}_1$ класса эквивалентности G_1:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

1.4 Примеры и задачи

Примеры

Пример 1.4.1. *Матрица переходных вероятностей марковской цепи с фазовым пространством* $X = \{1, 2, 3\}$ *имеет вид*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

Распределение цепи (по состояниям) в момент $t = 0$, *другими словами, распределение случайной величины* ξ_0, *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти:

1° *распределение цепи в момент* $t = 2$;

2° *вероятность того, что в моменты* $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ *цепь будет находиться соответственно в состояниях* $1,\ 3,\ 3,\ 2$, *т. е. найти* $P\{\xi_0 = 1,\ \xi_1 = 3,\ \xi_2 = 3,\ \xi_3 = 2\}$.

Решение.

1° Воспользуемся равенством (1.1.8) при $n = 2$, $X = \{1, 2, 3\}$:

$$P\{\xi_2 = j\} = \sum_{i=1}^{3} p_i P_{ij}(2),\ \ j = 1, 2, 3,$$

где $P_{ij}(2),\ i, j = 1, 2, 3,$ — элементы матрицы $\mathbb{P}(2) = \mathbb{P}^2$.

2° В силу (1.1.7) искомая вероятность (вероятность “пройти” по данной траектории) выражается через начальное распределение цепи и одношаговые переходные вероятности:

$$P\{\xi_0 = 1,\, \xi_1 = 3,\, \xi_2 = 3,\, \xi_3 = 2\} =$$

$$= P\{\xi_0 = 1\} P_{13} P_{33} P_{32} = 0{,}0336.$$

Пример 1.4.2. *Марковская цепь с фазовым пространством* $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *задается матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния цепи.

Решение. Состояния 1 и 2 — несущественные, так как из 1 и из 2 можно с ненулевой вероятностью попасть в 5, но вернуться из состояния 5 невозможно (цепь приводима).

Состояния 3 и 4 — существенные, 5 — существенное.

Состояния 3 и 4 образуют класс эквивалентности (конечный), поэтому состояния 3 и 4 ненулевые и, следовательно, возвратные (см. теорему 1.3.7).

Состояние 5 образует класс эквивалентности, 5 ненулевое, возвратное состояние.

Состояния 3,4,5 — непериодические.

Пример 1.4.3. *Симметричную игральную кость подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть* ξ_k *— число выпавших очков при* k*-м подбрасывании кости,* $k = 1, 2, \ldots$ *Рассмотрим последовательность случайных величин*

$$\eta_n = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\},\ n = 1, 2, \ldots$$

Показать, что последовательность $\{\eta_n\}$ *образует марковскую цепь, найти ее матрицу переходных вероятностей, классифицировать состояния цепи.*

Решение. Фазовое пространство последовательности $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Убедимся, что для последовательности $\{\eta_n\}$ имеет место марковское свойство.

Заметим, что

$$\eta_{n+1} = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}\} = \max\{\eta_n, \xi_{n+1}\}.$$

Имеем

$$P\{\eta_{n+1} = j|\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_1 = i_1\} =$$

$$= \frac{P\{\eta_{n+1} = j, \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_1 = i_1\}}{P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_1 = i_1\}} =$$

$$= \frac{P\{\max\{\xi_{n+1}, \eta_n\} = j, \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_1 = i_1\}}{P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_1 = i_1\}} =$$

$$= \frac{P\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j, \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_1 = i_1\}}{P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_1 = i_1\}} =$$

$$= \frac{P\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j\}P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1} \dots, \eta_1 = i_1\}}{P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_1 = i_1\}} =$$

$$= P\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j\}.$$

Воспользовались независимостью событий

$$\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j\},\ \{\eta_n = i, \dots, \eta_1 = i_1\}.$$

Аналогично получаем

$$P\{\eta_{n+1} = j|\eta_n = i\} = P\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j\}.$$

Отсюда и следует, что, во-первых, для последовательности случайных величин $\{\eta_n\}$ имеет место марковское свойство и, следовательно, последовательность $\{\eta_n\}$ является марковской цепью (причем стационарной) и, во-вторых, матрица одношаговых переходных вероятностей цепи $\{\eta_n\}$

$$P_{ij} = P\{\eta_{n+1} = j|\eta_n = i\} = P\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j\},\ i, j = 1, 2, \dots 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Состояния $1, 2, \dots, 5$ несущественные. Состояние 6 существенное, оно образует класс эквивалентности и является возвратным, непериодическим.

П р и м е р 1.4.4. *Монету, вероятность выпадения герба которой равна p $(0 < p < 1)$, подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число выпавших гербов при k-м подбрасывании монеты, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательность случайных величин*

$$\eta_{n+1} = (\eta_n + 1)I_{\{1\}}(\xi_{n+1}),\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Показать, что последовательность $\{\eta_n\}$ образует марковскую цепь, найти ее матрицу переходных вероятностей, классифицировать состояния цепи.

Р е ш е н и е. Фазовое пространство цепи $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

В том, что последовательность образует марковскую цепь, убеждаемся аналогично тому, как это делалось в примере 1.4.3.

Элементы матрицы одношаговых переходных вероятностей цепи

$$P\{\eta_{n+1} = j|\eta_n = i\} = \frac{P\{\eta_{n+1} = j, \eta_n = i\}}{P\{\eta_n = i\}} =$$

$$= \frac{P\{(\eta_n + 1)I_{\{1\}}(\xi_{n+1}) = j, \eta_n = i\}}{P\{\eta_n = i\}} =$$

$$= \frac{P\{(i + 1)I_{\{1\}}(\xi_{n+1}) = j, \eta_n = i\}}{P\{\eta_n = i\}} =$$

$$= \frac{P\{(i + 1)I_{\{1\}}(\xi_{n+1}) = j\}P\{\eta_n = i\}}{P\{\eta_n = i\}} =$$

$$= P\{(i + 1)I_{\{1\}}(\xi_{n+1}) = j\},$$

или

$$P_{ij} = P\{(i + 1)I_{\{1\}}(\xi_{n+1}) = j\},\ i, j \in X.$$

Матрица переходных вероятностей цепи

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & 0 & p & 0 & \ldots \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix},$$

см. также диаграмму переходов на рис. 1.4.1 (с. 61).

Цепь неприводима, непериодична.

Убедимся, что цепь возвратна. Для этого достаточно проверить, что состояние 0 возвратно, см. теорему солидарности —

теорема 1.3.2 (с. 38). Достаточным условием возвратности состояния 0 является расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}(n)$$

(см. теорему 1.2.2).

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$P_{0,0}(1) = q,\ P_{0,0}(2) = q,\ P_{0,0}(3) = q, \ldots, P_{0,0}(n) = q, \ldots$$

Действительно, для того чтобы найти $P_{0,0}(n+1)$ достаточно знать только первый столбец матрицы $\mathbb{P}(n)$, поскольку

$$\mathbb{P}(n+1) = \mathbb{P}\mathbb{P}(n),\ n = 1, 2, \ldots$$

А первый столбец матрицы $\mathbb{P}(n)$ имеет вид

$$(q \quad q \quad q \quad q \quad \ldots)'$$

— последовательно получаем первые столбцы матриц

$$\mathbb{P}(2) = \mathbb{P}\mathbb{P},\ \mathbb{P}(3) = \mathbb{P}\mathbb{P}(2),\ \mathbb{P}(4) = \mathbb{P}\mathbb{P}(3), \ldots$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} q = \infty.$$

Другое доказательство возвратности состояния 0:

$$P\{\theta_0 < \infty | \eta_0 = 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\theta_0 = n | \eta_0 = 0\} =$$

$$= P(\text{Р}) + P(\text{ГР}) + P(\text{ГГР}) + \ldots =$$

$$= q + pq + p^2 q + \ldots = q(1 + p + p^2 + \ldots) = q\frac{1}{1-p} = 1$$

(буква Г обозначает выпадение герба, буква Р — выпадение решетки).

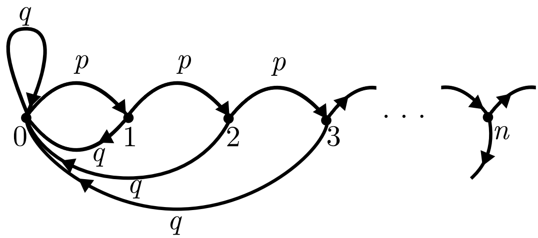

Рис. 1.4.1: Диаграмма переходов марковской цепи примера 1.4.4

З а м е ч а н и е. Марковская цепь $\{\eta_n\}$ описывает длину серии успехов до первой неудачи в последовательности независимых испытаний с вероятностью успеха p в одном испытании. Каждая новая серия начинается после неудачи.

П р и м е р 1.4.5 (случайное блуждание по двумерной решетке). *Рассмотрим симметричное случайное блуждание по двумерной целочисленной решетке: вероятности смещения на единицу вправо, влево, вверх, вниз равны по* $1/4$. *Исследовать на возвратность состояние* $O(0;0)$ *— начало координат.*

Р е ш е н и е. Возвращение из $O(0;0)$ в $O(0;0)$ обеспечивают траектории (пути), состоящие из i перемещений влево, i перемещений вправо, j перемещений вверх, j перемещений вниз (всего перемещений $2i+2j=2n$). Каждая такая траектория определяется словом длиной $2n$, составленным из i букв П (вправо), i букв Л (влево), j букв В (вверх), j букв Н (вниз).

Вероятность частице стартовав из $O(0;0)$ вернуться в $O(0;0)$ по данной траектории длиной $2n$ равна $(1/4)^{2n}$. А вероятность, стартовав из $O(0;0)$ вернуться в $O(0;0)$ по одной из траектории длиной $2n$, состоящей из i перемещений влево, i перемещений вправо, j перемещений вверх, j перемещений вниз равна

$$C_{2n}(i,i,j,j)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=\frac{(2n)!}{i!i!j!j!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n},$$

коэффициент при $(1/4)^{2n}$ равен числу слов длиной $2n$, составленных из букв П, Л, В, Н соответственно в количестве i,i,j,j. Вероятность $P_{00}(2n)$ возвращения из $O(0;0)$ в $O(0;0)$ равна

$$P_{00}(2n)=\sum_{(i,i,j,j):2i+2j=2n}\frac{(2n)!}{i!i!j!j!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{(i,i,j,j):i+j=n} \frac{(2n)!n!n!}{n!n!i!i!j!j!} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{(i,i,j,j):i+j=n} \frac{n!n!}{i!i!j!j!} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} C_{2n}^{n} \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_n^i = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} C_{2n}^{n} C_{2n}^{n},$$

воспользовались тождеством

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i C_n^i = C_{2n}^{n}.$$

Используя формулу Стирлинга (см. пример 1.2.1), получим

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} (C_{2n}^{n})^2 \sim \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \left(\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\right)^2 = \frac{1}{\pi n} \quad \text{при } n \to \infty.$$

Так что для симметричного случайного блуждания по двумерной целочисленной решетке при $n \to \infty$

$$P_{00}(2n) \sim \frac{1}{\pi n}. \qquad (1.4.1)$$

Ряд с общим членом $1/(\pi n)$ расходится, поэтому состояние $O(0;0)$, а вместе с ним и марковская цепь возвратная.

Установим использованное в доказательстве тождество

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^k = C_{2n}^{n}.$$

Число кратчайших путей из точки $O(0;0)$ в точку $A(n;n)$ равно C_{2n}^{n}. Каждый такой путь проходит через одну и только одну из точек $A_k(k;n-k)$, $0 \le k \le n$ (точки A_k лежат на отрезке, соединяющем точки $(0;n)$ и $(n;0)$). Число путей из точки $O(0;0)$ в точку $A_k(k;n-k)$ равно $C_{k+(n-k)}^{k} = C_n^k$, поэтому число путей из точки $O(0;0)$ в точку $A(n;n)$, проходящих через $A_k(k;n-k)$ равно $C_n^k C_n^k$ (в силу правила умножения).

Сложив количество путей, проходящих через каждую из точек $A_k(k; n-k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, получим общее количество путей из $O(0;0)$ в точку $A(n;n)$, т. е. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k C_n^k$. Тем самым тождество доказано.

Отметим, что в отличие от симметричного случайного блуждания по одномерной целочисленной решетке (для него $P_{00}(2n) \sim \sim 1/(\pi n)^{1/2}$, см. (1.2.6)) и по двумерной (для него $P_{00}(2n) \sim \sim 1/(\pi n)$, см. (1.4.1)), которые являются возвратными, симметричное случайное блуждание по трехмерной целочисленной решетке является невозвратным. Для последнего

$$P_{00}(2n) \sim C/n^{3/2}.$$

Невозвратность случайного блуждания по трехмерной целочисленной решетке в сравнении с блужданием по двумерной на неформальном языке означает, что человек, злоупотребивший спиртным, случайно блуждая по городу, с вероятностью 1 всегда вернется домой, а вот хлебнувший лишнего воробей, случайно блуждая в трехмерном пространстве, рискует домой не вернуться.

Задачи

Задача 1.1. Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Найти вероятность того, что:

1° цепь, стартовав из состояния 2, через два шага окажется в состоянии 1;

2° цепь, стартовав из состояния 3, через три шага вернется в состояние 3.

Найти распределение цепи через три шага после старта (в момент $t = 3$), если начальным распределением цепи (распределением в момент $t = 0$) является

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Ответы:

1° $P\{\xi_2 = 1 \,|\, \xi_0 = 2\} = P_{21}(2) = 2/9$;

2° $P\{\xi_3 = 3 \,|\, \xi_0 = 3\} = P_{33}(3) = 12/27$.

Распределение цепи через 3 шага после старта:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 20/81 & 19/81 & 42/81 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.2. Матрица одношаговых переходных вероятностей марковской цепи имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Распределение цепи в момент $t = 0$ (распределение случайной величины ξ_0) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти:

1° распределение цепи в момент $t = 2$;

2° вероятность того, что в моменты $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ цепь будет находиться соответственно в состояниях 2, 3, 1, 2;

3° вероятность того, что в моменты $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ цепь будет находиться соответственно в состояниях 3, 2, 1, 1, 3.

Ответы:

1° Распределение цепи в момент $t = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}351 & 0{,}491 & 0{,}158 \end{pmatrix}.$$

2° 0,016; 3° 0,0002.

Задача 1.3 (существенные и несущественные состояния). 1° Могут ли все состояния марковской цепи быть существенными? у конечной марковской цепи? у бесконечной? (привести примеры).

Ответ: да. У конечной неприводимой марковской цепи все состояния существенные. У случайного блуждания по целочисленной решетке, см. пример 1.2.1 (фазовое пространство цепи бесконечно) все состояния существенные.

2° Могут ли все состояния марковской цепи быть несущественными? (привести примеры).

Ответ: в бесконечной марковской цепи все состояния могут быть несущественными, в конечной — нет.

Примером марковской цепи, все состояния которой несущественные, может быть, например, марковская цепь с матрицей переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & 1/2^4 & 1/2^5 & \dots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & 1/2^4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

3° Могут ли в марковской цепи быть как существенные, так и несущественные состояния? (привести примеры).

Ответ: да, например, в марковской цепи с матрицей переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

4° Могут ли несущественные состояния марковской цепи быть сообщающимися? (привести пример).

Ответ: да. См. пример 1.3.2, состояния $1, 2, \dots, n-1$ несущественные сообщающиеся.

5° Могут ли несущественные и существенные состояния марковской цепи быть сообщающимися?

Ответ: нет, не могут. Пусть i — несущественное состояние, тогда найдется k такое, что $i \to k$, но i не достижимо из k. Пусть j — существенное состояние и $j \leftrightarrow i$, тогда $j \to i \to k$. Но j — существенное состояние, поэтому $k \to j$, а, следовательно, и $k \to j \to i$, т. е. i достижимо из k — противоречие.

6° Могут ли существенные состояния марковской цепи быть несообщающимися? (привести примеры).

Ответ: да, могут, если марковская цепь содержит больше одного класса эквивалентности. См. пример 1.3.2 (с. 37), состояния 0 и n существенные, но несообщающиеся.

7° Каждая марковская цепь имеет хотя бы один класс эквивалентности. Справедливо ли это утверждение?

Ответ: у конечной марковской цепи имеется хотя бы один класс эквивалентности, у бесконечной марковской цепи, вообще говоря, нет.

Задача 1.4 (нулевые, ненулевые состояния). 1° Могут ли все состояния неприводимой марковской цепи быть нулевыми? (привести примеры).

Ответ: да — в бесконечной марковской цепи. См. пример 1.2.1 (с. 32) и пример 1.4.5 (с. 61). Нет — в конечной марковской цепи, см. теорему 1.3.7 (с. 42).

2° Могут ли в конечной марковской цепи быть нулевые состояния? (привести примеры).

Ответ: да. Например, в марковской цепи с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

состояние 1 является нулевым.

3° Могут ли все состояния конечной марковской цепи быть нулевыми?

Ответ: нет. См. теорему 1.3.7 (с. 42).

4° Могут ли в конечной марковской цепи все состояния быть ненулевыми? Если да, то что необходимо потребовать от такой цепи?

Ответ: да. Цепь не должна иметь несущественных состояний.

Задача 1.5 (нулевые и возвратные состояния). Может ли неприводимая марковская цепь быть

1° нулевой возвратной;

2° нулевой невозвратной?

Решение. Заметим, что в конечной неприводимой марковской цепи все состояния ненулевые, поэтому неприводимую нулевую марковскую цепь надо искать среди бесконечных цепей.

Случайное блуждание по целочисленной решетке, см. пример 1.2.1 (с. 32), является примером неприводимой нулевой марковской цепи, поскольку

$$P_{00}(2n) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

При этом цепь может быть как возвратной (при $p = q = 1/2$), так и невозвратной (при $p \neq q$).

3° Может ли неприводимая марковская цепь, сходясь по вероятности к ∞, с вероятностью 1 возвращаться в каждое свое состояние бесконечно много раз? Если да — привести примеры.

Ответ: да, например, случайное блуждание по целочисленной решетке, когда $p = q = 1/2$. С одной стороны, случайное блуждание, как нулевая марковская цепь, сходится по вероятности к бесконечности, а с другой стороны, при $p = q = 1/2$ оно возвратно и, следовательно, каждое свое состояние посещает бесконечно много раз с вероятностью 1, см. теорему 1.3.11 (с. 48).

4° Доказать, что несущественное состояние является невозвратным.

5° Доказать, что несущественное состояние является нулевым.

Задача 1.6. Доказать, что неприводимая конечная марковская цепь возвратна.

У к а з а н и е. Достаточно доказать, что такая цепь ненулевая.

Задача 1.7. 1° Доказать, что в невозвратной неприводимой марковской цепи с фазовым пространством

$$X = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

для любого K

$$P\{|\xi_n| > K\} \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Другими словами, неприводимая невозвратная марковская цепь с фазовым пространством $X = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ при $n \to \infty$ "уходит в бесконечность" (по вероятности).

У к а з а н и е. Невозвратная марковская цепь является нулевой, см. теорему 1.3.4 (с. 40).

Задача 1.8. Конечная неприводимая марковская цепь является ненулевой, а может ли неприводимая бесконечная марковская цепь быть ненулевой? (если да, то привести примеры).

Р е ш е н и е. Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, \dots\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

является неприводимой ненулевой.

У матрицы $\mathbb{P}(2)$ первый столбец имеет вид $(1\,0\,0\,\dots)'$, а, следовательно, такой же вид имеет и столбец и у матрицы $\mathbb{P}(2n)$, $n = 2, 3, 4, \dots$ Так что $P_{11}(2n) = 1$, $n = 1, 2, \dots$, поэтому цепь ненулевая.

Задача 1.9. Привести пример неприводимой возвратной марковской цепи, которая была бы нулевой. Какое может быть число состояний этой цепи: 1) только конечное, 2) только бесконечное, 3) может быть как конечным, так и бесконечным?

О т в е т: случайное блуждание по одномерной целочисленной решетке при $p = q = 1/2$ является возвратным. При этом цепь нулевая, так как

$$P_{00}(2n) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \to 0$$

при $n \to \infty$ (см. (1.2.6)).

Неприводимая возвратная нулевая цепь может быть только бесконечной.

Задача 1.10. Доказать, что

$$P_{ij}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}(k) P_{jj}(n-k), \; n = 0, 1, \ldots$$

Воспользовавшись последним равенством, установить, что

$$\tilde{P}_{ij}(s) = \tilde{F}_{ij}(s)\tilde{P}_{jj}(s)$$

(см. также (1.3.8), (1.3.9)).

Указание. См. в теореме 1.2.2 доказательство равенства

$$P_{ii}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k).$$

Задача 1.11. Симметричную игральную кость подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число очков, выпавших при k-м подбрасывании кости, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательности случайных величин

1) $\zeta_n = \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}, \; n = 1, 2, \ldots;$

2) $\eta_{n+1} = \min\{\eta_n + 1, \xi_n\}, \; \eta_1 = \xi_1, \; n = 1, 2, \ldots;$

3) $\gamma_{n+1} = \min\{\gamma_n + 2, \xi_n\}, \; \gamma_1 = \xi_1, \; n = 1, 2, \ldots;$

4) $\chi_{n+1} = \max\{\chi_n, \xi_n\}$, $\chi_1 = \xi_1$, $n = 1, 2, \ldots;$

5) $\varphi_{n+1} = \max\{(\varphi_n - 2)^+, \xi_n\}$, $\varphi_1 = \xi_1$, $n = 1, 2, \ldots;$

6) $\psi_{n+1} = \max\{(\psi_n - 1), \xi_n\}$, $\psi_1 = \xi_1, \; n = 1, 2, \ldots,$

где $x^+ = \max\{0, x\}$ — положительная часть числа x.

Показать, что перечисленные последовательности образуют марковские цепи, найти их матрицы переходных вероятностей, классифицировать состояния этих цепей.

Ответ. В том, что последовательности образуют марковские цепи, убеждаемся аналогично тому, как мы это делали в примере 1.4.3.

1) Фазовое пространство цепи $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Матрица одношаговых переходных вероятностей цепи $\{\zeta_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = [P\{\min\{i, \xi_n\} = j\}], \; i, j = 1, 2, \ldots 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Состояния $1, 2, \ldots, 6$ не сообщаются, состояния $2, 3, \ldots, 6$ несущественные. Состояние 1 образует возвратный непериодический класс эквивалентности.

2) Фазовое пространство цепи $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Матрица одношаговых переходных вероятностей цепи $\{\eta_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = [P\{\min\{i+1, \xi_n\} = j\}], \; i, j = 1, 2, \ldots 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Цепь $\{\eta_n\}$ неприводимая, возвратная, непериодическая.

3) Фазовое пространство цепи $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Матрица одношаговых переходных вероятностей цепи $\{\gamma_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = [P\{\min\{i+2, \xi_n\} = j\}], \; i, j = 1, 2, \ldots 6.$$

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Цепь $\{\gamma_n\}$ неприводимая, возвратная, непериодическая.

4) Фазовое пространство цепи $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\chi_n\}$

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = [P\{\max\{i, \xi_n\} = j\}], \; i, j = 1, 2, \ldots, 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Состояния $1, 2, \ldots, 5$ — несущественные, состояние 6 образует класс эквивалентности.

5) Фазовое пространство цепи $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Фазовое пространство цепи $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\varphi_n\}$

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = \left[P\{\max\{(i-2)^+, \xi_n\} = j\}\right], \ i, j = 1, 2, \ldots, 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Цепь неприводимая, возвратная, непериодическая.

6) Фазовое пространство цепи $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\psi_n\}$

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = \left[P\{\max\{(i-1)^+, \xi_n\} = j\}\right], \ i, j = 1, 2, \ldots 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Цепь неприводимая, возвратная, непериодическая.

Задача 1.12. Симметричную игральную кость подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число выпавших очков при k-м подбрасывании кости, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательности случайных величин

1) $\eta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \ldots$;
2) $\zeta_{n+1} = (\zeta_n - 1)^+ + \xi_n$, $\zeta_1 = \xi_1$, $n = 1, 2, \ldots$;
3) $\gamma_{n+1} = (\gamma_n - 2)^+ + \xi_n$, $\gamma_1 = \xi_1$, $n = 1, 2, \ldots$

Показать, что последовательности $\{\eta_n\}$, $\{\zeta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ образуют марковские цепи. Найти матрицы переходных вероятностей, классифицировать состояния цепей.

Ответ. В том, что $\{\eta_n\}$, $\{\zeta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ образуют марковские цепи, убеждаемся аналогично тому, как мы это делали в примере 1.4.3.

1) Фазовое пространство цепи $X = \{1, 2, \ldots\}$. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\eta_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = [P\{i + \xi_n = j\}]\,,\ i, j = 1, 2, \ldots,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & \ldots \\ & & & & \vdots & & & & & \end{bmatrix}.$$

Все состояния марковской цепи $\{\eta_n\}$ несущественные.

2) Фазовое пространство цепи $X = \{1, 2, \ldots\}$. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\zeta_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \left[P\{(i-1)^+ + \xi_n = j\}\right],\ i, j = 1, 2, \ldots,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & \ldots \\ & & & & \vdots & & & & & \end{bmatrix}.$$

Все состояния марковской цепи несущественные.

3) Фазовое пространство цепи $X = \{1, 2, \ldots\}$. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\gamma_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \left[P\{(i-2)^+ + \xi_n = j\}\right],\ i, j = 1, 2, \ldots,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & \dots \\ & & & & \vdots & & & & & \end{bmatrix}.$$

Цепь неприводимая, непериодическая.

Задача 1.13. Монету, вероятность выпадения герба которой равна p $(0 < p < 1)$, подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число выпавших гербов при k-м подбрасывании монеты, $k = 1, 2, \dots$ Рассмотрим последовательности случайных величин

1) $\eta_{n+1} = \max\{\eta_n, \xi_n\},\ \eta_1 = \xi_1,\ n = 1, 2, \dots;$

2) $\zeta_{n+1} = \max\{(\zeta_n - 1)^+, \xi_n\},\ \zeta_1 = \xi_1,\ n = 1, 2, \dots;$

3) $\gamma_{n+1} = \min\{\gamma_n, \xi_n\},\ \gamma_1 = \xi_1,\ n = 1, 2, \dots;$

4) $\varphi_{n+1} = \min\{\varphi_n + 1, \xi_n\},\ \varphi_1 = \xi_1,\ n = 1, 2, \dots;$

5) $\psi_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k,\ n = 1, 2, \dots$

Показать, что последовательности $\{\eta_n\}$, $\{\zeta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ образуют марковские цепи, найти их матрицы переходных вероятностей, классифицировать состояния.

Ответ. В том, что $\{\eta_n\}$, $\{\zeta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ образуют марковские цепи, убеждаемся аналогично тому, как это делалось в примере 1.4.3.

1) Фазовое пространство цепи $X = \{0, 1\}$. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\eta_n\}$:

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = [P\{\max\{i, \xi_n\} = j\}],\ i, j = 0, 1,$$

подробнее

$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Фазовое пространство цепи $X = \{0, 1\}$. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\zeta_n\}$:

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = \left[P\{\max\{(i-1)^+, \xi_n\} = j\}\right],\ i, j = 0, 1,$$

подробнее

$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{bmatrix}.$$

3) Фазовое пространство цепи $X = \{0, 1\}$. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\gamma_n\}$:

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = [P\{\min\{i, \xi_n\} = j\}], \ i, j = 0, 1,$$

подробнее

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-p & p \end{bmatrix}.$$

4) Фазовое пространство цепи $X = \{0, 1\}$. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\varphi_n\}$:

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = [P\{\min\{i+1, \xi_n\} = j\}], \ i, j = 0, 1,$$

подробнее

$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{bmatrix}.$$

5) Фазовое пространство цепи $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\psi_n\}$

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = [P\{i + \xi_n = j\}], \ i, j = 1, 2, \ldots,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1-p & p & 0 & \ldots \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

Все состояния марковской цепи $\{\psi_n\}$ несущественные.

Задача 1.14. Марковская цепь с фазовым пространством $\{1, 2, 3, 4\}$ задана матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния марковской цепи. Убедиться, что цепь периодична. Пусть t — период цепи. Представить фазовое пространство в виде:

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{t-1}.$$

В $\mathbb{Q}$-цепи ($\mathbb{Q} = \mathbb{P}(t)$) найти матрицу переходных вероятностей для каждого из классов эквивалентности $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$. Классифицировать состояния в классах эквивалентности G_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, t-1$.

Задача 1.15. Марковская цепь с фазовым пространством $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ задана матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния марковской цепи. Убедиться, что цепь периодична. Пусть t — период цепи. Представить фазовое пространство в виде:

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{t-1}.$$

В $\mathbb{Q}$-цепи ($\mathbb{Q} = \mathbb{P}(t)$) найти матрицу переходных вероятностей для каждого из классов эквивалентности $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$. Классифицировать состояния в классах эквивалентности G_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, t-1$.

У к а з а н и е. Цепь неприводимая периодическая с периодом 2.

$$G = G_0 \cup G_1 = \{1, 2, 5\} \cup \{3, 4\}.$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P}(2) = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 7/8 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 0 & 0 & 5/8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 5/8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Q}_1 = \begin{bmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Задача 1.16. Монету, вероятность выпадения герба которой p, подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_n — разность между числом выпавших гербов и решеток после n-го подбрасывания.

Убедиться, что последовательность ξ_n образует марковскую цепь, найти ее матрицу переходных вероятностей.

Указание. Пусть $\xi_n = i$ — разность между числом выпавших гербов и решеток. Если в $(n+1)$-м подбрасывании выпал герб, то число выпавших гербов увеличивается на 1, число решеток остается тем же, и, следовательно, $\xi_{n+1} = i+1$, а

$$P\{\xi_{n+1} = i+1 | \xi_n = i\} = p.$$

Если выпала решетка, то

$$P\{\xi_{n+1} = i-1 | \xi_n = i\} = 1-p.$$

Задача 1.17. В двух урнах находится $2N$ шаров (по N в каждой), среди них N белых и N черных. Из каждой урны наудачу выбирают по шару и перекладывают из одной урны в другую. Пусть ξ_n — число белых шаров в первой урне после n-го перекладывания (в момент n).

Убедиться, что последовательность ξ_n образует марковскую цепь, найти ее матрицу переходных вероятностей.

Указание. Очевидно, что состояние ξ_{n+1} системы — число белых шаров в первой урне после $(n+1)$-го перекладывания — определяется состоянием ξ_n системы в момент n и не зависит от того, сколько белых шаров было в первой урне до момента n. Поэтому последовательность $\{\xi_n\}$ образует марковскую цепь.

Пусть $\xi_n = k\,(1 \le k \le N-1)$. Значение $\xi_{n+1} = k+1$, если из первой урны выбран черный шар, а из второй — белый, вероятность этого события равна $(N-k)^2/N^2$. Значение $\xi_{n+1} = k-1$, если из первой урны выбран белый шар, а из второй — черный, вероятность этого события равна k^2/N^2. Значение $\xi_{n+1} = k$, если из первой и второй урны выбраны шары одного цвета, вероятность этого события равна $2k(N-k)/N^2$. Если $\xi_n = 0$, то $\xi_{n+1} = 1$; если $\xi_n = N$, то $\xi_{n+1} = N-1$. Для $0 < k < N$

$$P_{k,k+1} = (N-k)^2/N^2,\ P_{k,k-1} = k^2/N^2,\ P_{k,k} = 2k(N-k)/N^2,$$

$$P_{0,1} = 1,\ P_{N,N-1} = 1.$$

Для остальных пар i, j значения $P_{i,j} = 0$.

Задача 1.18. Организм в конце своей жизни производит случайное число ξ потомков. Распределение случайной величины ξ:

$$P\{\xi = k\} = a_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.4.2}$$

Каждый из потомков в конце своей жизни независимо от других потомков производит потомство, численность которого имеет распределение (1.4.2). (Мы будем предполагать, что продолжительность жизни одинакова для всех организмов.)

Обозначим через ζ_n численность популяции в n-м поколении, $n = 1, 2, \ldots$

Убедиться, что последовательность $\{\zeta_n\}$ образует марковскую цепь, найти ее матрицу переходных вероятностей (последовательность $\{\zeta_n\}$ известна под названием ветвящегося процесса).

Указание. Пусть численность популяции в n-м поколении равна i, т. е. $\zeta_n = i$. Каждый из i членов популяции производит ξ потомков, в результате чего численность ζ_{n+1} популяции в $(n+1)$-м поколении становится равной $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$P_{i,j} = P\{\zeta_{n+1} = j | \zeta_n = i\} = P\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i = j\}.$$

Эта вероятность равна значению в точке j распределения суммы

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i$$

независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i$, распределение каждой из которых определяется равенством (1.4.2).

Задача 1.19. Доказать, что равенство (1.1.9) при каждом фиксированном n задает вероятностное распределение на множестве последовательностей $i_0, i_1, \ldots, i_n$ целых неотрицательных чисел.

Глава 2

Предельные теоремы для марковских цепей

2.1 Эргодическая теорема

Дискретное уравнение восстановления. Ключевым в анализе предельного поведения марковской цепи является следующий результат.

Теорема 2.1.1 (уравнение восстановления). *Пусть F — вероятностное распределение, сосредоточенное на множестве целых неотрицательных чисел такое, что н.о.д. тех k, для которых*

$$F(\{k\}) = a_k > 0, \ k = 0, 1, \ldots,$$

равен 1, и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ — сходящийся ряд с неотрицательными членами.

Ограниченное решение $u = (u_0, u_1, \ldots)$ уравнения восстановления

$$u_n - \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} = b_n, \ n = 0, 1, \ldots, \tag{2.1.1}$$

имеет предел, причем

$$\lim_n u_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} k a_k, \tag{2.1.2}$$

если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k a_k < \infty$, и

$$\lim_n u_n = 0,$$

если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ka_k = \infty.$

Доказательство. Отметим, что согласно условию теоремы

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1,$$

поскольку $F(\{k\}) = a_k$, $k = 0, 1, \ldots,$ — вероятностное распределение, и

$$\sup_n |u_n| \le M < \infty,$$

поскольку решение $u = (u_0, u_1, \ldots)$ уравнения восстановления ограничено.

Мы докажем теорему в предположении, что $a_1 > 0$, но она имеет место и в приведенной выше формулировке.

В условиях теоремы решение уравнения восстановления неотрицательно, т. е. $u_k \ge 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Действительно, из $a_1 > 0$ следует $0 < 1 - a_0$. Полагая в (2.1.1) последовательно $n = 0, 1, 2 \ldots,$ получаем: при $n = 0$

$$u_0 - a_0 u_0 = b_0,\ u_0(1 - a_0) = b_0,$$

а так как $0 < 1 - a_0$, $b_0 \ge 0$, то $u_0 \ge 0$; при $n = 1$

$$u_1 - (a_0 u_1 + a_1 u_0) = b_1,\ u_1(1 - a_0) = b_1 + a_1 u_0,$$

а так как $b_1 \ge 0$, $a_1 \ge 0$, $u_0 \ge 0$, то и $u_1 \ge 0$. И так далее (по индукции) получаем, что $u_n \ge 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

Для доказательства теоремы установим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{\infty} ka_k \le \underline{\lim}\, u_n \le \overline{\lim}\, u_n \le \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{\infty} ka_k, \quad (2.1.3)$$

если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ka_k < \infty$, и $0 \le \underline{\lim}\, u_n \le \overline{\lim}\, u_n \le 0$, если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ka_k = \infty$.

Обозначим

$$\mu = \underline{\lim}\, u_n,\ \lambda = \overline{\lim}\, u_n,$$

и установим следующее утверждение.

Если $\{u_{n_j}\}$ — *подпоследовательность последовательности* $\{u_n\}$, *для которой*

$$\lim_{n_j} u_{n_j} = \lambda = \overline{\lim}\, u_n,$$

то и

$$\lim_{n_j} u_{n_j-d} = \lambda \tag{2.1.4}$$

для каждого натурального d.

Убедимся в этом. Сначала покажем, что

$$\lim_{n_j} u_{n_j-1} = \lambda.$$

Предположим противное, т. е. u_{n_j-1} не сходится к λ. Тогда найдется $\lambda' < \lambda$ (найдется окрестность $(\lambda', +\infty)$ точки λ), что для бесконечного числа значений индекса n_j

$$u_{n_j-1} \le \lambda' < \lambda. \tag{2.1.5}$$

Для этих индексов оценим u_{n_j} сверху, воспользовавшись тем, что

$$u_{n_j} = \sum_{k=0}^{n_j} a_k u_{n_j-k} + b_{n_j}$$

(см. (2.1.1)) или

$$u_{n_j} = \sum_{k=0, k\neq 1}^{N} a_k u_{n_j-k} + a_1 u_{n_j-1} + \sum_{k=N+1}^{n_j} a_k u_{n_j-k} + b_{n_j} \tag{2.1.6}$$

(N выберем далее). Оценим каждое слагаемое в правой части равенства (2.1.6), начиная с последнего.

Пусть $\varepsilon > 0$. При достаточно больших n_j значение $b_{n_j} \le \varepsilon$, поскольку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ сходится.

Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и ограниченности последовательности $\{u_n\}$ следует, что найдется такое N, что

$$\sum_{k=N+1}^{n_j} a_k u_{n_j-k} \le M \sum_{k=N+1}^{n_j} a_k \le M \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \le \varepsilon,$$

зафиксируем это N.

Поскольку $u_{n_j-1} \le \lambda'$ (см. (2.1.5)), то

$$a_1 u_{n_j-1} \le a_1 \lambda'.$$

И, наконец, оценим последнее слагаемое. Поскольку $\lambda = \overline{\lim}\, u_n$, то, начиная с некоторого n_0 $(n > n_0)$,

$$u_n \le \lambda + \varepsilon.$$

Поэтому при достаточно больших n_j, таких, что $n_j - k \ge n_0$ (здесь $k \le N$), значения $u_{n_j-k} \le \lambda + \varepsilon$ и, следовательно,

$$\sum_{k=0,\, k\ne 1}^{N} a_k u_{n_j-k} \le (\lambda+\varepsilon) \sum_{k=0,\, k\ne 1}^{N} a_k \le$$

$$\le (\lambda+\varepsilon) \sum_{k=0,\, k\ne 1}^{\infty} a_k = (\lambda+\varepsilon)(1-a_1).$$

“Собирая” все оценки, получим

$$u_{n_j} \le (\lambda+\varepsilon)(1-a_1)+a_1\lambda'+\varepsilon+\varepsilon = \lambda(1-a_1)+\varepsilon(1-a_1)+a_1\lambda'+2\varepsilon \le$$

$$\le \lambda - \lambda a_1 + \lambda' a_1 + 3\varepsilon = \lambda - a_1(\lambda-\lambda') + 3\varepsilon.$$

В частности, если

$$3\varepsilon = \frac{1}{2}\, a_1(\lambda-\lambda'),$$

то для бесконечного числа индексов n_j имеем

$$u_{n_j} \le \lambda - \frac{1}{2} a_1(\lambda-\lambda'),$$

т. е. бесконечное число элементов последовательности $\{u_{n_j}\}$, сходящейся к λ, не принадлежит окрестности точки λ. Из полученного противоречия и следует, что если $u_{n_j} \to \lambda$, то и $u_{n_j-1} \to \lambda$.

Повторяя те же рассуждения применительно к последовательности $\{u_{n_j-1}\}$, убеждаемся, что и последовательность $\{u_{n_j-2}\}$ сходится к λ и т. д.

Так что, *если последовательность $\{u_{n_j}\}$ сходится к λ, то и последовательность $\{u_{n_j-d}\}$ также сходится к λ для каждого натурального $d > 0$.*

Аналогичное утверждение имеет место для $\mu = \underline{\lim}\, u_n$.

Если подпоследовательность $\{u_{n_j}\}$ последовательности $\{u_n\}$, сходится к μ:

$$\lim_{n_j} u_{n_j} = \mu = \underline{\lim}\, u_n,$$

то и

$$\lim_{n_j} u_{n_j-d} = \mu = \underline{\lim}\, u_n \tag{2.1.7}$$

для каждого натурального d.

Далее нам понадобится запись уравнения восстановления

$$u_n - \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} = b_n, \ n = 0, 1, \ldots,$$

в терминах остатков:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots, \ n = 0, 1, \ldots,$$

ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Очевидно,

$$r_0 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = 1 - a_0.$$

$$a_n = r_{n-1} - r_n, \ n = 1, 2, \ldots,$$

$$a_0 = 1 - r_0.$$

Из уравнения восстановления (см. (2.1.1)) при $n = 0$ имеем

$$u_0 - u_0 a_0 = b_0,$$

в терминах остатков

$$r_0 u_0 = b_0, \tag{2.1.8}$$

а при $n \geq 1$ имеем

$$u_n - (a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \ldots + a_{n-1} u_1 + a_n u_0) = b_n,$$

в терминах остатков —

$$u_n(1-a_0)-((r_0-r_1)u_{n-1}+(r_1-r_2)u_{n-2}+\ldots+(r_{n-1}-r_n)u_0)=b_n$$

или

$$r_0u_n+r_1u_{n-1}+\ldots+r_nu_0-(r_0u_{n-1}+\ldots+r_{n-1}u_0)=b_n.$$

Обозначив

$$r_0u_n+r_1u_{n-1}+\ldots+r_nu_0=A_n,\ n=0,1,2,\ldots,$$

перепишем уравнение восстановления так:

$$A_n-A_{n-1}=b_n,\ n=1,2,\ldots,$$

при $n=0$

$$A_0=b_0$$

(см. равенство (2.1.8)), или, сложив почленно левые и правые части, так:

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}b_k,\ n=0,1,\ldots,$$

или

$$r_0u_n+r_1u_{n-1}+\ldots+r_nu_0=\sum_{k=0}^{n}b_k,\ n=0,1,\ldots$$

подробнее,

$$r_0u_n+r_1u_{n-1}+\ldots+r_Nu_{n-N}+r_{N+1}u_{n-(N+1)}+\ldots+r_nu_0=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}b_k,\ n=0,1,\ldots \tag{2.1.9}$$

(уравнение восстановления в терминах остатков).

На следующем этапе доказательства, используя запись (2.1.9) уравнения восстановления в терминах остатков, предельным переходом по n получим, что

$$\underline{\lim}\,u_n=\mu=\lambda=\overline{\lim}\,u_n.$$

Пусть $\{n_j\}$ — последовательность индексов, для которых

$$\lim_{n_j}u_{n_j}=\lambda,$$

а, следовательно, и
$$\lim_{n_j} u_{n_j-d} = \lambda$$

для каждого натурального d. Из (2.1.9) при $n = n_j$ имеем

$$r_0 u_{n_j} + r_1 u_{n_j-1} + \ldots + r_N\, u_{n_j-N} \le \sum_{k=0}^{n_j} b_k.$$

Переходя к пределу при $n_j \to \infty$ в правой и левой частях последнего неравенства, получаем

$$\lambda(r_0 + r_1 + \ldots + r_N) \le \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Отсюда
$$\lambda \le \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Big/ \sum_{k=0}^{N} r_k. \tag{2.1.10}$$

(Заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k a_k$.)

Далее рассмотрим отдельно два случая:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k = +\infty; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} r_k < \infty.$$

Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k = +\infty$, то переходя в неравенстве (2.1.10) к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$\lambda \le 0,$$

что с вместе с неравенствами $0 \le \mu \le \lambda \le 0$ доказывает теорему.

Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k < \infty$, то из (2.1.10) имеем

$$\lambda \le \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} r_k.$$

Установим, что имеет место и неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{\infty} r_k \le \mu.$$

Пусть n_j — последовательность индексов, для которых

$$\mu = \lim_{n_j} u_{n_j},$$

а, следовательно, и

$$\lim_{n_j} u_{n_j - d} = \mu$$

для каждого натурального $d > 0$. Из (2.1.9) при значениях $n = n_j$, учитывая, что $\sup\limits_k |u_k| \le M$, имеем

$$r_0 u_{n_j} + r_1 u_{n_j-1} + \ldots + r_N\, u_{n_j-N} + M(r_{N+1} + \ldots + r_{n_j}) \ge \sum_{k=0}^{n_j} b_k.$$

Переходя к пределу в левой и правой частях последнего неравенства, сначала при $n_j \to \infty$:

$$\mu(r_0 + r_1 + \ldots + r_N) + M \sum_{k=N+1}^{\infty} r_k \ge \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

а затем при $N \to \infty$ получаем

$$\mu \sum_{k=0}^{\infty} r_k \ge \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

$\Big(\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} r_k = 0$ — поскольку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k$ сходится$\Big)$ или

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{\infty} r_k \le \mu.$$

Что вместе с ранее полученным неравенством

$$\lambda \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{\infty} r_k$$

и доказывает теорему.

Эргодическая теорема для непериодических цепей. Напомним, что для каждого состояния i марковской цепи $\{\xi_k\}$

$$P_{ii}(0) = 1, \; P_{ii}(n) = P\{\xi_n = i | \xi_0 = i\}, \; n = 1, 2, \ldots,$$

$$f_{ii}(0) = 0, \; f_{ii}(1) = P\{\xi_1 = i | \xi_0 = i\} = P_{ii}(1),$$

$$f_{ii}(n) = P\{\xi_0 = i, \xi_n = i, \xi_\nu \neq i, \; \nu = 1, 2, \ldots, n-1 | \xi_0 = i\},$$

$n = 2, 3, \ldots$, причем последовательности $\{P_{ii}(n)\}$ и $\{f_{ii}(n)\}$ связаны соотношением

$$P_{ii}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k), \; n = 1, 2, \ldots,$$

(см. (1.2.4)), θ_i — момент первого возвращения в состояние i, его математическое ожидание

$$M\theta_i = \sum_{k=0}^{\infty} k f_{ii}(k).$$

Т е о р е м а 2.1.2 (эргодическая). *В неприводимой возвратной непериодической марковской цепи для любых состояний i, j существуют $\lim\limits_n P_{ii}(n)$, $\lim\limits_n P_{ji}(n)$ и*

$$\lim_n P_{ji}(n) = \lim_n P_{ii}(n),$$

причем

$$\lim_n P_{ii}(n) = \frac{1}{M\theta_i},$$

если среднее время возвращения $M\theta_i < \infty$, и

$$\lim_n P_{ii}(n) = 0,$$

если среднее время возвращения $M\theta_i = \infty$.

Доказательство. Для каждого фиксированного состояния i марковской цепи

$$P_{ii}(0) = 1,\ P_{ii}(n) - \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k) = 0,\ n = 1, 2, \ldots, \quad (2.1.11)$$

причем поскольку по условию теоремы цепь возвратна, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}(k) = 1,$$

а поскольку цепь непериодична, то наибольший общий делитель тех k, для которых $P_{ii}(k) > 0$ равен 1, не нарушая общности, будем считать, что $P_{ii}(1) > 0$, а вместе с этим и $f_{ii}(1) = P_{ii}(1) > > 0$.

Равенства (2.1.11) обозначают, что последовательность

$$u_n = P_{ii}(n),\ n = 0, 1 \ldots,$$

является ограниченным решением уравнения восстановления

$$u_n - \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} = b_n,\ n = 0, 1, \ldots,$$

у которого

$$b_0 = 1,\ b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$a_k = f_{ii}(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем наибольший общий делитель тех k, для которых $a_k > 0$, равен 1. Поэтому согласно теореме 2.1.1 ограниченное решение $\{P_{ii}(n)\}$ уравнения восстановления имеет предел, причем

$$\lim_{n} P_{ii}(n) = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} k f_{ii}(k)} = \frac{1}{M\theta_i},$$

если $M\theta_i < \infty$, и

$$\lim_{n} P_{ii}(n) = 0,$$

если $M\theta_i = \infty$.

Установим ещё, что $\lim\limits_n P_{ji}(n)$ существует и

$$\lim_n P_{ji}(n) = \lim_n P_{ii}(n).$$

Имеет место следующее легко проверяемое соотношение:

$$P_{ji}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ji}(k) P_{ii}(n-k),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

которое в обозначениях $P_{ji}(n) = y_n,\ P_{ii}(n) = x_n,\ f_{ji}(k) = b_k$, перепишем так:

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} b_k x_{n-k},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем, поскольку цепь возвратная, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ji}(k) = f_{ji}^* = 1,$$

см. теорему 1.3.10.

Покажем, что если $x_n \to c$ при $n \to \infty$ ($|x_n| \le 1$ и $|c| \le 1$), то и $y_n \to c$ при $n \to \infty$. Действительно,

$$y_n - c = \sum_{k=0}^{n} b_k x_{n-k} - c = \sum_{n=0}^{n} b_k x_{n-k} - c \sum_{k=0}^{\infty} b_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_k (x_{n-k} - c) - c \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} b_k (x_{n-k} - c) + \sum_{k=N+1}^{n} b_k (x_{n-k} - c) - c \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Отсюда

$$|y_n - c| \le \sum_{k=0}^{N} b_k |x_{n-k} - c| + \sum_{k=N+1}^{n} b_k |x_{n-k} - c| + c \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Оценим правую часть, начиная с третьей суммы. Пусть $\varepsilon > 0$. Третья сумма при достаточно больших n меньше ε как остаток сходящегося ряда. Во второй сумме выберем N так, чтобы

$$\sum_{k=N+1}^{n} b_k|x_{n-k} - c| \leq 2\sum_{k=N+1}^{n} b_k \leq 2\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k \leq \varepsilon$$

и и это N зафиксируем. И, наконец, поскольку последовательность $\{x_l\}$ сходится к c, то при достаточно больших n (учитывая, что $k \leq N$)

$$\sum_{k=0}^{N} b_k|x_{n-k} - c| \leq \varepsilon.$$

А вместе с этим при достаточно больших n и

$$|y_n - c| \leq 3\varepsilon.$$

Тем самым теорема доказана.

Следствие. *В ненулевой неприводимой непериодической марковской цепи для любых состояний i, j существуют $\lim_n P_{ii}(n)$, $\lim_n P_{ji}(n)$ и*

$$\lim_n P_{ji}(n) = \lim_n P_{ii}(n),$$

причем среднее время возвращения

$$M\theta_i = \sum_{k=0}^{\infty} kf_{ii}(k)$$

конечно и

$$\lim_n P_{ii}(n) = \frac{1}{M\theta_i}.$$

Доказательство. Так как цепь ненулевая, то она возвратна, и в силу эргодической теоремы существуют и равны $\lim_n P_{ii}(n)$, $\lim_n P_{ji}(n)$.

Далее, среднее время возвращения $M\theta_i$ в состояние i конечно — если бы $M\theta_i = \infty$, то в силу эргодической теоремы $\lim_n P_{ii}(n) = 0$, но последовательность $P_{ii}(n)$ не стремится к нулю (цепь ненулевая). В силу эргодической теоремы

$$\lim_n P_{ii}(n) = \frac{1}{M\theta_i}.$$

Эргодическое распределение. Множество существенных состояний марковской цепи распадается на непересекающиеся классы сообщающихся между собой состояний — классы эквивалентности (теорема 1.3.1), каждый из которых является неприводимой марковской цепью, поэтому для возвратных непериодических классов имеет место эргодическая теорема.

Определение. Пусть C — возвратный непериодический класс. Вероятностное распределение $\{\pi_j\}$, заданное на классе C равенствами

$$\pi_j = \lim_n P_{jj}(n), \ j \in C,$$

называется *эргодическим.* Если при этом хотя бы для одного $i \in C$ значение $\pi_i > 0$, то класс C называется *сильно эргодическим* или *возвратным ненулевым*, если хотя бы для одного $k \in C$ значение $\pi_k = 0$, то класс называется *слабо эргодическим* или *возвратным нулевым.*

Определение эргодического распределения, сильно эргодического (возвратного ненулевого) и слабо эргодического (возвратного нулевого) классов корректно.

Действительно, из

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(n) = 1$$

имеем $\sum\limits_{j=0}^{N} P_{ij}(n) \leq 1$. Переходя в последнем неравенстве к пределу сначала по n, а затем по N, получим

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \leq 1,$$

т. е. $\{\pi_j\}$ является вероятностным распределением (собственным[1] или несобственным).

Далее, для любых $i, j \in C$

$$P_{jj}(n+s+m) \geq P_{ji}(n)P_{ii}(s)P_{ij}(m) \tag{2.1.12}$$

[1]Распределение $\{\pi_j\}$ называют *собственным* вероятностным распределением, если $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ и *несобственным*, если $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \pi_j < 1$.

(см. следствие 3 из уравнения Колмогорова — Чепмена). В силу неприводимости класса C числа n и m можно выбрать так, что $P_{ji}(n) > 0$, $P_{ij}(m) > 0$. Переходя в неравенстве (2.1.12) к пределу при $s \to \infty$, получаем

$$\pi_j \geq P_{ji}(n)\pi_i P_{ij}(m).$$

Поэтому, если для некоторого i значение $\pi_i > 0$, то $\pi_j > 0$ и для каждого другого $j \in C$; если для некоторого j значение $\pi_j = 0$, то для всех $i \in C$ значение $\pi_i = 0$.

Заметим, что у нулевого класса эквивалентности C эргодическое распределение всегда существует, поскольку для каждого состояния j из нулевого класса C

$$\lim_n P_{jj}(n) = 0.$$

Теорема 2.1.3 (о предельном распределении марковской цепи). *Распределение неприводимой возвратной непериодической марковской цепи всегда сходится и его пределом является эргодическое распределение:*

$$\lim_n P\{\xi_n = k\} = \pi_k,\ k = 0, 1, \dots$$

Доказательство. В силу (1.1.8)

$$P\{\xi_n = k\} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i P_{ik}(n),$$

где $p_i = P\{\xi_0 = i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ Отсюда

$$|P\{\xi_n = k\} - \pi_k| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} p_i P_{ik}(n) - \pi_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{\infty} p_i P_{ik}(n) - \pi_k \sum_{i=0}^{\infty} p_i\right| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} p_i (P_{ik}(n) - \pi_k)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N} p_i \left|P_{ik}(n) - \pi_k\right| + \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i \left|P_{ik}(n) - \pi_k\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N} p_i |P_{ik}(n) - \pi_k| + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i.$$

Выберем N так, чтобы $2 \sum\limits_{i=N+1}^{\infty} p_i < \varepsilon$ и зафиксируем. Далее, поскольку $P_{ik}(n) \to \pi_k$ при $n \to \infty$, то при достаточно больших n

$$\sum_{i=0}^{N} p_i |P_{ik}(n) - \pi_k| < \varepsilon,$$

а, следовательно,

$$|P\{\xi_n = k\} - \pi_k| \leq 2\varepsilon.$$

Тем самым теорема доказана.

Следствие. *Распределение неприводимой ненулевой непериодической марковской цепи всегда сходится и ее пределом является сильно эргодическое распределение:*

$$\lim_n P\{\xi_n = k\} = \pi_k > 0, \ k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Так как цепь ненулевая, то она возвратная, и, следовательно,

$$\lim_n P\{\xi_n = k\} = \pi_k, \ k = 0, 1, \ldots$$

И поскольку цепь ненулевая, то $\pi_k > 0, \ k = 0, 1, \ldots$

Стационарное и эргодическое распределение марковской цепи. *Стационарным* распределением марковской цепи с матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$ называется вероятностное распределение $\{v_i\}$ (собственное или несобственное), для которого при каждом n

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ik}(n) = v_k, \ k = 0, 1, \ldots, \tag{2.1.13}$$

или, в матричном виде,

$$\mathbb{P}'(n) v = v,$$

где $v = (v_0, v_1, v_2, \ldots)'$.

Для того, чтобы вероятностное распределение $\{v_i\}$ *марковской цепи с матрицей переходных вероятностей* $\mathbb{P} = [P_{ij}]$ *было стационарным, достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ik} = v_k, \ k = 0, 1, \ldots, \tag{2.1.14}$$

или, в матричном виде,

$$\mathbb{P}' v = v.$$

В самом деле, умножив правую и левую часть равенства (2.1.14) на P_{kj} и просуммировав по всем k, получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} v_k P_{kj},$$

или

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ij}(2) = v_j, \ j = 0, 1, \ldots$$

Повторив эту операцию n раз, получим (2.1.13).

Распределение $\{v_i\}$, для которого имеет место (2.1.14), также называют стационарным.

Теорема 2.1.4. *Если начальное распределение* $\{v_i\}$ *марковской цепи* $\{\xi_k\}$ *является ее стационарным распределением:*

$$\sum_i v_i P_{ik}(n) = v_k, \ k = 0, 1, \ldots,$$

то при каждом n *распределение* $P\{\xi_n = k\}, \ k = 0, 1, \ldots,$ *цепи с ним совпадает:*

$$P\{\xi_n = k\} = v_k, \ k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Распределение цепи $P\{\xi_n = k\}$, $k = 0, 1, \ldots,$ в каждый момент времени n выражается через начальное распределение $\{v_i\}$ и матрицу n-шаговых переходных вероятностей $[P_{ik}(n)]$ так

$$\sum_i v_i P_{ik}(n) = P\{\xi_n = k\}, \ k = 0, 1, \ldots,$$

(см. (1.1.8)). И если начальное распределение $\{v_i\}$ цепи стационарное — при каждом n

$$\sum_i v_i P_{ik}(n) = v_k,\ k = 0, 1, \ldots,$$

то из двух последних равенств имеем, что при каждом n

$$P\{\xi_n = k\} = v_k,\ k = 0, 1, \ldots$$

Теорема 2.1.5 (о стационарном и эргодическом распределениях). *В неприводимой возвратной непериодической марковской цепи эргодическое распределение является стационарным распределением, причем собственным, если цепь ненулевая, и наоборот: в неприводимой возвратной непериодической марковской цепи собственное стационарное распределение является эргодическим.*

Доказательство. Заметим, что ненулевая цепь является возвратной, поэтому у неё существует эргодическое распределение.

Сначала покажем, что любое эргодическое распределение $\{\pi_j\}$ цепи:

$$\pi_j = \lim_n P_{jj}(n),\ j = 0, 1, \ldots,$$

является ее стационарным распределением, т. е.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} = \pi_j,\ j = 0, 1, \ldots$$

Из уравнения Колмогорова—Чепмена для любых n имеем

$$P_{jj}(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}(n) P_{kj} \geq \sum_{k=0}^{N} P_{jk}(n) P_{kj},$$

N произвольное. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{N} \pi_k P_{kj},$$

(воспользовались эргодической теоремой), а так как N произвольно, то и

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj},\ j = 0, 1, \ldots \tag{2.1.15}$$

На самом деле все нестрогие неравенства (2.1.15) являются равенствами. Если предположить, что хотя бы одно из неравенств (2.1.15) строгое и просуммировать все неравенства (2.1.15), то получим противоречие:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j > \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k .$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj} = \pi_j, \ j = 0, 1, \ldots,$$

а вместе с этим для любого натурального n

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(n) = \pi_j, \ j = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.1.16)$$

Так что *эргодическое распределение всегда является стационарным.*

Убедимся, что в ненулевой цепи эргодическое распределение $\{\pi_i\}$ является собственным.

Перейдем в равенстве (2.1.16) к пределу при $n \to \infty$, причем в левой части формально под знаком суммы, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \pi_j = \pi_j .$$

Отсюда, поскольку класс ненулевой и, следовательно $\pi_j \neq 0$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1.$$

Так что *в ненулевом классе эквивалентности эргодическое распределение является собственным.*

Убедимся, что в левой части равенства (2.1.16) можно перейти к пределу при $n \to \infty$ под знаком суммы. Для этого оценим сверху разность

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \pi_j \right| .$$

Имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k P_{kj}(n) - \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k\pi_j\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{k=0}^{N}\pi_k(P_{kj}(n)-\pi_j)\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\pi_k(P_{kj}(n)-\pi_j)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{N}\pi_k|P_{kj}(n)-\pi_j| + 2\sum_{k=N+1}^{\infty}\pi_k.$$

Второе слагаемое, как это остаток сходящегося ряда, можно сделать меньше данного ε за счет выбора N. При фиксированном N первое слагаемое меньше ε для достаточно больших n. Так что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k P_{kj}(n) - \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k\pi_j\right| < 2\varepsilon.$$

Последнее неравенство и доказывает возможность предельного перехода под знаком суммы в (2.1.16).

Пусть теперь $\{v_j\}$ — собственное стационарное распределение неприводимой возвратной непериодической цепи, т. е. для каждого натурального n

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ij}(n) = v_j,\ j = 0, 1, \ldots,\ \sum_{j=0}^{\infty} v_j = 1.$$

Убедимся, что $\{v_j\}$ совпадает с эргодическим распределением.

Как и в первой части теоремы, переходя в равенстве

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ij}(n) = v_j$$

к пределу под знаком суммы при $n \to \infty$, получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i \pi_j = v_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\pi_j \sum_{i=0}^{\infty} v_i = v_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

— существование пределов $\lim\limits_{n} P_{ij}(n) = \pi_j,\ j = 0, 1, \ldots,$ гарантировано возвратностью и непериодичностью неприводимой цепи, а возможность предельного перехода под знаком суммы обосновываются как и ранее. И поскольку распределение $\{v_i\}$ собственное, т. е.

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i = 1,$$

то

$$v_j = \pi_j, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Следствие. *Если в неприводимой возвратной непериодической цепи с матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P}$ система*

$$\mathbb{P}'\pi = \pi,\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1.$$

не имеет решений, то эргодическое распределение цепи является нулевым.

Доказательство. Среди решений системы

$$\mathbb{P}'\pi = \pi$$

имеется и эргодическое распределение цепи (эргодическое распределение всегда является стационарным) и оно или возвратное нулевое или возвратное ненулевое. Ненулевым эргодическое распределение быть не может — если распределение возвратное ненулевое, то оно является собственным (см. теорему 2.1.5), т. е.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1,$$

а, следовательно, система

$$\mathbb{P}'\pi = \pi,\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1.$$

имеет решение, что противоречит предположению. Поэтому эргодическое распределение нулевое.

З а м е ч а н и е. В теореме в явном виде непериодичностью цепи мы не пользуемся. Непериодичность вместе с возвратностью обеспечивает существование эргодического распределения цепи.

Р е з ю м е. *Если класс C нулевой, то все предельные значения для $P_{ij}(n)$ известны — они равны нулю (независимо от того возвратный класс или нет, периодический или нет).*

Если же класс C ненулевой (как следствие он возвратный) и непериодический (требование непериодичности цепи не принципиально), то в силу эргодической теоремы существуют предельные (эргодические) значения для $P_{ij}(n)$:

$$\lim_n P_{ij}(n) = \pi_j, \ j \in C,$$

заведомо отличные от нуля (класс ненулевой).

Эргодическое распределение $\{\pi_j\}$ ненулевого класса эквивалентности C является собственным стационарным распределением и поэтому его можно получить как решение системы линейных уравнений

$$\mathbb{P}'\pi = \pi, \ \sum_{j \in C} \pi_j = 1.$$

Если класс C невозвратный, а, следовательно, нулевой, то предельные значения для $P_{ij}(n)$, $i, j \in C$ равны нулю.

Если класс C возвратный, то он может быть как нулевым (при этом $\lim\limits_n P_{ij}(n) = 0$, $i, j \in C$) так и ненулевым, в последнем случае предельное поведение $P_{ij}(n)$ $i, j \in C$ описывается эргодической теоремой (теорема 2.1.2).

П р и м е р 2.1.1. *Рассматривается марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$, заданная матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

1° *Существует ли $\lim\limits_n P_{ii}(n)$, $i = 1, 2, 3$?*

2° *Если $\lim\limits_n P_{ii}(n)$, существует, найти его.*

3° *Вычислить среднее $M\theta_i$ времени первого возвращения θ_i в состояние i, $i = 1, 2, 3$.*

Решение. Марковская цепь, описываемая матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P}$, неприводимая и непериодическая. Поскольку цепь конечна, то она ненулевая и, как следствие, возвратная. Поэтому согласно эргодической теореме (теорема 2.1.2) существует

$$\lim_n P_{ii}(n) = \pi_i, \ i = 1, 2, 3.$$

Далее, в неприводимой ненулевой непериодической марковской цепи эргодическое распределение совпадает с собственным стационарным распределением, т. е. удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \mathbb{P}'\pi &= \pi, \\ \sum\limits_{j=1}^{3} \pi_j &= 1, \end{cases}$$

подробнее

$$\begin{cases} \frac{4}{5}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2 + 0\pi_3 = \pi_1, \\ \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{4}{5}\pi_3 = \pi_2, \\ 0\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{1}{5}\pi_3 = \pi_3, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$\pi_1 = \frac{12}{17}, \ \pi_2 = \frac{4}{17}, \ \pi_3 = \frac{1}{17}.$$

Согласно эргодической теореме среднее время возвращения

$$M\theta_i = 1/\pi_i, \ i = 1, 2, 3.$$

Эргодическая теорема для периодической цепи. Исследование асимптотического поведения переходных вероятностей $P_{ij}(n)$ при $n \to \infty$ в периодической цепи сводится к их исследованию в непериодической цепи.

Теорема 2.1.6 (эргодическая теорема для периодических цепей). *В неприводимой возвратной периодической с периодом t марковской цепи с матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$, матрицей t-шаговых переходных вероятностей $[Q_{ij}] =$*

$= \mathbb{Q} = \mathbb{P}(t)$ и фазовым пространством $G = \bigcup\limits_{\nu=0}^{t-1} G_\nu$ для любых i, j из класса $G_\nu (\nu = 0, 1, 2, \ldots, t-1)$

$$\lim_n P_{ij}(nt) = q_j = \lim_n Q_{jj}(n), \tag{2.1.17}$$

если же $i \in G_\nu$, а $j \notin G_\nu$, то

$$\lim_n P_{ij}(nt) = 0;$$

для любого i из класса G_ν и любого j из класса $G_{k+\nu}$ $(k, \nu = = 0, 1, 2, \ldots, t-1)$

$$\lim_n P_{ij}(k + nt) = q_j = \lim_n Q_{jj}(n),$$

если же $i \in G_\nu$, а $j \notin G_{k+\nu}$, то

$$\lim_n P_{ij}(k + nt) = 0.$$

Доказательство. Согласно теореме о структуре периодической цепи (см. теорему 1.3.12) в $\mathbb{Q}$-цепи каждый класс эквивалентности G_ν является неприводимой возвратной непериодической цепью, поэтому для i, j из класса G_ν в силу эргодической теоремы существует $\lim\limits_n Q_{jj}(n)$, $\lim\limits_n Q_{ij}(n)$ и

$$\lim_n Q_{ij}(n) = \lim_n Q_{jj}(n) = q_j.$$

А поскольку

$$Q_{ij}(n) = P_{ij}(nt)$$

(см. 1.3.15), то

$$\lim_n P_{ij}(nt) = \lim_n Q_{ij}(n) = q_j.$$

Если $i \in G_\nu$, а $j \notin G_\nu$, то $P_{ij}(nt) = 0$, поскольку за nt шагов из состояния $i \in G_\nu$ можно перейти только в класс G_ν. Поэтому

$$\lim_n P_{ij}(nt) = 0.$$

Далее, пусть i принадлежит классу G_ν, а j — классу $G_{k+\nu}$. Убедимся, что

$$\lim_n P_{ij}(k + nt) = q_j. \tag{2.1.18}$$

Из состояния i класса G_ν $\mathbb{P}$-цепь за первые k шагов переходит в некоторое состояние s класса $G_{k+\nu}$, а затем за nt шагов из состояния s в состояние j из класса $G_{k+\nu}$ (см. теорему 1.3.12). Поэтому в силу уравнения Колмогорова—Чепмена

$$P_{ij}(k+nt) = \sum_{s\in G_{k+\nu}} P_{is}(k)P_{sj}(nt). \tag{2.1.19}$$

В правой части равенства (2.1.19) можно перейти к пределу при $n\to\infty$, причем под знаком суммы ряда:

$$\lim_n \sum_{s\in G_{k+\nu}} P_{is}(k)P_{sj}(nt) = \sum_{s\in G_{k+\nu}} P_{is}(k)\lim_n P_{sj}(nt) =$$

$$= \sum_{s\in G_{k+\nu}} P_{is}(k)q_j = q_j \sum_{s\in G_{k+\nu}} P_{is}(k) = q_j.$$

Чтобы убедиться в этом, оценим сверху разность

$$\left|\sum_{s\in G_{k+\nu}} P_{is}(k)P_{sj}(nt) - q_j\right|.$$

Имеем

$$\left|\sum_{s\in G_{k+\nu}} P_{is}(k)P_{sj}(nt) - q_j\right| =$$

$$= \left|\sum_{s\in G_{k+\nu}} P_{is}(k)P_{sj}(nt) - \sum_{s\in G_{k+\nu}} P_{is}(k)q_j\right| \le$$

$$\le \sum_{s\in M} P_{is}(k)\,|P_{sj}(nt)-q_j| + \sum_{s\in G_{k+\nu}\setminus M} P_{is}(k)\,|P_{sj}(nt)-q_j| \le$$

$$\le \sum_{s\in M} P_{is}(k)\,|P_{sj}(nt)-q_j| + 2\sum_{s\in G_{k+\nu}\setminus M} P_{is}(k),$$

где $M\subset G_{k+\nu}$. Для данного $\varepsilon>0$ можно выбрать конечное подмножество $M\subset G_{k+\nu}$ так, чтобы

$$\sum_{s\in G_{k+\nu}\setminus M} P_{is}(k) \le \varepsilon$$

(как остаток абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{s\in G_{k+\nu}} P_{is}(k)$), а затем (при фиксированном M) n настолько большим, чтобы

$$\sum_{s\in M} P_{is}(k)\,|P_{sj}(nt)-q_j| < \varepsilon$$

(см. равенство (2.1.17)). В итоге получим, что при достаточно больших n

$$\left|\sum_{s\in G_{k+\nu}} P_{is}(k)P_{sj}(nt)-q_j\right| \le 3\varepsilon.$$

Так что правая часть равенства (2.1.19), а вместе с ней и переходная вероятность $P_{ij}(k+nt)$, при $n\to\infty$ имеет предел, равный q_j.

Если $j\notin G_{k+\nu}$, то $P_{ij}(k+nt)=0$, поскольку из класса G_ν за $k+nt$ шагов возможен переход только в класс $G_{k+\nu}$. И, следовательно,

$$\lim_n P_{ij}(k+nt)=0.$$

Пример 2.1.2. *Найти предельные значения $P_{ij}(n)$ при $n\to\infty$ (если они существуют) для марковской цепи с фазовым пространством $X=\{1,2,3,4\}$, заданной матрицей переходных вероятностей*

$$\mathbb{P}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Решение. Марковская цепь периодична с периодом 2. Согласно теореме о структуре марковской цепи фазовое пространство G цепи представимо в виде объединения непересекающиеся классов G_0 и G_1, причем за 2 шага $\mathbb{P}$-цепь переходит из класса G_ν в класс G_ν, $\nu=0,1$. Матрица переходных вероятностей

$$\mathbb{Q}=\mathbb{P}(2)=(\mathbb{P})^2,$$

подробнее

$$\mathbb{Q}=\mathbb{P}\cdot\mathbb{P}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\end{bmatrix}=$$

$$
= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & 5/8 & 3/8 \end{bmatrix}.
$$

Матрица переходных вероятностей класса эквивалентности $G_0 = \{1, 2\}$ имеет вид

$$
\mathbb{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},
$$

класса эквивалентности $G_1 = \{3, 4\}$ —

$$
\mathbb{Q}_1 = \begin{bmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 5/8 & 3/8 \end{bmatrix}.
$$

Далее воспользуемся эргодической теоремой для периодической цепи (теорема 2.1.6).

Для непериодического возвратного класса $G_0 = \{1, 2\}$ с матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$
\mathbb{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}
$$

найдем эргодическое распределение $\{q_1, q_2\}$, оно совпадает с собственным стационарным распределением цепи, т. е. является решением системы

$$
\begin{cases} \mathbb{Q}_0' q & = & q, \\ q_1 + q_2 & = & 1, \end{cases}
$$

где $q = (q_1, q_2)'$. Подробнее:

$$
\begin{cases} q_1/2 + q_2/2 & = & q_1, \\ q_1/2 + q_2/2 & = & q_2, \\ q_1 + q_2 & = & 1. \end{cases}
$$

Решением этой системы является

$$
q_1 = \frac{1}{2}, \; q_2 = \frac{1}{2}.
$$

Аналогично находим эргодическое распределение $\{q_3, q_4\}$ непериодического возвратного класса $G_1 = \{3, 4\}$ с матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$
\mathbb{Q}_1 = \begin{bmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 5/8 & 3/8 \end{bmatrix}
$$

как решение системы

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{Q}_1' q & = & q, \\ q_3 + q_4 & = & 1, \end{array} \right.$$

где $q = (q_3, q_4)'$, подробнее

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (5/8)q_3 + (5/8)q_4 & = & q_3, \\ (3/8)q_3 + (3/8)q_4 & = & q_4, \\ q_3 + q_4 & = & 1. \end{array} \right.$$

Решение системы

$$q_3 = \frac{5}{8}, \ q_4 = \frac{3}{8}.$$

Поэтому согласно эргодической теореме для периодических цепей имеем: для $i \in \{1, 2\}$

$$\lim_n P_{ij}(2n) = \left\{ \begin{array}{ll} q_j = \lim\limits_n Q_{jj}(n), & j \in \{1, 2\}; \\ 0, & j \in \{3, 4\}; \end{array} \right.$$

$$\lim_n P_{ij}(2n+1) = \left\{ \begin{array}{ll} q_j = \lim\limits_n Q_{jj}(n), & j \in \{3, 4\}; \\ 0, & j \in \{1, 2\}; \end{array} \right.$$

для $i \in \{3, 4\}$

$$\lim_n P_{ij}(2n) = \left\{ \begin{array}{ll} q_j = \lim\limits_n Q_{jj}(n), & j \in \{3, 4\}; \\ 0, & j \in \{1, 2\}; \end{array} \right.$$

$$\lim_n P_{ij}(2n+1) = \left\{ \begin{array}{ll} q_j = \lim\limits_n Q_{jj}(n), & j \in \{1, 2\}; \\ 0, & j \in \{3, 4\}. \end{array} \right.$$

Вероятности поглощения. Следующая далее теорема описывает предельное поведение $P_{ij}(n)$ при $n \to \infty$, когда i — несущественное состояние, а состояние j принадлежит некоторому классу эквивалентности C. Класс C будем считать непериодическим (исследование периодической цепи сводится к исследованию непериодической).

Далее через $\pi_i(C)$ будем обозначать вероятность того, что цепь, стартовав из несущественного состояния i, достигнет класса C.

Теорема 2.1.7 (о вероятностях поглощения). *Если i — несущественное состояние, а состояние j принадлежит возвратному непериодическому классу C, то*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_i(C)\pi_j,$$

где $\pi_j = \lim\limits_n P_{jj}(n)$.

Доказательство. Оценим разность $|P_{ij}(n)-\pi_i(C)\pi_j|$. Обозначим через $\pi_{ik}^{(\nu)}(C)$ вероятность того, что цепь, стартовав из невозвратного состояния i, войдет в класс C через состояние k на ν-м шаге (заметим, что цепь, попав в класс C, из него не выйдет, поскольку C — класс эквивалентности). Тогда для $\pi_i(C)$ имеет место представление

$$\pi_i(C) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C),$$

а для $P_{ij}(n)$ — представление

$$P_{ij}(n) = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)P_{kj}(n-\nu)$$

— цепь, стартовав из состояния i, входит в класс C через одно из его состояний k на некотором шаге ν $(1\le\nu\le n)$, а затем за оставшиеся $n-\nu$ шагов из состояния k попадает в состояние j.

Используя приведенные представления для $\pi_i(C)$ и $P_{ij}(n)$, оценим разность

$$|P_{ij}(n)-\pi_j\pi_i(C)|$$

(далее C' — конечное подмножество C):

$$|P_{ij}(n)-\pi_j\pi_i(C)| = \left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)P_{kj}(n-\nu) - \pi_j\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)(P_{kj}(n-\nu)-\pi_j) - \pi_j\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)(P_{kj}(n-\nu)-\pi_j) + \right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C\setminus C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)(P_{kj}(n-\nu)-\pi_j)-\pi_j\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)\Bigg|\le$$

$$\le\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k\in C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)|P_{kj}(n-\nu)-\pi_j|+$$

$$+\sum_{\nu=N+1}^{n}\sum_{k\in C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)|P_{kj}(n-\nu)-\pi_j|+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C\setminus C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)|P_{kj}(n-\nu)-\pi_j|+\pi_j\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)\le$$

$$\le\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k\in C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)|P_{kj}(n-\nu)-\pi_j|+$$

$$+2\sum_{\nu=N+1}^{n}\sum_{k\in C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)+$$

$$+2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C\setminus C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)+\pi_j\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C).$$

Оценим правую часть неравенства, начиная с последней суммы. Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное фиксированное. Четвертая сумма при достаточно больших n меньше ε (как остаток сходящегося ряда). Выберем конечное C' так, чтобы третья сумма, как остаток сходящегося ряда, была меньше ε (и зафиксируем C'). Выберем N так, чтобы вторая сумма, как остаток сходящегося ряда, была меньше ε (и зафиксируем N). И, наконец, первая сумма при достаточно больших n, как конечное число "малых" слагаемых, меньше ε — каждое слагаемое мало при больших n в силу эргодической теоремы. Так что при достаточно больших n

$$|P_{ij}(n)-\pi_j\pi_i(C)|\le 4\varepsilon,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 2.1.8 (о вероятностях поглощения). *Если i — несущественное состояние, а состояние j принадлежит нулевому классу эквивалентности C, то*

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}(n)=0.$$

Доказательство. Оценим сверху сумму

$$P_{ij}(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k \in C} \pi_{ik}^{(\nu)}(C) P_{kj}(n-\nu).$$

Разобьем ее на части:

$$P_{ij}(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k \in C'} \pi_{ik}^{(\nu)}(C) P_{kj}(n-\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k \in C \setminus C'} \pi_{ik}^{(\nu)}(C) P_{kj}(n-\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{k \in C'} \pi_{ik}^{(\nu)}(C) P_{kj}(n-\nu) + \sum_{\nu=N+1}^{n} \sum_{k \in C'} \pi_{ik}^{(\nu)}(C) P_{kj}(n-\nu) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k \in C \setminus C'} \pi_{ik}^{(\nu)}(C) P_{kj}(n-\nu).$$

Отсюда имеем неравенство

$$P_{ij}(n) \le \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{k \in C'} \pi_{ik}^{(\nu)}(C) P_{kj}(n-\nu) + \sum_{\nu=N+1}^{n} \sum_{k \in C'} \pi_{ik}^{(\nu)}(C) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k \in C \setminus C'} \pi_{ik}^{(\nu)}(C),$$

правая часть которого может быть сделана меньше данного ε при достаточно больших n. Третья сумма меньше $\varepsilon/3$ как остаток сходящегося ряда за счет выбора конечного C' "достаточно широким" (зафиксируем это C'), вторая сумма меньше $\varepsilon/3$ как остаток сходящегося ряда за счет выбора N достаточно большим (зафиксируем это N), первая сумма меньше $\varepsilon/3$ при достаточно больших n, поскольку цепь нулевая, а число слагаемых в сумме конечно.

Пример 2.1.3. *Пусть марковская цепь задана матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Найти $\lim\limits_{n} P_{ij}(n)$ *для всех пар* $(i,\ j)$.

Решение. Состояние 5 — несущественное, классы эквивалентности $C_1 = \{1, 2, 3\}$ и $C_4 = \{4\}$ являются ненулевыми непериодическими. Поэтому для вычисления $\lim\limits_n P_{ij}(n)$, $i, j = 1, 2, 3$, можно воспользоваться теоремой о стационарном и эргодическом распределениях (см. теорему 2.1.5), $\lim\limits_n P_{44}(n)$, очевидно, равен 1.

Далее, $P_{i4}(n) = 0$ для $i = 1, 2, 3$ и $P_{4j}(n) = 0$ для $j = 1, 2, 3$, поскольку состояние 4 и состояния $1, 2, 3$ принадлежат разным классам эквивалентности.

Значения $\lim\limits_n P_{i5}(n) = 0$, $i = 1, 2, 3$, и $\lim\limits_n P_{45}(n) = 0$ т. к. состояния $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$ образуют классы эквивалентности, которым состояние $\{5\}$ не принадлежит.

Для вычисления $\lim\limits_n P_{5j}(n)$, $j = 1, 2, 3, 4$ воспользуемся теоремой о вероятностях поглощения (см. теорему 2.1.7):

$$\lim_n P_{5j}(n) = \pi_5(C_1)\pi_j, \; j = 1, 2, 3;$$

$$\lim_n P_{54}(n) = \pi_5(C_4)\pi_4.$$

Легко видеть, что

$$\pi_5(C_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{2};$$

$$\pi_5(C_4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_n P_{5j}(n) = \pi_5(C_1)\pi_j = \pi_j/2, \; j = 1, 2, 3;$$

$$\lim_n P_{54}(n) = \pi_5(C_4)\pi_4 = 1/2.$$

Вероятности π_j, $j = 1, 2, 3$, находим, пользуясь теоремой о стационарном и эргодическом распределении (см. теорему 2.1.5): $\pi_1 = 7/15$, $\pi_2 = 4/15$, $\pi_3 = 4/15$.

О предельном поведении марковской цепи. Множество всех состояний марковской цепи — фазовое пространство — распадается на несущественные состояния и непересекающиеся классы существенных состояний — классы эквивалентности.

Для всех возможных пар состояний i, j цепи (несущественных, существенных, ненулевых, возвратных, невозвратных, ...)

мы получили утверждения о предельном поведении переходных вероятностей $P_{ij}(n)$ при $n \to \infty$, а именно:

1° *Состояния i, j существенные из одного класса эквивалентности C.*

Если класс эквивалентности C ненулевой непериодический, то

$$\lim_n P_{ij}(n) = \pi_j, \ j \in C,$$

см. теоремы 2.1.3 *и* 2.1.5.

Если класс эквивалентности C нулевой, то

$$\lim_n P_{ij}(n) = 0.$$

2° *Состояния i, j существенные из разных классов эквивалентности, тогда*

$$\lim_n P_{ij}(n) = 0.$$

3° *Состояние i несущественное, а состояние j существенное, из класса эквивалентности C.*

Если класс C ненулевой непериодической, то

$$\lim_n P_{ij}(n) = \pi_i(C)\pi_j, j \in C,$$

см. теорему 2.1.7.

Если класс C нулевой, то

$$\lim_n P_{ij}(n) = 0.$$

4° *Состояние j несущественное, тогда*

$$\lim_n P_{ij}(n) = 0,$$

вне зависимости от того, каким является состояние i — существенным или несущественным.

Из приведенных результатов о поведении $P_{ij}(n)$ при $n \to \infty$ следует, что *при $n \to \infty$ распределение*

$$Q_n(\{k\}) = P\{\xi_n = k\}, \ k \in X,$$

марковской цепи всегда сходится к некоторому предельному распределению, подробнее.

1° *Цепь стартует из существенного состояния i некоторого класса эквивалентности C.*

Если класс эквивалентности C ненулевой непериодический, то распределение цепи сходится к собственному распределению, совпадающему с эргодическим распределением:

$$\lim Q_n(\{k\}) = \lim P\{\xi_n = k\} = \pi_k,\ k \in C,$$

см. теоремы 2.1.3 *и* 2.1.5.

Если класс эквивалентности C нулевой, то вероятность цепи остаться в любом ограниченном подмножестве класса C при $n \to \infty$ стремится к нулю — для любого $M > 0$

$$P\{|\xi_n| < M\} \to 0.$$

А, следовательно, при $n \to \infty$ для любого $M > 0$

$$P\{|\xi_n| \geq M\} \to 1$$

— "цепь уходит в бесконечность" (*вне зависимости от начального распределения цепи*), *см. теорему* 1.3.4. *Если при этом класс C нулевой возвратный, то цепь, уходя в бесконечность из данного состояния i, с вероятностью* 1 *возвращается в него бесконечное число раз, если же класс C нулевой невозвратный, то цепь с вероятностью* 1 *возвращается в состояние i конечное число раз, см. теорему* 1.3.11.

2° *Цепь стартует из несущественного состояния i, тогда она или остается в классе T несущественных состояний или поглощается классом эквивалентности C* (*для наглядности класс C один*).

Если цепь поглощается классом C (*с вероятностью $\pi_i(C)$*), *то в ненулевом непериодическом классе эквивалентности C*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi_n = j|\xi_0 = i\} = \pi_i(C)\pi_j,\ j \in C,$$

см. теорему 2.1.7, *а в нулевом классе C при $n \to \infty$ "цепь уходит в бесконечность"* (*см. теорему* 1.3.4) *— для любого $M > 0$*

$$P\{|\xi_n| \geq M|\xi_0 = i\} \to \pi_i(C).$$

Если цепь остается в классе T несущественных состояний, то вероятность пребывания цепи в любом ограниченном подмножестве класса T несущественных состояний при $n \to \infty$ стремится к нулю — для любого $M > 0$

$$P\{|\xi_n| < M, \xi_n \in T|\xi_0 = i\} \to 0,$$

см. теорему 1.3.6. *А, следовательно, при* $n \to \infty$ *“цепь уходит в бесконечность“ с вероятностью* $1-\pi_i(C)$, *а именно, для любого* $M > 0$

$$P\{|\xi_n| \geq M, \xi_n \in T|\xi_0 = i\} \to 1 - \pi_i(C).$$

Убедимся в последнем. Для любого n

$$P\{\xi_n \in T|\xi_0 = i\} + P\{\xi_n \in C|\xi_0 = i\} = 1$$

или

$$P\{|\xi_n| < M, \xi_n \in T|\xi_0 = i\} + P\{|\xi_n| \geq M, \xi_n \in T|\xi_0 = i\}+$$

$$+P\{\xi_n \in C|\xi_0 = i\} = 1.$$

При $n \to \infty$

$$P\{|\xi_n| < M, \xi_n \in T|\xi_0 = i\} \to 0,$$

$$P\{\xi_n \in C|\xi_0 = i\} =$$

$$= \sum_{j\in C} P_{ij}(n) \to \sum_{j\in C} \pi_i(C)\pi_j = \pi_i(C) \sum_{j\in C} \pi_j = \pi_i(C).$$

И, следовательно, при $n \to \infty$

$$P\{|\xi_n| \geq M, \xi_n \in T|\xi_0 = i\} \to 1 - \pi_i(C).$$

Замечание. Мы говорили о непериодических цепях. Исследование периодических цепей сводится к исследованию непериодических.

Критерии возвратности и невозвратности марковской цепи. Далее приводятся необходимые и достаточные условия невозвратности марковской цепи в терминах существования решения некоторой системы линейных уравнений и достаточные условия возвратности цепи в терминах существования решения некоторой системы линейных неравенств.

Теорема 2.1.9 (критерий невозвратности цепи). *Пусть* B *— неприводимая марковская цепь с фазовым пространством* $X = \{0, 1, \ldots\}$ *и матрицей переходных вероятностей* $\mathbb{P} = [P_{ij}]$. *Для того, чтобы марковская цепь* B *была невозвратной, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений*

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} y_j, \ i = 1, 2, \ldots, \tag{2.1.20}$$

имела ограниченное отличное от константы решение.

Доказательство. В неприводимой марковской цепи B с фазовым пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ и матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$ вероятности достижения f^*_{i0} удовлетворяют равенствам

$$f^*_{i0} = P_{i0} + \sum_{j \in X \setminus \{0\}} P_{ij} f^*_{j0}, \ i = 1, 2, \ldots$$

(см. (1.3.6)) или

$$f^*_{i0} = P_{i0} + \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} f^*_{j0}, \ i = 1, 2, \ldots \tag{2.1.21}$$

Равенства (2.1.21) означают, что последовательность

$$y_0 = 1, \ y_j = f^*_{j0}, \ j = 1, 2, \ldots \tag{2.1.22}$$

всегда является решением системы

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} y_j, \ i = 1, 2, \ldots,$$

(см. (2.1.20)).

Если цепь B невозвратная, то для каждого состояния i, в частности, для состояния 0, найдется состояние j ($j = 1, 2, \ldots$) такое, что

$$f^*_{j0} < 1$$

(см. теорему 1.3.9). И следовательно, для невозвратной цепи B существует ограниченное отличное от константы решение системы (2.1.20). Таким решением, например, является (2.1.22).

Пусть теперь система (2.1.20) имеет отличное от константы ограниченное решение $\{y_j\}$:

$$|y_j| \le C < \infty, \ j = 0, 1, \ldots$$

Докажем, что тогда цепь B невозвратная, для этого установим, что найдется пара (k, i), для которой $f^*_{ki} < 1$. Мы докажем, что найдется k, для которого $f^*_{k0} < 1$.

Заметим, что ограниченное отличное от константы решение системы (2.1.20) можно считать таким, что

$$y_0 = 1, \ 0 \le y_j \le 2, \ j = 0, 1, \ldots . \tag{2.1.23}$$

В самом деле, вместе с каждым решением $\{y_j\}$ системы (2.1.20) его преобразование

$$z_i = ay_i + b,\ i = 0, 1, \ldots,$$

также будет решением этой системы (для любых a и b). За счет выбора a и b для значений

$$z_i = ay_i + b,\ i = 0, 1, \ldots,$$

можно обеспечить выполнение условий

$$z_0 = 1,\ 0 \le z_i \le 2,\ i = 0, 1, \ldots,$$

например, потребовав, чтобы a и b в преобразовании $z = ay + b$ удовлетворяли системе

$$\begin{cases} \hfill a > 0, \\ \hfill aC + b \le 2, \\ \hfill -aC + b \ge 0, \\ \hfill ay_0 + b = 1 \end{cases}$$

(систему можно решить, выразив b из уравнения $ay_0 + b = 1$ и подставив его в неравенства). Так что ограниченное решение $\{y_j\}$ системы (2.1.20) будем считать таким, что

$$y_0 = 1,\ 0 \le y_j \le 2,\ j = 0, 1, 2 \ldots$$

Далее, вместе с марковской цепью B с матрицей одношаговых переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$ рассмотрим марковскую цепь $\tilde{B}$ (ее параметры будем “маркировать” значком $\sim$) с матрицей одношаговых переходных вероятностей $\tilde{\mathbb{P}} = [\tilde{P}_{ij}]$, у которой состояние 0 является поглощающим экраном (далее $\{0\} = C_0$), а вероятности перехода между другими состояниями такие же, как и в цепи B. Матрица переходных вероятностей $\tilde{\mathbb{P}}$ цепи $\tilde{B}$ имеет вид

$$\tilde{\mathbb{P}} = [\tilde{P}_{ij}] = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{00} & \tilde{P}_{01} & \tilde{P}_{02} & \ldots \\ \tilde{P}_{10} & \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} & \ldots \\ \tilde{P}_{20} & \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \ldots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \tag{2.1.24}$$

т. е.

$$\tilde{P}_{00} = 1, \tilde{P}_{0j} = 0,\ j = 1, 2, \ldots,$$

$$\tilde{P}_{ij} = P_{ij},\ i = 1, 2, \ldots,\ j = 0, 1, \ldots$$

Цепь $\tilde{B}$ получена из цепи B превращением состояния 0 в поглощающий экран. Каждое из состояний i, $i = 1, 2, \ldots$, в цепи $\tilde{B}$ несущественное. Действительно, поскольку цепь B неприводима, то состояние 0 достижимо из каждого состояния i ($i \neq 0$) в цепи B, а, следовательно, состояние 0 достижимо из каждого i ($i \neq 0$) и в цепи $\tilde{B}$, так как матрица переходных вероятностей $\tilde{\mathbb{P}}$ имеет вид (2.1.24), а поскольку $C_0 = \{0\}$ — поглощающий экран в цепи $\tilde{B}$, то состояния $i = 1, 2, \ldots$ в цепи $\tilde{B}$ несущественные. Заметим еще, что для $i = 1, 2, \ldots$ значения

$$\tilde{\pi}_i(C_0) = f^*_{i0}.$$

Ограниченное отличное от константы решение $\{y_j\}$ ($y_0 = 1,\ 0 \leq y_j \leq 2,\ j = 0, 1, 2 \ldots$) *системы* (2.1.20) *при каждом* $n = 1, 2, \ldots$, *является решением и системы*

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(n) y_j,\ i = 0, 1, \ldots \tag{2.1.25}$$

В самом деле, $\{y_j\}$ — решение системы

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} y_j,\ i = 0, 1, \ldots,$$

поскольку при $i = 1, 2, \ldots$ уравнения этой системы совпадают с уравнениями системы (2.1.20), а при $i = 0$ соответствующее уравнение последней системы имеет вид

$$y_0 = \tilde{P}_{00} \cdot y_0,$$

или

$$y_0 = 1 \cdot y_0.$$

Из

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} y_j, i = 0, 1, \ldots,$$

$$y_j = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{jk} y_k,\ j = 0, 1, \dots,$$

имеем

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{jk} y_k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} \tilde{P}_{jk} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{ik}(2) y_k,$$

т. е.

$$y_i = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{ik}(2) y_k,\ i = 0, 1, 2, \dots,$$

и так далее, пока не получим (2.1.25).

Из (2.1.25) для каждого $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(n) y_j \geq \tilde{P}_{i0}(n) y_0 = \tilde{P}_{i0}(n),\ i = 1, 2, \dots,$$

т. е.

$$\tilde{P}_{i0}(n) \leq y_i,\ i = 1, 2 \dots$$

Переходя в полученных неравенствах к пределу при $n \to \infty$ в силу теоремы о вероятностях поглощения (см. теорему 2.1.7) получим:

$$\tilde{\pi}_i(C_0) \tilde{\pi}_0 \leq y_i,\ i = 1, 2, \dots,$$

а, учитывая, что $\tilde{\pi}_0 = 1$, имеем:

$$\tilde{\pi}_i(C_0) \leq y_i,\ i = 1, 2, \dots$$

И поскольку

$$\tilde{\pi}_i(C_0) = f^*_{i0},\ i = 1, 2, \dots,$$

то для всех $i = 1, 2, \dots$

$$f^*_{i0} \leq y_i.$$

Последовательность $\{y_i\}$ не является постоянной, а $y_0 = 1$, поэтому найдутся такие y_k, что $y_k < 1$ или $y_k > 1$. Если найдется $y_k < 1$, то

$$f^*_{k0} \leq y_k < 1.$$

И, следовательно, цепь B невозвратна — у возвратной цепи все f^*_{kj}, и в частности f^*_{k0}, равны 1.

Если все $y_k > 1$ (исключая $y_0 = 1$), то

$$z_i = -y_i + 2, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

— ограниченное отличное от константы решение системы (2.1.20), причем $z_i < 1$, см. (2.1.23). И мы приходим к уже рассмотренной ситуации.

Тем самым теорема доказана.

Теорема 2.1.10 (достаточное условие возвратности цепи). *Пусть B — неприводимая марковская цепь с фазовым пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ и матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$. Если система неравенств*

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} y_j, \ i = 1, 2, \ldots, \tag{2.1.26}$$

имеет стремящееся к $+\infty$ решение, то цепь B является возвратной.

Доказательство. Пусть $\{y_j\}$ — стремящееся к $+\infty$ решение системы неравенств (2.1.26). Будем считать его положительным, поскольку вместе с каждым решением $\{y_j\}$ системы (2.1.26) ее решением будет

$$z_j = y_j + b, \ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Решение $\{y_j\}$ системы неравенств (2.1.26) *при каждом $n = 1, 2, \ldots$ является решением и системы неравенств*

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(n) y_j, \ i = 0, 1, \ldots \tag{2.1.27}$$

($\tilde{P}_{ij}$ и $\tilde{P}_{ij}(n)$ введены в доказательстве теоремы 2.1.9). В самом деле, $\{y_j\}$ — решение системы неравенств

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} y_j, \ i = 0, 1, \ldots$$

Из

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} y_j, \ i = 0, 1, \ldots,$$

$$y_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{jk} y_k, \ j = 0, 1, \ldots,$$

имеем

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} y_j \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{jk} y_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{ik}(2) y_k, \ i = 0, 1, \ldots,$$

или

$$y_i \geq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{ik}(2) y_k, \ i = 0, 1, \ldots,$$

и так далее пока не получим (2.1.27). Так что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ система неравенств (2.1.27) имеет своим решением стремящееся к $+\infty$ решение $\{y_j\}$.

Из (2.1.27) для каждого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(n) y_j \geq \sum_{j=0}^{M} \tilde{P}_{ij}(n) y_j + \sum_{j=M+1}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(n) y_j \geq$$

$$\geq \sum_{j=0}^{M} \tilde{P}_{ij}(n) y_j + \min_{r \geq M+1} \{y_r\} \sum_{j=M+1}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(n) =$$

$$= \sum_{j=0}^{M} \tilde{P}_{ij}(n) y_j + \min_{r \geq M+1} \{y_r\} \left(1 - \sum_{j=0}^{M} \tilde{P}_{ij}(n) \right),$$

т. е.

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{M} \tilde{P}_{ij}(n) y_j + \min_{r \geq M+1} \{y_r\} \left(1 - \sum_{j=0}^{M} \tilde{P}_{ij}(n) \right), \ i = 1, 2, \ldots$$

Перейдем в этих неравенствах к пределу при $n \to \infty$. Для $j \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$ получим

$$\lim_{n} \tilde{P}_{ij}(n) = 0,$$

поскольку в цепи $\tilde{B}$ все состояния $j = 1, 2, \ldots$ несущественные. Для $j = 0$ и $i = 1, 2, \ldots$ в силу теоремы о вероятностях поглощения

$$\lim_{n} \tilde{P}_{i0}(n) = \tilde{\pi}_i(C_0) \tilde{\pi}_0 = \tilde{\pi}_i(C_0),$$

поскольку $i = 1, 2, \ldots$ — несущественные состояния, а класс $\{0\} = C_0$ в цепи $\tilde{B}$ возвратный. Так что в результате предельного перехода имеем

$$y_i \geq \tilde{\pi}_i(C_0) y_0 + \min_{r \geq M+1} \{y_r\}(1 - \tilde{\pi}_i(C_0)), \; i = 1, 2, \ldots$$

Отсюда

$$1 - \tilde{\pi}_i(C_0) \leq \frac{y_i - \tilde{\pi}_i(C_0) y_0}{\min\limits_{r \geq M+1} \{y_r\}}, \; i = 1, 2, \ldots$$

Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $M \to \infty$. Так как $y_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то и $\min\limits_{r \geq M+1} \{y_r\} \to \infty$ при $M \to \infty$, поэтому в пределе имеем

$$1 - \tilde{\pi}_i(C_0) \leq 0, \; i = 1, 2, \ldots,$$

и следовательно,

$$\tilde{\pi}_i(C_0) = 1, \; i = 1, 2, \ldots$$

А поскольку

$$\tilde{\pi}_i(C_0) = f^*_{i0}, \; i = 1, 2, \ldots,$$

то для всех $i = 1, 2, \ldots$

$$f^*_{i0} = 1.$$

Тогда из равенства

$$f^*_{i0} = P_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik} f^*_{k0}$$

(см. формулу (1.3.7)) для $i = 0$ имеем

$$f^*_{00} = P_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} P_{0k} f^*_{k0} = P_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} P_{0k} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{0k} = 1,$$

последнее обозначает, что состояние 0 возвратно, а вместе с ним возвратна и неприводимая цепь B.

2.2 Дискретная марковская цепь, описывающая очередь

Важным приложением марковских цепей является теория массового обслуживания. Рассмотрим одну из простейших ее задач — обслуживание с ожиданием.

Заявки в случайные моменты времени поступают к месту обслуживания и становятся в очередь. Обслуживание одной заявки занимает фиксированное время — будем считать его равным 1. За единицу времени обслуживается одна заявка. Начинается и заканчивается обслуживание в целочисленные моменты времени. Найти распределение длины очереди в момент времени n, если не при всех n, то хотя бы при достаточно больших, т. е. в установившемся режиме.

Обозначим через η_n число заявок, ждущих обслуживания к моменту времени n — длину очереди из заявок к моменту времени n. Случайную величину η_n будем называть состоянием системы обслуживания в момент времени n, $n = 0, 1, 2, \dots$

В течение времени обслуживания данной заявки могут поступать новые заявки. Через ξ_n обозначим число заявок, поступивших за период обслуживания $[n, n+1)$, число заявок ξ_n является случайной величиной, $n = 0, 1, 2, \dots$ Будем предполагать, что случайные величины ξ_n, $n = 0, 1, \dots$, независимы и одинаково распределены, каждая с распределением

$$P\{\xi_n = k\} = a_k,\ k = 0, 1, \dots$$

Ясно, что по истечении периода обслуживания $[n, n+1)$ система из состояния η_n переходит в состояние

$$\eta_{n+1} = (\eta_n - 1)^+ + \xi_n,\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, \dots \tag{2.2.1}$$

Последовательность случайных величин $\{\eta_n\}$ образует марковскую цепь. Чтобы убедиться в этом, проверим, что для $\{\eta_n\}$ выполняется марковское свойство. Имеем, учитывая, что случайные величины $\{\xi_n\}$ независимы,

$$P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_0 = i_0\} =$$

$$= P\{(\eta_n - 1)^+ + \xi_n = j\, | \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_0 = i_0\} =$$

$$= \frac{P\{(i-1)^+ + \xi_n = j, \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_0 = i_0\}}{P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \eta_0 = i_0\}} =$$

$$= P\{(i-1)^+ + \xi_n = j\} = P\{\xi_n = j - (i-1)^+\}.$$

Аналогично

$$P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i\} = P\{\xi_n = j - (i-1)^+\}. \qquad (2.2.2)$$

Так что последовательность случайных величин $\{\eta_n\}$ — длина очереди из заявок, ждущих обслуживания в момент n, обладает марковским свойством, и, следовательно, является марковской цепью. Элементы матрицы переходных вероятностей этой цепи (см. 2.2.2) имеют вид

$$P_{ij} = P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i\} = P\{\xi_n = j - (i-1)^+\},\ i, j = 0, 1, \ldots$$

(чтобы цепь за период обслуживания перешла из состояния i в состояние j, за этот период должно поступить $j - (i-1)^+$ заявок). Цепь стационарная — переходные вероятности P_{ij} не зависят от n, поскольку ξ_n одинаково распределены.

Поскольку ξ_n — неотрицательная целочисленная случайная величина с распределением

$$P\{\xi_n = k\} = a_k,\ k = 0, 1, \ldots$$

(значения $P\{\xi_n = k\} = 0,\ k = -1, -2, \ldots$), то элементы

$$P_{ij} = P\{\xi_n = j - (i-1)^+\},\ i, j = 0, 1, \ldots$$

матрицы переходных вероятностей $\mathbb{P}$ можно записать в следующем виде: элементы первой строки ($i = 0$)

$$P_{0j} = P\{\xi_n = j - (0-1)^+\} = P\{\xi_n = j\} = a_j,\ j = 0, 1, \ldots,$$

а элементы, начиная со второй строки ($i \geq 1$), $j = 0, 1, \ldots,$

$$P_{ij} = P\{\xi_n = j - (i-1)^+\} =$$
$$= P\{\xi_n = j - (i-1)\} = a_{j-(i-1)}, \qquad (2.2.3)$$

при $j - (i-1) < 0$ значения $a_{j-(i-1)} = 0$. Так что матрица переходных вероятностей марковской цепи, описывающей очередь, имеет вид

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Далее будем предполагать, что $a_k,\ k = 0, 1, \ldots$, строго больше нуля. Это предположение обеспечивает неприводимость и непериодичность цепи $\{\eta_n\}$.

Среднее число заявок и распределение длины очереди. Интуитивно ясно, что если среднее число заявок

$$M\xi_n = \sum_k k a_k,$$

поступающих за время обслуживания $[n, n+1)$ одной заявки, больше числа заявок, обслуживаемых за период $[n, n+1)$, здесь больше 1:

$$\sum_k k a_k > 1,$$

то с ростом n длина η_n очереди заявок будет неограниченно возрастать. Если же среднее число заявок $\sum\limits_k k a_k$, поступивших за период обслуживания, меньше 1:

$$\sum_k k a_k < 1,$$

то естественно ожидать, что распределение длины очереди должно стремиться к некоторому стационарному (равновесному) распределению.

Теорема 2.2.1. *Если в марковской цепи*

$$\eta_{n+1} = (\eta_n - 1)^+ + \xi_n,\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, \ldots,$$

описывающей очередь, среднее число заявок, поступивших за период обслуживания,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k > 1,$$

и $a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots,$ *то цепь* $\{\eta_n\}$ *является невозвратной и, как следствие, сходится по вероятности к* ∞.

Доказательство. Условие

$$a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots,$$

обеспечивает неприводимость марковской цепи. Покажем, что если

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k > 1,$$

то система уравнений

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} y_j, \ i = 1, 2, \ldots \tag{2.2.4}$$

имеет ограниченное отличное от константы решение, что, согласно теореме 2.1.9, является достаточным условием невозвратности цепи.

Будем искать решение системы (2.2.4) в виде

$$y_j = x^j, \ j = 0, 1, \ldots,$$

где x — число из промежутка $(0; 1)$, т. е. убедимся в существовании числа $x_0 \in (0; 1)$ такого, что $y_j = x_0^j$, $j = 0, 1, \ldots$, является решением (2.2.4).

Если $y_j = x^j, \ j = 0, 1, \ldots$, — решение системы (2.2.4), то

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} x^j = x^i, \ i = 1, 2, \ldots \tag{2.2.5}$$

А поскольку, начиная со второй строки, т. е. при $i \geq 1$, элементы матрицы $\mathbb{P} = [P_{ij}]$ имеют вид

$$P_{ij} = a_{j-(i-1)},$$

причем при $j - (i-1) < 0$ значение $a_{j-(i-1)} = 0$, то

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-(i-1)} x^j = \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} x^j, \ i = 1, 2, \ldots,$$

и систему (2.2.5) можно переписать в виде

$$\sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} x^j = x^i, \ i = 1, 2, \ldots,$$

или

$$\sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} x^{j-(i-1)} = x, \ i = 1, 2, \ldots,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x, \ i = 1, 2, \ldots$$

(все уравнения системы оказались одинаковыми).

Убедимся, что уравнение

$$f(x) = x,$$

где $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, имеет решение на промежутке $(0, 1)$.

Рассмотрим непрерывную на $[0, 1]$ функцию

$$F(x) = f(x) - x.$$

Значения функции $F(x)$ на концах промежутка $[0, 1]$:

$$F(0) = f(0) = a_0 > 0,$$

$$F(1) = f(1) - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - 1 = 0,$$

а значение производной

$$F'(x) = f'(x) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} - 1$$

в точке $x = 1$

$$F'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k - 1 > 0,$$

последнее неравенство имеет место в силу условия теоремы. Поэтому на промежутке $(0, 1)$ найдется точка, в которой $F(x)$ отрицательна. И поскольку $F(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, существует точка $x_0 \in (0; 1)$, такая, что

$$F(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0,$$

или, что то же,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k = x_0,$$

а в исходных обозначениях

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} x_0^j = x_0^i,\ i = 1, 2, \ldots$$

Так что вектор

$$y_j = x_0^j,\ j = 0, 1, \ldots$$

является ограниченным отличным от константы решением системы (2.2.4), что влечет невозвратность цепи $\{\eta_n\}$. А неприводимая невозвратная цепь $\{\eta_n\}$ с фазовым пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ при $n \to \infty$ сходится по вероятности к $+\infty$ — для любого $M > 0$ при $n \to \infty$

$$P\{\eta_n \geq M\} \to 1,$$

см. следствие из теоремы 1.3.5. Последнее означает, что длина очереди неограниченно растет с течением времени.

При $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k a_k = 1$, *цепь, описывающая очередь, является невозвратной, а поэтому и при* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k a_k = 1$ *длина очереди неограниченно растет.*

Теорема 2.2.2. *Если в марковской цепи*

$$\eta_{n+1} = (\eta_n - 1)^+ + \xi_n,\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, \ldots,$$

описывающей очередь, среднее число заявок, поступивших за период обслуживания,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k < 1,$$

и $a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots$, *то цепь* $\{\eta_n\}$ *является возвратной и, как следствие, ее распределение сходится к эргодическому распределению.*

Доказательство. Условие

$$a_k > 0, \ k = 0, 1, \dots,$$

обеспечивает неприводимость и непериодичность марковской цепи.

Покажем, что в предположении

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k < 1$$

система неравенств

$$y_i \ge \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} y_j, \ i = 1, 2, \dots,$$

имеет решение, стремящееся к $+\infty$, что согласно теореме 2.1.10 является достаточным условием возвратности цепи $\{\eta_n\}$, а, следовательно, и ее эргодичности. Таким решением, в частности, является

$$y_j = j, \ j = 0, 1, \dots$$

Убедимся в этом. Учитывая вид матрицы переходных вероятностей цепи, описывающей очередь (см. (2.2.3)), имеем:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-(i-1)} j = \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} j =$$

$$= \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} (j - (i-1)) + \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} (i-1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k + (i-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k - 1 + i \le i,$$

$i = 1, 2, \dots$ Так что

$$i \ge \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} j, \ i = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно, в силу теоремы 2.1.10 цепь $\{\eta_n\}$ является возвратной, более того, она возвратная ненулевая. Поэтому согласно теоремам 2.1.3, 2.1.5 распределение цепи сходится к собственному распределению. Последнее применительно к очереди обозначает, что с течением времени длина "устанавливается", принимая конечные значения согласно эргодическому распределению цепи η_n.

2.3 Задача о разорении игрока

Игрок G_m (с капиталом $m < \infty$) играет в азартную игру с игроком G_M (с капиталом $M < \infty$), участвуя в серии последовательных партий игры. В результате каждой партии капитал игрока G_m с вероятностью p увеличивается на 1 (за счет игрока G_M) и с вероятностью $q = 1-p$ уменьшается на 1 (в пользу игрока G_M). Результат каждой партии не зависит от результатов предыдущих партий. Если капитал игрока (G_m или G_M) становится равным нулю, то игрок разоряется, игра прекращается.

Найти вероятность разорения игрока G_m.

Обозначим через ξ_k капитал игрока G_m после k-й партии. Последовательность случайных величин $\{\xi_k\}$ образует марковскую цепь, см. пример 1.1.2 (с. 12). Множеством состояний марковской цепи $\{\xi_k\}$ является $\{0, 1, \ldots, n\}$, где $n = m + M$ — суммарный капитал игроков. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\xi_k\}$ имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2.3.1)$$

см. также рис. 1.1.2. Состояния $1, 2, \ldots, n-1$ несущественные. Состояния 0 и n являются поглощающими экранами, цепь, попав в поглощающее состояние, остается в нем навсегда. Далее класс $\{0\}$ будем обозначать через C_0, а класс $\{n\}$ — через C_n.

В терминах марковской цепи $\{\xi_k\}$ вероятность разорения игрока G_m — это вероятность поглощения цепи классом C_0. И, следовательно, задача "найти вероятность разорения игрока G_m"

формулируется так: "найти вероятность поглощения цепи $\{\xi_k\}$ классом C_0".

Уравнения для вероятностей поглощения. Пусть $\{\zeta_k\}$ — марковская цепь с матрицей переходных вероятностей $[P_{ij}]$, C — некоторый ее класс эквивалентности, T — множество несущественных состояний цепи, и пусть $i \in T$. Через $\pi_i(C)$, как и ранее, будем обозначать вероятность того, что цепь, стартуя из несущественного состояния i, рано или поздно достигнет класса C, и, следовательно, будет им поглощена, а через $\pi_i^{(\nu)}(C)$ — вероятность того, что цепь, стартуя из состояния i, достигнет класса C на ν-м шаге ($\pi_i(C)$ будем называть вероятностью поглощения цепи классом C, а $\pi_i^{(\nu)}(C)$ — вероятностью поглощения цепи классом C на ν-м шаге).

Вероятности поглощения $\pi_i(C)$, $i \in T$, классом C цепи с матрицей переходных вероятностей $[P_{ij}]$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\pi_i(C) = \pi_i^{(1)}(C) + \sum_{j \in T} P_{ij}\pi_j(C), \ i \in T. \tag{2.3.2}$$

Вероятность $\pi_i^{(1)}(C)$ вычисляется по элементам матрицы переходных вероятностей $[P_{ij}]$:

$$\pi_i^{(1)}(C) = \sum_{j \in C} P_{ij}, \ i \in T.$$

Если класс эквивалентности C состоит из одного состояния, т. е. $C = \{k\}$, то система уравнений (2.3.2) перепишется так:

$$\pi_i(\{k\}) = \pi_i^{(1)}(\{k\}) + \sum_{j \in T} P_{ij}\pi_j(\{k\}), \ i \in T,$$

или

$$f_{ik}^* = P_{ik} + \sum_{j \in T} P_{ij} f_{jk}^*, \ i \in T,$$

сравните с (1.3.6).

Вероятность разорения игрока, играющего с партнером, капитал которого ограничен. Марковская цепь $\{\xi_k\}$, описывающая размер капитала игрока G_m, играющего с партнером G_M, капитал M которого ограничен, имеет конечное число состояний: $0, 1, \ldots, n$ ($n = m+M$ — суммарный капитал игроков G_m и G_M) и её матрица переходных вероятностей $[P_{ij}]$ имеет вид (2.3.1).

Вероятность разорения игрока G_m, накопившего капитал до размера i, равна вероятности поглощения $\pi_i(C_0) = f_{i0}^*$ цепи классом $C_0 = \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Найдем вероятности разорения игрока G_m

$$u_i = \pi_i(C_0),\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

как решение системы уравнений (2.3.2), когда $C = C_0 = \{0\}$, класс $T = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а матрица переходных вероятностей $\mathbb{P}$ имеет вид (2.3.1). При этом система (2.3.2) запишется так:

$$\pi_i(C_0) = \pi_i^{(1)}(C_0) + \sum_{j=1}^{n-1} P_{ij}\pi_j(C_0),\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (2.3.3)$$

где

$$\pi_i^{(1)}(C_0) = \sum_{j\in C_0} P_{ij} = \sum_{j\in\{0\}} P_{ij} = P_{i0},\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

или так:

$$u_i = P_{i0} + \sum_{j=1}^{n-1} P_{ij}u_j,\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (2.3.4)$$

в матричном виде

$$u = \tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}u,$$

где $u' = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$, $\tilde{\mathbb{P}}_0 = (q, 0, \ldots, 0)'$, $\tilde{\mathbb{P}} = [P_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$, где P_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$, — элементы матрицы переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$, см. (2.3.1).

Первое уравнение (соответствующее $i = 1$) системы (2.3.4) запишется так:

$$u_1 = q + pu_2.$$

Уравнения системы (2.3.4) для $i = 2, 3, \ldots, n-2$ имеют вид

$$u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1}.$$

Последнее уравнение (при $i = n-1$) системы (2.3.4) имеет вид

$$u_{n-1} = qu_{n-2}.$$

Так что система (2.3.4) запишется так:

$$\begin{cases} u_1 = q + pu_2, \\ u_2 = qu_1 + pu_3, \\ \vdots \\ u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1}, \\ \vdots \\ u_{n-2} = qu_{n-3} + pu_{n-1}, \\ u_{n-1} = qu_{n-2}. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Решая систему (2.3.5), рассмотрим отдельно случаи $q \neq p$ и $q = p = 1/2$.

Пусть $q \neq p$. Сначала найдем решение системы

$$u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1},\ i = 2, 3, \dots, n-2. \tag{2.3.6}$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$u_i = x^i,\ x \in (0, 1),\ i = 2, 3, \dots, n-2.$$

Значение $x \in (0,1)$, поскольку вероятности поглощения u_i, $i = 2, 3, \dots, n-2$, цепи классом C_0 не могут быть равны 1 или 0 — цепь с ненулевой вероятностью может быть поглощена как классом $C_0 = \{0\}$, так и классом $C_n = \{n\}$ (см. диаграмму переходов марковской цепи $\{\xi_k\}$ на рис. 1.1.2). Подставляя $u_i = x^i$, $i = 2, 3, \dots, n-2$, в уравнения

$$u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1},\ i = 2, 3, \dots, n-2,$$

получим:

$$x^i = qx^{i-1} + px^{i+1},\ i = 2, 3, \dots, n-2,$$

или

$$px^2 + q = x.$$

Это квадратное уравнение на промежутке $(0, 1)$ имеет одно решение, а именно: $x = q/p$. Так что решением системы (2.3.6) является

$$u_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i,\ i = 2, 3, \dots, n-2.$$

Вместе с каждым решением u_i, $i = 2, 3, \ldots, n-2$, системы уравнений (2.3.6), ее решением является и

$$A + Bu_i,\ i = 2, 3, \ldots, n-2, \tag{2.3.7}$$

для любых констант A и B (в последнем убеждаемся непосредственной проверкой). Выберем константы A и B так, чтобы решение (2.3.7) было решением также первого и последнего уравнений системы (2.3.5).

Из первого уравнения

$$u_1 = q + pu_2$$

системы (2.3.5) имеем:

$$A + Bu_1 = q + p(A + Bu_2),$$

$$A + B\frac{q}{p} = q + p\left(A + B\left(\frac{q}{p}\right)^2\right),$$

$$A(1-p) = q - B\frac{q}{p} + pB\left(\frac{q}{p}\right)^2,$$

$$Aq = q - B\frac{q}{p}\left(1 - p\frac{q}{p}\right),$$

$$Aq = q - Bq,$$

$$A + B = 1.$$

Из последнего уравнения

$$u_{n-1} = qu_{n-2}$$

системы (2.3.5) получаем:

$$A + Bu_{n-1} = q(A + Bu_{n-2}),$$

$$A + B\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} = q\left(A + B\left(\frac{q}{p}\right)^{n-2}\right),$$

$$A(1-q) = -B\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} + qB\left(\frac{q}{p}\right)^{n-2},$$

$$Ap = -B\frac{q^n}{p^{n-1}},$$

$$Ap^n + Bq^n = 0.$$

Таким образом, для определения A и B имеем систему уравнений

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ Ap^n + Bq^n = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$(1-B)p^n + Bq^n = 0,$$

$$B = \frac{p^n}{p^n - q^n},$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{p^n}{p^n - q^n} = \frac{q^n}{q^n - p^n}.$$

И, следовательно, решением системы (2.3.5), если $q \neq p$, является

$$u_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i = \frac{q^n}{q^n - p^n} + \frac{p^n}{p^n - q^n}\left(\frac{q}{p}\right)^i =$$

$$= \frac{(q/p)^n}{(q/p)^n - 1} + \frac{1}{1-(q/p)^n}\left(\frac{q}{p}\right)^i = \frac{(q/p)^i - (q/p)^n}{1-(q/p)^n},$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Так что при $q \neq p$ игрок G_m, имея накопленный капитал r, разорится с вероятностью

$$u_r = \frac{(q/p)^r - (q/p)^n}{1-(q/p)^n},\ r = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Заметим, что вероятность разорения игрока G_m не зависит от его начального капитала m, она определяется капиталом r, накопленным им к данному моменту.

Найдем теперь вероятности

$$u_i = \pi_i(C_0),\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

разорения игрока G_m, когда $q = p = 1/2$. Система (2.3.5) перепишется так:

$$\begin{cases} u_1 &= 1/2 + u_2/2, \\ u_2 &= u_1/2 + u_3/2, \\ &\vdots \\ u_i &= u_{i-1}/2 + u_{i+1}/2, \\ &\vdots \\ u_{n-2} &= u_{n-3}/2 + u_{n-1}/2, \\ u_{n-1} &= u_{n-2}/2. \end{cases}$$

Решением системы

$$u_i = \frac{1}{2}u_{i-1} + \frac{1}{2}u_{i+1},\ i = 2, 3, \ldots, n-2,$$

является

$$u_i = i,\ i = 2, 3, \ldots, n-2,$$

в этом убеждаемся непосредственной проверкой. Легко видеть, что вместе с решением u_i решением последней системы будет и

$$A + Bu_i = A + Bi,\ i = 2, 3, \ldots, n-2.$$

Выберем теперь A и B так, чтобы это решение было также решением первого и последнего уравнений системы:

$$u_1 = 1/2 + u_2/2,$$

$$u_{n-1} = u_{n-2}/2.$$

Для первого уравнения имеем

$$A + B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(A + 2B).$$

Отсюда

$$A = 1.$$

Для последнего уравнения

$$u_{n-1} = \frac{1}{2}u_{n-2}$$

системы имеем

$$A + B(n-1) = \frac{1}{2}(A + B(n-2)),$$

отсюда

$$B = -\frac{1}{n}.$$

И, следовательно, решением системы (2.3.5), если $q = p = 1/2$ является

$$u_i = 1 - \frac{i}{n},\ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Так что, если игрок G_m, с вероятностью $p = 1/2$ увеличивая свой капитал на 1 в результате каждой партии (и с вероятностью 1/2 теряя единицу капитала), стал обладателем капитала r, то вероятность его разорения

$$u_r = 1 - \frac{r}{n},\ r = 1, 2, \ldots, n-1,$$

а вероятность неразорения

$$1 - u_r = \frac{r}{n},\ r = 1, 2, \ldots, n-1,$$

пропорциональна величине r накопленного капитала.

Замечание. Аналогичные выкладки показывают, что вероятность v_r разорения игрока G_M, если он накопил капитал r, равна

$$1 - u_r,\ r = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Вероятность разорения игрока, играющего с бесконечно богатым партнером. Пусть теперь игрок G_m играет с игроком G_∞, капитал которого неограничен (равен $+\infty$). Матрица переходных вероятностей марковской цепи $\{\xi_k\}$, описывающей размер капитала игрока G_m, имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & \ldots \\ 0 & q & 0 & p & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{2.3.8}$$

см. также рис. 2.3.1. Состояние 0 ($C_0 = \{0\}$) цепи является поглощающим, состояния $1, 2, \ldots$ — несущественные.

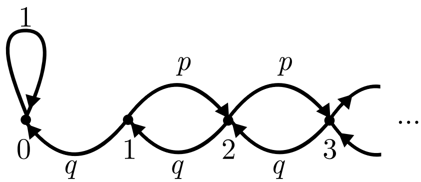

Рис. 2.3.1: Диаграмма переходов марковской цепи, описывающей азартную игру с бесконечно богатым партнером

Система уравнений (2.3.2) для вероятностей $u_i = \pi_i(C)$, $i \in T$, поглощения цепи классом C, когда матрица переходных вероятностей цепи имеет вид (2.3.8), класс $C_0 = \{0\}$, а $T = \{1, 2, \ldots\}$ запишется так:

$$\begin{cases} u_1 = q + pu_2, \\ u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1}, \ i = 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Решение последней системы получаем так же, как и в случае игры с игроком G_M, капитал которого ограничен.

Сначала найдем решение системы

$$u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1}, \ i = 2, 3, \ldots$$

При $q \neq p$ ее решением является последовательность

$$u_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i, \ i = 2, 3, \ldots,$$

а при $q = p = 1/2$ — последовательность

$$u_i = A + B \cdot i, \ i = 2, 3, \ldots$$

При $q/p > 1$ и при $p = q = 1/2$ из условия ограниченности решения $u_i, i = 2, 3, \ldots$, получаем, что $B = 0$, и, следовательно, как при $q > p$, так и при $p = q = 1/2$ решение системы

$$u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1}, \ i = 2, 3, \ldots,$$

имеет вид

$$u_i = A, \ i = 2, 3, \ldots$$

Выберем A так, чтобы последовательность $u_i = A,\ i = 1, 2, 3, \ldots$ была решением и уравнения

$$u_1 = q + pu_2$$

системы (2.3.9). Для этого A должно удовлетворять уравнению

$$A = q + pA.$$

Отсюда $A = 1$ и, следовательно, решением системы (2.3.9) является

$$u_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots,$$

т. е.

$$\pi_i(C_0) = u_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots$$

Последнее означает, что если $q \geq p$, то игрок G_m, играя с игроком G_∞, капитал которого неограничен, неизбежно разорится (вероятность разорения равна 1) вне зависимости от размера его начального капитала.

Если вероятность p выигрыша игрока G_m больше вероятности q выигрыша игрока G_∞, т. е. $q/p < 1$, то для получения выводов о вероятности $\pi_r(C_0)$ разорения игрока G_m, играющего с игроком G_∞, капитал которого неограничен, воспользуемся результатом, полученным в задаче о разорении игрока G_m, играющего с игроком G_M, капитал M которого ограничен.

В качестве вероятности разорения $\pi_r(C_0)$ игрока G_m, играющего с игроком G_∞, естественно рассмотреть предельное значение вероятности

$$u_r = u_r(n) = \frac{(q/p)^r - (q/p)^n}{1 - (q/p)^n}$$

разорения игрока G_m при неограниченном росте капитала M игрока G_M (при $n = M + m \to \infty$), а именно

$$\pi_r(C_0) = \lim_n u_r(n) = (q/p)^r,\ r = 1, 2, \ldots$$

Из последнего равенства следует, что чем больше накопленный капитал r игрока G_m и чем больше вероятность p выигрыша игрока G_m в одной партии, тем меньше вероятность $\pi_r(C_0)$ его разорения, что вполне согласуется с нашей интуицией.

Если, к примеру, $p = 2/3$ и $r = 10$, то вероятность разорения игрока G_m, играющего с бесконечно богатым игроком, равна

$$\left(\frac{q}{p}\right)^r = \left(\frac{1/3}{2/3}\right)^{10} = \frac{1}{1024},$$

а вероятность того, что игрок не разорится, естественно, равна $1 - 1/1024$.

Интересно, что *если вероятность p выигрыша игрока G_m больше вероятности q выигрыша игрока G_∞, то игрок G_m, накопивший капитал r, с вероятностью $1 - (q/p)^r$ не только не разорится, но с ростом числа k сыгранных партий неограниченно увеличит свой капитал.*

В самом деле, пусть игрок G_m накопил капитал r. Покажем, что для любого целого положительного L при $k \to \infty$

$$P\{\xi_k > L\} \to 1 - \pi_r(C_0) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^r,$$

или, что то же,

$$P\{\xi_k \leq L\} \to \left(\frac{q}{p}\right)^r.$$

Очевидно

$$P\{\xi_k \leq L\} = \sum_{j=0}^{L} P\{\xi_k = j\} = \sum_{j=0}^{L}\sum_{i=0}^{\infty} p_i P_{ij}(k) = \sum_{j=0}^{L} P_{rj}(k)$$

— поскольку цепь стартует из состояния r, то $p_r = 1$, $p_i = 0$, $i \neq r$. И, следовательно,

$$P\{\xi_k \leq L\} = P_{r0}(k) + \sum_{j=1}^{L} P_{rj}(k).$$

При $k \to \infty$

$$P_{r0}(k) \to \pi_r(C_0) = \left(\frac{q}{p}\right)^r,$$

а каждое из слагаемых $P_{rj}(k)$, $j = 1, 2, \ldots, L$, стремится к нулю, поскольку состояния $j = 1, 2, \ldots, L$ являются несущественными. Так что для любого L при $k \to \infty$

$$P\{\xi_k > L\} \to 1 - (q/p)^r.$$

Если у игрока G_m, играющего с бесконечно богатым игроком G_∞, вероятность p выигрыша в одной партии равна, например, $2/3$, то он, начиная игру с капиталом $m = 10$, с вероятностью

$$1 - \left(\frac{1/3}{2/3}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1024}$$

неограниченно увеличит свой капитал (ну очень разбогатеет).

2.4 Примеры и задачи

Примеры

Пример 2.4.1. *Пусть марковская цепь задана матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Найти $\lim_n P_{ij}(n)$ *для всех пар* (i, j), $i, j = 1, 2, \dots, 5$, *если эти пределы существуют.*

Решение. Классы $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_4 = \{4\}$ возвратные ненулевые непериодические, состояние $\{5\}$ — несущественное.

Предельное поведение $P_{ij}(n)$ исследуется аналогично тому, как это делалось в примере 2.1.3.

Для вычисления $\pi_5(C_1), \pi_5(C_4)$ воспользуемся тем, что

$$\pi_5(C_1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k \in C_1} \pi_{5k}^{(\nu)}(C_1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\pi_{51}^{(\nu)}(C_1) + \pi_{52}^{(\nu)}(C_1) + \pi_{53}^{(\nu)}(C_1)),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{51}^{(\nu)}(C_1) = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{4}$$

(см. обозначения в доказательстве теоремы 2.1.7). Аналогично

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{52}^{(\nu)}(C_1) = \frac{1}{4}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{53}^{(\nu)}(C_1) = \frac{1}{4},$$

так что

$$\pi_5(C_1) = 3/4.$$

Для класса C_4

$$\pi_5(C_4) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{54}^{(\nu)}(C_4) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots = \frac{1}{4}.$$

Задачи

Задача 2.1. 1) Доказать, что у конечной неприводимой непериодической марковской цепи существует собственное стационарное распределение.

2) Доказать, что у конечной неприводимой непериодической марковской цепи существуют пределы

$$\lim_n P_{ij}(n),$$

причем их значения отличны от нуля.

У к а з а н и е к п. 1. Описанная цепь ненулевая, а, следовательно, возвратная, поэтому существует эргодическое распределение. Далее воспользоваться теоремой 2.1.5 (о стационарном и эргодическом распределении).

Задача 2.2. В двух урнах находится 6 шаров (по 3 в каждой) среди них 3 белых и 3 черных.

Из каждой урны наудачу выбирают по шару и перекладывают из одной урны в другую. Пусть ξ_n — число белых шаров в первой урне после n-го перекладывания. Предположим, что шары можно перекладывать неограниченное число раз (последнее обозначает, что $n \to \infty$).

Найти предельное распределение ξ_n при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_n P\{\xi_n = k\},\ k = 0, 1, 2, 3,$$

(если предельное распределение существует).

У к а з а н и е. Последовательность $\{\xi_n\}$ является марковской цепью (убедиться в этом).

Матрица переходных вероятностей цепи

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Значения

$$\lim_n P\{\xi_n = k\} = \pi_k,\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Эргодическое распределение цепи

$$\pi_0 = \frac{1}{20},\ \pi_1 = \frac{9}{20},\ \pi_2 = \frac{9}{20},\ \pi_3 = \frac{1}{20}.$$

Задача 2.3. В двух урнах находится 8 шаров — в первой 4 белых, во второй 4 черных.

Из каждой урны наудачу выбирают по шару и перекладывают из одной урны в другую. Пусть ξ_n — число белых шаров в первой урне после n-го перекладывания. Предположим, что шары можно перекладывать неограниченное число раз (последнее обозначает, что $n \to \infty$).

Найти предельное распределение числа белых шаров в первой урне (если такое распределение существует).

Указание. См. также задачу 2.2. Последовательность $\{\xi_n\}$ является марковской цепью (убедиться в этом). Матрица переходных вероятностей цепи

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/16 & 6/16 & 9/16 & 0 & 0 \\ 0 & 4/16 & 8/16 & 4/16 & 0 \\ 0 & 0 & 9/16 & 6/16 & 1/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Предельные значения $P\{\xi_n = k\}$ совпадают с эргодическим распределением $\{\pi_k\}$ (см. теорему 2.1.3). Здесь

$$\pi_0 = \frac{1}{70},\ \pi_1 = \frac{16}{70},\ \pi_2 = \frac{36}{70},\ \pi_3 = \frac{16}{70},\ \pi_4 = \frac{1}{70}.$$

Задача 2.4. Монету, вероятность выпадения герба которой равна p $(0 < p < 1)$, подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число выпавших гербов при k-м подбрасывании монеты, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\eta_{n+1} = (\eta_n + 1) I_{\{1\}}(\xi_n),\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Вычислить

$$\lim_n P\{\eta_n = i\},\ i = 0, 1, 2, \ldots,$$

если эти пределы существуют.

Указание. Последовательность $\{\eta_n\}$ образует неприводимую возвратную непериодическую марковскую цепь (см. пример 1.4.4, там же приведена матрица $\mathbb{P}$ одношаговых переходных вероятностей цепи $\{\eta_n\}$).

Значения $\lim\limits_n P\{\eta_n = i\}$ совпадают со значениями π_i эргодического распределения $\{\pi_k\}$, последнее можно получить как стационарное распределение цепи. Собственное стационарное распределение удовлетворяет системе уравнений

$$\mathbb{P}' \pi = \pi,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1,$$

где $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)'$. В итоге имеем

$$\lim_n P\{\eta_n = i\} = \pi_i = p^i q, \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Задача 2.5. Симметричную игральную кость подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число выпавших шестерок при k-м подбрасывании кости, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\eta_{n+1} = (\eta_n + 1) I_{\{6\}}(\xi_n), \ \eta_0 = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Вычислить

$$\lim_n P\{\eta_n = i\}, \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

если эти пределы существуют.

Указание. См. пример 1.4.4 и указание к задаче 2.4.

Задача 2.6. Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Найти $\lim\limits_n P_{11}(n)$, если он существует.

Ответ: $\lim\limits_n P_{11}(n) = 1/10$.

Задача 2.7. Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Существует ли предел $\lim\limits_n P_{22}(n)$? Если существует — найти его.

Ответ: $\lim\limits_n P_{22}(n) = 1/2$.

Задача 2.8. Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Задано распределение цепи в момент времени $t = 0$ (начальное распределение):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/8 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Вычислить

$$\lim_n P\{\xi_n = k\},\ k = 1, 2, 3.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь следствием из эргодической теоремы 2.1.2 и теоремой 2.1.5 (о стационарном и эргодическом распределении).

Предельное распределение цепи не зависит от начального распределения и совпадает с эргодическим распределением:

$$\lim_n P\{\xi_n = j\} = \pi_j,\ j = 1, 2, 3,$$

$$\lim_n P\{\xi_n = 1\} = 1/7,\ \lim_n P\{\xi_n = 2\} = 3/7, \lim_n P\{\xi_n = 3\} = 3/7.$$

Задача 2.9. Рассматривается марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3, 4\}$, описываемая матрицей переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислить $\lim\limits_n P_{ij}(n)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, если эти пределы существуют.

Задача 2.10. Рассматривается марковская цепь с фазовым пространством $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, описываемая матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния марковской цепи. Для возвратных состояний найти математическое ожидание времени первого возвращения в состояние.

О т в е т: $M\theta_j = 1/\pi_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$; $\mathrm{M}\theta_1 = 17$, $M\theta_2 = 17/2$, $M\theta_3 = 17/2$, $M\theta_4 = 17/4$, $M\theta_5 = 17/8$.

Задача 2.11. Рассматривается марковская цепь с фазовым пространством $\{1, 2, 3, 4\}$, описываемая матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

1° Можно ли утверждать, что $\lim\limits_n P_{32}(n)$ существует?

2° Если $\lim\limits_n P_{32}(n)$ существует, найти его.

3° Вычислить математическое ожидание времени первого возвращения в состояние 2.

Задача 2.12. Классифицировать состояния марковской цепи с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

и вычислить $\lim\limits_n P_{ij}(n)$, если эти пределы существуют.

Для возвратных состояний найти математическое ожидание времени первого возвращения.

Указание. См. пример 2.1.3. Состояние 1 — несущественное, $C_2 = \{2\}$, $C_3 = \{3, 4, 5\}$ — классы эквивалентности;

$$\lim_n P_{ij}(n) = \pi_j, \ i, j = 3, 4, 5,$$

$\{\pi_3, \pi_4, \pi_5\}$ — эргодическое распределение на классе C_3, $\pi_3 = 1/2$, $\pi_4 = 1/4$, $\pi_5 = 1/4$;

$$\lim_n P_{1j}(n) = \pi_1(C_3)\pi_j = (1/3)\pi_j, \ i, j = 3, 4, 5,$$

$$\lim_n P_{12}(n) = \pi_1(C_2)\pi_2 = (2/3) \cdot 1 = 2/3,$$

для возвратных состояний среднее времени возвращения $M\theta_j = 1/\pi_j, j = 2, 3, 4, 5.$

Задача 2.13. Марковская цепь задана матрицей одношаговых переходных вероятностей:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Что можно сказать о предельном поведении распределения цепи?

Указание. См. пример 2.1.3 и указание к решению задачи 2.12.

Задача 2.14. Классифицировать состояния цепи Маркова с матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/2 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Найти предельное распределение марковской цепи.

Задача 2.15. Найти предельные значения $P_{ij}(n)$ для марковских цепей, заданных матрицами одношаговых переходных вероятностей:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 2.16. Найти предельные значения $P_{ij}(n)$ для марковской цепи, заданной матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 2.17. Пусть марковская цепь задана матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Найти $\lim\limits_n P_{ij}(n)$ для всех пар $(i,\ j)$.

Задача 2.18. Для марковской цепи с с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислить $\lim\limits_n P_{ij}(n)$, $i, j = 1, 2, \ldots 6$, если эти пределы существуют.

Указание. См. пример 2.1.3. Состояния 4 и 5 — несущественные, $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_6 = \{6\}$ — классы эквивалентности;

$$\lim_n P_{ij}(n) = \pi_j,\ i, j = 1, 2, 3,$$

$\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ — эргодическое распределение на классе C_1;

$$\lim_n P_{56}(n) = \pi_5(C_6)\pi_6 = (1/4) \cdot 1 = 1/4;$$

$$\pi_5(C_6) = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \ldots\right) +$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \ldots\right) = \frac{1}{4};$$

$$\lim_n P_{5j}(n) = \pi_5(C_1)\pi_j = (3/4)\pi_j,\ j = 1, 2, 3.$$

Задача 2.19. Для марковских цепей, описанных в задаче 1.11

1) найти $\lim_n P_{ij}(n)$, $i, j = 1, 2, \ldots 6$ (если эти пределы существуют);

2) найти предельное распределение (если оно существует).

Указания.

В марковской цепи $\{\zeta_n\}$ состояния $2, 3, \ldots, 6$ несущественные, состояние 1 является поглощающим экраном.

Для $i \neq 1$

$$\sum_{j=1}^{6} P_{ij}(n) = 1. \tag{2.4.1}$$

Поскольку при $j \neq 1$ значения $\lim_n P_{ij}(n) = 0$ — состояния $i, j = 2, 3, \ldots, 6$, несущественные, то переходя в равенстве (2.4.1) к пределу при $n \to \infty$, получим $\lim_n P_{i1}(n) = 1$.

Марковская цепь $\{\gamma_n\}$ неприводимая, непериодическая, возвратная, ненулевая (последнее в силу конечности цепи, см. теорему 1.3.7). Поэтому существует эргодическое распределение

$$\lim_n P_{ij}(n) = \pi_j, \ j = 1, 2, \ldots 6,$$

и оно совпадает с собственным стационарным распределением, т. е. удовлетворяет системе

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{P}'\pi & = & \pi, \\ \sum_{j=1}^{6} \pi_j & = & 1. \end{array} \right.$$

Подробнее эта система перепишется так:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} \pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & + & \pi_4 & + & \pi_5 & + & \pi_6 & = & 6\pi_1, \\ \pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & + & \pi_4 & + & \pi_5 & + & \pi_6 & = & 6\pi_2, \\ 4\pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & + & \pi_4 & + & \pi_5 & + & \pi_6 & = & 6\pi_3, \\ & & 3\pi_2 & + & \pi_3 & + & \pi_4 & + & \pi_5 & + & \pi_6 & = & 6\pi_4, \\ & & & & 2\pi_3 & + & \pi_4 & + & \pi_5 & + & \pi_6 & = & 6\pi_5, \\ & & & & & & \pi_4 & + & \pi_5 & + & \pi_6 & = & 6\pi_6, \\ \pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & + & \pi_4 & + & \pi_5 & + & \pi_6 & = & 1. \end{array} \right.$$

Последовательно вычитая из первого и второго уравнений последнее, получаем

$$\pi_1 = \frac{1}{6}, \ \pi_2 = \frac{1}{6}.$$

Вычитая из третьего уравнения последнее, имеем

$$3\pi_1 = 6\pi_3 - 1,$$

отсюда $\pi_3 = 1/4$. И так далее, получаем

$$\pi_4 = \frac{7}{36},\ \pi_5 = \frac{11}{72},\ \pi_6 = \frac{5}{72}.$$

Задача 2.20. Исследовать предельное поведение марковских цепей, описанных в задаче 1.11.

Задача 2.21. Исследовать предельное поведение марковских цепей, описанных в задаче 1.12.

Задача 2.22. Исследовать предельное поведение марковских цепей, описанных в задаче 1.14.

Задача 2.23. Исследовать предельное поведение марковских цепей, описанных в задаче 1.15.

Задача 2.24. Для марковской цепи из примера 1.3.4 найти ее предельное распределение (если оно существует).

Задача 2.25. Найти предельные значения $P_{ij}(n)$ при $n \to \infty$ для марковской цепи, задаваемой матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$1)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$2)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 2.26. Найти предельные значения $P_{ij}(n)$ для марковской цепи, задаваемой матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$1)\ \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$2)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 2.27. Доказать, что если в марковской цепи

$$\eta_{n+1} = (\eta_n - s)^+ + \xi_n,\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, \ldots,$$

описывающей очередь, среднее число заявок, поступивших за период обслуживания,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k > s,$$

и $a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots$, то цепь $\{\eta_n\}$ является невозвратной и, как следствие, сходится по вероятности к $+\infty$.

Указания. См. теорему 2.2.1.

Задача 2.28. Доказать, что если в марковской цепи

$$\eta_{n+1} = (\eta_n - s)^+ + \xi_n,\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, \ldots,$$

описывающей очередь,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k < s,$$

и $a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots$, то цепь $\{\eta_n\}$ является возвратной и, как следствие, ее распределение сходится к эргодическому распределению.

Указания. См. теорему 2.2.2.

Глава 3

Марковские цепи с непрерывным временем

3.1 Основные понятия и определения

Определение. Семейство случайных величин

$$\{\xi(t), t \in [0, \infty)\}$$

со значениями в $\mathbb{R}^1$, зависящее от параметра $t \in [0, \infty)$, будем называть *случайным процессом* со значениями в $\mathbb{R}^1$, заданным на множестве $[0, \infty)$.

Параметр t чаще всего интерпретируется как время.

Случайный процесс

$$\{\xi(t), t \in [0, \infty)\}$$

при каждом фиксированном t является случайной величиной — функцией на Ω вероятностного пространства $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$. Так что случайный процесс

$$\xi(t) = \xi(t, \omega),\ (t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega,$$

является функцией двух переменных t и ω.

Для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ функцию

$$\xi(t) = \xi(t, \omega),\ t \in [0, \infty),$$

со значениями в $\mathbb{R}^1$, заданную на $[0, \infty)$, будем называть *траекторией* случайного процесса $\{\xi(t), t \in [0, \infty)\}$.

Определение. Случайный процесс $\{\xi(t), t \in [0, +\infty)\}$ со значениями в $\{0, 1, \ldots\}$ будем называть *марковской цепью с непрерывным временем*, если для него имеет место *марковское свойство*: для любых $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ и $j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, i, j$

$$P\{\xi(t_{n+1}) = j \mid \xi(t_n) = i, \xi(t_{n-1}) = j_{n-1}, \ldots, \xi(t_1) = j_1, \xi(t_0) = j_0\} =$$

$$= P\{\xi(t_{n+1}) = j \mid \xi(t_n) = i\}.$$

Далее множество $X = \{0, 1, \ldots\}$ значений цепи будем называть её *фазовым пространством.*

Определение. Условную вероятность

$$P\{\xi(t) = j \mid \xi(s) = i\} = P_{ij}(s, t),$$

$s, t \in [0; \infty),\ s < t,\ i, j = 0, 1, 2, \ldots,$ называют *переходной вероятностью* (*вероятностью перехода*) марковской цепи.

Вероятность

$$P_k(t) = P\{\xi(t) = k\},\ t > 0,$$

называют *вероятностью пребывания* цепи в состоянии k $(k = 0, 1, \ldots)$ в момент времени t.

Определение. Марковскую цепь будем называть *марковской цепью со стационарными переходными вероятностями* или *стационарной марковской цепью*, если ее переходные вероятности

$$P\{\xi(t + s) = j \mid \xi(s) = i\} = P_{ij}(s, s + t),\ i, j = 0, 1, 2, \ldots;\ s, t > 0$$

не зависят от s. При этом переходные вероятности называют *стационарными* и обозначают $P_{ij}(t)$:

$$P\{\xi(t + s) = j \mid \xi(s) = i\} = P_{ij}(t),\ i, j = 0, 1, 2, \ldots;\ s, t > 0.$$

Мы будем рассматривать марковские цепи со стационарными переходными вероятностями.

Определение. *Матрицей переходных вероятностей* марковской цепи $\{\xi(t), t \in [0, \infty)\}$ будем называть матрицу, элементами которой являются переходные вероятности

$$P_{ij}(t) = P\{\xi(t + s) = j \mid \xi(s) = i\},\ i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

Непосредственно из определения матрицы переходных вероятностей следуют такие её свойства:

1° $P_{ij}(t) \geq 0, t \geq 0, i,j = 0,1,2,\ldots,$ и $\sum\limits_j P_{ij}(t) = 1,$ $t \geq 0$, $i = 0,1,2,\ldots$, — каждая строка матрицы переходных вероятностей является вероятностным распределением на фазовом пространстве $X = \{0,1,2,\ldots\}$, зависящим от параметра t, $t \in [0,\infty)$.

2° Переходные вероятности $P_{ij}(t)$ удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена:

$$P_{ij}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(s)P_{kj}(t),\ s,t \geq 0,\ i,j = 0,1,2,\ldots,$$

или в матричном виде,

$$\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t),$$

где $\mathbb{P}(t) = [P_{ij}(t)]$, $t \geq 0$.

Уравнение Колмогорова-Чепмена является непосредственным следствием марковского свойства.

Далее мы будем рассматривать марковские цепи, переходные вероятности $P_{ij}(h)$, $i,j = 0,1,2,\ldots$, которых обладают *свойством непрерывности* в точке 0, а именно, для каждого i, $i = 0,1,2,\ldots$,

$$\lim_{h\to 0+0} P_{ii}(h) = 1,\ \ \lim_{h\to 0+0} P_{ij}(h) = 0,\ j \neq i, j = 0,1,2,\ldots,$$

— вероятностное распределение, задаваемое i-й строкой, $i = 0,1,2,\ldots$, при $h \to 0+0$ сходится к распределению, сосредоточенному в точке i.

В силу стационарности цепи непрерывность переходных вероятностей в точке 0 влечет непрерывность в каждой точке $t > 0$.

Непрерывность переходных вероятностей фактически обозначает непрерывность стационарной марковской цепи, в следующем смысле: если цепь в момент t находится в состоянии i, то за малое время h с вероятностью близкой к 1 цепь и останется в состоянии i (за малое время с вероятностью близкой к 1 состояние цепи не изменится).

Матрицу переходных вероятностей, элементы $P_{ij}(h)$, $i,j = 0,1,2,\ldots$, которой удовлетворяют свойству непрерывности, будем называть *стандартной матрицей.*

Следующее соотношение (уравнение Колмогорова-Чепмена) является непосредственным следствием марковского свойства.

Теорема 3.1.1 (уравнение Колмогорова-Чепмена). *Переходные вероятности марковской цепи удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена:*

$$P_{ij}(s+t) = \sum_k P_{ik}(s)P_{kj}(t), \ \ s,t \geq 0, \ \ i,j = 0,1,\ldots, \qquad (3.1.1)$$

или в матричном виде:

$$\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t).$$

Доказательство. Очевидно,

$$\{\xi(s+t) = j, \xi(0) = i\} = \bigcup_k \{\xi(0) = i, \xi(s) = k, \xi(s+t) = j\},$$

причем события в правой части несовместны. Отсюда

$$P\{\xi(s+t) = j \,|\, \xi(0) = i\} = \sum_k P\{\xi(s+t) = j, \xi(s) = k \,|\, \xi(0) = i\} =$$

$$= \sum_k \frac{P\{\xi(s+t) = j, \xi(s) = k, \xi(0) = i\}}{P\{\xi(0) = i\}} =$$

$$= \sum_k \frac{P\{\xi(s+t) = j \,|\, \xi(s) = k, \xi(0) = i\} P\{\xi(s) = k, \xi(0) = i\}}{P\{\xi(0) = i\}} =$$

$$= \sum_k \frac{P\{\xi(s+t) = j \,|\, \xi(s) = k\} P\{\xi(s) = k, \xi(0) = i\}}{P\{\xi(0) = i\}} =$$

$$= \sum_k P\{\xi(s+t) = j \,|\, \xi(s) = k\} P\{\xi(s) = k \,|\, \xi(0) = i\} =$$

$$= \sum_k P_{ik}(s)P_{kj}(t).$$

Замечание. Равенство

$$\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t), \ \ s \geq 0, t \geq 0,$$

обозначает, что семейство операторов $\mathbb{P}(t)$, $t \geq 0$, обладает полугрупповым свойством.

Следствие 1. Для любых неотрицательных $t_1, t_2, \ldots, t_n$

$$P_{ij}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}} P_{ik_1}(t_1) P_{k_1 k_2}(t_2) \ldots P_{k_{n-1} j}(t_n). \tag{3.1.2}$$

Доказательство.

$$P_{ij}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = P_{ij}(t_1 + (t_2 + \ldots + t_n)) =$$

$$= \sum_{k_1} P_{ik_1}(t_1) P_{k_1 j}(t_2 + t_3 + \ldots + t_n) =$$

$$= \sum_{k_1} P_{ik_1}(t_1) \sum_{k_2} P_{k_1 k_2}(t_2) P_{k_2 j}(t_3 + t_4 + \ldots + t_n) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}} P_{ik_1}(t_1) P_{k_1 k_2}(t_2) \ldots P_{k_{n-1} j}(t_n).$$

Следствие 2.

$$P_{ij}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \geq P_{ik_1}(t_1) P_{k_1 k_2}(t_2) \ldots P_{k_{n-1} j}(t_n),$$

в частности,

$$P_{ij}(s + t) \geq P_{ik}(s) P_{kj}(t).$$

Следствие 3.

$$P_{ii}(t) \geq (P_{ii}(t/n))^n.$$

Достаточно в следствии 2 положить $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t/n$, $j = i, k_1 = i, k_2 = i, \ldots, k_{n-1} = i$.

Задание марковской цепи. Марковская цепь с непрерывным временем $\{\xi(t), t \in [0, +\infty)\}$ считается заданной, если заданы ее конечномерные распределения, а именно, для любых $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ и $i_0, i_1, \ldots, i_n$ заданы

$$P_{t_0 t_1 \ldots t_n}(i_0, i_1, \ldots i_n) = P\{\xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_n) = i_n\}.$$

Как и для цепей Маркова с дискретным временем, *марковская цепь с непрерывным временем задается своим начальным распределением (распределением при $t = 0$) и матрицей переходных вероятностей $[P_{ij}(t)]$, $t > 0$.*

Убедимся в этом. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Воспользовавшись формулой умножения и марковским свойством, имеем

$$P\{\xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \xi(t_n) = i_n\} =$$
$$= P\{\xi(t_n) = i_n \,|\, \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, \xi(t_0) = i_0\}\times$$
$$\times P\{\xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \xi(t_{n-2}) = i_{n-2}, \ldots, \xi(t_0) = i_0\} =$$
$$= P\{\xi(t_n) = i_n \,|\, \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}\}\times$$
$$\times P\{\xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \xi(t_{n-2}) = i_{n-2}, \ldots, \xi(t_0) = i_0\} =$$
$$= P_{i_{n-1}\, i_n}(t_n - t_{n-1})\times$$
$$\times P\{\xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \xi(t_{n-2}) = i_{n-2}, \ldots, \xi(t_0) = i_0\} =$$
$$= P_{i_{n-1}\, i_n}(t_n - t_{n-1}) \cdot P_{i_{n-2}\, i_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2}) \times \ldots$$
$$\ldots \times P_{i_0\, i_1}(t_1 - t_0) \cdot P\{\xi(t_0) = i_0\} =$$
$$= P\{\xi(t_0) = i_0\} P_{i_0\, i_1}(t_1 - t_0) \times \ldots$$
$$\ldots \times P_{i_{n-2}\, i_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2}) P_{i_{n-1}\, i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

Равенство

$$P\{\xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \xi(t_n) = i_n\} =$$
$$= P\{\xi(t_0) = i_0\} P_{i_0\, i_1}(t_1 - t_0) P_{i_1\, i_2}(t_2 - t_1) \times \ldots$$
$$\ldots \times P_{i_{n-2}\, i_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2}) P_{i_{n-1}\, i_n}(t_n - t_{n-1}). \qquad (3.1.3)$$

и обозначает, что цепь задается ее матрицей переходных вероятностей $[P_{ij}(t)]$ и начальным распределением $P\{\xi(t_0) = i_0\}$.

Во многих ситуациях вероятности пребывания цепи $P_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, при всех $t > 0$ определяются поведением матрицы переходных вероятностей $[P_{ij}(h)]$ в окрестности нуля. Точнее, можно выписать систему дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют $P_n(t)$. Поэтому общий подход в задании марковских цепей с непрерывным временем состоит в задании (постулировании) вида матрицы переходных вероятностей $[P_{ij}(h)]$ в окрестности нуля.

При изучении цепей Маркова с непрерывным временем (как и для цепей с дискретным временем) важной задачей является изучение асимптотического поведения распределения $\xi(t)$, т. е. поведения вероятностей пребывания

$$P\{\xi(t) = n\} = P_n(t),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

при $t \to \infty$.

3.2 Процесс чистого рождения

Пусть $\xi(t)$ — размер популяции леммингов, зайцев, лис, волков и т. п. на данной территории. При благоприятных условиях — достаточном количество пищи, отсутствии смертности, отсутствии миграции размер популяции будет неограниченно расти. (Реально неограниченный рост невозможен хотя бы потому, что при большом размере популяции пищи для всех не хватит.) Математической моделью численности популяции в описанной ситуации является так называемый процесс чистого рождения.

Определение. *Процессом чистого рождения* будем называть стационарную марковскую цепь с непрерывным временем, переходные вероятности которой в окрестности нуля удовлетворяют следующим постулатам: для каждого $k,\ k = 0, 1, \dots,$

1° $P_{k,k}(0) = 1,\ P_{k,j}(0) = 0,\ j \neq k,\ j = 0, 1, \dots;$

2° $P_{k,k+1}(h) = \lambda_k h + o(h),\ h \to 0 + 0;$

3° $P_{k,k}(h) = 1 - \lambda_k h + o(h),\ h \to 0 + 0.$

Из 2° – 3° следует, что *для* $j \neq k, k+1$

$$P_{k,j}(h) = o(h),\ h \to 0 + 0$$

— вероятности перехода цепи в несоседние состояния есть величины порядка $o(h)$ *при* $h \to 0 + 0$.

Параметры $\lambda_k, k = 0, 1, 2, \dots,$ — неотрицательные числа, а $o(h)$ могут, вообще говоря, зависеть от k.

Числа $\lambda_k,\ k = 0, 1, \dots,$ называют *инфинитезимальными интенсивностями роста* процесса чистого рождения.

Матрицу

$$\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

называют *инфинитезимальной матрицей* процесса чистого рождения.

Заметим, что в точке нуль существуют производные переходных вероятностей процесса чистого рождения и они равны интенсивностям роста:

$$P'_{k,\,k+1}(0) = \lambda_k,$$

$$P'_{k,\,k}(0) = -\lambda_k.$$

Второй постулат процесса чистого рождения обозначает, что при малых h вероятность покинуть состояние k (перейти в состояние $k+1$) растет пропорционально времени h (как $\lambda_k h$), третий постулат обозначает, что при малых h вероятность пребывания в состоянии k убывает (как $1-\lambda_k h$).

Непосредственно из определения процесса чистого рождения следует, что переходные вероятности обладают свойством непрерывности.

Постулируя вид переходных вероятностей процесса чистого рождения при малых h (локально), мы обеспечиваем монотонность его траекторий — за малое время (локально) цепь из данного состояния k может перейти только в соседнее состояние $k+1$ (с вероятностью $\lambda_k h + o(h)$), либо остаться на месте (в состоянии k), естественно, с вероятностью $1-\lambda_k h + o(h)$.

Заданные локально (при малых h) переходные вероятности $P_{ij}(h)$ определяют вероятности пребывания $P_k(t) = P\{\xi(t) = k\}$ цепи $\xi(t)$ для всех $t > 0$.

Теорема 3.2.1. *У процесса чистого рождения*

$$\{\xi(t), t \in [0;\infty), \xi(0) = 0\}$$

с интенсивностями рождения λ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *стартующего из нуля, вероятности пребывания*

$$P_k(t) = P\{\xi(t) = k\},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t), \\ P_{k+1}'(t) = -\lambda_{k+1} P_{k+1}(t) + \lambda_k P_k(t),\ k = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Сначала составим уравнение для вероятности $P_0(t)$ пребывания процесса в точке 0.

Для процесса чистого рождения $\{\xi(t), t \in [0;\infty), \xi(0) = 0\}$ при малых h траектория монотонно неубывающая, поэтому

$$P_0(t+h) = P\{\xi(t+h) = 0\} = P\{\xi(t+h) = 0, \xi(t) = 0\} =$$

$$= P\{\xi(t+h) = 0 \,|\, \xi(t) = 0\} P\{\xi(t) = 0\} = P_{00}(h) P_0(t) =$$
$$= (1 - \lambda_0 h + o(h)) P_0(t),$$

отсюда
$$P_0(t+h) = P_0(t) - \lambda_0 h P_0(t) + P_0(t)o(h)$$
или
$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda_0 P_0(t) + P_0(t)\frac{o(h)}{h}.$$
Переходя к пределу в правой и левой частях при $h \to 0+0$ (предел правой части существует), получаем
$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t). \tag{3.2.1}$$

Далее получим уравнения, которым удовлетворяют вероятности пребывания $P_k(t) = P\{\xi(t) = k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Имеем
$$P_{k+1}(t+h) = P\{\xi(t+h) = k+1\} =$$
$$= P\left(\{\xi(t+h) = k+1\} \cap \left(\bigcup_{i=0}^{k+1}\{\xi(t) = i\}\right)\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k+1} P\{\xi(t+h) = k+1, \xi(t) = i\} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k+1} P\{\xi(t+h) = k+1 \,|\, \xi(t) = i\} P\{\xi(t) = i\} =$$
$$= P\{\xi(t+h) = k+1 \,|\, \xi(t) = k+1\} + P\{\xi(t+h) = k+1 \,|\, \xi(t) = k\} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-1} P\{\xi(t+h) = k+1 \,|\, \xi(t) = i\} P\{\xi(t) = i\} =$$
$$= P_{k+1,\,k+1}(h) P_{k+1}(t) + P_{k,k+1}(h) P_k(t) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-1} P_i(t) P_{i,k+1}(h) =$$
$$= P_{k+1}(t)(1 - \lambda_{k+1}h + o(h)) + P_k(t)(\lambda_k h + o(h)) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-1} P_i(t)\, o(h) =$$

$$= P_{k+1}(t) - \lambda_{k+1} h P_{k+1}(t) + \lambda_k h P_k(t) + o(h).$$

Отсюда

$$P_{k+1}(t+h) - P_{k+1}(t) = -\lambda_{k+1} h P_{k+1}(t) + \lambda_k h P_k(t) + o(h), \ h \to 0+0.$$

Разделив левую и правую части на h и перейдя к пределу при $h \to 0+0$, для вероятностей пребывания $P_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t), \\ P_{k+1}'(t) = -\lambda_{k+1} P_{k+1}(t) + \lambda_k P_k(t), \ k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.2.2}$$

с начальными условиями

$$P_0(0) = 1, \ P_k(0) = 0, \ k = 1, 2, \ldots$$

Для вероятностей пребывания $P_k(t)$ можно доказать существование и левосторонних производных.

Тем самым теорема доказана.

Из первого уравнения системы (3.2.2)

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t),$$

с учетом начального условия $P_0(0) = 1$ получаем

$$P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}.$$

При конкретных значениях $\lambda_k \geq 0$ можно последовательно проинтегрировать уравнения (3.2.2).

Определение. *Временем пребывания* в состоянии i марковской цепи $\{\xi(t), t \in [0; \infty), \xi(0) = i\}$, стартующей из состояния i, будем называть случайную величину

$$\tau_i = \inf\{t : \xi(t) \neq i, \, \xi(0) = i\}.$$

Цепь до момента τ_i (включительно) пребывает в состоянии i, а в момент τ_i "уходит" из состояния i.

Следствие. *Время пребывания τ_0 в состоянии 0 процесса чистого рождения $\{\xi(t), t \in [0; \infty), \xi(0) = 0\}$, выходящего из 0, распределено показательно с параметром λ_0:*

$$P\{\tau_0 < t\} = 1 - e^{-\lambda_0 t}, \ t > 0.$$

Действительно, при $t > 0$

$$P\{\tau_0 < t\} = 1 - P\{t \le \tau_0\} = 1 - P\{\xi(t) = 0\} = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}.$$

Пуассоновский процесс. Одним из частных случаев процесса чистого рождения является пуассоновский процесс.

Определение 1. *Пуассоновским процессом с параметром* λ ($\lambda > 0$), *стартующим из нуля,* называется процесс чистого рождения $\{\xi(t),\, t \in [0; +\infty), \xi(0) = 0\}$, интенсивности роста которого

$$\lambda_k = \lambda,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Теорема 3.2.2. *У пуассоновского процесса с параметром* λ, *стартующего из нуля, вероятность пребывания в состоянии* k

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Пуассоновский процесс с параметром λ — это процесс чистого рождения, у которого $\lambda_k = \lambda$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, Согласно теореме 3.2.1, вероятности пребывания $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, процесса чистого рождения с интенсивностями роста $\lambda_k = \lambda$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t), \\ P_{k+1}'(t) = -\lambda P_{k+1}(t) + \lambda P_k(t),\ k = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

при начальных условиях

$$P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Чтобы получить решение $P_k(t),\ k = 0, 1, \ldots$, последней системы уравнений введем функции $Q_k(t)$:

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} Q_k(t),\ k = 0, 1, \ldots, \tag{3.2.3}$$

и перепишем систему в терминах $Q_k(t)$. Имеем:

$$\left(e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t)\right)' = -\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t) + \lambda e^{-\lambda t} Q_k(t),$$

$$-\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t) + e^{-\lambda t} Q_{k+1}'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t) + \lambda e^{-\lambda t} Q_k(t),$$

или

$$Q_{k+1}'(t) = \lambda Q_k(t),\ k = 0, 1, \ldots \tag{3.2.4}$$

Заметим, что поскольку

$$P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

то из равенств (3.2.3) для $Q_k(t)$ получаем начальные условия

$$Q_0(0) = 1,\ Q_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Решим систему дифференциальных уравнений (3.2.4) при начальных условиях

$$Q_0(0) = 1,\ Q_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Ранее мы получили, что

$$P_0(t) = e^{-\lambda t},$$

поэтому из (3.2.3) при $k = 0$ имеем

$$Q_0(t) \equiv 1.$$

Для $Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_k(t), \ldots$ последовательно получаем

$$Q_1'(t) = \lambda Q_0(t) = \lambda,$$

$$Q_1(t) - Q_1(0) = \lambda t,$$

что с учетом $Q_1(0) = 0$ дает

$$Q_1(t) = \lambda t,$$

$$Q_2'(t) = \lambda Q_1(t) = \lambda^2 t,$$

$$Q_2(t) - Q_2(0) = \frac{\lambda^2 t^2}{2},$$

что с учетом $Q_2(0) = 0$ дает

$$Q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2},$$

и т. д.,

$$Q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Возвращаясь к функциям $P_k(t)$, получаем

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} Q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \ k = 0, 1, \ldots$$

Заметим, что среднее

$$M\xi(t) = \lambda t$$

размера популяции, описываемой пуассоновским процессом, со временем растет линейно (см. рис. 3.2.1).

Время пребывания τ_i пуассоновского процесса в состоянии i распределено показательно с параметром λ:

$$P\{\tau_i < t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \ t > 0, \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Качественно структуру пуассоновского процесса с параметром λ можно описать так.

Пуассоновский процесс, стартуя из нуля, в течение случайного времени τ_0, распределенного показательно с параметром λ, пребывает в состоянии 0. По истечении времени пребывания τ_0 в состоянии 0 в момент времени $t_0 = \tau_0$ процесс скачком переходит в состояние 1 и пребывает в нем в течение случайного времени τ_1, распределенного показательно с параметром λ и не зависящего от τ_0. По истечении времени пребывания τ_1 в состоянии 1 в момент времени $t_1 = \tau_0 + \tau_1$ процесс скачком переходит в состояние 2 и пребывает в нем в течение случайного времени τ_2, распределенного показательно с параметром λ и не зависящего от τ_0 и τ_1 и т. д.

На рис. 3.2.1 изображена траектория пуассоновского процесса.

Пуассоновский процесс с параметром λ, выходящий из нуля, определяет простейший поток событий (с параметром λ).

Определение. Пусть $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ — последовательность независимых показательно распределенных с параметром λ случайных величин:

$$P\{\tau_i < t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \ t > 0, \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Последовательность моментов времени (последовательность случайных величин)

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \tau_k, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

называется *простейшим потоком событий с параметром* λ (*интенсивности* λ).

Справедливо и обратное. Простейший поток событий с параметром λ — последовательность случайных величин t_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, таких, что случайные величины

$$\tau_0 = t_0,\ \tau_n = t_n - t_{n-1}, n = 1, 2, \ldots,$$

независимые показательно распределенные с параметром λ, задаёт пуассоновский процесс

$$\{\xi(t),\, t \in [0; +\infty), \xi(0) = 0\}$$

с параметром λ, выходящий из нуля, а именно, на промежутке $[0, t_0]$ процесс $\xi(t)$ принимает значение 0, на промежутке $(t_{k-1}, t_k]$ процесс $\xi(t)$ принимает значение k, $k = 1, 2, \ldots$

Эквивалентным приведенному выше определению пуассоновского процесса является следующее.

Определение 2. *Пуассоновским процессом с параметром* λ ($\lambda > 0$), *стартующим из нуля,* будем называть случайный процесс $\{\xi(t),\, t \in [0; +\infty), \xi(0) = 0\}$, удовлетворяющий следующим постулатам:

1) для любых $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ случайные величины $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, $\xi(t_2) - \xi(t_1)$, $\ldots$, $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ независимы ($\xi(t)$ является процессом с независимыми приращениями);

2) приращение $\xi(t) - \xi(s)$, $0 \le s < t$, имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda(t - s)$:

$$P\{\xi(t) - \xi(s) = k\} = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

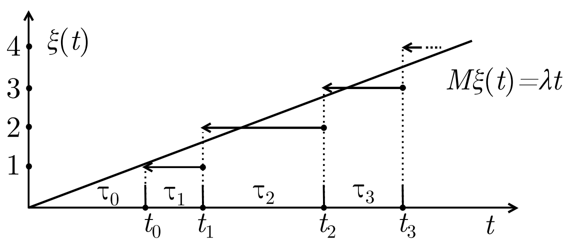

Рис. 3.2.1: Траектория пуассоновского процесса

Процесс Юла. Рассмотрим один важный частный случай процесса чистого рождения, так называемый процесс Юла.

Предположим, что в момент времени $t = 0$ в популяции имеется k_0 особей ($k_0 > 0$). Предположим, что каждая особь популяции независимо от других в интервале времени длиной h с вероятностью $\beta h + o(h)$ порождает новую особь. Через $\xi(t)$ обозначим размер популяции в момент времени t. Процесс

$$\{\xi(t),\, t \in [0; +\infty), \xi(0) = k_0\}$$

называют процессом Юла.

Если в момент времени t размер популяции $\xi(t) = k$ ($k = 1, 2, \ldots$), то за промежуток времени $(t, t+h)$ размер популяции увеличится на 1 (с k до $k+1$) с вероятностью

$$C_k^1(\beta h + o(h))^1(1 - \beta h - o(h))^{k-1} = k\beta h + o(h),\ h \to 0+0$$

и останется неизменным с вероятностью

$$C_k^0(\beta h + o(h))^0(1 - \beta h - o(h))^k = 1 - k\beta h + o(h),\ h \to 0+0$$

(это вероятности соответственно одного успеха и нуль успехов в k испытаниях Бернулли). Так что

$$P\{\xi(t+h) = k+1 \,|\, \xi(t) = k\} = k\beta h + o(h),$$

$$P\{\xi(t+h) = k \,|\, \xi(t) = k\} = 1 - k\beta h + o(h).$$

Поэтому процесс Юла — частный случай процесса чистого рождения, переходные вероятности которого при малых h ($h \to 0{+}0$) имеют вид

$$P_{k,k+1} = k\beta h + o(h) = \lambda_k h + o(h),$$

$$P_{k,k} = 1 - k\beta h + o(h) = 1 - \lambda_k h + o(h),$$

интенсивности роста $\lambda_k = k\beta$, $k = 1, 2, \ldots$

Система уравнений (3.2.2) для вероятностей пребывания процесса Юла, стартующего из 1 (размер популяции $\xi(0)$ в момент времени 0 равен 1), имеет вид

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda_1 P_1(t), \\ P_{k+1}'(t) = -\lambda_{k+1} P_{k+1}(t) + \lambda_k P_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

подробнее,

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\beta P_1(t), \\ P_{k+1}'(t) = -(k+1)\beta P_{k+1}(t) + k\beta P_k(t),\ k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Начальные условия

$$P_1(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k = 2, 3, \ldots$$

Решение системы (3.2.5)

$$P_k(t) = e^{-\beta t}(1 - e^{-\beta t})^{k-1},\ k = 1, 2, 3, \ldots,$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Последнее обозначает, что распределением в момент времени t процесса Юла, стартующего из состояния 1, является геометрическое распределение с параметром $p_t = e^{-\beta t}$, “смещенное на 1”, т. е. заданное на множестве $k = 1, 2, 3, \ldots$

Средний размер популяции, описываемой процессом Юла, в момент времени t

$$M\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_t (1 - p_t)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1 + (k-1)) p_t (1 - p_t)^{k-1} = 1 + \frac{1 - p_t}{p_t} = e^{\beta t}$$

растет экспоненциально, см. рис. 3.2.2.

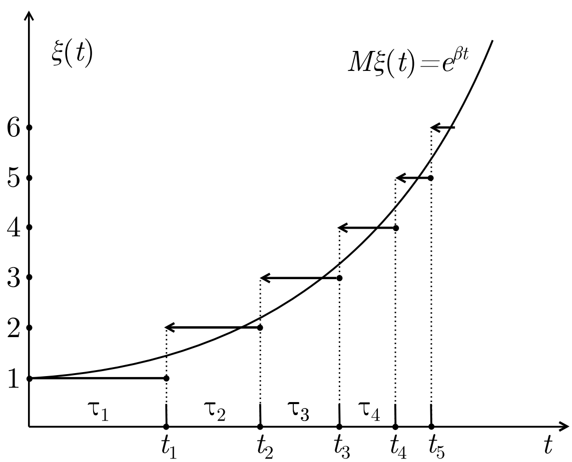

Рис. 3.2.2: Траектория процесса Юла ($\beta = 1$)

Время пребывания τ_k процесса Юла в состоянии k распределено показательно с параметром $\lambda_k = k\beta$, $k = 1, 2, \ldots$ (подробнее о распределении времени пребывания марковской цепи в состоянии см. в параграфе 3.6). Среднее время пребывания $M\tau_k$ в состоянии k равно $1/(k\beta)$. Траектория процесса Юла (с параметром $\beta = 1$) изображена на рис. 3.2.2.

Средний размер популяции $M\xi(t) = e^{\beta t}$, начало которой положила одна особь, в момент времени $t = 10$ составляет $M\xi(10) = e^{1\cdot 10} = 22\,026$ особей. Среднее время, в течение которого численность популяции размера k остается неизменной, равна $M\tau_k = 1/(k\beta)$ и, например, для популяции численностью $k = 20\,000$ особей составляет $M\tau_{20\,000} = 1/20\,000 = 0,00005$.

3.3 Процессы рождения и гибели

Естественным обобщением процесса чистого рождения является процесс рождения и гибели — если в момент t процесс находится в состоянии k, то за малое время h он либо переходит в одно из соседних состояний $(k+1)$ или $(k-1)$, либо остается в том же состоянии k.

О п р е д е л е н и е. *Процессом рождения и гибели* будем называть стационарную марковскую цепь с непрерывным временем, переходные вероятности которой в окрестности нуля удовлетворяют следующим постулатам: для каждого k, $k = 0, 1, \ldots,$

1° $P_{k,k}(0) = 1,\ P_{k,j}(0) = 0,\ j \neq k,\ j = 0, 1, \ldots;$

2° $P_{k,k+1}(h) = \lambda_k h + o(h)$ при $h \to 0+0,\ k \geq 0;$

3° $P_{k,k-1}(h) = \mu_k h + o(h)$ при $h \to 0+0,\ k \geq 1;$

4° $P_{k,k}(h) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)h + o(h)$ при $h \to 0+0,\ k \geq 0.$

Из 2° – 4° следует, что для $j \neq k-1, k, k+1$

$$P_{k,j}(h) = o(h),\ h \to 0+0,$$

— вероятности перехода в состояния отличные от соседних есть величины порядка $o(h)$ при $h \to 0+0$.

Параметры λ_k, μ_k $(\mu_0 = 0, \lambda_0 > 0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, неотрицательны, их называют *инфинитезимальными интенсивностями рождения и гибели* соответственно.

В равенствах пунктов 2° – 4° слагаемые $o(h)$ могут зависеть от k.

Определение. Матрицу

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

называют *инфинитезимальной матрицей процесса* рождения и гибели.

Инфинитезимальная матрица равна производной от матрицы переходных вероятностей процесса рождения и гибели, вычисленной в точке 0:

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbb{P}'(0) = [P'_{i,j}(0)].$$

Обратные дифференциальные уравнения Колмогорова для процесса рождения и гибели. Переходные вероятности $P_{i,j}(t)$ процесса рождения и гибели удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, известных под названием обратных дифференциальных уравнений Колмогорова. Получим эти уравнения.

Пусть $h > 0, t > 0$. Из уравнения Колмогорова–Чепмена имеем при $i = 1, 2, \dots,\ j = 0, 1, 2, \dots$

$$P_{i,j}(h+t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}(h) P_{k,j}(t) =$$

$$= P_{i,i-1}(h)P_{i-1,j}(t) + P_{i,i}(h)P_{i,j}(t) + P_{i,i+1}(h)P_{i+1,j}(t) +$$

$$+ \sum_k{}' P_{i,k}(h) P_{k,j}(t),\ \ i = 1, 2, \dots, \qquad (3.3.1)$$

в последней сумме суммирование ведется по всем $k \neq i-1, i, i+1$. При $h \to 0$

$$\sum_k{}' P_{i,k}(h)P_{k,j}(t) \le \sum_k{}' P_{i,k}(h) = 1 - (P_{i,i-1}(h) + P_{i,i}(h) + P_{i,i+1}(h)) =$$

$$= 1 - ((\mu_i h + o(h)) + (1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)) + (\lambda_i h + o(h))) = o(h).$$

Так что

$$\sum_k{}' P_{i,k}(h)P_{k,j}(t) = o(h).$$

Воспользовавшись постулатами процесса рождения и гибели и последним соотношением, перепишем равенство (3.3.1) так:

$$P_{i,j}(t+h) = \mu_i h P_{i-1,j}(t) + (1-(\lambda_i+\mu_i)h)P_{i,j}(t) + \lambda_i h P_{i+1,j}(t) + o(h),$$

$i = 1, 2, \ldots$ Перенесем $P_{i,j}(t)$ в левую часть, разделим полученное равенство на h и перейдем к пределу при $h \to 0+0$. В результате получим

$$P'_{i,j}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{i,j}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t), \; i = 1, 2, \ldots \tag{3.3.2}$$

Для $i = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ выкладки аналогичные приведенным выше дают

$$P'_{0,j}(t) = -\lambda_0 P_{0,j}(t) + \lambda_0 P_{1,j}(t), \tag{3.3.3}$$

при $t = 0$

$$P_{k,j}(0) = \delta_{kj}, \; k, j = 0, 1, 2, \ldots$$

Уравнения (3.3.2), (3.3.3) называются *обратными дифференциальными уравнениями Колмогорова.*

В обратных дифференциальных уравнениях конечное состояние j фиксировано (второй индекс у $P_{i,j}(t)$ фиксирован, а первый индекс меняется).

Обратные дифференциальные уравнения удобно записывать в матричном виде

$$\mathbb{P}'(t) = \boldsymbol{\nu}\mathbb{P}(t),$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — инфинитезимальная матрица процесса рождения и гибели, $\mathbb{P}'(t) = [P'_{ij}(t)]$.

З а м е ч а н и е к обозначениям. Обычно матрицу транспонированную к данной матрице $\mathbb{P}$ обозначают так $\mathbb{P}'$, но когда "рядом" встречается производная $\mathbb{P}'(t) = [P'_{ij}(t)]$, то матрицу транспонированную к $\mathbb{P}(t)$ будем обозначать через $(\mathbb{P}(t))^T$.

Прямые дифференциальные уравнения Колмогорова для процесса рождения и гибели. При выводе обратных дифференциальных уравнений Колмогорова мы воспользовались уравнением Колмогорова–Чепмена, разбив промежуток $(0, t+h)$ на части $(0, h)$ и $(h, t+h)$. Другая ситуация возникает если промежуток $(0, t+h)$ разбить на части $(0, t)$ и $(t, t+h)$ и использовать тот же подход, что и при выводе обратных дифференциальных уравнений.

Из уравнения Колмогорова–Чепмена при $j = 1, 2, \ldots$, $i = 0, 1, \ldots$ имеем

$$P_{i,j}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}(t) P_{k,j}(h) =$$

$$= P_{i,j-1}(t)P_{j-1,j}(h) + P_{i,j}(t)P_{j,j}(h) + P_{i,j+1}(t)P_{j+1,j}(h) +$$
$$+ \sum_k{}' P_{i,k}(t)P_{k,j}(h), \ j = 1, 2, \ldots, \tag{3.3.4}$$

в последней сумме суммирование ведется по всем k отличным от $j-1$, j, $j+1$.

В предположениях, что $\frac{1}{h}P_{k,j}(h) = o(1)$ при $h \to 0+0$ для $k \neq j-1, j, j+1$ и $o(1)$ равномерно ограничена по k при каждом фиксированном j, можно установить, что

$$\sum_k{}' P_{i,k}(t)P_{k,j}(h) = o(h).$$

Из равенства (3.3.4), последнего равенства и постулатов 2°–4° процесса рождения и гибели при $j = 1, 2, \ldots$ имеем

$$P_{i,j}(t+h) = P_{i,j-1}(t)(\lambda_{j-1}h + o(h)) + P_{i,j}(t)(1-(\lambda_j+\mu_j)h + o(h)) +$$
$$+ P_{i,j+1}(t)(\mu_{j+1}h + o(h)) + o(h).$$

Перенесем $P_{i,j}(t)$ в левую часть, разделим полученное равенство на h и перейдем к пределу при $h \to 0$. В результате для $j = 1, 2, \ldots$ получим

$$P'_{i,j}(t) = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{i,j}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t). \tag{3.3.5}$$

Для $j = 0$, $i = 0, 1, \ldots$ выкладки аналогичные приведенным выше дают

$$P'_{i,0}(t) = -\lambda_0 P_{i,0}(t) + \mu_1 P_{i,1}(t). \tag{3.3.6}$$

При $t = 0$ значения $P_{i,j}(0) = \delta_{ij}, \ j = 0, 1, \ldots, \ i = 0, 1, \ldots$

Уравнения (3.3.5), (3.3.6) известны под названием *прямых дифференциальных уравнений Колмогорова.*

В прямых дифференциальных уравнениях начальное состояние “фиксированно” (первый индекс у $P_{i,j}(t)$ “фиксирован”, меняется второй индекс).

Прямые дифференциальные уравнения удобно записывать в матричном виде:

$$\mathbb{P}'(t) = \boldsymbol{\nu}^T(\mathbb{P}(t))^T,$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — инфинитезимальная матрица процесса рождения и гибели, $\boldsymbol{\nu}^T$ и $(\mathbb{P}(t))^T$ — матрицы, транспонированные соответственно к матрицам $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbb{P}(t)$, $\mathbb{P}'(t) = [P'_{ij}(t)]$ — производная по t.

Эргодическая теорема для процесса рождения и гибели. Для процесса рождения и гибели имеет место следующее утверждение, аналогичное эргодической теореме для дискретных марковских цепей.

Теорема 3.3.1 (эргодическая для процесса рождения и гибели). *У процесса рождения и гибели (с интенсивностями рождения λ_j и гибели μ_j) при $t \to \infty$ существуют пределы переходных вероятностей $P_{i,j}(t)$ и их производных $P'_{i,j}(t)$:*

$$\lim_{t\to\infty} P_{i,j}(t) = \pi_j, \ \lim_{t\to\infty} P'_{i,j}(t) = 0, \ i,j = 0,1,2,\ldots,$$

при этом пределы π_j удовлетворяют уравнениям

$$\begin{array}{rcl} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 & = & 0, \\ \lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1} & = & 0, \ j = 1,2,\ldots, \end{array}$$

или в матричном виде

$$\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0},$$

где $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)'$.

Предельные значения

$$\pi_j = \lim_{t\to+\infty} P_{ij}(t), \ j = 0,1,2,\ldots,$$

задают на фазовом пространстве $\{0,1,2,\ldots\}$ цепи вероятностное распределение (собственное или несобственное). Действительно, из

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}(t) = 1$$

имеем

$$\sum_{j=0}^{N} P_{i,j}(t) \le 1.$$

Предельным переходом при $t \to \infty$ получаем

$$\sum_{j=0}^{N} \pi_j \le 1,$$

отсюда при $N \to \infty$ имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \leq 1.$$

Определение. Вероятностное распределение

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} P_{i,j}(t),\ \ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

называется *эргодическим распределением* процесса рождения и гибели.

Из определения эргодического распределения как предела $P_{i,j}(t)$ при $t \to \infty$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$, следует его единственность.

Теорема 3.3.2 (о предельном значении вероятностей пребывания). *У процесса рождения и гибели предельные значения вероятностей пребывания $P_k(t)$ существуют и совпадают с эргодическими вероятностями:*

$$\lim_{t\to\infty} P_k(t) = \pi_k,\ \ k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого ε

$$|P_k(t) - \pi_k| \leq \varepsilon$$

при достаточно больших t.

Пусть $\{x_i\}$ — начальное распределение цепи. Тогда вероятность пребывания в состоянии k в момент t

$$P_k(t) = P\{\xi(t) = k\} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_{ik}(t).$$

Отсюда имеем

$$|P_k(t) - \pi_k| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_{ik}(t) - \sum_{i=0}^{\infty} x_i \pi_k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N} x_i |P_{ik}(t) - \pi_k| + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} x_i.$$

Второе слагаемое не превосходит ε за счет выбора N достаточно большим, а первое (при фиксированном N) не превосходит ε при достаточно больших t — в силу эргодической теоремы.

Определение. Вероятностное распределение $\{v_j\}$ будем называть *стационарным распределением* процесса рождения и гибели с матрицей переходных вероятностей $[P_{i,j}(t)]$, если для всех $t > 0$

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{i,j}(t) = v_j, \ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

или в матричном виде

$$(\mathbb{P}(t))^T \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{v} = (v_0, v_1, v_2, \ldots)'$.

Теорема 3.3.3 (об эргодическом и стационарном распределениях). *У процесса рождения и гибели эргодическое распределение является стационарным распределением и наоборот, собственное стационарное распределение является эргодическим.*

Доказательство. Убедимся, что эргодическое распределение является стационарным.

Из уравнения Колмогорова—Чепмена

$$P_{jj}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}(s) P_{kj}(t)$$

для любых s, t и N имеем

$$P_{jj}(s+t) \geq \sum_{k=0}^{N} P_{jk}(s) P_{kj}(t).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $s \to \infty$, получаем

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{N} \pi_k P_{kj}(t)$$

(в силу эргодической теоремы $\lim\limits_{t\to\infty} P_{i,k}(t) = \pi_k$). А поскольку N произвольно, то и

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(t), \ j = 0, 1, \ldots \tag{3.3.7}$$

На самом деле все нестрогие неравенства (3.3.7) являются равенствами

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(t),\ \ j = 0, 1, \ldots$$

Действительно, если предположить, что хотя бы одно из неравенств (3.3.7) строгое и просуммировать все неравенства (3.3.7), то

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j > \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(t) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k.$$

Из полученного противоречия и следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(t) = \pi_j,\ \ j = 0, 1, \ldots$$

Так что эргодическое распределение является стационарным.

Пусть теперь $\{v_j\}$ — собственное стационарное распределение цепи:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ij}(t) = v_j,\ \ j = 0, 1, \ldots, \tag{3.3.8}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j = 1.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$ в правой и левой частях равенств (3.3.8), причем в левой части формально под знаком суммы ряда (в силу эргодической теоремы пределы $P_{ij}(t)$ существуют), получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i \pi_j = v_j,\ \ j = 0, 1, \ldots$$

Отсюда, учитывая что $\sum\limits_{i=0}^{\infty} v_i = 1$, имеем

$$v_j = \pi_j,\ j = 0, 1, \ldots$$

Корректность предельного перехода под знаком суммы ряда следует из неравенства

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ij}(t) - \sum_{i=0}^{\infty} v_i \pi_j\right| \le \sum_{i=0}^{N} v_i |P_{ij}(t) - \pi_j| + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} v_i,$$

в котором правая часть меньше 2ε при достаточно больших t — второе слагаемое меньше ε за счет выбора N, а первое слагаемое (при фиксированном N) меньше ε в силу эргодической теоремы.

Процесс рождения и гибели задается интенсивностями роста λ_j и гибели μ_j, поэтому естественно ожидать, что его "предельные характеристики", в частности эргодическое распределение, выражаются через них.

Теорема 3.3.4 (о представлении эргодического распределения). *Пусть* $\{\xi(t), t \in [0,\infty)\}$ *— процесс рождения и гибели с интенсивностями роста* λ_j *и гибели* μ_j $(\mu_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots)$ *и*

$$u_0 = 1,\ u_j = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdots\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j},\ j = 1, 2, \ldots$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty,$$

то эргодическое распределение $\{\pi_j\}$ *процесса* $\{\xi(t), t \in [0,\infty)\}$ *является собственным и оно представимо в виде*

$$\pi_j = u_j \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k},\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = +\infty,$$

то эргодическое распределение является несобственным и

$$\pi_j = 0,\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Доказательство. У процесса рождения и гибели существует собственное или несобственное эргодическое распределение $\{\pi_j\}$ и оно удовлетворяет системе уравнений

$$-\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0,$$
$$\lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, \tag{3.3.9}$$

(см. теорему 3.3.1). Решение $\{\pi_j\}$ последней системы (эргодическое распределение $\{\pi_j\}$) представимо в виде

$$\pi_k = u_k\pi_0, \ k = 1, 2, \ldots \tag{3.3.10}$$

Действительно, из первого уравнения имеем

$$\pi_1 = (\lambda_0/\mu_1)\pi_0 = u_1\pi_0.$$

Поэтому представление (3.3.10) при $k = 1$ имеет место. Предположим, что представление (3.3.10) имеет место и при $k = 2, 3, \ldots, j$ и установим, что оно имеет место и для $k = j + 1$. Из равенства (3.3.9) в предположении

$$\pi_k = u_k\pi_0, \ k = 1, 2, \ldots, j,$$

получаем

$$\mu_{j+1}\pi_{j+1} = (\lambda_j + \mu_j)\pi_j - \lambda_{j-1}\pi_{j-1} =$$
$$= (\lambda_j + \mu_j)u_j\pi_0 - \lambda_{j-1}u_{j-1}\pi_0 =$$
$$= \lambda_j u_j\pi_0 + (\mu_j u_j\pi_0 - \lambda_{j-1}u_{j-1}\pi_0) =$$
$$= \lambda_j u_j\pi_0 + (\mu_j u_j - \lambda_{j-1}u_{j-1})\pi_0.$$

И поскольку

$$\mu_j u_j - \lambda_{j-1}u_{j-1} = 0,$$

что следует из определения u_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$\mu_{j+1}\pi_{j+1} = \lambda_j u_j\pi_0$$

или

$$\pi_{j+1} = (\lambda_j/\mu_{j+1})u_j\pi_0 = u_{j+1}\pi_0, \ j = 1, 2, \ldots$$

Так что эргодическое распределение $\{\pi_k\}$ процесса рождения и гибели представимо в виде

$$\pi_k = u_k\pi_0, \ k = 0, 1, \ldots$$

Учитывая последнее представление для эргодического распределения $\{\pi_k\}$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_0 u_k = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} u_k. \tag{3.3.11}$$

Далее, если интенсивности роста λ_j и гибели μ_j ($\mu_j > 0$) процесса таковы, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится, то положив

$$\pi_0 = 1 \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} u_k,$$

получим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1,$$

т. е. эргодическое распределение $\{\pi_k\}$ собственное и оно представимо в виде

$$\pi_j = u_j \pi_0 = u_j \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k}, \ j = 0, 1, 2, \ldots$$

При этом в силу единственности эргодического распределения других эргодических распределений нет.

Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ расходится, то из равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} u_k,$$

учитывая, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \pi_k \le 1$ ($\{\pi_k\}$ — вероятностное распределение), следует, что $\pi_0 = 0$. Поэтому распределение

$$\pi_j = u_j \pi_0 = 0, \ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

несобственное.

З а м е ч а н и е. Тот факт, что

$$\pi_k = 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

(при $\sum\limits_{k} u_k = \infty$) обозначает, что цепь при $t \to \infty$ “уходит на ∞”.

3.4 Обслуживание с ожиданием

Мы рассмотрим классическую задачу теории массового обслуживания в той постановке, в какой она была решена А.К. Эрлангом.

1° На обслуживающий прибор поступает простейший поток требований интенсивности λ. (Задана *дисциплина поступления требований.*)

2° Если в момент поступления требования обслуживающий прибор свободен, требование начинает немедленно обслуживаться. Если прибор занят, то требование становится в очередь за поступившими ранее требованиями. (Задана *дисциплина очереди.*)

3° В данный момент времени обслуживается только одно требование. Время обслуживания ζ каждого требования показательно распределено с параметром μ и не зависит от продолжительности обслуживания ранее поступивших требований. (Задана *дисциплина обслуживания.*)

З а д а ч а. *Найти распределение длины $\xi(t)$ очереди — количества $\xi(t)$ требований в очереди в момент времени t (если не при всех t, то хотя бы при достаточно больших, т. е. в установившемся режиме).*

Реальных ситуаций, в которых возникают подобные задачи, великое множество. А.К. Эрланг решил эту задачу применительно к телефонной связи.

Рассмотрим подробнее введенные в пунктах 1° и 3° понятия простейшего потока требований и обслуживания требований.

Простейший поток требований. Под простейшим потоком требований интенсивности λ мы понимаем последовательность случайных величин

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \tau_k,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

где τ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — независимые показательно распределенные с параметром λ случайные величины:

$$P\{\tau_k < t\} = 1 - e^{-\lambda t},\ t > 0.$$

Значения $t_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, мы интерпретируем как моменты поступления требований (в момент $t = 0$ требований в очереди нет): $t_0 = \tau_0$ — момент поступления первого требования, t_n —

момент поступления $(n+1)$-го требования, случайные величины τ_k, $k = 1, 2, \dots$, мы интерпретируем как промежутки между поступлениями требований. Простейший поток требований с параметром λ задает пуассоновский процесс $\{\eta(t), t \in [0; \infty)\}$ — число требований $\eta(t)$, поступивших к моменту времени t, $t \in [0; \infty)$.

В простейшем потоке требований с параметром λ за малое время h $(h \to 0+0)$ требования поступают так: одно требование поступает с вероятностью $\lambda h + o(h)$, два и больше требований поступают с вероятностью $o(h)$.

В самом деле, у пуассоновского процесса с параметром λ для любых $t > 0, h > 0$

$$P\{\eta(t+h) - \eta(t) = k\} = \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h}, \ k = 0, 1, \dots$$

Поэтому при $h \to 0+0$

$$P\{\eta(t+h) - \eta(t) = 1\} = \frac{\lambda h}{1!} e^{-\lambda h} = \lambda h(1 - \lambda h + o(h)) = \lambda h + o(h),$$

т. е. вероятность поступления одного требования за время h

$$P\{\eta(t+h) - \eta(t) = 1\} = \lambda h + o(h), \ h \to 0+0. \qquad (3.4.1)$$

Вероятность поступления двух и более требований

$$P\{\eta(t+h) - \eta(t) \geq 2\} = 1 - P\{\eta(t+h) - \eta(t) \leq 1\} =$$

$$= 1 - (P\{\eta(t+h) - \eta(t) = 0\} + P\{\eta(t+h) - \eta(t) = 1\}) =$$

$$= 1 - \left(\frac{(\lambda h)^0}{0!} e^{-\lambda h} + \frac{\lambda h}{1!} e^{-\lambda h}\right) = 1 - e^{-\lambda h}(1 + \lambda h) =$$

$$= 1 - (1 - \lambda h + o(h))(1 + \lambda h) = (\lambda h)^2 + o(h) = o(h), \ h \to 0+0,$$

т. е.

$$P\{\eta(t+h) - \eta(t) \geq 2\} = o(h), \ h \to 0+0. \qquad (3.4.2)$$

Показательное время обслуживания. Из предположения о показательном распределении времени ζ обслуживания требования:

$$P\{\zeta < t\} = 1 - e^{-\mu t}, \ t > 0,$$

и независимости случайных величин $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ (время обслуживания ζ_i i-го требования не зависит от продолжительности обслуживания поступивших ранее требований) следует, что *за малое время h ($h \to 0+0$) требования обслуживаются так: одно требование за время h обслуживается с вероятностью $\mu h + o(h)$, два и более требований за время h обслуживаются с вероятностью $o(h)$.*

Действительно, поскольку в данный момент времени прибор обслуживает только одно требование и ζ — *время его обслуживания — показательно распределено с параметром μ,* то событие "одно требование будет обслужено до момента h" представимо в виде $\{\zeta < h\}$, а его вероятность

$$P\{\zeta < h\} = 1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h),\ h \to 0+0. \tag{3.4.3}$$

Далее, пусть ζ_i — время обслуживания i-го требования, $i = 1, 2, \ldots$ Поскольку требования обслуживаются одно за другим, то событие "до момента времени h будет обслужено n требований" представимо в виде

$$\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n < h\}.$$

Пусть A_h — событие "до момента h будет обслужено более одного требования". Ясно, что

$$A_h \subset \bigcup_{n=2}^{\infty} \{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n < h\},$$

$$P(A_h) \le \sum_{n=2}^{\infty} P\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n < h\},$$

$$\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n < h\} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \{\zeta_i < h\},$$

$$P\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n < h\} \le \prod_{i=1}^{n} P\{\zeta_i < h\} = (\mu h + o(h))^n \le (2\mu h)^n,$$

$$P(A_h) \le \sum_{n=2}^{\infty} (2\mu h)^n \le (2\mu h)^2 \frac{1}{1 - 2\mu h} \le 8(\mu h)^2 = o(h),\ h \to 0+0,$$

т. е. вероятность того, что за малое время h ($h \to 0+0$) будет обслужено два или более требований, равна $o(h)$, $h \to 0+0$.

Марковская цепь, описывающая очередь. Относительно длины очереди $\{\xi(t), t \in [0; +\infty)\}$ в задаче обслуживания с ожиданием имеет место следующее важное утверждение.

Если поток требований поступающих на обслуживание простейший и время обслуживания требования показательно распределено, то длина очереди $\xi(t), t \in [0; \infty)$, *является стационарной марковской цепью с непрерывным временем.*

Выпишем элементы матрицы переходных вероятностей марковской цепи, описывающей длину очереди требований.

Пусть длина очереди $\xi(t) = k$ и h малое $(h \to 0+0)$. Вероятность $P\{\xi(t+h) = k+1 \,|\, \xi(t) = k\}$ увеличения длины очереди на единицу за время h равна вероятности поступления одного требования за время h, эта вероятность равна $\lambda h + o(h)$, $h \to 0+0$. Поэтому

$$P\{\xi(t+h) = k+1 \,|\, \xi(t) = k\} = \lambda h + o(h),\ h \to 0+0,$$

или

$$P_{k;k+1}(h) = \lambda h + o(h),\ h \to 0+0.$$

Вероятность $P\{\xi(t+h) = k-1 \,|\, \xi(t) = k\}$ $(k > 0)$ уменьшения длины очереди на единицу за время h равна вероятности того, что за время h будет обслужено одно требование, эта вероятность равна $\mu h + o(h), h \to 0+0$. Поэтому

$$P\{\xi(t+h) = k-1 \,|\, \xi(t) = k\} = \mu h + o(h),\ h \to 0+0,$$

или

$$P_{k;k-1}(h) = \mu h + o(h),\ h \to 0+0.$$

Далее, вероятность того, что за малое время h $(h \to 0+0)$ длина очереди изменится более чем на 1 равна $o(h)$, поскольку вероятность увеличения длины очереди более чем на единицу равна $o(h)$ и вероятность уменьшения длины очереди более чем на единицу равна $o(h)$, $h \to 0+0$. Поэтому вероятность $P\{\xi(t+h) = k \,|\, \xi(t) = k\}$ $(k > 0)$ того, что длина очереди за время h не изменится, равна вероятности события, противоположного к событию “длина очереди увеличится на 1, или уменьшится на 1, или изменится более чем на 1”, т. е.

$$P\{\xi(t+h) = k \,|\, \xi(t) = k\} = 1 - (\lambda h + \mu h + o(h)),$$

или

$$P_{k;k}(h) = 1 - (\lambda h + \mu h) + o(h),\ h \to 0+0.$$

Таким образом, для марковской цепи $\{\xi(t), t \in [0, \infty)\}$, описывающей длину очереди, в предположениях о простейшем потоке поступления требований и показательном распределении времени обслуживания требований при $h \to 0+0$ и $k > 0$

$$P_{k,k+1}(h) = \lambda h + o(h),$$

$$P_{k,k-1}(h) = \mu h + o(h),$$

$$P_{k,k}(h) = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h),$$

при $h \to 0+0$ и $k = 0$

$$P_{k,k+1}(h) = \lambda h + o(h),$$

$$P_{k,k-1}(h) = 0,$$

$$P_{k,k}(h) = 1 - \lambda h + o(h).$$

Последнее означает, что *марковская цепь* $\{\xi(t), t \in [0; \infty)\}$*, описывающая очередь, является процессом рождения и гибели с интенсивностями рождения* λ *и гибели* μ.

Инфинитезимальная матрица процесса рождения и гибели, описывающего очередь, имеет вид

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Предельное поведение длины очереди. Рассмотрим поведение длины очереди $\{\xi(t), t \in [0; \infty)\}$ при больших t ($t \to \infty$).

Длина очереди $\{\xi(t), t \in [0, \infty)\}$ является процессом рождения и гибели (с интенсивностями рождения λ и гибели μ), а у процесса рождения и гибели существует эргодическое распределение (см. теорему 3.3.1):

$$\lim_{t\to\infty} P_{i,j}(t) = \pi_j, \ j = 0, 1, 2, \dots,$$

и, как следствие, распределение $P\{\xi(t) = j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, длины очереди $\xi(t)$ при $t \to \infty$ сходится к эргодическому распределению $\{\pi_j\}$. При этом, согласно теореме о представлении эргодического распределения (см. теорему 3.3.4), если

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty,$$

$$u_0 = 1,\ u_j = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdots\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j},\ \mu_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots,$$

то эргодическое распределение является собственным и представимо в виде

$$\pi_j = u_j \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k},\ j = 1, 2, \ldots,$$

а если

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = +\infty,$$

то эргодическое распределение является несобственным:

$$\pi_j = 0,\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Для процесса рождения и гибели, описывающего очередь, значения $\lambda_j = \lambda$, $\mu_j = \mu$, $j = 1, 2, \ldots$, $\lambda_0 = \lambda$, $\mu_0 = 0$,

$$u_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j,\ j = 1, 2, \ldots,\ \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k.$$

Поэтому если

$$\frac{1/\mu}{1/\lambda} = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

— среднее время обслуживания одного требования $1/\mu$ меньше среднего времени $1/\lambda$ между поступлением требований, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k < \infty,\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1\Big/\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

и, следовательно, цепь имеет собственное эргодическое распределение:

$$\pi_j = u_j \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j,\ j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.4.4}$$

которое является геометрическим распределением с параметром $1 - \lambda/\mu$.

Среднее предельного распределения (3.4.4) длины очереди равно

$$\frac{1 - (1 - \lambda/\mu)}{1 - \lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Существование при $\lambda/\mu < 1$ предельного распределения длины очереди обозначает, что при достаточно больших t распределение длины очереди "устанавливается".

Если, например, $\lambda = 1$, $\mu = 2$, то среднее время между поступлениями требований $1/\lambda = 1$, среднее время обслуживания одной заявки $1/\mu = 1/2$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,$$

предельное распределение длины очереди (см. (3.4.4))

$$\pi_0 = 1/2,\ \pi_1 = 1/4,\ \pi_2 = 1/8,\ \pi_3 = 1/16,\ \ldots$$

Последние равенства можно интерпретировать так: с течением времени требования в очереди будут отсутствовать с вероятностью $\pi_0 = 1/2$, с вероятностью $\pi_1 = 1/4$ в очереди будет одно требование, с вероятностью $\pi_2 = 1/8$ — два требования, ...

Если

$$\frac{1/\mu}{1/\lambda} = \frac{\lambda}{\mu} > 1$$

— среднее время обслуживания $1/\mu$ одной заявки больше среднего времени $1/\lambda$ между поступлениями требований, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \infty,$$

эргодическое распределение цепи $\xi(t)$ является несобственным и имеет вид

$$\pi_j = 0,\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Последнее означает, что если $\lambda/\mu > 1$, то со временем распределение длины очереди требований "уходит на ∞" — с течением времени длина очереди неограниченно растет.

Мы рассмотрели простейшую ситуацию — одного обслуживающего прибора. Разумеется, обслуживающих приборов может быть больше одного.

3.5 Свойство дифференцируемости переходных вероятностей

Из предположения непрерывности в нуле переходных вероятностей $P_{ij}(t)$ стационарной марковской цепи с непрерывным временем можно получить неожиданно много содержательных результатов. Одним из таких результатов является дифференцируемость $P_{ij}(t)$.

Мы докажем дифференцируемость $P_{ij}(t)$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$, в точке 0. Дифференцируемость $P_{ii}(t)$ и $P_{ij}(t)$ $(j \neq i)$ будем доказывать по отдельности.

Теорема 3.5.1 (о дифференцируемости $P_{ii}(t)$). *Если переходные вероятности $P_{ii}(t)$ марковской цепи непрерывны в нуле, то они и дифференцируемы в нуле — для каждого i существует*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - P_{ii}(t)}{t} = -P'_{ii}(0) = q_i$$

конечный или бесконечный.

Доказательство. Нам будет удобно доказать дифференцируемость в нуле функции

$$\varphi(t) = -\ln P_{ii}(t),\ t \in [0, \infty).$$

Дифференцируемость $P_{ii}(t)$ будет следовать из равенства

$$P_{ii}(t) = \exp\{-\varphi(t)\},\ t \in [0, \infty).$$

Функция $\varphi(t) = -\ln P_{ii}(t)$ определена корректно — при всех $t \geq 0$ значение $P_{ii}(t) > 0$. В самом деле, для данного $t > 0$ в силу следствия из уравнения Колмогорова-Чепмена

$$P_{ii}(t) \geq \left(P_{ii}\left(t/n\right)\right)^n.$$

А из непрерывности $P_{ii}(t)$ в нуле и равенства $P_{ii}(0) = 1$ следует, что при достаточно больших n значение $\left(P_{ii}\left(t/n\right)\right)^n > 0$.

Отметим еще, что функция $\varphi(t)$

1° неотрицательна и конечна;

2° полуаддитивна:

$$\varphi(t + s) \leq \varphi(t) + \varphi(s);$$

3° $\varphi(t)$ непрерывна в нуле и $\varphi(0) = 0$.

Неотрицательность и конечность $\varphi(t)$ следуют из неравенств

$$0 < P_{ii}(t) \leq 1,$$

полуаддитивность $\varphi(t)$ следует из неравенства

$$P_{ii}(t+s) \geq P_{ii}(t)P_{ii}(s),$$

непрерывность $\varphi(t)$ следует из непрерывности $P_{ii}(t)$.

Мы докажем дифференцируемость $\varphi(t)$ в точке 0, т. е. существование предела

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t},$$

установив, что верхний и нижний пределы $\varphi(t)/t$ равны числу

$$q_i = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t},$$

а именно,

$$\varliminf_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = q_i, \quad \varlimsup_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = q_i.$$

Заметим, что поскольку $\varphi(t) \in [0, \infty)$, то $\sup\limits_{t>0}(\varphi(t)/t) = q_i$ может принимать, вообще говоря, любые значения из $[0; +\infty]$. Мы рассмотрим отдельно случаи $q_i < \infty$ и $q_i = +\infty$.

1° Пусть

$$q_i = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t} < \infty.$$

Тогда для данного $\varepsilon > 0$ найдется $t_0 > 0$ такое, что

$$q_i - \varepsilon \leq \frac{\varphi(t_0)}{t_0}.$$

Представим t_0 в виде

$$t_0 = nh + \delta, \ 0 \leq \delta < h < t_0$$

(n — целое неотрицательное). В силу полуаддитивности $\varphi(s)$ имеем:

$$q_i - \varepsilon \leq \frac{\varphi(t_0)}{t_0} = \frac{\varphi(nh+\delta)}{t_0} \leq \frac{n\varphi(h)+\varphi(\delta)}{t_0} = \frac{n\varphi(h)}{t_0} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0} =$$

$$= \frac{nh}{t_0} \cdot \frac{\varphi(h)}{h} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0},$$

т. е.

$$q_i - \varepsilon \leq \frac{nh}{t_0} \cdot \frac{\varphi(h)}{h} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0}.$$

Вычислим нижний предел от правой и левой частей последнего неравенства при $h \to 0$:

$$q_i - \varepsilon \leq \varliminf_{h\to 0} \left(\frac{nh}{t_0} \cdot \frac{\varphi(h)}{h} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0} \right) = \varliminf_{h\to 0} \frac{nh}{t_0} \cdot \varliminf_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} + \varliminf_{h\to 0} \frac{\varphi(\delta)}{t_0}.$$

Значение

$$\varliminf_{h\to 0} \varphi(\delta) = \lim_{h\to 0} \varphi(\delta) = 0,$$

поскольку функция $\varphi(s)$ непрерывна в нуле, $\varphi(0) = 0$ и $\delta \to 0$ при $h \to 0$. Равенство

$$\varliminf_{h\to 0} \frac{nh}{t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{nh}{t_0} = 1$$

следует из равенства $t_0 - nh = \delta$. Поэтому

$$q_i - \varepsilon \leq \varliminf_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h}.$$

И, следовательно,

$$q_i - \varepsilon \leq \varliminf_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} \leq \varlimsup_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} \leq \sup_{h>0} \frac{\varphi(h)}{h} = q_i.$$

А поскольку ε произвольно, то

$$q_i = \varliminf_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = \varlimsup_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = q_i.$$

Поэтому, во-первых, существует

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = \varphi'(0)$$

и, во-вторых,

$$\varphi'(0) = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t} = q_i.$$

Далее, поскольку

$$P_{ii}(t) = \exp\{-\varphi(t)\},$$

то

$$P'_{ii}(t) = -\varphi'(t)\exp\{-\varphi(t)\},$$

$$P'_{ii}(0) = -\varphi'(0)e^0 = -\varphi'(0) = -q_i.$$

Так что

$$-P'_{ii}(0) = q_i = \sup_{t>0}\frac{\varphi(t)}{t}.$$

2° Пусть теперь

$$\sup_{t>0}\frac{\varphi(t)}{t} = q_i = +\infty.$$

Из равенства

$$\sup_{t>0}(\varphi(t)/t) = q_i = +\infty$$

следует, что для данного $M > 0$ найдется $t_0 > 0$ такое, что

$$M \le \frac{\varphi(t_0)}{t_0}.$$

Отсюда, повторяя приведенные выше рассуждения, получим

$$M \le \varliminf_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}.$$

Поскольку M может быть выбрано сколь угодно большим, то

$$+\infty \le \varliminf_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t} \le \varlimsup_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}.$$

И, следовательно,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t} = q_i = +\infty.$$

Т е о р е м а 3.5.2 (о дифференцируемости $P_{ij}(t), j \neq i$). *Если переходные вероятности $P_{ij}(t)$ $i, j = 0, 1, 2, \ldots,$ марковской цепи непрерывны в нуле, то они и дифференцируемы в нуле — для каждой пары $i, j,$ $j \neq i$ существует*

$$\lim_{t \to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} = P'_{ij}(0) = q_{ij},\ j \neq i,$$

причем q_{ij} конечна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем лемму.

Для данных i, j $(j \neq i)$ и $\varepsilon > 0$ найдется t_0 (достаточно малое), что для любых $nh \in (0, t_0]$ (n — целое неотрицательное) имеет место неравенство

$$(1 - 3\varepsilon)\frac{P_{ij}(h)}{h} \leq \frac{P_{ij}(nh)}{nh}. \tag{3.5.1}$$

Доказательство леммы. Для данного h (произвольного, но фиксированного) по марковской цепи $\{\xi(t),\ t \in [0, \infty)\}$ с непрерывным временем определим марковскую цепь $\{\xi_{k,h}\}$ с дискретным временем:

$$\xi_{k,h} = \xi(kh),\ k = 0, 1, \ldots$$

Одношаговые переходные вероятности цепи $\{\xi_{k,h}\}$

$$P\{\xi_{k+1,h} = j | \xi_{k,h} = i\} = P\{\xi((k+1)h) = j | \xi(kh) = i\} =$$

$$= P\{\xi(kh + h) = j | \xi(kh) = i\} = P_{ij}(h),\ i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

а n-шаговые переходные вероятности

$$P\{\xi_{k+n,h} = j | \xi_{k,h} = i\} = P_{ij}(nh).$$

Для марковской цепи $\{\xi_{k,h}\}$ определим вероятности ${}_jP_{ii}(nh)$ перехода из i в i с запретами:

$${}_jP_{ii}(0) = 1,$$

$${}_jP_{ii}(nh) = P\{\xi_{0,h} = i,\, \xi_{n,h} = i,\, \xi_{\nu,h} \neq j,\, \nu = 1, 2, \ldots, n{-}1 \,|\, \xi_{0,h} = i\}$$

— вероятность того, что цепь $\{\xi_{k,h}\}$, стартовав из i, за n шагов вернется в i без захода в j. И напомним еще, что

$$f_{ij}(nh) = P\{\xi_{0,h} = i,\, \xi_{n,h} = j,\, \xi_{\nu,h} \neq j,\, \nu = 1, 2, \ldots, n{-}1 \,|\, \xi_{0,h} = i\}.$$

Для $P_{ij}(nh)$ $(j \neq i)$ имеет место следующая оценка снизу

$$P_{ij}(nh) \geq \sum_{\nu=0}^{n-1} {}_jP_{ii}(\nu h)P_{ij}(h)P_{jj}((n-(\nu+1))h). \tag{3.5.2}$$

Каждое слагаемое в правой части неравенства (3.5.2) соответствует пути из n шагов длиной h, ведущему из состояния i в состояние j, у которого имеется переход из i в j за один шаг. Эти пути несовместны, но, вообще говоря, не исчерпывают всех путей из i в j за n шагов (здесь учтены только пути, у которых имеется переход из i в j за один шаг, но среди путей из i в j не все такие). А для $P_{ii}(\nu h)$ имеет место представление

$$P_{ii}(\nu h) = {}_jP_{ii}(\nu h) + \sum_{m=0}^{\nu-1} f_{ij}(mh)P_{ji}((\nu-m)h) \tag{3.5.3}$$

— переход из i в i за ν шагов возможен с заходом в j и без захода в j.

Оценим правую часть неравенства (3.5.2) снизу, воспользовавшись равенством (3.5.3). Для этого оценим снизу ${}_jP_{ii}(\nu h)$. Имеем

$$\begin{gathered}{}_jP_{ii}(\nu h) = P_{ii}(\nu h) - \sum_{m=1}^{\nu-1} f_{ij}(mh)P_{ji}((\nu-m)h) \geq \\ \geq P_{ii}(\nu h) - \max_{1\leq m\leq \nu-1} P_{ji}((\nu-m)h) \sum_{m=1}^{\nu-1} f_{ij}(mh) \geq \\ \geq P_{ii}(\nu h) - \max_{1\leq m\leq \nu-1} P_{ji}((\nu-m)h),\end{gathered}$$

т. е.

$${}_jP_{ii}(\nu h) \geq P_{ii}(\nu h) - \max_{1\leq m\leq \nu-1} P_{ji}((\nu-m)h). \tag{3.5.4}$$

Из (3.5.2) и (3.5.4) получаем

$$P_{ij}(nh) \geq$$

$$\geq \sum_{\nu=0}^{n-1} \Big(P_{ii}(\nu h) - \max_{1\leq m\leq \nu-1} P_{ji}((\nu-m)h)\Big)P_{ij}(h)P_{jj}((n-(\nu+1))h). \tag{3.5.5}$$

Далее, пусть $\varepsilon > 0$ (произвольное, но фиксированное). Для данных i, j в силу непрерывности $P_{ii}(t)$, $P_{ji}(t)$, $P_{jj}(t)$ найдется такое t_0 (достаточно малое), что при $0 \le t \le t_0$

$$P_{ii}(t) \ge 1 - \varepsilon,\ P_{ji}(t) \le \varepsilon,\ P_{jj}(t) \ge 1 - \varepsilon.$$

Поэтому для любых $h > 0$ и целых k таких, что $0 < kh < t_0$ имеют место неравенства

$$P_{ii}(kh) \ge 1 - \varepsilon,\ P_{ji}(kh) \le \varepsilon,\ P_{jj}(kh) \ge 1 - \varepsilon.$$

Учитывая последние три неравенства, для $h > 0$ и n таких, что $nh < t_0$, из неравенства (3.5.5) получаем

$$P_{ij}(nh) \ge \sum_{\nu=0}^{n-1} (1 - \varepsilon - \varepsilon) P_{ij}(h)(1 - \varepsilon) =$$

$$= (1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon) n P_{ij}(h) \ge (1 - 3\varepsilon) n P_{ij}(h),$$

или

$$P_{ij}(nh) \ge (1 - 3\varepsilon) n P_{ij}(h).$$

Разделив обе части последнего неравенства на nh, получим неравенство (3.5.1).

Тем самым лемма доказана.

Дальнейшее доказательство теоремы будет основано на неравенстве (3.5.1).

Обозначим

$$q_{ij} = \varliminf_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h}.$$

Значение

$$q_{ij} < \infty.$$

Действительно, из леммы следует, что для $nh \in (t_0/2,\ t_0] \subset$ $\subset (0,\ t_0]$

$$(1 - 3\varepsilon) \frac{P_{ij}(h)}{h} \le \frac{P_{ij}(nh)}{nh} \le \frac{1}{t_0/2} = \frac{2}{t_0},$$

поэтому $q_{ij} < \infty$.

Далее докажем, что

$$\varlimsup_{t \to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} \le q_{ij}.$$

Поскольку

$$q_{ij} = \varliminf_{t\to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t},$$

то для данного $\varepsilon > 0$ найдется $t' \in (0,\, t_0)$ такое, что

$$\frac{P_{ij}(t')}{t'} < q_{ij} + \varepsilon.$$

В силу непрерывности $P_{ij}(s)$ последнее неравенство имеет место и для всех t из некоторой окрестности $(t' - h_0, t' + h_0)$ точки t' (дополнительно выберем ее принадлежащей промежутку $(0, t_0]$), т. е.

$$\frac{P_{ij}(t)}{t} \le q_{ij} + \varepsilon, \quad t \in (t' - h_0, t' + h_0) \subset (0, t_0]. \tag{3.5.6}$$

Для достаточно малых h $(0 < h < h_0)$ найдется такое n, что $nh \in (t' - h_0, t' + h_0) \subset (0, t_0]$. Поэтому из (3.5.1) и (3.5.6) имеем

$$(1 - 3\varepsilon)\frac{P_{ij}(h)}{h} \le \frac{P_{ij}(nh)}{nh} \le q_{ij} + \varepsilon$$

при $h < h_0$. Так что для $h < h_0$

$$(1 - 3\varepsilon)\frac{P_{ij}(h)}{h} \le q_{ij} + \varepsilon.$$

Вычисляя верхний предел при $h \to 0$ от правой и левой частей последнего неравенства, получим

$$(1 - 3\varepsilon)\varlimsup_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} \le q_{ij} + \varepsilon,$$

а поскольку ε можно выбрать сколь угодно малым, то

$$\varlimsup_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} \le q_{ij},$$

что вместе с равенством

$$q_{ij} = \varliminf_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h}$$

завершает доказательство теоремы.

О п р е д е л е н и е. У марковской цепи $\{\xi(t), t \in [0; \infty)\}$ с непрерывными в нуле переходными вероятностями матрицу $\boldsymbol{\nu} = [\nu_{ij}]$, элементы которой определяются равенствами

$$\nu_{ij} = \begin{cases} -q_i, & \text{если } j = i, \\ q_{ij}, & \text{если } j \neq i, \end{cases}$$

называют *инфинитезимальной матрицей.*

Заметим, что

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbb{P}'(0).$$

П р и м е р 3.5.1. *Для процесса рождения и гибели с интенсивностями роста λ_i и гибели μ_i вычислить*

$$q_i = -P'_{ii}(0) \quad \textit{и} \quad q_{ij} = P'_{ij}(0),\ j \neq i.$$

Р е ш е н и е. По определению процесса рождения и гибели при $h \to 0+0$

$$P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h),$$

$$P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h),$$

$$P_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h).$$

Вероятности $P_{ij}(h)$ непрерывны в нуле, поэтому согласно теореме о дифференцируемости $P_{ij}(h)$ существуют производные $P'_{ii}(0)$ и $P'_{ij}(0), j \neq i$ (собственно говоря, существование производных для процесса рождения и гибели следует непосредственно из вида переходных вероятностей $P_{ij}(h)$). При этом

$$q_i = -P'_{ii}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 - (1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h))}{h} = \lambda_i + \mu_i,$$

$$q_{i,i+1} = P'_{i,i+1}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{i,i+1}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda_i h + o(h)}{h} = \lambda_i,$$

$$q_{i,i-1} = P'_{i,i-1}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mu_i h + o(h)}{h} = \mu_i.$$

Для $j \neq i-1, j \neq i+1$

$$P'_{ij}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{i,j}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

3.6 Распределение времени пребывания в состоянии

Из теоремы о дифференцируемости $P_{ii}(t)$ мы получим важное утверждение о распределении времени пребывания цепи в данном состоянии.

Определение. *Временем пребывания в состоянии* i марковской цепи $\{\xi(t),\, t\in[0,\infty),\xi(0)=i\}$, стартующей из i, будем называть случайную величину τ_i, определяемую равенством

$$\tau_i=\inf\{t:\,\xi(t)\neq i,\,\xi(0)=i\}.$$

Марковская цепь $\{\xi(t),\, t\in[0,\infty),\xi(0)=i\}$ в момент τ_i скачком уходит из состояния i. Мы будем считать, что в момент τ_i значение $\xi(\tau_i)$ все еще равно i, т. е. $\xi(\tau_i)=i$.

Теорема 3.6.1 (о распределении времени пребывания). *Если у стационарной марковской цепи* $\{\xi(t),\, t\in[0,\infty),\xi(0)=i\}$ *с непрерывными в нуле переходными вероятностями, стартующей из состояния* i*, значение*

$$0<q_i<\infty,$$

то время пребывания τ_i *цепи в состоянии* i *имеет показательное распределение с параметром* q_i*:*

$$P\{\tau_i<t\,|\,\xi(0)=i\}=1-e^{-q_it},\ t\geq 0.$$

Доказательство. Пусть $t>0$ — произвольное фиксированное. Рассмотрим событие

$$\{t\leq\tau_i,\xi(0)=i\}$$

— время пребывания τ_i в состоянии i цепи, стартующей из i, больше t. Разобьем промежуток $[0,t]$ точками

$$s_k=k\frac{t}{2^n},\ k=0,1,\ldots,2^n\,(s_0=0,s_{2^n}=t)$$

и обозначим через $A_{2^n}(t)$ событие, состоящее в том, что в моменты времени s_k, $k=0,1,\ldots,2^n$, цепь находится в состоянии i:

$$A_{2^n}(t)=\{\xi\left(s_0\right)=i,\,\xi\left(s_1\right)=i,\,\ldots,\,\xi\left(s_{2^n}\right)=i\}.$$

Ясно, что

$$A_{2^{n+1}}(t)\subset A_{2^n}(t),\ n=1,2,\ldots$$

Непосредственной проверкой можно убедится, что для марковской цепи с непрерывными в нуле переходными вероятностями

$$\{t \le \tau_i, \xi(s_0) = i\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{2^n}(t).$$

Отсюда в силу свойства непрерывности вероятности имеем

$$P\{t \le \tau_i, \xi(s_0) = i\} = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{2^n}(t)\right) = \lim_n P\left(A_{2^n}(t)\right). \quad (3.6.1)$$

Вычислим $\lim\limits_n P\left(A_{2^n}(t)\right)$. В марковской цепи конечномерные распределения, в частности и

$$P(A_{2^n}(t)) = P\{\xi(s_0) = i,\, \xi(s_1) = i,\, \ldots,\, \xi(s_{2^n-1}) = i, \xi(s_{2^n}) = i\},$$

выражаются через переходные вероятности и распределение начального состояния (см. равенство (3.1.3)):

$$P(A_{2^n}(t)) = P\{\xi(s_0) = i,\, \xi(s_1) = i,\, \ldots,\, \xi(s_{2^n-1}) = i, \xi(s_{2^n}) = i\} =$$

$$= P\{\xi(s_0) = i\} P\{\xi(s_1) = i \,|\, \xi(s_0) = i\} P\{\xi(s_2) = i \,|\, \xi(s_1) = i\} \ldots$$

$$\ldots P\{\xi(s_{2^n}) = i \,|\, \xi(s_{2^n-1}) = i\} = P\{\xi(s_0) = i\} \left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n}.$$

Поэтому (3.6.1) можно переписать так:

$$P\{t \le \tau_i, \xi(s_0) = i\} = P\{\xi(s_0) = i\} \lim_n \left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n}.$$

Найдем $\lim\limits_n \left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n}$. Поскольку $P_{ii}(s)$ дифференцируема в нуле и по условию теоремы $-P'_{ii}(0) = q_i < \infty$, то

$$P_{ii}(s) = 1 - q_i s + o(s),\ s \to 0.$$

Положив $s = t/2^n$, при $n \to \infty$ получим:

$$P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right) = 1 - q_i \frac{t}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right), \quad (3.6.2)$$

$$\left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n} = \left(1 - q_i\frac{t}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{2^n} = \varphi_n(t),$$

$$\ln\varphi_n(t) = 2^n \ln\left(1 - q_i\frac{t}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) \sim$$

$$\sim 2^n\left(-q_i\frac{t}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = -q_i t + o(1),$$

$$\ln\varphi_n(t) \to -q_i t.$$

Так что при $n \to \infty$

$$\left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n} = \varphi_n(t) \to e^{-q_i t}.$$

И следовательно,

$$P\{t \le \tau_i, \xi(s_0) = i\} = P\{\xi(s_0) = i\}\lim_n \left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n} =$$

$$= P\{\xi(s_0) = i\}e^{-q_i t}.$$

Отсюда

$$P\{t \le \tau_i \,|\, \xi(0) = i\} = e^{-q_i t},\ t > 0,$$

$$P\{\tau_i < t \,|\, \xi(0) = i\} = 1 - e^{-q_i t},\ t > 0,$$

т. е. время пребывания цепи, стартующей из состояния i, в состоянии i имеет показательное распределение с параметром q_i.

Следствие. *Если у марковской цепи*

$$\{\xi(t), t \in [0,\infty), \xi(0) = i\},$$

стартующей из состояния i*, значение* $q_i = 0$*, то*

$$P\{\tau_i = +\infty \,|\, \xi(0) = i\} = 1$$

— цепь, стартовав из i*, с вероятностью* 1 *остается в состоянии* i *навсегда.*

Доказательство. При $q_i = 0$ из равенства (3.6.2) имеем

$$P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right) = 1 + o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Отсюда, повторяя выкладки теоремы, получим, что для любого $t > 0$

$$P\{t \leq \tau_i \,|\, \xi(0) = i\} = 1.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $t \to +\infty$, получим

$$P\{\tau_i = +\infty \,|\, \xi(0) = i\} = 1.$$

О п р е д е л е н и е. Состояние i, для которого

$$q_i < \infty,$$

называется *устойчивым.*

Состояние i, для которого

$$q_i = 0,$$

называется *поглощающим* (цепь, попав в поглощающее состояние i, остается в нем навсегда).

Состояние i, для которого

$$q_i = +\infty,$$

называется *мгновенным.*

Среднее время пребывания цепи во мгновенном состоянии равно нулю. Попадая в такое состояние, цепь мгновенно его покидает. Теория марковских цепей с непрерывным временем, имеющих мгновенные состояния, крайне сложна.

Вложенная цепь. Событие "цепь в момент времени t покидает состояние i" обозначает, что для любого, сколь угодно малого h, происходит событие

$$\{\xi(t) = i,\, \xi(t+h) \neq i\}.$$

Обозначим через

$$R_{ij}(h) = P\{\xi(t+h) = j \,|\, \xi(t) = i,\, \xi(t+h) \neq i\}$$

вероятность того, что цепь в момент $t+h$ находится в состоянии j при условии, что пребывая в момент t в состоянии i, в момент $t+h$ она в состоянии i не пребывает. Тогда

$$\lim_{h\to 0} R_{ij}(h) = p_{ij},\ j \neq i,$$

естественно интерпретировать как вероятность события "цепь, покидая состояние i, переходит в состояние j".

Убедимся, что $\lim\limits_{h\to 0} R_{ij}(h)$ существует, и более того

$$\lim_{h\to 0} R_{ij}(h) = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$

Теорема 3.6.2 (о вероятностях перехода). *Вероятность p_{ij} марковской цепи $\{\xi(t),\, t \in [0,\infty)\}$, покидая состояние i, перейти в состояние j равна q_{ij}/q_i:*

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$

Доказательство. Для $R_{ij}(h)$ имеем

$$R_{ij}(h) = P\{\xi(t+h) = j \,|\, \xi(t) = i,\, \xi(t+h) \neq i\} =$$

$$= \frac{P\{\xi(t+h) = j,\, \xi(t) = i,\, \xi(t+h) \neq i\}}{P\{\xi(t) = i,\, \xi(t+h) \neq i\}} =$$

$$= \frac{P\{\xi(t+h) = j,\, \xi(t) = i\}}{P\{\xi(t+h) \neq i,\, \xi(t) = i\}} =$$

$$= \frac{P\{\xi(t+h) = j \,|\, \xi(t) = i\}}{1 - P\{\xi(t+h) = i \,|\, \xi(t) = i\}} = \frac{P_{ij}(h)}{1 - P_{ii}(h)},$$

мы воспользовались тем, что

$$\{\xi(t+h) = j, \xi(t) = i\} \subset \{\xi(t+h) \neq i, \xi(t) = i\},$$

$$\{\xi(t+h) = j, \xi(t+h) \neq i, \xi(t) = i\} = \{\xi(t+h) = j, \xi(t) = i\}.$$

Так что

$$R_{ij}(h) = \frac{P_{ij}(h)}{1 - P_{ii}(h)}. \tag{3.6.3}$$

Разделив числитель и знаменатель правой части равенства (3.6.3) на h и переходя к пределу при $h \to 0$ (существование предела следует из дифференцируемости $P_{ii}(t)$ и $P_{ij}(t)$), получим

$$\lim_{h\to 0} R_{ij}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)/h}{(1 - P_{ii}(h))/h} = \frac{q_{ij}}{q_i} = p_{ij}.$$

Пример 3.6.1. *Для процесса рождения и гибели с интенсивностями роста λ_i и гибели μ_i вычислить вероятность p_{ij} того, что цепь, покидая состояние i, перейдет в состояние j $(j \neq i)$.*

Решение.

$$p_{i,i+1} = \lim_{h\to 0} R_{i,i+1}(h) = \frac{q_{i,i+1}}{q_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i},\ i = 1, 2, \ldots,$$

$$p_{0,1} = q_{0,1}/q_0 = \lambda_0/\lambda_0 = 1,$$

$$p_{i,i-1} = \lim_{h\to 0} R_{i,i-1}(h) = \frac{q_{i,i-1}}{q_i} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i},\ i = 1, 2, \ldots,$$

для $j \neq i-1, j \neq i+1$ значения

$$p_{i,j} = \lim_{h\to 0} R_{i,j}(h) = \frac{q_{i,j}}{q_i} = 0,$$

см. также пример 3.5.1.

Определение. Пусть $\{\xi(t), t \in [0;\infty)\}$ — стационарная марковская цепь с непрерывными в нуле переходными вероятностями и фазовым пространством $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $p_{ij} = q_{ij}/q_i$ — вероятность перехода цепи из состояния i в состояние j $(j \neq i)$ по истечении времени пребывания τ_i цепи в состоянии i. Марковскую цепь $\{\xi_n\}$ с дискретным временем, фазовым пространством $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$[p_{ij}],\ i, j \in X,\ p_{ii} = 0,\ i \in X,$$

будем называть *вложенной марковской цепью* марковской цепи $\{\xi(t), t \in [0;\infty)\}$.

Матрицу $[p_{ij}]$ называют *матрицей переходных вероятностей вложенной марковской цепи.*

Инфинитезимальная матрица $\boldsymbol{\nu} = [\nu_{ij}]$,

$$\nu_{ij} = \begin{cases} -q_i, & \text{если } j = i, \\ q_{ij}, & \text{если } j \neq i, \end{cases}$$

$i, j = 0, 1, 2, \ldots$, задает марковскую цепь $\{\xi(t), t \in [0;\infty)\}$ с непрерывным временем в следующем смысле: q_i — параметр показательного распределения времени пребывания цепи в состоянии i, а $p_{ij} = q_{ij}/q_i$ — вероятность перехода из состояния i в состояние j $(j \neq i)$ по истечении времени пребывания в состоянии i.

Структура стационарной марковской цепи с непрерывным временем. Стационарную марковскую цепь с непрерывным временем можно описать так.

Стационарная марковская цепь $\{\xi(t), t \in [0;\infty), \xi(0) = i\}$, *стартуя из состояния* i, *в течение случайного времени* τ_i, *распределенного показательно с параметром* q_i, *пребывает в состоянии* i. *По истечении времени пребывания* τ_i *цепи в состоянии* i *цепь переходит с вероятностью* $p_{ij} = q_{ij}/q_i$ *в состояние* $j \neq i$ *и пребывает в состоянии* j *в течение случайного времени* τ_j, *распределенного показательно с параметром* q_j, *и т. д.* (см. рис. 3.6.1).

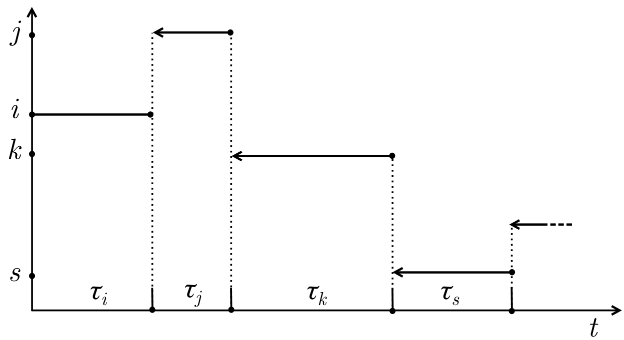

Рис. 3.6.1: Траектория стационарной марковской цепи

В частности, процесс рождения и гибели с интенсивностями рождения λ_i *и гибели* μ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $\mu_0 = 0$, *стартуя из состояния* i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, *в течение случайного времени* τ_i, *показательно распределенного с параметром* $q_i = \lambda_i + \mu_i$, *пребывает в состоянии* i (*в состоянии* $i = 0$ *цепь пребывает в течение случайного времени* τ_0, *показательно распределенного с параметром* $q_0 = \lambda_0$). *По истечении времени пребывания* τ_i *цепи в состоянии* i $(i = 1, 2, \ldots)$ *цепь переходит с вероятностью* $p_{ij} = q_{i,i+1}/q_i = \lambda_i/(\lambda_i + \mu_i)$ *в состояние* $j = i + 1$ *и с вероятностью* $p_{ij} = q_{i,i-1}/q_i = \mu_i/(\lambda_i + \mu_i)$ — *в состояние* $j = i - 1$ (*из состояния* $i = 0$ *цепь переходит в состояние* $j = 1$ *с вероятностью* $p_{01} = 1$) *и пребывает в состоянии* j *в течение случайного времени* τ_j, *распределенного показательно с параметром* $(\lambda_j + \mu_j)$, *и т. д.* (см. рис. 3.6.2).

В частности, процесс, описывающий очередь, как процесс рождения и гибели с интенсивностями рождения λ *и гибели* μ, *пребывает в каждом из своих состояний* i $(i = 1, 2, \ldots)$ *случайное время* τ_i, *распределенное показательно с параметром*

$q_i = \lambda + \mu$ (*в состоянии* $i = 0$ *цепь пребывает в течение времени* τ_0*, распределенного показательно с параметром* $q_0 = \lambda$)*. По истечении времени пребывания в состоянии* i ($i = 1, 2, \ldots$) *цепь переходит с вероятностью* $p_{ij} = q_{i,i+1}/q_i = \lambda/(\lambda+\mu)$ *в состояние* $j = i + 1$*, и с вероятностью* $p_{ij} = q_{i,i-1}/q_i = \mu/(\lambda + \mu)$ *— в состояние* $j = i - 1$ (*из состояния* $i = 0$ *цепь переходит в состояние* $j = 1$ *с вероятностью* $p_{01} = 1$) *и т. д.* (см. рис. 3.6.3, верхний индекс s ($s = 0, 1, 2, \ldots$) у $\tau_i^{(s)}$ — порядковый номер времени пребывания в состоянии).

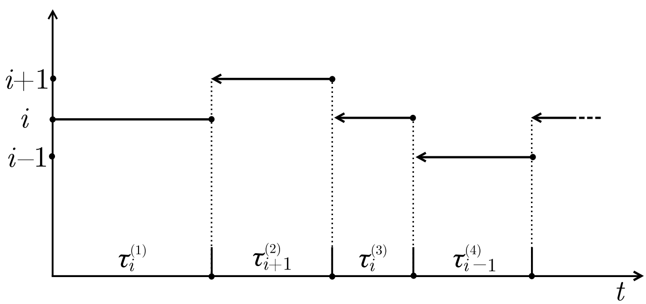

Рис. 3.6.2: Траектория процесса рождения и гибели

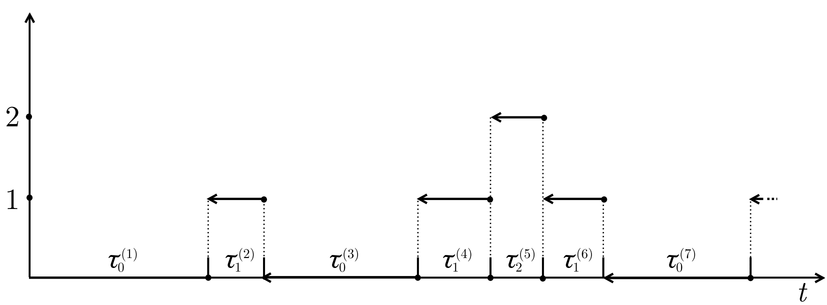

Рис. 3.6.3: Траектория процесса, описывающего очередь ($\lambda = 1, \mu = 2$)

У процесса рождения и гибели, описывающего очередь, с интенсивностями рождения $\lambda = 1$ $\mu = 2$ (см. также рис. 3.6.3) инфинитезимальная матрица

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -3 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & -3 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & -3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Время пребывания τ_i цепи в состоянии $i = 1, 2, \dots$, распределено показательно с параметром $q_i = \lambda_i + \mu_i = \lambda + \mu = 3$, среднее $M\tau_i$ времени пребывания цепи в состоянии $i = 1, 2, \dots$, равно $1/(\lambda + \mu) = 1/3$. Время пребывания τ_0 цепи в состоянии $i = 0$ распределено показательно с параметром $q_0 = \lambda_0 = \lambda = 1$, среднее $M\tau_0$ времени пребывания цепи в состоянии $i = 0$ равно $1/\lambda = 1$. Среднее $M\tau_0$ времени пребывания цепи в состоянии $i = 0$ в три раза больше среднего $M\tau_i$ времени пребывания цепи в состоянии i, $i = 1, 2, \dots$

Вероятность перехода цепи из состояния $i, i = 1, 2, \dots$, в состоянии $i-1$ равна $p_{ij} = q_{i,i-1}/q_i = \mu/(\lambda+\mu) = 2/3$. Вероятность перехода цепи из состояния $i, i = 1, 2, \dots$, в состоянии $i+1$ равна $p_{ij} = q_{i,i+1}/q_i = \mu/(\lambda+\mu) = 1/3$, а вероятность перехода цепи из состояния 0 в состоянии 1 равна $p_{01} = \lambda/\lambda = 1/1 = 1$. Вероятность перехода цепи из состояния $i, i = 1, 2, \dots$, в состояние $i-1$ в два раза больше вероятности перехода цепи в состояние $i + 1$.

3.7 Обратные дифференциальные уравнения Колмогорова

О п р е д е л е н и е. Марковскую цепь $\{\xi(t), t \in [0; \infty)\}$ с непрерывными в нуле переходными вероятностями будем называть *консервативной*, если для всех i

$$\sum_{j:j\neq i} q_{ij} = q_i \ \ (0 < q_i < \infty). \tag{3.7.1}$$

Другими словами, марковская цепь консервативна, если для всех i

$$\sum_{j:j\neq i} p_{ij} = 1.$$

Эквивалентность определений следует из равенств $p_{ij} = q_{ij}/q_i$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$

Пример 3.7.1. *Процесс рождения и гибели консервативен.* Поскольку для процесса рождения и гибели

$$q_{i,i+1} = \lambda_i,\ q_{i,i-1} = \mu_i,\ q_{ij} = 0,\ j \neq i-1,\ j \neq i+1,$$

$$q_i = \lambda_i + \mu_i,$$

то для него имеет место равенство (3.7.1).

Теорема 3.7.1 (обратные уравнения Колмогорова). *В консервативной цепи Маркова переходные вероятности $P_{ij}(t)$ удовлетворяют обратным дифференциальным уравнениям Колмогорова:*

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k:k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - q_i P_{ij}(t) \qquad (3.7.2)$$

для всех $i, j = 0, 1, 2, \ldots$; в матричном виде

$$\mathbb{P}'(t) = \boldsymbol{\nu}\mathbb{P}(t),$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — инфинитезимальная матрица.

Доказательство. Из уравнения Колмогорова–Чепмена имеем

$$P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t) = \sum_k P_{ik}(h)P_{kj}(t) - P_{ij}(t) =$$

$$= \sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) + (P_{ii}(h) - 1)P_{ij}(t).$$

Отсюда

$$\frac{P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t)}{h} = \sum_{k:k\neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) - \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} P_{ij}(t).$$

Перейдем к пределу при $h \to 0+0$ в левой и правой частях последнего равенства. В силу непрерывности в нуле переходных вероятностей предел левой части существует, а вместе с ним существует предел каждого слагаемого в правой части, в правой части еще формально перейдем к пределу под знаком суммы. В итоге получим

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k:k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - q_i P_{ij}(t).$$

Для обоснования предельного перехода под знаком суммы:

$$\lim_{h\to 0+0} \sum_{k:k\neq i} \frac{1}{h} P_{ik}(h) P_{kj}(t) =$$

$$= \sum_{k:k\neq i} \lim_{h\to 0+0} \frac{1}{h} P_{ik}(h) P_{kj}(t) = \sum_{k:k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t),$$

установим, что

$$\sum_{k:k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) \le \lim_{h\to 0+0} \sum_{k:k\neq i} \frac{1}{h} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \le \sum_{k:k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t).$$

Для любых достаточно больших N, бóльших i

$$\sum_{k=1,\, k\neq i}^{N} \frac{1}{h} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \le \sum_{k:k\neq i} \frac{1}{h} P_{ik}(h) P_{kj}(t).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1,\, k\neq i}^{N} q_{ik} P_{kj}(t) \le \lim_{h\to 0+0} \sum_{k\neq i} \frac{1}{h} P_{ik}(h) P_{kj}(t),$$

а так как N произвольно, то и

$$\sum_{k:k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) \le \lim_{h\to 0+0} \sum_{k:k\neq i} \frac{1}{h} P_{ik}(h) P_{kj}(t). \tag{3.7.3}$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{h\to 0+0} \sum_{k:k\neq i} \frac{1}{h} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \le \sum_{k:k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t).$$

Пусть N достаточно большое, так что $i \in [0, N)$. Тогда

$$\sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) =$$

$$= \sum_{k=1,\,k\neq i}^{N} P_{ik}(h)P_{kj}(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} P_{ik}(h)P_{kj}(t) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1,\,k\neq i}^{N} P_{ik}(h)P_{kj}(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} P_{ik}(h) =$$

$$= \sum_{k=1,\,k\neq i}^{N} P_{ik}(h)P_{kj}(t) + 1 - \sum_{k=1}^{N} P_{ik}(h) =$$

$$= \sum_{k=1,\,k\neq i}^{N} P_{ik}(h)P_{kj}(t) + \Big((1 - P_{ii}(h)) - \sum_{k=1,\,k\neq i}^{N} P_{ik}(h)\Big).$$

Разделив левую и правую часть этого неравенства на h и перейдя к пределу при $h \to 0$, получим

$$\lim_{h\to 0+0} \sum_{k:k\neq i} \frac{1}{h} P_{ik}(h)P_{kj}(t) \leq \sum_{k=1,\,k\neq i}^{N} q_{ik}P_{kj}(t) + \Big(q_i - \sum_{k=1,\,k\neq i}^{N} q_{ik}\Big).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $N \to +\infty$, и учитывая, что процесс консервативен (см. (3.7.1)), а, следовательно,

$$q_i - \sum_{k=1,\,k\neq i}^{N} q_{ik} \to 0,$$

получаем

$$\lim_{h\to 0+0} \sum_{k:k\neq i} \frac{1}{h} P_{ik}(h)P_{kj}(t) \leq \sum_{k:k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t).$$

Отсюда и из неравенства (3.7.3) следует, что

$$\lim_{h\to +0} \sum_{k:k\neq i} \frac{1}{h} P_{ik}(h)P_{kj}(t) = \sum_{k:k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t).$$

Тем самым теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Переходные вероятности $P_{ij}(t)$ консервативной марковской цепи удовлетворяют системе обратных дифференциальных уравнений (3.7.2) и без предположения консервативности, но последнее делает доказательство теоремы особенно простым.

3.8 Примеры и задачи

Примеры

Пример 3.8.1 (цепь с двумя состояниями). *Рассмотрим стационарную марковскую цепь $\{\xi(t), t \in [0,\infty)\}$ с непрерывным временем и фазовым пространством $X = \{0;1\}$.*

Найти $P_{ij}(t),\ i,j = 0,1$, по известным q_0 и q_1, если состояния цепи не поглощающие, т. е. $q_0 > 0$ и $q_1 > 0$, и не мгновенные, т. е. $q_0 \neq \infty$ и $q_1 \neq \infty$.

Решение. Поскольку фазовое пространство $X = \{0;1\}$ состоит из двух состояний и состояния не поглощающие — цепь не остается навсегда в состояниях 0 и 1, то вероятности перехода во вложенной цепи равны:

$$p_{01} = 1,\ p_{10} = 1.$$

Далее,

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i},\ j \neq i,$$

подробнее

$$p_{01} = \frac{q_{01}}{q_0},\ p_{10} = \frac{q_{10}}{q_1},$$

и т. к.

$$p_{01} = 1,\ p_{10} = 1,$$

то

$$q_{01} = q_0,\ q_{10} = q_1$$

и, следовательно, инфинитезимальная матрица

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} -q_0 & q_{01} \\ q_{10} & -q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_0 & q_0 \\ q_1 & -q_1 \end{bmatrix}.$$

Переходные вероятности $P_{ij}(t), i,j = 0,1$, найдем как решения обратных дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\mathbb{P}'(t) = \boldsymbol{\nu}\mathbb{P}(t),$$

подробнее, как решение системы

$$P'_{00}(t) = -q_0 P_{00}(t) + q_0 P_{10}(t),$$

$$P'_{01}(t) = -q_0 P_{01}(t) + q_0 P_{11}(t),$$

$$P'_{10}(t) = q_1 P_{00}(t) - q_1 P_{10}(t),$$
$$P'_{11}(t) = q_1 P_{01}(t) - q_1 P_{11}(t),$$

с начальными условиями

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij},\ i, j = 0, 1.$$

Причем поскольку

$$P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1,\ P_{10}(t) + P_{11}(t) = 1, \tag{3.8.4}$$

то для решения этой системы уравнений достаточно решить систему

$$P'_{00}(t) = -q_0 P_{00}(t) + q_0 P_{10}(t), \tag{3.8.5}$$
$$P'_{10}(t) = q_1 P_{00}(t) - q_1 P_{10}(t) \tag{3.8.6}$$

с начальными условиями

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij},\ i, j = 0, 1. \tag{3.8.7}$$

Вычитая уравнение (3.8.6) из уравнения (3.8.5), получим:

$$(P_{00}(t) - P_{10}(t))' = -(q_0 + q_1)(P_{00}(t) - P_{10}(t)). \tag{3.8.8}$$

Решением последнего дифференциального уравнения относительно $P_{00}(t) - P_{10}(t)$ при начальном условии

$$P_{00}(0) - P_{10}(0) = 1$$

является

$$P_{00}(t) - P_{10}(t) = e^{-(q_0+q_1)t}. \tag{3.8.9}$$

Отсюда

$$P_{10}(t) = P_{00}(t) - e^{-(q_0+q_1)t}.$$

Подставляя $P_{10}(t)$ в (3.8.5), получим:

$$P'_{00}(t) = -q_0 e^{-(q_0+q_1)t}.$$

Отсюда

$$\int_0^t P'_{00}(s)ds = -\int_0^t q_0 e^{-(q_0+q_1)s} ds,$$

$$P_{00}(t) = P_{00}(0) - \frac{q_0}{q_0+q_1}(1-e^{-(q_0+q_1)t}).$$

Итак,

$$P_{00}(t) = \frac{q_1}{q_0+q_1} + \frac{q_0}{q_0+q_1}e^{-(q_0+q_1)t},\ t \geq 0.$$

Подставив выражение для $P_{00}(t)$ в равенство (3.8.9), находим, что

$$P_{10}(t) = \frac{q_1}{q_0+q_1} - \frac{q_1}{q_0+q_1}e^{-(q_0+q_1)t},\ t \geq 0.$$

По известным $P_{00}(t)$ и $P_{10}(t)$ из равенств (3.8.4) имеем

$$P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t) = \frac{q_0}{q_0+q_1} - \frac{q_0}{q_0+q_1}e^{-(q_0+q_1)t},\ t \geq 0,$$

$$P_{11}(t) = 1 - P_{10}(t) = \frac{q_0}{q_0+q_1} + \frac{q_1}{q_0+q_1}e^{-(q_0+q_1)t},\ t \geq 0.$$

Из найденных представлений для $P_{ij}(t)$, $i,j = 0,1$, можно получить их предельные значения при $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to\infty} P_{i0}(t) = \frac{q_1}{q_0+q_1},\ i = 0,1,$$

$$\lim_{t\to\infty} P_{i1}(t) = \frac{q_0}{q_0+q_1},\ i = 0,1.$$

Пример 3.8.2. *Пусть* $\{\xi(t),\, t \in [0,\infty), \xi(0) = 0\}$ — *процесс чистого рождения с фазовым пространством* $X = \{0,1,2,\ldots\}$, *стартующий из* 0, *и положительными интенсивностями роста* $\lambda_k, k = 0,1,2,\ldots$.

Вероятности пребывания $P_k(t) = P\{\xi(t) = k\},\ k = 0,1,2,\ldots$ *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t), \\ P_k'(t) = -\lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t),\ k \geq 1. \end{cases} \tag{3.8.10}$$

Система (3.8.10) *имеет единственное решение* $\{P_k(t)\}$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$P_k(t) \geq 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \leq 1.$$

Показать, что если

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \quad \textit{при всех} \quad t > 0,$$

то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \tag{3.8.11}$$

расходится.

Р е ш е н и е. Из (3.8.10) имеем:

$$\lambda_k P_k(t) = -P_k'(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t). \tag{3.8.12}$$

Пользуясь рекуррентным соотношением (3.8.12), получаем:

$$\lambda_k P_k(t) = -P_k'(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) =$$

$$= -P_k'(t) - P_{k-1}'(t) + \lambda_{k-2} P_{k-2}(t) = \ldots = -\sum_{i=0}^{k} P_i'(t).$$

Интегрируя последнее равенство, получаем, что

$$\lambda_k \int\limits_0^t P_k(s)ds = \sum_{i=0}^{k} (P_i(0) - P_i(t)) = 1 - \sum_{i=0}^{k} P_i(t)$$

($P_0(0) = 1$, $P_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, поскольку процесс стартует из нуля), при этом

$$0 \le \sum_{i=0}^{k} P_i(t) = 1 - \lambda_k \int\limits_0^t P_k(s)ds.$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_0^t P_k(s)ds \le \frac{1}{\lambda_k}, \ k = 1, 2, \ldots \tag{3.8.13}$$

Сложив почленно неравенства (3.8.13) и воспользовавшись теоремой Лебега о монотонной сходимости, получим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \geq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^t P_k(s)ds = \int\limits_0^t \sum_{k=0}^{\infty} P_k(s)ds.$$

И если для каждого $t \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1,$$

то при всех $t \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \geq \int\limits_0^t 1ds = t.$$

Последнее обозначает, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_k}$ расходится.

Задачи

Задача 3.1. Выписать обратные дифференциальные уравнения Колмогорова для процесса чистого рождения.

Ответ:

$$\mathbb{P}'(t) = \boldsymbol{\nu}\mathbb{P}(t),$$

где

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Задача 3.2. Доказать, что для любого состояния i марковской цепи с непрерывным временем вероятность возвращения в исходное состояние $P_{ii}(t)$ строго больше нуля для всех $t > 0$.

Указание. Воспользоваться уравнением Колмогорова-Чепмена.

Задача 3.3. Пусть i, j — два состояния марковской цепи с непрерывным временем и существует t_0 такое, что $P_{ij}(t_0) > 0$. Доказать, что $P_{ij}(t) > 0$ для любого $t > t_0$.

Указание. Воспользоваться уравнением Колмогорова-Чепмена.

Задача 3.4. Пусть $\xi(t)$ — процесс чистого рождения с интенсивностями роста $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$. Найти $P_n(t)$ при $n = 0, 1, 2$.

Р е ш е н и е. Вероятности пребывания $P_k(t), k = 0, 1, 2, \ldots$ процесса чистого рождения удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t), \\ P_1'(t) = -\lambda_1 P_1(t) + \lambda_0 P_0(t), \\ P_2'(t) = -\lambda_2 P_2(t) + \lambda_1 P_1(t), \\ \vdots \end{gathered}$$

с начальными условиями $P_0(0) = 1, P_k(0) = 0, k = 1, 2, \ldots$ (см. теорему 3.2.1). В условиях задачи имеем

$$\begin{gathered} P_0'(t) = -P_0(t), \\ P_1'(t) = -3P_1(t) + P_0(t), \\ P_2'(t) = -2P_2(t) + 3P_1(t), \end{gathered}$$

начальные условия: $P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$.

Решая эту систему уравнений, последовательно, начиная с первого уравнения, получаем

$$\begin{gathered} P_0(t) = e^{-t}, \\ P_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}, \\ P_2(t) = -3e^{-2t} + \frac{3}{2}\left(e^{-3t} + e^{-t}\right). \end{gathered}$$

Задача 3.5. Пусть $\xi(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda = 2$. Найти:

$$1^\circ\ P\{\xi(3) = 8,\, \xi(7) = 12\};\ 2^\circ\ P\{\xi(3) = 3,\, \xi(6) = 5\}.$$

У к а з а н и е.

$$\begin{gathered} P\{\xi(3) = 8,\, \xi(7) = 12\} = P\{\xi(3) - \xi(0) = 8,\, \xi(7) - \xi(3) = 4\} = \\ = P\{\xi(3) - \xi(0) = 8\} P\{\xi(7) - \xi(3) = 4\} \end{gathered}$$

— пуассоновский процесс является процессом с независимыми приращениями. При этом

$$P\{\xi(t) - \xi(s) = k\} = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Задача 3.6. Пуассоновский процесс

$$\{\xi(t),\, t \in [0, \infty), \xi(0) = 0\}$$

описывает поступление требований в простейшем потоке, а именно, $\xi(t)$ — число требований, поступивших до момента t. Пусть параметр λ пуассоновского процесса равен 2. Найти Mt_{12} — среднее момента t_{12} поступления двенадцатого требования.

Указание. Момент поступления $(n+1)$-го требования

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \tau_k,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\tau_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$ — независимые показательно распределенные с параметром λ случайные величины. Потому

$$t_{12} = \sum_{k=0}^{11} \tau_k,\ Mt_{12} = 12 \cdot M\tau_0 = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Задача 3.7. Пусть $\xi(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, t_1 и t_2 фиксированы, $t_1 < t_2$.

Найти

1° $P\{\xi(t_2) = n \,|\, \xi(t_1) = k\}$;

2° $P\{\xi(t_1) = k \,|\, \xi(t_2) = n\}$.

Решение.

$$1^\circ\ P\{\xi(t_2) = n \,|\, \xi(t_1) = k\} = \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{n-k}}{(n-k)!}\, e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$

$$2^\circ\ P\{\xi(t_1) = k \,|\, \xi(t_2) = n\} = \frac{P\{\xi(t_1) = k, \xi(t_2) = n\}}{P\{\xi(t_2) = n\}} =$$

$$= \frac{P\{\xi(t_2) = n, \xi(t_1) = k\}}{P\{\xi(t_2) = n\}} =$$

$$= \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{n-k}}{(n-k)!}\, e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \cdot \frac{(\lambda t_1)^k}{k!}\, e^{-\lambda t_1} \Big/ \frac{(\lambda t_2)^n}{n!}\, e^{-\lambda t_2} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^k \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)^{n-k}.$$

Литература

[1] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей / А. А. Боровков. — М. : Наука, 1972. — 288 с.

[2] *Гихман И. И.* Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. — К. : Вища шк. Головное изд-во, 1979. — 320 с.

[3] *Гнеденко Б. В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. — М. : Наука, 1966. — 432 с.

[4] *Зубков А. М.* Сборник задач по теории вероятностей: учеб. пособие для вузов / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. В. Чистяков. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 320 с.

[5] *Карлин С.* Основы теории случайных процессов / С. Карлин. — М. : Мир, 1971. — 536 с.

[6] *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей / Л. Д. Мешалкин. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1963. — 155 с.

[7] *Миллер Б. М.* Теория случайных процессов в примерах и задачах / Б. М. Миллер, А. Р. Панков. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 320 с.

[8] *Розанов Ю. А.* Случайные процессы / Ю. А. Розанов. — М. : Наука, 1971. — 288 с.

[9] *Скороход А. В.* Элементы теории вероятностей и случайных процессов / А. В. Скороход. — К. : Вища школа, 1980. — 344 с.

[10] *Теория вероятностей: Сб. задач.* / А. Я. Дороговцев, Д. С. Сильвестров, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. — К. : Вища шк. Головное изд-во, 1980. — 432 с.

[11] *Турчин В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В. Н. Турчин. — Д. : Изд-во Днепропетр. ун-та, 2008. — 656 с.

[12] *Турчин В. Н.* Марковские цепи. Основные понятия, примеры, задачи / В. Н. Турчин, Е. В. Турчин. — Днепропетровск: Изд-во ЛизуновПресс, 2016. — 192 с.

[13] *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей и случайных процессов / В. Н. Тутубалин. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1992. — 400 с.

[14] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. / В. Феллер. — 3-е изд. — М. : Мир, 1984. — Т.1. — 527 с.; Т.2. — 751 с.

[15] *Ширяев А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. — М. : МЦНМО, 2004. — Т.1. — 520 с.; Т.2. — 408 с.

[16] *Bhattacharya R. N.* Stochastic Processes with Applications / R. N. Bhattacharya, E. C. Waymire. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 676 p.

[17] *Chung K. L.* Markov Chains with Stationary Transition Probabilities / K. L. Chung. — Berlin: Springer-Verlag, 1960. — 278 p.

[18] *Lefebvre M.* Applied Stochastic Processes / M. Lefebvre. — N.Y.: Springer Science+Business Media LLC, 2007. — 382 p.

[19] *Norris J. R.* Markov Chains / J. R. Norris. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997. — 238 p.

[20] *Parzen E.* Stochastic Processes / E. Parzen. — San Francisco: Holden-Day, 1962. — 324 p.

[21] *Privault N.* Understanding Markov Chains / N. Privault. — Singapore: Springer, 2013. — 354 p.

[22] *Resnick S.* Adventures in Stochastic Processes / S. Resnick. — Boston: Birkhäuser, 2005. — 626 p.

[23] *Stirzaker D.* Stochastic Processes and Models / D. Stirzaker. — Oxford: Oxford University Press, 2005. — 332 p.

Оглавление

Навчальне видання

Турчин Валерій Миколайович
Турчин Євген Валерійович

МАРКОВСЬКІ ЛАНЦЮГИ
Основні поняття, приклади, задачі

Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Видання друге, перероблене і доповнене

(російською мовою)

Редактор Ю.В. Козаченко
Художник К.Д. Ткаченко
Оригінал-макет В.М. Турчин

Підписано до друку 20.12.2017 р.
Формат $30 \times 42/4$. Ум. друк. арк. 13,25.
Тираж 300 прим. Зам. № 201217.

Видавництво і друкарня ТОВ «ЛізуновПрес»
49064, м. Дніпро, пр. Сергія Нігояна, 55
тел.: +38 056 7850274, 7890510,
e-mail: lizunoffpress@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК № 5373 від 03.07.2017 р.

ТУРЧИН
Валерий Николаевич

Автор 121 научной и научно-методической работы,
15 учебников и учебных пособий по теории вероятностей и математической статистике.
Заведующий кафедрой статистики и теории вероятностей Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара.

ТУРЧИН
Евгений Валериевич

Автор 39 научных и научно-методических работ,
3 учебных пособий по теории вероятностей и математической статистике. Доцент кафедры дифференциальных уравнений Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара.