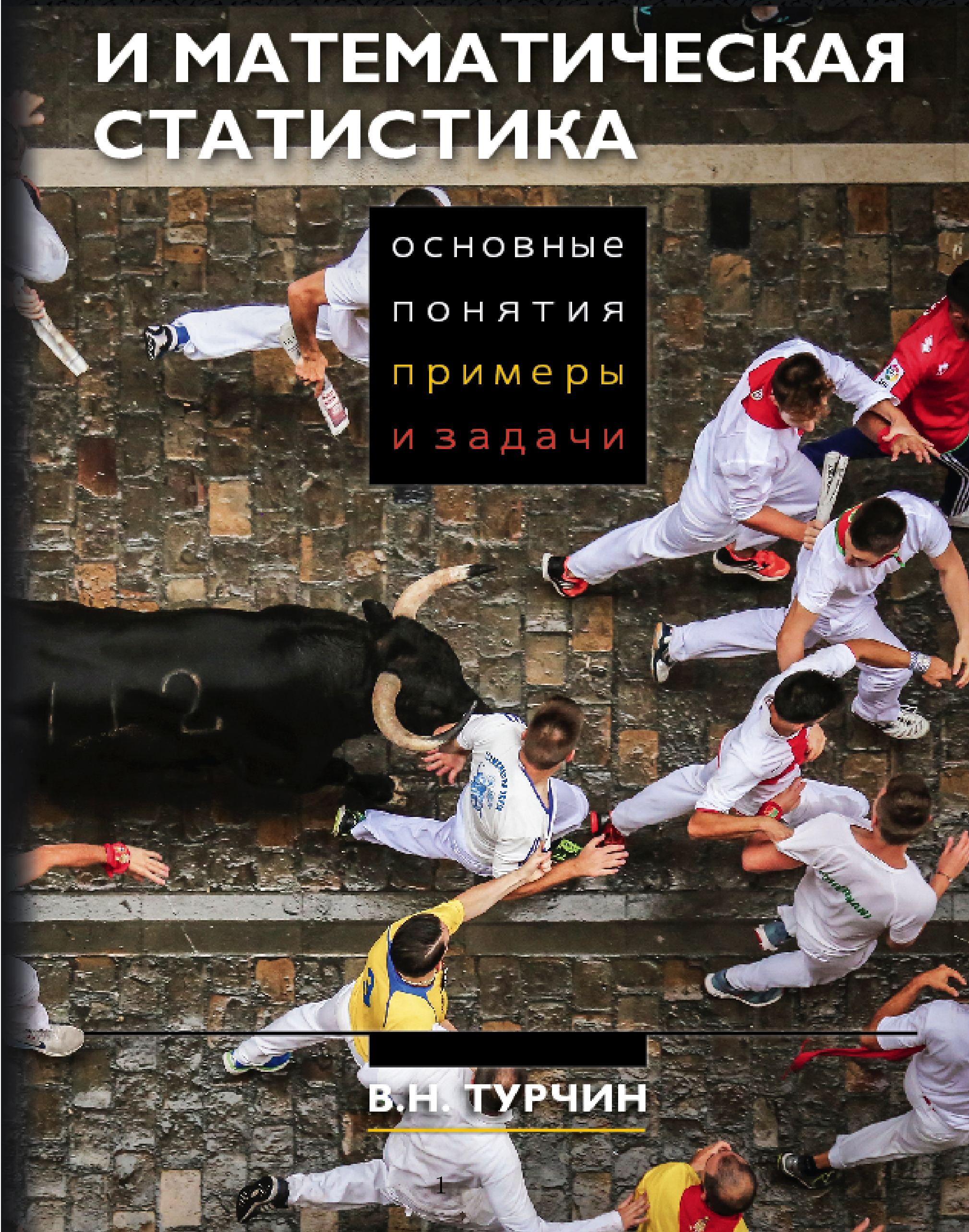
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

основные понятия примеры и задачи



В.Н. ТУРЧИН

В.Н. ТУРЧИН

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ **И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

основные понятия, примеры и задачи

Учебник для студентов высших учебных заведений

Издание второе, переработанное и дополненное

Утверждено Министерством образования и науки Украины

Дніпро . ЛІРА . 2019

УДК 519.2 (075.8)

Т89

Утверждено Министерством образования и науки Украины в качестве учебника для студентов высших учебных заведений (*письмо* №1/11 – 12054 *от* 29.07.2014).

Р е ц е н з е н т ы:
А. В. Скороход, д-р физ.-мат. наук, проф., акад. НАН Украины (Институт математики НАН Украины),
М. И. Ядренко, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН Украины (Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко).

ТУРЧИН В. Н.
Т89 **Теория вероятностей и математическая статистика.** Основные понятия, примеры и задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. — Днепр, Издательство “Лира”. — 2019. — 648 с.

ISBN 978-966-981-216-2

Учебник охватывает традиционный материал курсов “Теория вероятностей” и “Математическая статистика”. Изложены основные понятия и факты теории вероятностей и математической статистики. Богатая подборка примеров и задач иллюстрирует применение методов теории вероятностей и математической статистики в разнообразных сферах деятельности человека: физике, химии, астрономии, биологии, генетике, медицине; в экономике, машиностроении, строительстве, геологии, металлургии, экологии, сельском хозяйстве; в психологии, социологии, лингвистике, педагогике, спорте и т. д.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 519.2 (075.8)

ISBN 978-966-981-216-2

© В.Н. Турчин, 2019
© К.Д. Ткаченко, худ. оформл., 2019

Предисловие

Учебник предназначен для тех, кто приступает к изучению теории вероятностей и математической статистики. Он написан на основе многолетнего опыта преподавания автором курса “Теория вероятностей и математическая статистика” в Днепропетровском национальном университете для студентов механико-математического факультета, факультета прикладной математики и других факультетов.

Учебник охватывает традиционную тематику курсов “Теория вероятностей” и “Математическая статистика”: стохастический эксперимент и его математическая модель, дискретная модель, схема независимых испытаний, случайная величина, ее распределение и числовые характеристики, свертка, сходимость распределений, характеристическая функция, предельные теоремы, оценивание параметров распределений, методы получения оценок, проверка статистических гипотез, параметрические и непараметрические критерии, простая линейная регрессия (одна глава посвящена комбинаторике).

При первоначальном знакомстве с курсом необходимо рассмотреть как можно больше примеров и решить как можно больше задач. Их богатая подборка приведена в учебнике. При этом для иллюстрации применения методов теории вероятностей и математической статистики при исследовании реальных явлений и процессов в большинстве случаев задачи формулируются не в формально-математических, а в естественно-научных терминах. Такие задачи естественным образом возникают в разнообразных сферах деятельности человека: в информационных технологиях, физике, химии, астрономии, биологии, генетике, медицине; в экономике, машиностроении, строительстве, геологии, металлургии, экологии, сельском хозяйстве; в психологии, социологии, лингвистике, педагогике, спорте и т. д. Решение приведенных в книге задач требует неформального овладения материалом: необходимо предложить ту или иную математическую модель, обосновать этот выбор, предложить метод решения задачи, дать интерпретацию полученным результатам.

Задачи классифицированы по степени трудности (хотя сложных задач в книге нет). При этом элементарные задачи обозначены значком $^\circ$, более сложные — звездочкой, задачи средней сложности не выделены.

В отдельной главе приведены решения задач, указания и ответы.

В учебнике теоремы, примеры, формулы, таблицы, рисунки имеют тройную, а задачи — двойную нумерацию. Например, запись “формула (3.1.2)” обозначает формулу 2 из параграфа 1 главы 3, а запись “задача 5.12” — задачу 12 из главы 5.

Во втором издании были исправлены замеченные опечатки и неточности и внесены изменения в изложение материала, коснувшиеся в основном глав 11, 12, 21.

Учебником могут пользоваться как студенты механико-математических факультетов, факультетов прикладной математики и кибернетики университетов, так и студенты технических, педагогических, экономических высших учебных заведений.

Автор благодарен сыну Евгению Турчину и дочери Наталье Олерих за тщательное прочтение рукописи книги и ее содержательное обсуждение.

Предложения и пожелания относительно содержания книги и стиля изложения материала просим посылать по адресу:

Украина, 49010, Днепр-10, пр. Гагарина, 72, Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара, механико-математический факультет, кафедра статистики и теории вероятностей, В. Н. Турчину или по адресу vnturchyn@gmail.com

Автор

Глава 1

Элементы комбинаторики

1.1 Основной принцип комбинаторики

Комбинаторика изучает конечные множества. Множества будем обозначать большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots$, их элементы — малыми. Число элементов конечного множества A будем обозначать $n(A)$.

Вычисляя число элементов множества A, удобно пользоваться таким фактом: если между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, то

$$n(A) = n(B)$$

— зачастую число элементов множества B подсчитать проще.

Прямое произведение множеств. Пусть A и B — произвольные множества. Каждые два элемента $a \in A$ и $b \in B$ задают упорядоченную пару (a, b). Множество всех упорядоченных пар $(a, b), a \in A, b \in B$, будем называть *декартовым* (*прямым*) *произведением* множеств A и B и будем обозначать $A \times B$.

Пример 1.1.1. *Найти декартовы произведения* $A \times B$ *и* $B \times A$, *где* $A = \{1, 2\}$ *и* $B = \{3, 4, 5\}$.

Решение. $A \times B = \{(1;3), (1;4), (1;5), (2;3), (2;4), (2;5)\}$, $B \times A = \{(3;1), (3;2), (4;1), (4;2), (5;1), (5;2)\}$.

Пусть дано k множеств $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}$. Множество упорядоченных наборов $(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)})$, где $a^{(1)} \in A^{(1)}$, $a^{(2)} \in A^{(2)}, \ldots, a^{(k)} \in A^{(k)}$, будем называть декартовым (прямым) произведением множеств $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}$ и будем обозначать $A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(k)}$.

Пример 1.1.2. *Если* $A^{(1)} = \mathbb{R}^1, A^{(2)} = \mathbb{R}^1, A^{(3)} = \mathbb{R}^1$, *то декартово произведение* $A^{(1)} \times A^{(2)} = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2$ *является плоскостью, а декартово произведение* $A^{(1)} \times \times A^{(2)} \times A^{(3)} = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^3$ — *трехмерным пространством.*

Правило умножения (основной принцип комбинаторики). *Число* $n(A \times B)$ *элементов декартова произведения* $A \times B$ *конечных множеств* A *и* B *равно произведению* $n(A)n(B)$ *числа* $n(A)$ *элементов множества* A *и числа* $n(B)$ *элементов множества* B:

$$n(A \times B) = n(A)n(B).$$

В самом деле, для каждого элемента $a \in A$ существует $n(B)$ элементов (a, b), $b \in B$, декартова произведения $A \times B$. И поскольку множество A содержит $n(A)$ элементов, то число $n(A \times B)$ элементов декартова произведения $A \times B$ равно

$$n(B) + n(B) + \ldots n(B) = n(B)n(A),$$

в левой части $n(A)$ слагаемых — по числу элементов в множестве A.

Правило умножения для декартова произведения k множеств: *число* $n(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(k)})$ *элементов декартова произведения* $A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(k)}$ *конечных множеств* $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}$ *равно произведению*

$$n(A^{(1)})n(A^{(2)}) \ldots n(A^{(k)})$$

числа элементов $n(A^{(1)}), n(A^{(2)}), \ldots, n(A^{(k)})$ *этих множеств:*

$$n(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(k)}) = n(A^{(1)})n(A^{(2)}) \ldots n(A^{(k)}).$$

Пример 1.1.3. *Пусть* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$. *Найти* $n(A \times B)$.

Решение. $n(A \times B) = n(A)n(B) = 3 \cdot 4 = 12$.

Правило умножения в терминах действий. Часто правило умножения формулируют в терминах действий.

Пусть необходимо выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 числом способов, второе — n_2 числом способов и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k числом способов, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 n_2 \dots n_k$ числом способов.

В самом деле, обозначим через $A^{(1)}$ набор способов выполнить первое действие, через $A^{(2)}$ — второе, и т. д., через $A^{(k)}$ — k-е действие. Тогда элемент $(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots \dots, a^{(k)})$ декартова произведения $A^{(1)} \times A^{(2)} \times \dots \times A^{(k)}$ задает способ выполнить все k действий вместе. Поэтому число всех способов выполнить k действий равно числу элементов декартова произведения $A^{(1)} \times A^{(2)} \times \dots \times A^{(k)}$. Следовательно,

$$n(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \dots \times A^{(k)}) =$$

$$= n(A^{(1)})n(A^{(2)}) \dots n(A^{(k)}) = n_1 n_2 \dots n_k.$$

Пример 1.1.4. *Сколько четырехзначных чисел можно записать цифрами* $0, 1, 2, 3, 4, 5$, *если ни одна цифра не повторяется больше одного раза?*

Решение. Записывая четырехзначное число, мы выполняем четыре действия: записываем слева направо первую, вторую, третью, четвертую цифры. Первое действие можно выполнить пятью способами (нуль на первом месте не пишут), второе — пятью способами (одну цифру уже использовано при записи первой слева цифры, но, начиная со второго места, можно использовать нуль), третье действие — четырьмя способами, четвертое — тремя. Поэтому согласно правилу умножения все четыре действия вместе можно выполнить $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ способами. Следовательно, цифрами от 0 до 5 можно записать 300 различных четырехзначных чисел, в записи которых цифры не повторяются.

Упорядоченные множества. Мы будем различать множества и упорядоченные множества.

Определение. Множество будем называть *упорядоченным,* если каждому его элементу приписан номер, причем так, что различным элементам приписаны различные номера.

Упорядоченные множества различны, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Конечное множество можно упорядочить следующим способом: *записать все элементы множества в список* $a, b, c, \ldots, f$ *и каждому элементу приписать его номер в списке, или, что то же, расположить элементы множества на занумерованных местах и каждому элементу приписать номер места, на котором он оказался.* Как правило, так и будем поступать.

Перестановки. n-Элементные упорядоченные подмножества данного n-элементного множества будем называть его *перестановками.*

Различные перестановки данного множества отличаются только порядком элементов, но не самими элементами.

Число всех перестановок n-элементного множества обозначают P_n.

Пример 1.1.5. *Выписать все перестановки множества* $\Omega = \{a, b, c\}$.

Решение. (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a) — все перестановки множества $\{a, b, c\}$, заметим, что $P_3 = 6$.

Число перестановок. *Число P_n всех перестановок n-элементного множества (число способов упорядочить n-элементное множество) равно $n!$, т. е.*

$$P_n = n!$$

Пример 1.1.6. *Сколькими способами можно упорядочить множество чисел $1, 2, \ldots, 2n$ так, чтобы четные числа получили четные номера?*

Решение. Расположим $2n$ чисел $1, 2, \ldots, 2n$ на $2n$ местах, причем так, чтобы четные числа заняли места с четными номерами (при этом нечетные числа займут места с нечетными номерами). Выполним это в два действия. Действие первое — расположим n четных чисел на n четных местах (упорядочим n-элементное множество); это можно сделать $n!$ способами. Действие второе — расположим n нечетных чисел на n нечетных местах ($n!$ способами). Два действия вместе (расположение четных чисел на четных местах, нечетных — на нечетных) согласно правилу умножения можно выполнить $(n!)^2$ способами.

Размещения. *Размещением из n* элементов по k будем называть упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества.

Размещения из n элементов по k различны, если они отличаются или своими элементами, или их порядком.

Пример 1.1.7. *Пусть $\Omega = \{a, b, c\}$. Выписать все размещения из 3 элементов по 2.*

Решение. $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$.

Число размещений. *Число A_n^k всех упорядоченных k-элементных подмножеств n-элементного множества (число размещений из n элементов по k) равно $n(n-1)\ldots$ $\ldots(n-(k-1))$, т. е.*

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-(k-1)).$$

Пример 1.1.8. *Сколько трехзначных телефонных номеров можно составить из цифр от 0 до 9 так, чтобы в записи номера все цифры были разные?*

Решение. Трехзначный телефонный номер из различных цифр — это 3-элементное упорядоченное подмножество множества $0, 1, \ldots, 9$. А количество A_{10}^3 3-элементных упорядоченных подмножеств, которые можно составить из элементов 10-элементного множества, равно $10 \cdot 9 \cdot 8$, т. е.

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Сочетания. *Сочетанием из n элементов по k* будем называть k-элементное подмножество n-элементного множества.

Сочетания из n элементов по k различны, если они отличаются своими элементами (по меньшей мере одним). Порядок элементов в сочетании не существенен — сочетания, состоящие из одних и тех же элементов, неразличимы.

Пример 1.1.9. *Пусть* $\Omega = \{a, b, c\}$. *Выписать все сочетания из* 3 *элементов по* 1 *и из* 3 *по* 2.

Решение. $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ — все сочетания из 3 элементов по 1, $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ — из 3 по 2. Из определения следует, что, например, $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$ — одно и то же сочетание.

Число сочетаний. *Число* C_n^k *всех* k*-элементных подмножеств* n*-элементного множества (число сочетаний из* n *элементов по* k*) равно* $n!/(k!(n-k)!)$, *т. е.*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 1.1.10 (шахматный город). *Рассмотрим прямоугольную сетку квадратов — “шахматный город”, состоящий из* $m \times n$ *квадратных кварталов, разделенных* $n-1$ *“горизонтальными” и* $m-1$ *“вертикальными” улицами (рис.* 1.1.1*). Сколько на этой сетке различных кратчайших путей, ведущих из левого нижнего угла (точки* $(0,0)$*) в правый верхний угол (в точку* (m, n)*)?*

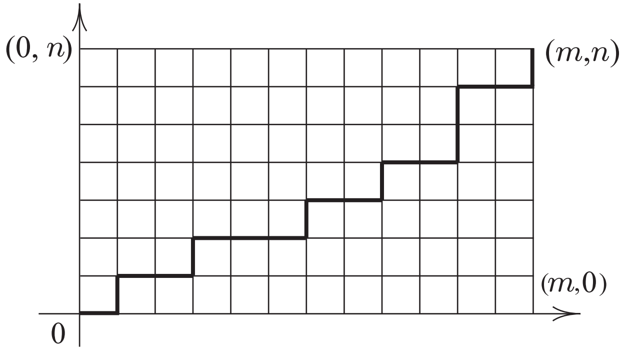


Рис. 1.1.1: “Шахматный город”

Решение. Обозначим буквой Г горизонтальный отрезок пути, буквой В — вертикальный. Каждый кратчайший путь из $(0, 0)$ в (m, n) имеет n вертикальных отрезков и m горизонтальных. Он полностью задается упорядоченной последовательностью длиной $n+m$, составленной из m букв Г и n букв В и наоборот. Поэтому число кратчайших путей равно числу последовательностей длиной $n+m$, составленных из m букв Г и n букв В. Каждая такая последовательность однозначно задается выбором m мест из $n+m$ для буквы Г (оставшиеся места заполняются буквами В), поэтому их число равно C_{n+m}^{m}.

Разбиение множеств. *Разбиением* n-элементного множества Ω на m попарно непересекающихся подмножеств, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов ($k_1+k_2+\ldots+k_m = n$), будем называть упорядоченный набор

$$(A, B, C, \ldots, S)$$

из m непересекающихся подмножеств множества Ω, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов.

Два разбиения на m попарно непересекающихся подмножеств, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов, различны, если хотя бы в одной паре соответствующих k_j-элементных подмножеств ($j = 1, 2, \ldots, m$) имеются различные элементы.

Пример 1.1.11. *Привести все возможные разбиения множества $\Omega = \{a, b, c, d\}$ на 3 непересекающихся подмножества: (A, B, C), содержащие соответственно $k_1 = 1$ элементов (множество A); $k_2 = 2$ элементов (множество B); $k_3 = 1$ элементов (множество C).*

Решение.

$(\{a\}, \{b, c\}, \{d\}); (\{a\}, \{c, d\}, \{b\}); (\{a\}, \{b, d\}, \{c\});$
$(\{b\}, \{a, c\}, \{d\}); (\{b\}, \{c, d\}, \{a\}); (\{b\}, \{a, d\}, \{c\});$
$(\{c\}, \{a, b\}, \{d\}); (\{c\}, \{a, d\}, \{b\}); (\{c\}, \{b, d\}, \{a\});$
$(\{d\}, \{a, b\}, \{c\}); (\{d\}, \{a, c\}, \{b\}); (\{d\}, \{b, c\}, \{a\}).$

Заметим, что например, $(\{a\}, \{b, c\}, \{d\})$ и $(\{d\}, \{b, c\}, \{a\})$ являются различными разбиениями множества $\Omega = \{a, b, c, d\}$.

Число разбиений множества на подмножества. *Число $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ разбиений n-элементного множества Ω на m непересекающихся подмножеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов ($k_1 + k_2 + \ldots\ldots + k_m = n$), равно*

$$n!/(k_1!k_2!\ldots k_m!),$$

т. е.

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Перестановки с повторениями. *Перестановкой с повторениями* (*словом*) длиной n, образованной k_1 элементами (буквами) a_1, k_2 элементами (буквами) a_2, и т. д., k_m элементами (буквами) a_m $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$ будем называть упорядоченную последовательность длиной n, образованную k_1 элементами (буквами) a_1, k_2 элементами (буквами) a_2, и т. д., k_m элементами (буквами) a_m.

Два слова длиной n, образованные k_1 буквами a_1, k_2 буквами a_2, и т. д., k_m буквами a_m различны, если они отличаются порядком букв.

Число перестановок с повторениями. *Число перестановок с повторениями* (*слов*) *длиной n, которые можно составить из k_1 элементов* (*букв*) *a_1, k_2 элементов* (*букв*) *a_2, и т. д., k_m элементов* (*букв*) *a_m* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$, *равно $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.*

Пример 1.1.12. *Сколько существует способов разместить n различимых частиц по m ячейкам так, чтобы в первую ячейку попало k_1 частиц, во вторую — k_2, и т. д., в m-ю — k_m?*

Решение. Для определенности занумеруем частицы числами $1, 2, \ldots, n$, а ячейки (области пространства) — номерами $1, 2, \ldots, m$.

Оборот "распределить (разместить) n частиц по m ячейкам" обозначает — каждой частице приписать номер ячейки, в которой она окажется. Так что каждому размещению n частиц по m ячейкам соответствует последовательность длиной n, составленная из чисел $1, 2, \ldots, m$, другими словами соответствует слово $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ длиной n, составленное из номеров ячеек $1, 2, \ldots, m$ (i_1 — номер ячейки, в которой оказалась частица с номером 1, i_2 — номер ячейки, в которой оказалась частица с номером 2 и т. д., i_n — номер ячейки, в которой оказалась частица с номером n). И наоборот, каждая такая последовательность (слово) задает распределение n различимых частиц по m ячейкам. Поэтому число всех размещений n частиц по m ячейкам равно m^n — числу слов длиной n, составленных из чисел от 1 до m. А число размещений n частиц по m ячейкам, у которых в первой ячейке находится k_1 частиц, во второй — k_2 частиц и т. д., в m-й — k_m частиц равно числу слов длиной n, составленным из k_1 элементов (букв) "1", k_2 элементов (букв) "2" и т. д., k_m элементов (букв) "m", т. е. равно $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Сочетания с повторениями. *Сочетанием из m элементов по n с повторениями* будем называть набор (множество) из n элементов, каждый из которых принадлежит одному из m типов.

Сочетание из m элементов по n с повторениями однозначно задается указанием числа x_1 элементов первого типа, числа x_2 элементов второго типа, и т. д., числа x_m элементов m-го типа, в него входящих, т. е. задается последовательностью $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ неотрицательных целых чисел, таких, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$, и наоборот — сочетание из m элементов по n с повторениями однозначно определяет последовательность неотрицательных целых чисел, таких, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ (x_1 — число элементов первого типа, x_2 — второго типа, и т. д., x_m — число элементов m-го типа).

Два сочетания с повторениями из m элементов по n различны, если они отличаются количеством элементов хотя бы одного типа. Порядок элементов в сочетании с повторениями не существен.

Пример 1.1.13. *Выписать все сочетания с повторениями из 4 элементов a, b, c, d по 2.*

Решение. $aa, bb, cc, dd, ab, ac, ad, bc, bd, dc$.

Число сочетаний с повторениями. *Число f_m^n сочетаний из m элементов по n с повторениями равно C_{n+m-1}^{m-1}, т. е.*

$$f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

Если $n > m$, то число таких сочетаний из m элементов по n с повторениями, в которых каждый элемент встречается хотя бы один раз, равно C_{n-1}^{m-1}.

Пример 1.1.14. *Сколько неотрицательных решений в целых числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$?*

Решение. Решением уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

в целых неотрицательных числах является последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ целых неотрицательных чисел такая, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$. Каждая такая последовательность задает сочетание из m по n с повторениями и наоборот. Поэтому искомое число решений равно числу f_m^n сочетаний из m по n с повторениями.

Сочетания с повторениями и слова. Пусть имеется слово длиной n, составленное из m букв (элементов): x_1 букв a_1, x_2 букв a_2 и т. д., x_m букв a_m $(x_1 + x_2 + \ldots$ $\ldots + x_m = n)$. "Ссыпав" буквы слова в урну, получим набор из n элементов, в котором число элементов первого типа равно x_1, второго — x_2, и т. д., m-го типа — x_m, т. е. получим сочетание из m элементов по n с повторениями (одно) с заданным числом элементов каждого типа.

Наоборот. Пусть мы имеем сочетание из m элементов по n с повторениями, в котором число элементов первого типа равно x_1, второго — x_2, и т. д., m-го типа — x_m (имеем набор из n элементов "ссыпанных" в урну: x_1 элементов a_1, x_2 элементов a_2 и т. д., x_m элементов a_m). Разместив элементы на n занумерованных местах (упорядочив их) получим слово. Число всех таких слов равно $C_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

1.2 Задачи

АЗ: $1.3^\circ, 1.10, 1.14, 1.16^\circ, 1.18, 1.19, 1.22, 1.23, 1.25.$

СЗ: $1.4^\circ, 1.5^\circ, 1.11^\circ, 1.15, 1.17^\circ, 1.20, 1.24, 1.27, 1.30, 1.32.$

В предлагаемых далее задачах, прежде чем подсчитывать число элементов того или иного множества, необходимо определить: *что именно представляют собой эти элементы* (*т. е., что подсчитывать*). Прежде чем отвечать на вопрос "*Сколько?*", необходимо ответить на вопрос "*Что? Что будем считать?*"

1.1°. Из города A в город B ведет n дорог, а из B в C — m дорог. Сколькими способами можно осуществить путешествие по маршруту $A - B - C$?

1.2°. На вершину горы ведет семь тропинок. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? Ответить на этот вопрос при условии, что восхождение и спуск осуществляются различными путями.

1.3°. В розыгрыше первенства страны по футболу участвуют 17 команд. Сколькими способами могут быть распределены между ними золотая, серебряная и бронзовая медали?

1.4°. Сколько трехзначных чисел можно записать цифрами 0, 1, 2, 3, 4?

1.5°. Сколько трехзначных чисел можно записать цифрами 0, 1, 2, 3, 4, если каждую из них использовать не более одного раза?

1.6°. Сколькими способами семь человек могут стать в очередь к кассе?

1.7°. Ученики изучают 10 предметов. В понедельник по расписанию 6 уроков, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

1.8°. Сколько существует пятизначных чисел, делящихся на 5?

1.9°. Автомобильный номер состоит из двух букв и четырех цифр. Какое число различных номеров можно составить, используя 26 букв латинского алфавита?

1.10. В розыгрыше первенства страны по футболу принимают участие 16 команд. Команды, занявшие первое, второе и третье места, награждают соответственно золотой, серебряной и бронзовой медалями, а команды, оказавшиеся на двух последних местах, покинут высшую лигу. Сколько различных результатов первенства может быть?

1.11°. Сколькими способами из 9 человек можно выбрать комиссию в составе 4 человек?

1.12°. Сколькими способами читатель может выбрать три книги из пяти?

1.13°. Сколькими способами можно разместить на полке 4 разные книги?

1.14. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Сколько делителей имеет число $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые натуральные числа?

1.15. Сколько существует перестановок из n элементов, у которых два данные элемента стоят рядом?

1.16°. Сколькими способами можно рассадить 4 учеников на 25 местах?

1.17°. Студенту необходимо на протяжении 8 дней сдать 4 экзамена. Сколькими способами это можно сделать?

1.18. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ так, чтобы числа $1, 2, 3$ стояли рядом и в порядке возрастания?

1.19. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых каждая последующая цифра больше предыдущей?

1.20. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?

1.21*. В прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов необходимо записать числа $+1$ и -1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и каждом столбце было равно 1. Сколькими способами это можно сделать?

1.22. Имеется p белых и q черных шаров $(p > q)$. Сколькими способами можно расположить в ряд все шары так, чтобы никакие 2 черных шара не лежали рядом?

1.23. На плоскости проведено n прямых так, что никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке.

1) Найдите количество точек пересечения прямых.

2) Сколько треугольников образуют прямые?

3) На сколько частей делят плоскость прямые?

4) Сколько среди частей, на которые делится плоскость прямыми, ограниченных и сколько неограниченных?

1.24. Сколько диагоналей имеет выпуклый n-угольник?

1.25. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого n-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

1.26*. В выпуклом n-угольнике проведено все диагонали. Известно, что никакие три из них не пересекаются в одной точке. На сколько частей при этом разделится n-угольник?

1.27. Доказать, что

$$n(A^{(1)} \times A^{(1)} \times \cdots \times A^{(k)}) = n(A^{(1)})n(A^{(2)}) \ldots n(A^{(k)}).$$

1.28. Доказать, что число способов упорядочить n-элементное множество равно $n!$

1.29. Доказать, что число A_n^k размещений из n элементов по k равно $n(n-1)\ldots(n-(k-1))$.

1.30. Доказать, что C_n^k — число k-элементных подмножеств n-элементного множества равно $n!/(k!(n-k)!)$.

1.31. Доказать, что $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

1.32. Доказать, что число $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ способов разбить n-элементное множество на m непересекающихся подмножеств, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов, равно $n!/(k_1!k_2!\ldots k_m!)$.

1.33. Доказать, что существует $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ слов длиной n из k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, и т. д., k_m букв a_m.

1.34. Сколькими способами можно разделить $m+n+s$ предметов на три группы так, чтобы в одной группе было m предметов, в другой — n, в третьей — s?

1.35. Сколькими способами можно разделить $3n$ предметов между тремя лицами так, чтобы каждый получил n предметов?

1.36 (полиномиальная теорема). Доказать, что выражение $(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n$ равно сумме всех возможных слагаемых вида

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m},$$

где $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$, т. е.

$$(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m},$$

суммирование ведется по всем целочисленным неотрицательным последовательностям $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ таким, что $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$.

1.37. Доказать, что число f_m^n сочетаний из m элементов по n с повторениями равно C_{n+m-1}^{m-1}.

1.38. Доказать, что число сочетаний из m элементов по n с повторениями ($n > m$), в которых каждый элемент встречается хотя бы один раз, равно C_{n-1}^{m-1}.

1.39. Сколько различных частных производных порядка n имеет аналитическая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$?

1.40. Сколько существует способов разместить три неразличимые шара по трем неразличимым ящикам?

1.41. Доказать тождество

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

1.42. Доказать тождество

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

1.43. Через каждую точку с целочисленными координатами в трехмерном пространстве проведены прямые, параллельные осям координат. Сколько существует кратчайших путей из точки $(0, 0, 0)$ в точку (m, n, k), $m > 0, n > 0, k > 0$, по линиям этой сетки?

Глава 2

Стохастический эксперимент

2.1 Пространство элементарных событий, алгебра событий

Теория вероятностей изучает *стохастические эксперименты*, исследуя их математические модели. Под стохастическим экспериментом мы понимаем эксперимент, результат которого невозможно предсказать заранее (до проведения эксперимента), но который можно повторить (воспроизвести) в принципе неограниченное число раз, причем так, чтобы результаты предыдущих экспериментов не влияют на последующие (независимым образом).

Примеры стохастических экспериментов.

1. Подбрасывают две монеты и регистрируют стороны, которыми они легли кверху. Исход эксперимента — "герб, герб", "герб, решетка", "решетка, герб", "решетка, решетка" — предсказать заранее невозможно.

2. Подбрасывают игральную кость и регистрируют число выпавших очков. Исход эксперимента — появление $1, 2, \ldots, 6$ — предсказать заранее невозможно.

3. Подбрасывают монету и регистрируют число подбрасываний до первого появления герба. Исход эксперимента — число подбрасываний: $0, 1, 2, \ldots$ — заранее предсказать невозможно.

4. Регистрируют интервал времени до выхода из строя прибора. Исход эксперимента — продолжительность без-

отказной работы прибора — заранее предсказать невозможно.

5. Частица участвует в броуновском движении — движется под воздействием ударов молекул жидкости, которые постоянно пребывают в хаотическом тепловом движении. Исход эксперимента — траекторию движения частицы — заранее предсказать невозможно.

Заметим, что каждый из перечисленных выше экспериментов можно независимым образом повторить неограниченное число раз.

Пространство элементарных событий. Каждому стохастическому эксперименту соответствует *пространство* (множество) его исходов. Пространство исходов будем обозначать через Ω, а сами исходы, как правило (но не обязательно), будем обозначать через ω (возможно, с индексами). Исходы стохастического эксперимента еще называют элементарными событиями. Далее для нас "исход стохастического эксперимента" и "элементарное событие стохастического эксперимента" обозначают одно и то же.

В примере 1 в качестве пространства исходов стохастического эксперимента естественно рассматривать множество $\Omega = \{$ГГ, ГР, РГ, РР$\}$, в примерах 2, 3, 4 соответственно множества $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$, $\Omega = [0, \infty)$, в примере 5 в качестве Ω естественно рассматривать множество траекторий частицы.

Реализацию стохастического эксперимента мы интерпретируем как случайный выбор точки ω из пространства Ω.

Пространство элементарных событий (исходов) Ω будем называть *дискретным*, если оно конечно или счетно, т. е. элементы Ω можно занумеровать числами $1, 2, \ldots$

Алгебра событий. Из опыта известно, что с каждым стохастическим экспериментом можно связать семейство событий, которые можно наблюдать (которые могут произойти) в данном эксперименте, будем их называть *наблюдаемыми событиями*. Наблюдаемые события стохастического эксперимента, как правило, обозначают большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots$, а семейство всех наблюдаемых событий — готической буквой $\mathfrak{A}$.

Наблюдаемые события в примере 1: A — "выпал хотя бы один герб", B — "монеты легли разными сторонами"; в примере 2: C — "выпало четное число очков", ...

Каждое событие A стохастического эксперимента можно описать некоторым подмножеством пространства Ω элементарных событий (исходов), а именно, подмножеством тех исходов, которые влекут A:

$$A = \{\omega : \omega \in \Omega, \text{ *которые влекут событие* } A\}.$$

Поэтому в дальнейшем наблюдаемое событие мы будем отождествлять с некоторым подмножеством элементарных событий (исходов), которым это событие описывается и будем обозначать их одной и той же буквой.

Если в результате проведения стохастического эксперимента точка ω попала в множество A, которое описывает событие A, будем говорить, что событие A произошло, в противном случае — не произошло.

В примере 1 событие "монеты легли разными сторонами" описывается подмножеством {ГР, РГ} пространства Ω = {ГГ, ГР, РГ, РР}; в примере 2 событие "выпало четное число очков" описывается подмножеством $\{2, 4, 6\}$ пространства $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, в примере 3 событие "эксперимент закончился до четвертого подбрасывания" описывается подмножеством $\{0, 1, 2, 3\}$ пространства $\Omega = \{0, 1, \dots\}$, в примере 4 событие "продолжительность безотказной работы прибора превысила 100 единиц времени" описывается подмножеством $(100, \infty)$ пространства $\Omega = [0, \infty)$.

Среди наблюдаемых событий стохастического эксперимента выделяются два: событие, которое происходит при каждой реализации стохастического эксперимента (оно называется *достоверным* и описывается множеством Ω), и событие, которое не происходит ни при одной реализации эксперимента (оно называется *невозможным* и описывается множеством $\emptyset$).

Пусть A и B — наблюдаемые события стохастического эксперимента, которые описываются соответственно подмножествами A и B пространства элементарных событий Ω.

Если каждый раз, когда происходит событие A, происходит и событие B, то будем говорить, что событие A

влечет событие B и будем обозначать это так: $A \subset B$ (в терминах подмножеств, которыми описываются события, A является подмножеством B).

События A и B, такие что $A \subset B$ и $B \subset A$ (т. е. A и B происходят вместе), в теории вероятностей неразличимы. Их отождествляют и обозначают это так: $A = B$ (в терминах подмножеств, описывающих события, подмножества A и B равны).

Событие, состоящее в том, что происходит хотя бы одно из событий A или B, называется *суммой* (*объединением*)[1] событий A и B и обозначается так: $A \cup B$ (сумма событий A и B описывается объединением $A \cup B$ множеств A и B).

Событие, состоящее в том, что происходит как событие A, так и событие B, называется *произведением* (*пересечением*) событий A и B и обозначается так: $A \cap B$ (произведение событий A и B описывается пересечением $A \cap B$ множеств A и B).

Если события A и B такие, что $A \cap B = \emptyset$, то они называются *несовместными.*

Событие, состоящее в том, что A происходит, а B не происходит, называется *разностью* событий A и B и обозначается так: $A \backslash B$ (разность событий A и B описывается разностью $A \setminus B$ множеств A и B).

Событие, состоящее в том, что A не происходит, называется *противоположным* к событию A и обозначается $\overline{A}$ (событие $\overline{A}$ описывается дополнением $\overline{A}$ множества A до Ω).

Класс $\mathfrak{A}$ событий, который вместе с каждым событием A содержит событие $\overline{A}$ и вместе с каждыми двумя событиями A и B содержит событие $A \cup B$, будем называть *алгеброй событий.* Так что совокупность событий, которые наблюдаются в стохастическом эксперименте является алгеброй (подробнее относительно алгебры событий см. гл. 7).

Пусть в эксперименте 1 событие B — “монеты легли разными сторонами”, A — “в результате первого подбрасывания выпал герб”. События B и A как подмножества

[1] Относительно операций над событиями см. разд. 7.1. в гл. 7.

пространства элементарных событий

$$\Omega = \{\text{ГГ, ГР, РГ, РР}\}$$

опишутся так: $B = \{\text{ГР, РГ}\}$, $A = \{\text{ГГ, ГР}\}$. Тогда, согласно приведенным определениям $A \cap B = \{\text{ГР}\}$ — "в результате первого подбрасывания выпал герб, а в результате второго — решетка", $A \cup B = \{\text{ГГ, ГР, РГ}\}$ — "хотя бы один раз выпал герб", $A \setminus B = \{\text{ГГ}\}$ — "выпало два герба", $\overline{B} = \{\text{ГГ, РР}\}$ — "монеты легли одной стороной".

Приведем еще одну иллюстрацию операций над событиями.

П р и м е р 2.1.1 (диаграмма Венна). *Эксперимент состоит в бросании наудачу точки в квадрат и наблюдении событий, состоящих в попадании точки в те или иные его подмножества. Обозначим через* A *событие "точка попала в вертикальный прямоугольник", а через* B *— "точка попала в горизонтальный прямоугольник". Тогда наблюдаемые события* A, B, $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ *состоят в попадании точки в соответствующие заштрихованные области* (*см. рис.* 2.1.1).

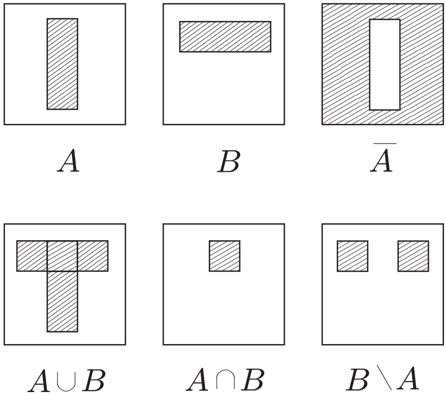


Рис. 2.1.1: Диаграмма Венна

2.2 Задачи

АЗ: $2.2^\circ, 2.5, 2.8^\circ, 2.11, 2.12, 2.15, 2.16, 2.17$.
СЗ: $2.3^\circ, 2.4, 2.6^\circ, 2.7^\circ, 2.10^\circ, 2.13, 2.14, 2.18, 2.19$.

Далее термины “элементарное событие стохастического эксперимента”, “исход стохастического эксперимента”, “результат стохастического эксперимента” обозначают одно и то же.

2.1°. Указать события, противоположные к таким: а) A — “выпадение герба в результате двух подбрасываний монеты”; б) B — “три попадания в результате трех выстрелов по мишени”; в) C — “хотя бы одно попадание в результате трех выстрелов по мишени”.

2.2°. Сделано три выстрела по мишени. Пусть событие A_i состоит в том, что в результате i-го выстрела произошло попадание, $i = 1, 2, 3$. Выразить через A_i такие события: а) A — “произошло три попадания”; б) B — “не было ни одного попадания”; в) C — “произошло ровно одно попадание”; г) D — “произошло не менее двух попаданий”.

2.3°. Пусть A, B, C — наблюдаемые события. Записать события, состоящие в том, что не произошло ни одно из событий A, B, C; из событий A, B, C произошло: а) только событие A; б) события A и B и не произошло событие C; в) все три события; г) хотя бы одно событие; д) одно и только одно событие; е) не более двух событий.

2.4. Радиолокационная станция ведет наблюдение за космическим объектом, при этом проведено n циклов осмотра. Обнаружение объекта в i-м цикле — наблюдаемое событие, обозначим его через $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Выразить через $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$, такие события: A — “объект не будет обнаружен (ни в одном цикле)”; B — “объект будет обнаружен (хотя бы в одном цикле)”; C — “объект будет обнаружен только в одном цикле”.

2.5. Каждая из m радиолокационных станций, следящих за космическим объектом, делает n циклов наблюдений. Обозначим через A_{ji} событие “объект будет обнаружен j-й станцией в i-м цикле”, $j = 1, 2, \ldots, m$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Выразить через A_{ji} такие события: A — “объект будет обнаружен (хотя бы одной станцией)"; B — "объект будет обнаружен каждой станцией".

2.6°. Дважды подбрасывают монету; предложить пространство элементарных событий Ω этого стохастического эксперимента. Описать как подмножества Ω события: A — "хотя бы один раз выпадет герб", B — "при втором подбрасывании выпадет герб". Найти число всех элементарных событий; число элементарных событий, принадлежащих A, B.

2.7°. Игральную кость подбрасывают дважды. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "сумма выпавших очков равна 8"; B — "хотя бы один раз выпала 6"; C — "при первом подбрасывании выпало четное число очков"; D — "при обоих подбрасываниях выпадет нечетное число очков". Найти число элементарных событий в Ω, A, B, C, D.

2.8°. Подбрасывают монету, а затем игральную кость. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "выпадет герб"; B — "выпадет цифра 5". Найти число элементарных событий в Ω, A, B.

2.9°. Пусть эксперимент состоит в измерении двух величин, принимающих значения из отрезка $[0; 1]$. Описать пространство элементарных событий.

2.10°. Из цифр $1, 2, 3, 4, 5$ сначала выбирают одну, а затем из четырех оставшихся — другую. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "на первом шаге будет выбрана четная цифра", B — "на втором шаге будет выбрана четная цифра". Найти число элементарных событий в Ω, A, B.

2.11. Из партии, содержащей N изделий, среди которых M бракованных, наудачу выбирают n ($n \le M$, $n \le N - M$) изделий. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножество Ω событие A — "среди выбранных n изделий имеется в точности m бракованных". Найти число элементарных событий в Ω, A.

2.12. В лифте 7 пассажиров, лифт останавливается на 10 этажах. Для каждого пассажира фиксируется номер этажа, на котором он выходит. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножество Ω событие A — "все пассажиры выходят на разных этажах". Найти число элементов в Ω, A.

2.13. Два игрока по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого впервые выпадет герб. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "игра закончится на k-м подбрасывании", B — "игра закончится до k-го подбрасывания", C — "выиграет начавший игру первым", D — "выиграет начавший игру вторым".

2.14. В урне содержится один шар, о котором известно, что он белый или черный. В урну положили белый шар, а затем после тщательного перемешивания извлекли один за другим оба шара. Предложить пространство элементарных событий Ω этого стохастического эксперимента. Описать как подмножества Ω события: A — "при первом извлечении вынут белый шар", C — "при втором извлечении вынут белый шар".

2.15. Игральную кость последовательно подбрасывают n раз. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножество Ω событие A — "выпадет n_1 единиц, n_2 двоек, и т. д., n_6 шестерок" $(n_1+n_2+\ldots$ $\ldots+n_6=n)$. Вычислить количество элементов в Ω, A.

2.16. В турнире участвуют $2n$ человек, которые по жребию разделены на две группы по n человек в каждой. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "двое наиболее сильных игроков будут играть в разных группах", B — "четверо наиболее сильных игроков будут играть по двое в разных группах" (все игроки различаются по силе). Вычислить число элементов в Ω, A, B.

2.17. В наудачу выбранной группе, насчитывающей r $(r \leq 12)$ студентов, интересуемся месяцами их рождения. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "хотя бы два студента родились в одном месяце", B — "только один студент родился в сентябре", C — "хотя бы один студент родился в сентябре", D — "ни один студент не родился в сентябре". Найти число элементов в Ω, A, B, C, D.

2.18. Числа $1, 2, \ldots, n$ располагают наудачу. Каждому из них приписывают номер места, на котором расположено число. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "число 1 получит номер 1", B — "число 1 получит номер 1, а число n — номер n". Найти число элементов в Ω, A, B.

2.19. Подбрасывают три игральные кости. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "единица выпадет только на одной кости", B — "шестерка выпадет только на двух костях", C — "на всех костях выпадут разные грани", D — "на костях выпадет одинаковое число очков". Найти число элементов в Ω, A, B, C, D.

2.20. Монету и игральную кость подбрасывают по очереди неограниченное число раз. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножество Ω события: A — "герб выпадет раньше шестерки", B — "пятерка выпадет раньше герба".

2.21*. Каждая из n различимых частиц попадает в одну из m ячеек. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножество Ω событие: A — "в первую ячейку попало k_1 частиц, во вторую — k_2, и т. д., в m-ю — k_m". Найти число элементов в Ω, A.

2.22*. Каждая из n неразличимых частиц попадает в одну из m $(n \geq m)$ ячеек. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножество Ω событие: A — "каждая из ячеек содержит по меньшей мере одну частицу". Найти число элементов в Ω, A.

2.23. В поезде m вагонов. Каждый из n $(n > m)$ пассажиров выбирает себе вагон. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "в каждом вагоне будет по меньшей мере один пассажир", B — "будет занято ровно r вагонов" (вагон занято, если в нем находится хотя бы один пассажир).

2.24. Девять пассажиров садятся в три вагона. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "в каждый вагон сядет по три пассажира", B — "в один вагон сядут четыре, в другой — три, в третий — два пассажира".

2.25. Студент пришел на экзамен, зная 35 из 40 вопросов программы. Экзаменатор задает студенту 4 вопроса. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "студент знает ответы на все вопросы", C — "студент не знает ответа ни на один вопрос", B_i — "студент знает ответы на i вопросов" ($i = 1, 2, 3$), D — "студент сдаст экзамен" (чтобы сдать экзамен, необходимо ответить не менее чем на 3 вопроса).

2.26. Участник лотереи "Спортлото" из 49 названий видов спорта (обозначенных числами от 1 до 49), среди которых 6 выигрышных, должен назвать 6. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω события: A — "участник правильно укажет все шесть названий", B — "участник получит выигрыш" (для получения выигрыша необходимо правильно указать не менее чем 3 вида).

2.27. Два лица, договорившись встретиться в течение часа, решили, что каждый независимо от другого приходит на место встречи в наудачу выбранный момент указанного часа. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножество Ω события: A — "встреча состоится, если каждый будет ждать другого на протяжении времени t ($t < 1$), после чего уходит с места встречи", B — "данное лицо придет на место встречи раньше другого", C — "данное лицо придет на место встречи раньше другого на время, не меньшее, чем q ($q < 1$)".

2.28. Наудачу берут три отрезка, длина которых не превышает 1. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножества Ω событие: A — "из отрезков можно построить треугольник".

2.29. Числа $1, 2, \ldots, n$ расположены наудачу. Предложить пространство элементарных событий Ω. Описать как подмножество Ω событие A — "числа 1 и 2 расположены рядом". Найти число элементов в Ω и A.

Глава 3

Дискретное вероятностное пространство

3.1 Вероятность, классическая модель

Частота события. Вероятность. В отдельно взятом стохастическом эксперименте мы не можем предсказать, произойдет или не произойдет данное наблюдаемое событие A. Но, как показывает опыт, одни события происходят "чаще", другие происходят "реже" — каждому наблюдаемому событию свойственна своя частота появления, а именно, в длинной серии независимых экспериментов доля тех из них, в которых наблюдается данное событие, остается практически неизменной. Другими словами, если $k_n(A)$ — число тех экспериментов из n проведенных, в которых наступило событие A, то их доля

$$\frac{k_n(A)}{n} = \nu_n(A) \tag{3.1.1}$$

среди n, еще называемая *частотой события A в последовательности n экспериментов*, при больших n несущественно уклоняется от некоторого числа $\mathsf{P}(A)$, причем с увеличением n заметные уклонения $k_n(A)/n$ от $\mathsf{P}(A)$ встречаются все реже — $k_n(A)/n$ практически не отличается от $\mathsf{P}(A)$. Последнее дает нам основание приписать каждому событию A число $\mathsf{P}(A)$, называемое его вероятностью.

Вероятность — это функция

$$\mathsf{P} : A \to \mathsf{P}(A),$$

ставящая в соответствие каждому событию A число $\mathsf{P}(A)$ (вероятность события A) так, что

1° для каждого события A

$$\mathsf{P}(A) \geq 0 \tag{3.1.2}$$

(вероятность неотрицательна);

2° для несовместных (непересекающихся) событий A_i, $i = 1, 2, \ldots,$ $(A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j)$

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i) \tag{3.1.3}$$

(вероятность счетно-аддитивна);

3° для достоверного события Ω

$$\mathsf{P}(\Omega) = 1 \tag{3.1.4}$$

(вероятность — нормированная функция множества).

Вероятность является математической моделью частоты $\nu_n(A)$ события A в последовательности n экспериментов. А свойства (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) вероятности — это постулированные очевидные свойства частоты:

1° для каждого события A

$$\nu_n(A) \geq 0$$

(частота неотрицательна);

2° для несовместных событий A и B

$$\nu_n(A \cup B) = \nu_n(A) + \nu_n(B)$$

(частота аддитивна);

3° для достоверного события Ω

$$\nu_n(\Omega) = 1$$

(частота — нормированная функция множества).

На вероятность $p = \mathsf{P}(A)$ события A можно смотреть как на количественную меру прогноза появления события A, в том смысле, что в достаточно "длинной" серии экспериментов частота $\nu_n(A)$ появления события A будет "близка" к p.

Вероятность на дискретном пространстве. Пару $\{\Omega, \mathsf{P}\}$, где Ω — дискретное (конечное или счетное) пространство элементарных событий стохастического эксперимента, а P — вероятность на классе событий (классе всех подмножеств Ω), будем называть *дискретным вероятностным пространством.*

Каждое событие A описывается некоторым подмножеством пространства элементарных событий Ω (см. гл. 2). В дискретном пространстве $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ событие A описывается не более чем счетным подмножеством, поэтому его можно представить в виде объединения не более чем счетного числа исходов ω:

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\},$$

и, следовательно,

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathsf{P}(\omega) \tag{3.1.5}$$

(см. (3.1.3)).

Равенство (3.1.5) означает, что *в дискретном вероятностном пространстве вероятность события A равна сумме вероятностей $\mathsf{P}(\omega)$ исходов ω, описывающих событие A* (в общем случае — не дискретного Ω — это не так). И, следовательно, *чтобы задать вероятность на классе подмножеств дискретного пространства Ω, достаточно задать вероятности $\mathsf{P}(\omega)$ исходов, $\omega \in \Omega$*, при этом для любого события A

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathsf{P}(\omega).$$

Дискретное вероятностное пространство $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ является математической моделью стохастического эксперимента с конечным или счетным множеством исходов.

Пример 3.1.1. *Подбрасывают игральную кость, изготовленную так, что частота появления грани пропорциональна числу очков на ней. Построить вероятностное пространство этого стохастического эксперимента. Описать как подмножества Ω события: A — "выпадет число очков, кратное 3", B — "выпадет четное число очков". Вычислить их вероятности.*

Подбрасывают симметричную игральную кость (все грани выпадают одинаково часто). Предложить вероятностное пространство этого стохастического эксперимента. Вычислить вероятности событий A и B.

Решение. В качестве пространства элементарных событий первого из описанных стохастических экспериментов естественно рассматривать $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Вероятность появления единицы обозначим p, тогда вероятность появления грани с номером j равна jp, и поскольку

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathsf{P}(\omega) = 1,$$

то $p + 2p + \ldots + 6p = 1$. Отсюда $p = 1/21$, $\mathsf{P}(j) = j/21$, $j = 1, 2, \ldots, 6$. Так что вероятностное пространство $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ стохастического эксперимента построено.

События A и B опишутся соответственно подмножествами $A = \{3; 6\}$ и $B = \{2; 4; 6\}$ пространства Ω.

Вероятности событий A и B (как вероятности событий в дискретном вероятностном пространстве, см. (3.1.5)) вычисляются так:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\{3; 6\}) = \mathsf{P}(3) + \mathsf{P}(6) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{3}{7};$$

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(\{2; 4; 6\}) = \mathsf{P}(2) + \mathsf{P}(4) + \mathsf{P}(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{4}{7}.$$

При подбрасывании симметричной игральной кости пространство элементарных событий будет таким же:

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, а вероятности элементарных событий естественно задать следующим образом:

$$\mathsf{P}(i) = 1/6, i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Тогда

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\{3; 6\}) = \mathsf{P}(3) + \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(\{2; 4; 6\}) = \mathsf{P}(2) + \mathsf{P}(4) + \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

З а м е ч а н и е. Заметим, что здесь фактически решаются две задачи (и это стандартная ситуация).

З а д а ч а 1. Строится математическая модель стохастического эксперимента (вероятностное пространство), т. е. выбирается пространство элементарных событий Ω и задается вероятность каждого элементарного события:

$$\mathsf{P}(i) = i/21,\ i = 1, 2, \ldots, 6,$$

(для несимметричной кости) и

$$\mathsf{P}(i) = 1/6,\ i = 1, 2, \ldots, 6,$$

(для симметричной кости). При этом необходимо заметить, что теория вероятностей никаких указаний и рекомендаций относительно задания вероятностей элементарных событий не дает — ни из каких теорем не следует, что, скажем, для симметричной игральной кости

$$\mathsf{P}(i) = 1/6,\ i = 1, 2, \ldots, 6.$$

И каждый раз, когда (из тех или иных соображений) вероятностное пространство выбрано, вопрос о его адекватности стохастическому эксперименту (о правильности описания им стохастического эксперимента) остается открытым. Ответить на него помогает математическая статистика.

Заметим, что построение (выбор) вероятностного пространства не является задачей теории вероятностей.

З а д а ч а 2. После выбора вероятностного пространства $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ вычисляют вероятности тех или иных событий (пользуясь теоремами теории вероятностей).

Классическая модель. Дискретное вероятностное пространство $\{\Omega, \mathsf{P}\}$, элементарные события ω_i которого равновероятны, т. е.

$$\mathsf{P}(\omega_i) = \mathsf{P}(\omega_j),\ \omega_i, \omega_j \in \Omega,$$

называют *классической моделью.*

В классической модели $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ пространство элементарных событий Ω конечно, вероятность $\mathsf{P}(\omega_i)$ элементарного события $\omega_i \in \Omega$ равна $1/n(\Omega)$, т. е.

$$\mathsf{P}(\omega_i) = \frac{1}{n(\Omega)},\ i = 1, 2, \ldots, n(\Omega),$$

и для любого события A

$$\mathsf{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}. \tag{3.1.6}$$

Последняя формула называется *формулой классической вероятности.*

П р и м е р 3.1.2. *Симметричную игральную кость подбрасывают шесть раз. Построить математическую модель этого стохастического эксперимента. Описать событие A — “выпадут все шесть граней” и вычислить его вероятность.*

Р е ш е н и е. В качестве пространства элементарных событий стохастического эксперимента естественно рассматривать множество упорядоченных последовательностей длиной 6, составленных из чисел от 1 до 6. Например, последовательность $(6, 1, 6, 3, 2, 4)$ описывает исход стохастического эксперимента, состоящий в том, что при первом подбрасывании игральной кости выпала 6, при втором — 1, и т. д. при шестом — 4.

Событие A — “выпали все грани” опишется подмножеством множества исходов Ω, состоящим из последовательностей, в записи которых встречается каждая из цифр $1, 2, \ldots, 6$.

Далее, поскольку каждый из исходов стохастического эксперимента ничем не лучше и не хуже другого (кость симметричная), то естественно считать, что все элементарные события равновероятны (ни из каких теорем это утверждение не следует). Другими словами, в качестве математической модели данного стохастического эксперимента будем рассматривать классическую модель. Тем самым вероятностное пространство (модель стохастического эксперимента) построено — предложено Ω и для каждого $\omega \in \Omega$ задана его вероятность $\mathsf{P}(\omega)$:

$$\mathsf{P}(\omega) = 1/n(\Omega).$$

Теперь вычислим вероятность события A — “выпадут все шесть граней”. Поскольку модель классическая, то согласно формуле классической вероятности (3.1.6), вероятность события A равна отношению числа $n(A)$ элементарных событий, входящих в событие A, к числу $n(\Omega)$ всех элементарных событий Ω.

Элементарных событий в Ω столько, сколько последовательностей длиной 6, которые можно построить из шести чисел (от 1 до 6). Согласно правилу умножения их 6^6. Элементарных событий, входящих в событие A, столько, сколько имеется последовательностей, которые можно построить из различных чисел от 1 до 6 (сколько существует перестановок из чисел $1, 2, \ldots, 6$) — их 6!

Следовательно, искомая вероятность

$$\mathsf{P}(A) = \frac{6!}{6^6}.$$

3.2 Задачи

АЗ: $3.1, 3.3, 3.7, 3.13, 3.14, 3.16, 3.21, 3.27, 3.28^*, 3.38^*$.
СЗ: $3.2, 3.9, 3.10, 3.11, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.41$.

В предложенных далее задачах прежде чем вычислять вероятность того или иного случайного события A, необходимо построить математическую модель стохастического эксперимента, т. е. задать пространство Ω элементарных событий ω и задать их вероятности $\mathsf{P}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Затем описать событие A как подмножество Ω и вычислить его вероятность в дискретном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ (как правило, в классической модели).

Примечание. Задачи с подбрасыванием игральных костей, монет следует решать в предположении, что кости и монеты симметричные (если не оговорено иное).

3.1. В наудачу выбранной группе, насчитывающей r студентов, интересуемся их днями рождения. Вычислить вероятность события A, состоящего в совпадении дней рождения хотя бы у двух студентов.

3.2. В наудачу выбранной группе, насчитывающей r студентов, интересуемся месяцами их рождения. Вычислить вероятность события A, состоящего в том, что хотя бы два студента родились в одном и том же месяце.

3.3. Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд (разных по силе) согласно жребию делят на две подгруппы по n команд каждая.

1. Вычислить вероятность того, что две самые сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе.

2. Вычислить вероятность того, что четыре самые сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах (по две в каждой); б) в одной подгруппе; в) в разных подгруппах, причем в одной подгруппе 3 команды, в другой — 1.

3.4°. В коробке содержится пять одинаковых кубиков, занумерованных числами от 1 до 5. Наудачу по одному вынимают все кубики. Вычислить вероятность того, что номера кубиков появятся в порядке возрастания.

3.5. Числа $1, 2, \ldots, n$ упорядочивают наудачу. Вычислить вероятность того, что 1 и 2 будут расположены рядом.

3.6. Студент пришел на экзамен, зная 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задает студенту три вопроса. Вычислить вероятность того, что студент: 1) знает ответы на все вопросы; 2) знает ответы на два вопроса; 3) сдаст экзамен (если для этого необходимо ответить не менее чем на два вопроса); 4) не сдаст экзамен.

3.7. Игральную кость подбрасывают 6 раз. Вычислить вероятность того, что выпадут только четные грани.

3.8. Из карточек разрезной азбуки составлено слово “статистика”. Потом из этих десяти карточек наудачу выбирают семь. Вычислить вероятность того, что из выбранных карточек можно составить слово “статика”.

3.9. Ребенок играется десятью буквами разрезной азбуки А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Вычислить вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд образуется слово “математика”.

3.10. Пусть n человек, среди которых присутствуют A и B, строятся в ряд в произвольном порядке. Вычислить вероятность того, что между A и B будет стоять ровно r человек.

3.11. В шахматном турнире участвуют 20 человек (разных по силе), которых по жребию делят на две группы по 10 человек каждая. Вычислить вероятность того, что: а) двое наиболее сильных участников будут играть в разных группах; б) четверо наиболее сильных участников будут играть по два в разных группах.

3.12. Найти вероятность того, что среди двух чисел, выбранных наудачу из последовательности $1, 2, \ldots, n$, одно окажется меньшим, а другое большим заданного числа k $(1 < k < n)$.

3.13. Девять пассажиров рассаживаются по трем вагонам. Вычислить вероятность того, что:

а) в каждый вагон сядет по три пассажира;

б) в один вагон сядут четыре, в другой — три, в третий — два пассажира.

3.14. В лифте 7 пассажиров. Лифт останавливается на десяти этажах. Найти вероятность того, что никакие два пассажира не выйдут на одном и том же этаже.

3.15°. Вычислить вероятность того, что даты рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

3.16. Среди N изделий M бракованных. Наудачу выбирают n изделий $(n < N - M,\ n < M)$. Найти вероятность того, что среди них m бракованных. Какова вероятность того, что среди них более чем m бракованных?

3.17. В лотерее n билетов, среди них m выигрышных. Найти вероятность выигрыша для владельца r билетов.

3.18. На экзамене предлагается N вопросов. Студент знает ответы на n вопросов. Экзаменатор задает студенту k вопросов, а для того чтобы сдать экзамен, необходимо ответить не менее чем на r $(r < k)$ вопросов. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен.

3.19. Участник лотереи "Спортлото" из 49 названий видов спорта (обозначенных числами $1, 2, \ldots, 49$), среди которых 6 выигрышных, должен назвать 6. Полный выигрыш получает тот, кто правильно укажет все шесть названий. Выигрыш получат и те, кто угадает не менее трех названий. Найти вероятность полного выигрыша в "Спортлото". Вычислить вероятность того, что участник "Спортлото" угадает 5, 4, 3 названий. Какова вероятность получить выигрыш в "Спортлото"?

3.20. Подбрасывают 12 игральных костей. Какова вероятность того, что каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 выпадет дважды?

3.21. Подбрасывают n игральных костей. Какова вероятность того, что выпадут n_1 единиц, n_2 двоек, ..., n_6 шестерок $(n_1 + n_2 + \ldots + n_6 = n)$?

3.22°. Четырехтомное собрание сочинений расставляют на полке наудачу. Вычислить вероятность того, что тома окажутся расположенными в порядке возрастания их номеров.

3.23°. Дважды подбрасывают симметричную монету. Предложить вероятностное пространство этого стохастического эксперимента. Описать события: A — "при первом подбрасывании выпадет герб", B — "при втором подбрасывании выпадет герб". Вычислить вероятности $\mathsf{P}(A)$, $\mathsf{P}(B)$, $\mathsf{P}(A \cap B)$.

3.24°. Трижды подбрасывают симметричную монету. Предложить вероятностное пространство этого стохастического эксперимента. Описать события: A — "дважды выпадет герб", B — "хотя бы один раз выпадет герб". Вычислить вероятности $\mathsf{P}(A)$, $\mathsf{P}(B)$, $\mathsf{P}(A \cap B)$, $\mathsf{P}(B/A)$.

3.25. Подбрасывают n игральных костей. Вычислить вероятность того, что на всех игральных костях появится одинаковое число очков.

3.26°. Подбрасывают шесть игральных костей. Вычислить вероятность того, что суммарное число очков на костях будет равно 7.

3.27. Пусть n лиц садятся в ряд наудачу. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом? Вычислить вероятность того же события, если лица садятся за круглый стол.

3.28*. Доказать, что вероятнее получить при четырех подбрасываниях игральной кости хотя бы одну единицу, чем при 24 подбрасываниях пары игральных костей хотя бы один раз пару единиц.

Примечание. Задача известна как парадокс де Мере. Придворный кавалер и азартный игрок шевалье де Мере, современник Блеза Паскаля, считал, что вероятности этих событий одинаковы, и обвинял математиков в своих проигрышах.

3.29. Доказать, что в классической модели $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ пространство элементарных событий Ω конечно и для каждого элементарного события $\omega_i \in \Omega$ значение вероятности $\mathsf{P}(\omega_i) = 1/n(\Omega), i = 1, 2, \ldots, n(\Omega)$, где $n(\Omega)$ — число всех элементарных событий.

3.30. В каждой из двух урн находится по n шаров, среди них n белых и n черных, шары различимы. Пусть k — число белых шаров в первой урне. Наудачу выбирают шар из первой урны, шар из второй урны и перекладывают их из одной урны в другую. Вычислить вероятность того, что число белых шаров в первой урне 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

3.31 (статистика Максвелла-Больцмана). Пусть n различимых частиц распределяется по m ячейкам (областям пространства). Найти вероятность того, что в первой, второй, и т. д., m-й ячейке будет содержаться соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ частиц.

3.32. За круглым столом располагаются n лиц. Вычислить вероятность того, что три определенные лица окажутся рядом.

3.33°. Подбрасывают три монеты. Найти вероятности событий: A — "на первой монете выпадет герб", B — "выпадет ровно два герба", C — "выпадет не более двух гербов".

3.34. Из множества всех последовательностей длиной n, составленных из цифр $0, 1, 2$, наудачу выбирается одна. Найти вероятности событий: A — "последовательность начинается с 0", B — "последовательность содержит

$m+2$ нулей, причем два из них — на концах последовательности", C — "последовательность содержит m единиц", D — "последовательность составлена из m_0 нулей, m_1 единиц, m_2 двоек".

3.35°. Подбрасывают две игральные кости. Найти вероятности событий: A — "сумма очков кратна 6", B — "сумма очков кратна 2", C — "произведение очков — четное число".

3.36*. Вычислить вероятность того, что четырехзначный номер наудачу выбранного в большом городе автомобиля: а) состоит из разных цифр; б) имеет ровно две одинаковые цифры; в) имеет две пары одинаковых цифр; г) имеет ровно три одинаковые цифры; д) состоит из одинаковых цифр.

3.37. Из урны, содержащей M_1 шаров с номером 1, M_2 шаров с номером 2, и т. д., M_k шаров с номером k, наудачу извлекают n шаров ($n \leq M_1, n \leq M_2, \ldots, n \leq M_k$). Вычислить вероятность события A — "появится m_1 шаров с номером 1, m_2 шаров с номером 2, и т. д., появится m_k шаров с номером k".

3.38*. 1. Из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ последовательно наудачу без возвращения выбирают два числа ξ_1 и ξ_2. Вычислить вероятность события $\{\xi_1 < \xi_2\}$.

2. Из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ последовательно наудачу без возвращения выбирают три числа ξ_1, ξ_2, ξ_3. Вычислить вероятность того, что второе число будет расположено между первым и третьим, т. е. вычислить вероятность события $\{\xi_1 < \xi_2 < \xi_3\}$.

3. Из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ последовательно наудачу без возвращения выбирают n чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ($n \leq N$). Вычислить вероятность того, что числа $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$ появятся в порядке возрастания.

3.39°. Куб, все грани которого покрашены, распилили на тысячу кубиков одинакового размера. Кубики перемешали. Найти вероятность того, что наудачу выбранный кубик: а) имеет хотя бы одну окрашенную грань; б) имеет две окрашенных грани; в) имеет три окрашенных грани.

3.40 (призовая игра). Вы участвуете в призовой игре (приз — автомобиль). Перед вами три закрытых двери. За одной из них — автомобиль. Ведущий предлагает вам выбрать дверь. Вы выбираете. Прежде чем открыть выбранную вами дверь, ведущий открывает одну из оставшихся дверей — за ней автомобиля нет. После этого ведущий предлагает вам два варианта последующих действий — открыть выбранную ранее вами дверь или открыть оставшуюся дверь. Если за открытой дверью автомобиль — он ваш.

Какой выбор сделать — открыть первоначально выбранную дверь или открыть оставшуюся?

Естественно, что предпочтительнее тот выбор, который обеспечивает большую вероятность выигрыша автомобиля.

Вычислите вероятность выигрыша автомобиля, если: 1) вы открываете первоначально выбранную дверь; 2) вы открываете оставшуюся дверь.

Задача и ее решение становятся особенно "прозрачными", если автомобиль находится за одной из n дверей (пусть для наглядности $n = 1000$).

Вы выбираете дверь, после чего ведущий демонстрирует, что за $n-2$ дверями из $n-1$ оставшихся автомобиля нет. Теперь выбор за вами — открыть первоначально выбранную дверь или открыть оставшуюся дверь.

3.41. $2n$ шаров, среди которых n белых и n черных, наудачу распределяют по двум урнам — по n шаров в каждую.

Найти вероятность того, что в первой урне окажется k белых шаров.

3.42 (прямое произведение вероятностных пространств). Пусть $\{\Omega^{(1)}, \mathsf{P}^{(1)}\}$ и $\{\Omega^{(2)}, \mathsf{P}^{(2)}\}$ — дискретные вероятностные пространства:

$$\Omega^{(1)} = \{\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \dots \omega_{N^{(1)}}^{(1)}\},$$

$$\mathsf{P}^{(1)}(\omega_i^{(1)}) = p_i^{(1)}, i = 1, 2, \dots, N^{(1)};$$

$$\Omega^{(2)} = \{\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \dots \omega_{N^{(2)}}^{(2)}\},$$

$$\mathsf{P}^{(2)}(\omega_j^{(2)}) = p_j^{(2)}, j = 1, 2, \dots, N^{(2)},$$

и пусть

$$\Omega = \{(\omega_i^{(1)}, \omega_j^{(2)}),\ i = 1, 2, \dots, N^{(1)},\ j = 1, 2, \dots, N^{(2)}\},$$

$$\mathsf{P}(\omega_i^{(1)}, \omega_j^{(2)}) = p_i^{(1)} p_j^{(2)},\ i = 1, 2, \ldots, N^{(1)},\ j = 1, 2, \ldots, N^{(2)}.$$

Доказать, что пара $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ является вероятностным пространством и для любых

$$A = \{(\omega_i^{(1)}, \omega_j^{(2)}) : \omega_i^{(1)} \in A^{(1)},\ \omega_j^{(2)} \in \Omega^{(2)}\},$$

$$B = \{(\omega_i^{(1)}, \omega_j^{(2)}) : \omega_i^{(1)} \in \Omega^{(1)},\ \omega_j^{(2)} \in B^{(2)}\}$$

имеет место равенство

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B).$$

Глава 4

Условная вероятность

4.1 Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Условная вероятность. Пусть $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ — вероятностное пространство. Для данного события B ($B \subset \Omega$, $\mathsf{P}(B) > 0$) *условной вероятностью* $\mathsf{P}_B(A)$ события A при условии, что событие B произошло (относительно события B) будем называть величину $\dfrac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$, т. е.

$$\mathsf{P}_B(A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}. \qquad (4.1.1)$$

Условную вероятность $\mathsf{P}_B(A)$ обозначают еще так: $\mathsf{P}(A/B)$.

Условная вероятность $\mathsf{P}_B(A)$ — модель частоты события A, когда B заведомо произошло, когда мы интересуемся частотой события A только в последовательности тех экспериментов, в которых B произошло.

Функция множества $\mathsf{P}_B(A)$, $A \subset B$, является вероятностью на классе подмножеств множества B, поэтому пара $\{B, \mathsf{P}_B\}$ — образует дискретное вероятностное пространство.

В классической модели $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ *условная вероятность* $\mathsf{P}(A/B)$ *события* A *относительно события* B *равна отношению числа* $n(A \cap B)$ *исходов, входящих в* $A \cap B$, *к чис-*

лу $n(B)$ исходов, входящих в B:

$$\mathsf{P}(A/B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Условную вероятность $p = \mathsf{P}(A/B)$ события A относительно события B можно интерпретировать как количественную меру прогноза появления A, если событие B заведомо произошло.

Пример 4.1.1. *Подбрасывают три симметричные игральные кости. Найти вероятность того, что хотя бы на одной кости выпадет единица, если известно, что на трех выпали разные грани.*

Решение. Кости будем считать различимыми. В качестве пространства элементарных событий Ω рассмотрим упорядоченные тройки, составленные из чисел $1, 2, \ldots$ $\ldots, 6$. Поскольку кости симметричны, то естественно считать все элементарные исходы равновероятными. Тем самым вероятностное пространство стохастического эксперимента построено (модель классическая).

Пусть B — событие "на трех костях выпали разные грани", A — "хотя бы на одной кости выпала единица". В задаче необходимо вычислить условную вероятность

$$\mathsf{P}(A/B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Имеем

$$\mathsf{P}(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}, \ \mathsf{P}(A \cap B) = \frac{C_3^1 \cdot 5 \cdot 4}{6^3},$$

$$\mathsf{P}(A/B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{C_3^1 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} \Big/ \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{1}{2}.$$

Вероятность $\mathsf{P}(A/B)$ также можно вычислить, воспользовавшись тем, что в классической модели $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ условная вероятность $\mathsf{P}(A/B)$ равна отношению числа $n(A \cap B)$ элементарных событий, принадлежащих $A \cap B$, к числу $n(B)$ элементарных событий, принадлежащих B, т. е.

$$\mathsf{P}(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{C_3^1 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что вероятность того, что на трех костях выпали разные грани и хотя бы на одной кости выпадет единица, т. е. вероятность события $A \cap B$, равна отношению $n(A \cap B)/n(\Omega)$ числа исходов, входящих в $A \cap B$, к числу $n(\Omega)$ всех исходов Ω :

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{C_3^1 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{18}.$$

Пример 4.1.2 (задача Льюиса Кэррола). *В урне содержится один шар, о котором известно, что он или белый (с вероятностью* $1/2$*), или черный. В урну положили белый шар, и затем, тщательно перемешав шары, извлекли наудачу один шар, который оказался белым. Какова вероятность того, что после этого из урны извлекут белый шар?*

Решение 1. Эксперимент состоит в последовательном извлечении из урны двух шаров. Обозначим белый шар через W, черный — через B. Множеством всех исходов стохастического эксперимента является

$$\Omega = \{WW, WB, BW\}.$$

Например, пара WB описывает исход: “первым извлечен белый шар, вторым — черный”. Пусть A_1 — событие “белый шар извлечен первым”, A_2 — “белый шар извлечен вторым”. Необходимо вычислить $\mathsf{P}(A_2/A_1)$. События A_1, A_2, $A_1 \cap A_2$ как подмножества Ω опишутся так:

$$A_1 = \{WW, WB\},\ A_2 = \{WW, BW\},\ A_1 \cap A_2 = \{WW\}.$$

Поскольку в Ω входят три элементарные события, в A_1 — два, в $A_1 \cap A_2$ — одно, то

$$\mathsf{P}(A_2/A_1) = \frac{\mathsf{P}(A_2 \cap A_1)}{\mathsf{P}(A_1)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

Р е ш е н и е 2. Белый шар, который кладут в урну, пометим, например, звездочкой и обозначим его через W^*. Тогда множеством всех исходов стохастического эксперимента является

$$\Omega^* = \{WW^*, W^*W, BW^*, W^*B\}.$$

События A_1, A_2, $A_1 \cap A_2$ как подмножества Ω^* опишутся так:

$$A_1 = \{WW^*, W^*W, W^*B\}, A_2 = \{WW^*, W^*W, BW^*\},$$

$$A_1 \cap A_2 = \{WW^*, W^*W\}.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}(A_2/A_1) = \frac{\mathsf{P}(A_2 \cap A_1)}{\mathsf{P}(A_1)} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

Два решения — два разных ответа — нехорошо.

В о п р о с 1. Какое из решений неверное?

В о п р о с 2. Где допущена ошибка?

Попытайтесь сначала ответить на вопросы 1 и 2, не читая дальше.

О т в е т к примеру 4.1.2.

Решение 1 неверное. Модель не классическая, а вероятности событий вычисляются как в классической модели. Вероятности элементарным событиям необходимо приписать так:

$$\mathsf{P}(WW) = 1/2,\ \mathsf{P}(WB) = 1/4,\ \mathsf{P}(BW) = 1/4.$$

Поскольку сначала в урне находился белый шар (с вероятностью $1/2$) или черный (с вероятностью $1/2$), то после того, как в урну положили один белый шар, в урне находятся с вероятностью $1/2$ шары одного цвета и с вероятностью $1/2$ — разного. В этой модели имеем:

$$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathsf{P}(WW) = 1/2,$$

$$\mathsf{P}(A_1) = \mathsf{P}(\{WW, WB\}) =$$

$$= \mathsf{P}(WW) + \mathsf{P}(WB) = 1/2 + 1/4 = 3/4,$$

$$\mathsf{P}(A_2/A_1) = \frac{\mathsf{P}(A_2 \cap A_1)}{\mathsf{P}(A_1)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

В решении 2 каждому исходу приписываем вероятность $1/4$. Заметим, что в урне, после того, как в нее положили один белый шар и до того, как шары начали извлекать, находилось: два белых шара (с вероятностью $1/2$), или один белый, другой черный (с вероятностью $1/2$).

Комментарий к примеру. Пример, в частности, иллюстрирует тот факт, что для одного и того же стохастического эксперимента можно предложить разные пространства элементарных событий, а вместе с ними и разные вероятностные пространства, которые адекватно описывают стохастический эксперимент. В примере было предложено два пространства элементарных событий:

$$\Omega = \{WW, WB, BW\}, \Omega^* = \{WW^*, W^*W, BW^*, W^*B\}.$$

Распределение вероятностей на пространстве элементарных событий Ω такое:

$$\mathsf{P}(WW) = 1/2,\ \mathsf{P}(WB) = 1/4,\ \mathsf{P}(BW) = 1/4,$$

а на пространстве Ω^* такое:

$$\mathsf{P}(WW^*) = 1/4,\ \mathsf{P}(W^*W) = 1/4,$$

$$\mathsf{P}(W^*B) = 1/4,\ \mathsf{P}(BW^*) = 1/4.$$

Обе эти модели адекватно описывают стохастический эксперимент. Заметим, что одна из них классическая, другая — нет.

Формула полной вероятности. События $B_i \subset \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$, будем называть *полной группой событий*, если они попарно не пересекаются ($B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$) и в объединении дают Ω — достоверное событие $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega\right)$.

Теорема 4.1.1. *Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — полная группа событий и $\mathsf{P}(B_i) > 0, i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для любого события A имеет место формула полной вероятности:*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A/B_i)\mathsf{P}(B_i).$$

Формула полной вероятности справедлива и для счетной полной группы событий.

Пример 4.1.3 (“счастливые” билеты). *Среди N экзаменационных билетов имеется n “счастливых” (все студенты их знают). Студенты один за другим подходят за билетами. У кого больше вероятность вытянуть “счастливый” билет — у того, кто подошел первым, или у того, кто подошел вторым?*

Решение. Обозначим через A_i^l событие “i-й студент вытянул счастливый билет”, $i = 1, 2$, а через A_1^u — “1-й студент вытянул несчастливый билет”. Далее вычисляем $\mathsf{P}(A_1^l)$ и $\mathsf{P}(A_2^l)$.

Согласно формуле классической вероятности

$$\mathsf{P}(A_1^l) = \frac{n}{N}.$$

Вероятность события $\mathsf{P}(A_2^l)$ вычисляем по формуле полной вероятности, учитывая, что A_1^l и A_1^u образуют полную группу событий:

$$\mathsf{P}(A_2^l) = \mathsf{P}(A_2^l/A_1^l)\mathsf{P}(A_1^l) + \mathsf{P}(A_2^l/A_1^u)\mathsf{P}(A_1^u) =$$

$$= \frac{n-1}{N-1}\frac{n}{N} + \frac{n}{N-1}\frac{N-n}{N} = \frac{n}{N}.$$

Следовательно, вероятность вытянуть “счастливый” билет для обоих студентов одинакова.

Замечание. Такой ответ получается, если первый студент не объявил, какой он вытянул билет. В противном случае вероятность того, что “счастливый” билет вытянул второй студент, равна $\mathsf{P}(A_2^l/A_1^l) = (n-1)/(N-1)$, если первый вытянул “счастливый” билет (и объявил об этом), и равна $\mathsf{P}(A_2^l/A_1^u) = n/(N-1)$ — если первый вытянул "несчастливый" билет.

Формулы Байеса. *Пусть* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *— полная группа событий и* $\mathsf{P}(B_i) > 0, i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда для любого события* A $(\mathsf{P}(A) > 0)$

$$\mathsf{P}(B_i/A) = \frac{\mathsf{P}(A/B_i)\mathsf{P}(B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(A/B_k)\mathsf{P}(B_k)}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пример 4.1.4 (сигнал на фоне шума). *На фоне шума на вход радиолокационного устройства с вероятностью* p $(0 < p < 1)$ *поступает сигнал. Если поступил сигнал (с шумом), то устройство регистрирует наличие сигнала с вероятностью* p_1, *если только шум, то устройство регистрирует наличие сигнала с вероятностью* p_2. *Устройство зарегистрировало сигнал. Какова вероятность того, что на вход радиолокационного устройства сигнал поступил?*

Решение. Введем такие обозначения: A_c — на вход пришел сигнал (с шумом), A — на вход пришел только шум, B_c — устройство зарегистрировало наличие сигнала, B — устройство зарегистрировало шум. Необходимо вычислить $\mathsf{P}(A_c/B_c)$. Воспользовавшись формулой Байеса (события A_c и A образуют полную группу событий), получим

$$\mathsf{P}(A_c/B_c) = \frac{\mathsf{P}(B_c/A_c)\mathsf{P}(A_c)}{\mathsf{P}(B_c/A_c)\mathsf{P}(A_c) + \mathsf{P}(B_c/A)\mathsf{P}(A)}.$$

По условию задачи $\mathsf{P}(A_c) = p, \ \mathsf{P}(A) = 1 - p, \ \mathsf{P}(B_c/A_c) = p_1, \ \mathsf{P}(B_c/A) = p_2$. Следовательно, искомая вероятность

$$\mathsf{P}(A_c/B_c) = \frac{p_1 p}{p_1 p + p_2(1-p)}.$$

4.2 Независимые события

Интуитивно, случайные события независимы, если информация об одном событии (произошло, не произошло) не меняет прогноз появления другого. (Например, при подбрасывании монеты и игральной кости информация о выпадении шестерки на кости не меняет прогноз появления герба на монете.) Поэтому формально независимые события A и B можно определить как такие, для которых имеет место равенство

$$\mathsf{P}(A/B) = \mathsf{P}(A)$$

или, что то же,

$$\frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \mathsf{P}(A).$$

Последнее равенство можно переписать в симметричном виде:

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B).$$

Определение. Пусть $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ — вероятностное пространство. События A и B ($A \subset \Omega, B \subset \Omega$) будем называть *независимыми*, если

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B).$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будем называть *независимыми в совокупности*, если для любого набора различных индексов $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k = 2, 3, \ldots, n$,

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\mathsf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathsf{P}(A_{i_k}).$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будем называть *попарно независимыми*, если для любых двух различных индексов s и k

$$\mathsf{P}(A_s \cap A_k) = \mathsf{P}(A_s)\mathsf{P}(A_k).$$

Если события A и B независимы, то события A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

П р и м е р 4.2.1 (С. Н. Бернштейн). *Подбрасывают правильный тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, синий и зеленый цвета, а в окраске четвертой грани присутствуют все три цвета. События:* R — *"красный",* B — *"синий",* G — *"зеленый" означают, что в окраске грани, соприкасающейся с поверхностью, присутствуют соответствующие цвета. Убедиться, что события* R, B, G *попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.*

Р е ш е н и е. Исход эксперимента — тетраэдр данной гранью соприкасается с поверхностью. Поскольку тетраэдр правильный, то в качестве математической модели стохастического эксперимента естественно рассматривать классическую модель.

Каждый цвет присутствует в окраске двух граней, поэтому

$$\mathsf{P}(R) = 2/4 = 1/2,\ \mathsf{P}(B) = 1/2,\ \mathsf{P}(G) = 1/2.$$

В окраске только одной грани имеются три цвета, поэтому

$$\mathsf{P}(R \cap B \cap G) = 1/4,\ \mathsf{P}(R \cap B) = 1/4,$$

$$\mathsf{P}(R \cap G) = 1/4,\ \mathsf{P}(B \cap G) = 1/4.$$

Так что

$$\mathsf{P}(R \cap B) = \mathsf{P}(R)\mathsf{P}(B),\ \mathsf{P}(R \cap G) = \mathsf{P}(R)\mathsf{P}(G),$$

$$\mathsf{P}(B \cap G) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(G),$$

т. е. события R, B, G — попарно независимы. Но

$$\mathsf{P}(R \cap B \cap G) = 1/4 \neq 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = \mathsf{P}(R)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(G).$$

Последнее означает, что события R, B, G не являются независимыми в совокупности.

4.3 Задачи

АЗ: $4.11^\circ, 4.12, 4.13, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24$.
СЗ: $4.3^\circ, 4.5, 4.7^\circ, 4.9, 4.10^\circ, 4.13, 4.16, 4.19, 4.24, 4.26$.

4.1°. События A и B — независимы. Доказать, что события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

4.2°. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности и $\mathsf{P}(A_k) = p_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$. Какова вероятность того, что:

а) не произойдет ни одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

б) произойдет по меньшей мере одно из событий A_1, $A_2, \ldots, A_n$;

в) произойдет одно и только одно из событий A_1, A_2, $\ldots, A_n$?

4.3°. За один цикл осмотра радиолокационной станции, наблюдающей за космическим объектом, он будет обнаружен с вероятностью p. Объект в каждом цикле обнаруживается независимо от других. Проведено n циклов наблюдения. Какова вероятность обнаружения объекта?

4.4°. Прибор, состоящий из n блоков, выходит из строя, если выходит из строя хотя бы один блок. Блоки выходят из строя независимо один от другого. Надежность[1] каждого блока равна p. Вычислить надежность прибора.

4.5. Система состоит из двух приборов: основного прибора и прибора его дублирующего, надежность каждого прибора равна p. В случае выхода из строя основного прибора происходит мгновенное переключение на дублирующий прибор. Приборы выходят из строя независимо один от другого. Найти надежность:

1) этой системы приборов;

2) системы приборов, если устройство переключения срабатывает с надежностью p_1.

4.6. Система состоит из основного прибора и $(n-1)$ дублирующих его проборов, надежность каждого прибора равна p. Приборы выходят из строя независимо один от другого. Найти надежность:

[1] Под надежностью прибора или блока приборов будем понимать вероятность его безотказной работы на определенном фиксированном интервале времени.

1) этой системы приборов;

2) системы приборов, если каждый из приборов, включающий дублирующий прибор, имеет надежность p_1.

Сколько необходимо приборов, чтобы надежность системы приборов была не меньше P?

4.7°. Подбрасывают две игральные кости: красного и розового цветов. Какова вероятность того, что сумма очков на костях больше или равна 10, если известно, что:

а) на красной кости выпало 5 очков;

б) на одной из костей выпало 5 очков (возможность выпадения 5 очков на обеих костях не исключена)?

4.8°. В урне содержится n шаров. Все возможные предположения относительно количества белых шаров в урне равновероятны. Наудачу из урны извлекают один шар. Какова вероятность того, что шар белый?

4.9°. В N урнах содержится $n_1, n_2, \ldots, n_N$ шаров, среди них белых соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Наудачу выбирают урну, а из нее — шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется белым?

4.10°. В двух урнах содержится n_1 и n_2 шаров, из них белых шаров соответственно m_1 и m_2. Из первой урны переложили во вторую один шар, цвет которого неизвестен. Затем из второй урны извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

4.11°. Подбрасывают две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков не менее девяти, если на одной из костей выпало четыре очка?

4.12. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может создавать противорадиолокационные помехи. Если объект не создает помехи, то за один цикл осмотра станция обнаруживает его с вероятностью p_0, если создает — то с вероятностью p_1 ($p_1 < p_0$). Событие A_i — “в течение i-го цикла осмотра помехи будут созданы”, $i = 1, 2, \ldots, n$, не зависит от того, как и когда создавались помехи в других циклах, вероятность создания помех в i-м цикле $\mathsf{P}(A_i) = p$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Найти вероятность обнаружения объекта по меньшей мере один раз за n циклов осмотра.

4.13. Прибор состоит из n блоков, дублирующих друг друга, и может работать в благоприятных условиях или в неблагоприятных. В неблагоприятных условиях надежность работы каждого блока равна p_1, а в благоприятных — p_2. Вероятность того, что прибор будет работать в благоприятных условиях, равна p, а в неблагоприятных — $(1 - p)$. Блоки выходят из строя независимо один от другого. Вычислить надежность прибора.

4.14°. В урну, которая содержит n шаров, положили белый шар. Какова вероятность того, что извлеченный из урны шар окажется белым, если все предположения относительно первоначального количества белых шаров в урне равновероятны?

4.15°. В урне находится n шаров, часть из них белые. Все предположения относительно количества белых шаров в урне равновероятны. Наудачу извлеченный из урны шар оказался белым. Вычислить вероятность всех предположений относительно количества белых шаров в урне. Какое предположение наиболее вероятно?

4.16°. В каждой из k_1 урн (первая группа) содержится m_1 белых и n_1 черных шаров, а в каждой из k_2 урн (вторая группа) содержится m_2 белых и n_2 черных шаров. Из наудачу выбранной урны извлекли шар, который оказался белым. Какова вероятность того, что его выбрали из первой группы урн?

4.17. Стрелок A попадает в цель с вероятностью $p_1 = 0{,}6$, стрелок B — с вероятностью $p_2 = 0{,}5$, стрелок C — с вероятностью $p_3 = 0{,}4$. Стрелки сделали залп по мишени. Известно, что имеется два попадания. Что вероятнее: попал стрелок C в мишень или нет?

4.18. В урне содержится 12 белых, 8 черных и 10 красных шаров. Наудачу извлекают два шара. Какова вероятность того, что эти шары разного цвета, если известно, что красный шар не выбран?

4.19. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложили два шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Какова вероятность теперь извлечь белый шар из второй урны?

4.20. Детали изготавливают на двух заводах. Объем продукции второго завода в n раз превышает объем продукции первого завода. Доля брака на первом заводе p_1, на втором — p_2. Наудачу выбранное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе?

4.21*. Вы участвуете в игре, описанной в задаче 3.40, но после выбора вами двери ведущий из оставшихся дверей одну выбирает наудачу и открывает. Если за ней оказался автомобиль, то игра прекращается, если автомобиля нет — ведущий предлагает вам открыть ранее выбранную дверь или оставшуюся дверь. Если за открытой дверью автомобиль — он ваш.

Какой выбор сделать? Какова вероятность выигрыша автомобиля?

Мы рассмотрим более общую задачу: автомобиль находится за одной из n дверей. После выбора вами двери ведущий из $(n-1)$ оставшихся дверей наудачу выбирает $(n-2)$ и открывает их. Если за ними оказался автомобиль, игра прекращается и вы остаетесь без приза, если же автомобиля нет, то вам предоставляется право открыть одну из двух оставшихся дверей.

Какой выбор сделать? Какова вероятность того, что вы выиграете автомобиль?

4.22. Трем радиостанциям разрешена работа на одной из трех заданных частот. Вероятность выбора радиостанцией каждой из частот равна $1/3$ и не зависит от того, какие частоты выбраны другими радиостанциями. Найти вероятности событий: “все радиостанции работают на одной частоте”, “все радиостанции работают на разных частотах”.

4.23. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание у больного туберкулезом составляет $1-\beta$, а вероятность признать здорового человека больным равна α. Пусть доля больных туберкулезом относительно всего населения составляет γ. Найти вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.

4.24. Вероятность того, что изделие предприятия удовлетворяет стандарту, равна 0,96. Предлагается упрощенная схема контроля, которая классифицирует стандартное изделие как стандартное с вероятностью 0,98, а нестандартное как стандартное с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее контроль, удовлетворяет стандарту?

4.25°. Подбрасывают две игральные кости. Какова вероятность того, что выпадет по меньшей мере одна пятерка, если известно, что сумма очков равна восьми?

4.26 (обобщение задачи Льюиса Кэррола). В урне находится один шар, о котором известно, что он либо белый (с вероятностью 1/2), либо черный. В урну положили n белых шаров, а затем после тщательного перемешивания последовательно извлекли n шаров, которые оказались белыми.

Какова вероятность того, что следующим извлеченным из урны шаром окажется белый?

4.27. Имеются три урны: в первой находится N_1 белых и M_1 черных шаров, во второй — N_2 белых и M_2 черных, в третьей — N_3 белых и M_3 черных шаров ($N_i \geq 2,\ M_i \geq 2,\ i = 1, 2, 3$). Наудачу выбирают одну из урн и из нее без возвращения два шара. Один из них оказался белым, другой — черным. Найти вероятность того, что шары были извлечены 1) из первой; 2) из второй; 3) из третьей урны.

4.28* (задача о разделе ставки). Два игрока играют в справедливую игру — у обоих шансы выиграть каждую партию игры одинаковы, например, подбрасывают симметричную монету, если при этом монета легла гербом, партию выиграл первый игрок, если решеткой — второй. Игроки договорились, что игру выигрывает тот, кто первым выиграет 6 партий, при этом выигравший получает весь приз. На самом деле игра остановилась до того, как один из игроков выиграл 6 партий, скажем, первый выиграл 5 партий, а второй — 3. Как справедливо разделить приз?

Задача о разделе ставки имеет давние корни. Впервые ее опубликовал в 1494 г. в Венеции известный математик Фра Лука Пачоли, но имеются основания считать, что задача имеет арабское происхождение. На ее решение было потрачено немало усилий знаменитых математиков (безрезультатно). Неправильное решение: приз следует разделить в отношении 2 к 1, дал Никколо Тарталья (1499 – 1557), хотя он был достаточно гениален, чтобы в математической дуэли за одну ночь найти формулу корней кубического уравнения. Правильное решение независимо друг от друга получили Паскаль и Ферма в 1654 г. Это открытие выглядело настолько важным, что многие считают 1654 г. годом рождения теории вероятностей.

4.29. Два игрока играют в справедливую игру. Тот, кто первым выиграет 7 партий, получает весь приз. Игра прекратилась, когда первый выиграл 6 партий, а второй — 3. Как справедливо разделить приз?

Глава 5

Дискретная случайная величина и ее распределение

5.1 Вычисление распределения функции от случайной величины

Случайная величина на дискретном вероятностном пространстве. Число космических частиц, зарегистрированных счетчиком, число мутаций в клетке при радиоактивном облучении, число вспышек на Солнце, длина очереди из заявок, ждущих обслуживания — все это случайные величины.

На интуитивном уровне под случайной величиной мы понимаем величину, принимающую значения в зависимости от случая, в зависимости от исхода стохастического эксперимента. Исходы стохастического эксперимента описываются точками ω множества исходов Ω, поэтому формально случайную величину мы определяем как функцию $\xi = \xi(\omega)$ на пространстве исходов (элементарных событий) Ω.

О п р е д е л е н и е. *Случайной величиной* со значениями в $\mathbb{R}^n$ на дискретном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ будем называть функцию

$$\xi = \xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$$

со значениями в $\mathbb{R}^n$, заданную на пространстве элементарных событий Ω вероятностного пространства $\{\Omega, \mathsf{P}\}$.

Если $n > 1$, то случайную величину $\xi = \xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ называют *векторной* (*случайным вектором*), в частности, если $n = 2$ — *двумерной*, если $n = 1$ — *одномерной* (скалярной) или просто случайной величиной.

Определение. Случайная величина, принимающая не более чем счетное число значений, называется *дискретной* случайной величиной.

Случайная величина на дискретном вероятностном пространстве всегда дискретна.

Распределение дискретной случайной величины. Дискретная случайная величина описывается своими значениями и вероятностями, с которыми она эти значения принимает (коротко, своим распределением).

Точку $x \in \mathbb{R}^n$ будем называть *возможным значением* случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, заданной на дискретном пространстве $\{\Omega, \mathsf{P}\}$, если

$$\mathsf{P}\{\xi = x\} > 0.$$

Множество возможных значений ξ будем обозначать через $X (X \subset \mathbb{R}^n)$.

Определение. *Распределением* дискретной случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ будем называть функцию

$$\mathsf{P}_\xi : x \to \mathsf{P}_\xi(x),\ x \in X,$$

заданную на множестве X различных возможных значений случайной величины ξ, и ставящую в соответствие каждому возможному значению $x \in X$ вероятность $\mathsf{P}_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi = x\}$, с которой ξ принимает это значение.

Распределение

$$\mathsf{P}_\xi : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \mathsf{P}_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \mathsf{P}\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_n = x_n\}$$

случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ еще называют *совместным* распределением случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Распределение

$$\mathsf{P}_\zeta : (x_i, y_j) \to \mathsf{P}_\zeta(x_i, y_j),\ (x_i, y_j) \in X \subset \mathbb{R}^2,$$

случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ со значениями в $\mathbb{R}^2$ удобно записывать в виде табл. 5.1.1.

Таблица 5.1.1. Распределение $\zeta = (\xi, \eta)$

Значение ξ	Значение η				
	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	$\cdots$
x_1	$\mathsf{P}_\zeta(x_1, y_1)$	$\mathsf{P}_\zeta(x_1, y_2)$	$\cdots$	$\mathsf{P}_\zeta(x_1, y_m)$	$\cdots$
x_2	$\mathsf{P}_\zeta(x_2, y_1)$	$\mathsf{P}_\zeta(x_2, y_2)$	$\cdots$	$\mathsf{P}_\zeta(x_2, y_m)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$\mathsf{P}_\zeta(x_n, y_1)$	$\mathsf{P}_\zeta(x_n, y_2)$	$\cdots$	$\mathsf{P}_\zeta(x_n, y_m)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Распределение дискретной случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ со значениями в $\mathbb{R}^1$ часто записывают в виде таблицы

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$\mathsf{P}_\xi(x_1)$	$\mathsf{P}_\xi(x_2)$	$\ldots$	$\mathsf{P}_\xi(x_n)$	$\ldots$

,

в верхней строке которой указывают различные возможные значения случайной величины, а в нижнем — вероятности, с которыми эти значения принимаются.

Пример 5.1.1. *Пусть ξ — число гербов, выпавших в результате подбрасывания двух симметричных монет. Найти распределение ξ.*

Решение. Случайная величина ξ — функция $\xi = \xi(\omega)$ на дискретном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathsf{P}\}$, где $\Omega = \{\text{ГГ, ГР, РГ, РР}\}$, а вероятность каждого элементарного события равна $1/4$ (монеты симметричны); ξ принимает значения $0, 1, 2$, причем $\mathsf{P}\{\xi = 0\} =$

$= \mathsf{P}\{\omega : \xi(\omega) = 0\} = \mathsf{P}(\text{РР}) = 1/4$, $\mathsf{P}\{\xi = 1\} = = \mathsf{P}(\text{ГР}, \text{РГ}) = \mathsf{P}(\text{ГР}) + \mathsf{P}(\text{РГ}) = 1/4 + 1/4 = 1/2$, $\mathsf{P}\{\xi = 2\} = \mathsf{P}(\text{ГГ}) = 1/4$. Следовательно, распределением ξ является

x_i	0	1	2
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	1/4	1/2	1/4

.

Вычисление распределения функции от случайной величины. По распределению P_ζ случайной величины ζ всегда можно найти распределение любой функции $g(\zeta)$ от ζ.

Теорема 5.1.1. *Пусть ζ — случайная величина со значениями в $\mathbb{R}^n$ на дискретном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathsf{P}\}$, $\mathsf{P}_\zeta : x \to \mathsf{P}_\zeta(x)$ — ее распределение и $g = g(x)$ — функция на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^l$.*

Для произвольного множества B из $\mathbb{R}^l$

$$\mathsf{P}\{g(\zeta) \in B\} = \sum_{x: g(x) \in B} \mathsf{P}_\zeta(x). \tag{5.1.1}$$

В частности, если $\zeta = (\xi, \eta)$, $g = g(x, y)$ и $\mathsf{P}_\zeta(x_i, y_j)$ — распределение $\zeta = (\xi, \eta)$, то

$$\mathsf{P}\{g(\zeta) \in B\} = \mathsf{P}\{g(\xi, \eta) \in B\} = \sum_{(x_i, y_j): g(x_i, y_j) \in B} \mathsf{P}_\zeta(x_i, y_j). \tag{5.1.2}$$

Пример 5.1.2. *Дважды подбрасывают пару симметричных монет, ξ — число гербов при подбрасывании пары монет первый раз, η — второй.*

Найти распределение случайной величины $\min\{\xi, \eta\}$.

Решение. Сначала найдем распределение $\zeta = (\xi, \eta)$. Случайная величина $\zeta = \zeta(\omega) = (\xi(\omega), \eta(\omega))$ — функция на дискретном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathsf{P}\}$. Пространство элементарных событий Ω образуют последовательности “длиной четыре” из букв Г и Р, например, элементарное событие $\omega = $ (ГРГГ) означает, что при первом подбрасывании пары монет на первой монете выпал герб, на второй — решетка, а при втором — на обеих монетах выпали гербы. Элементарные события равновероятны (монеты симметричны), вероятность каждого из них равна $1/16$. Вычислив $\mathsf{P}_\zeta(i,j)$ для каждой пары (i,j), получим распределение $\zeta = (\xi, \eta)$:

Значения ξ	Значения η		
	0	1	2
0	1/16	1/8	1/16
1	1/8	1/4	1/8
2	1/16	1/8	1/16

.

Например,

$$\mathsf{P}_\zeta(1,1) = \mathsf{P}\{\zeta = (1,1)\} = \mathsf{P}\{(\xi,\eta) = (1,1)\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) = (1,1)\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\text{ГРГР, ГРРГ, РГГР, РГРГ}\} =$$
$$= \mathsf{P}(\text{ГРГР}) + \mathsf{P}(\text{ГРРГ}) + \mathsf{P}(\text{РГГР}) + \mathsf{P}(\text{РГРГ}) =$$
$$= 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = 1/4.$$

По распределению $\mathsf{P}_\zeta(i,j),\ i,j = 0,1,2$, случайной величины $\zeta = (\xi,\eta)$ всегда можно найти распределение любой функции от нее (см. (5.1.2)), в частности, распределение $g(\zeta) = g(\xi,\eta) = \min\{\xi,\eta\}$. Для $B = \{k\}, k = 0,1,2,$ имеем:

$$\mathsf{P}\{\min\{\xi,\eta\} = k\} = \sum_{(i,j):\min(i,j)=k} \mathsf{P}_\zeta(i,j).$$

Например, если $k = 0$ имеем

$$\mathsf{P}\{\min\{\xi,\eta\} = 0\} = \sum_{(i,j):\,\min(i,j)=0} \mathsf{P}_\zeta(i,j) =$$

$$= \mathsf{P}_\zeta(0,0) + \mathsf{P}_\zeta(0,1) + \mathsf{P}_\zeta(0,2) + \mathsf{P}_\zeta(1,0) + \mathsf{P}_\zeta(2,0) =$$
$$= 1/16 + 1/8 + 1/16 + 1/8 + 1/16 = 7/16.$$

Аналогично

$$\mathsf{P}\{\min\{\xi,\eta\} = 1\} = 1/2,\ \mathsf{P}\{\min\{\xi,\eta\} = 2\} = 1/16.$$

Следовательно, распределением случайной величины $\min\{\xi,\eta\}$ является

x_i	0	1	2
$\mathsf{P}_{g(\zeta)}(x_i)$	7/16	1/2	1/16

.

Независимые случайные величины. Случайные величины ξ и η будем называть *независимыми*, если совместное распределение $\mathsf{P}_{\xi\eta}$ случайных величин ξ и η равно произведению их распределений P_ξ и P_η, т. е.

$$\mathsf{P}_{\xi\eta}(x_i, y_j) = \mathsf{P}_\xi(x_i)\mathsf{P}_\eta(y_j) \tag{5.1.3}$$

для всех возможных значений x_i, y_j случайных величин ξ и η.

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ будем называть *независимыми*, если их совместное распределение равно произведению распределений случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$.

Функции от независимых случайных величин являются независимыми случайными величинами.

Примечание. На интуитивном уровне случайные величины независимы, если информация о значении, принятом одной случайной величиной, не меняет прогноз значений, принимаемых другой.

Пример 5.1.3. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет распределение*

$$\mathsf{P}\{\xi_l = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda > 0,\ k = 0, 1, \ldots\ (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Выписать совместное распределение случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Решение. По распределениям $\mathsf{P}_{\xi_1}, \mathsf{P}_{\xi_2}, \ldots, \mathsf{P}_{\xi_n}$ независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n$ их совместное распределение

$$\mathsf{P}_\xi(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \mathsf{P}\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_n = k_n\}$$

получаем как произведение распределений этих случайных величин:

$$\mathsf{P}_\xi(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}_{\xi_i}(k_i) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}}{k_1! k_2! \ldots k_n!} e^{-n\lambda},$$

$k_1 = 0, 1, \ldots;\ k_2 = 0, 1, \ldots; \ldots; k_n = 0, 1, \ldots$

5.2 Дискретные распределения на $\mathbb{R}^1$

Испытания Бернулли. Биномиальное распределение, пуассоновское распределение. Последовательность независимых испытаний (экспериментов) с двумя исходами (“успех”, “неудача”) и вероятностью успеха, не меняющейся от испытания к испытанию, называется *испытаниями Бернулли.*

Пространство Ω исходов в n испытаниях Бернулли образуют последовательности $\omega = (1, 0, 1, \ldots, 1)$ длиной n, составленные из 1 и 0 (1 интерпретируем как успех, 0 — как неудачу). Вероятность исхода ω определяется равенством

$$\mathsf{P}(\omega) = p^{\mu(\omega)}(1-p)^{n-\mu(\omega)} \ (0 < p < 1),$$

где $\mu(\omega)$ — число единиц в последовательности ω, p — вероятность успеха в одном испытании (далее мы также будем использовать обозначение $q = 1 - p$). Пара $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ является вероятностным пространством n испытаний Бернулли.

О п р е д е л е н и е. Случайная величина ξ имеет *биномиальное распределение* с параметрами $(n;p)$, если ее распределение

$$\mathsf{P}_\xi(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.2.1}$$

Далее $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ будем обозначать через $B_{n;p}(k)$ (для $k \geq n+1$ значения $B_{n;p}(k) = 0$).

Число ξ успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании имеет биномиальное распределение с параметрами $(n;p)$.

О п р е д е л е н и е. Случайная величина ξ имеет *пуассоновское распределение* (распределение Пуассона) с параметром $\lambda\,(\lambda > 0)$, если ее распределение

$$\mathsf{P}_\xi(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0, 1, \ldots \tag{5.2.2}$$

Во многочисленных задачах необходимо вычислять $B_{n;p}(k)$, когда n и k большие (сотни и тысячи). При этом, как правило, пользуются теоремой Пуассона (когда n большое, а p малое) и теоремой Муавра—Лапласа.

Т е о р е м а 5.2.1 (Пуассон). *Если* $np \to \lambda \ \ (\lambda > 0)$ *при* $n \to \infty$*, то для каждого фиксированного* k*,* $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} B_{n;p}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Из теоремы Пуассона следует, что для больших n и малых p пуассоновское распределение является хорошей аппроксимацией биномиального распределения.

В условиях теоремы Пуассона имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| B_{n;p}(k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq \frac{2\lambda \min\{2, \lambda\}}{n} \tag{5.2.3}$$

(Ю. В. Прохоров).

Теорема Муавра—Лапласа. *Если $npq \to \infty$ при $n \to \infty$, то для m, удовлетворяющих условию*

$$\left|\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right| \le C$$

(C — произвольная, но фиксированная константа),

$$\lim_{n\to\infty} B_{n;p}(m) \Big/ \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right\} = 1. \tag{5.2.4}$$

Интегральная предельная теорема Муавра—Лапласа. *Пусть m — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании. Для произвольных $x_1 < x_2$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{x_1 < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < x_2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1}^{x_2} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt. \tag{5.2.5}$$

Пример 5.2.1. *Известно, что вероятность p рождения мальчика равна* 0,515. *Какова вероятность того, что мальчиков среди $n = 10\,000$ новорожденных будет меньше, чем девочек?*

Решение. Обозначим через ξ количество мальчиков среди $n = 10\,000$ новорожденных, тогда девочек будет $10\,000 - \xi$. Необходимо вычислить

$$\mathsf{P}\{\xi < 10\,000 - \xi\} = \mathsf{P}\{\xi < 5000\}.$$

Количество ξ мальчиков можно представить в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i$, где μ_i принимает значение 1, если i-й новорожденный является мальчиком и 0 — если девочкой. Случайные величины μ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — независимы, каждая с распределением

$$\mathsf{P}\{\mu_i = 1\} = p, \; \mathsf{P}\{\mu_i = 0\} = 1 - p = q.$$

Далее воспользуемся интегральной теоремой Муавра—Лапласа. Поскольку n большое ($n = 10\,000$), то можно считать, что

$$\mathsf{P}\left\{x_1 < \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} < x_2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1}^{x_2} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

И, следовательно,

$$\mathsf{P}\{\xi < 5000\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\frac{\xi - 5150}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}485}} < \frac{-150}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}485}}\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\frac{\xi - 5150}{49{,}98} < -3{,}0\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-3{,}0} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt \approx 0{,}001$$

(значение интеграла найдено по таблице нормального распределения, см. табл. 22.1.1).

Мультиномиальное распределение. Естественным обобщением испытаний Бернулли является последовательность n независимых испытаний с r исходами, обозначим их через $a_1, a_2, \ldots, a_r$, и вероятностями исходов, не меняющимися от испытания к испытанию.

В качестве пространства Ω элементарных событий n независимых испытаний с r исходами $a_1, a_2, \ldots, a_r$, будем рассматривать множество упорядоченных последовательность длиной n, составленных из элементов $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_r$, или, что то же, множество слов длиной n, составленных из букв $a_1, a_2, \ldots, a_r$ (о словах см. в разд. 4.3 главы 4).

Множество исходов Ω конечно. Вероятность на классе подмножеств Ω зададим неотрицательной функцией точки

$$\mathsf{P} : \omega \to \mathsf{P}(\omega) = p_1^{\mu_1(\omega)} p_2^{\mu_2(\omega)} \ldots p_r^{\mu_r(\omega)},\ \omega \in \Omega,$$

где $\mu_i(\omega)$ — число букв a_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ в слове “длиной” n, составленном из $a_1, a_2, \ldots, a_r$, $\mu_1(\omega) + \mu_2(\omega) + \ldots$ $\ldots + \mu_r(\omega) = n$, $p_1 > 0, p_2 > 0, \ldots, p_r > 0$,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1.$$

Пару $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ и будем рассматривать в качестве математической модели последовательности n независимых испытаний с r исходами $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и вероятностями исходов, не меняющимися от испытания к испытанию.

Обозначим через μ_1 число исходов a_1, через μ_2 число исходов a_2, и т. д. через μ_r число исходов a_r в n независимых испытаниях. Имеет место формула аналогичная формуле Бернулли:

$$\mathsf{P}\{\mu_1 = k_1, \mu_2 = k_2, \ldots, \mu_r = k_r\} =$$

$$= C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}, \qquad (5.2.6)$$

$$k_1 = 0, 1, \ldots, n; \ \ldots; k_r = 0, 1, \ldots, n; \ k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n,$$

p_i — вероятность исхода a_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Пример 5.2.2. *Симметричную игральную кость подбрасывают независимым образом* 6 *раз. Вычислить вероятность того, что дважды выпадет число очков меньшее* 3 *и один раз выпадет шестерка.*

Решение. Мы имеем дело с последовательностью независимых испытаний (6 испытаний) с тремя исходами в каждом испытании: “выпало число очков меньшее 3”, “выпало 3, 4 или 5 очков”, “выпало 6 очков”, и вероятностями исходов, не меняющимися от испытания к испытанию, равными соответственно 1/3, 1/2, 1/6. Поэтому согласно (5.2.6) искомая вероятность

$$P\{\mu_1 = 2, \mu_2 = 3, \mu_3 = 1\} = C_6(2, 3, 1) \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{6} = \frac{5}{36}.$$

Геометрическое распределение. Случайная величина ξ имеет *геометрическое распределение* с параметром p $(p > 0)$, если ее распределение

$$\mathsf{P}_\xi(k) = (1 - p)^k p, \ k = 0, 1, \ldots \qquad (5.2.7)$$

Число испытаний до первого успеха в последовательности независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом имеет геометрическое распределение с параметром p $(p > 0)$.

Отрицательное биномиальное распределение. Случайная величина ξ имеет *отрицательное биномиальное распределение* с параметрами $(r;p)$, если ее распределение

$$\mathsf{P}_\xi(k) = C_{k+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^k, \; k = 0, 1, \ldots \tag{5.2.8}$$

Число неудач до r-го успеха в последовательности независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $(r;p)$.

Если $r = 1$, отрицательное биномиальное распределение совпадает с геометрическим.

Гипергеометрическое распределение. Случайная величина ξ имеет *гипергеометрическое распределение с параметрами* (N, M, n), $n \le M$, $n \le N - M$, если ее распределение

$$\mathsf{P}_\xi(m) = \mathsf{P}_{N,M,n}(m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \; m = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.2.9}$$

Пусть в урне находится N шаров, из них M — белые, остальные $(N - M)$ — черные. Число белых шаров среди n $(n \le M, \; n \le N - M)$ наудачу выбранных из урны, имеет гипергеометрическое распределение с параметрами (N, M, n).

Если $N, M \to \infty$ *так, что* $M/N \to p$ $(0 < p < 1)$, *то*

$$\mathsf{P}_{N,M,n}(m) \to C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \; m = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.2.10}$$

Пример 5.2.3. *Среди* $N = 10\,000$ *шаров* $M = 500$ *белых. Наудачу берут* $n = 100$ *шаров. Оценить вероятность того, что среди них будет* $m = 5$ *белых.*

Решение. Вероятность того, что среди n шаров будет m белых, равна $C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n$ (см. равенство (5.2.9)). Поскольку N и M большие, то в качестве значения этой вероятности можно рассматривать $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ (см. (5.2.10)), где $p = M/N = 0{,}05$. В силу теоремы Пуассона, можно считать, что вероятность $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ равна $e^{-\lambda}\lambda^m/m!$ ($n = 100$ “большое”, $p = 0{,}05$ “малое”, а $\lambda = np = 5$). В итоге — искомую вероятность можно считать равной $e^{-5}5^5/5! = 0{,}1755$.

5.3 Задачи

АЗ: 5.3°, 5.8(1в), 5.8(2е), 5.13, 5.23, 5.28, 5.29, 5.34, 5.44.
СЗ: 5.1°, 5.4°, 5.8(1б), 5.8(2з), 5.14, 5.18, 5.31, 5.40, 5.45.

5.1°. Пусть ξ — число очков, выпавших при подбрасывании симметричной игральной кости. Найти распределение случайной величины $\eta = \sin\frac{\pi}{3}\xi$.

5.2°. Пусть ξ — число очков, выпавших при подбрасывании игральной кости, изготовленной так, что вероятность выпадения грани пропорциональна числу очков на ней. Найти распределение случайной величины $\eta = \operatorname{sign}\left(\cos\frac{\pi}{3}\xi\right)$.

5.3°. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложили два шара в урну, в которой содержится 1 белый и 2 черных шара. Затем из второй урны извлекают 2 шара. Пусть ξ — число белых шаров среди них. Найти распределение ξ.

5.4°. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет геометрическое распределение с параметром p :

$$\mathsf{P}\{\xi_l = k\} = \mathsf{P}_{\xi_l}(k) = (1-p)^k p,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$l = 1, 2, \ldots, n$.

Найти совместное распределение случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

5.5°. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет биномиальное распределение с параметрами (m, p) :

$$\mathsf{P}\{\xi_l = k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k},\ \ k = 0, 1, \ldots, m;$$

$l = 1, 2, \ldots, n$.

Найти совместное распределение случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

5.6*. Пусть $\xi_j = \xi_j(\omega)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — независимые случайные величины, для которых

$$\mathsf{P}\{\xi_j > 0\} = p, \mathsf{P}\{\xi_j < 0\} = q, \mathsf{P}\{\xi_j = 0\} = f,\ \ p+q+f = 1,$$

$j = 1, 2, \ldots, n$; s — количество случайных величин среди ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, отличных от нуля, а μ — число положительных среди ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

1° Найти совместное распределение случайных величин μ и s.

2° Показать, что условным распределением случайной величины μ относительно события $\{s = i\}$ является биномиальное распределение с параметрами $(i, p/(p+q))$:

$$\mathsf{P}(\{\mu = k\}|\{s = i\}) = C_i^k \left(\frac{p}{p+q}\right)^k \left(\frac{q}{p+q}\right)^{i-k}, k = 0, 1, \ldots, i.$$

5.7. Стохастический эксперимент состоит в подбрасывании пары симметричных игральных костей. Построить вероятностное пространство $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ этого стохастического эксперимента. Пусть $\zeta = (\xi, \eta)$ — случайная величина на $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ со значениями в $\mathbb{R}^2$, где ξ — число очков на первой игральной кости, η — на второй. Найти совместное распределение случайных величин ξ и η — распределение векторной случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$. Доказать, что случайные величины ξ и η независимы.

5.8. Подбрасывают пару симметричных игральных костей и рассматривают случайную величину $\zeta = (\xi, \eta)$, где ξ — число очков на первой игральной кости, η — на второй.

1. Найти распределения:

а) $\max\{\xi, \eta\}$;

б) $\min\{\xi, \eta\}$;

в) $\xi + \eta$.

2. Вычислить:

а) $\mathsf{P}\{\xi \le 2, \max\{\xi, \eta\} \ge 4\}$;

б) $\mathsf{P}\{\max\{\xi, \eta\} \ge 4\}$;

в) $\mathsf{P}\{|\eta - \xi| \ge 3\}$;

г) $\mathsf{P}\{4 \le \xi + \eta \le 6\}$;

д) $\mathsf{P}\{\xi \le 1, \max\{\xi, \eta\} \ge 3\}$;

е) $\mathsf{P}\{\max\{\xi, \eta\} \le 4\}$;

к) $\mathsf{P}\{\min\{\xi, \eta\} \le 1, \max\{\xi, \eta\} \ge 5\}$;

л) $\mathsf{P}\{\max\{\xi, \eta\} \ge 3\}$;

м) $\mathsf{P}\{\xi \ge 2, \max\{\xi, \eta\} \ge 3\}$.

3. Найти совместное распределение случайных величин:

а) ξ и $\xi+\eta$; являются ли случайные величины ξ и $\xi+\eta$ независимыми?

б) ξ и $\max\{\xi, \eta\}$; являются ли случайные величины ξ и $\max\{\xi, \eta\}$ независимыми?

в) ξ и $\min\{\xi, \eta\}$; являются ли случайные величины ξ и $\min\{\xi, \eta\}$ независимыми?

5.9. Подбрасывают пару симметричных монет и симметричную игральную кость.

Предложить математическую модель (вероятностное пространство $\{\Omega, \mathsf{P}\}$) этого стохастического эксперимента.

Пусть $\zeta = (\xi, \eta)$ — случайная величина на $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ со значениями в $\mathbb{R}^2$, где ξ — число гербов, выпавших на паре монет, η — число очков на грани игральной кости.

Найти распределения случайных величин, перечисленных в задаче 5.8, вычислить вероятности, ответить на вопросы.

5.10. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с распределениями

$$\mathsf{P}\{\xi = x_k\} = a_k,\ \mathsf{P}\{\eta = x_k\} = b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Вычислить $\mathsf{P}\{\xi = \eta\}$.

5.11. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано таблицей 5.3.2.

Найти распределения случайных величин, перечисленных в задаче 5.8, вычислить вероятности, ответить на вопросы.

Таблица 5.3.2. Совместное распределение ξ и η

Значения ξ	Значения η							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1/16	1/32	0	1/32	1/32	1/32	1/32	1/32
2	1/32	1/16	1/32	0	1/32	1/32	1/32	1/32
3	1/32	1/32	1/16	1/32	0	1/32	1/32	1/32
4	1/32	1/32	1/32	1/16	1/32	0	1/32	1/32

5.12. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с распределениями

$$\mathsf{P}\{\xi = i\} = 1/(n+1),\ \mathsf{P}\{\eta = i\} = 1/(n+1),\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

5.13. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона соответственно с параметрами λ и μ.

Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

5.14. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона соответственно с параметрами λ и μ.

Доказать, что условным распределением случайной величины ξ при условии $\xi + \eta = n$ является биномиальное распределение с параметрами $(n, \lambda/(\lambda+\mu))$, т. е.

$$\mathsf{P}\{\xi = k/\xi + \eta = n\} = C_n^k \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k},$$

$k = 0, 1, \ldots, n.$

5.15. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, каждая из которых имеет геометрическое распределенные с параметром p:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, \ldots,$$

$$\mathsf{P}\{\eta = n\} = p(1-p)^n,\ n = 0, 1, \ldots$$

Найти совместное распределение случайных величин ξ и $\max\{\xi, \eta\}$; распределение случайной величины $\max\{\xi, \eta\}$.

5.16. Подбрасывают две игральные кости. Пусть ξ — случайная величина, равная нулю, если на первой кости выпадет число очков меньшее чем 3, и единице — в противном случае; η — случайная величина, равная числу очков на второй игральной кости.

Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

5.17. Подбрасывают симметричные монеты: одна достоинством 25 коп. и две достоинством 50 коп.; ξ_1 — число гербов, выпавших на монете достоинством 25 коп., а ξ_2 —

на двух монетах достоинством 50 коп. Найти распределение случайной величины $\eta = (\xi_1, \xi_2)$.

5.18*. Доказать, что если каждая из независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 имеет геометрическое распределение, то и случайная величина $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ имеет геометрическое распределение. Найти параметр этого распределения, если параметры распределений случайных величин ξ_1 и ξ_2 равны соответственно p_1 и p_2.

5.19°. Симметричную игральную кость подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что: 1) дважды появится число очков, кратное трем; 2) больше двух раз появится число очков, кратное трем.

5.20°. Пару симметричных игральных костей подбрасывают 6 раз. Вычислить вероятность того, что на обеих костях трижды выпадет одинаковое число очков.

5.21°. Симметричную игральную кость подбрасывают 6 раз. Вычислить вероятность того, что трижды выпадет четное число очков.

5.22. При техническом контроле изделий каждое из них, независимо от остальных, может с вероятностью p оказаться дефектным.

1. Какова вероятность того, что из 10 проверенных изделий только одно окажется дефектным?

2. Найти вероятность того, что первым дефектным изделием окажется k-е проверенное изделий.

3. Найти вероятность того, что последующие 10 изделий окажутся стандартными, при условии, что предыдущие l изделий были стандартными. Зависит ли эта вероятность от l?

5.23* (задача Банаха). Математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда ему нужна спичка, он наудачу берет одну из коробок, вынимает спичку и возвращает коробку обратно. Рано или поздно наступит момент, когда вынутая коробка окажется пустой.

Найти вероятность того, что другая коробка содержит r спичек, в предположении, что сначала каждая коробка содержала N $(r \le N)$ спичек.

5.24. Найти вероятность выпадения хотя бы:

а) одной шестерки при подбрасывании 6 игральных костей;

б) двух шестерок при подбрасывании 12 игральных костей;

в) трех шестерок при подбрасывании 18 игральных костей.

5.25°. Симметричную монету подбрасывают 10 раз. Найти распределение случайной величины ξ — числа выпавших гербов.

5.26°. Симметричную игральную кость подбрасывают 10 раз. Найти распределение случайной величины ξ — числа выпавших троек.

5.27°. Пару симметричных монет подбрасывают трижды, ξ — число тех подбрасываний, при которых на обеих монетах выпал герб. Найти распределение случайной величины ξ.

5.28. Что вероятнее, выиграть у игрока, равного по силе (игра ведется без ничьих):

1) 4 партии из 8 или 3 из 5?

2) 3 партии из 6 или 2 из 4?

3) 3 партии из 4 или 5 из 8?

4) не менее чем 3 партии из 4 или не менее чем 5 из 8?

5) не более чем n партий из $2n$ или более чем n партий из $2n$?

5.29. Найти распределение суммы $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r$ независимых случайных величин, каждая из которых имеет геометрическое распределение с параметром p.

5.30. Вероятность того, что в справочное бюро в течение часа обратится k человек, равна

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \; k = 0, 1, \ldots$$

Для каждого из них вероятность отказа равна p. Найти вероятность того, что в течение часа s человек не получат ответ на свой вопрос.

5.31. Предположим, что некоторое насекомое с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ откладывает k $(k = 0, 1, \ldots)$ яиц. Вероятность появления насекомого из яйца равна p. Предполагая взаимную независимость появления насекомых из яиц, найти вероятность того, что потомство насекомого будет составлять i особей.

5.32. В экспериментах на встречных электронно-позитронных пучках вероятность того, что за единицу времени произойдет j столкновений, сопровождающихся рождением новых элементарных частиц, составляет

$$p_j = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda},\ j = 0, 1, \ldots,$$

λ — положительный параметр. При каждом столкновении в результате взаимодействия могут образоваться различные группы элементарных частиц, вероятность появления каждой группы постоянная и не зависит от результатов взаимодействий при других столкновениях. В качестве одной из таких групп рассмотрим пару μ-мезонов и обозначим через p вероятность их появления при одном столкновении. Найти распределение случайной величины ξ — количества пар рожденных μ-мезонов.

5.33. Автоматическую телефонную станцию A на 500 абонентов необходимо соединить с телефонной станцией B. Известно, что количество требований связи абонентов телефонной станции имеет распределение Пуассона.

Если параметр пуассоновского распределения: а) $\lambda = 5$; б) $\lambda = 8$; в) $\lambda = 10$, то каким должно быть минимальное число линий связи станции A со станцией B, чтобы вероятность отказа не превышала 0,01; 0,02; 0,05?

5.34. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Возле каждого из них имеется гардероб. Количество мест в гардеробах одинаковое.

Какое минимальное количество мест должно быть в гардеробах, чтобы в среднем в 9 случаях из 10 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотрите два случая: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят по одному. Предположите, что входы зрители выбирают с одинаковыми вероятностями.

5.35. Пусть ξ — дискретная случайная величина с распределением

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

.

Для каждого $x \in (-\infty, \infty)$ вычислить $\mathsf{P}\{\xi < x\}$.

Построить график функции $F(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Исследовать функцию $F(x)$ на монотонность и непрерывность.

5.36*. Доказать, что случайная величина ξ имеет геометрическое распределение тогда и только тогда, когда для каждого n, $n = 1, 2, \dots$, выполняется равенство

$$\mathsf{P}\{\xi = n + m/\xi \geq n\} = \mathsf{P}\{\xi = m\},\ m = 0, 1, \dots$$

(свойство отсутствия последействия геометрического распределения).

5.37. Два игрока подбрасывают по очереди монету. Выигрывает тот, у кого впервые выпадет герб. Найти вероятность p_k того, что игра закончится на k-м подбрасывании. Во сколько раз больше вероятность выигрыша для игрока, который начинает первым?

5.38. Два одинаково метких стрелка по очереди стреляют в мишень. Каждый делает не более двух выстрелов. Первый попавший в мишень получает приз.

1. Если вероятность попадания $p = 1/5$, то что вероятнее: получат стрелки приз или нет?

2. Чему равно отношение вероятности получить приз первым стрелком к вероятности получить приз вторым, если вероятность попадания составляет $p = 1/3$, а количество выстрелов не ограничено?

5.39. Для экспериментальной проверки свойства устойчивости частоты в разное время были проведены следующие опыты.

1° Монету подбросили 4040 раз, при этом герб выпал 2043 раза (Бюффон).

2° Монету подбросили 12 000 раз, при этом частота выпадения герба составила 0,5016; в другом эксперименте при подбрасывании монеты 24 000 раз частота выпадения герба составила 0,5005 (К. Пирсон).

Для каждого из экспериментов:

а) найти вероятность того, что в случае повторения эксперимента отклонение частоты от $1/2$ по абсолютной величине не превышает отклонение частоты от $1/2$ в экспериментах, проведенных Бюффоном и Пирсоном;

б) считая, что событие, вероятность появления которого составляет 0,9999, практически достоверное, найти такое минимальное ε, для которого событие “частота по абсолютной величине отклоняется от $1/2$ меньше чем на ε" является практически достоверным событием.

5.40. Грани симметричной игральной кости занумерованы двумя единицами, двумя двойками и двумя тройками.

В квадратном уравнении

$$\xi x^2 + \eta x + \zeta = 0$$

ξ, η, ζ определяются как результаты трех последовательных независимых подбрасываний кости. Найти вероятность того, что уравнение: 1) имеет действительные корни; 2) имеет рациональные корни; 3) не имеет действительных корней.

5.41. По распределению

$$\mathsf{P}_\zeta : (x_k, y_l) \to \mathsf{P}_\zeta(x_k, y_l)$$

случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ со значениями в $\mathbb{R}^2$ найти распределение ξ.

5.42. Привести пример дискретного вероятностного пространства $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ и случайных величин $\xi = \xi(\omega)$, $\eta = \eta(\omega)$ на нем таких, что распределения P_ξ и P_η случайных величин ξ и η совпадают, но $\xi \neq \eta$ в каждой точке $\omega \in \Omega$.

5.43. Пусть ξ и η — независимые целочисленные случайные величины с распределениями

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = p_k,\ k = 0, 1, \ldots;\ \mathsf{P}\{\eta = l\} = q_l,\ l = 0, 1, \ldots$$

Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

5.44. Симметричную монету подбрасывают 10 раз. Как известно, вероятность того, что герб выпадет 4 раза, равна

$$B_{10;1/2}(4) = C_{10}^4 (1/2)^{10}.$$

А чему равна вероятность того, что при последовательном подбрасывании монеты для появления 4-х гербов необходимо сделать 10 подбрасываний?

5.45. Симметричную монету подбрасывают n раз. Будем говорить, что после k-го подбрасывания ($k = 1, 2, \ldots$

$\ldots, n-1$) имеется перемена знака, если исходы k-го и $(k+1)$-го подбрасываний различны.

Найти распределение числа перемен знака.

5.46. Игральную кость, вероятность выпадения шестерки которой равна p, последовательно подбрасывают n раз. Вероятность того, что шестерка выпадет r раз, равна

$$B_{n;p}(r) = C_n^r p^r (1-p)^{n-r}.$$

А чему равна вероятность того, что при последовательном подбрасывании кости для появления r шестерок необходимо сделать n подбрасываний?

5.47. Четыре различимых шара, среди которых два белых и два черных, наудачу распределяют по двум урнам — по два в каждую.

Найти распределение случайной величины ξ — числа белых шаров в первой урне.

5.48. $2n$ различимых шаров (например, занумерованных), среди которых n белых и n черных, наудачу распределяют по двум урнам — по n шаров в каждую.

Найти распределение случайной величины ξ — числа белых шаров в первой урне.

5.49. Доказать, что сумма n независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ каждая с распределением

$$\mathsf{P}\{\xi_j = s\} = p^s (1-p)^{1-s}, \ s = 0, 1, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p).

Глава 6

Математическое ожидание дискретной случайной величины

6.1 Определения, свойства

Случайная величина описывается своим распределением

$$\mathsf{P}_\xi : x_i \to \mathsf{P}_\xi(x_i) = \mathsf{P}\{\xi = x_i\}.$$

Распределение задает значения, принимаемые случайной величиной, и вероятности, с которыми эти значения принимаются. Информацию о распределении случайной величины мы, как правило, получаем из эксперимента (независимых наблюдений случайной величины). Имеющихся наблюдений не всегда достаточно, чтобы можно было составить представление о распределении случайной величины. Но по наблюдениям, как правило, можно найти (оценить) параметры (характеристики) распределения, которые хотя и не полностью описывают распределение, но дают достаточно хорошее представление о нем. Такими характеристиками, в частности, являются математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Некоторые распределения математическим ожиданием и дисперсией задаются полностью, например, пуассоновское распределение.

Определение. *Математическим ожиданием* $\mathsf{M}\xi$ случайной величины $\xi = \xi(\omega)$, заданной на дискретном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathsf{P}\}$, будем называть сумму ряда

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\mathsf{P}(\omega),$$

если этот ряд абсолютно сходится.

Свойства математического ожидания.

1. Математическое ожидание константы равно этой же константе:

$$\mathsf{M}c = c \ (c - \text{константа}).$$

2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих случайных величин:

$$\mathsf{M}(\xi + \eta) = \mathsf{M}\xi + \mathsf{M}\eta.$$

3. Константа выносится из под знака математического ожидания:

$$\mathsf{M}a\xi = a\mathsf{M}\xi.$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$\mathsf{M}\xi\eta = \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta.$$

Вычисление математического ожидания случайной величины по ее распределению. По распределению случайной величины всегда можно вычислить математическое ожидание функции от нее (если только оно существует).

Теорема 6.1.1 (о вычислении $\mathsf{M}g(\xi)$ по распределению ξ). *Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина со значениями в $\mathbb{R}^1$ на дискретном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ и*

$$\mathsf{P}_\xi : x_i \to \mathsf{P}_\xi(x_i),\ x_i \in X,$$

— ее распределение, тогда для любой функции $g = g(x)$ *на* $\mathbb{R}^1$ *со значениями в* $\mathbb{R}^1$

$$\mathsf{M}g(\xi) = \sum_{x_i} g(x_i)\mathsf{P}_\xi(x_i) \tag{6.1.1}$$

в предположении абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{x_i} g(x_i)\mathsf{P}_\xi(x_i).$$

В частности,

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{x_i} x_i\mathsf{P}_\xi(x_i) \tag{6.1.2}$$

в предположении абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{x_i} x_i\mathsf{P}_\xi(x_i).$$

Теорема о вычислении математического ожидания функции от случайной величины по ее распределению имеет место и для случайных величин $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 6.1.2 (о вычислении $\mathsf{M}g(\xi)$ по распределению ξ). *Пусть* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *— случайная величина со значениями в* $\mathbb{R}^n$ *на дискретном вероятностном пространстве* $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ *и*

$$\mathsf{P}_\xi : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \mathsf{P}_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, *— ее распределение, тогда для любой функции* $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *на* $\mathbb{R}^n$ *со значениями в* $\mathbb{R}^1$

$$\mathsf{M}g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_n} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathsf{P}_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{6.1.3}$$

в предположении, что ряд

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_n} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathsf{P}_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

сходится абсолютно.

Примечание. Часто математическое ожидание (среднее) случайной величины определяют равенством (6.1.2).

Пример 6.1.1. *Пусть ξ — число выпавших очков при подбрасывании игральной кости. Предположим, что кость изготовлена так, что распределением случайной величины ξ является*

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/2

.

Вычислить математическое ожидание ξ.

Решение. Согласно (6.1.2)

$$\mathsf{M}\xi = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + \ldots + 5 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5.$$

Заметим, что если игральная кость симметрична, т. е. распределением ξ является

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

,

то

$$\mathsf{M}\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Пример 6.1.2. *Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ. Вычислить*

$$\mathsf{M}\frac{1}{\xi + 1}.$$

Решение. По известному распределению P_ξ случайной величины ξ всегда можно вычислить математическое ожидание $\mathsf{M}g(\xi)$ функции от ξ, если только оно существует (см. (6.1.1)). В нашей задаче $g(t) = 1/(1+t)$, а случайная величина ξ имеет пуассоновское распределение с параметром λ:

$$\mathsf{P}_\xi(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ \ k = 0, 1, \ldots$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\frac{1}{1+\xi} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}\mathsf{P}_\xi(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(1+k)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda}-1) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Пример 6.1.3. *Дважды подбрасывают пару симметричных монет, ξ — число выпавших гербов при первом подбрасывании пары монет, η — при втором.*

Вычислить $\mathsf{M}\sin\left(\frac{\pi}{6}\min\{\xi,\eta\}\right)$.

Решение. Распределение случайной величины $\zeta = (\xi,\eta)$ известно (см. пример 5.1.2):

Значения ξ	Значения η		
	0	1	2
0	1/16	2/16	1/16
1	2/16	4/16	2/16
2	1/16	2/16	1/16

.

По распределению $\zeta = (\xi,\eta)$ можно вычислить математическое ожидание (если только оно существует) любой функции от ζ, в частности, функции

$$f(\zeta) = f(\xi,\eta) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\min\{\xi,\eta\}\right),$$

см. теорему 6.1.2. В нашем примере

$$\mathsf{M}\sin\left(\frac{\pi}{6}\min\{\xi,\eta\}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\min\{0,0\}\right)\cdot\frac{1}{16}+$$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{6}\min\{0,1\}\right)\cdot\frac{2}{16}+\ldots+\sin\left(\frac{\pi}{6}\min\{2,2\}\right)\cdot\frac{1}{16} =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 0\right)\cdot\frac{1}{16} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 0\right)\cdot\frac{2}{16} + \ldots + \sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 2\right)\cdot\frac{1}{16} =$$
$$= \frac{8+\sqrt{3}}{32}.$$

Дисперсия случайной величины. *Дисперсией* $\mathsf{D}\xi$ случайной величины ξ будем называть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего среднего:

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2.$$

Часто удобно пользоваться следующим представлением дисперсии:

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2,$$

которое получается из определения $\mathsf{D}\xi$.

Приведенные далее свойства дисперсии непосредственно следуют из ее определения.

1. Дисперсия константы равна нулю:

$$\mathsf{D}c = 0 \ (c - \text{константа}).$$

2. Константа выносится из-под знака дисперсии с квадратом:

$$\mathsf{D}a\xi = a^2\mathsf{D}\xi.$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$\mathsf{D}(\xi+\eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta.$$

Пример 6.1.4. *Вычислить математическое ожидание и дисперсию биномиально распределенной с параметрами $(n; p)$ случайной величины ξ.*

Решение. Распределением ξ является

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \mathsf{P}_\xi(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Согласно (6.1.2)

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=0}^{n} k\mathsf{P}_\xi(k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k}.$$

Обозначив $k - 1 = s$, последнюю сумму перепишем так:

$$np \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{s!((n-1)-s)!} p^s (1-p)^{(n-1)-s} =$$

$$= np(p + (1-p))^{n-1} = np.$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}\xi = np.$$

Аналогично

$$\mathsf{M}\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np(np - p + 1).$$

Отсюда

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = np(np - p + 1) - (np)^2 = np(1-p).$$

Пример 6.1.5. *Подбрасывают две симметричные игральные кости. Вычислить математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших очков.*

Решение. Пусть ξ — число очков, выпавших на первой игральной кости, η — на второй, тогда $\zeta = \xi + \eta$ — сумма очков, выпавших на костях. Кости симметричны, поэтому распределением каждой из случайных величин ξ и η является

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathsf{P}(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

.

Отсюда

$$\mathsf{M}\zeta = \mathsf{M}(\xi + \eta) = \mathsf{M}\xi + \mathsf{M}\eta = 7/2 + 7/2 = 7,$$

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 =$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 35/12.$$

А поскольку ξ и η — независимые случайные величины, то

$$\mathsf{D}\zeta = \mathsf{D}(\xi + \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta = 35/12 + 35/12 = 35/6.$$

Заметим, что непосредственное вычисление математического ожидания и дисперсии суммы очков было бы громоздким.

Определение. *Ковариацией* случайных величин ξ и η будем называть величину

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)(\eta - \mathsf{M}\eta).$$

Определение. *Коэффициентом корреляции* случайных величин ξ и η будем называть величину

$$r(\xi, \eta) = \frac{\mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)(\eta - \mathsf{M}\eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}\sqrt{\mathsf{D}\eta}}.$$

Если случайные величины ξ и η таковы, что $r(\xi, \eta) = 0$, то они называются *некоррелированными.*

Теорема 6.1.3 (неравенство Чебышёва). *Если* $\mathsf{D}\xi$ *конечна, то для произвольного* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{M}\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Из неравенства Чебышёва, в частности, следует, что если дисперсия $\mathsf{D}\xi$ мала, большие отклонения (больше чем ε) случайной величины от своего среднего встречаются изредка.

Теорема 6.1.4 (закон больших чисел). *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины со средним* $\mathsf{M}\xi_i = a$ *и конечными дисперсиями* $\mathsf{D}\xi_i = \sigma^2 < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$ *Тогда для произвольного* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi - a\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Производящие функции. Важным классом случайных величин являются неотрицательные целочисленные случайные величины (принимают значения из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$). Метод производящих функций является наиболее общим при их изучении.

Определение. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с распределением

$$\mathsf{P}\{\xi = j\} = p_j,\ j = 0, 1, \ldots$$

Функцию $P(t)$, определенную равенством

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k,\ |t| \leq 1,$$

будем называть *производящей функцией* случайной величины ξ (распределения $\{p_j\}$).

Поскольку последовательность $\{p_j\}$ ограничена, то производящая функция существует, по меньшей мере при $|t| < 1$.

В силу теоремы 6.1.1

$$\mathsf{M}t^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k,\ |s| < 1,$$

поэтому производящую функцию случайной величины ξ можно определить равенством

$$P(t) = \mathsf{M}t^{\xi},\ |t| < 1.$$

Теорема 6.1.5. *Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина и*

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = p_k,\ k = 0, 1, \ldots,$$

— ее распределение.

Если существует математическое ожидание случайной величины ξ, то ее производящая функция

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k,\ \ |s| < 1, \tag{6.1.4}$$

дифференцируема на отрезке $[-1, 1]$ и

$$\mathsf{M}\xi = P'(1). \tag{6.1.5}$$

Если существует математическое ожидание ξ^2, то производящая функция $P(t)$, $|t| < 1$, случайной величины ξ дважды дифференцируема на отрезке $[-1, 1]$ и

$$\mathsf{M}\xi^2 = P'(1) + P''(1). \tag{6.1.6}$$

Пример 6.1.6. *Найти производящую функцию и вычислить математическое ожидание пуассоновской случайной величины.*

Решение. Пусть ξ — пуассоновская случайная величина с параметром θ. По определению

$$P_\xi(t) = \mathsf{M}t^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} = e^{t\theta} e^{-\theta} = \exp\{\theta(t-1)\}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\dfrac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$ сходится, поэтому $\mathsf{M}\xi$ существует и согласно (6.1.5)

$$\mathsf{M}\xi = P'_\xi(1).$$

А поскольку $P'_\xi(t) = \theta \exp\{\theta(t-1)\}$, $P'_\xi(1) = \theta$, то

$$\mathsf{M}\xi = \theta.$$

Мультипликативное свойство производящих функций. *Производящая функция суммы независимых случайных величин равна произведению производящих функций слагаемых.*

Теорема 6.1.6 (единственности). *Различные вероятностные распределения на* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *имеют различные производящие функции.*

Пример 6.1.7. *Доказать, что сумма независимых пуассоновских случайных величин является пуассоновской случайной величиной.*

Решение. Пусть ξ и η независимые пуассоновские случайных величин с параметрами θ_1 и θ_2, их производящие функции соответственно равны $\exp\{\theta_1(t-1)\}$ и $\exp\{\theta_2(t-1)\}$ (см. пример 6.1.6). Производящая функция суммы $\zeta = \xi + \eta$ в силу мультипликативного свойства

$$P_\zeta(t) = P_\xi(t) P_\eta(t) = \exp\{\theta_1(t-1)\} \exp\{\theta_2(t-1)\} =$$

$$= \exp\{(\theta_1 + \theta_2)(t-1)\}.$$

С другой стороны, $\exp\{(\theta_1 + \theta_2)(t-1)\}$ — производящая функция пуассоновской случайной величины с параметром $\theta_1 + \theta_2$. Поэтому согласно теореме единственности (теорема 6.1.6) распределение случайной величины $\xi + \eta$ совпадает с пуассоновским распределением с параметром $(\theta_1 + \theta_2)$.

6.2 Задачи

АЗ: 6.1°(1), 6.4°, 6.5, 6.16, 6.18, 6.27*, 6.31*, 6.32, 6.38.
СЗ: 6.3°, 6.6°, 6.13°, 6.15, 6.17, 6.24°, 6.33, 6.45, 6.49.

6.1°. Подбрасывают симметричную монету и правильную игральную кость, ξ — число выпавших при этом гербов, η — очков.

Вычислить:

$$1)\ \mathsf{M}\frac{1}{\xi+1}\cos\frac{\pi}{6}\eta;\ \ 2)\ \mathsf{M}e^{\xi}\sin\frac{\pi}{6}\eta.$$

6.2. В урне содержится 2 белых и 8 черных шаров. Из урны наудачу извлекают три шара. Найти распределение случайной величины ξ — числа выбранных белых шаров; вычислить $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

6.3°. Пусть ξ и η — независимые случайные величины соответственно с распределениями

x_i	0	1	2	3
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$1/2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

y_j	0	1	2
$\mathsf{P}_\eta(y_j)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

.

Вычислить

$$\mathsf{M}\frac{\xi}{\eta^2+1}.$$

6.4°. Дважды подбрасывают симметричную монету, ξ — число выпавших при этом гербов. Вычислить

$$\mathsf{M}(-1)^\xi \sin\frac{\pi}{3}\xi.$$

6.5. Случайная величина ξ принимает целые неотрицательные значения. Доказать, что

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi \geq m\}.$$

6.6°. Пусть ξ и η — независимые случайные величины соответственно с распределениями

x_i	1	2	3	4
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

y_j	-1	0	1
$\mathsf{P}_\eta(y_j)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

.

Вычислить

$$\mathsf{M}\eta^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right).$$

6.7°. Случайная величина ξ имеет распределение

x_i	-2	-1	1	2
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

.

Найти математические ожидания случайных величин η:

$$1)\,\eta = \sin\frac{\pi}{\xi};\;\; 2)\,\eta = \xi 2^{|\xi|};\;\; 3)\,\eta = \xi\sin\frac{\pi}{3}\xi.$$

6.8°. Случайная величина ξ имеет распределение

x_i	-2	-1	1
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

Вычислить

$$\mathsf{M}\xi^2 2^{-\xi}.$$

6.9°. Случайная величина ξ имеет распределение

x_i	-1	1	2
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$1/4$	$1/4$	$1/2$

Вычислить:

$$1)\,\mathsf{M}\xi^2\sin\frac{\pi}{3}\xi;\;\; 2)\,\mathsf{M}2^{|\xi|}\cos^2\frac{\pi}{12}\xi.$$

6.10. Случайная величина ξ имеет распределение

x_i	-2	-1	0	1
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$1/4$	$1/4$	$1/6$	$1/3$

Найти:
1) распределение случайной величины $\eta = |\xi|$;
2) математическое ожидание и дисперсию η.

6.11°. Случайная величина ξ имеет распределение

x_i	-2	-1	1	2
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/2$	$1/6$

Вычислить
$$\mathsf{M}\xi \sin^2 \frac{\pi}{12}\xi.$$

6.12°. Случайная величина ξ имеет распределение

x_i	-2	-1	2
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

.

Вычислить:
$$1)\ \mathsf{M}2^{|\xi|}\cos^2\frac{\pi}{12}\xi;\ \ 2)\ \mathsf{M}\xi 2^{|\xi|}.$$

6.13°. Пусть ξ и η — независимые случайные величины соответственно с распределениями

x_i	0	1	2	3
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$1/2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

y_j	-1	0	1
$\mathsf{P}_\eta(y_j)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

.

Вычислить
$$\mathsf{M}\frac{\xi+1}{\eta^4+2}.$$

6.14°. Пусть ξ и η — независимые случайные величины соответственно с распределениями

x_i	0	1	2
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$2/3$	$1/6$	$1/6$

y_j	-1	0	1
$\mathsf{P}_\eta(y_j)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

.

Вычислить
$$\mathsf{M}\frac{\eta^4-\eta}{\xi+1}.$$

6.15. Пусть случайная величина ξ принимает значения $-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n$ с вероятностями $1/(2n+1)$. Вычислить: 1) $\mathsf{M}\xi$; 2) $\mathsf{M}|\xi|$.

6.16. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ. Вычислить: $\mathsf{M}\xi,\ \mathsf{M}\xi^2,\ \mathsf{D}\xi$.

6.17. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, каждая из которых имеет распределение Пуассона с параметром λ. Вычислить:

$$1)\,\mathsf{M}\frac{\xi}{1+\eta};\ \ 2)\,\mathsf{M}\xi\eta;\ \ 3)\,\mathsf{D}\xi\eta;\ \ 4)\,\mathsf{D}(\xi+\eta).$$

6.18. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p. Вычислить: $\mathsf{M}\xi,\ \mathsf{M}\xi^2,\ \mathsf{D}\xi$.

6.19. Симметричную игральную кость подбрасывают до первого появления шестерки.

1. Сколько раз в среднем будет подброшена кость?

2. Какова вероятность того, что будет выполнено не более двух подбрасываний?

6.20. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p. Вычислить:

$$1)\,\mathsf{M}t^{\xi},\ |t|<1;\ \ 2)\,\mathsf{M}e^{it\xi}.$$

6.21. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ. Вычислить:

$$1)\,\mathsf{M}t^{\xi},\ t>0;\ \ 2)\,\mathsf{M}e^{it\xi}.$$

6.22°. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ — числа появлений события в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,7.

6.23°. Трижды подбрасывают монету, вероятность выпадения герба которой составляет $1/3$. Пусть ξ — число выпавших при этом гербов.

Найти распределение случайной величины ξ. Вычислить $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

6.24°. Симметричную монету подбрасывают 10 раз. Найти распределение случайной величины ξ — числа выпавших гербов. Вычислить $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

6.25°. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ из задачи 5.26.

6.26°. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ из задачи 5.27.

6.27*. Рассматривается последовательность независимых испытаний с вероятностью успеха p $(0 < p < 1)$ в одном испытании. Пусть ξ — случайная величина, равная числу неудач до r-го успеха. Случайная величина ξ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами (r, p):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_{k+r-1}^{r-1}\, p^r (1-p)^k,\ k = 0, 1, \ldots$$

Доказать, что

$$\mathsf{M}\xi = r\frac{1-p}{p},\ \ \mathsf{D}\xi = r\frac{1-p}{p^2}.$$

6.28.[1] Для случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ из задачи 5.8 вычислить

$$1)\, \mathsf{M}\max\{\xi,\eta\};\ \ 2)\, \mathsf{M}\sin(\pi\max\{\xi,\eta\}/6);\ \ 3)\, \mathsf{M}\min\{\xi,\eta\}.$$

6.29. По совместному распределению случайных величин ξ и η из задачи 5.10 вычислить:

$$1)\, \mathsf{M}\min\{\xi,\eta\};\ \ 2)\, \mathsf{M}\cos(\pi\max\{\xi,\eta\}$$

$$3)\, \mathsf{M}\max\{\xi,\eta-\xi\};\ \ 4)\, \mathsf{M}\sin(\pi\min\{\eta,\eta-\xi\}/4).$$

6.30. Случайный вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ имеет распределение

$$\mathsf{P}\{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_j, \ldots, \mu_r) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\} = p_j,$$

в последовательности $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ на j-м месте находится единица, на остальных — нули, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Вычислить

$$\mathsf{M}\exp\{i(t,\mu)\} = \mathsf{M}\exp\{i(t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \ldots + t_r\mu_r)\}.$$

6.31*. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в $\mathbb{R}^1$,

$$\mathbb{R}^1 = \bigcup_{j=1}^{r} X_j,\ X_s \cap X_l = \emptyset, s \neq l,$$

[1] Для решения задач 6.28 — 6.31 следует воспользоваться формулой (6.1.3).

$$\mathsf{P}\{\xi_k \in X_j\} = p_j,\ j = 1, 2, \ldots, r,$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ — случайный вектор, j-я компонента ν_j которого равна количеству случайных величин из $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, которые попали в X_j, $j = 1, 2, \ldots, r$.

1° Найти распределение j-й компоненты вектора

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r),\ j = 1, 2, \ldots, r.$$

2° Найти распределение вектора

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r).$$

3° Вычислить

$$\mathsf{M} \exp\{i(t, \nu)\} = \mathsf{M} \exp\{i(t_1\nu_1 + t_2\nu_2 + \ldots + t_r\nu_r)\},$$

$t_j \in \mathbb{R}^1,\ j = 1, 2, \ldots, r$.

6.32. У большого числа k людей исследуют кровь. Исследование можно организовать двумя способами.

Способ 1. Кровь каждого человека исследуют отдельно. В этом случае необходимо выполнить k анализов.

Способ 2. Кровь k людей смешивают и анализируют полученную смесь. Если результат анализа отрицательный (диагноз не подтверждается), то этого одного анализа достаточно для k людей. Если результат положительный, то кровь каждого человека анализируют отдельно и в целом на k человек необходимо выполнить $k + 1$ анализов. Предположим, что вероятность p положительного результата анализа одна и та же для всех людей и что результаты анализов независимы.

1. Найти вероятность того, что анализ смешанной крови k людей положительный.

2. Вычислить математическое ожидание числа анализов ξ, необходимых во втором способе обследования.

6.33. В урне содержится 2 белых, 3 черных, 5 красных шаров. Из урны наудачу берут три шара. Найти распределения случайных величин: ξ — числа выбранных белых шаров, η — черных, ζ — красных. Вычислить математическое ожидание и дисперсию каждой из случайных величин.

6.34. Доказать теорему 6.1.5.

6.35. Вычислить производящую функцию и математическое ожидание случайной величины имеющей: 1° геометрическое распределение; 2° отрицательное биномиальное распределение; 3° биномиальное распределение.

6.36. Доказать, что различные вероятностные распределения на $\{0, 1, 2, \ldots\}$ имеют разные производящие функции (теорема единственности).

6.37. Доказать, что производящая функция суммы независимых целочисленных неотрицательных случайных величин равна произведению производящих функций слагаемых (мультипликативое свойство производящих функций).

6.38. Доказать следующие утверждения.

1° Сумма r независимых геометрически распределенных случайных величин с параметром θ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами (r, θ).

2° Сумма независимых случайных величин, имеющих отрицательное биномиальное распределение с параметрами (r_1, θ) и (r_2, θ), имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $(r_1 + r_2, \theta)$.

3° Сумма независимых биномиально распределенных случайных величин с параметрами $(n; \theta)$ и $(m; \theta)$ является биномиально распределенной случайной величиной с параметрами $(n + m; \theta)$.

6.39. Пусть

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\},\ \mathsf{P}(\omega) = ap^{\omega},\ \omega = 0, 1, \ldots,$$

p — произвольное фиксированное число из $(0; 1)$. При каких значениях параметра a функция $\mathsf{P}(\omega) = ap^{\omega}$, $\omega \in \Omega$, задает вероятность на подмножествах Ω ?

Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина на $\{\Omega, \mathsf{P}\}$, заданная равенством $\xi = \xi(\omega) = 2^{-\omega}$. Вычислить $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\xi^2$.

6.40. Пусть

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\},\ \mathsf{P}(\omega) = a\frac{1}{\omega!},\ \omega \in \Omega.$$

При каких значениях a пара $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ является вероятностным пространством?

Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина на $\{\Omega, \mathsf{P}\}$, заданная равенством $\xi = \xi(\omega) = 2^{\omega}$. Вычислить $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$.

6.41. Пусть

$$\Omega = \{0, 1, \ldots\},\ \mathsf{P}(\omega) = a\frac{\lambda^\omega}{\omega!},\ \omega \in \Omega,$$

λ — произвольное фиксированное положительное число. При каких значениях a пара $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ является вероятностным пространством?

Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина на $\{\Omega, \mathsf{P}\}$, заданная равенством $\xi = \xi(\omega) = 2^\omega$. Вычислить $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$.

6.42. Доказать неравенство Чебышёва (теорема 6.1.3).

6.43. Доказать закон больших чисел (теорема 6.1.4).

6.44. Пусть $\mathsf{P}_\zeta(x_i, y_j)$ — распределение случайного вектора $\zeta = (\xi, \eta)$. Вычислить $\mathsf{M}\xi$.

6.45. Подбрасывают три симметричные игральные кости. У первой кости три грани занумерованы единицей, три грани — двойкой, у второй три грани занумерованы тройкой, три — четверкой, а у третьей кости три грани занумерованы пятеркой, три — шестеркой. Найти математическое ожидание, дисперсию и распределение суммы выпавших очков.

6.46. Подбрасывают три симметричные игральные кости. Грани первой кости занумерованы числами от единицы до шести. У второй кости две грани занумерованы единицей, две — двойкой, две — тройкой. А у третьей кости три грани занумерованы единицей, три — двойкой. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших очков.

6.47. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — случайные величины с конечными дисперсиями, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что

$$\mathsf{D}S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\xi_k + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j),$$

а если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно независимы, то

$$\mathsf{D}S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\xi_k.$$

6.48. Пусть ζ_1 и ζ_2 — независимые случайные величины с одинаковыми распределениями и $\xi = \zeta_1 + \zeta_2$,

$\eta = \zeta_1 - \zeta_2$. Доказать, что случайные величины ξ и η некоррелированы, т. е. $r(\xi, \eta) = 0$.

6.49. Пусть ξ и η — соответственно сумма и разность очков, выпавших при подбрасывании двух игральных костей. Доказать, что 1) случайные величины ξ и η некоррелированы; 2) ξ и η не являются независимыми.

6.50. Пусть случайная величина ξ принимает значения $-1, +1, -2, +2$ каждое с вероятностью $1/4$, а $\eta = \xi^2$. Найти совместное распределение ξ и η. Доказать, что: 1) случайные величины ξ и η некоррелированы; 2) ξ и η не являются независимыми случайными величинами.

Глава 7

Аксиоматика теории вероятностей

7.1 Алгебры, σ-алгебры

Операции над множествами. Далее мы будем иметь дело с множеством (пространством) Ω элементов ω и его подмножествами Ω (подмножества Ω будем обозначать прописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$).

Множество полностью задается своими элементами. Если ω является элементом множества A, то это будем записывать так: $\omega \in A$ (и будем читать: "ω принадлежит A"), если ω не является элементом множества A, то это будем записывать так: $\omega \notin A$ (и будем читать: "ω не принадлежит A").

Множество, не содержащее ни одного элемента, будем называть *пустым* и будем обозначать символом $\emptyset$.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то будем это обозначать так: $A \subset B$ и будем читать: "A — подмножество B".

Если каждый элемент множества A является элементом множества B ($A \subset B$) и каждый элемент множества B является элементом множества A ($B \subset A$), то множества A и B будем отождествлять и будем это обозначать так: $A = B$. Для того, чтобы установить равенство $A = B$, достаточно проверить, что $A \subset B$ и $B \subset A$.

Из элементов множеств A и B можно строить новые множества.

Множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B, будем называть *объединением* множеств A и B и будем обозначать $A \cup B$.

Множество, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A, так и B, будем называть *пересечением* множеств A и B и будем обозначать $A \cap B$.

Множество, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих B, будем называть *разностью* множеств A и B и будем обозначать $A \setminus B$.

Множество, состоящее из элементов Ω, не принадлежащих множеству A, будем называть *дополнением* множества A и будем обозначать $\overline{A}$.

Будем говорить, что множества A и B *не пересекаются* (*непересекающиеся*), если $A \cap B = \emptyset$.

Пример 7.1.1. *Пусть* $\{A_n\}$ — *последовательность непересекающихся множеств* $(A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$ *и*

$$B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i, \ n = 1, 2, \ldots$$

Доказать, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$.

Решение. Предположим, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$, и пусть $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $\omega \in B_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и, следовательно, ω принадлежит хотя бы одному из множеств $A_i, i = 1, 2, \ldots$, а поскольку $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, то только одному множеству, обозначим его через A_{n_0}. Поэтому

$$\omega \notin \bigcup_{i=n_0+1}^{\infty} A_i = B_{n_0+1}.$$

А последнее противоречит предположению $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

Алгебра множеств. Непустой класс $\mathfrak{A}$ подмножеств пространства Ω будем называть *алгеброй множеств*, если:

1° вместе с любым множеством $A \in \mathfrak{A}$ его дополнение $\overline{A}$ принадлежит $\mathfrak{A}$;

2° вместе с любыми двумя множествами $A, B \in \mathfrak{A}$ их объединение $A \cup B$ принадлежит $\mathfrak{A}$.

Определение. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс подмножеств Ω. *Наименьшей алгеброй, содержащей класс* $\mathfrak{K}$ (*алгеброй, порожденной классом* $\mathfrak{K}$), будем называть алгебру $\mathfrak{A}(\mathfrak{K})$, которая:

1° содержит класс $\mathfrak{K}$, т. е.

$$\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{K});$$

2° содержится в любой другой алгебре $\mathfrak{A}$, содержащей класс $\mathfrak{K}$, т. е.

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{A}.$$

***σ*-Алгебра множеств.** Непустой класс $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства Ω будем называть *σ-алгеброй множеств*, если:

1° вместе с каждым множеством $A \in \mathfrak{F}$ его дополнение $\overline{A}$ принадлежит $\mathfrak{F}$;

2° вместе с любой счетной последовательностью множеств $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, их объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Множества из σ-алгебры $\mathfrak{F}$ еще называют *событиями*.

Определение. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс подмножеств Ω. *Наименьшей σ-алгеброй, содержащей класс* $\mathfrak{K}$ (*σ-алгеброй, порожденной классом* $\mathfrak{K}$), будем называть σ-алгебру $\sigma(\mathfrak{K})$, которая:

1° содержит класс $\mathfrak{K}$, т. е.

$$\mathfrak{K} \subset \sigma(\mathfrak{K});$$

2° содержится в любой σ-алгебре $\mathfrak{F}$, содержащей класс $\mathfrak{K}$, т. е.

$$\sigma(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{F}.$$

Пример 7.1.2. *Пусть* $\mathfrak{K}_1$ *и* $\mathfrak{K}_2$ *— два класса подмножеств* Ω, *причем* $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2$. *Доказать, что*

$$\sigma(\mathfrak{K}_1) \subset \sigma(\mathfrak{K}_2).$$

Решение. По определению $\mathfrak{K}_2 \subset \sigma(\mathfrak{K}_2)$, а по условию $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2$, поэтому $\mathfrak{K}_1 \subset \sigma(\mathfrak{K}_2)$. И поскольку $\sigma(\mathfrak{K}_1)$ — наименьшая σ-алгебра, порожденная классом $\mathfrak{K}_1$, а $\sigma(\mathfrak{K}_2)$ — одна из σ-алгебр, содержащих класс $\mathfrak{K}_1$, то

$$\sigma(\mathfrak{K}_1) \subset \sigma(\mathfrak{K}_2).$$

Борелевские множества на $\mathbb{R}^1$. *σ-Алгеброй борелевских множеств на $\mathbb{R}^1$* будем называть σ-алгебру $\mathfrak{B}^1$, порожденную классом $\mathfrak{K}$ промежутков вида $[a, b)$. Множества из σ-алгебры $\mathfrak{B}^1$ будем называть *борелевскими множествами на* $\mathbb{R}^1$.

Пример 7.1.3 *Доказать, что борелевским множеством на* $\mathbb{R}^1$ *является:*

1) *Множество* $\{a\}$ *для каждого* $a \in \mathbb{R}^1$.
2) *Счетное множество на числовой прямой.*
3) *Интервал* (a, b).
4) *Открытое множество на числовой прямой.*
5) *Замкнутое множество на числовой прямой.*

Решение. Заметим, что σ-алгебра множеств замкнута относительно операции пересечения в счетном числе, поскольку

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}.$$

1) Очевидно,

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, a + 1/n).$$

А поскольку каждый из промежутков $[a, a+1/n)$ принадлежит $\mathfrak{B}^1$, а $\mathfrak{B}^1$ замкнута относительно операции пересечения в счетном числе, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a, a + 1/n) \in \mathfrak{B}^1$, а вместе с ним и $\{a\} \in \mathfrak{B}^1$.

2) Счетное множество A можно представить в виде $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{a_i\}$, и поскольку $\{a_i\} \in \mathfrak{B}^1$ для всех $i = 1, 2, \ldots$ (см. пункт 1), то $A \in \mathfrak{B}^1$.

3) Поскольку $(a, b) = [a, b) \cap \overline{\{a\}}$, $[a, b) \in \mathfrak{B}^1, \{a\} \in \mathfrak{B}^1$ и $\mathfrak{B}^1$ замкнута относительно операции пересечения, то $(a, b) \in \mathfrak{B}^1$.

4) Каждое открытое множество O на $\mathbb{R}^1$ можно представить в виде объединения конечного или счетного множества открытых непересекающихся интервалов:

$$O = \bigcup_i (a_i, b_i).$$

Открытые интервалы (a_i, b_i) принадлежат $\mathfrak{B}^1$, поэтому $O = \bigcup\limits_i (a_i, b_i) \in \mathfrak{B}^1$.

5) Замкнутое множество принадлежит $\mathfrak{B}^1$ как дополнение открытого.

Пример иллюстрирует тот факт, что класс борелевских множеств достаточно “широкий”. Рассматриваемые в книге подмножества из $\mathbb{R}^n$ борелевские.

Борелевские множества на $\mathbb{R}^2$. *σ-Алгеброй борелевских множеств на $\mathbb{R}^2$* будем называть σ-алгебру $\mathfrak{B}^2$, порожденную классом $\mathfrak{K}$ прямоугольников вида $[a_1, b_1) \times \times [a_2, b_2)$.

Борелевские множества на $\mathbb{R}^n$. *σ-Алгеброй борелевских множеств на $\mathbb{R}^n$* будем называть σ-алгебру $\mathfrak{B}^n$, порожденную классом $\mathfrak{K}$ параллелепипедов вида $[a_1, b_1) \times \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_n, b_n)$.

Борелевские множества в метрическом пространстве. *σ-Алгеброй борелевских множеств в метрическом пространстве* (X, ρ) будем называть σ-алгебру $\mathfrak{B}(X)$, порожденную классом открытых в (X, ρ) подмножеств.

7.2 Аксиомы Колмогорова

Пусть Ω — пространство элементарных событий и $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра подмножеств Ω.

Вероятность. *Вероятностью* будем называть неотрицательную счетно-аддитивную нормированную функцию множества, заданную на σ-алгебре.

Другими словами, вероятность P — это функция множества, заданная на σ-алгебре $\mathfrak{F}$ подмножеств Ω, такая, что:

1° для каждого $A \in \mathfrak{F}$

$$\mathsf{P}(A) \geq 0;$$

2° для произвольных $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$,

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i);$$

3° $\mathsf{P}(\Omega) = 1$.

В частности, если $\Omega = \mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}^n$, то вероятность называют *вероятностным распределением на* $\mathbb{R}^n$.

Аксиомы 1°, 2°, 3° из определения вероятности образуют систему аксиом теории вероятностей. В таком виде они были предложены А. Н. Колмогоровым.

Определение. *Вероятностным пространством* будем называть тройку $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$, где Ω — пространство элементарных событий, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра подмножеств пространства Ω, P — вероятность на σ-алгебре $\mathfrak{F}$.

Вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$ является математической моделью стохастического эксперимента. При этом Ω — пространство элементарных событий — математическая модель множества исходов стохастического эксперимента, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра подмножеств пространства Ω — математическая модель алгебры случайных событий, наблюдаемых в эксперименте, P — вероятность на $\mathfrak{F}$ — математическая модель частоты событий в последовательности экспериментов.

Свойства вероятности. Все перечисленные далее свойства вероятности являются следствиями аксиом 1°, 2°, 3°.

1. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$\mathsf{P}(\emptyset) = 0.$$

2. Вероятность любого события $A \in \mathfrak{F}$ не превышает 1:

$$\mathsf{P}(A) \leq 1.$$

3. Если $A \subset B$ $(A, B \in \mathfrak{F})$, то вероятность разности событий B и A равна разности вероятностей этих событий:

$$\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A).$$

4. $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

5. Для произвольных $A, B \in \mathfrak{F}$

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B) \qquad (7.2.1)$$

(теорема сложения).

Пример 7.2.1. *Теорема сложения допускает следующее обобщение:*

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \mathsf{P}(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}). \quad (7.2.2)$$

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Для двух множеств равенство (7.2.2) справедливо (см. (7.2.1)). Предположим, что равенство (7.2.2) имеет место для $n-1$ множеств, и докажем, что оно справедливо для n множеств. Имеем:

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) -$$

$$- \mathsf{P}((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup \ldots \cup (A_1 \cap A_n)) = \mathsf{P}(A_1) +$$

$$+\sum_{2\le i_1\le n}\mathsf{P}(A_{i_1})-\sum_{2\le i_1<i_2\le n}\mathsf{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2})+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-2}\sum_{2\le i_1<i_2<\ldots<i_n\le n}\mathsf{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_n})-$$

$$-\mathsf{P}((A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)\cup\ldots\cup(A_1\cap A_n)).$$

Для завершения доказательства, остается заметить, что

$$\mathsf{P}((A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)\cup\ldots\cup(A_1\cap A_n))=$$

$$=\sum_{2\le i_2\le n}\mathsf{P}(A_1\cap A_{i_2})-\sum_{2\le i_2<i_3\le n}\mathsf{P}(A_1\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})+\ldots+$$

$$+(-1)^{n-2}\sum_{2\le i_2<i_3<\ldots<i_n\le n}\mathsf{P}(A_1\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap\ldots\cap A_{i_n}).$$

Пример 7.2.2. *Числа $1,2,\ldots,n$ расположены наудачу. Найти вероятность того, что по меньшей мере одно число совпадает с номером своего места. Найти предельное значение этой вероятности при $n\to\infty$.*

Решение. Элементарное событие стохастического эксперимента, состоящего в расположении наудачу n чисел на n местах, — упорядоченная последовательность этих чисел. Естественно считать, что все элементарные события равновероятны, поэтому стохастический эксперимент описывается классической моделью. Заметим, что количество всех элементарных событий равно $n!$

Обозначим через A_{i_s} событие, состоящее в том, что число i_s находится на месте с номером i_s, тогда пересечение $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}$, $k=1,2,\ldots,n$, описывает событие "число i_1 находится на месте с номером i_1, число i_2 — на месте с номером i_2, и т. д., число i_k — на месте с номером i_k" (остальные $n-k$ чисел на $n-k$ местах упорядочены произвольно). Задача сводится к вычислению вероятности события $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$. Воспользуемся теоремой сложения (см. (7.2.2)):

$$\mathsf{P}(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=$$

$$=\sum_{1\le i_1\le n}\mathsf{P}(A_{i_1})-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}\mathsf{P}(A_{i_1}\bigcap A_{i_2})+\ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}).$$

Вычислим каждую сумму в правой части. Начнем с суммы $\sum\limits_{1 \le i_1 \le n} \mathsf{P}(A_{i_1})$. Сначала вычислим $\mathsf{P}(A_{i_1})$. В событие A_{i_1} входят все последовательности длиной n, у которых на месте с номером i_1 находится число i_1. Таких последовательностей, очевидно, $(n-1)!$ Согласно формуле классической вероятности

$$\mathsf{P}(A_{i_1}) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Поэтому

$$\sum_{1 \le i_1 \le n} \mathsf{P}(A_{i_1}) = \sum_{1 \le i_1 \le n} \frac{1}{n} = 1.$$

Далее рассмотрим $\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$. Вычислим $\mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$. В $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ входят последовательности длиной n, у которых на месте с номером i_1 находится число i_1, на месте с номером i_2 — число i_2, и т. д., на месте с номером i_k — число i_k, а остальные $n-k$ чисел на $n-k$ оставшихся местах, упорядочены произвольно. Таких последовательностей, очевидно, $(n-k)!$ По формуле классической вероятности

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Поэтому

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) =$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Количество одинаковых слагаемых в последней сумме равно числу способов выбрать k индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ из промежутка $[1, n]$ так, чтобы $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$. Очевидно, это число равно C_n^k. Так что,

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Таким образом,

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

Заметим, что при $n \to \infty$ последняя сумма сходится к $1 - 1/e$.

7.3 Задачи

АЗ: 7.12, 7.13, 7.14, 7.15(1, 2), 7.16(1), 7.19.
СЗ: 7.2, 7.9, 7.10, 7.15(3, 4, 5), 7.16(2), 7.20.

7.1°. Доказать, что: а) $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$, причем $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$; б) $A \cap (\cup_i B_i) = \cup_i (A \cap B_i)$, причем, если $B_i \cap B_j = \emptyset, i \ne j$, то $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset, i \ne j$.

7.2°. Последовательность подмножеств $\{A_n\}$ плоскости определена так:

$$A_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1/n^2\}, \ n = 1, 2, \ldots$$

Описать подмножества

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

7.3°. Доказать равенства:
а) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$;

б) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;
в) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

7.4°. Пусть $A_n = \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ Описать множества

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \; B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

7.5. 1° Пусть $\{A_n\}$ — произвольная последовательность множеств. Доказать, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

где $B_1 = A_1, \; B_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$, $n = 1, 2, \ldots$, причем множества B_n попарно не пересекаются.

2° Пусть $\{A_n\}$ — возрастающая последовательность множеств, т. е.

$$A_n \subset A_{n+1},\, n = 1, 2, \ldots$$

Доказать, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1}),$$

где $A_0 = \emptyset$, причем

$$(A_i \setminus A_{i-1}) \cap (A_j \setminus A_{j-1}) = \emptyset,\, i \neq j.$$

7.6. Пусть I — некоторое множество индексов. Доказать, что

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}; \quad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}.$$

7.7°. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра множеств, $A, B \in \mathfrak{A}$. Доказать, что $A \cap B \in \mathfrak{A}$ (алгебра замкнута относительно операции пересечения).

7.8°. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра множеств. Доказать:

а) если $A_k \in \mathfrak{A}, k = 1, 2, \ldots, n$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}$;

б) если $A_k \in \mathfrak{A}, k = 1, 2, \ldots, n$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}$;

в) $\Omega \in \mathfrak{A}$; $\emptyset \in \mathfrak{A}$.

7.9. Доказать, что:

а) класс всех подмножеств множества Ω является алгеброй;

б) для каждого класса $\mathfrak{K}$ подмножеств Ω существует по меньшей мере одна алгебра, содержащая класс $\mathfrak{K}$;

в) пересечение любой совокупности алгебр является алгеброй.

7.10. Доказать, что для каждого класса $\mathfrak{K}$ существует наименьшая алгебра, содержащая класс $\mathfrak{K}$.

7.11°. Пусть $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра множеств, $A_n \in \mathfrak{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ Доказать, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$.

7.12. Доказать, что:

а) класс всех подмножеств множества Ω является σ-алгеброй;

б) для каждого класса $\mathfrak{K}$ подмножеств Ω существует по меньшей мере одна σ-алгебра, содержащая класс $\mathfrak{K}$;

в) пересечение любой совокупности σ-алгебр является σ-алгеброй.

7.13. Доказать, что для каждого класса $\mathfrak{K}$ существует наименьшая σ-алгебра $\sigma(\mathfrak{K})$, содержащая класс $\mathfrak{K}$.

7.14. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс открытых интервалов (a, b) на числовой прямой. Доказать, что наименьшая σ-алгебра $\sigma(\mathfrak{K})$, содержащая класс $\mathfrak{K}$, является σ-алгеброй борелевских множеств на $\mathbb{R}^1$.

7.15. Доказать, что σ-алгебры, порожденные каждым из перечисленных далее классов, являются σ-алгебрами борелевских множеств на $\mathbb{R}^1$:

1) $\mathfrak{K}_1 = \{[a, b]; a, b \in \mathbb{R}^1\}$;

2) $\mathfrak{K}_2 = \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}^1\}$;

3) $\mathfrak{K}_3 = \{(-\infty, x); x \in \mathbb{R}^1\}$;

4) $\mathfrak{K}_4 = \{(x, +\infty); x \in \mathbb{R}^1\}$;

5) $\mathfrak{K}_5 = \{[x, +\infty); x \in \mathbb{R}^1\}$.

7.16. Доказать, что σ-алгебра борелевских множеств порождается:

1) классом открытых множеств на числовой прямой;

2) классом замкнутых множеств на числовой прямой.

7.17. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра множеств на $\mathbb{R}^1$, элементами которой являются конечные объединения промежутков вида $[a, b)$, $(-\infty, b)$, $[a, +\infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}^1$. Доказать, что алгебра $\mathfrak{A}$ порождает σ-алгебру борелевских множеств на $\mathbb{R}^1$.

7.18. Пусть $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, B — произвольное, но фиксированное множество из $\mathfrak{F}$. Доказать, что класс множеств $\mathfrak{F}_B$ вида $A \cap B$, где $A \in \mathfrak{F}$, является σ-алгеброй.

Примечание. Дополнение берется до множества B.

7.19. Пусть $\mathfrak{B}^1$ — σ-алгебра борелевских множеств на $\mathbb{R}^1$, B — произвольное, но фиксированное множество из $\mathfrak{B}^1$. Пусть $\mathfrak{B}^1_B$ — класс множеств вида $B \cap A$, где $A \in \mathfrak{B}^1$. Доказать, что $\mathfrak{B}^1_B$ является σ-алгеброй.

Примечание. Дополнение берется до множества B.

7.20. $\mathfrak{B}^1$ — σ-алгебра борелевских множеств на $\mathbb{R}^1$. Пусть $\mathfrak{B}^1_{[a,b)}$ — класс множеств вида $B \cap [a, b), B \in \mathfrak{B}^1$, $[a, b)$ — фиксированный промежуток. Доказать, что $\mathfrak{B}^1_{[a,b)}$ является σ-алгеброй.

Примечание. См. также задачи 7.18, 7.19.

7.21. Пусть $\mathfrak{K}$ — конечное разбиение множества Ω — класс подмножеств $A_i \subset \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$, таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Описать алгебру, порожденную разбиением $\mathfrak{K}$.

7.22. Пусть $\mathfrak{K}$ — счетное разбиение множества Ω — класс подмножеств $A_i \subset \Omega$, $i = 1, 2, \ldots$, таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$.

Описать σ-алгебру, порожденную разбиением $\mathfrak{K}$.

7.23*. Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ борелевским множеством является:

а) множество $\{a\}$, для каждой точки $a \in \mathbb{R}^n$;

б) счетное множество;

в) открытое множество.

7.24. Доказать, что класс бесконечных интервалов

$$I_{a_1,\ldots,a_n} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 < a_1, x_2 < a_2, \ldots, x_n < a_n\},$$

$a_i \in \mathbb{R}^1,\ i = 1, 2, \ldots, n$, порождает σ-алгебру $\mathfrak{B}^n$.

7.25. Доказать, что класс $\mathfrak{K}$ открытых множеств в $\mathbb{R}^n$ порождает σ-алгебру борелевских множеств $\mathfrak{B}^n$.

7.26. Доказать, что класс $\mathfrak{K}$ замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$ порождает σ-алгебру борелевских множеств $\mathfrak{B}^n$.

7.27. Пусть (X, ρ) — сепарабельное метрическое пространство. Доказать, что:

1) одноточечное множество является борелевским;

2) счетное множество является борелевским;

3) замкнутое множество является борелевским.

7.28. Пусть (X, ρ) — сепарабельное метрическое пространство, $\mathfrak{F}$ — класс замкнутых множеств, $\mathfrak{V}$ — класс множеств вида $B(x, r) = \{y : \rho(x, y) < r\}$, $\mathfrak{W}$ — класс множеств вида $\overline{B}(x, r) = \{y : \rho(x, y) \le r\}$.

Доказать, что каждый из перечисленных классов порождает σ-алгебру борелевских множеств в метрическом пространстве (X, ρ).

7.29. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность подмножеств множества Ω. Обозначим через $\overline{\lim} A_n$ множество элементов ω, принадлежащих бесконечному числу множеств A_n, через $\underline{\lim} A_n$ — множество элементов, принадлежащих всем множествам A_n, исключая, быть может, конечное их число.

Доказать, что

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,\ \overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

7.30. Пусть $\{A_n\}$ — монотонно убывающая последовательность подмножеств Ω, т. е. для всех n имеет место включение

$$A_{n+1} \subset A_n.$$

Доказать, что

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Глава 8

Геометрические вероятности

8.1 Определения. Примеры

Стохастический эксперимент состоит в бросании наудачу точки в множество B (борелевское[1]) из $\mathbb{R}^n$, например, на отрезок $[a, b]$, в прямоугольник $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, параллелепипед $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ и т. д. Далее в слова "точку наудачу бросают в множество B" мы будем вкладывать вполне конкретное содержание: брошенная точка может попасть в любое подмножество A множества B, и вероятность того, что точка окажется в A, пропорциональна мере Лебега $\mathsf{L}(A)$ множества A. Формально это обозначает, что в качестве математической модели стохастического эксперимента, состоящего в бросании наудачу точки в множество B, мы будем рассматривать вероятностное пространство $\{B, \mathfrak{B}^n_B, \mathsf{P}\}$, где $\mathfrak{B}^n_B$ — класс борелевских подмножеств множества B, P — вероятность на классе $\mathfrak{B}^n_B$, определяемая для каждого A из $\mathfrak{B}^n_B$ равенством

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mathsf{L}(A)}{\mathsf{L}(B)}, \tag{8.1.1}$$

L — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. (Значение меры L на параллеле-

[1] Относительно борелевских множеств см. гл. 7.

пипедах $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ равно $\prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$, в частности, $\mathsf{L}([a, b]) = b - a$, $\mathsf{L}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2)$.) Определенную таким образом вероятность будем называть *геометрической вероятностью* (разумеется, для множества B должно выполняться условие $0 < \mathsf{L}(B) < \infty$).

Пример 8.1.1. *На отрезок* $[0; 1]$ *наудачу бросают пару точек. Вычислить вероятность того, что расстояние между ними меньше* $1/2$.

Решение. Точки будем считать различимыми (например, они окрашены в разные цвета). Пусть x и y — координаты этих точек.

Упорядоченной паре точек на отрезке $[0; 1]$ с координатами x и y соответствует одна точка в квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$ с координатами (x, y) и наоборот. Поэтому бросание наудачу пары точек на отрезок $[0; 1]$ равносильно бросанию наудачу одной точки в квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$. При этом парам точек на отрезке $[0; 1]$, для которых расстояние меньше $1/2$ (т. е. $|y - x| < 1/2$), соответствует множество точек (x, y) квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$, координаты которых удовлетворяют соотношению $|y - x| < 1/2$, и наоборот. Обозначим это множество точек квадрата через A:

$$A = \{(x, y) \in [0; 1] \times [0; 1] : |y - x| < 1/2\} =$$

$$= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x - 1/2 < y < x + 1/2\}$$

(см. рис. 8.1.1, множество A заштриховано).

Вероятность того, что расстояние между брошенными наудачу на отрезок $[0; 1]$ точками будет меньше $1/2$, равна вероятности попадания брошенной наудачу в квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$ точки в множество A.

Математической моделью стохастического эксперимента, состоящего в бросании наудачу точки в квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$, является вероятностное пространство $\{B, \mathfrak{B}_B^2, \mathsf{P}\}$, где $B = [0; 1] \times [0; 1]$, $\mathfrak{B}_B^2$ — класс (σ-алгебра) борелевских подмножеств квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$, P — геометрическая вероятность (см. (8.1.1)) на $\mathfrak{B}^2_B$. Поэтому

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mathsf{L}(A)}{\mathsf{L}(B)} = \frac{3/4}{1} = \frac{3}{4}.$$

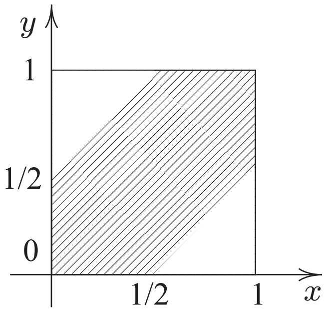


Рис. 8.1.1: К примеру 8.1.1

Пример 8.1.2. *Стержень длиной* 1 *наудачу разламывают на три части. Вычислить вероятность того, что из образовавшихся при этом частей можно построить треугольник.*

Решение. Стержень длиной 1 удобно интерпретировать как отрезок $[0; 1]$ на координатной прямой. Разламывать отрезок $[0; 1]$ на три части будем следующим образом: наудачу бросим на него две точки и разломаем отрезок в этих точках (точки будем считать различимыми, их координаты обозначим x, y). При этом образуются три отрезка: крайний левый (длиной $\min\{x, y\}$), средний (длиной $|x-y|$), крайний правый (длиной $1 - \max\{x, y\}$). Из этих отрезков можно построить треугольник, если длина каждого из них меньше суммы длин двух других:

$$\left\{ \begin{array}{c} \min\{x, y\} < |x - y| + (1 - \max\{x, y\}); \\ |x - y| < \min\{x, y\} + (1 - \max\{x, y\}); \\ 1 - \max\{x, y\} < \min\{x, y\} + |x - y|. \end{array} \right. \tag{8.1.2}$$

Бросание двух точек на отрезок $[0; 1]$ равносильно бросанию одной точки в квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$ (см. также пример 8.1.1). При этом парам точек на отрезке $[0;1]$, координаты которых удовлетворяют неравенствам (8.1.2), соответствуют точки (x,y) квадрата $[0;1]\times[0;1]$, координаты которых удовлетворяют тем же неравенствам. Обозначим это множество точек квадрата через A. Его удобно представить в виде

$$A = A\cap(\{(x,y): x\le y\}\cup\{(x,y): x>y\}) =$$

$$= (A\cap\{(x,y): x\le y\})\cup(A\cap\{(x,y): x>y\}) =$$

$$= \{(x,y): x<1/2,\ x+1/2>y,\ y>1/2\}\cup$$

$$\cup\{(x,y): y<1/2,\ x-1/2<y,\ x>1/2\}\,.$$

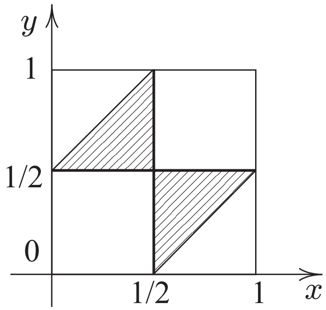


Рис. 8.1.2: К примеру 8.1.2

Так что вычисление вероятности события “из частей отрезка можно построить треугольник” сводится к вычислению вероятности попадания брошенной в квадрат $[0;1]\times[0;1]$ точки в множество A (см. рис. 8.1.2, множество A заштриховано). А поскольку точку бросают наудачу, то искомая вероятность вычисляется как геометрическая:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mathsf{L}(A)}{\mathsf{L}([0;1]\times[0;1])} = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}.$$

П р и м е р 8.1.3 (задача Бюффона). *Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися на расстоянии $2a$ одна от одной. На плоскость наудачу* [2] *бросают иглу длиной $2l$ ($2l < 2a$). Найти вероятность того, что игла пересечет одну из прямых.*

Р е ш е н и е. Обозначим через x расстояние от середины иглы до ближайшей прямой, через φ — угол между иглой и прямой (φ будем откладывать против часовой стрелки от направления иглы до направления прямой (рис. 8.1.3)).

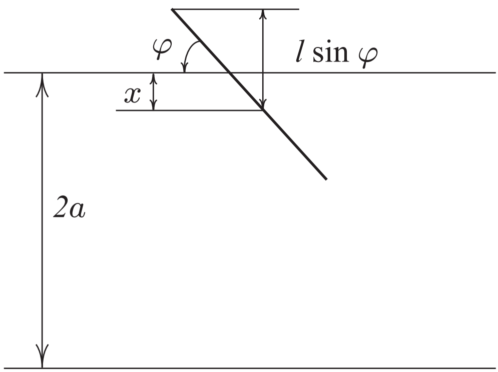


Рис. 8.1.3: Игла на разграфленной плоскости

Тогда игла на плоскости, разграфленной параллельными прямыми, задает упорядоченную пару чисел (φ, x), $\varphi \in [0, \pi]$, $x \in [0, a]$. Та же пара чисел (φ, x) задает на координатной плоскости φ, x точку с координатами (φ, x), принадлежащую прямоугольнику $B = [0, \pi] \times [0, a]$ (см. рис. 8.1.4). И обратно — каждая точка из прямоугольника B задает пару чисел (φ, x), а вместе с ней и положение

[2] В задаче оборот “наудачу бросают иглу” обозначает следующее: 1° середина иглы (точка) равномерно распределена на отрезке длиной $2a$, перпендикулярном параллельным прямым; 2° угол φ, образованный иглой с параллельными прямыми, распределен равномерно на промежутке $[0, \pi]$; 3° расстояние x от середины иглы до ближайшей прямой и угол φ являются независимыми случайными величинами.

иглы относительно параллельных прямых на плоскости. Поэтому бросание иглы на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, и регистрация ее положения относительно прямых (см. рис. 8.1.3) равносильны бросанию наудачу точки в прямоугольник $B = [0,\pi] \times [0,a]$ (см. рис. 8.1.4). При этом игла пересекает прямую тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$x \le l \sin \varphi$$

(см. рис. 8.1.3) или, что то же, когда брошенная в прямоугольник $B = [0,\pi] \times [0,a]$ точка попадает в область A, ограниченную кривой $x = l \sin \varphi$ и осью $O\varphi$ (см. рис 8.1.4). А поскольку точку бросают наудачу, то вероятность p попадания точки в множество A (вероятность пересечения иглой прямой), вычисляется как геометрическая вероятность (см. (8.1.1)). Следовательно.

$$p = \frac{1}{a\pi} \int\limits_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

Интересно, что полученное соотношение можно использовать для экспериментального определения числа π.

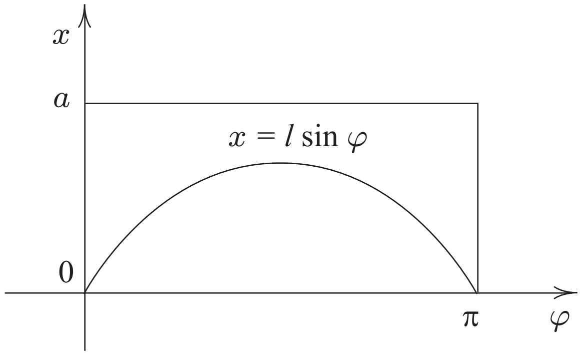


Рис. 8.1.4: К задаче Бюффона

Представим, что игла брошена на плоскость n раз (n — большое), и при этом она m раз пересекла прямую. Если построенная модель адекватно описывает эксперимент, то при больших n частота m/n числа пересечений иглой прямой должна быть близка к вероятности p, т. е. $\frac{2l}{a\pi} \approx \frac{m}{n}$. Отсюда

$$\pi \approx \frac{2l}{a}\frac{n}{m}.$$

8.2 Задачи

АЗ: $8.1^\circ(3,10), 8.2^\circ(3), 8.3(1), 8.4(1,7,14), 8.12^\circ, 8.18, 8.20, 8.29, 8.31$.

СЗ: $8.1^\circ(1,2), 8.2^\circ(1,2), 8.3^\circ(3,6,8), 8.4(2,10,15), 8.11^\circ, 8.16, 8.17^\circ, 8.19, 8.25, 8.28, 8.30, 8.34$.

8.1°. В квадрат $[0;1]\times[0;1]$ наудачу бросают точку. Вычислить вероятность того, что ее координаты (x, y) связаны соотношениями:

1) $xy \le 1/2$;
2) $\min\{e^{-x},\ \sqrt{y}\} \ge e^{-1/2}$;
3) $\min\{y - x^2,\ x - y^2\} \ge 0$;
4) $\max\{y - e^{-x},\ y - 3/4\} \ge 0$;
5) $y > -x^2 + 1/9$;
6) $x^2 + y^2 < 1/4$;
7) $x + y \le 1/3$;
8) $y + 1/2 \le 1/x$;
9) $y < x^2/2$;
10) $|y - x| \ge 2/3$.

8.2°. В квадрат $[0;1]\times[0;1]$ наудачу бросают точку. Обозначим ее координаты через (x, y).

Найти вероятности следующих событий:

1) площадь прямоугольника со сторонами x и y больше $1/2$;

2) расстояние от брошенной точки до начала координат меньше $1/4$;

3) расстояние от брошенной точки до точки (1,1) больше 1;

4) расстояние от брошенной точки до точки (0,1) меньше 1.

8.3°. На отрезок [0;1] наудачу бросают пару точек. Пусть x — координата одной точки, y — другой. Найти вероятности следующих событий:

1) $\max\{x, y\} < 1/2$;	8) $\max\{x^2, y\} < a,\ 0 < a < 1$;
2) $\max\{x, y\} > 1/3$;	9) $\max\{x, y^2\} > a,\ 0 < a < 1$;
3) $\min\{x, y\} < 1/4$;	10) $ye^x \leq 1$;
4) $\min\{x, y\} > 1/2$;	11) $y + \sqrt{1 - x^2} - 1 \geq 0$;
5) $x + \sqrt{1 - y^2} \leq 1$;	12) $y + \sqrt{x - x^2} \leq 1$.
6) $y + \sqrt{2x - x^2} \leq 1$;	13) $x^2 - y^2 - x + y \geq 0$.
7) $x + \sqrt{y - y^2} \geq 1$;	14) $(y - x)(y - 1/2) \geq 0$.

8.4. На отрезок $[-2; 2]$ наудачу бросают пару точек. Пусть x — координата одной точки, y — другой. Найти вероятности следующих событий:

1) $x + \lvert x\rvert = y + \lvert y\rvert$;	8) $(y - 2x)(y + 2x) \geq 0$;
2) $x - \lvert x\rvert = y - \lvert y\rvert$;	9) $(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert - 1)(\lvert x\rvert + \lvert y\rvert - 2) \leq 0$;
3) $[y] = [x]$;	10) $\lvert x - 1\rvert + \lvert y - 1\rvert \leq 1$;
4) $[y] = -[x]$;	11) $(y - x)(y + x - 2) \geq 0$;
5) $[y] = [x - 1]$;	12) $([y] - [x])(\{y\} - \{x\}) \geq 0$;
6) $\{y\} \leq \{x\}$;	13) $(x - \operatorname{sign} x)^2 + (y - \operatorname{sign} y)^2 \leq 1$;
7) $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \leq 1$;	14) $\lvert x - \operatorname{sign} x\rvert + \lvert y - \operatorname{sign} y\rvert \leq 1$;

15) $(|x - 1| + |y - 1| - 1)(|x - 1| + |y - 1| - 2) \leq 0$;
16) $((x - \operatorname{sign} x)^2 + (y - \operatorname{sign} y)^2 - 1)(|x - \operatorname{sign} x| +$
$+ |y - \operatorname{sign} y| - 1) \leq 0$;
($[a]$ — целая часть числа a, $\{a\} = a - [a]$ — дробная часть числа a.)

8.5°. На паркетный пол бросают монету радиуса r. Паркет имеет форму прямоугольников со сторонами a и b ($a < b$, $2r < a$).

Найти вероятность того, что монета пересечет меньшую сторону какого-нибудь прямоугольника, если известно, что она пересекла одну из сторон.

8.6. На отрезке длиной l наудачу выбраны две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превосходит kl $(0 < k < 1)$?

8.7. Два судна должны подойти к одному причалу. Моменты прихода суден к причалу — независимые случайные события, равновозможные в течении суток. Найти вероятность того, что одно из суден будет ждать освобождения причала, если время стоянки первого судна (судна номер 1) — 1 час, а второго — 2 часа.

8.8°. На паркетный пол наудачу бросают монету диаметра d. Паркет имеет форму квадратов со стороной a $(a > d)$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одну из сторон квадратов паркета.

8.9. В круг радиуса R наудачу бросают точку. Найти вероятность того, что точка окажется внутри правильного n-угольника, вписанного в круг.

8.10. На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наудачу выбирают точку. Найти вероятность того, что: а) проекция точки на ось Ox находится от центра окружности на расстоянии, не превышающем r $(r < 1)$; б) расстояние от выбранной точки до точки с координатами $(1; 0)$ не превышает r.

8.11°. В круг радиуса R наудачу бросают точку. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до центра круга: 1) не превышает r; 2) больше r.

8.12°. В круг радиуса R с центром в точке O наудачу независимо одна от другой бросают N точек.

Вычислить вероятность того, что:

1) расстояние от центра круга до самой удаленной точки не превышает r $(r < R)$;

2) расстояние от центра круга до ближайшей точки превышает r $(r < R)$;

3) все точки попадут в круг радиуса r $(r < R)$ с центром в точке O;

4) ни одна точка не попадет в круг радиуса r $(r < R)$ с центром в точке O;

5) все точки попадут в данный круг радиуса r $(r < R)$, содержащийся в круге радиуса R;

6) ни одна точка не попадет в данный круг радиуса r $(r < R)$, содержащийся в круге радиуса R;

7) все точки попадут в данный квадрат со стороной a, содержащийся в круге радиуса R;

8) ни одна точка не попадет в данный квадрат со стороной a, содержащийся в круге радиуса R.

8.13. На отрезок AB длиной a наудачу независимо одна от другой бросают пять точек. Найти вероятность того, что две точки окажутся на расстоянии, меньшем b $(b < a)$ от точки A, а три — на расстоянии, большем b.

8.14. Результаты наблюдений, полученные с помощью телескопа и спектрометра, дают основание считать, что ряд химических элементов, найденных в земной коре, представлен также и на Солнце. Это заключение основано на физическом законе, открытом Густавом Кирхгофом, согласно которому пары́ элементов поглощают в точности те же лучи света, которые они излучают (при высокой температуре химические элементы превращаются в светящиеся пары́).

Излучение Солнца, проходя через призму, образует некоторую последовательность параллельных линий, их будем называть спектральными (фраунгоферовыми) линиями.

Мы можем обнаружить последовательности параллельных спектральных линий также в излучении других элементов, в частности, железа. В качестве модели фраунгоферовых (спектральных) линий излучения химических элементов — будем рассматривать последовательность параллельных линий на плоскости.

В наблюдениях Г. Кирхгофа 60 спектральных линий излучения железа совпали[3] с фраунгоферовыми линиями излучения Солнца. Оцените вероятность того, что эти совпадения случайны, если на шкале, использованной Г. Кирхгофом, линии на расстоянии меньшем 0,5 мм уже неразличимы, а среднее расстояние между соседними солнечными фраунгоферовыми линиями равно 2 мм.

8.15. На отрезок $[0;1]$ наудачу бросают три точки, ξ, η, ζ — их координаты.

1. Вычислить вероятность того, что из отрезков длиной ξ, η, ζ можно построить треугольник.

2. Вычислить вероятность того, что $\xi + \eta + \zeta \leq 3/2$.

3. Вычислить вероятность того, что $\max\{\xi, \eta, \zeta\} \leq t$, $0 < t < 1$.

---

[3]Заметим, что никакое физическое наблюдение не является абсолютно точным. Поэтому две линии, которые мы считаем совпадающими, в действительности могут быть различными, но в пределах точности наших наблюдений мы не можем их различить.

8.16. Два лица, решив встретиться в течение часа, договорились, что каждый независимо от другого приходит на место встречи в наудачу выбранный момент указанного часа.

1. Если лица договорились, что каждый ожидает в течение времени t ($t < 1$), после чего уходит с места встречи, то какова вероятность того, что встреча состоится?

2. Какова вероятность того, что данное лицо придет на место встречи: а) раньше другого; б) раньше другого на время, не меньшее чем q ($q < 1$)?

8.17°. В сферу радиуса R, с центром в точке O наудачу независимо одну от другой бросили N точек. Вычислить вероятность того, что:

1) расстояние от центра до самой удаленной точки не превышает r ($r < R$);

2) расстояние от центра до ближайшей точки превышает r ($r < R$);

3) все точки попадут в сферу радиуса r ($r < R$) с центром в точке O;

4) ни одна точка не попадет в сферу радиуса r ($r < R$) с центром в точке O;

5) все точки попадут в данную сферу радиуса r ($r < R$), содержащуюся в сфере радиуса R;

6) ни одна точка не попадет в данную сферу радиуса r ($r < R$), содержащуюся в сфере радиуса R;

7) все точки попадут в данный куб со стороной a, содержащийся в сфере радиуса R;

8) ни одна точка не попадет в данный прямоугольный параллелепипед со сторонами a, b, c, содержащийся в сфере радиуса R.

8.18. Какова вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков, длина которых не превышает 1, можно построить треугольник?

8.19. На отрезке $[-1; 1]$ наудачу выбирают две точки. Пусть p и q — координаты этих точек. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$: 1) имеет действительные корни; 2) не имеет действительных корней.

8.20. На отрезок наудачу одну за другой бросают три точки. Какова вероятность того, что третья по счету точка попадет между двумя первыми?

8.21°. В круг вписан квадрат. Точку наудачу бросают в круг. Найти вероятность того, что она попадет в квадрат.

8.22*. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — координаты точки, наудачу брошенной в квадрат $[0;1] \times [0;1]$. При каких значениях r события $A_r = \{|x_1 - x_2| \geq r\}$ и $B_r = \{x_1 + x_2 \leq 3r\}$ независимы?

8.23. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — координаты точки, наудачу брошенной в квадрат $[0;1] \times [0;1]$,

$$A_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq 1/2\}, \;\; A_2 = \{(x_1, x_2) : x_2 \leq 1/2\},$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2) : (x_1 - 1/2)(x_2 - 1/2) \leq 0\}.$$

Доказать, что любые два из событий A_1, A_2, A_3 независимы, но все три не являются независимыми.

8.24. Плоскость разбита сеткой прямых: 1) на квадраты со стороной 1; 2) на правильные треугольники со стороной 1.

На плоскость наудачу бросают монету диаметра 1. Какова вероятность того, что монета накроет одну из вершин сетки?

8.25. На отрезке $[0;1]$ наудачу последовательно выбирают три числа. Какова вероятность того, что:

1) число, выбранное последним, наибольшее;

2) числа выбраны в порядке возрастания?

8.26. Отрезок разделили на три равные части. Какова вероятность того, что три различимые точки, наудачу брошенные на отрезок, попадут в три разные части?

8.27. На отрезок $[0;1]$, разделенный на три равные части, наудачу бросают три различимые точки. Вычислить вероятности следующих событий:

1) все три точки попадут на одну часть;

2) занятыми окажутся не менее двух частей;

3) на среднюю часть не попадет ни одна точка;

4) на крайние части не попадет ни одна точка.

8.28. На отрезок $[0;1]$, разбитый на n равных частей (отрезков), наудачу независимо одна от другой, бросают n (различимых) точек. Вычислить вероятности следующих событий:

1) все точки попадут на одну часть;
2) все части будут заняты;
3) не будет занята только крайняя левая часть;
4) заняты ровно две части;
5) заняты ровно три части;
6) заняты ровно s частей.

8.29. На окружности наудачу выбирают три точки. Какова вероятность того, что треугольник с вершинами в этих точках остроугольный?

8.30. На окружности наудачу выбраны три точки. Вычислить вероятность того, что в треугольнике с вершинами в этих точках:
1) имеется угол меньший $30°$;
2) все углы больше $30°$;
3) имеется угол $90°$.

8.31[4]. На окружности наудачу выбраны точки A, B, C, D. Вычислить вероятность того, что отрезки AC и BD пересекаются.

8.32*. На плоской горизонтально размещенной фольге находится точечный источник радиоактивного излучения, посылающий лучи равномерно во всех направлениях пространства. Если параллельно фольге на единичном расстоянии от нее поставить экран, то на нем можно наблюдать точечные вспышки, вызванные радиоактивным излучением. Найти вероятность того, что очередная вспышка будет наблюдаться на экране внутри круга радиуса R, центр которого находится над источником излучения.

8.33*. Шарикоподшипник можно собрать, если радиус R внешнего кольца, радиус r внутреннего кольца и диаметр d шарика удовлетворяют условиям

$$0 \leq R - r - d \leq \delta.$$

Предположим, что R, r, d — независимые и равномерно распределенные соответственно на отрезках [50,0; 51,0], [40,0; 41,0], [9,5; 10,0] случайные величины.

Найти вероятность того, что шарикоподшипник будет собран, если $\delta = 0{,}5$.

---

[4] *Васильев Н. Б.* Геометрические вероятности // Квант. — 1991. — № 1. — С. 47 – 53.

8.34. На отрезок $[0, nd]$, разбитый точками kd, $k = 0, 1, \ldots, n$, на части, наудачу бросают отрезок случайной длины. Вычислить вероятность того, что отрезок "накроет" одну из точек деления, если его длина 1° распределена равномерно на $[0, d]$; 2° распределена равномерно на $[0, l]$ $(0 < l < d)$.

8.35°. В единичный квадрат наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что точка будет находиться от центра квадрата на расстоянии, меньшем $1/3$, если известно, что от каждой из сторон квадрата она удалена более чем на $1/6$?

8.36°. На плоскости проведены параллельные прямые, расстояние между которыми составляет $2a$. На плоскость наудачу бросают монету радиуса r $(r < a)$. Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одну прямую?

8.37°. На отрезок длиной L наудачу бросают точку. Вычислить вероятность того, что она упадет не далее, чем на l $(l < L/2)$ от середины отрезка.

8.38. Случайная точка A равномерно распределена в квадрате со стороной a. Найти вероятность того, что расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата меньше расстояния от A до ближайшей диагонали квадрата.

8.39°. Случайная точка X равномерно распределена в квадрате $A = \{(x, y) : |x| \leq a, |y| \leq a\}$. Найти вероятность того, что квадрат с центром в точке X и сторонами длиной b, параллельными осям координат, полностью содержится в квадрате A.

8.40. Две точки, брошенные наудачу на отрезок $[0, 1]$, делят его на три части. Найти вероятность того, что

1) каждая из частей меньше $1/2$;
2) хотя бы одна часть больше $1/2$;
3) ровно одна часть больше $1/2$.

Глава 9

Распределение случайной величины

9.1 Функция и плотность распределения

Случайная величина — функция исхода стохастического эксперимента (см. гл. 5). Формально случайную величину определяют следующим образом.

Определение. Пусть $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$ — вероятностное пространство. *Случайной величиной* будем называть функцию $\xi = \xi(\omega)$ на Ω со значениями в $\mathbb{R}^1$, такую, что для каждого $x \in \mathbb{R}^1$

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}.$$

Если $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина, то для любого множества B (борелевского)

$$\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}.$$

Свойства случайных величин. Если ξ и η — случайные величины, то случайными величинами являются

$$\xi + \eta,\ \xi - \eta,\ \xi\eta,\ \xi/\eta\ (\eta \neq 0).$$

Функция от случайной величины является случайной величиной. Подробнее, если ξ — случайная величина,

g — борелевская[1] функция на $\mathbb{R}^1$ со значениями в $\mathbb{R}^1$, то $g(\xi)$ — случайная величина.

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — случайные величины, то случайными величинами являются

$$\sup_n \xi_n,\ \inf_n \xi_n,\ \overline{\lim}\xi_n,\ \underline{\lim}\xi_n,$$

в частности, предел $\lim \xi_n$ (если он существует) является случайной величиной.

Функция распределения случайной величины. Дискретная случайная величина ξ описывается множеством своих возможных значений X и вероятностями, с которыми эти значения принимаются — распределением случайной величины:

$$\mathsf{P}_\xi : x_i \to \mathsf{P}_\xi(x_i) = \mathsf{P}\{\xi = x_i\},\ x_i \in X.$$

В общей ситуации случайная величина ξ описывается так называемой функцией распределения случайной величины.

Определение. Функцию

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\},\ x \in \mathbb{R}^1,$$

называют *функцией распределения* случайной величины ξ.

По функции распределения всегда можно вычислить вероятность попадания случайной величины в любой промежуток $[a, b)$ (да и в любое борелевское множество B).

Функция распределения случайной величины обладает следующими свойствами:

1) $0 \le F_\xi(x) \le 1$;

2) $F_\xi(x)$ — неубывающая: если $x_1 < x_2$, то

$$F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2);$$

3) $F_\xi(x)$ непрерывна слева;

[1]Функция $g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ борелевская, если для произвольного борелевского множества B его прообраз $g^{-1}(B)$ — борелевское множество. Непрерывные функции являются борелевскими, но класс борелевских функций значительно шире.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$;

5) Для произвольных a и b $(a < b)$

$$\mathsf{P}\{\xi \in [a, b)\} = F_\xi(b) - F_\xi(a);$$

6) Для произвольного x_0

$$\mathsf{P}\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0 - 0).$$

Определение. Функцию

$$\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}\{\omega : \xi(\omega) \in B\}, \ B \in \mathfrak{B}^1,$$

определенную на классе $\mathfrak{B}^1$ борелевских множеств прямой, будем называть *распределением* случайной величины ξ.

Плотность распределения случайной величины. Если функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ можно представить в виде

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt, \ x \in \mathbb{R}^1, \tag{9.1.1}$$

то говорят, что случайная величина ξ имеет *абсолютно непрерывное распределение* (*случайная величина абсолютно непрерывна*), а функцию $p(x)$ называют *плотностью* распределения случайной величины ξ.

Непосредственно из равенства (9.1.1) следует, что у абсолютно непрерывной случайной величины плотность распределения равна почти для всех x производной от функции распределения:

$$\frac{d}{dx}F(x) = p(x).$$

Плотность распределения $p(x)$ случайной величины неотрицательна и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

По плотности распределения $p(x)$ случайной величины ξ всегда можно вычислить $\mathsf{P}\{\xi \in [a, b)\}$:

$$\mathsf{P}\{\xi \in [a, b)\} = \int\limits_a^b p(x)dx. \tag{9.1.2}$$

Более того, имеет место следующее утверждение.

Если ζ — абсолютно непрерывная случайная величина со значениями в $\mathbb{R}^1$, $p(x)$ — ее плотность распределения и $g(x)$ — борелевская функция на $\mathbb{R}^1$ со значениями в $\mathbb{R}^1$, то

$$\mathsf{P}\{g(\zeta) \in B\} = \int\limits_{x: g(x) \in B} p(x)dx, \tag{9.1.3}$$

в частности,

$$\mathsf{P}\{g(\zeta) < t\} = \int\limits_{x: g(x) < t} p(x)dx, \tag{9.1.4}$$

$$\mathsf{P}\{\zeta \in B\} = \int\limits_B p(x)dx. \tag{9.1.5}$$

9.2 Функция и плотность распределения случайного вектора

Определение. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — случайные величины на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$. Функцию $\xi = \xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ будем называть *случайным вектором, или случайной величиной со значениями в $\mathbb{R}^n$.*

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — случайные величины, то для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \ldots, \xi_n(\omega) < x_n\} \in \mathfrak{F}.$$

Определение. Функцию

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \mathsf{P}\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\},$$

определенную на $\mathbb{R}^n$, будем называть *функцией распределения* случайного вектора $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Определение. Функцию

$$\mathsf{P}_\zeta : B \to \mathsf{P}_\zeta(B) = \mathsf{P}\{\omega : \zeta(\omega) \in B\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\omega : (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in B\}, \ B \in \mathfrak{B}^n,$$

определенную на классе $\mathfrak{B}^n$ борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^n$, будем называть *распределением* случайного вектора $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Определение. Если функцию распределения случайного вектора $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ можно представить в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \dots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1, \qquad (9.2.1)$$

то будем говорить, что вектор $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ имеет *абсолютно непрерывное распределение* (*вектор абсолютно непрерывный*), а функцию $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют его *плотностью распределения, или совместной плотностью распределения случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Плотность распределения $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ случайного вектора $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ неотрицательна и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1 = 1.$$

Вычисление распределения $g(\zeta)$ по плотности распределения ζ. *Пусть* $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — *абсолютно непрерывная случайная величина со значениями в* $\mathbb{R}^n$,

$p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — ее плотность распределения, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — борелевская функция на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^l$, B — борелевское множество в $\mathbb{R}^l$. Тогда

$$\mathsf{P}\{g(\zeta) \in B\} = \int\limits_{x:g(x)\in B} p(x)dx,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{9.2.2}$$

в частности

$$\mathsf{P}\{\zeta \in B\} = \int\limits_B p(x)dx,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{9.2.3}$$

Если распределение $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ дискретное, то распределение $g(\zeta)$ вычисляется по формулам (5.1.1) и (5.1.2).

Независимые случайные величины. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ со значениями в $\mathbb{R}^1$ будем называть *независимыми*, если для произвольных $x_1, x_2, \dots \dots, x_n \in R^1$

$$\mathsf{P}\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\xi_1 < x_1\}\mathsf{P}\{\xi_2 < x_2\}\dots\mathsf{P}\{\xi_n < x_n\}.$$

Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые абсолютно непрерывные случайные величины соответственно с плотностями распределений $p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_n(x_n)$, то существует совместная плотность $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, и она равна произведению их плотностей $p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_n(x_n)$:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2)\dots p_n(x_n).$$

Пример 9.2.1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, каждая с плотностью распределения $p(x)$:*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Выписать совместное распределение случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Решение. Поскольку случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$ независимы и абсолютно непрерывные, то существует совместная плотность $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ распределения, и она равна произведению плотностей распределений $p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}\right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2\right\}.$$

Пример 9.2.2. *Пусть ξ и η — независимые случайные величины соответственно с плотностями $p_\xi(s)$ и $p_\eta(t)$. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.*

Решение. Сначала найдем функцию распределения $F_\zeta(z)$ суммы $\zeta = \xi + \eta$. По определению

$$F_\zeta(z) = \mathsf{P}\{\zeta < z\} = \mathsf{P}\{\xi + \eta < z\}.$$

Вычислим $\mathsf{P}\{\xi + \eta < z\}$. Поскольку ξ и η — независимые, то существует совместная плотность распределения $p(s,t)$ случайных величин ξ и η и

$$p(s,t) = p_\xi(s) p_\eta(t).$$

Далее воспользуемся (9.2.2), рассмотрев в качестве x пару $x = (s,t) \in \mathbb{R}^2$, в качестве $g(x) = g(s,t)$ — функцию $g(s,t) = s + t$, а в качестве множества B — промежуток $(-\infty, z)$. Имеем

$$F_\zeta(z) = \mathsf{P}\{\xi + \eta < z\} =$$

$$= \int\int\limits_{(s,t):s+t<z} p(s,t)\,ds\,dt = \int\int\limits_{(s,t):s+t<z} p_\xi(s) p_\eta(t)\,ds\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{z-t} p_\xi(s)\,ds\right) p_\eta(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{z} p_\xi(u-t)du \right) p_\eta(t)dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{z} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u-t)p_\eta(t)dt \right) du.$$

Таким образом,

$$F_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u-t)p_\eta(t)dt \right) du.$$

Поэтому по определению (см. (9.1.1)) функция

$$p(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u-t)p_\eta(t)dt \tag{9.2.4}$$

является плотностью распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

Плотность $p(u)$, определенную равенством (9.2.4), называют *сверткой* плотностей $p_\xi(t)$ и $p_\eta(t)$.

Пример 9.2.3. *Пусть ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — независимые случайные величины, каждая с функцией распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины* $\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

Решение. Обозначим $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. По определению функции распределения случайной величины

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\eta < x\}.$$

Отсюда

$$1 - F_\eta(x) = 1 - \mathsf{P}\{\eta < x\} = \mathsf{P}\{\eta \geq x\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \geq x\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\xi_1 \geq x, \xi_2 \geq x, \ldots, \xi_n \geq x\} = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{\xi_i \geq x\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1 - F(x)) = (1 - F(x))^n$$

(мы воспользовались независимостью случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$). Следовательно,

$$F_\eta(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

9.3 Абсолютно непрерывные распределения на $\mathbb{R}^1$

1. Нормальное распределение. Случайная величина ξ имеет *нормальное распределение с параметрами* $(a; \sigma^2)$ (*гауссовское распределение, распределение* $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$), если ее плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

2. Гамма-распределение. Случайная величина ξ имеет *гамма-распределение* с параметрами $(\nu; \theta), \theta > 0, \nu > 0$ (распределение $\mathsf{G}_{\nu;\theta}$), если ее плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp\{-\theta x\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Определенные далее показательное распределение, распределение Эрланга, χ^2 распределение являются частными случаями гамма-распределения.

Показательное распределение. Случайная величина ξ имеет *показательное распределение* с параметром θ, $\theta > 0$, если ее плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \theta \exp\{-\theta x\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Показательное распределение является гамма-распределением с параметрами $(1; \theta)$.

Распределение Эрланга. Случайная величина ξ имеет *распределение Эрланга* с параметрами $(m; \theta)$, $\theta > 0$, $m = 1, 2, \ldots$, если ее плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^m}{(m-1)!} x^{m-1} \exp\{-\theta x\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Распределение Эрланга с параметрами $(m; \theta)$ является гамма-распределением с параметрами $(m; \theta)$.

Распределение χ^2. Случайная величина ξ имеет *распределение* χ^2 с n степенями свободы, если ее плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Распределение χ^2 с n степенями свободы является гамма-распределением с параметрами $(n/2; 1/2)$.

3. Двустороннее показательное распределение. Случайная величина ξ имеет *двустороннее показательное распределение* с параметром θ, $\theta > 0$, если ее плотность распределения

$$p(x) = \frac{\theta}{2} \exp\{-\theta |x|\}.$$

Распределение Лапласа. Случайная величина ξ имеет *распределение Лапласа* с параметрами (θ, b), $\theta > 0$, если ее плотность распределения

$$p(x) = \frac{\theta}{2} \exp\{-\theta |x - b|\}.$$

Распределение Лапласа — это сдвинутое двустороннее показательное распределение.

4. Равномерное распределение. Случайная величина ξ имеет *равномерное распределение на промежутке* $[a;b]$ (распределение $\mathsf{U}_{a;b}$), если ее плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a;b]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Плотность равномерного на промежутке $[a,b]$ распределения удобно записывать в виде

$$p(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x).$$

5. Распределение Коши. Случайная величина ξ имеет *распределение Коши* с параметрами $(a;b)$, $a > 0$ (распределение $\mathsf{C}_{a;b}$), если ее плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x-b)^2}.$$

Случайная величина ξ имеет *распределение Коши* с параметром a, $a > 0$ (распределение $\mathsf{C}_{a;0}$), если ее плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

6. Логарифмически нормальное распределение. Случайная величина ξ имеет *логарифмически нормальное распределение с параметрами* $(\mu;\sigma^2)$, если ее плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

7. Распределение Парето. Случайная величина ξ имеет *распределение Парето* с параметрами $(\lambda;\theta)$, $\lambda > 0$, $\theta > 2$, если ее плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta\lambda^\theta}{x^{\theta+1}}, & \text{если } x > \lambda; \\ 0, & \text{если } x \le \lambda. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. Вместе с каждым из перечисленных выше распределений с плотностью $f(x)$ можно рассматривать “сдвинутое” распределение с плотностью $f(x-c)$.

9.4 Задачи

АЗ: 9.2°, 9.4°(5), 9.5, 9.7, 9.11, 9.19, 9.23, 9.28, 9.35, 9.44.

СЗ: 9.1°, 9.3°, 9.4(1, 2, 4, 6), 9.6, 9.10, 9.16, 9.24, 9.25, 9.29, 9.36, 9.38, 9.42, 9.60.

9.1°. Пусть ξ — случайная величина с плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [-1;1]; \\ 1-|x|, & \text{если } x \in [-1;1]. \end{cases}$$

Вычислить $\mathsf{P}\{\xi^2 > 1/4\}$.

9.2°. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $[-1;3]$. Вычислить $\mathsf{P}\{|\xi| \geq 1/2\}$.

9.3°. Распределение случайной величины ξ абсолютно непрерывно с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Вычислить: 1) $\mathsf{P}\{-\sqrt{3} \leq \xi \leq 1\}$; 2)$\mathsf{P}\{|\xi| \geq \sqrt{3}\}$.

9.4°. На отрезок [0; 1] наудачу бросают пару точек. Пусть ξ — координата одной точки, η — другой. Найти функции распределения случайных величин:

1) $\zeta = \max\{\xi;\eta\}$; 4) $\zeta = \xi+\eta$;
2) $\zeta = \min\{\xi;\eta\}$; 5) $\zeta = \max\{\xi^2;\eta\}$;
3) $\zeta = \xi\eta$; 6) $\zeta = |\eta-\xi|$.

9.5°. На отрезок $[0;l]$ наудачу бросают точку, ξ — ее координата. Найти функцию и плотность распределения случайной величины ξ.

9.6. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $[-1;3]$. Найти функцию и плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

9.7. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $[-2; 2]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = |\xi|$.

9.8. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $[0; 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi$ (если $\xi = 0$, то по определению $\eta = 0$).

9.9. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $[-2; 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi^2$.

9.10. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $[0; 2]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = |\xi - 1|$.

9.11. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $[0; 1]$. Найти плотность распределения случайной величины

$$\zeta = -\ln \xi.$$

9.12*. Случайная величина ξ распределена показательно с параметром λ. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/(1 - \xi)$.

9.13. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = -\xi$.

9.14. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = \operatorname{sign} \xi$.

9.15. Случайная величина ξ распределена показательно с параметром 1. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = 1 - e^{-\xi}$.

9.16. Пусть $p(x)$ — плотность распределения случайной величины ξ. Найти плотности распределений случайных величин:

$$1)\, \eta = |\xi|;\ 2)\, \eta = a\xi,\ a \neq 0;\ 3)\, \eta = -\xi;\ 4)\, \eta = \xi + b.$$

9.17. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

9.18. Случайная величина ξ распределена показательно с параметром λ. Найти плотности распределений случайных величин: 1) $\eta = |\xi - 1|$; 2) $\eta = (\xi - 1)^3$.

9.19. Функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ строго монотонна и непрерывна. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = F(\xi)$.

9.20. Пусть $p(x)$ — плотность распределения случайной величины ξ. Найти плотности распределений случайных величин: 1) $\eta = -2\xi + 1$; 2) $\eta = \xi^2$.

9.21. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Найти функции распределений случайных величин: 1) $\eta = e^{\xi}$; 2) $\eta = |\xi|$.

9.22. На отрезок $[0;1]$ наудачу бросают пару точек. Пусть ξ — координата одной, η — другой. Для $0 \le x \le 1$ найти: 1) $\mathsf{P}\{|\eta - \xi| < x\}$; 2) $\mathsf{P}\{\xi\eta < x\}$.

9.23. Пусть $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — независимые случайные величины, каждая с функцией распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

9.24. Пусть $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — независимые случайные величины соответственно с функциями распределения $F_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$. Найти функции распределений случайных величин:

$$1)\ \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\};\ 2)\ \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}.$$

9.25. Пусть $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — независимые случайные величины соответственно с плотностями распределения $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Найти плотности распределений случайных величин:

$$1)\ \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\};\ 2)\ \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}.$$

9.26. Пусть $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — независимые случайные величины, каждая с плотностью распределения $p(x)$. Найти плотности распределений случайных величин:

$$1)\ \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\};\ 2)\ \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}.$$

9.27. Случайная величина имеет своей плотностью распределения функцию $p(x) = ae^{-\lambda|x|}, \lambda > 0$. Найти:

1) коэффициент a; 2) функцию распределения случайной величины.

9.28. На отрезок $[0; 1]$ наудачу бросают точку, которая делит его на две части. Найти функцию распределения длины меньшей части.

9.29. На отрезок $[0; 1]$ наудачу бросают точку, которая делит его на две части. Найти функцию распределения длины большей части.

9.30. На отрезок $[0; T]$ наудачу бросают две точки. Найти функцию и плотность распределения расстояния между ними.

9.31*. Пусть ξ и η — независимые случайные величины соответственно с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$. Доказать, что функция распределения $Q(x)$ суммы $\xi + \eta$ есть

$$Q(x) = \mathsf{P}\{\xi + \eta < x\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-y)\mathsf{G}(dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y)\mathsf{F}(dy).$$

9.32. Пусть случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $(0; 1)$. Найти функцию распределения $\eta = 1/\xi$.

9.33. Пусть случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $(0; 1)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = 1/\xi^2$.

9.34. Случайная величина ξ называется симметрично распределенной (симметричной), если распределения случайных величин ξ и $-\xi$ совпадают.

Доказать, что $\mathsf{N}_{0;\sigma^2}$-распределенная случайная величина является симметрично распределенной.

Сформулировать условие симметричной распределенности случайной величины в терминах: а) ее функции распределения; б) ее плотности распределения.

9.35. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $[0; 1]$. Найти распределение случайной величины: $\eta = 1 - \xi$.

9.36. Случайная величина η распределена $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$. Доказать, что случайная величина $\xi = (\eta - a)/\sigma$ распределена $\mathsf{N}_{0;1}$.

9.37. Случайная величина ξ распределена $\mathsf{N}_{0;1}$. Найти распределение случайной величины $\eta = a + \sigma\xi$ $(\sigma > 0)$.

9.38. Случайная величина η распределена $\mathsf{N}_{0;1}$. Найти распределение случайной величины $\eta^+ = \max\{0, \eta\}$.

9.39. Случайная величина η распределена $\mathsf{N}_{0;\sigma^2}$. Найти распределение случайной величины $\eta^+ = \max\{0, \eta\}$.

9.40. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Найти функцию распределения $F_\eta(x)$ случайной величины $\eta = (\xi - a)^+ = \max\{0, \xi - a\}$ (a — константа).

По графику функции распределения $F(x)$ построить график функции распределения $F_\eta(x)$.

9.41. Случайная величина ξ абсолютно непрерывна с плотностью $p(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = (\xi - a)^+ = \max\{0, \xi - a\}$ (a — константа).

Является ли η абсолютно непрерывной случайной величиной?

9.42. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = \min\{\xi, L\}$ (L — константа).

9.43. Случайная величина ξ абсолютно непрерывна с плотностью $p(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = \min\{\xi, L\}$ (L — константа).

Является ли η абсолютно непрерывной случайной величиной?

9.44. Случайная величина ξ распределена равномерно на $[0; 1]$. Доказать, что случайная величина

$$\eta = 1 - \xi$$

также распределена равномерно на $[0; 1]$, и вероятность того, что значения η и ξ совпадают, равна нулю.

9.45°. Построить графики плотностей и функций распределения следующих распределений: нормального, гамма-распределения, Лапласа, Коши, равномерного. Как параметры распределений влияют на вид графиков?

9.46°. Пусть ξ распределена $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$. Вычислить:

1) $\mathsf{P}\{a - \sigma \le \xi \le a + \sigma\}$; 2) $\mathsf{P}\{a - 2\sigma \le \xi \le a + 2\sigma\}$;
3) $\mathsf{P}\{a - 3\sigma \le \xi \le a + 3\sigma\}$; 4) $\mathsf{P}\{a - 4\sigma \le \xi \le a + 4\sigma\}$.

Примечание. Воспользоваться таблицей нормального распределения (см. табл. 22.1.1).

9.47. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет показательное распределение с параметром λ.

Доказать, что случайная величина

$$\eta = \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$$

имеет показательное распределение с параметром $n\lambda$.

9.48. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет показательное распределение с параметром λ.

Найти распределение случайной величины

$$\zeta = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}.$$

9.49. Система состоит из n блоков. Пусть ξ_i — время безотказной работы i-го блока. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимы и каждая из них имеет показательное распределение с параметром λ. Система выходит из строя, если выходит из строя хотя бы один блок. Найти функцию распределения времени безотказной работы системы.

9.50. Случайные величины $\xi_i = \xi_i(\omega)$, $i = 1, 2, 3$, заданы на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$, где $\Omega = [0; 1]$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_{[0;1]}$, $\mathsf{P} = \mathsf{L}$, равенствами:

$$1)\ \xi_1 = \xi_1(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{если } \omega \in [0; 1/3); \\ \omega + 1/3, & \text{если } \omega \in [1/3; 2/3); \\ \omega - 1/3, & \text{если } \omega \in [2/3; 1]; \end{cases}$$

$$2)\ \xi_2 = \xi_2(\omega) = \begin{cases} \omega + 2/3, & \text{если } \omega \in [0; 1/3); \\ \omega, & \text{если } \omega \in [1/3; 2/3); \\ \omega - 2/3, & \text{если } \omega \in [2/3; 1]; \end{cases}$$

$$3)\ \xi_3 = \xi_3(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{если } \omega \in [0; 1/4); \\ 1/4, & \text{если } \omega \in [1/4; 2/4); \\ \omega - 1/4, & \text{если } \omega \in [2/4; 3/4); \\ 1/2, & \text{если } \omega \in [3/4; 1]. \end{cases}$$

Найти функции распределения этих случайных величин.

9.51. Случайные величины

$$\xi_i = \xi_i(\omega),\ i = 1, 2,\ \eta_j = \eta_j(\omega),\ j = 1, 2,$$

заданы на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$. Распределения ξ_1 и ξ_2 совпадают, и распределения η_1 и η_2 совпадают. Будут ли совпадать распределения случайных величин: 1) $\xi_1\eta_1$ и $\xi_2\eta_2$; 2) $\xi_1 + \eta_1$ и $\xi_2 + \eta_2$?

9.52. Привести пример случайных величин $\xi = \xi(\omega)$ и $\eta = \eta(\omega)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$, распределения которых совпадают, но

$$\mathsf{P}\{\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\} = 1.$$

9.53. Пусть $\zeta = (\xi, \eta)$ — абсолютно непрерывная случайная величина со значениями в $\mathbb{R}^2$ и $f_\zeta(x, y)$ — ее плотность распределения.

1) Доказать, что ξ и η — абсолютно непрерывные случайные величины соответственно с плотностями

$$f_\xi(u) = \int\limits_{R^1} f_\zeta(u, v)dv, \quad f_\eta(v) = \int\limits_{R^1} f_\zeta(u, v)du.$$

2) Доказать, что при каждом фиксированном y функция

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = \begin{cases} f_\zeta(x, y)/f_\eta(y), & \text{если } f_\eta(y) > 0; \\ 0, & \text{если } f_\eta(y) = 0, \end{cases}$$

является плотностью распределения вероятностей на $\mathbb{R}^1$; при каждом фиксированном x функция

$$f_{\eta|\xi}(y|x) = \begin{cases} f_\zeta(x, y)/f_\xi(x), & \text{если } f_\xi(x) > 0; \\ 0, & \text{если } f_\xi(x) = 0, \end{cases}$$

является плотностью распределения вероятностей на $\mathbb{R}^1$.

9.54. Пусть $f(t)$ — плотность распределения случайной величины ξ.

Является ли функция $f(t - a)$ (a — константа) плотностью распределения некоторой случайной величины и если да, то какой?

9.55. Пусть F — распределение случайной величины ξ, $a > 0$ — произвольное фиксированное число. Найти распределение случайной величины

1) $\xi_a = \xi I_{\{t:|t|>a\}}(\xi)$,
2) $\eta_a = \xi I_{\{t:|t|\le a\}}(\xi)$.

9.56. Пусть ξ — равномерно распределенная случайная величина. Показать, что случайная величина

$$\eta = \sigma\xi + c$$

также распределена равномерно.

9.57. Пусть ξ — случайная величина, равномерно распределенная на промежутке $[a, b]$. Показать, что случайная величина

$$\eta = \frac{\xi - (a+b)/2}{(b-a)/2\sqrt{3}}$$

равномерно распределена на промежутке $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

9.58. Пусть случайная величина ξ распределена нормально. Показать, что случайная величина

$$\eta = c\xi + b$$

также нормально распределена.

9.59. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Коши. Показать, что случайная величина

$$\eta = c\xi + b$$

также имеет распределение Коши.

9.60. Пусть $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — независимые случайные величины, каждая с плотностью распределения $p(x)$:

$$1)\, p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a; b]; \end{cases}$$

$$2)\, p(x) = \begin{cases} \theta \exp\{-\theta x\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0; \end{cases}$$

$$3)\, p(x) = \frac{1}{2a} \exp\left\{-\frac{1}{a}|x-b|\right\};$$

$$4)\, p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \exp\left\{-\dfrac{1}{a}(x-b)\right\}, & \text{если } x > b; \\ 0, & \text{если } x \le b. \end{cases}$$

Выписать совместную плотность распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

9.61°. По плотности распределения случайной величины найти ее функцию распределения, если случайная величина:

1) нормально распределена с параметрами $(a; \sigma^2)$;
2) равномерно распределена на промежутке $[a; b]$;
3) имеет гамма-распределение;
4) имеет распределение Коши;
5) имеет распределение Эрланга.

Глава 10

Математическое ожидание

10.1 Определения, свойства, вычисление

Распределение случайной величины часто можно описать несколькими числовыми характеристиками. Важнейшими из них являются математическое ожидание и дисперсия (см. также п. 6.1 в гл. 6).

Пусть $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина со значениями в $\mathbb{R}^1$ на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$.

О п р е д е л е н и е. *Математическим ожиданием* $\mathsf{M}\xi$ неотрицательной случайной величины ξ будем называть

$$\mathsf{M}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathsf{P}(d\omega) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{2^n n} \frac{j-1}{2^n}\mathsf{P}(A_{nj}) + n\mathsf{P}(B_n)\right),$$

где

$$A_{nj} = \left\{\omega : \frac{j-1}{2^n} \le \xi(\omega) < \frac{j}{2^n}\right\},\ j = 1, 2, \ldots, 2^n n,$$

$$B_n = \{\omega : \xi(\omega) \ge n\},\ n = 1, 2, \ldots$$

Любую случайную величину ξ можно представить в виде разности неотрицательных случайных величин

$\xi^+ = \max\{0, \xi\}$ и $\xi^- = \max\{0, -\xi\}$, а именно

$$\xi = \xi^+ - \xi^-.$$

Математическое ожидание $\mathsf{M}\xi$ случайной величины ξ, принимающей значения обоих знаков, определяется равенством

$$\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\xi^+ - \mathsf{M}\xi^-,$$

если только $\mathsf{M}\xi^+$ и $\mathsf{M}\xi^-$ не равны $+\infty$.

Свойства математического ожидания:

1. *Математическое ожидание константы равно этой же константе:*

$$\mathsf{M}c = c \ (c - \textit{константа}).$$

2. *Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:*

$$\mathsf{M}(\xi + \eta) = \mathsf{M}\xi + \mathsf{M}\eta.$$

3. *Константа выносится из-под знака математического ожидания:*

$$\mathsf{M}a\xi = a\mathsf{M}\xi.$$

4. *Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:*

$$\mathsf{M}\xi\eta = \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta.$$

5. *Если* $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ *и* $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, *то*

$$\mathsf{M}(\xi I_A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{M}(\xi I_{A_i}).$$

(*свойство счетной аддитивности математического ожидания*)

Вычисление математического ожидания случайной величины. Математическое ожидание случайной величины (и функции от нее), если только оно существует, всегда можно вычислить по распределению случайной величины.

Т е о р е м а 10.1.1. *Если случайная величина* $\xi = \xi(\omega)$ *со значениями в* $\mathbb{R}^1$ *абсолютно непрерывна и* $p(x)$ — *ее плотность распределения, то для любой борелевской функции* $g = g(x)$ *на* $\mathbb{R}^1$ *со значениями в* $\mathbb{R}^1$

$$\mathsf{M}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx \tag{10.1.1}$$

в предположении существования интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx$.

В частности,

$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \tag{10.1.2}$$

в предположении существования интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$.

Если случайная величина $\xi = \xi(\omega)$ *со значениями в* $\mathbb{R}^1$ *дискретна и*

$$\mathsf{P}_\xi : x_i \to \mathsf{P}_\xi(x_i),\ x_i \in X,$$

— *ее распределение, то для любой борелевской функции* $g = g(x)$ *на* $\mathbb{R}^1$ *со значениями в* $\mathbb{R}^1$

$$\mathsf{M}g(\xi) = \sum_{x_i} g(x_i)\mathsf{P}_\xi(x_i) \tag{10.1.3}$$

в предположении, что ряд $\sum\limits_{x_i} g(x_i)\mathsf{P}_\xi(x_i)$ *абсолютно сходится. В частности, в предположении абсолютной сходимости ряда* $\sum\limits_{x_i} x_i\mathsf{P}_\xi(x_i)$

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{x_i} x_i\mathsf{P}_\xi(x_i). \tag{10.1.4}$$

Теорема о вычислении $\mathsf{M}g(\xi)$ по распределению имеет место и для случайных величин со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 10.1.2. *Если случайная величина* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *со значениями в* $\mathbb{R}^n$ *абсолютно непрерывна и* $p_\xi(x) = p_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — *ее плотность распределения, то для любой борелевской функции* $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *на* $\mathbb{R}^n$ *со значениями в* $\mathbb{R}^1$

$$\mathsf{M}g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)p_\xi(x)dx,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{10.1.5}$$

в предположении существования интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)p_\xi(x)dx$. *В координатной форме записи*

$$\mathsf{M}g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)p_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)d(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Дисперсия. *Дисперсией* $\mathsf{D}\xi$ случайной величины ξ будем называть $\mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2$ (если $\mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2 < \infty$), т. е.

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2.$$

Свойства дисперсии:

1. *Дисперсия константы равна нулю:*

$$\mathsf{D}c = 0 \ (c - \textit{константа}).$$

2. *Константа выносится из-под знака дисперсии с квадратом:*

$$\mathsf{D}a\xi = a^2\mathsf{D}\xi.$$

3. *Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:*

$$\mathsf{D}(\xi + \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta.$$

Пример 10.1.1. *На отрезок* $[0;1]$ *наудачу бросают точку. Она делит отрезок на две части. Найти распределение и вычислить математическое ожидание длины окружности, радиус которой равен длине большей части отрезка.*

Решение. Пусть ξ — координата наудачу брошенной на отрезок $[0;1]$ точки, тогда $\eta = \max\{\xi, 1-\xi\}$ — длина большей части отрезка, а $\zeta = 2\pi\eta$ — длина окружности, радиус которой равен η.

Сначала найдем функцию распределения случайной величины $\eta = \max\{\xi, 1-\xi\}$. Очевидно, при $x < 1/2$

$$\mathsf{P}\{\eta < x\} = 0,$$

при $x > 1$

$$\mathsf{P}\{\eta < x\} = 1.$$

А при $1/2 < x \leq 1$ имеем

$$\mathsf{P}\{\eta < x\} = \mathsf{P}\{\max\{\xi, 1-\xi\} < x\} = \mathsf{P}\{\xi < x, 1-\xi < x\} =$$

$$= \mathsf{P}\{1-x < \xi < x\} = (x-(1-x))/(1-0) = 2x-1$$

($\mathsf{P}\{1-x < \xi < x\}$ вычислена как геометрическая вероятность, события “брошенная наудачу на отрезок $[0;1]$ точка попала в промежуток $[1-x, x]$”. Таким образом, функцией распределения η является

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1/2; \\ 2x-1, & \text{если } 1/2 < x \leq 1; \\ 1, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

(η распределена равномерно на отрезке $[1/2;1]$). Отсюда получаем функцию распределения ζ:

$$F_\zeta(x) = \mathsf{P}\{\zeta < x\} =$$

$$= \mathsf{P}\{2\pi\eta < x\} = \mathsf{P}\left\{\eta < \frac{x}{2\pi}\right\} = F_\eta\left(\frac{x}{2\pi}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } x/(2\pi) \leq 1/2; \\ 2\left(\frac{x}{2\pi}\right) - 1, & \text{если } 1/2 < x/(2\pi) \leq 1; \\ 1, & \text{если } x/(2\pi) > 1. \end{cases}$$

Или

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le \pi; \\ \dfrac{x}{\pi} - 1, & \text{если } \pi < x \le 2\pi; \\ 1, & \text{если } x > 2\pi. \end{cases}$$

Далее, поскольку η равномерно распределена на отрезке $[1/2; 1]$, то

$$\mathsf{M}\zeta = \mathsf{M}2\pi\eta = 2\pi\mathsf{M}\eta = 3\pi/2.$$

Заметим, что согласно (10.1.1) $\mathsf{M}\zeta$ можно вычислить как математическое ожидание функции

$$\zeta = 2\pi \max\{\xi, 1-\xi\}$$

от случайной величины ξ по ее распределению (равномерному на промежутке $[0,1]$):

$$\mathsf{M}\zeta = \mathsf{M}2\pi\max\{\xi, 1-\xi\} = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\max\{x, 1-x\}p_\xi(x)dx =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^1 \max\{x, 1-x\}dx = 3\pi/2.$$

П р и м е р 10.1.2. *Пусть случайная величина ξ распределена показательно с параметром θ.*

Найти распределение случайной величины $\eta = [\xi]$, вычислить $\mathsf{M}\eta$ ($[x]$ — целая часть x).

Р е ш е н и е. Случайная величина $\eta = [\xi]$ принимает значения $0, 1, 2, \ldots$ (является дискретной). Найдем ее распределение:

$$\mathsf{P}_\eta(k) = \mathsf{P}\{\eta = k\} = \mathsf{P}\{[\xi] = k\} = \mathsf{P}\{k \le \xi < k+1\} =$$

$$= \int\limits_k^{k+1} \theta e^{-\theta x}dx = e^{-\theta k}(1 - e^{-\theta}) = p(1-p)^k,$$

где $p = 1 - e^{-\theta}$. Так что если случайная величина ξ распределена показательно с параметром θ, то случайная величина $\eta = [\xi]$ имеет геометрическое распределение (с параметром $p = 1 - e^{-\theta}$).

По известному распределению случайной величины η можем вычислить ее математическое ожидание (см. формулу (6.1.2) и задачу 6.18):

$$\mathsf{M}\eta = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathsf{P}_\eta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = \frac{1-p}{p} = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}.$$

П р и м е р 10.1.3. *Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной нормально с параметрами* $(a; \sigma^2)$.

Р е ш е н и е. Плотность нормально распределенной с параметрами $(a; \sigma^2)$ случайной величины ξ

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Вычислим $\mathsf{M}(\xi - a)$, воспользовавшись формулой (10.1.1) (при этом выполним замену $(x-a)/\sigma = t$):

$$\mathsf{M}(\xi - a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)p(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a}{\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right\}dx =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \lim_n \int\limits_{[-n,n]} t \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = 0,$$

последний интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку. Таким образом, $\mathsf{M}(\xi - a) = 0$, а следовательно,

$$\mathsf{M}\xi = a.$$

Далее,

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2 = \mathsf{M}(\xi - a)^2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

После замены переменной $(x-a)/\sigma = t$ получим

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, d\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = \sigma^2$$

(последний интеграл как интеграл Эйлера—Пуассона равен $\sqrt{2\pi}$). Так что

$$\mathsf{D}\xi = \sigma^2.$$

Пример 10.1.4. *Вычислить математическое ожидание, второй момент и дисперсию случайной величины, имеющей гамма-распределение с параметрами $(\nu; \theta)$:*

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp\{-\theta x\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

Решение. По известной плотности $p(x)$ случайной величины ξ согласно формуле (10.1.2) получим

$$\mathsf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x\frac{\theta^{\nu}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}\exp\{-\theta x\}dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\theta\Gamma(\nu)}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\theta^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}x^{\nu}\exp\{-\theta x\}dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\theta\Gamma(\nu)}\cdot 1 = \frac{\nu\Gamma(\nu)}{\theta\Gamma(\nu)} = \frac{\nu}{\theta}.$$

Мы воспользовались тем, что интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\theta^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}x^{\nu}\exp\{-\theta x\}\,dx$$

равен единице как интеграл от плотности гамма-распределения с параметрами $(\nu+1, \theta)$.

Аналогично

$$\mathsf{M}\xi^2 = \frac{\nu(\nu+1)}{\theta^2}.$$

Отсюда

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = \frac{\nu}{\theta^2}.$$

При вычислении математических ожиданий случайных величин часто бывает полезным следующее утверждение.

Пример 10.1.5. *Если плотность $f(x)$ абсолютно непрерывной случайной величины ξ симметрична относительно прямой $x = a$, т. е. $f(a-x) = f(a+x)$, то*

$$\mathsf{M}\xi = a$$

в предположении, что $\mathsf{M}\xi$ конечно.

Доказательство. Симметричность плотности $f(x)$ относительно прямой $x = a$:

$$f(a+t) = f(a-t),\ t \in \mathbb{R}^1,$$

означает, что функция $\varphi(t) = f(a+t)$ четная.

Далее,

$$\mathsf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену $x = t + a$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (t+a)f(t+a)dt =$$

$$= a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t+a)dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf(t+a)dt = a \cdot 1 + 0 = a,$$

интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tf(t+a)dt$ равен нулю как интеграл от нечетной функции $tf(t+a)$ по симметричному промежутку.

Как следствие доказанного утверждения получаем математические ожидания перечисленных далее случайных величин со значениями в $\mathbb{R}^1$, плотности которых симметричны относительно прямой $x = a$ (при тех или иных значениях a).

1° Математическое ожидание нормально распределенной с параметрами (a, σ^2) случайной величины равно a — ее плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},\ x \in \mathbb{R}^1,$$

симметрична относительно прямой $x = a$;

2° Математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение Лапласа с параметрами (μ, θ), равно μ — ее плотность

$$f(x) = \frac{\theta}{2}\exp\{-\theta|x-\mu|\},\ x \in \mathbb{R}^1,$$

симметрична относительно прямой $x = \mu$;

3° Математическое ожидание равномерно распределенной на промежутке $[a, b]$ случайной величины равно $(a+b)/2$ — ее плотность

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

симметрична относительно прямой $x = (a+b)/2$.

Пример 10.1.6. *Если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$ и математическим ожиданием a, то $f(x-c)$ — плотность распределения случайной величины $\eta = \xi + c$ и*

$$\mathsf{M}\eta = a + c.$$

Решение. Функция распределения случайной величины η:

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\xi + c < x\} = F_\xi(x-c),$$

плотность распределения

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx}F_\eta(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(x-c) = f_\xi(x-c) = f(x-c).$$

Равенство

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}(\xi + c) = a + c$$

следует из свойства линейности математического ожидания.

Пусть, к примеру, ξ — показательно распределенная с параметром θ случайная величина, ее плотность

$$f(x) = \begin{cases} \theta \exp\{-\theta x\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0, \end{cases}$$

$$\mathsf{M}\xi = 1/\theta.$$

Тогда

$$f(x) = \begin{cases} \theta \exp\{-\theta (x-b)\}, & \text{если } x > b; \\ 0, & \text{если } x \le b, \end{cases}$$

— плотность распределения случайной величины $\eta = \xi + b$ и

$$\mathsf{M}\xi = 1/\theta + b.$$

10.2 Задачи

АЗ: $10.2^\circ(1), 10.4, 10.6^\circ(1), 10.7, 10.12, 10.13, 10.16(2), 10.19(1а, 3б), 10.20(5), 10.21, 10.42, 10.43.$

СЗ: $10.1^\circ(1), 10.2^\circ(2), 10.6^\circ(2,3), 10.8, 10.10(1), 10.16(1), 10.14, 10.17(2), 10.19(1б, 3а), 10.20(1,2), 10.22(2,3), 10.26, 10.41, 10.45.$

10.1°. Пусть ξ — случайная величина, равномерно распределенная на промежутке: 1) $[-a; a]$; 2) $[a; b]$. Вычислить $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

10.2°. Случайная величина ξ распределена равномерно на промежутке $[0; 1]$. Вычислить математическое ожидание случайной величины η:

1) $\eta = \ln(1/\xi)$; 2) $\eta = \sin^2 \pi\xi$; 3) $\eta = e^{\xi}$.

10.3°. Случайная величина ξ распределена равномерно на промежутке $[a; b]$. Вычислить:

1) $\mathsf{M}\xi^2$, если $a = 0$, $b = 3$;

2) $\mathsf{M}\xi e^{-\xi}$, если $a = 0$, $b = 1$;

3) $\mathsf{M}(\xi - 1)^2$, если $a = 1$, $b = 4$;

4) $\mathsf{M}\xi e^{|\xi|}$, если $a = -1$, $b = 1$;

10.4. Пусть ξ — случайная величина с плотностью распределения
$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$
Вычислить 1) $\mathsf{M}\min\{|\xi|, 1\}$; 2) $\mathsf{M}\min\{|\xi|, \sqrt{3}\}$.

10.5. Пусть ξ — нормально распределенная случайная величина с параметрами $(0; \sigma^2)$. Вычислить $\mathsf{M}e^{\xi}$.

10.6°. Пусть ξ — случайная величина с плотностью распределения
$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$
Вычислить математическое ожидание случайной величины η :
$$1)\ \eta = (\xi^2+1)I_{[0;\sqrt{3}]}(\xi); \quad 2)\ \eta = \xi^2 I_{[1;\sqrt{3}]}(\xi)\ ;$$
$$3)\ \eta = I_{[1/3;3]}(\xi^2); \qquad 4)\ \eta = I_{[-1;1]}(\xi),$$
где $I_A(x)$ — индикатор множества A — функция, принимающая на A значение 1, а на $\overline{A}$ — значение 0.

10.7. Пусть ξ имеет показательное распределение с параметром λ. Вычислить:
$$1)\,\mathsf{M}\xi;\ 2)\,\mathsf{D}\xi;\ 3)\,\mathsf{P}\{\xi > 1\};\ 4)\,\mathsf{M}\xi^k.$$

10.8. Длительность работы электронной лампы (единица измерения времени — сутки) — случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}003$. Через год лампу меняют, даже если она не вышла из строя. Найти математическое ожидание времени работы лампы.

10.9. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения $\zeta = \xi\eta$ независимых случайных величин ξ и η с равномерными распределениями на отрезках $[0; 1]$ и $[1; 3]$ соответственно.

10.10. Вычислить $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{M}\xi^2$ для случайной величины ξ с плотностью распределения
$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [a, a+2); \\ x-a, & \text{если } x \in [a, a+1); \\ -x+a+2, & \text{если } x \in [a+1, a+2). \end{cases}$$

10.11. Пусть ξ — случайная величина с плотностью распределения

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Вычислить $\mathsf{M}I_{[0;4]}(\xi^2)$.

10.12. Плотность распределения случайной величины ξ

$$p(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}, \ \lambda > 0$$

(двустороннее показательное распределение с параметром λ).

Вычислить $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

10.13. Из точки A, равномерно распределенной на окружности радиуса R с центром в начале координат, проведена касательная к окружности. Найти функцию распределения и плотность распределения длины ξ отрезка касательной между точкой A и точкой пересечения этой касательной с осью Ox. Что можно сказать о существовании $\mathsf{M}\xi$?

10.14. Точка P равномерно распределена в круге с центром в начале координат радиуса R. Пусть η — расстояние от точки P до центра круга. Найти функцию распределения $F(x)$ и плотность распределения $p(x)$ случайной величины η. Построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$. Вычислить $\mathsf{M}\eta$ и $\mathsf{D}\eta$.

10.15. Точка A равномерно распределена на окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть ξ — проекция точки A на ось Ox. Найти: 1) функцию распределения $|\xi|$; 2) плотность распределения $|\xi|$; 3) $\mathsf{M}|\xi|$; 4) $\mathsf{P}\{|\xi| > 1/2\}$.

10.16. Длина стороны квадрата ξ — случайная величина,

1) распределенная равномерно на промежутке $[a;b]$, $a > 0$, $a < b$;

2) имеющая гамма-распределение с параметрами $(\nu;\theta)$;

3) распределенная показательно с параметром λ.

Найти распределение случайной величины η — площади квадрата со стороной ξ — и вычислить ее математическое ожидание.

10.17. Радиус окружности ξ — случайная величина,

1) распределенная равномерно на промежутке $[a; b]$, $a, b > 0$, $a < b$;

2) имеющая гамма-распределение с параметрами $(\nu; \theta)$;

3) распределенная показательно с параметром λ.

Найти распределение случайной величины η — длины окружности радиуса ξ — и вычислить ее математическое ожидание.

10.18. Длина ребра куба ξ — случайная величина, распределенная:

1) равномерно на промежутке $[a; b]$, $a > 0$, $a < b$;

2) показательно с параметром λ.

Найти распределение случайной величины η — объема куба с ребром ξ, вычислить математическое ожидание η.

10.19. На отрезок $[0; 1]$ наудачу бросают точку. Она делит его на две части. Найти распределение и вычислить математическое ожидание случайной величины η.

1. Длины окружности, радиус которой равен длине: а) меньшей части отрезка; б) большей части отрезка.

2. Площади круга, радиус которого равен длине: а) меньшей части отрезка; б) большей части отрезка.

3. Площади квадрата со стороной, равной длине: а) меньшей части отрезка; б) большей части отрезка.

4. Объема куба с ребром, равным длине: а) меньшей части отрезка; б) большей части отрезка.

10.20. Пусть ξ и η — независимые случайные величины. Вычислить математическое ожидание случайных величин: 1° $\min\{\xi, \eta\}$; 2° $\max\{\xi, \eta\}$; 3° $\xi\eta$; 4° $\eta/(\xi + 1)$; 5° $\eta \exp\{\xi\}$; 6° $\exp\{-\min\{\xi, \eta\}\}$, если: а) ξ и η распределены равномерно на промежутке $[0; 1]$; б) ξ распределена равномерно на промежутке $[0; 1]$, η — на промежутке $[0; 2]$; в) ξ распределена равномерно на промежутке $[0; 1]$, η имеет показательное распределение с параметром λ; г) ξ и η имеют показательное распределение с параметром λ (для 1°, 2°, 3°, 6°).

10.21. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет своей плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le \alpha; \\ \exp\{\alpha - x\}, & \text{если } x > \alpha. \end{cases}$$

Вычислить $\mathsf{M} \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

10.22. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых распределена равномерно на отрезке $[a; b]$. Вычислить математические ожидания случайных величин:

1) $\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$; 2) $\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$; 3) $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$.

10.23. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет своей плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [\theta - h; \theta + h]; \\ 1/2h, & \text{если } x \in [\theta - h; \theta + h]. \end{cases}$$

Вычислить математические ожидания случайных величин:

$$1)\ \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\};\ 2)\ \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\};$$

$$3)\ (\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} - \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\})/2.$$

10.24. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет своей плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le \theta; \\ \frac{1}{\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{\alpha}(x - \theta)\right\}, & \text{если } x > \theta. \end{cases}$$

Вычислить математические ожидания случайных величин:

$$1)\ \overline{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i;\ 2)\ \min\{\xi_i\};$$

$$3)\ \hat{\theta}_1 = \min\{\xi_i\} - \frac{\overline{\xi} - \min\{\xi_i\}}{n};\ 4)\ \hat{\theta}_2 = \overline{\xi} - \hat{\theta}_1.$$

10.25. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ распределены показательно с параметром $1/\theta$. Вычислить математическое ожидание случайной величины $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$.

10.26. На отрезок $[0;T]$ наудачу бросают две точки. Пусть ξ — расстояние между ними. Найти функцию распределения и плотность распределения ξ, вычислить $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{M}\xi^n$.

10.27. Точка P равномерно распределена на окружности

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Пусть η — длина проекции радиус-вектора $\overline{OP}$ точки P на ось Ox. Найти плотность распределения и математическое ожидание случайной величины η.

10.28*. На окружности радиуса R наудачу выбирают две точки. Найти функцию распределения расстояния η между ними и вычислить $\mathsf{M}\eta$.

10.29. На отрезок оси ординат с концами $(0;0)$ и $(0;R)$ наудачу брошена точка. Через нее проведена хорда окружности $x^2 + y^2 = R^2$ перпендикулярно к оси Oy. Найти функцию распределения длины этой хорды.

10.30*. Пусть $A_x = \{(u,v) : u + v < x\}$ — множество из $\mathbb{R}^2$, x — произвольное, но фиксированное число, $\zeta = (\xi, \eta)$ — случайная величина со значениями в $\mathbb{R}^2$.

Вычислить $\mathsf{M}I_{A_x}(\xi, \eta)$, если известно:

1) распределения F и G независимых случайных величин ξ и η;

2) плотности f и g абсолютно непрерывных независимых случайных величин ξ и η.

10.31. Случайная величина η распределена $\mathsf{N}_{0;1}$. Вычислить математическое ожидание случайной величины $\eta^+ = \max\{0, \eta\}$.

10.32. Случайная величина η распределена $\mathsf{N}_{0;\sigma^2}$. Вычислить математическое ожидание случайной величины $\eta^+ = \max\{0, \eta\}$.

10.33. Вычислить математическое ожидание, второй момент и дисперсию случайной величины ξ с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \theta \exp\{-\theta x\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0, \end{cases}$$

параметр $\theta > 0$ ($p(x)$ — плотность показательного распределения с параметром θ).

10.34. Вычислить математическое ожидание, второй момент и дисперсию случайной величины ξ с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^m}{(m-1)!} x^{m-1} \exp\{-\theta x\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

параметр $\theta > 0$ ($p(x)$ — плотность распределения Эрланга с параметрами $(m; \theta)$, $m = 1, 2, \ldots$).

10.35. Вычислить математическое ожидание, второй момент и дисперсию случайной величины ξ с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$

($p(x)$ — плотность χ^2-распределения с n степенями свободы).

10.36. Вычислить математическое ожидание, второй момент и дисперсию случайной величины ξ с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

параметр $\sigma > 0$ ($p(x)$ — плотность логарифмически нормального распределения с параметрами $(\mu; \sigma^2)$).

10.37. Вычислить математическое ожидание, второй момент и дисперсию случайной величины ξ с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta\lambda^\theta}{x^{\theta+1}}, & \text{если } x > \lambda > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq \lambda, \end{cases}$$

параметр $\theta > 2$ ($p(x)$ — плотность распределения Парето с параметрами $(\lambda; \theta)$).

10.38. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причем ξ распределена равномерно на промежутке $[1;2]$, η имеет показательное распределение с параметром θ. Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин: 1) $\zeta_1 = \xi\eta$; 2) $\zeta_2 = \xi + \eta$; 3) $\zeta_3 = \eta/\xi$.

10.39. Пусть $\zeta = (\xi, \eta)$ — абсолютно непрерывный вектор с плотностью $f_\zeta(x, y)$. Вычислить $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{M}\eta$.

10.40. Случайная величина ξ абсолютно непрерывна с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{a^2}(a - |x - b|)I_{[b-a,b+a]}(x), \ a > 0.$$

Вычислить $\mathsf{M}\xi$.

10.41. Случайная величина ξ абсолютно непрерывна с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{a^2}|x - b|I_{[b-a,b+a]}(x), \ a > 0.$$

Вычислить $\mathsf{M}\xi$.

10.42. Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \ldots,$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечными моментами второго порядка, ν — пуассоновская случайная величина, не зависящая от случайных величин ξ_j, $j = 1, 2, \ldots$

Случайная величина S_ν определена равенством

$$S_\nu = \sum_{j=0}^{\nu} \xi_j, \ \xi_0.$$

Вычислить $\mathsf{M}S_\nu$, $\mathsf{D}S_\nu$.

10.43. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, каждая с функцией распределения $F(x)$.

Функция $\hat{F}_n(x)$, определенная на $\mathbb{R}^1$ равенством

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{(-\infty,x)}(\xi_k),$$

называется эмпирической функцией распределения, построенной по $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

При каждом фиксированном x эмпирическая функция распределения $\hat{F}_n(x)$, как функция от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, является случайной величиной.

1) Найти распределение $\hat{F}_n(x)$.

2) Доказать, что

$$\mathsf{M}\hat{F}_n(x) = F(x),$$

$$\mathsf{D}\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}F(x)(1 - F(x)).$$

10.44. Используя результат, полученный в примере 10.1.5, найти математические ожидания случайных величин, имеющих распределения: нормальное, равномерное, Лапласа.

10.45. Случайная величина ξ с распределением F имеет конечное математическое ожидание $\mathsf{M}\xi = a$.

Пусть

$$\xi_n = \xi I_{\{y:|y|\leq n\}}(\xi), \ \eta_n = \xi I_{\{y:|y|>n\}}(\xi).$$

Вычислить

$$\mathsf{M}\eta_n, \ \mathsf{M}\xi_n.$$

Доказать, что

$$\lim_n \mathsf{M}\eta_n = 0, \ \lim_n \mathsf{M}\xi_n = \mathsf{M}\xi = a.$$

Глава 11

Свертка

11.1 Свертка вероятностных распределений

О п р е д е л е н и е. *Вероятностным распределением* на $\mathbb{R}^1$ будем называть неотрицательную, нормированную, счетноаддитивную функцию F, заданную на σ-алгебре $\mathfrak{B}^1$ борелевских множеств $\mathbb{R}^1$.

Другими словами, вероятностное распределение на $\mathbb{R}^1$ — это вероятность на σ-алгебре $\mathfrak{B}^1$ (см. разд. 7.2 в гл. 7).

О п р е д е л е н и е. Пусть F — вероятностное распределение на $\mathbb{R}^1$. Функцию точки $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, определенную равенством

$$F(x) = \mathsf{F}((-\infty, x)),$$

будем называть *функцией распределения* F.

Распределение F однозначно задается своей функцией распределения $F(x)$.

О п р е д е л е н и е. Если функцию распределения $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)dy,$$

то распределение F называют *абсолютно непрерывным*, а функцию f — *плотностью распределения* F, при этом

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Вероятностное распределение F будем называть *атомическим* (*дискретным*), если существует не более чем счетное множество $X \subset \mathbb{R}^1$ точек x_i, таких, что

$$\mathsf{F}(\{x_i\}) > 0, \ \sum_{x_i \in X} \mathsf{F}(\{x_i\}) = 1.$$

Точки x_i будем называть *атомами распределения* F и будем говорить, что распределение F сосредоточено на множестве X.

Напомним, что интеграл Лебега

$$\int\limits_X g(y)\mathsf{F}(dy)$$

от функции $g(y)$ по распределению F равен

$$\int\limits_X g(y)f(y)dy,$$

если F — абсолютно непрерывное распределение с плотностью f, и

$$\sum_{x_i \in X} g(x_i)\mathsf{F}(\{x_i\}),$$

если F — атомическое распределение, сосредоточенное на множестве X.

Свертки. Пусть φ — борелевская функция на $\mathbb{R}^1$ со значениями в $\mathbb{R}^1$ и F — вероятностное распределение на $\mathbb{R}^1$.

Определение. *Сверткой* функции φ с вероятностным распределением F будем называть функцию $u(x)$, определенную для каждого $x \in \mathbb{R}^1$ равенством

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi(x-y)\mathsf{F}(dy).$$

Обозначать свертку φ с F будем так:

$$u = \mathsf{F} * \varphi.$$

Порядок компонент в свертке $\mathsf{F} * \varphi$ существенен. Символ $\varphi * \mathsf{F}$, вообще говоря, смысла не имеет.

Пример 11.1.1. *Пусть* $\varphi(x) = I_{[0;1)}(x)$, F — *атомическое распределение:*

$$\mathsf{F}(\{i\}) = 1/3, \ i = 0, 1, 2.$$

Найти $u = \mathsf{F} * \varphi$.

Решение. По определению свертки

$$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-y)\mathsf{F}(dy) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_{[0;1)}(x-y)\mathsf{F}(dy) =$$

$$= I_{[0;1)}(x)\cdot\mathsf{F}(\{0\}) + I_{[0;1)}(x-1)\cdot\mathsf{F}(\{1\}) + I_{[0;1)}(x-2)\cdot\mathsf{F}(\{2\}) =$$

$$= I_{[0;1)}(x)\cdot\frac{1}{3} + I_{[0;1)]}(x-1)\cdot\frac{1}{3} + I_{[0;1)}(x-2)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot I_{[0;3)}(x).$$

Свертка функции φ с распределением F определяется и для распределений F, отличных от вероятностных.

Свертка $\mathsf{F} * \varphi$ *функции* φ *с вероятностным распределением* F

1) *ограничена, если* φ *ограничена;*

2) *ограничена и непрерывна, если* φ *ограничена и непрерывна;*

3) *является вероятностной функцией распределения, если* φ — *вероятностная функция распределения.*

Определение. *Сверткой вероятностных распределений* G *и* F будем называть вероятностное распределение Q, функция распределения $Q(x)$ которого является сверткой функции распределения $G(x)$ с распределением F:

$$Q(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} G(x-y)\mathsf{F}(dy).$$

Обозначать свертку вероятностного распределения G с вероятностным распределением F будем символом $\mathsf{F} * \mathsf{G}$.

В классе вероятностных распределений операция свертки коммутативна и ассоциативна. Другими словами, если F, G, Q *— вероятностные распределения, то*

$$\mathsf{F} * \mathsf{G} = \mathsf{G} * \mathsf{F},$$

$$(\mathsf{F} * \mathsf{G}) * \mathsf{Q} = \mathsf{F} * (\mathsf{G} * \mathsf{Q}).$$

Заметим, что если распределение F абсолютно непрерывно и f — его плотность, то

$$Q(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} G(x-y)\mathsf{F}(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} G(x-y)f(y)dy. \qquad (11.1.1)$$

Теорема 11.1.1 (о свертке атомических распределений). *Свертка*

$$\mathsf{Q} = \mathsf{F} * \mathsf{G}$$

атомических вероятностных распределений G *и* F, *сосредоточенных на множестве* $\{0, 1, \dots\}$, *является атомическим распределением, сосредоточенным на том же множестве, причем если*

$$\mathsf{G}(\{i\}) = g_i,\ i = 0, 1, \dots;\ \mathsf{F}(\{j\}) = f_j,\ j = 0, 1, \dots,$$

то

$$\mathsf{Q}(\{k\}) = q_k = \sum_{j=0}^{k} g_{k-j} f_j,\ k = 0, 1, \dots$$

Теорема 11.1.2. *Свертка* $\mathsf{V} = \mathsf{F} * \mathsf{G}$ *абсолютно непрерывного вероятностного распределения* G *с вероятностным распределением* F *является абсолютно непрерывным распределением и его плотность* v *равна свертке плотности* g *абсолютно непрерывного распределения* G *с распределением* F:

$$v(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x-t)\mathsf{F}(dt). \qquad (11.1.2)$$

В частности, *свертка абсолютно непрерывных вероятностных распределений* G *и* F *соответственно с плотностями* g *и* f *является абсолютно непрерывным распределением, и его плотность* v *равна свертке плотностей* g *и* f*:*

$$v(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x-y)f(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x-y)g(y)dy, \quad (11.1.3)$$

свертку плотностей g и f будем обозначать так:

$$v = f * g = g * f.$$

Пример 11.1.2. *Доказать, что класс гамма-распределений замкнут относительно операции свертки:*

$$\mathsf{G}_{\nu;\theta} * \mathsf{G}_{\mu;\theta} = \mathsf{G}_{\nu+\mu;\theta},$$

или, в терминах плотностей:

$$f_{\nu;\theta} * f_{\mu;\theta} = f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta} = f_{\nu+\mu;\theta}.$$

Решение. Плотность гамма-распределения с параметрами $(\nu;\theta)$, $\theta > 0$, $\nu > 0$,

$$f_{\nu;\theta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp\{-\theta x\}, & \text{если } x > 0; \\ \qquad 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

При $x \le 0$ равенство

$$f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta}(x) = f_{\nu+\mu;\theta}(x)$$

следует из определения гамма-распределения.

При $x > 0$ имеем

$$f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta}(x) = \int\limits_0^{+\infty} f_{\nu;\theta}(x-y) f_{\mu;\theta}(y)dy =$$

$$= \int_0^x f_{\nu;\theta}(x-y) f_{\mu;\theta}(y) dy =$$

$$= \int_0^x \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} (x-y)^{\nu-1} e^{-\theta(x-y)} \frac{\theta^\mu}{\Gamma(\mu)} y^{\mu-1} e^{-\theta y} dy =$$

$$= \frac{\theta^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} e^{-\theta x} \int_0^x (x-y)^{\nu-1} y^{\mu-1} dy.$$

Выполнив в последнем интеграле замену $y = xt$, получим:

$$\frac{\theta^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} e^{-\theta x} \int_0^x (x-y)^{\nu-1} y^{\mu-1} dy =$$

$$= \frac{\theta^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu+\mu)} x^{\nu+\mu-1} e^{-\theta x} \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{\nu-1} dt =$$

$$= f_{\nu+\mu;\theta}(x) \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{\nu-1} dt.$$

Итак,

$$f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta}(x) = f_{\nu+\mu;\theta}(x) \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{\nu-1} dt.$$

Поскольку $f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta}$ и $f_{\nu+\mu;\theta}$ — плотности, то, проинтегрировав последнее равенство по прямой, получаем, что

$$\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{\nu-1} dt = 1.$$

Следовательно,

$$f_{\mu;\theta} * f_{\nu;\theta} = f_{\nu+\mu;\theta}$$

или

$$\mathsf{G}_{\nu;\theta} * \mathsf{G}_{\mu;\theta} = \mathsf{G}_{\nu+\mu;\theta}.$$

11.2 Распределение суммы независимых случайных величин

Следующее утверждение устанавливает связь между сверткой вероятностных распределений и распределением суммы независимых случайных величин.

Т е о р е м а. *Распределение суммы независимых случайных величин равно свертке распределений слагаемых.*

Другими словами, если ξ и η — независимые случайные величины соответственно с распределениями F и G, а Q — распределение суммы $\xi + \eta$, то

$$Q(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} G(x-t)\mathsf{F}(dt) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} F(x-t)\mathsf{G}(dt),$$

или

$$\mathsf{Q} = \mathsf{F} * \mathsf{G} = \mathsf{G} * \mathsf{F}. \tag{11.2.4}$$

Отсюда и из формул (11.1.2), (11.1.3) имеем.

Сумма независимых случайных величин, хотя бы одна из которых абсолютно непрерывна, является абсолютно непрерывной случайной величиной, и ее плотность распределения равна свертке плотности распределения абсолютно непрерывной случайной величины с распределением другой.

Плотность распределения суммы независимых абсолютно непрерывных случайных величин равна свертке плотностей распределений слагаемых. Другими словами, если ξ и η — независимые абсолютно непрерывные *случайные величины с плотностями $p_\xi(t)$ и $p_\eta(t)$ соответственно, то плотность $u(x)$ распределения суммы $\xi+\eta$ равна свертке плотностей $p_\xi(t)$ и $p_\eta(t)$:*

$$u(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^1} p_\xi(x-y)p_\eta(y)dy=\int\limits_{\mathbb{R}^1} p_\eta(x-y)p_\xi(y)dy. \quad (11.2.1)$$

В тех же предположениях плотность распределения $v(x)$ разности $\zeta=\xi-\eta$ равна

$$v(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^1} p_\xi(x+y)p_\eta(y)dy. \quad (11.2.2)$$

Пример 11.2.1. *Пусть ξ и η — независимые случайные величины, каждая из которых равномерно распределена на $[0;1]$.*

Найти:

1° *плотность распределения суммы $\zeta=\xi+\eta$;*

2° *функцию распределения суммы $\zeta=\xi+\eta$;*

3° *вероятность $\mathsf{P}\{|\xi+\eta-1/2|<1\}$.*

Решение. 1° По известным плотностям распределений случайных величин ξ и η:

$$f_\xi(y)=\begin{cases} 1, & \text{если } y\in[0;1];\\ 0, & \text{если } y\notin[0;1],\end{cases}$$

$$f_\eta(y)=\begin{cases} 1, & \text{если } y\in[0;1];\\ 0, & \text{если } y\notin[0;1],\end{cases}$$

плотность распределения суммы $\zeta=\xi+\eta$ находим как свертку плотностей слагаемых (см. (11.2.1)):

$$f_\zeta(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^1} f_\xi(x-y)f_\eta(y)dy=\int\limits_0^1 f_\xi(x-y)dy=\int\limits_{x-1}^{x} f_\xi(t)dt$$

(воспользовались заменой переменной $x-y=t$). Вычислив последний интеграл для каждого значения $x\in\mathbb{R}^1$

(интегрирование ведется по промежутку $[x-1, x]$) получим:

если $x < 0$, то $\int\limits_{x-1}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{x-1}^{x} 0dt = 0$;

если $0 \le x < 1$, то $\int\limits_{x-1}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{x-1}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} 1dt = x$;

если $0 \le x-1 < 1$, то $\int\limits_{x-1}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{x-1}^{1} 1dt + \int\limits_{1}^{x} 0dt = 2 - x$;

если $x - 1 \ge 1$, то $\int\limits_{x-1}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{x-1}^{x} 0dt = 0$.

Таким образом, плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ x, & \text{если } 0 \le x < 1; \\ 2 - x, & \text{если } 1 \le x < 2; \\ 0, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

2° Функция распределения

$$F_\zeta(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\zeta(t)dt =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0, & \text{если } x < 0; \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} tdt = x^2/2, & \text{если } x \in [0, 1); \\ \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{x} (2-t)dt = -(x-2)^2/2 + 1, & \text{если } x \in [1, 2); \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{1} tdt + \int\limits_{1}^{2} (2-t)dt = 1, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

3° По известной плотности распределения $f_\zeta(t)$ случайной величины ζ вероятность попадания значения ζ в множество B, вычисляется так:

$$\mathsf{P}\{\zeta \in B\} = \int_B f_\zeta(t)dt$$

(см. формулу (9.1.5)). В частности,

$$\mathsf{P}\left\{|\xi + \eta - 1/2| < 1\right\} = \mathsf{P}\left\{|\zeta - 1/2| < 1\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{-1/2 < \zeta < 3/2\right\} =$$

$$= \int_{-1/2}^{3/2} f_\zeta(t)dt = \int_{-1/2}^{0} 0dt + \int_0^1 tdt + \int_1^{3/2} (2-t)dt = \frac{7}{8}.$$

П р и м е р 11.2.2. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *— независимые случайные величины, каждая из которых распределена* $\mathsf{N}_{0;1}$. *Найти распределение случайной величины*

$$\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Р е ш е н и е. Сначала убедимся, что квадрат нормально распределенной с параметрами $(0;1)$ случайной величины ξ имеет гамма-распределение с параметрами $(1/2, 1/2)$. В самом деле, функция распределения случайной величины $\eta = \xi^2$

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\eta < x\} = \mathsf{P}\{\xi^2 < x\}.$$

При $x \le 0$ значение $F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\xi^2 < x\}$ равно нулю, а при $x > 0$

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{|\xi| < \sqrt{x}\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp\{-t^2/2\}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \exp\{-t^2/2\}dt.$$

После замены $t^2 = s$ в последнем интеграле имеем

$$F_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x s^{-1/2} e^{-s/2} ds = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \int\limits_0^x s^{1/2-1} e^{-s/2} ds.$$

Последнее означает, что $F_\eta(x)$ — функция распределения гамма-распределения с параметрами $(1/2; 1/2)$ (воспользовались тем, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).

Далее, поскольку гамма-распределение замкнуто относительно операции свертки (см. пример 11.1.2), то сумма n независимых гамма-распределенных с параметрами $(1/2; 1/2)$ случайных величин является гамма-распределенной случайной величиной с параметрами $(n/2; 1/2)$.

Гамма-распределение с параметрами $(n/2; 1/2)$ еще называют χ^2-распределением с n степенями свободы.

11.3 Задачи

АЗ: $11.1, 11.4(1), 11.6(1), 11.8, 11.13, 11.17(1), 11.25$.

СЗ: $11.2, 11.3, 11.4(2), 11.5(2), 11.6(2), 11.7(2), 11.9, 11.14, 11.28, 11.30, 11.32$.

11.1. Найти свертку функции $\varphi = \varphi(x)$, заданной на $\mathbb{R}^1$, с вероятностным атомическим распределением, сосредоточенным в точке a.

11.2. Пусть Q_a — собственное вероятностное атомическое распределение, сосредоточенное в точке a.

Найти свертку $\mathsf{Q}_a * \mathsf{Q}_a$.

11.3. Пусть Q — собственное атомическое распределение, сосредоточенное в точке 1, распределение Q^{*n} задано равенством:

$$\mathsf{Q}^{*n} = \mathsf{Q} * \mathsf{Q}^{*(n-1)},\ n = 2, 3, \ldots,\ \mathsf{Q}^{*1} = \mathsf{Q}.$$

Найти Q^{*n}.

11.4. Пусть $\mathsf{U}_{[0,a]}$ — равномерное на промежутке $[0, a]$ распределение, P_θ — пуассоновское распределение с параметром θ, G_p — геометрическое распределение с параметром p.

Найти свертки:
1) $\mathsf{P}_\theta * \mathsf{U}_{[0,1]}$;
2) $\mathsf{P}_\theta * \mathsf{U}_{[0,1/2]} * \mathsf{U}_{[0,1/2]}$;
3) $\mathsf{G}_p * \mathsf{U}_{[0,1]}$;
4) $\mathsf{G}_p * \mathsf{U}_{[0,1/2]} * \mathsf{U}_{[0,1/2]}$.
Построить графики плотностей перечисленных сверток.

11.5. Пусть ξ, η, ζ — независимые случайные величины, ξ и η равномерно распределены на промежутке $[0, a]$, случайная величина ζ имеет пуассоновское распределение с параметром θ.
Найти распределения случайных величин:
1) $\xi + \zeta$, если $a = 1$;
2) $\xi + \eta + \zeta$, если $a = 1/2$.
Построить графики плотностей случайных величин $\xi + \zeta$ и $\xi + \eta + \zeta$.

11.6. Пусть μ — считающая мера — атомическая мера, сосредоточенная на множестве $\mathbb{N}$, такая, что

$$\mu(\{k\}) = 1,\ k \in \mathbb{N},$$

и пусть $\varphi = \varphi(x)$ — борелевская функция на $\mathbb{R}^1$ со значениями в $\mathbb{R}^1$.
Найти свертку $\mu * \varphi$, если
1) $\varphi(x) = 4I_{[0,1]}(x)(x - 1/2)^2$;
2) $\varphi(x) = I_{[0,1]}(x)(1 - 4(x - 1/2)^2)$;
3) $\varphi(x) = I_{[0,1]}(x)|x - 1/2|$;
4) $\varphi(x) = I_{[0,1]}(x)(1/2 - |x - 1/2|)$.
Построить графики функций $\mu * \varphi(x)$.

11.7. Пусть Q_a — вероятностное атомическое распределение, сосредоточенное в точке a, и пусть $\varphi = \varphi(x)$ — борелевская функция на $\mathbb{R}^1$ со значениями в $\mathbb{R}^1$.
Найти свертку $\mathsf{Q}_a * \varphi$, если
1) $\varphi(x) = I_{[0,1]}(x)$, а $\mathsf{Q}_a = \mathsf{Q}_1$;
2) $\varphi(x) = \sin x$, а $\mathsf{Q}_a = \mathsf{Q}_{2\pi}$;
3) $\varphi(x) = x^2$, а $\mathsf{Q}_a = \mathsf{Q}_2$;
4) $\varphi(x) = I_{[-1/2,1/2]}(x)|x|$, а $\mathsf{Q}_a = \mathsf{Q}_{1/2}$;
5) $\varphi(x) = I_{[-1/2,1/2]}(x)(1/2 - |x|)$, а $\mathsf{Q}_a = \mathsf{Q}_{1/2}$;

6) $\varphi(x) = I_{[0,1]}(x)|x - 1/2|$, а $\mathsf{Q}_a = \mathsf{Q}_1$;
7) $\varphi(x) = I_{[0,1]}(x)(1/2 - |x - 1/2|)$, а $\mathsf{Q}_a = \mathsf{Q}_1$;
8) $\varphi(x) = I_{[-1,1]}(x)x^2$, а $\mathsf{Q}_a = \mathsf{Q}_2$;
9) $\varphi(x) = I_{[-1,1]}(x)(1 - x^2)$, а $\mathsf{Q}_a = \mathsf{Q}_2$.

Построить графики функций $\mathsf{Q}_a * \varphi(x)$.

11.8. Пусть $\mathsf{U}_{[0,1]}$ — равномерное на промежутке $[0, 1]$ распределение, Q — дискретное распределение:

$$\mathsf{Q}(k/2) = 1/2, \ k = 0, 1.$$

Найти $\mathsf{Q} * \mathsf{U}_{[0,1]}$.

11.9. Пусть $\mathsf{U}_{[0,1/4]}$ — равномерное на промежутке $[0, 1/4]$ распределение, Q — атомическое распределение:

$$\mathsf{Q}(k/4) = 1/4, \ k = 0, 1, 2, 3.$$

Найти $\mathsf{Q} * \mathsf{U}_{[0,1/4]}$.

11.10. Пусть ξ и η — независимые случайные величины; ξ распределена равномерно на промежутке $[0; 1]$, η имеет своим распределением

$$\mathsf{P}_\eta(k) = \mathsf{P}\{\eta = k\} = 1/2, \ k = 0, 1.$$

Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

11.11. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, ξ распределена равномерно на промежутке $[0, 2]$, случайная величина η дискретна с распределением:

$$\mathsf{Q}\{\eta = k\} = 1/3, \ k = 0, 2, 4.$$

Найти распределение случайной величины $\xi + \eta$.

11.12. Пусть ξ — координата точки, брошенной наудачу на отрезок $[0; 1]$, η — число гербов, выпавших при подбрасывании симметричной монеты. Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

11.13. Пусть ξ — координата точки, наудачу брошенной на отрезок $[0; 1]$, η — число очков, выпавших в результате подбрасывания симметричной игральной кости. Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

11.14. Пусть ξ — координата точки, брошенной на отрезок $[0;1]$, η — число гербов, выпавших при подбрасывании пары симметричных монет. Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

11.15. Пусть ξ и η — независимые случайные величины. Случайная величина ξ имеет распределение

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \mathsf{G}(\{k\}) = 1/2, \ k = -1, 1,$$

η имеет распределение Q. Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

11.16. Случайная величина η равномерно распределена на промежутке $[-h;h]$, ξ имеет своей функцией распределения $F(x)$, ξ и η — независимы. Найти функцию распределения и плотность распределения (если она существует) суммы $\zeta = \xi + \eta$.

11.17. Случайные величины ξ и η независимы и распределены равномерно на промежутке: 1) $[a;b]$, $a < b$; 2) $[0;a]$, $a > 0$; 3) $[-a;a]$, $a > 0$; 4) $[-1/2;1/2]$.

Найти плотность распределения суммы $\zeta = \xi + \eta$.

11.18. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, равномерно распределенные соответственно на промежутках $[0;1]$ и $[0;2]$. Найти плотность распределения $p(x)$ суммы $\zeta = \xi + \eta$.

11.19. На отрезок $[0;1]$ наудачу бросают две точки. Пусть ξ — координата одной точки, η — другой. Найти функцию распределения координаты середины отрезка с концами ξ и η.

11.20. Случайные величины ξ и η — независимые и распределены равномерно на промежутке: 1) $[a;b]$, $a < b$; 2) $[0;a]$, $a > 0$; 3) $[-a;a]$, $a > 0$; 4) $[0;1]$. Найти плотность распределения $p_\zeta(x)$ разности $\zeta = \xi - \eta$.

11.21. На отрезок $[0;1]$ наудачу бросают две точки, ξ — координата одной точки, η — другой. Для $0 < x < 1$ найти $\mathsf{P}\{|\eta - \xi| < x\}$.

11.22. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, ξ распределена равномерно на промежутке $[-1;1]$, η — на промежутке $[0;1]$.

Вычислить:

1) $\mathsf{P}\{\xi^2 + \eta > 1/2\}$;

2) $\mathsf{P}\{\xi + \eta > 1\}$;

3) $\mathsf{P}\{|\xi + \eta| > 1/2\}$;
4) $\mathsf{P}\{|\eta - \xi| < 1/2\}$;
5) $\mathsf{P}\{\eta^2 - \xi > 0\}$;
6) $\mathsf{P}\{|\xi| + \eta > 1\}$.

11.23. На отрезок $[0, 1]$ наудачу бросают точку и фиксируют ее координату ξ. Затем подбрасывают пару симметричных игральных костей и к большему числу очков η, выпавших на костях, прибавляют ξ. Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

11.24. Найти распределение суммы n независимых случайных величин, каждая из которых имеет показательное распределение с параметром λ. Сравните распределение суммы независимых показательно распределенных случайных величин с распределением Эрланга (см. разд. 9.3 в гл. 9).

11.25. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые равномерно распределенные на $[0; 1]$ случайные величины. Найти распределение случайной величины

$$\eta = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n.$$

Вычислить $\mathsf{M}\eta$.

11.26. Пусть независимые случайные величины ξ и η имеют χ^2-распределения соответственно с n и m степенями свободы. Доказать, что случайная величина $\xi + \eta$ имеет χ^2-распределение с $n + m$ степенями свободы.

11.27. Дважды подбрасывают пару симметричных монет. Найти распределение суммы минимального числа гербов, выпавших при первом подбрасывают монет и максимального — при втором.

11.28. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, случайная величина ξ распределена равномерно на $[0; 2]$, случайная величина η — на $[-2; 0]$. Вычислить

$$\mathsf{P}\left\{|\xi - 1| + |\eta + 1| > 1\right\}.$$

11.29. Пусть ξ — нормально распределенная с параметрами $(0, 1)$ случайная величина. Найти вероятность того, что расстояние от точки ξ до начала координат не превосходит 3.

11.30. Пусть ξ и η — независимые нормально распределенные с параметрами $(0, 1)$ случайные величины. Найти вероятность того, что расстояние от точки (ξ, η) до начала координат не превосходит 3.

11.31. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые нормально распределенные с параметрами $(0, 1)$ случайные величины. Найти вероятность того, что в $\mathbb{R}^n$ расстояние от точки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ до начала координат не превосходит 3.

11.32. Пусть F и G — вероятностные распределения на $\mathbb{R}^1$, $u(s)$ — борелевская функция на $\mathbb{R}^1$ со значениями в $\mathbb{R}^1$.

Доказать, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} u(s)\, \mathsf{F} * \mathsf{G}(ds) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} u(x+y)\, \mathsf{F} \times \mathsf{G}(d(x, y)),$$

при условии, что интегралы определены.

11.33. Пусть F и G — вероятностные распределения на $\mathbb{R}^1$. Доказать, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} s\, \mathsf{F} * \mathsf{G}(ds) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x\, \mathsf{F} d(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^1} y\, \mathsf{G} d(y),$$

при условии, что интегралы определены.

11.34. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, показательно распределенные соответственно с параметрами λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$.

Найти плотности распределения: 1) суммы $\xi_1 + \xi_2$; 2) разности $\xi_2 - \xi_1$.

11.35. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, распределенные показательно с одним и тем же параметром λ. Найти плотности распределения случайных величин: 1) $\xi + \eta$; 2) $\xi - \eta$; 3) $|\xi - \eta|$.

11.36. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, распределенные показательно соответственно с параметрами 1 и 2. Найти плотность распределения случайной величины $\xi_1 + \xi_2$.

11.37. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностями $p(x) = \exp\{-|x|\}/2$. Найти плотности распределения случайных величин: 1) $\xi + \eta$; 2) $\xi - \eta$.

Глава 12

Сходимость распределений

12.1 Определения. Примеры

Мы будем рассматривать вероятностные распределения на $\mathbb{R}^1$ (см. разд. 11.1 в гл. 11).

Напомним, что для распределения F и его функции распределения

$$F(x) = \mathsf{F}((-\infty, x))$$

имеет место соотношение

$$\mathsf{F}([a; b)) = F(b) - F(a)$$

(при $a < b$).

Значение $\mathsf{F}(\{x_0\})$ распределения F на одноточечном множестве $\{x_0\}$ через функцию распределения $F(x)$ вычисляется так:

$$\mathsf{F}(\{x_0\}) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0).$$

Определение. Распределение F на $\mathbb{R}^1$ будем называть *собственным вероятностным распределением* (вероятностным распределением), если $\mathsf{F}(\mathbb{R}^1) = 1$, и *несобственным*, если $\mathsf{F}(\mathbb{R}^1) < 1$. В терминах функции распределения: F — собственное вероятностное распределение, если $F(+\infty) = 1$ и $F(-\infty) = 0$; F — несобственное вероятностное распределение, если выполняется хотя бы одно из неравенств $F(-\infty) > 0$ или $F(+\infty) < 1$.

Несобственные вероятностные распределения естественным образом возникают как пределы последовательностей вероятностных распределений.

О п р е д е л е н и е. Точку x_0 будем называть *атомом распределения* F, если $\mathsf{F}(\{x_0\}) > 0$. Распределение F будем называть *атомическим*, если оно сосредоточено на множестве своих атомов.

О п р е д е л е н и е. Конечный интервал I вида $[a; b)$ будем называть *интервалом непрерывности* распределения F, если точки a и b не являются его атомами.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что последовательность вероятностных распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ *сходится к распределению* F при $n \to \infty$, если для каждого интервала непрерывности I распределения F

$$\mathsf{F}_n(I) \to \mathsf{F}(I),$$

и будем обозначать это так: $\mathsf{F}_n \to \mathsf{F}$ или $\lim\limits_n \mathsf{F}_n = \mathsf{F}$.

Предел последовательности $\{\mathsf{F}_n\}$ вероятностных распределений может быть как собственным, так и несобственным.

О п р е д е л е н и е. Если последовательность вероятностных распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ сходится к собственному распределению F, то будем говорить, что $\{\mathsf{F}_n\}$ сходится к F *в собственном смысле* (*сходимость* $\mathsf{F}_n \to \mathsf{F}$ *собственная*).

Если $\{\mathsf{F}_n\}$ сходится к несобственному распределению F, то будем говорить, что $\{\mathsf{F}_n\}$ сходится к F *в несобственном смысле* (*сходимость* $\mathsf{F}_n \to \mathsf{F}$ *несобственная*).

Далее мы будем пользоваться следующими достаточными условиями сходимости распределений.

1° *Если последовательность функций распределений* $\{F_n(x)\}$ *сходится к функции распределения* $F(x)$ *в каждой точке непрерывности последней, то последовательность распределений* $\{\mathsf{F}_n\}$ *сходится к распределению* F (*в собственном или несобственном смысле*).

2° *Последовательность* $\{\mathsf{F}_n\}$ *собственных вероятностных распределений с одним и тем же средним* a *и* *дисперсиями* σ_n^2, *сходящимися к* 0, *сходится к собственному вероятностному атомическому распределению, сосредоточенному в точке* a.

3° *Последовательность* $\{\mathsf{F}_n\}$ *собственных вероятностных распределений соответственно со средними* a_n, *сходящимися к* a, *и дисперсиями* σ_n^2, *сходящимися к* 0, *сходится к собственному вероятностному атомическому распределению, сосредоточенному в точке* a.

Пример 12.1.1. *Пусть* $\{\mathsf{F}_n\}$ — *последовательность распределений с функциями распределения*

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x < 0; \\ nx, & \textit{если } 0 \le x \le 1/n; \\ 1, & \textit{если } x > 1/n. \end{cases}$$

Исследовать последовательность $\{\mathsf{F}_n\}$ *на сходимость.*

Решение. Докажем, что при $n \to \infty$ последовательность функций $\{F_n(x)\}$ сходится к функции

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0 \end{cases}$$

атомического распределения, сосредоточенного в точке $x = 0$, в каждой точке, кроме, возможно, точки $x = 0$ (точка $x = 0$ является точкой разрыва $F(x)$).

В самом деле, по условию для произвольной, но фиксированной точки x, лежащей слева от нуля, при каждом n имеет место равенство $F_n(x) = 0$, поэтому

$$\lim_n F_n(x) = 0 = F(x).$$

Для произвольной, но фиксированной точки x, лежащей справа от нуля, начиная с некоторого N $(n \ge N)$ имеет место неравенство $1/n < x$. Поэтому для $n \ge N$ значение $F_n(x)$ равно 1, и следовательно, $\lim\limits_n F_n(x) = 1 = F(x)$. Таким образом, при $n \to \infty$

$$F_n(x) \to F(x)$$

в каждой точке $x \in \mathbb{R}^1$, исключая, быть может, точку 0. Отсюда, согласно достаточному условию 1° сходимости распределений, при $n \to \infty$

$$\mathsf{F}_n \to \mathsf{F}.$$

Следовательно, последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке 0.

Пример 12.1.2. *Пусть* $\{\mathsf{Q}_n\}$ *— последовательность распределений с плотностями*

$$q_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-(-1)^n)^2 n^2}{2}\right\}, \ n = 1, 2, \ldots$$

Исследовать последовательность распределений $\{\mathsf{Q}_n\}$ *на сходимость.*

Решение. Согласно достаточному условию сходимости 2° для четных n последовательность распределений $\{\mathsf{Q}_n\}$ сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке 1, а для нечетных — в точке -1. Поэтому последовательность $\{\mathsf{Q}_n\}$ не является сходящейся.

Пример 12.1.3. *Пусть* F_h *— вероятностные распределения с плотностями*

$$f_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2h^2}\right\}.$$

Исследовать F_h *на сходимость* 1° *при* $h \to \infty$; 2° *при* $h \to 0$.

Решение. 1° Заметим, что функция $F(x) = c$, $x \in \mathbb{R}^1$, где c — константа из промежутка $[0;1]$, является функцией несобственного вероятностного распределения, тождественно равного нулю. В самом деле, значение $\mathsf{F}([a;b))$ распределения F на промежутке $[a;b)$ равно $F(b) - F(a) = 0$, поэтому $\mathsf{F}(A) = 0$ и на множествах A из алгебры $\mathfrak{A}$ конечных объединений непересекающихся промежутков вида $[a;b)$ (a и b не обязательно конечны), а следовательно, и на борелевских множествах, поскольку $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}^1$. Поэтому если последовательность $\{F_n(x)\}$ функций распределения сходится к функции $F(x) = c$ (c — константа из промежутка $[0;1]$), то F_h при $h \to \infty$ сходится к распределению F, тождественно равному нулю.

Далее,

$$F_h(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_h(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2h^2}\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-a)/h} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$$

(мы воспользовались заменой $(t-a)/h = u$). Для каждого фиксированного x

$$\lim_{h\to\infty} F_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = \frac{1}{2}.$$

Поэтому F_h при $h \to \infty$ сходится к распределению, тождественно равному нулю (для каждого a).

2° При $h \to 0$ семейство распределений F_h сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке a (согласно достаточному условию сходимости к атомическому распределению).

Определение. Последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ *слабо сходится к распределению* F *при* $n \to \infty$ *относительно класса функций* U, если для каждой функции $u \in U$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} u(x)\mathsf{F}_n(dx) \to \int\limits_{\mathbb{R}^1} u(x)\mathsf{F}(dx) \text{ при } \ n \to \infty.$$

Далее через $C(-\infty; +\infty)$ будем обозначать класс непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^1$; $C_0[-\infty; +\infty]$ — класс непрерывных ограниченных функций, для которых $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0$.

Теорема 12.1.1. *Из сходимости (собственной или несобственной) последовательности вероятностных распределений* $\{\mathsf{F}_n\}$ *к распределению* F *следует слабая сходимость* $\{\mathsf{F}_n\}$ *к* F *относительно класса* $C_0[-\infty; +\infty]$ *и наоборот.*

Из собственной сходимости вероятностных распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ *к распределению* F *следует слабая сходимость* $\{\mathsf{F}_n\}$ *к* F *относительно класса* $C(-\infty; +\infty)$.

Пример 12.1.4. *Пусть* $\{\mathsf{F}_n\}$ — *последовательность вероятностных распределений, заданных своими функциями распределений,*

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1/n; \\ N_{0,1}(x), & \text{если } -1/n < x \le 1/n; \\ 1, & \text{если } x > 1/n. \end{cases}$$

Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{itx} \mathsf{F}_n(dx).$$

Решение. Последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ сходится к собственному атомическому распределению F, сосредоточенному в точке 0.

Достаточно убедиться, что при $n \to \infty$ последовательность функций $\{F_n(x)\}$ сходится к функции

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0 \end{cases}$$

атомического распределения, сосредоточенного в точке $x = 0$, во всех точках, исключая, быть может, точку $x = 0$ (точка $x = 0$ является точкой разрыва $F(x)$).

В самом деле, по условию для произвольной, но фиксированной точки x, лежащей слева от нуля, начиная с некоторого N $(n \ge N)$ имеет место неравенство $x < < -1/n$, поэтому $F_n(x) = 0$ и $\lim\limits_n F_n(x) = 0 = F(x)$.

Для произвольной, но фиксированной точки x, лежащей справа от нуля, начиная с некоторого N $(n \ge N)$ имеет место неравенство $1/n < x$. Поэтому для $n \ge N$ значение $F_n(x)$ равно 1, и, следовательно, $\lim\limits_n F_n(x) = = 1 = F(x)$. Таким образом, при $n \to \infty$

$$F_n(x) \to F(x)$$

в каждой точке $x \in \mathbb{R}^1$, исключая точку 0. Отсюда, согласно достаточному условию 1° сходимости распределений, при $n \to \infty$ последовательность распределений F_n сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке 0.

Согласно теореме 12.1.1 последовательность $\{\mathsf{F}_n\}$ слабо сходится к F относительно класса $C(-\infty;+\infty)$. И поскольку $e^{itx} \in C(-\infty;+\infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^1} e^{itx}\mathsf{F}_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{itx}\mathsf{F}(dx) = e^{it0}\mathsf{F}(\{0\}) = 1.$$

Пример 12.1.5. *Пусть F — вероятностное распределение со средним m_1 и дисперсией σ^2. Доказать, что для $\varepsilon > 0$*

$$\mathsf{F}\{x : |x - m_1| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Решение.

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}^1}(x-m_1)^2\mathsf{F}(dx) \geq \int_{x:|x-m_1|\geq\varepsilon}(x-m_1)^2\mathsf{F}(dx) \geq$$

$$\geq \int_{x:|x-m_1|\geq\varepsilon}\varepsilon^2\mathsf{F}(dx) = \varepsilon^2\int_{x:|x-m_1|\geq\varepsilon}\mathsf{F}(dx) = \varepsilon^2\mathsf{F}\{x : |x-m_1| \geq \varepsilon\}.$$

Пример 12.1.6. *Пусть F_a — собственное вероятностное распределение со средним a и конечной дисперсией σ^2.*

Доказать, что распределение F_a при $a \to +\infty$ сходится к распределению, тождественно равному нулю.

Решение. Пусть x —произвольная, но фиксированная точка, $\varepsilon > 0$. Выберем a так, чтобы $x < a - \varepsilon$ (поскольку $a \to \infty$, это можно сделать). В силу неравенства Чебышева (см. пример 12.1.5)

$$F_a(x) = \mathsf{F}_a\{y : y < x\} \leq \mathsf{F}_a\{y : y < a - \varepsilon\} \leq$$

$$\leq \mathsf{F}_a\{y : |y - a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Положив $\varepsilon = a/2$, получим

$$F_a(x) \le \frac{\sigma^2}{(a/2)^2}.$$

Отсюда следует, что при $a \to +\infty$

$$F_a(x) \to Q(x) = 0.$$

Функции распределения, тождественно равной константе, соответствует распределение, тождественно равное нулю. Поэтому

$$\mathsf{F}_a \to \mathsf{Q} = 0.$$

П р и м е р 12.1.7. *Пусть* F *— собственное вероятностное распределение на* $\mathbb{R}^1$, $\mathsf{N}_{0;\sigma^2}$ *— нормальное распределение с параметрами* $(0;\sigma^2)$. *Доказать, что при* $\sigma \to 0$

$$\mathsf{F} * \mathsf{N}_{0;\sigma^2} \to \mathsf{F}.$$

Р е ш е н и е. Достаточно установить, что в каждой точке непрерывности y функции распределения $F(x)$ функция распределения

$$F_\sigma(y) = \mathsf{F} * \mathsf{N}_{0;\sigma^2}(y) \to F(y).$$

В силу коммутативности операции свертки

$$\mathsf{F}_\sigma = \mathsf{F} * \mathsf{N}_{0;\sigma^2} = \mathsf{N}_{0;\sigma^2} * \mathsf{F}.$$

По определению операции свертки

$$F_\sigma(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y-x)\mathsf{N}_{0;\sigma^2}(dx) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y-x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx.$$

Сделав замену $x/\sigma = t$, получим

$$F_\sigma(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y - \sigma t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y - \sigma t)\mathsf{N}_{0,1}(dt).$$

Подынтегральная функция $F(y-\sigma t)$ мажорируема интегрируемой по $\mathsf{N}_{0,1}$-распределению функцией $f(t) = 1$ и в каждой точке непрерывности y функции $F(x)$ при $\sigma \to 0$

$$F(y - \sigma t) \to F(y).$$

Поэтому в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{\sigma\to 0} F_\sigma(y) = \lim_{\sigma\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y - \sigma t)\mathsf{N}_{0,1}(dt) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\lim_{\sigma\to 0} F(y - \sigma t))\mathsf{N}_{0,1}(dt) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y)\mathsf{N}_{0,1}(dt) = F(y)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathsf{N}_{0,1}(dt) = F(y).$$

Тем самым мы установили, что в каждой точке непрерывности y функции распределения $F(x)$

$$F(y) = \lim_{\sigma\to 0} F_\sigma(y). \tag{12.1.1}$$

С л е д с т в и е. *Любое вероятностное распределение, в частности атомическое, может быть представлено в виде предела последовательности абсолютно непрерывных вероятностных распределений.*

12.2 Задачи

АЗ: 12.1, 12.5, 12.7, 12.9, 12.11, 12.12, 12.17, 12.28, 12.33.
СЗ: 12.2, 12.3, 12.4, 12.6, 12.10, 12.13, 12.15, 12.16, 12.21, 12.22, 12.23, 12.24, 12.31, 12.37.

12.1. Пусть $\{\mathsf{F}_n\}$ — последовательность распределений, заданных своими функциями распределений

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1/n; \\ n(x+1/n)/2, & \text{если } -1/n < x \le 1/n; \\ 1, & \text{если } x > 1/n. \end{cases}$$

Исследовать последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ на сходимость.

12.2. Пусть $F(x)$ — функция распределения непрерывного собственного вероятностного распределения.

Исследовать на сходимость каждую из приведенных далее последовательностей распределений, заданных своими функциями распределения:

1) $F_n(x) = F(x+1/n)$, $n = 1, 2, \ldots;$
2) $G_n(x) = F(x+n)$, $n = 1, 2, \ldots;$
3) $S_n(x) = F(x-n)$, $n = 1, 2, \ldots;$
4) $P_n(x) = F(x/n)$, $n = 1, 2, \ldots;$
5) $Q_n(x) = F(x+(-1)^n n)$, $n = 1, 2, \ldots$

12.3. Пусть $\{\mathsf{F}_n\}$ — последовательность распределений с плотностями

$$f_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{если } x \in [-1/n; 1/n]; \\ 0, & \text{если } x \notin [-1/n; 1/n]. \end{cases}$$

Исследовать последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ на сходимость.

12.4. Пусть $F(x)$ — монотонно возрастающая функция распределения. Исследовать на сходимость последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$, заданных своими функциями распределений,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1/n; \\ \dfrac{F(x) - F(-1/n)}{F(1/n) - F(-1/n)}, & \text{если } -1/n < x \le 1/n; \\ 1, & \text{если } x > 1/n. \end{cases}$$

12.5. Пусть $\{\mathsf{F}_n\}$ — последовательность распределений заданных своими функциями распределения:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1/n; \\ G(x), & \text{если } -1/n < x \le 1/n; \\ 1, & \text{если } x > 1/n, \end{cases}$$

$G(x)$ — монотонно неубывающая непрерывная слева функция со значениями в $[0, 1]$, заданная на $(-1, 1]$.

Исследовать последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ на сходимость.

12.6. Пусть Q — собственное атомическое распределение, сосредоточенное в точке 1, распределение Q^{*n} задано равенством:

$$\mathsf{Q}^{*n} = \mathsf{Q} * \mathsf{Q}^{*(n-1)},\ n = 2, 3, \ldots,\ \mathsf{Q}^{*1} = \mathsf{Q}.$$

Исследовать последовательность распределений Q^{*n} на сходимость.

12.7. Обозначим через Q_n собственное атомическое распределение, сосредоточенное в точке a_n. Исследовать на сходимость последовательность распределений $\{\mathsf{Q}_n\}$ 1° если $a_n \to +\infty$; 2° если $a_n \to -\infty$; 3° если $a_n \to a$.

12.8. Пусть $\{\mathsf{F}_n\}$ — последовательность распределений соответственно с плотностями

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1/n; \\ n^2(x + 1/n)^2/2, & \text{если } -1/n < x \le 0; \\ 1 - n^2(x - 1/n)^2/2, & \text{если } 0 < x \le 1/n; \\ 0, & \text{если } x > 1/n. \end{cases}$$

Исследовать последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ на сходимость при $n \to \infty$.

12.9. Пусть D_n — атомическое распределение:

$$\mathsf{D}_n(\{k\}) = 1/n,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Исследовать последовательность распределений D_n на сходимость при $n \to \infty$.

12.10. Пусть Q_n — атомическое распределение, заданное равенством

$$\mathsf{Q}_n(\{k/n\}) = 1/n,\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Исследовать Q_n на сходимость при $n \to \infty$.

12.11. Исследовать на сходимость последовательность распределений:

1) $\mathsf{F}_n : \begin{pmatrix} -n & n \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},\ n = 1, 2, \ldots;$

2) $\mathsf{G}_n : \begin{pmatrix} -1/n & 1/n \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},\ n = 1, 2, \ldots;$

3) $\mathsf{F}_n : \begin{pmatrix} n & n^2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},\ n = 1, 2, \ldots;$

4) $\mathsf{S}_n : \begin{pmatrix} -n^{(-1)^n} & n^{(-1)^n} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},\ n = 1, 2, \ldots$

12.12. Пусть

$$N_{x;\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}\right\} dt,\ x, y \in \mathbb{R}^1,\ \sigma > 0.$$

Вычислить

$$\lim_{\sigma \to 0} N_{x;\sigma^2}(y).$$

12.13. Пусть последовательность $\{\mathsf{F}_n\}$ вероятностных распределений и вероятностное распределение F сосредоточены на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Доказать, что

1) если

$$\mathsf{F}_n \to \mathsf{F},$$

то для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{F}_n(\{k\}) \to \mathsf{F}(\{k\});$$

2) если для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{F}_n(\{k\}) \to \mathsf{F}(\{k\}),$$

то

$$\mathsf{F}_n \to \mathsf{F}.$$

12.14. Пусть $\mathsf{F}_0, \mathsf{F}_1, \ldots$ — собственные вероятностные распределения на $\mathbb{R}^1$, $\{p_k\}$ — собственное вероятностное распределение на $\{0, 1, 2, \ldots\}$ $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1\right)$. И пусть

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k F_k(x),$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_k(x) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} p_k F_k(x) = \lim_n Q_n(x), \ x \in \mathbb{R}^1.$$

Убедиться, что $Q(x)$ — собственная вероятностная функция распределения и для распределений Q и Q_n соответственно с функциям распределения $Q(x)$ и $Q_n(x)$

$$\mathsf{Q}_n \to \mathsf{Q}$$

в собственном смысле.

12.15. Пусть G — собственное вероятностное распределение. Семейство распределений G_h $(h > 0)$ задано своими функциями распределений:

$$G_h(x) = G(x/h).$$

Исследовать G_h на сходимость при $h \to 0$.

12.16. Пусть ξ и η_σ — независимые случайные величины, соответственно с распределениями F и $\mathsf{N}_{0;\sigma^2}$.

Доказать, что при $\sigma \to 0$ распределение F_σ случайной величины

$$\zeta_\sigma = \xi + \eta_\sigma$$

сходится к распределению F случайной величины ξ.

12.17. Пусть F — собственное вероятностное распределение на $\mathbb{R}^1$, $\mathsf{U}_{[-h,h]}$ — равномерное на $[-h, h]$ распределение. Доказать, что при $h \to 0$ распределение

$$\mathsf{F}_h = \mathsf{F} * \mathsf{U}_{[-h,h]}$$

сходится к распределению F.

12.18. Доказать, что если последовательность распределений F_n соответственно случайных величин ζ_n сходится к атомическому распределению, сосредоточенному в точке a, то последовательность случайных величин ζ_n сходится по вероятности к константе a.

12.19. Пусть Q — вероятностное распределение на $\mathbb{R}^1$. Для каждого $a > 0$ определим распределение Q_a как часть распределения Q, сосредоточенную на множестве $(-\infty, -a) \cup \{0\} \cup (a, +\infty)$:

$$\mathsf{Q}_a(B) = \mathsf{Q}(B \cap ((-\infty, -a) \cup \{0\} \cup (a, +\infty))), \ B \in \mathfrak{B}^1.$$

Доказать, что при $a \to 0$

$$\mathsf{Q}_a \to \mathsf{Q}.$$

12.20. Пусть ξ и η_h — независимые случайные величины, соответственно с распределениями F и равномерным распределением на промежутке $[-h, h]$.

Доказать, что при $h \to 0$ распределение F_h случайной величины

$$\zeta_h = \xi + \eta_h$$

сходится к распределению F случайной величины ξ.

12.21. Пусть D_n — атомическое распределение:

$$\mathsf{D}_n(\{k\}) = 1/n, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

$\mathsf{U}_{[0,1]}$ — равномерное на промежутке $[0, 1]$ распределение.

Исследовать на сходимость последовательность распределений $\mathsf{U}_{[0,1]} * \mathsf{D}_n$.

12.22. Пусть $\mathsf{U}_{[a,b]}$ — равномерное на промежутке $[a, b]$ распределение.

Исследовать $\mathsf{U}_{[a,b]}$ на сходимость 1) при $a \to -\infty$ (b фиксировано); 2) при $b \to +\infty$ (a фиксировано); 3) при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$; 4) при $a \to 1$, $b \to 1$.

12.23. Пусть Q_{2^n} — атомическое распределение, заданное равенством

$$\mathsf{Q}_{2^n}(\{k/2^n\}) = 1/2^n, \ k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1.$$

Исследовать Q_{2^n} на сходимость при $n \to \infty$.

12.24. Пусть $\mathsf{C}_{a,b}$ — распределение Коши с парамерами (a, b).

Доказать, что при $b \to +\infty$ распределение $\mathsf{C}_{a,b}$ сходится к распределению, тождественно равному нулю.

12.25. Пусть F_h — семейство вероятностных распределений с плотностями

$$f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & \text{если } x \in [a, a+h]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a, a+h] \end{cases}$$

(a — фиксировано). Исследовать на сходимость F_h: 1) при $h \to \infty$; 2) при $h \to 0$.

12.26. Пусть G_h — семейство вероятностных распределений с плотностями

$$g_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & \text{если } x \in [-h, h]; \\ 0, & \text{если } x \notin [-h, h]. \end{cases}$$

Исследовать на сходимость G_h: 1) при $h \to \infty$; 2) при $h \to 0$.

12.27. Пусть $\{\mathsf{F}_n\}$ — последовательность распределений соответственно с плотностями

$$f_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{если } x \in [(-1)^n - 1/n; (-1)^n + 1/n]; \\ 0, & \text{если } x \notin [(-1)^n - 1/n; (-1)^n + 1/n]. \end{cases}$$

Исследовать $\{\mathsf{F}_n\}$ на сходимость при $n \to \infty$.

12.28. Пусть

$$F_\lambda(y) = \sum_{k:0 \le k < y} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ y \in \mathbb{R}^1, \ \lambda > 0,$$

k — целые неотрицательные.

Найти

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathsf{F}_\lambda(y),$$

если этот предел существует.

12.29. Пусть P_θ — пуассоновское распределение с параметром θ. Исследовать P_θ на сходимость при $\theta \to 0$, при $\theta \to \infty$.

12.30. Пусть $\mathsf{N}_{0,ct}$ — семейство нормальных распределений со средним 0 и дисперсией ct, $t > 0$, $c > 0$, c — константа. Семейство распределений Q_t $(t > 0)$ определено равенством

$$\mathsf{Q}_t(B) = \int\limits_B \frac{1}{ct} y^2 \mathsf{N}_{0,ct}(dy), \ B \in \mathfrak{B}^1.$$

Последнее обозначает, что распределение Q_t абсолютно непрерывно с плотностью $\frac{1}{ct}y^2$ относительно распределения $\mathsf{N}_{0,ct}$ и еще записывается так

$$\mathsf{Q}_t(dy) = \frac{1}{ct} y^2 \mathsf{N}_{0,ct}(dy).$$

Исследовать Q_t на сходимость при $t \to 0$.

12.31. Пусть Q_t $(t > 0)$ — семейство распределений с плотностями

$$q_t(y) = \frac{1}{ct} y^2 f_{0,ct}(y),$$

где $f_{0,ct}(y)$ — плотность нормального распределения со средним 0 и дисперсией ct, $t > 0$, $c > 0$, c — константа.

Исследовать Q_t на сходимость при $t \to 0$.

12.32. Пусть G_p — геометрическое распределение с параметром p :

$$\mathsf{G}_p(\{k\}) = p(1-p)^k, \ 0, 1, 2, \dots$$

Исследовать G_p на сходимость при $p \to 1$.

12.33. Доказать, что атомическое распределение

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

можно представить в виде предела абсолютно непрерывных распределений.

12.34. Доказать, что любое собственное атомическое распределение можно представить в виде предела абсолютно непрерывных распределений.

12.35. Пусть $\{\mathsf{F}_n\}$ — последовательность распределений, заданных своими функциями распределений

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1/n; \\ 1/4 + n(x+1/n)/4, & \text{если } -1/n < x \le 1/n; \\ 1, & \text{если } x > 1/n. \end{cases}$$

Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \sin x\, \mathsf{F}_n(dx).$$

12.36. Пусть F — собственное вероятностное распределение,

$$N_{x;\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}\right\} dt,\ \ x, y \in \mathbb{R}^1, \sigma > 0.$$

Вычислить

$$\lim_{\sigma\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_{x;\sigma^2}(y)\mathsf{F}(dx),$$

если y — точка непрерывности F.

12.37. Пусть F_λ —распределение, заданное функцией распределения

$$F_\lambda(y) = \sum_{k:0\le k<y} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ \ y \in \mathbb{R}^1,\ \ \lambda > 0,$$

k — целые неотрицательные.

Вычислить

$$\lim_{\lambda\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\, \mathsf{F}_\lambda(dy).$$

12.38. Семейство распределений Q_t $(t > 0)$ определено равенством

$$\mathsf{Q}_t(dy) = \frac{1}{ct} y^2 \mathsf{N}_{0,ct}(dy),$$

см. задачу 12.30.

Вычислить

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(y) \mathsf{Q}_t(dy),$$

где $\varphi(y)$ — функция из класса $C(-\infty, \infty)$.

12.39. Пусть Q_{2^n} — атомическое распределение, заданное равенством

$$\mathsf{Q}_{2^n}(\{k/2^n\}) = 1/2^n, \ k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1.$$

Вычислить

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^1} \sin y \, \mathsf{Q}_{2^n}(dy).$$

Глава 13

Характеристическая функция

13.1 Определения, свойства, вычисление

Определение. Пусть ξ — случайная величина, F — ее распределение. *Характеристической функцией случайной величины* ξ (*распределения* F) будем называть комплекснозначную функцию $\varphi(t)$, определенную для всех $t \in \mathbb{R}^1$ равенством

$$\varphi(t) = \mathsf{M}e^{it\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{itx}\mathsf{F}(dx).$$

Если распределение F (распределение случайной величины ξ) имеет плотность f, то

$$\varphi(t) = \mathsf{M}e^{it\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{itx}f(x)dx;$$

если распределение F дискретно:

$$\mathsf{F}\colon x_k \to \mathsf{F}(\{x_k\}) > 0,\ k = 1, 2, \ldots;\ \sum_{x_k} \mathsf{F}(\{x_k\}) = 1,$$

то

$$\varphi(t) = \mathsf{M}e^{it\xi} = \sum_{x_k} \exp\{itx_k\}\mathsf{F}(\{x_k\}).$$

Многочисленные применения характеристических функций связаны с их мультипликативным свойством:

Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых. В терминах сверток — характеристическая функция свертки вероятностных распределений равна произведению их характеристических функций.

Теорема (о дифференцируемости характеристической функции). *Если n-й абсолютный момент распределения F конечен, то существует n-я производная характеристической функции*

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\mathsf{F}(dx)$$

распределения F, и ее можно получить дифференцированием под знаком интеграла:

$$\varphi^{(n)}(t) = i^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}x^n\mathsf{F}(dx).$$

Следствие. *В условиях теоремы*

$$\varphi^{(n)}(0) = i^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n\mathsf{F}(dx) = i^n\mathsf{M}\xi^n,$$

и для $\varphi(t)$ имеет место разложение:

$$\varphi(t) = 1 + \frac{\varphi^{(1)}(0)}{1!}t + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + o(t^n),$$

при $t \to 0$.

Пример 13.1.1. *Вычислить характеристическую функцию случайной величины ξ, имеющей распределение Пуассона с параметром λ:*

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Решение. Согласно определению

$$\varphi(t) = \mathsf{M}e^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} =$$

$$= \exp\{-\lambda\}\exp\{\lambda e^{it}\} = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}.$$

Пример 13.1.2. *Найти характеристическую функцию нормально распределенной с параметрами $(a; \sigma^2)$ случайной величины.*

Решение. Сначала найдем характеристическую функцию $\varphi(t)$ случайной величины ξ, распределенной нормально с параметрами $(0; 1)$.

Согласно определению

$$\varphi(t) = \mathsf{M}e^{it\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos tx\,dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\sin tx\,dx.$$

Последний интеграл равен нулю, поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\sin tx\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{+n} e^{-x^2/2}\sin tx\,dx = 0.$$

Продифференцируем $\varphi(t)$, воспользовавшись теоремой о дифференцируемости характеристической функции (первый момент нормального распределения конечен). Имеем

$$\varphi^{'}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(-\sin tx)e^{-x^2/2}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin tx \, d(e^{-x^2/2}) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \cos tx \cdot e^{-x^2/2} dx = -t\varphi(t).$$

Отсюда

$$\varphi^{'}(t)/\varphi(t) = -t.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\varphi(t) = e^{-t^2/2}$$

(мы учли, что $\varphi(0) = 1$).

Далее, если ξ распределена $\mathsf{N}_{0;1}$, то случайная величина

$$\eta = \sigma\xi + a$$

распределена нормально с параметрами $(a;\sigma^2)$ (проверяется непосредственно). Характеристическая функция $\psi(t)$ случайной величины η, распределенной $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$

$$\psi(t) = \mathsf{M}e^{it\eta} = \mathsf{M}e^{it(\sigma\xi+a)} = e^{ita}\mathsf{M}e^{i(\sigma t)\xi} = e^{ita}\varphi(\sigma t) =$$

$$= \exp\{ita\} \exp\{-\sigma^2 t^2/2\} = \exp\{ita - \sigma^2 t^2/2\}.$$

13.2 Теорема единственности, теорема Леви

Теорема единственности. *Различным вероятностным распределениям соответствуют различные характеристические функции.*

Теорема Леви. *Если последовательность характеристических функций $\varphi_n(t)$ соответственно распределений F_n сходится к непрерывной функции в каждой точке $t \in \mathbb{R}^1$, то соответствующая последовательность* *распределений* F_n *сходится в собственном смысле, при этом предел* $\varphi(t)$ *последовательности характеристических функций* $\varphi_n(t)$ *является характеристической функцией предельного распределения* F.

Справедливо и обратное. Собственная сходимость последовательности вероятностных распределений F_n *влечет сходимость соответствующей последовательности характеристических функций* $\varphi_n(t)$ *в каждой точке* $t \in \mathbb{R}^1$, *при этом предел* $\varphi(t)$ *является характеристической функцией предельного распределения* F *и сходимость*

$$\varphi_n(t) \to \varphi(t)$$

равномерная на каждом конечном промежутке.

Пример 13.2.1. *Пусть* F *и* Q — *нормальные распределения соответственно с параметрами* $(a_1; \sigma_1^2)$ *и* $(a_2; \sigma_2^2)$. *Найти свертку* $\mathsf{F} * \mathsf{Q}$ *распределений* Q *и* F.

Решение. Воспользовавшись мультипликативным свойством характеристических функций (характеристическая функция свертки вероятностных распределений равна произведению характеристических функций этих распределений), по характеристическим функциям

$$\varphi_1(t) = \exp\left\{ita_1 - t^2\sigma_1^2/2\right\} \text{ и } \varphi_2(t) = \exp\left\{ita_2 - t^2\sigma_2^2/2\right\}$$

нормальных распределений F и Q с параметрами $(a_1; \sigma_1^2)$ и $(a_2; \sigma_2^2)$ соответственно (см. пример 13.1.2) находим характеристическую функцию свертки $\mathsf{F} * \mathsf{Q}$:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = \exp\left\{it(a_1 + a_2) - t^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2\right\}.$$

Далее, с одной стороны, $\varphi(t)$ — характеристическая функция свертки $\mathsf{F} * \mathsf{Q}$, с другой,

$$\varphi(t) = \exp\left\{it(a_1 + a_2) - t^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2\right\}$$

является характеристической функцией нормального распределения с параметрами $(a_1 + a_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, т. е. характеристическая функция распределения $\mathsf{F} * \mathsf{Q}$ и характеристическая функция нормального распределения с параметрами $(a_1 + a_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ совпадают. А поэтому согласно теореме единственности совпадают и сами распределения. Следовательно, *свертка нормальных распределений* *с параметрами* $(a_1; \sigma_1^2)$ *и* $(a_2; \sigma_2^2)$ *является нормальным распределением с параметрами* $(a_1 + a_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ *(класс нормальных распределений замкнут относительно операции свертки).*

Пример 13.2.2 *Пусть* F *и* Q — *пуассоновские распределения соответственно с параметрами* λ_1 *и* λ_2. *Найти свертку* $\mathsf{F} * \mathsf{Q}$ *распределений* Q *и* F.

Решение. Характеристическими функциями пуассоновских распределений соответственно с параметрами λ_1 и λ_2 являются

$$\varphi_1(t) = \exp\{\lambda_1(e^{it} - 1)\} \text{ и } \varphi_2(t) = \exp\{\lambda_2(e^{it} - 1)\}$$

(см. пример 13.1.1). Поэтому характеристическая функция $\varphi(t)$ свертки $\mathsf{F} * \mathsf{Q}$, согласно мультипликативному свойству, равна $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$, т. е.

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^{it} - 1)\}.$$

Но $\exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^{it} - 1)\}$ — характеристическая функция пуассоновского распределения с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. Поэтому согласно теореме единственности распределение $\mathsf{F} * \mathsf{Q}$ совпадает с пуассоновским распределением с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. Следовательно, *свертка пуассоновских распределений с параметрами* λ_1 *и* λ_2 *является пуассоновским распределением с параметром* $\lambda_1 + \lambda_2$ *(класс пуассоновских распределений замкнут относительно операции свертки).*

Пример 13.2.3. *Пусть случайная величина* ξ_{n,p_n} *распределена биномиально с параметрами* $(n; p_n)$. *Доказать, что если* $np_n \to \lambda$ *при* $n \to \infty$, *то распределение случайной величины* ξ_{n,p_n} *сходится к пуассоновскому распределению с параметром* λ *(теорема Пуассона).*

Решение. Вычислим характеристическую функцию $\varphi_n(t)$ случайной величины ξ_{n,p_n} и покажем, что при $n \to \infty$ последовательность характеристических функций $\{\varphi_n(t)\}$ сходится к характеристической функции пуассоновского распределения с параметром λ.

Характеристическая функция $\varphi_n(t)$ биномиально распределенной с параметрами $(n; p_n)$ случайной величины

ξ_{n,p_n} равна $\left(1+p_n\left(e^{it}-1\right)\right)^n$, т. е.

$$\varphi_n(t)=\left(1+p_n\left(e^{it}-1\right)\right)^n$$

(см. решение задачи 13.7 в параграфе 13.3). Далее, поскольку $np_n\to\lambda$ при $n\to\infty$, то $p_n\to 0$ и для

$$\ln\varphi_n(t)=n\ln\left(1+p_n\left(e^{it}-1\right)\right)$$

при каждом фиксированном t имеем

$$\ln\varphi_n(t)\sim np_n\left(e^{it}-1\right)$$

при $n\to\infty$. Отсюда

$$\ln\varphi_n(t)\to\lambda\left(e^{it}-1\right),$$

$$\varphi_n(t)\to\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}.$$

Но $\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}$ — характеристическая функция пуассоновского распределения с параметром λ, поэтому согласно теореме Леви распределение случайной величины ξ_{n,p_n} сходится к пуассоновскому распределению с параметром λ.

Пример 13.2.4. *Вычислить характеристическую функцию распределения Коши с параметрами* $(a,0)$, *его плотность:*

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2},\ x\in\mathbb{R}^1.$$

Решение. Сначала вычислим характеристическую функцию $\varphi(t)$ двустороннего показательного распределения с параметром a по его плотности

$$f(x)=\frac{a}{2}e^{-a|x|},\ x\in\mathbb{R}^1.$$

По определению

$$\varphi(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{itx}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\frac{a}{2}e^{-a|x|}dx=\frac{a^2}{a^2+t^2}.$$

Дальше воспользуемся утверждением, известным под названием теоремы обращения для характеристических функций.

Если характеристическая функция $\varphi(t)$ вероятностного распределения F *интегрируема на* $\mathbb{R}^1$, *то распределение* F *абсолютно непрерывно, и его плотность* $f(x)$ *представима в виде*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-ixt}\varphi(t)dt. \tag{13.2.1}$$

Характеристическая функция $\varphi(t) = \dfrac{a^2}{a^2+t^2}$ двустороннего показательного распределения интегрируема на $\mathbb{R}^1$, поэтому имеет место равенство (13.2.1):

$$\frac{a}{2}e^{-a|x|} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\frac{a^2}{a^2+t^2}dt,$$

которое можно переписать так:

$$e^{-a|x|} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+t^2}dt.$$

Остается заметить, что последний интеграл — не что иное, как характеристическая функция распределения Коши с параметром a.

13.3 Задачи

АЗ: 13.1, 13.5, 13.7, 13.10, 13.16, 13.17, 13.29, 13.30, 13.37.
СЗ: 13.4, 13.8, 13.18, 13.21, 13.23, 13.25, 13.38, 13.39.

13.1. Пусть случайная величина ξ принимает значения 1 и -1, каждое с вероятностью $1/2$. Вычислить характеристическую функцию случайной величины ξ.

13.2. Пусть случайная величина ξ принимает значения -1, 0, 1, каждое с вероятностью $1/3$. Вычислить характеристическую функцию ξ.

13.3. Доказать, что $\varphi(z) = \cos^2 z$ является характеристической функцией; найти соответствующее распределение вероятностей.

13.4. Доказать, что

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kz, \quad \varphi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k z}$$

($a_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 1$) являются характеристическими функциями. Найти соответствующие распределения вероятностей.

13.5. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$. Вычислить характеристическую функцию случайной величины

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

13.6. Доказать, что $\varphi(z) = \cos^n z$ является характеристической функцией (для каждого натурального n).

13.7. Вычислить характеристическую функцию случайной величины ξ, распределенной биномиально с параметрами $(n; p)$:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

13.8. Вычислить характеристическую функцию случайной величины ξ, геометрически распределенной с параметром p:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, \ldots$$

13.9. Пусть ξ_λ — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ.

Вычислить характеристическую функцию случайной величины $(\xi_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$.

13.10. Вычислить характеристическую функцию атомического распределения, сосредоточенного в точке a.

13.11. Вычислить характеристическую функцию случайной величины, равномерно распределенной 1) на промежутке $[0; 1]$; 2) на промежутке $[-a; a]$; 3) на промежутке $[a; b]$.

13.12. Вычислить характеристическую функцию случайной величины с плотностью $p(x) = e^{-|x|}/2$.

13.13. Вычислить характеристическую функцию показательного распределения с параметром a.

13.14. Вычислить характеристическую функцию двустороннего показательного распределения с параметром a. Плотность двустороннего показательного распределения:

$$f(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|},\ a > 0.$$

13.15. Вычислить характеристическую функцию треугольного распределения с параметром a, $a > 0$. Плотность треугольного распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \geq a; \\ (a - |x|)/a^2, & \text{если } |x| < a. \end{cases}$$

13.16. Пусть G_p — геометрическое распределение с параметром p.

Исследовать G_p на сходимость при $p \to 1$.

13.17. Пусть F и Q — распределения Коши соответственно с параметрами $(a, 0)$ и $(b, 0)$. Найти свертку $\mathsf{F} * \mathsf{Q}$ распределений Q и F.

13.18. Пусть ξ и η — независимые нормально распределенные случайные величины соответственно с параметрами $(a_1; \sigma_1^2)$ и $(a_2; \sigma_2^2)$. Найти распределение случайной величины $\xi + \eta$.

13.19. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие распределения Коши соответственно с параметрами a_1 и a_2. Найти распределение случайной величины $\xi + \eta$.

13.20. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие пуассоновские распределения соответственно с параметрами λ_1 и λ_2. Найти распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

13.21. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ, для которой $\mathsf{M}\xi = a$ и $\mathsf{D}\xi = \sigma^2 < \infty$. Выписать разложение Тейлора для $\varphi(t)$ в окрестности точки $t = 0$, содержащее t^2.

13.22. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность нормально распределенных случайных величин соответственно с параметрами $(a_n; \sigma_n^2)$, причем $a_n \to a$, $\sigma_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказать, что при $n \to \infty$ распределение случайной величины ξ_n сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке a.

13.23. Пусть ξ_λ — пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda < \infty$.

Доказать, что при $\lambda \to \infty$ распределение случайной величины $(\xi_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ сходится к нормальному распределению с параметрами $(0; 1)$.

13.24. Пусть Q — собственное атомическое распределение, сосредоточенное в точке a, распределение Q^{*n} задано равенством:

$$\mathsf{Q}^{*n} = \mathsf{Q} * \mathsf{Q}^{*(n-1)},\ n = 2, 3, \ldots,\ \mathsf{Q}^{*1} = \mathsf{Q}.$$

Найти распределение Q^{*n}.

13.25 (центральная предельная теорема 1). Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со средним 0 и конечной дисперсией $\mathsf{D}\xi_k = \sigma^2$. Доказать, что при $n \to \infty$ распределение случайной величины

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

сходится к нормальному распределению с параметрами $(0; 1)$.

У к а з а н и е. Обозначим через $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, а через $\psi_n(t)$ — случайной величины $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$.

Последовательно решите такие задачи:

1° Выпишите характеристическую функцию $\psi_n(t)$ через характеристическую функцию $\varphi(t)$.

2° Выпишите разложение Тейлора для $\varphi(t)$ в окрестности точки $t = 0$, содержащее t^2.

3° Воспользовавшись результатами пунктов 1° и 2°, найдите предел характеристической функции $\psi_n(t)$ при $n \to \infty$.

4° Воспользовавшись результатом пункта 3° и теоремой Леви, докажите, что при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ сходится к нормальному распределению с параметрами $(0; 1)$.

13.26. Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

Если

$$\mathsf{D}\xi_k = \sigma^2 < \infty,$$

то из неравенства Чебышёва

$$\mathsf{P}\{|\zeta - \mathsf{M}\zeta| \geq \varepsilon\} \leq \mathsf{D}\zeta/\varepsilon^2$$

следует, что при $n \to \infty$ последовательность

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

сходится по вероятности к $a = \mathsf{M}\xi_1$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{|S_n - a| \geq \varepsilon\} \to 0.$$

Теперь не будем требовать, чтобы $\sigma^2 < \infty$, но пусть

$$\mathsf{M}\xi_k = a \neq \infty.$$

Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность S_n сходится по вероятности к a (закон больших чисел в форме Хинчина).

13.27. Если $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями $\mathsf{M}\xi_k = m_1 \neq \infty$, то

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

сходится по вероятности к m_1 (см. задачу 13.26).

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, каждая из которых имеет распределение Коши (с параметром a).

Доказать, что $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ не сходится по вероятности к константе (ни к одной).

Указание.

1° Найти характеристическую функцию S_n.

2° Вычислить предел характеристической функции случайной величины S_n при $n \to \infty$.

Заметим, что у случайной величины, имеющей распределение Коши, математическое ожидание не существует.

13.28 (центральная предельная теорема 2). Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со средним a ($\mathsf{M}\xi_k = a \neq \infty$) и дисперсией σ^2 ($\mathsf{D}\xi_k = \sigma^2 < \infty$). Доказать, что при $n \to \infty$ распределение случайной величины

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k - na\right)$$

сходится к нормальному с параметрами $(0; 1)$.

Указание. См. задачу 13.25.

13.29. Пусть $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{k,n}, \ldots, \xi_{n,n},$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, каждая с распределением

$$\mathsf{P}\{\xi_{k,n} = j\} = p_n^j(1-p_n)^{1-j},\ j = 0, 1;$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, причем

$$np_n \to \lambda$$

при $n \to \infty$.

Доказать, что при $n \to \infty$ распределение суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{k,n}$ сходится к пуассоновскому распределению с параметром λ:

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_{k,n} = m\right\} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},\ m = 0, 1, \ldots$$

13.30. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные (каждая с распределением F) случайные величины со значениями в $\mathbb{R}^s$ и пусть

$$\mathbb{R}^s = \bigcup_{j=1}^{r} X_j,\ X_i \cap X_j = \emptyset,\ i \neq j;$$

$p_j = \mathsf{F}(X_j) = \mathsf{P}\{\xi_k \in X_j\}$ — вероятность, того, что случайная величина ξ_k попадет в X_j, $j = 1, 2, \ldots, r$; ν_j — число случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, попавших в X_j:

$$\nu_j = \sum_{k=1}^{n} I_{X_j}(\xi_k),\ j = 1, 2, \ldots, r.$$

Доказать, что при $n \to \infty$ распределение случайной величины

$$\sqrt{\frac{n}{p_j(1-p_j)}} \left(\frac{\nu_j}{n} - p_j\right)$$

сходится к нормальному распределению с параметрами $(0; 1)$.

13.31. Вероятностное распределение F имеет своей характеристической функцией $\varphi(t)$.

Найти характеристическую распределения $\mathsf{F} * \mathsf{Q}_a$, где Q_a — атомическое распределение, сосредоточенное в точке a.

Приведенные далее задачи можно решить, выписав характеристические функции соответствующих распределений и исследовав их сходимость при $n \to \infty$.

13.32. Пусть $\{\mathsf{F}_n\}$ — последовательность вероятностных распределений с функциями распределения

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ nx, & \text{если } 0 < x \le 1/n; \\ 1, & \text{если } x > 1/n. \end{cases}$$

Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке 0.

13.33. $\{\mathsf{F}_n\}$ — последовательность вероятностных распределений с функциями распределения

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1/n; \\ n(x+1/n)/2, & \text{если } -1/n < x \le 1/n; \\ 1, & \text{если } x > 1/n. \end{cases}$$

Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ сходится к атомическому распределению, сосредоточенному в точке 0.

13.34. $\{\mathsf{F}_n\}$ — последовательность вероятностных распределений с плотностями

$$f_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{если } x \in [-1/n, 1/n]; \\ 0, & \text{если } x \notin [-1/n, 1/n]. \end{cases}$$

Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ сходится к атомическому распределению, сосредоточенному в точке 0.

13.35. Случайная величина ξ нормально распределена с параметрами $(0; 1)$.

Найти характеристическую функцию случайной величины $\eta = \xi + a$ (a — константа).

13.36. Вычислить характеристическую функцию распределения Коши с параметрами $(a; b)$, его плотность:

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2 + (x-b)^2}, \ x \in \mathbb{R}^1.$$

У к а з а н и е. См. пример 13.2.4.

13.37. Пусть ξ и η_σ — независимые случайные величины, соответственно с распределениями F и $\mathsf{N}_{0;\sigma^2}$.

Воспользовавшись теоремой Леви, доказать, что при $\sigma \to 0$ распределение F_σ случайной величины

$$\zeta_\sigma = \xi + \eta_\sigma$$

сходится к распределению F случайной величины ξ.

13.38. Пусть ξ и η_h — независимые случайные величины, соответственно с распределениями F и равномерным на промежутке $[-h, h]$ распределением.

Воспользовавшись теоремой Леви, доказать, что при $h \to 0$ распределение F_h случайной величины

$$\zeta_h = \xi + \eta_h$$

сходится к распределению F случайной величины ξ.

13.39. Доказать, что атомическое распределение

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

можно представить в виде предела абсолютно непрерывных распределений.

Указание. Достаточно установить, что характеристическая функция распределения $\mathsf{F}_\sigma = \mathsf{D} * \mathsf{N}_{0,\sigma^2}$ сходится к характеристической функции распределения D.

13.40. Пусть Q_n — атомическое распределение, заданное равенством

$$\mathsf{Q}_n(\{k/n\}) = 1/n,\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Доказать, что Q_n сходится к $\mathsf{U}_{[0,1]}$ — равномерному на промежутке $[0, 1]$ распределению.

Указание. Достаточно установить, что характеристическая функция распределения Q_n сходится к характеристической функции распределения $\mathsf{U}_{[0,1]}$.

13.41. Пусть P_θ — пуассоновское распределение с параметром θ.

Исследовать P_θ на сходимость при $\theta \to 0$.

Глава 14

Оценивание параметров распределений

14.1 Точечные оценки

В математической статистике приняты следующие определения.

Определение. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ будем называть *выборкой* (*выборочным вектором*).

Выборку $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, образованную последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, каждая с распределением G, будем называть *выборкой объемом n из распределения* G.

Значение $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ будем называть ее реализацией.

Множество X всех возможных значений (реализаций) выборки будем называть *выборочным пространством* (X — это $\mathbb{R}^n$ или его часть).

Мы будем иметь дело с выборками $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, распределения $\mathsf{F}(\cdot; \theta)$ (функции распределения $F(x; \theta)$) которых зависят от параметра θ, принимающего значения из некоторого множества Θ возможных значений, как правило, Θ — подмножество конечномерного пространства $\mathbb{R}^s$ (распределениями, зависящими от параметра, например, являются: нормальное распределение, равномерное, пуассоновское).

Задача оценивания параметров распределения. Имеется реализация $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, распределение $\mathsf{F}(\cdot;\theta)$ которой зависит от параметра $\theta \in \Theta$. Параметр θ неизвестен. По реализации $\xi(\omega)$ выборки ξ (по выборке ξ) необходимо оценить (определить) параметр θ. Эта задача известна как задача оценивания параметра распределения.

Единственное, что у нас имеется (что нам известно) для определения неизвестного параметра θ, — это реализация $\xi(\omega)$ выборки ξ (кроме $\xi(\omega)$ мы не имеем ничего, что бы несло информацию о параметре θ). Поэтому "оценить θ по $\xi(\omega)$", точно или хотя бы приближенно, означает поставить в соответствие реализации $\xi(\omega)$ значение $\hat{\theta}$ из множества Θ возможных значений θ, которое мы будем использовать в качестве неизвестного нам параметра θ. Формально, для оценивания параметра θ на выборочном пространстве X — множестве реализаций выборки — необходимо определить (построить) функцию $h(\cdot)$ со значениями в Θ — множестве возможных значений параметра θ — такую, что значение

$$\hat{\theta} = h(\xi(\omega))$$

мы и будем использовать в качестве неизвестного параметра θ.

Определение. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — выборка, распределение $\mathsf{F}(\cdot;\theta)$ которой зависит от параметра $\theta \in \Theta$. Борелевскую функцию $h(\cdot)$, заданную на выборочном пространстве $X \subset \mathbb{R}^n$, со значениями в множестве Θ возможных значений параметра θ, будем называть *статистикой*, а случайную величину

$$\hat{\theta} = h(\xi) = h(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

— функцию от выборки — *оценкой.*

Получать (строить) статистики $h(\cdot)$, а вместе с ними и оценки $\hat{\theta} = h(\xi)$ параметра θ, точно (однозначно) определяющие неизвестный параметр θ:

$$\theta = \hat{\theta} = h(\xi),$$

заведомо не удастся уже хотя бы потому, что θ — константа, а оценка $\hat{\theta} = h(\xi)$, как функция от выборки, — случайная величина (для каждой реализации $\xi(\omega)$ значение $\hat{\theta} = h(\xi(\omega))$, используемое в качестве θ, свое). Поэтому, нравится нам это или нет, но оценку $\hat{\theta} = h(\xi)$ параметра θ мы можем рассматривать только как его приближенное значение.

Далее оборот "$\hat{\theta} = h(\xi)$ — оценка параметра θ" означает, что $\hat{\theta} = h(\xi)$ используется в качестве приближенного значения параметра θ; оборот "оценить параметр θ" означает получить приближенное значение $\hat{\theta} = h(\xi)$ параметра θ; оборот "$\hat{\theta} = h(\xi)$ — оценка" означает, что $\hat{\theta} = h(\xi)$ — функция (борелевская) от выборки.

Погрешности оценивания параметра. В связи с задачей оценивания неизвестного параметра θ распределения $\mathsf{F}(\cdot;\theta)$ по выборке ξ, как задачей получения приближенного значения $\hat{\theta} = h(\xi)$ (оценки) параметра θ, возникает вопрос о погрешности оценивания параметра θ оценкой $\hat{\theta}$ — о погрешности при замене θ его приближенным значением $\hat{\theta} = h(\xi)$. Говорить о $\hat{\theta} = h(\xi)$ как о приближенном значении параметра θ имеет смысл только тогда, когда мы имеем возможность оценить погрешность при замене θ на $\hat{\theta}$.

Пусть $\hat{\theta}$ — оценка параметра θ, т. е. $\hat{\theta} = h(\xi)$ рассматривается как приближенное значение параметра θ. В качестве погрешности при замене параметра θ его оценкой $\hat{\theta} = h(\xi)$ (в качестве количественной меры разброса значений оценки $\hat{\theta}$ относительно оцениваемого параметра θ) будем рассматривать величину

$$\mathsf{M}(\hat{\theta} - \theta)^2.$$

Перепишем $\mathsf{M}(\hat{\theta} - \theta)^2$ так:

$$\mathsf{M}(\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathsf{D}\hat{\theta} + (\mathsf{M}\hat{\theta} - \theta)^2$$

Величина разброса $\mathsf{M}(\hat{\theta} - \theta)^2$ оценки $\hat{\theta}$ относительно оцениваемого параметра θ (погрешность при замене θ на $\hat{\theta}$)

складывается из величины разброса самой оценки

$$\mathsf{M}(\hat{\theta} - \mathsf{M}\hat{\theta})^2 = \mathsf{D}\hat{\theta}$$

и величины $(\mathsf{M}\hat{\theta} - \theta)^2$.

Для оценивания параметра θ естественно использовать оценки $\hat{\theta}$, разброс $\mathsf{M}(\hat{\theta} - \theta)^2$ которых относительно θ (погрешность при замене θ на $\hat{\theta}$) как можно меньше. Из равенства

$$\mathsf{M}(\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathsf{D}\hat{\theta} + (\mathsf{M}\hat{\theta} - \theta)^2 \tag{14.1.1}$$

следует, что для этого от оценки $\hat{\theta}$ параметра θ необходимо потребовать, чтобы $\mathsf{M}\hat{\theta} = \theta$ и чтобы как можно меньшим был разброс $\mathsf{D}\hat{\theta}$ самой оценки $\hat{\theta}$.

В связи с этим вводятся следующие определения.

Определение. Оценку $\hat{\theta}$ будем называть *несмещенной оценкой параметра θ*, если

$$\mathsf{M}\hat{\theta} = \theta.$$

Наглядное содержание свойства несмещенности оценки $\hat{\theta}$ параметра θ состоит в том, что при многократном использовании $\hat{\theta}$ в качестве значения θ среднее значение погрешности $\hat{\theta} - \theta$ равно нулю.

Часто мы имеем возможность “наращивать” объем выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и в связи с этим рассматривать не одну оценку $\hat{\theta} = h(\xi) = h(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, а последовательность оценок $\hat{\theta}_n = h_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ В этом случае естественно говорить об их *асимптотическом поведении.*

Определение. Последовательность оценок

$$\hat{\theta}_n = h_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),\ n = 1, 2, \ldots,$$

будем называть *асимптотически несмещенной последовательностью оценок параметра θ*, если при $n \to \infty$

$$\mathsf{M}\hat{\theta}_n \to \theta.$$

Определение. Последовательность оценок

$$\hat{\theta}_n = h_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),\ n = 1, 2, \ldots,$$

будем называть *состоятельной последовательностью оценок параметра* θ, если для каждого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\} \to 0,$$

другими словами, если последовательность $\hat{\theta}_n$ сходится по вероятности к θ.

Сходимость по вероятности $\hat{\theta}_n$ к θ будем обозначать так:

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \theta.$$

Замечание. Согласно сложившейся в математической статистике традиции, выборкой называют не только случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, но и его реализацию, употребляя к тому же одни и те же обозначения как для случайного вектора ξ, так и для его реализации.

С интуитивной точки зрения, до проведения эксперимента, выборка — это случайный вектор, после проведения — реализация случайного вектора, хотя по-прежнему мы будем называть его выборкой.

Например, в эксперименте девять раз независимым образом измеряется точка плавления железа. "Будущий результат" эксперимента — случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_9)$, результат эксперимента (проведенного) — последовательность чисел: 1493, 1519, 1518, 1514, 1489, 1508, 1485, 1503, 1497 — реализация $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots$ $\ldots, \xi_9(\omega))$ случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_9)$.

Пример 14.1.1. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *— выборка из распределения с плотностью*

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{\textit{если} } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{\textit{если} } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Рассматриваются оценки

$$\hat{\theta}_1 = \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\},\ \ \hat{\theta}_2 = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\},$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \quad \hat{\theta}_4 = \frac{\xi_{n-1}+\xi_n}{2}.$$

Какие из оценок $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4$ и для каких параметров (возможно, отличных от a и b) являются несмещенными оценками? Состоятельными оценками?

Решение. Рассмотрим каждую из оценок.

Оценка $\hat{\theta}_2 = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Найдем сначала распределение $\hat{\theta}_2$. По условию $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из равномерного на промежутке $[a; b]$ распределения, т. е. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых распределена равномерно на промежутке $[a; b]$. Отсюда, учитывая, что распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ абсолютно непрерывны с плотностями $f(x; a, b)$, имеем

$$F_{\hat{\theta}_2}(x) = \mathsf{P}\{\hat{\theta}_2 < x\} = \mathsf{P}\{\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} < x\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < x, \ldots, \xi_n < x\} = \prod_{i=1}^{n}\mathsf{P}\{\xi_i < x\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{x} f(y; a, b)\,dy = \left(\int_{-\infty}^{x} f(y; a, b)\,dy\right)^n.$$

Поэтому $\hat{\theta}_2$ — абсолютно непрерывная случайная величина и ее плотность распределения

$$f_{\hat{\theta}_2}(x) = \frac{d}{dx}F_{\hat{\theta}_2}(x) = nf(x; a, b)\left(\int_{-\infty}^{x} f(y; a, b)\,dy\right)^{n-1}.$$

А поскольку

$$\int_{-\infty}^{x} f(y; a, b)\,dy = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \le x \le b; \\ 1, & \text{если } x > b, \end{cases}$$

то

$$f_{\hat{\theta}_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [a; b]; \\ \dfrac{n}{(b-a)^n}(x-a)^{n-1}, & \text{если } x \in [a; b]. \end{cases}$$

График плотности $f_{\hat{\theta}_2}(x)$ изображен на рис. 14.1.1.

По известной плотности распределения оценки $\hat{\theta}_2$ можем вычислить ее математическое ожидание:

$$\mathsf{M}\hat{\theta}_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{\hat{\theta}_2}(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b x\frac{n}{(b-a)^n}(x-a)^{n-1}\,dx = \frac{n}{n+1}b + \frac{a}{n+1}.$$

Следовательно, оценка $\hat{\theta}_2$ не является несмещенной оценкой ни параметра a, ни параметра b, но при $n \to \infty$

$$\mathsf{M}\hat{\theta}_2 = \frac{n}{n+1}b + \frac{a}{n+1} \to b.$$

Последнее обозначает, что $\hat{\theta}_2$ является асимптотически несмещенной оценкой параметра b.

Выясним, является ли $\hat{\theta}_2$ состоятельной оценкой параметра b, другими словами, сходится ли $\hat{\theta}_2$ по вероятности к b.

Для достаточно малых ε имеем

$$\mathsf{P}\{|\hat{\theta}_2 - b| > \varepsilon\} = \mathsf{P}\{\hat{\theta}_2 \in (-\infty, b-\varepsilon) \cup (b+\varepsilon, +\infty)\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{b-\varepsilon} f_{\hat{\theta}_2}(x)\,dx + \int\limits_{b+\varepsilon}^{+\infty} f_{\hat{\theta}_2}(x)\,dx = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f_{\hat{\theta}_2}(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{n}{(b-a)^n}(x-a)^{n-1}\,dx = \left(1 - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)^n,$$

что сходится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\mathsf{P}\{|\hat{\theta}_2 - b| > \varepsilon\} \to 0$$

при $n \to \infty$. Последнее обозначает, что $\hat{\theta}_2$ является состоятельной оценкой параметра b.

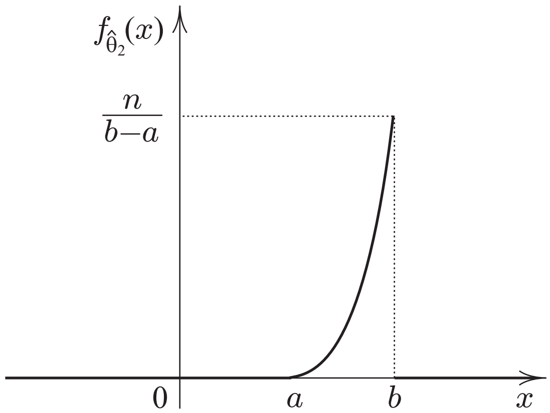


Рис. 14.1.1: Плотность распределения оценки $\hat{\theta}_2$

Оценка $\hat{\theta}_1 = \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Оценка $\hat{\theta}_1$ исследуется аналогично оценке $\hat{\theta}_2$.

Распределение оценки $\hat{\theta}_1$ абсолютно непрерывно с плотностью

$$f_{\hat{\theta}_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [a; b]; \\ \dfrac{n}{(b-a)^n}(b-x)^{n-1}, & \text{если } x \in [a; b]. \end{cases}$$

Отсюда

$$\mathsf{M}\hat{\theta}_1 = \frac{n}{n+1}a + \frac{b}{n+1}.$$

Поэтому $\hat{\theta}_1$ не является несмещенной оценкой ни параметра a, ни параметра b, но она является асимптотически несмещенной оценкой параметра a.

Оценка $\hat{\theta}_1$ является состоятельной оценкой параметра a (см. исследование оценки $\hat{\theta}_2$).

О ц е н к а $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$. Поскольку $\xi_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, — равномерно распределенные на промежутке $[a; b]$ случайные величины, а для них математическое ожидание m_1, как известно, равно $(a + b)/2$, то

$$\mathsf{M}\hat{\theta}_3 = \mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = m_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Следовательно, $\hat{\theta}_3$ не является несмещенной оценкой ни параметра a, ни параметра b, но $\hat{\theta}_3$ — несмещенная оценка параметра $m_1 = (a + b)/2$ — математического ожидания равномерного на промежутке $[a; b]$ распределения.

Далее, согласно закону больших чисел оценка

$$\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

сходится по вероятности к $m_1 = (a + b)/2$, т. е. $\hat{\theta}_3$ — состоятельная оценка параметра $m_1 = (a + b)/2$.

О ц е н к а $\hat{\theta}_4 = (\xi_{n-1} + \xi_n)/2$. Для оценки $\hat{\theta}_4$

$$\mathsf{M}\hat{\theta}_4 = \mathsf{M}\frac{\xi_{n-1}+\xi_n}{2} = \frac{1}{2}(\mathsf{M}\xi_{n-1} + \mathsf{M}\xi_n) = \frac{a+b}{2}.$$

Следовательно, $\hat{\theta}_4$ — несмещенная оценка параметра $m_1 = (a + b)/2$.

Оценка $\hat{\theta}_4$ не сходится по вероятности ни к одной константе (параметру). В самом деле, плотностью распределения случайной величины $\hat{\theta}_4 = (\xi_{n-1} + \xi_n)/2$ является функция

$$f_{\hat{\theta}_4}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [a; b]; \\ \dfrac{4}{(b-a)^2}(x-a), & \text{если } x \in [a, \dfrac{a+b}{2}]; \\ \dfrac{4}{(b-a)^2}(b-x), & \text{если } x \in [\dfrac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

(сначала получена плотность суммы $\xi_{n-1} + \xi_n$ как свертка плотностей равномерных на промежутке $[a; b]$ распределений, а затем учтен коэффициент $1/2$, график $f_{\hat{\theta}_4}(x)$ изображен на рис. 14.1.2). Поэтому для любого параметра θ и произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ вероятность

$$\mathsf{P}\{|\hat{\theta}_4 - \theta| > \varepsilon\} = \int\limits_{\{x:|x-\theta|>\varepsilon\}} f_{\hat{\theta}_4}(x)dx$$

не зависит от n (численно она равна площади заштрихованной фигуры (см. рис. 14.1.2)) и, следовательно, $\hat{\theta}_4$ не сходится к θ по вероятности при $n \to \infty$.

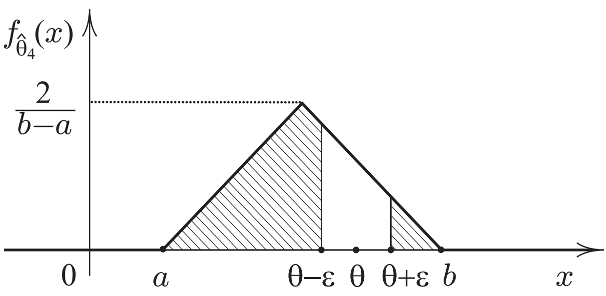


Рис. 14.1.2: Плотность распределения оценки $\hat{\theta}_4$

14.2 Доверительные интервалы

Помимо точечного оценивания параметров распределения, используют так называемое *интервальное оценивание*, суть которого состоит в том, что для неизвестного параметра находят интервал, содержащий его с заданной (достаточно большой) вероятностью. Рассмотрим доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

Доверительный интервал для a. Для выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из распределения $N_{a;\sigma^2}$ случайная величина $(\bar{\xi} - a)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}}$ имеет t-распределение с $n-1$ степенями свободы. Поэтому

$$\mathsf{P}\left\{|\bar{\xi} - a|\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} < t_{\alpha;n-1}\right\} = 1 - 2\alpha \tag{14.2.2}$$

или

$$\mathsf{P}\left\{\bar{\xi} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1} < a < \bar{\xi} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1}\right\} = 1 - 2\alpha,$$

где $t_{\alpha;m}$ — верхний α-предел t-распределения с m степенями свободы (см. гл. 22 и табл. 22.3.1). Другими словами, интервал

$$\left(\bar{\xi} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1},\ \bar{\xi} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1}\right) \tag{14.2.3}$$

содержит неизвестный параметр a с вероятностью $1-2\alpha$. Интервал (14.2.3) называют *доверительным интервалом* для параметра a с коэффициентом надежности $1 - 2\alpha$ (координата $\bar{\xi}$ середины доверительного интервала и его длина $2\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1}$ — случайные величины). Как правило, для коэффициента надежности выбирают значения 0,99; 0,98; 0,95; 0,90.

Коэффициенту надежности $1-2\alpha$ можно дать следующую частотную интерпретацию: если провести достаточно длинную серию независимых экспериментов, скажем 100, то число тех экспериментов, в которых доверительный интервал (14.2.3) содержит неизвестный параметр a, близка к $100(1 - 2\alpha)$.

Из равенства (14.2.2), переписанного в виде

$$\mathsf{P}\left\{|\bar{\xi} - a| < \frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1}\right\} = 1 - 2\alpha,$$

следует, что погрешность при замене параметра a его точечной оценкой $\overline{\xi}$ не превосходит $\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha;n-1}$ (с вероятностью $1-2\alpha$).

Доверительный интервал для $\boldsymbol{\sigma^2}$. Если $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ — выборка из распределения $N_{a;\sigma^2}$, то случайная величина $(n-1)s^2/\sigma^2$ имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенями свободы. Поэтому

$$\mathsf{P}\left\{\chi^2_{1-\alpha;n-1}<\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\alpha;n-1}\right\}=1-2\alpha$$

или

$$\mathsf{P}\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha;n-1}}<\sigma^2<\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha;n-1}}\right\}=1-2\alpha$$

($\chi^2_{\beta;m}$ — верхний β-предел χ^2-распределения с m степенями свободы, см. гл. 22 и табл. 22.2.1). То есть интервал

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha;n-1}},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha;n-1}}\right) \tag{14.2.4}$$

содержит неизвестный параметр σ^2 с вероятностью $1-2\alpha$. Другими словами, интервал (14.2.4) является доверительным интервалом для параметра σ^2 (дисперсии нормального распределения) с коэффициентом надежности $1-2\alpha$.

Пример 14.2.1. *Найти доверительный интервал для среднего показаний микроскопа I* (*см. пример* 17.3.1) *с коэффициентом надежности:* 1) 0,90*;* 2) 0,99.

Решение. Показания микроскопа естественно считать реализацией выборки из нормального распределения. Доверительный интервал для параметра a (математического ожидания) нормального распределения имеет вид (14.2.3). В рассматриваемом примере $n=12$, $\overline{\xi}=2{,}34$, $s^2=1{,}66$, $t_{0{,}05;11}=1{,}796$, $t_{0{,}005;11}=3{,}106$. Поэтому доверительным интервалом для параметра a с коэффициентом надежности 0,90 является интервал (1,68; 3), а доверительным интервалом с коэффициентом надежности 0,99 — интервал (1,19; 3,49) (фактически найдены реализации доверительных интервалов, хотя мы говорим о доверительных интервалах).

Обратим внимание на то, что за увеличение коэффициента надежности мы “расплачиваемся” расширением доверительного интервала, и наоборот — чем уже доверительный интервал, тем меньше коэффициент надежности.

Пример 14.2.2. *Найти доверительный интервал для дисперсии разности урожаев* (*см. пример* 17.2.1) *с коэффициентом надежности:* 1) 0,90*;* 2) 0,98.

Решение. Разность урожаев естественно считать реализацией выборки из нормального распределения. Доверительный интервал для параметра σ^2 (дисперсии) нормального распределения имеет вид (14.2.4). В рассматриваемом примере $n = 10$, $s^2 = 0{,}667$, $\chi^2_{0,95;9} = 3{,}32$, $\chi^2_{0,05;9} = 16{,}92$, $\chi^2_{0,99;9} = 2{,}9$, $\chi^2_{0,01;9} = 21{,}67$. Поэтому доверительным интервалом для параметра σ^2 с коэффициентом надежности 0,90 (точнее, реализацией доверительного интервала, построенного по выборке) является интервал (0,35; 1,81), а с коэффициентом надежности 0,99 — интервал (0,28; 2,07).

14.3 Оценки с минимальной дисперсией

Погрешность при замене параметра θ оценкой $\hat\theta$ мы “измеряем” величиной

$$\mathsf{M}(\hat\theta - \theta)^2 = \mathsf{D}\hat\theta + (\mathsf{M}\hat\theta - \theta)^2$$

(см. (14.1.1)). Для оценивания параметра θ следует использовать оценки $\hat\theta$, у которых $\mathsf{M}(\hat\theta-\theta)^2$ как можно меньше. Из последнего равенства следует, что для этого естественно использовать несмещенные оценки $\hat\theta$ параметра θ — оценки, у которых $\mathsf{M}\hat\theta = \theta$. У несмещенных оценок $\hat\theta$

параметра θ погрешность $\mathsf{M}(\hat{\theta}-\theta)^2$ при замене θ на $\hat{\theta}$ равна $\mathsf{D}\hat{\theta}$. Поэтому для оценивания параметра θ из семейства его несмещенных оценок естественно выбирать те, которые имеют по возможности меньшую дисперсию $\mathsf{D}\hat{\theta}$, а в идеале минимально возможную.

Определение. Несмещенную оценку θ^* параметра θ будем называть его *наилучшей оценкой, оценкой минимальной дисперсии* или *эффективной оценкой*, если

$$\mathsf{D}\theta^* = \inf_{\hat{\theta}:\mathsf{M}\hat{\theta}=\theta} \mathsf{D}\hat{\theta}.$$

В связи с этим определением естественно возникает вопрос: насколько малой может быть минимально возможная дисперсия оценки (насколько малыми могут быть отклонения $\hat{\theta}$ от θ)? Оказывается, что если семейство распределений $\mathsf{F}(\cdot;\theta), \theta \in \Theta$, выборки $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ достаточно регулярно зависит от оцениваемого параметра θ, то можно указать нижнюю границу дисперсий всех несмещенных оценок параметра (неравенство Крамера—Рао). В некоторых случаях существуют оценки параметра, на которых нижняя граница достигается. Эти оценки являются эффективными. Сравнивая дисперсию данной оценки с нижней границей дисперсий несмещенных оценок, можно выяснить, насколько оценка близка к наилучшей возможной.

Пусть выборка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ фиксированного объема n имеет плотность распределения

$$f(x;\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta).$$

Параметр θ будем считать одномерным, а относительно множества его возможных значений Θ предположим, что оно является конечным интервалом числовой прямой.

Неравенство Крамера—Рао (распределение абсолютно непрерывное). Напомним условие дифференцируемости функции по параметру под знаком интеграла.

Теорема 14.3.1. *Если функция $f(x;\theta)$, $(x,\theta) \in \mathbb{R}^n \times$ $\times (a,b)$, дифференцируема по θ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и* *производная* $\dfrac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)$ *мажорируема интегрируемой функцией:*

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)\right| \le Y(x), \ \int\limits_{\mathbb{R}^n} Y(x)dx < \infty,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x;\theta)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)dx.$$

Определение. Функцию

$$I(\theta) = \mathsf{D}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\xi;\theta), \ \theta\in\Theta,$$

будем называть *количеством информации по Фишеру.*

Теорема 14.3.2 (неравенство Крамера—Рао). *Пусть* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *— абсолютно непрерывный выборочный вектор с плотностью* $f(x;\theta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta\in\Theta$, *и* $\hat\theta = h(\xi)$ *— несмещенная оценка параметра* θ.

Если функции $f(x;\theta)$ *и* $h(x)f(x;\theta)$ *удовлетворяют условиям дифференцируемости по параметру* $\theta\in\Theta$ *под знаком интеграла (см. теорему 14.3.1), причем* $f(x;\theta)$ *— дифференцируемости дважды, и*

$$\mathsf{M}\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\xi;\theta)\right| < \infty,$$

то $I(\theta) < \infty$ *и*

$$\mathsf{D}\hat\theta \ge \frac{1}{I(\theta)}, \tag{14.3.5}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) = C(\theta)(h(x)-\theta).$$

Следствие 1. *Если оценка* $\hat\theta = \theta^*$ *удовлетворяет условиям теоремы и для нее неравенство Крамера—Рао*

$$\mathsf{D}\hat\theta \ge \frac{1}{I(\theta)}$$

обращается в равенство, то θ^* *является эффективной оценкой параметра* θ.

С л е д с т в и е 2. *Если для плотности распределения* $f(x;\theta)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ *выборки* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ *и оценки* $\hat{\theta} = h(\xi)$, *удовлетворяющих условиям теоремы, имеет место соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x;\theta) = c(\theta)(h(x) - \theta),$$

то $h(\xi)$ — *эффективная оценка параметра* θ.

Неравенство Крамера—Рао (распределение дискретное). Неравенство Крамера—Рао и утверждения, аналогичные приведенным выше, имеют место также тогда, когда распределение $\mathsf{P}(\cdot;\theta)$ выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ дискретно, т. е. существует не более чем счетное множество точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых

$$\mathsf{P}_\xi(x) = \mathsf{P}(x;\theta) = \mathsf{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta) =$$

$$= \mathsf{P}(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_n = x_n;\theta) > 0,$$

$$\sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \mathsf{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta) = 1.$$

Т е о р е м а 14.3.3. *Если функция* $\mathsf{P}(x;\theta)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $\theta \in \Theta$, *при всех* x *дифференцируема по параметру* θ *и ряд*

$$\sum_{x \in X} \frac{\partial}{\partial\theta} \mathsf{P}(x;\theta)$$

сходится абсолютно и равномерно относительно $\theta \in \Theta$, *то ряд* $\sum\limits_{x \in X} \mathsf{P}(x;\theta)$ *можно почленно дифференцировать по параметру:*

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{x \in X} \mathsf{P}(x;\theta) = \sum_{x \in X} \frac{\partial}{\partial\theta} \mathsf{P}(x;\theta).$$

Т е о р е м а 14.3.4 (неравенство Крамера—Рао, распределение дискретное). *Пусть* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — *дискретный выборочный вектор с распределением* $\mathsf{P}_\xi(x) = \mathsf{P}(x;\theta)$, $x \in X$, $\theta \in \Theta$ *и* $\hat\theta = h(\xi)$ — *несмещенная оценка параметра* θ.

Если ряды

$$\sum_{x\in X} \mathsf{P}(x;\theta) \ \text{и} \ \sum_{x\in X} h(x)\mathsf{P}(x;\theta)$$

удовлетворяют условиям дифференцируемости по параметру $\theta \in \Theta$ (*см. теорему* 14.3.3), *причем ряд* $\sum\limits_{x\in X} \mathsf{P}(x;\theta)$ — *дифференцируемости дважды, и*

$$\mathsf{M}\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln \mathsf{P}(\xi;\theta)\right| < \infty,$$

то $I(\theta) < \infty$ *и*

$$\mathsf{D}\hat\theta \geq \frac{1}{I(\theta)},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln \mathsf{P}(x;\theta) = C(\theta)(h(x) - \theta).$$

С л е д с т в и е 1. *Если оценка* $\hat\theta = \theta^*$ *удовлетворяет условиям теоремы и для нее неравенство Крамера—Рао*

$$\mathsf{D}\hat\theta \geq \frac{1}{I(\theta)}$$

обращается в равенство, то θ^* *является эффективной оценкой параметра* θ.

С л е д с т в и е 2. *Если для распределения* $\mathsf{P}(x;\theta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *выборки* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ *и оценки* $\hat\theta = h(\xi)$, *удовлетворяющих условиям теоремы, имеет место соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln \mathsf{P}(x;\theta) = c(\theta)(h(x)-\theta),$$

то $h(\xi)$ *— эффективная оценка параметра* θ*.*

Пример 14.3.1. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *— выборка из нормального распределения с параметрами* $(\theta; 1)$, θ *принадлежит отрезку* $[a; b]$*. Является ли*

$$\hat\theta = \overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

эффективной оценкой параметра θ?

Решение. Оценка $\hat\theta = \overline{\xi}$ является несмещенной оценкой математического ожидания θ. Чтобы выяснить, будет ли $\hat\theta = \overline{\xi}$ эффективной оценкой θ, воспользуемся неравенством Крамера—Рао (см. следствие 1 из теоремы 14.3.2): если

$$\mathsf{D}\hat\theta = \frac{1}{I(\theta)},$$

то оценка $\hat\theta$ — эффективная.

Сначала убедимся, что для выборки из нормального распределения с параметрами $(\theta; 1)$ и функции

$$h(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

выполняются условия теоремы 14.3.2.

Обозначим через $g(t;\theta)$ плотность нормального распределения с параметрами $(\theta; 1)$. Плотность

$$f(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i;\theta)$$

распределения вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ дважды дифференцируема по θ и

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln\prod_{i=1}^{n} g(x_i;\theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln g(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta), \tag{14.3.6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(x;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta) = -n,$$

$$\mathsf{M}\left|\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(\xi;\theta)\right| = \mathsf{M}|-n| = n < \infty.$$

Далее, функция $h(x)f(x;\theta)$ дифференцируема по θ, причем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(h(x)f(x,\theta)) = \frac{\partial}{\partial\theta}(h(x_1,x_2,\ldots,x_n)f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\overline{x}\prod_{j=1}^{n} g(x_j;\theta) = \sum_{i=1}^{n}\overline{x}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}g(x_i;\theta)\right)\prod_{j=1,j\neq i}^{n} g(x_j;\theta) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\left(\frac{\partial}{\partial\theta}g(x_i;\theta)\right)\prod_{j=1,j\neq i}^{n} g(x_j;\theta) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(x_i-\theta)\prod_{j=1}^{n} g(x_j;\theta).$$

Мы воспользовались тем, что

$$\frac{\partial}{\partial\theta}g(x_i;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left\{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2}\right\} =$$

$$= (x_i-\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left\{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2}\right\} = (x_i-\theta)g(x_i;\theta).$$

Чтобы убедиться в существовании интегрируемой мажоранты для функции $h(x)\dfrac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)$, достаточно установить, что она существует для каждой из функций

$$x_k x_i \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\theta),\ \ k,i = 1,2,\ldots,n;\ \ \theta\in[a;b].$$

Пусть
$$c = \max_{t,\theta \in [a;b]} g(t;\theta)$$

и $v(t)$ — функция, определенная равенством

$$v(t) = \begin{cases} g(t;b), & \text{если } t > b; \\ g(t;a), & \text{если } t < a; \\ c, & \text{если } a \le t \le b. \end{cases}$$

Функция $|t|v(t)$ является интегрируемой мажорантой для функции $tg(t;\theta)$, $\theta \in [a;b]$. В последнем убеждаемся непосредственной проверкой. Поэтому функция

$$|x_k|v(x_k)|x_i|v(x_i) \prod_{j=1, j\neq i, j\neq k}^{n} v(x_j)$$

является интегрируемой мажорантой для функции

$$x_k x_i \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\theta).$$

В этом легко убедиться, воспользовавшись теоремой Фубини.

Таким образом, условие теоремы 14.3.2 выполняется и, следовательно, неравенство Крамера—Рао имеет место:

$$\mathsf{D}\hat{\theta} \ge \frac{1}{I(\theta)}.$$

А поскольку

$$I(\theta) = \mathsf{M}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\xi;\theta)\right)^2 = -\mathsf{M}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(\xi;\theta)\right) = n,$$

$$\mathsf{D}\hat{\theta} = \mathsf{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \frac{1}{n^2} n \mathsf{D}\xi_i = \frac{1}{n},$$

то неравенство Крамера—Рао обращается в равенство, что является достаточным условием эффективности оценки $\hat{\theta}$ параметра θ.

Другой способ решения примера состоит в проверке достаточного условия обращения неравенства Крамера—Рао в равенство, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) = c(\theta)(h(x)-\theta),\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Из (14.3.6) имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i - n\theta = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i - \theta\right) = n(h(x)-\theta).$$

Поэтому $\hat{\theta} = \overline{\xi}$ — эффективная оценка параметра θ.

Пример 14.3.2. *Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — выборка из пуассоновского распределения с параметром λ (λ принадлежит отрезку $[a;b]$, $a>0$). Является ли $\hat{\lambda}=\overline{\xi}$ эффективной оценкой параметра λ?*

Решение. Отметим, что $\hat{\lambda}=\overline{\xi}$ является несмещенной оценкой λ. Далее воспользуемся неравенством Крамера—Рао. Убедимся, что для выборки из пуассоновского распределения и функции

$$h(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$$

выполняются условия теоремы 14.3.4 (неравенство Крамера—Рао). Обозначим $\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ через $g(x;\lambda)$, $x=0,1,\ldots$ Распределением выборки $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ является

$$\mathsf{P}(x;\lambda) = \mathsf{P}(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda) = \prod_{j=1}^n g(x_j;\lambda) = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda^{x_j}}{x_j!}e^{-\lambda}.$$

Функция $\mathsf{P}(x;\lambda)$ дважды дифференцируема по λ и

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\mathsf{P}(x;\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\prod_{j=1}^{n}g(x_j;\lambda)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln g(x_j;\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\lambda), \tag{14.3.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln\mathsf{P}(x;\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\lambda)\right)=-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=1}^{n}x_j\,,$$

$$\mathsf{M}\left|\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln\mathsf{P}(\xi;\lambda)\right|=\mathsf{M}\left(\frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)=\frac{1}{\lambda^2}n\lambda=\frac{n}{\lambda}<\infty.$$

Функция

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mathsf{P}(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda)=\overline{x}\,\mathsf{P}(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda)$$

дифференцируема по λ, причем

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathsf{P}(x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda)=$$

$$=\overline{x}\frac{\partial}{\partial\lambda}\prod_{j=1}^{n}g(x_j;\lambda)=\overline{x}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}g(x_i;\lambda)\right)\prod_{j=1,j\neq i}^{n}g(x_j;\lambda)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_k\left(\frac{x_i}{\lambda}-1\right)\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}g(x_j;\lambda)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_k\left(\frac{x_i}{\lambda}-1\right)\prod_{j=1}^{n}g(x_j;\lambda),$$

поскольку

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}g(x_i;\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right)=\left(\frac{x_i}{\lambda}-1\right)g(x_i;\lambda).$$

Далее при суммировании по $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ величины x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ принимают целые неотрицательные значения.

Ряд

$$\sum_x h(x) \frac{\partial}{\partial\lambda} \mathsf{P}(x;\lambda) =$$

$$= \sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_k \left(\frac{x_i}{\lambda} - 1 \right) \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\lambda) \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} x_k \left(\frac{x_i}{\lambda} - 1 \right) \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\lambda) \right)$$

мажорируется рядом

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} x_k \left| \frac{x_i}{\lambda} - 1 \right| \prod_{j=1}^{n} g(x_j;\lambda) \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\sum_{x_1} g(x_1;\lambda) \right) \left(\sum_{x_2} g(x_2;\lambda) \right) \ldots \right.$$

$$\ldots \left(\sum_{x_k} x_k g(x_k;\lambda) \right) \ldots \left(\sum_{x_i} \left| \frac{x_i}{\lambda} - 1 \right| g(x_i;\lambda) \right) \ldots$$

$$\left. \ldots \left(\sum_{x_n} g(x_n;\lambda) \right) \right).$$

Последний сходится абсолютно и равномерно относительно $\lambda \in [a; b]$, поскольку

$$\sum_x g(x;\lambda) = \sum_x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \le e^{-a} \sum_x \frac{b^x}{x!} = e^{b-a},$$

$$\sum_x x g(x;\lambda) = \sum_x x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \le$$

$$\leq e^{-a}\sum_x x\frac{b^x}{x!} \leq e^{b-a}\sum_x x\frac{b^x}{x!}e^{-b} = be^{b-a},$$

$$\sum_x \left|\frac{x}{\lambda}-1\right|\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \leq e^{b-a}\left(\frac{b}{a}+1\right).$$

Так что для выборки из пуассоновского распределения и функции

$$h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

выполняются условия теоремы 14.3.4 и, следовательно, имеет место неравенство Крамера—Рао

$$\mathsf{D}\hat{\lambda} \geq \frac{1}{I(\lambda)}.$$

При этом

$$I(\lambda) = \mathsf{M}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\mathsf{P}_\lambda(\xi)\right)^2 =$$

$$= -\mathsf{M}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln\mathsf{P}_\lambda(\xi) = -\mathsf{M}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right) = \frac{n}{\lambda},$$

$$\mathsf{D}\hat{\lambda} = \mathsf{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right) = \frac{1}{n^2}n\mathsf{D}\xi_1 = \frac{1}{n^2}n\lambda = \frac{\lambda}{n}.$$

Поэтому для выборки из пуассоновского распределения и оценки $\hat{\lambda} = \overline{\xi}$ неравенство Крамера—Рао обращается в равенство, а, следовательно, $\overline{\xi}$ — эффективная оценка параметра λ.

Другой способ решения примера состоит в проверке достаточного условия обращения неравенства Крамера—Рао в равенство, а именно, условия

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\mathsf{P}(x;\lambda) = c(\lambda)(h(x)-\lambda).$$

Из равенства (14.3.7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln \mathsf{P}(x;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j - n\lambda\right) = \frac{n}{\lambda}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j - \lambda\right) = \frac{n}{\lambda}(h(x)-\lambda).$$

Поэтому $\hat{\lambda} = \overline{\xi}$ — эффективная оценка параметра λ.

14.4 Задачи

АЗ: 14.4, 14.6, 14.27, 14.43.
СЗ: 14.8, 14.9, 14.22, 14.47.

14.1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & \text{если } x \in [\theta-h;\theta+h]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta-h;\theta+h]. \end{cases}$$

Обозначим через $(\hat{\theta},\hat{h})$ точку, в которой функция

$$L(\theta,h) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i;\theta,h)$$

достигает наибольшего значения.

Являются ли $\hat{\theta},\hat{h}$ оценками и, если да, то будут ли они несмещенными оценками параметров θ и h? Состоятельными оценками этих параметров? Если нет, то, возможно, $\hat{\theta}$ и $\hat{h}$ являются несмещенными и состоятельными оценками других параметров распределения?

14.2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения

$$\mathsf{P}(k;r,\theta) = C_{k+r-1}^{r-1}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{r}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{k},\ k=0,1,2,\ldots,$$

r — фиксированное и известное, параметр $\theta > 0$,

$$m_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathsf{P}(k; r, \theta).$$

Обозначим через $\hat{\theta}$ решение уравнения

$$m_1(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Является ли $\hat{\theta}$ оценкой и если да, то будет ли она несмещенной оценкой параметра θ? Состоятельной оценкой θ?

Замечание. Если обозначить $\dfrac{1}{1+\theta} = p$, то распределение

$$\mathsf{P}(k; r, \theta) = C_{k+r-1}^{r-1} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \ k = 0, 1, \ldots,$$

принимает вид

$$\mathsf{P}(k; r, p) = C_{k+r-1}^{r-1}\, p^r (1-p)^k, \ k = 0, 1, \ldots,$$

хорошо известного отрицательного биномиального распределения (см. задачу 15.35).

14.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\},$$

σ^2 принадлежит конечному отрезку $[a; b]$, $a > 0$.

Является ли

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

эффективной оценкой параметра σ^2?

14.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Рассматриваются оценки

$$\hat{\theta}_1 = \min\{\xi_i\};\ \hat{\theta}_2 = \max\{\xi_i\};\ \hat{\theta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i;$$

$$\hat{\theta}_4 = \frac{\xi_{n-1} + \xi_n}{2};\ \hat{\theta}_5 = \max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\};$$

$$\hat{\theta}_6 = \frac{1}{2}(\max\{\xi_i\} + \min\{\xi_i\});$$

$$\hat{\theta}_7 = \min\{\xi_i\} - \frac{1}{n-1}(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\});$$

$$\hat{\theta}_8 = \max\{\xi_i\} + \frac{1}{n-1}(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\}).$$

Выяснить, какие из оценок $\hat{\theta}_i, i = 1, 2, \ldots, 8$, являются несмещенными, состоятельными оценками параметров a и b. Возможно, среди них имеются несмещенные и состоятельные оценки параметров, отличных от a и b?

14.5. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из пуассоновского распределения с параметром λ:

$$\mathsf{P}(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0, 1, \ldots$$

Обозначим через $\hat{\lambda}$ точку, в которой функция

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\xi_i; \lambda)$$

достигает своего наибольшего значения.

Является ли $\hat{\lambda}$ оценкой и если да, то будет ли она несмещенной оценкой параметра λ? Состоятельной оценкой λ?

14.6. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0 \end{cases}$$

($p(x)$ — плотность логарифмически нормального распределения), μ_0 — известно, $\sigma^2 > 0$ и принадлежит конечному отрезку $[a; b]$, $a > 0$.

Является ли

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\ln \xi_i - \mu_0)^2$$

эффективной оценкой параметра σ^2?

14.7. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } x \in [\theta - 1, \theta + 1]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta - 1, \theta + 1]. \end{cases}$$

Обозначим через $\hat{\theta}$ точку, в которой функция

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; \theta)$$

достигает своего наибольшего значения.

Является ли $\hat{\theta}$ оценкой и если да, то будет ли она несмещенной оценкой параметра θ? Состоятельной оценкой θ?

14.8. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \alpha, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} \exp\left\{-\dfrac{1}{\alpha}(x - \theta)\right\}, & \text{если } x \ge \theta; \\ 0, & \text{если } x < \theta. \end{cases}$$

Рассматриваются оценки

$$\hat{\theta}_1 = \min\{\xi_i\} - \frac{\overline{\xi} - \min\{\xi_i\}}{n}, \ \hat{\theta}_2 = \overline{\xi} - \hat{\theta}_1.$$

Несмещенными, состоятельными оценками каких параметров являются $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ (возможно, эти параметры отличны от α и θ)?

14.9. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma_0^2}\right\},$$

σ_0 — известно, θ принадлежит конечному отрезку $[a;b]$.

Является ли

$$\hat{\theta} = \overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

эффективной оценкой параметра θ?

14.10. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \theta; \\ \exp\{\theta - x\}, & \text{если } x \geq \theta. \end{cases}$$

Является ли

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{n} + \min\{\xi_i\}$$

несмещенной оценкой параметра θ? Состоятельной оценкой θ?

14.11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;a,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Обозначим через $(\hat{a}, \hat{\sigma}^2)$ точку, в которой функция

$$L(a, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; a, \sigma^2)$$

достигает своего наибольшего значения.

Являются ли $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}^2$ оценками и если да, то будут ли они несмещенными оценками соответственно параметров a и σ^2? Состоятельными оценками этих параметров?

14.12. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения

$$\mathsf{P}(k; \theta) = C_{k+r-1}^{r-1} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \; k = 0, 1, \ldots, \; \theta > 0,$$

r — фиксировано и известно, θ принадлежит конечному отрезку $[a; b]$.

Является ли

$$\hat{\theta} = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

эффективной оценкой параметра θ?

Указание. См. задачу 14.2.

14.13. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h_0}, & \text{если } x \in [\theta - h_0, \theta + h_0]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta - h_0, \theta + h_0]. \end{cases}$$

Обозначим через $\hat{\theta}$ точку, в которой функция $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; \theta)$ достигает своего наибольшего значения.

Является ли $\hat{\theta}$ оценкой и если да, то будет ли она несмещенной оценкой параметра θ? Состоятельной оценкою θ?

14.14. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \theta, \sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{3\sigma^2}}, & \text{если } x \in [\theta - \sqrt{3\sigma^2}, \theta + \sqrt{3\sigma^2}]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta - \sqrt{3\sigma^2}, \theta + \sqrt{3\sigma^2}]. \end{cases}$$

Обозначим через $\hat{\theta}$, $\hat{\sigma^2}$ решение системы уравнений

$$m_1(\hat{\theta}; \hat{\sigma^2}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

$$m_2(\hat{\theta}; \hat{\sigma^2}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,$$

где

$$m_k(\theta; \sigma^2) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^k f(x; \theta, \sigma^2)\, dx,\ \ k = 1, 2.$$

Являются ли $\hat{\theta}$ и $\hat{\sigma^2}$ оценками и, если да, являются ли они несмещенными оценками соответственно параметров θ и σ^2? Состоятельными оценками этих параметров?

14.15. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения

$$\mathsf{P}(k; \theta) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k,\ \ k = 0, 1, \ldots,$$

где $\theta > 0$ и принадлежит конечному отрезку $[a; b]$.

Является ли

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

эффективной оценкой параметра θ?

Указание. Если обозначить $\dfrac{1}{1+\theta} = p$, то распределение

$$\mathsf{P}(k; \theta) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k,\ \ k = 0, 1, \ldots$$

принимает вид хорошо известного геометрического распределения

$$\mathsf{P}(k; p) = p(1-p)^k,\ \ k = 0, 1, \ldots$$

14.16. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h_0}, & \text{если } x \in [\theta - h_0, \theta + h_0]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta - h_0, \theta + h_0], \end{cases}$$

h_0 — известно ($f(x;\theta)$ — плотность равномерного на промежутке $[\theta - h_0, \theta + h_0]$ распределения).

Рассматриваются оценки

$$\hat{\theta}_1 = \min\{\xi_i\};\ \hat{\theta}_2 = \max\{\xi_i\};\ \hat{\theta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i;$$

$$\hat{\theta}_\lambda = \lambda(\max\{\xi_i\} - h_0) + (1-\lambda)(\min\{\xi_i\} + h_0),\ \lambda \in [0;1].$$

Выяснить, имеются ли среди оценок $\hat{\theta}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\hat{\theta}_\lambda$ несмещенные, состоятельные оценки параметра θ. Возможно, среди них имеются несмещенные, состоятельные оценки других параметров? Каких именно?

14.17. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из нормального распределения с плотностью

$$f(x;a,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Обозначим через $\hat{a}, \hat{\sigma}^2$ решение системы уравнений

$$m_1(\hat{a};\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i,$$

$$m_2(\hat{a};\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

где

$$m_k(a;\sigma^2) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^k f(x;a,\sigma^2)\,dx,\ k = 1, 2.$$

Являются ли $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}^2$ оценками? И если да, то являются ли $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}^2$ несмещенными оценками соответственно параметров a и σ^2? Состоятельными оценками этих параметров?

14.18. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; m, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^m (m-1)!} x^{m-1} \exp\left\{-\dfrac{1}{\theta} x\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0 \end{cases}$$

($f(x; m, \theta)$ — плотность распределения Эрланга с параметрами (m, θ)), m известно, θ принадлежит конечному отрезку $[a; b]$.

Является ли

$$\hat{\theta} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

эффективной оценкой параметра θ?

14.19. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Обозначим через $(\hat{a}, \hat{b})$ точку, в которой функция

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; a, b)$$

достигает своего наибольшего значения (может существовать не одна такая точка).

Являются ли $\hat{a}$ и $\hat{b}$ оценками? Если да, то являются ли $\hat{a}$ и $\hat{b}$ несмещенными оценками соответственно параметров a и b? Состоятельными оценками этих параметров?

14.20. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения

$$\mathsf{P}(k; \theta) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \; k = 0, 1, \ldots; \; \theta > 0.$$

Обозначим через $\hat{\theta}$ решение уравнения

$$m_1(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

где

$$m_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathsf{P}(k;\theta).$$

Является ли $\hat{\theta}$ оценкой? И если да, то является ли она несмещенной оценкой параметра θ? Состоятельной оценкой θ?

Указание. См. задачу 14.15.

14.21. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\exp\left\{-\dfrac{1}{\theta}x\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0, \end{cases}$$

параметр $\theta > 0$ (θ принадлежит конечному отрезку $[a;b]$).

Является ли

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

эффективной оценкой параметра θ?

14.22. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & \text{если } x \in [\theta - h, \theta + h]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta - h, \theta + h]. \end{cases}$$

Рассматриваются оценки

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{2}\left(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\}\right); \ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(\max\{\xi_i\} + \min\{\xi_i\});$$

$$\hat{\theta}_3 = \min\{\xi_i\} - \frac{1}{n-1}(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\});$$

$$\hat{\theta}_4 = \max\{\xi_i\} + \frac{1}{n-1}(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\}).$$

Выяснить, имеются ли среди $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, несмещенные, состоятельные оценки параметров θ и h. Возможно, среди них имеются несмещенные, состоятельные оценки других параметров? Каких именно?

14.23. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения

$$\mathsf{Q}(k; p) = p^k (1-p)^{1-k}, \; k = 0, 1; \; 0 < p < 1.$$

Обозначим через $\hat{p}$ точку, в которой функция

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{\xi_i}(1-p)^{1-\xi_i}$$

достигает своего наибольшего значения.

Является ли $\hat{p}$ несмещенной оценкой параметра p? Состоятельной оценкой этого параметра?

14.24. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\exp\left\{-\dfrac{1}{\theta}(x - m_0)\right\}, & \text{если } x > m_0; \\ 0, & \text{если } x \le m_0, \end{cases}$$

параметр $\theta > 0$ (m_0 — известно, θ принадлежит конечному отрезку $[a; b]$).

Является ли $\hat{\theta} = \overline{\xi} - m_0$ эффективной оценкой параметра θ?

14.25. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & \text{если } x \in [\theta_0 - h, \theta_0 + h]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta_0 - h, \theta_0 + h]; \end{cases}$$

θ_0 задано.

Рассматриваются оценки

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{2}\left(\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\}\right); \ \hat{\theta}_2 = \theta_0 - \hat{\theta}_1;$$

$$\hat{\theta}_3 = \theta_0 + \hat{\theta}_1; \ \hat{\theta}_4 = \max\left\{\max\{\xi_i\} - \theta_0, \theta_0 - \min\{\xi_i\}\right\}.$$

Выяснить, имеются ли среди $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, несмещенные, состоятельные оценки параметра h. Возможно, среди них имеются несмещенные, состоятельные оценки других параметров? Каких именно?

14.26. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\exp\left\{-\dfrac{1}{\alpha}x\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

Доказать, что

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

является несмещенной и состоятельной оценкой параметра α.

Является ли

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(\xi_{n-1} + \xi_n)$$

несмещенной оценкой параметра α? Состоятельной оценкой этого параметра?

14.27. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из биномиального распределения

$$\mathsf{P}(k;\theta) = C_N^k \theta^k (1-\theta)^{N-k}, \ k = 0, 1, \ldots, N,$$

где N — известное целое число.

Является ли

$$\hat{\theta} = \frac{1}{nN}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

эффективной оценкой параметра θ?

14.28. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta,b) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}(x-b)\right\}, & \text{если } x > b; \\ 0, & \text{если } x \le b. \end{cases}$$

Рассматриваются оценки

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i; \;\; \hat{\theta}_2 = \min\{\xi_i\}; \;\; \hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2.$$

Имеются ли среди $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$ несмещенные, состоятельные оценки параметров θ и b? Возможно, среди них имеются несмещенные и состоятельные оценки других параметров? Каких именно?

14.29. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами m и θ (m — известно):

$$\mathsf{P}(k;\theta) = C_m^k\theta^k(1-\theta)^{m-k}, \;\; k = 0, 1, \ldots, m.$$

Обозначим через $\hat{\theta}$ точку, в которой функция

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} C_m^{\xi_i}\theta^{\xi_i}(1-\theta)^{m-\xi_i}$$

достигает наибольшего значения (может существовать не одна такая точка). Несмещенной и состоятельной оценкой какого параметра является $\hat{\theta}$?

14.30. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из двустороннего показательного распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}|x-m_0|\right\}, \; \theta > 0,$$

где m_0 — известная константа, параметр θ принадлежит конечному отрезку $[a; b]$.

Является ли

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - m_0|$$

эффективной оценкой параметра θ?

14.31. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; h) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & \text{если } x \in [\theta_0 - h, \theta_0 + h]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta_0 - h, \theta_0 + h], \end{cases}$$

θ_0 известно.

Обозначим через $\hat{h}$ точку, в которой функция

$$L(h) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; h)$$

достигает своего наибольшего значения.

Является ли $\hat{h}$ оценкой и если да, то является ли она несмещенной оценкой параметра h? Состоятельной оценкой этого параметра?

14.32. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$

($f(x; \sigma^2)$ — плотность полунормального распределения).

Несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой какого параметра является

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\,?$$

14.33. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\theta}\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0 \end{cases}$$

($f(x;\theta)$ — плотность распределения Рэлея), параметр θ принадлежит конечному отрезку $[a;b]$.

Является ли

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2$$

эффективной оценкой параметра θ?

14.34. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a_0}, & \text{если } x \in [a_0;b]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a_0;b], \end{cases}$$

a_0 — известно.

Рассматриваются оценки

$$\hat{\theta}_1 = \max\{\xi_i\};\ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i;$$

$$\hat{\theta}_3 = \max\{\xi_i\} + \frac{1}{n-1}(\max\{\xi_i\} - a_0).$$

Выяснить, имеются ли среди $\hat{\theta}_i,\ i = 1, 2, 3$, несмещенные, состоятельные оценки параметра b. Возможно, среди них имеются несмещенные и состоятельные оценки других параметров? Каких именно?

14.35. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из биномиального распределения с параметрами m и p:

$$\mathsf{P}(k;p) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k},\ k = 0, 1, \ldots, m.$$

Является ли

$$\hat{p} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

состоятельной оценкой параметра p?

14.36. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2 x}}\exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0, \end{cases}$$

где $\sigma_0 > 0$ ($f(x;\mu)$ — плотность логарифмически нормального распределения), σ_0 известно, μ принадлежит конечному отрезку $[a;b]$.

Является ли

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i$$

эффективной оценкой параметра μ?

14.37. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\theta\lambda^\theta}{x^{\theta+1}}, & \text{если } x > \lambda; \\ 0, & \text{если } x \le \lambda, \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $\theta > 2$ (распределение Парето), θ известно.

Рассматриваются оценки

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\theta - 1}{\theta n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i; \ \ \hat{\lambda}_2 = \frac{\theta - 2}{\theta n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2.$$

Несмещенными и состоятельными оценками каких параметров являются $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$?

14.38. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из равномерного на промежутке $[a; a+1]$ распределения. Рассматриваются две оценки параметра a:

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{2}; \ \hat{a}_2 = \max\{\xi_i\} - \frac{n}{n+1}.$$

Доказать, что $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ являются несмещенными оценками параметра a.

Найти $\mathsf{D}\hat{a}_1$ и $\mathsf{D}\hat{a}_2$. Доказать, что

$$\mathsf{D}\hat{a}_2 = o(\mathsf{D}\hat{a}_1)$$

при $n \to \infty$.

14.39. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^\nu \Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp\left\{-\dfrac{1}{\theta}x\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0, \end{cases}$$

ν — известный параметр.

Является ли

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n\nu}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

эффективной оценкой параметра θ?

14.40. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}|x|\right\}, \ \theta > 0$$

($f(x;\theta)$ — плотность двустороннего показательного распределения).

Является ли

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$$

эффективной оценкой параметра θ?

14.41. Известно, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из равномерного на промежутке $[a;b]$ распределения, но сам отрезок $[a;b]$ неизвестен. Можно предложить несколько оценок середины этого отрезка. В частности,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i; \ \ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(\max\{\xi_i\} + \min\{\xi_i\}).$$

Доказать, что $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ являются несмещенными оценками середины $(a+b)/2$ отрезка $[a;b]$ и

$$\mathsf{D}\hat{\theta}_1 > \mathsf{D}\hat{\theta}_2.$$

14.42. Найти доверительный интервал для:

1° предела прочности на разрыв материала (см. пример 17.5.1) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии предела прочности на разрыв материала с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98 (для измерений, проведенных на стенде A).

14.43. Найти доверительный интервал для:

1° содержания золота на кубический метр породы, добываемой ударно-канатным бурением (см. задачу 17.8) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии содержания золота с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.44. Найти доверительный интервал для:

1° содержания золота на кубический метр породы, добываемый из шурфов (см. задачу 17.8), с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии содержания золота с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.45. Найти доверительный интервал для:

1° толщины пластикового покрытия провода (см. задачу 18.46) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии толщины пластикового покрытия провода с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.46. Найти доверительный интервал для:

1° значения величины e, найденной Р. Милликеном при определении заряда электрона (см. задачу 18.34) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии измерений величины e с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.47. Найти доверительный интервал для:

1° содержания марганца в стали, выплавленной в конверторе I (см. задачу 17.17) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии содержания марганца в стали с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.48. Найти доверительный интервал для:

1° отражательной способности краски A (см. задачу 17.2) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии отражательной способности краски B с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.49. Найти доверительный интервал для:

1° содержания хрома в стали 18Cr10Ni2Mo (см. задачу 17.22) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии содержания хрома с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.50. Найти доверительный интервал для:

1° сопротивления провода типа A (см. задачу 17.24) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии сопротивления провода с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.51. Найти доверительный интервал для:

1° пористости конденсаторной бумаги партии I (см. задачу 19.36) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии пористости конденсаторной бумаги партии I с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.52. Найти доверительный интервал для:

1° температуры левой шины автобуса (см. задачу 17.31) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии температуры левой шины автобуса с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.53. Найти доверительный интервал для:

1° длины изделий после обжига (см. задачу 17.37) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии длины изделий после обжига с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.54. Найти доверительный интервал для:

1° глубины канавки на шине, полученной контролером I (см. пример 19.2.1) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии глубины канавки с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.55. Найти доверительный интервал для:

1° разности толщины плиток при износе для относительной концентрации наполнителя 1 к 1 (см. пример 19.2.1) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии разности толщины плиток при износе с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.56. Найти доверительный интервал для:

1° объема хлебных булок, содержащих 1 мг бромистого калия (см. задачу 19.8) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии объема хлебных булок с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

14.57. Найти доверительный интервал для:

1° температуры возгорания эмали, полученной оператором A (см. задачу 17.38) с коэффициентом надежности а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии температуры возгорания эмали с коэффициентом надежности а) 0,90; б) 0,98.

14.58. Найти доверительный интервал для:

1° диаметра шейки рабочей части сверл (см. задачу 19.7) с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,99;

2° дисперсии диаметра шейки рабочей части сверл с коэффициентом надежности: а) 0,90; б) 0,98.

Глава 15

Методы построения оценок

15.1 Эмпирические оценки

Эмпирическая функция распределения. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из неизвестного распределения F, по которой его необходимо оценить. Поскольку распределение F однозначно определяется своей функцией распределения $F(x)$, то достаточно оценить функцию распределения $F(x)$, т. е. оценить значение $F(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}^1$.

Хорошей оценкой функции распределения $F(x)$ является так называемая эмпирическая функция распределения.

Определение. Функцию $\hat{F}_n(x)$, заданную на $\mathbb{R}^1$ равенством

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{(-\infty,x)}(\xi_k),$$

называют *эмпирической функцией распределения* ($I_A(t)$ — индикатор множества A).

Эмпирическую функцию распределения еще можно определить так:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\mu(x)}{n},$$

где $\mu(x)$ — количество выборочных значений ξ_k, для которых $\xi_k < x$, поскольку

$$\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} I_{(-\infty,x)}(\xi_k).$$

Для каждого фиксированного x эмпирическая функция распределения $\hat{F}_n(x)$ как функция случайного вектора $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ является случайной величиной. Поэтому $\hat{F}_n(x)$ является функцией и от ω, т. е.

$$\hat{F}_n(x) = \hat{F}_n(x, \omega),\ \omega \in \Omega,\ x \in \mathbb{R}^1.$$

Эмпирическая функция распределения $\hat{F}_n(x)$ для каждого фиксированного x является несмещенной и состоятельной оценкой значения $F(x)$ функции распределения.

Вариационный ряд. По случайным величинам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ определим случайные величины $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ следующим образом: для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ упорядочим значения $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ в порядке возрастания и эти упорядоченные значения обозначим через $\xi_1^*(\omega)$, $\xi_2^*(\omega)$, $\ldots$, $\xi_n^*(\omega)$, $\omega \in \Omega$; заметим, что, в частности,

$$\xi_1^*(\omega) = \min\{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega),\ \ldots,\ \xi_n(\omega)\},$$

$$\xi_n^*(\omega) = \max\{\xi_1(\omega), \xi_2(\omega),\ \ldots,\ \xi_n(\omega)\}.$$

Определение. Последовательность случайных величин $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ называется *вариационным рядом* последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а случайные величины ξ_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n$, называют *порядковыми статистиками.*

Индекс j в порядковой статистике ξ_j^* равен числу выборочных значений, лежащих левее ξ_j^* (включая ξ_j^*).

В терминах порядковых статистик эмпирическую функцию распределения можно представить в виде

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\mu^*(x)}{n}, \tag{15.1.1}$$

где $\mu^*(x)$ — количество ξ_k^*, для которых $\xi_k^* < x$.

Непосредственно из равенства (15.1.1) получаем, что при фиксированном ω значение $\hat{F}_n(x)$ равно 0 в каждой точке x промежутка $(-\infty, \xi_1^*]$, поскольку количество тех ξ_k^*, для которых $\xi_k^* < x$, равно 0; $\hat{F}_n(x) = 1/n$ в каждой точке промежутка $(\xi_1^*, \xi_2^*]$, поскольку количество тех ξ_k^*, для которых $\xi_k^* < x$, равно 1, и т. д., и, наконец, $\hat{F}_n(x) = 1$ для каждого x из промежутка $(\xi_n^*, +\infty)$. Поэтому для каждого фиксированного ω функция

$$\hat{F}_n(x) = \hat{F}_n(x, \omega)$$

неотрицательна; постоянна на каждом из промежутков $(-\infty, \xi_1^*], (\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $(\xi_n^*, +\infty)$ (а следовательно, непрерывна слева) и неубывающая — растет в точках ξ_k^*, $k = 1, 2, \ldots, n$, скачками $1/n$.

График эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$ (точнее, реализации $\hat{F}_n(x, \omega)$) изображен на рис. 15.1.1.

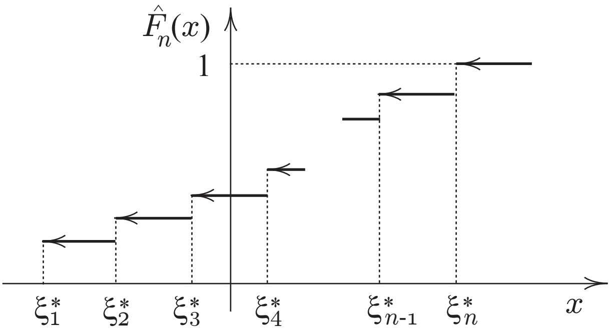


Рис. 15.1.1: График реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$

З а м е ч а н и е 1. Для выборок $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ из непрерывных распределений вероятность того, что выборочные значения совпадут, равна нулю, но поскольку мы фиксируем результаты с заданной точностью (например, до третьего знака), некоторые выборочные значения могут совпадать. При этом скачок эмпирической функции распределения в точке ξ_k равен l/n, где l — количество выборочных значений, совпадающих с ξ_k, учитывая и ξ_k.

Замечание 2. Распределение, соответствующее эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$, будем называть *эмпирическим*. Для каждого фиксированного ω это дискретное распределение, ставящее в соответствие каждой точке $\xi_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$, "массу" $1/n$ (или l/n, если с ξ_k совпадают l выборочных значений, учитывая и ξ_k).

Об уклонениях эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$ от теоретической $F(x)$. Эмпирическая функция распределения $\hat{F}_n(x)$, будучи при каждом x несмещенной и состоятельной оценкой $F(x)$, дает хорошее приближение для $F(x)$. Но в ряде задач этого недостаточно — необходимо знать насколько эмпирическая функция распределения $\hat{F}_n(x)$, построенная по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ из F, уклоняется от $F(x)$ (какими могут быть уклонения эмпирической функции распределения от теоретической).

Меру уклонения эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$ от $F(x)$ можно вводить различными способами. Например, так:

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right| \text{ (А. Н. Колмогоров).}$$

Или так:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i} \left(\frac{\nu_i}{n} - p_i \right)^2 \text{ (К. Пирсон),}$$

где p_i — вероятность попадания выборочного значения в промежуток $[a_i, b_i)$, вычисленная по функции распределения $F(x)$, ν_i/n — вероятность попадания в тот же промежуток, вычисленная по эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$ (вся прямая разбита на r непересекающихся промежутков $[a_j, b_j)$: $\bigcup\limits_{j=1}^{r} [a_j, b_j) = \mathbb{R}^1$, два крайние бесконечны). Уклонение $\hat{F}_n(x)$ от $F(x)$ является случайной величиной, и когда мы говорим о таком уклонении, необходимо говорить о его распределении. Оказывается, что введенные меры уклонения эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$ от теоретической $F(x)$ обладают замечательными свойствами — вне зависимости от распределения F, из которого получена выборка, при достаточно больших n распределение уклонения

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \left|F(x) - \hat{F}_n(x)\right| \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

близко к распределению А. Н. Колмогорова, его функция распределения

$$K(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-2n^2x^2},$$

а распределение уклонения К. Пирсона близко к χ^2-распределению с $(r-1)$ степенями свободы.

Вычисление $\sup\limits_{x} \left|F(x) - \hat{F}_n(x)\right|$. Пусть $\hat{F}_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, точнее — по реализации выборки, $F(x)$ — непрерывная функция распределения. Необходимо вычислить

$$\sup_{x} \left|F(x) - \hat{F}_n(x)\right|.$$

Заметим, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — не обязательно выборка из распределения F.

Поскольку $\hat{F}_n(x)$ постоянна на промежутках

$$(-\infty, \xi_1^*], (\xi_1^*, \xi_2^*], \ldots, (\xi_{n-1}^*, \xi_n^*], (\xi_n^*, +\infty), \qquad (15.1.2)$$

то для вычисления

$$\sup_{x} \left|F(x) - \hat{F}_n(x)\right|,$$

когда x "пробегает" $\mathbb{R}^1$, значение $\sup\limits_{x} \left|F(x) - \hat{F}_n(x)\right|$ достаточно вычислить на каждом из указанных промежутков (при этом учитываем, что $F(x)$ монотонно не убывает), а затем из полученных чисел выбрать наибольшее. Поэтому

$$\sup_x |F(x) - \hat{F}_n(x)|$$

равен наибольшему из чисел

$$\left|F(\xi_k^*) - \hat{F}_n(\xi_k^*)\right|, \left|F(\xi_k^*) - \hat{F}_n(\xi_{k+1}^*)\right|, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\hat{F}_n(\xi_{n+1}^*) = 1$.

Пример 15.1.1. *Пусть* 2,4; 1,0; 0,7; 0,0; 1,1; 1,6; 1,1; −0,4; 0,1; 0,7 — *выборка из непрерывного распределения.*

Построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$ *и графики функции* $N_{a,\sigma^2}(x)$ *нормального распределения с параметрами:* 1) $a = 0{,}8$; $\sigma = 0{,}8$; 2) $a = 1$; $\sigma = 0{,}5$. *Вычислить значение*

$$\sup_x \left|N_{a,\sigma^2}(x) - \hat{F}_n(x)\right|.$$

Решение. Для построения графика реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$, расположим выборочные значения в вариационный ряд:

$$-0{,}4; 0{,}0; 0{,}1; 0{,}7; 0{,}7; 1{,}0; 1{,}1; 1{,}1; 1{,}6; 2{,}4.$$

Поскольку выборка получена из непрерывного распределения, одинаковых выборочных значений не должно быть. Но в рассматриваемой выборке они все-таки имеются: 0,7 и 1,1 встречаются дважды. Это связано с тем, что измерения производятся с ограниченным количеством знаков, в рассматриваемом примере — до десятых. Поэтому некоторые выборочные значения могут совпадать.

Для построения графика реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_{10}(x, \omega)$ нанесем на ось абсцисс порядковые статистики ξ_k^*, $k = 1, 2, \ldots, 10$. Эмпирическая функция распределения $\hat{F}_{10}(x, \omega)$ постоянна на промежутках $(-\infty, \xi_1^*]$, $(\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]$, $k = 1, 2, \ldots, 9$, $(\xi_{10}^*, +\infty)$. На промежутке $(-\infty, \xi_1^*]$ она равна нулю и, “переходя через точки” ξ_k^* (кроме 0,7 и 1,1), растет скачками $1/10$, а при переходе через точки 0,7 и 1,1 — скачками $2/10$ (поскольку выборочные значения 0,7 и 1,1 в выборке встречаются дважды). График реализации $\hat{F}_{10}(x, \omega)$ эмпирической функции распределения $\hat{F}_{10}(x)$ изображен на рис. 15.1.2.

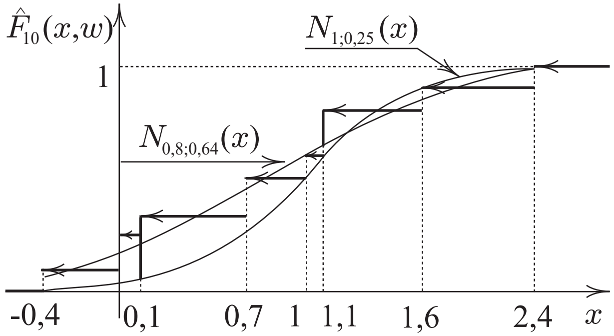


Рис. 15.1.2: К вычислению
$\sup\limits_x \left|N_{0,8;0,64}(x) - \hat{F}_{10}(x)\right|$ и $\sup\limits_x \left|N_{1;0,25}(x) - \hat{F}_{10}(x)\right|$

Для вычисления

$$\sup_x \left|N_{a;\sigma^2}(x) - \hat{F}_n(x)\right|$$

кроме значений $\hat{F}_n(x)$, еще необходимо знать значения функции распределения

$$N_{a;\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dt$$

в точках $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$. Значения функции $N_{a;\sigma^2}(x)$ находим по значениям табулированной функции $N_{0;1}(x)$ нормального распределения с параметрами (0;1) (см. табл.

22.1.1). После замены переменной $(t-a)/\sigma = y$ в последнем интеграле получаем

$$N_{a;\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = N_{0;1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Этапы вычисления

$$\delta = \sup_x \left|F(x) - \hat{F}_{10}(x)\right|,$$

когда $F(x) = N_{0,8;0,64}(x)$, сведены в табл. 15.1.1, согласно которой $\delta = 0{,}16$.

Таблица 15.1.1. К вычислению $\sup\limits_x \left|N_{0,8;0,64}(x) - \hat{F}_{10}(x)\right|$

ξ_k^*	$\hat{F}_{10}(\xi_k^*)$	$F(\xi_k^*)$	$\lvert F(\xi_k^*) - \hat{F}_{10}(\xi_k^*)\rvert$	$\lvert F(\xi_k^*) - \hat{F}_{10}(\xi_{k+1}^*)\rvert$
−0,4	0	0,07	0,07	0,03
0,0	0,1	0,16	0,06	0,04
0,1	0,2	0,19	0,01	0,11
(2) 0,7	0,3	0,45	0,15	0,05
1,0	0,5	0,58	0,08	0,02
(2) 1,1	0,6	0,64	0,04	**0,16**
1,6	0,8	0,84	0,04	0,06
2,4	0,9	0,98	0,08	0,02
ξ_{n+1}^*	1,0			

Аналогично получаем, что

$$\sup_x \left|N_{1;0,25}(x) - \hat{F}_{10}(x)\right| = 0{,}26.$$

Эмпирические (выборочные) значения параметров. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения

$\mathsf{F}(\cdot;\theta)$, зависящего от параметра θ. Причем параметр θ однозначно определяется распределением $\mathsf{F}(\cdot;\theta)$ (функцией распределения $F(x;\theta)$), т. е. является функционалом:

$$\theta = \Phi(F(\cdot;\theta)),$$

заданным на некотором множестве распределений F (функций распределения $F(x)$). Например, среднее $a = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x\mathsf{F}(dx)$, моменты $m_r = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^r\mathsf{F}(dx), r = 1, 2, \ldots$, дисперсия $\sigma^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^1}\Big(x - \int\limits_{\mathbb{R}^1} t\mathsf{F}(dt)\Big)^2\mathsf{F}(dx)$ являются функционалами на множестве функций распределения $F(x)$.

По эмпирическому распределению $\hat{\mathsf{F}}_n$ (по эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$) строятся так называемые эмпирические (выборочные) оценки параметров $\theta = \Phi(F(\cdot;\theta))$.

Выборка $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ из распределения $\mathsf{F}(\cdot;\theta)$ задает эмпирическую функцию распределения $\hat{F}_n(x)$. И поскольку $\hat{F}_n(x)$ "близка" к $F(x;\theta)$, а $\theta = \Phi(F(\cdot;\theta))$, то в качестве оценки параметра θ естественно рассматривать

$$\hat{\theta} = \Phi(\hat{F}_n(\cdot)).$$

О п р е д е л е н и е. Оценка $\hat{\theta}$ параметра $\theta = \Phi(F(\cdot;\theta))$, определенная равенством

$$\hat{\theta} = \Phi\left(\hat{F}_n(\cdot)\right),$$

называется *эмпирической оценкой* θ или *эмпирическим* (*выборочным*) значением параметра θ.

Например, эмпирическим (выборочным) значением среднего

$$a = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x\mathsf{F}(dx) = \Phi_1(F(\cdot))$$

является

$$\hat{a} = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x \hat{\mathsf{F}}_n(dx) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \overline{\xi},$$

эмпирическим (выборочным) значением дисперсии

$$\sigma^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^1}\Bigl(x - \int\limits_{\mathbb{R}^1} t\mathsf{F}(dt)\Bigr)^2 \mathsf{F}(dx) = \Phi(F(\cdot))$$

является

$$\hat{\sigma^2} = \int\limits_{\mathbb{R}^1}\Bigl(x - \int\limits_{\mathbb{R}^1} t\hat{\mathsf{F}}_n(dt)\Bigr)^2 \hat{\mathsf{F}}_n(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^1}\Bigl(x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Bigr)^2 \hat{\mathsf{F}}_n(dx) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1}(x-\overline{\xi})^2 \hat{\mathsf{F}}_n(dx) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2.$$

Интегралы вычислены как интегралы Лебега по дискретному (атомическому) распределению $\hat{\mathsf{F}}_n$, сосредоточенному в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с массой $1/n$ в каждой:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)\hat{\mathsf{F}}_n(dx) = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\hat{\mathsf{F}}_n\left(\{\xi_k\}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k).$$

Теорема 15.1.1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения F и $g(x)$ — борелевская функция на $\mathbb{R}^1$ со значениями в $\mathbb{R}^1$. Если*

$$G = \int\limits_{\mathbb{R}^1} g(x)\mathsf{F}(dx) \neq \infty,$$

то выборочное значение

$$\hat{G}_n = \int\limits_{\mathbb{R}_1} g(x)\hat{\mathsf{F}}_n(dx) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)$$

величины G является ее состоятельной и несмещенной оценкой.

Следствие. *Пусть*

$$G = \int\limits_0^1 g(x)dx \neq \infty,$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *— выборка из равномерного на промежутке* $[0; 1]$ *распределения, тогда*

$$\hat{G}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)$$

является состоятельной и несмещенной оценкой G.

Из теоремы следует, что при больших n значительные отклонения суммы $\hat{G}_n$ от G встречаются изредка и поэтому в качестве приближенного значения интеграла G можно рассматривать сумму $\hat{G}_n$.

Описанный метод вычисления интегралов известен под названием метода Монте-Карло (метода статистических испытаний). Он особенно эффективен при вычислении интегралов большой кратности, когда другие методы приближенного анализа непригодны.

Пример 15.1.2. *На отрезок* $[0; 2]$ *наудачу бросают точку, которая делит его на две части, и фиксируют координату* ξ *точки деления.*

Эксперимент проведен 10 *раз. При этом получено* 10 *значений независимых наблюдений случайной величины* ξ*:* 0,00; 0,31; 0,70; 1,40; 0,08; 1,93; 0,79; 1,43; 1,42; 1,69.

Оценить по выборке математическое ожидание объема куба с ребром, равным большей части отрезка.

Решение. По условию задачи длина ребра куба равна $\max\{\xi,\, 2-\xi\}$. Объем $g(\xi) = (\max\{\xi,\, 2-\xi\})^3$ куба — функция случайной величины ξ. Значение $G = \mathsf{M}g(\xi)$ конечно, поскольку распределение случайной величины ξ сосредоточено на конечном промежутке [0;2], а функция $g(x)$ на этом промежутке ограничена. Поэтому несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания объема куба $G = \mathsf{M}g(\xi) = \mathsf{M}(\max\{\xi,\, 2-\xi\})^3$ является

$$\hat{G}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\max\{\xi_i,\, 2-\xi_i\})^3.$$

Для $n = 10$ и выборочных значений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, приведенных в условии, значение $\hat{G}_{10} = 4{,}44$.

15.2 Метод моментов

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения $\mathsf{F}(\cdot;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, зависящего от параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$. Параметры $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ неизвестны и их необходимо оценить по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Первым общим методом получения оценок неизвестных параметров по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ был метод моментов, предложенный К. Пирсоном. Этот метод состоит в приравнивании определенного количества выборочных моментов $\hat{m}_r$ соответствующим моментам

$$m_r(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^r \mathsf{F}(dx;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \qquad (15.2.1)$$

распределения $\mathsf{F}(\cdot;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, вычисленным при значениях параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, равных соответственно $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s$ (моменты $m_r = m_r(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ распределения $\mathsf{F}(\cdot;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ являются функциями параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, см. равенство (15.2.1)). А именно:

$$\hat{m}_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x \mathsf{F}(dx;\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s),$$

$$\hat{m}_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^2 \mathsf{F}(dx;\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s),$$

$$\vdots$$

$$\hat{m}_s = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^s \mathsf{F}(dx; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s).$$

Рассматривая количество моментов, равное количеству неизвестных параметров, подлежащих оцениванию, получаем такое же количество уравнений для определения неизвестных параметров. Решения этих уравнений относительно $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s$ дают искомые оценки.

Метод применим, если существуют все перечисленные моменты, и на практике приводит к сравнительно простым вычислениям.

Если оценивается s параметров, то, как правило, приравнивают моменты $\hat{m}_r$ и $m_r(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s)$ с 1-го по s-й.

П р и м е р 15.2.1. *Получить оценки параметров a и σ^2 нормального распределения*

$$F(x; a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dt$$

по методу моментов.

Р е ш е н и е.

$$m_1(a, \sigma^2) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = a,$$

$$m_2(a, \sigma^2) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \sigma^2 + a^2,$$

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \ \hat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Приравнивая моменты $m_1(a, \sigma^2)$ и $m_2(a, \sigma^2)$, вычисленные при значениях параметров a и σ^2, равных соответственно $\hat{a}$ и $\widehat{\sigma^2}$, соответствующим эмпирическим моментам, получаем уравнения относительно $\hat{a}$ и $\widehat{\sigma^2}$:

$$m_1(\hat{a}, \widehat{\sigma^2}) = \hat{m}_1, \ m_2(\hat{a}, \widehat{\sigma^2}) = \hat{m}_2,$$

подробнее:

$$\hat{a} = \hat{m}_1, \ \hat{\sigma^2} + \hat{a}^2 = \hat{m}_2.$$

Решения этих уравнений относительно $\hat{a}$ и $\hat{\sigma^2}$ и будут оценками соответственно параметров a и σ^2, полученными по методу моментов. Оценкой для a является

$$\hat{a} = \hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \overline{\xi},$$

для σ^2 :

$$\hat{\sigma^2} = \hat{m}_2 - (\hat{m}_1)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 - \overline{\xi}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2.$$

15.3 Метод максимального правдоподобия

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — выборка с распределением $\mathsf{F}(\cdot\,;\theta) = \mathsf{F}(\cdot\,;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)$, зависящим от параметра $\theta = (\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s) \in \mathit{\Theta} \subset R^s$. Параметр $\theta \in \mathit{\Theta}$ неизвестен и его необходимо оценить по выборке $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Общим (важным как с точки зрения теории, так и приложений) методом построения оценок является метод максимального правдоподобия, предложенный Р. Фишером.

Определение. *Функцией максимального правдоподобия* выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с распределением $\mathsf{F}(\cdot;\theta)$, зависящим от параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$, называется функция $L(\theta)$ параметра $\theta \in \Theta$, определяемая равенством

$$L(\theta) = f(\xi;\theta), \ \theta \in \Theta,$$

если выборочный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ абсолютно непрерывный с плотностью $f(x;\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\theta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, и равенством

$$L(\theta) = \mathsf{F}(\xi;\theta), \ \theta \in \Theta,$$

если выборочный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ дискретный с распределением $\mathsf{F}(x; \theta) = \mathsf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$.

О п р е д е л е н и е. *Оценкой максимального правдоподобия* параметра θ называется точка $\hat{\theta}$, в которой функция максимального правдоподобия достигает наибольшего значения, другими словами, оценка максимального правдоподобия параметра θ — это решение уравнения

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta).$$

Поскольку функции $L(\theta)$ и $\ln L(\theta)$ достигают наибольшего значения в одних и тех же точках (функция $y = \ln x$ монотонно возрастает), а находить точку, в которой $\ln L(\theta)$ достигает наибольшего значения, зачастую проще, то оценку максимального правдоподобия можно получить и как решение уравнения

$$\ln L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} \ln L(\theta).$$

Функцию $\ln L(\theta)$ еще называют *логарифмической функцией максимального правдоподобия.*

Если функция максимального правдоподобия $L(\theta) = L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ непрерывно дифференцируема по $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, то для решения уравнения

$$\ln L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s) = \max_{(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \in \Theta} \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \tag{15.3.1}$$

достаточно найти стационарные точки функции $L(\theta) = \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, решая уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, s,$$

и, сравнив значения функции $\ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ в ее стационарных точках и граничных точках множества Θ, выбрать точку $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s)$, в которой функция $L(\theta) = \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ достигает наибольшего значения. Эта точка и будет решением уравнения (15.3.1).

Уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)=0,\ i=1,2,\ldots,s,$$

называют *уравнениями максимального правдоподобия.*

Замечание. Получая оценку параметра θ как решение уравнения $L(\hat\theta)=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta)$, следует отбросить все решения вида $\theta=const$. Оценки, не зависящие от выборки, для нас интереса не представляют.

Пример 15.3.1. *По выборке* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ *из распределения с плотностью*

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\theta\exp\{-\theta x\}, & \text{если } x>0;\\ 0, & \text{если } x\le 0\end{cases}$$

найти оценку максимального правдоподобия параметра θ.

Решение. Совместной плотностью распределения независимых случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ является

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=p(x_1;\theta)p(x_2;\theta)\ldots p(x_n;\theta)=$$

$$=\theta\exp\{-\theta x_1\}\theta\exp\{-\theta x_2\}\ldots\theta\exp\{-\theta x_n\}=$$

$$=\theta^n\exp\left\{-\theta\sum_{i=1}^n x_i\right\},$$

если все $x_i>0,\ i=1,2,\ldots,n$, а если хотя бы одно $x_i\le 0$, то

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=0.$$

Функцией правдоподобия выборки $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ является

$$L(\theta)=\theta^n\exp\left\{-\theta\sum_{i=1}^n\xi_i\right\},$$

если все $\xi_i>0, i=1,2,\ldots,n$, и $L(\theta)=0$ — в противном случае. Функция $L(\theta)$ дифференцируема по θ, а поэтому можем выписать уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=0,$$

или (после дифференцирования)

$$n \cdot \frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0.$$

Решением уравнения правдоподобия является

$$\theta = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \right)^{-1} = (\overline{\xi})^{-1}.$$

На границе области допустимых значений параметра θ функция $L(\theta)$ принимает значение 0, поэтому в точке

$$\hat{\theta} = 1/\overline{\xi}$$

функция максимального правдоподобия $L(\theta)$ достигает наибольшего значения, а следовательно, $\hat{\theta} = 1/\overline{\xi}$ является оценкой максимального правдоподобия параметра θ.

Пример 15.3.2. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью*

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{a} \exp\left\{ -\frac{1}{a}(x - b) \right\}, & \textit{если } x > b; \\ 0, & \textit{если } x \leq b \end{cases}$$

($f(x; a, b)$ — плотность смещенного показательного распределения).

Найти оценки параметров a и b методом максимального правдоподобия.

Выяснить, являются ли оценки максимального правдоподобия параметров a и b их несмещенными и состоятельными оценками?

Решение. Функция максимального правдоподобия

$$L(a, b) = \frac{1}{a^n} \exp\left\{ -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - b) \right\},$$

если все $\xi_i > b$ и $L(a, b) = 0$, если существует $\xi_j \leq b$.

Если $\hat{b}$ — точка, в которой функция $Q(b)=\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-b)$ $(\xi_i>b,\ i=1,2,\ldots,n)$ достигает наименьшего значения, а $\hat{a}$ — точка, в которой функция $L(a,\hat{b})$ достигает наибольшего значения, то в точке $(\hat{a},\hat{b})$ функция $L(a,b)$ достигает наибольшего значения (в этом убеждаемся непосредственной проверкой).

Функция $Q(b)=\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-b)\quad(\xi_i>b,\ i=1,2,\ldots,n)$ достигает наименьшего значения в точке $\hat{b}=\min\{\xi_i\}$, а функция $L(a,\hat{b})$ достигает наибольшего значения в точке $\hat{a}=Q(\hat{b})/n$.

Оценки $\hat{a},\hat{b}$ — асимптотически несмещенные и состоятельные соответственно для параметров a,b.

15.4 Задачи

АЗ: $15.3, 15.18, 15.28, 15.32, 15.33$.
СЗ: $15.13, 15.24, 15.31, 15.38, 15.51$.

15.1. Пусть 1,31; 1,18; 1,50; 1,06; 1,01; 1,06; 1,33; 1,80; 1,30; 1,35 — выборка из распределения с плотностью

$$p(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\exp\left\{-\dfrac{1}{a}(x-b)\right\}, & \text{если } x>b;\\ 0, & \text{если } x\le b\end{cases}$$

(смещенное показательное распределение) при значениях параметров $a=0{,}5;\ b=1$.

По выборке построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$. Построить график функции $F(x)$ смещенного показательного распределения с параметрами $a=0{,}5$; $b=1$. Вычислить

$$\sup_x\left|F(x)-\hat{F}_n(x)\right|.$$

15.2. На отрезок [0;2] наудачу бросают точку и фиксируют ее координату ξ. Эксперимент проведен 15 раз. При этом получено 15 значений независимых наблюдений случайной величины ξ: 0,14; 1,81; 1,58; 1,28; 1,39; 0,80; 0,31; 0,70; 1,40; 0,08; 1,93; 0,79; 1,43; 1,42; 1,68.

Оценить по выборке математическое ожидание объема куба, ребро которого равно меньшей части отрезка [0;2] при его делении точкой ξ.

15.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$p(x;\mu,\sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x}\exp\left\{-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{если } x>0; \\ 0, & \text{если } x\le 0, \end{cases}$$

параметр $\sigma > 0$ ($p(x;\mu,\sigma^2)$ — плотность логарифмически нормального распределения).

Найти оценки параметров μ и σ^2 методом моментов.

Замечание. Вычисляя первый и второй моменты, целесообразно сделать замену $\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma} = t$.

15.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h_0}, & \text{если } x \in [\theta-h_0, \theta+h_0]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta-h_0, \theta+h_0]. \end{cases}$$

Найти оценку $\hat\theta$ параметра θ методом максимального правдоподобия.

Выяснить, является ли $\hat\theta$ несмещенной, состоятельной оценкой параметра θ.

15.5. Воспользовавшись таблицей случайных чисел (см. табл. 22.10.1), получить выборку объемом $n = 20$ из нормального распределения со средним $a = 2$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$ (см. также пример 19.1.1). По этой выборке построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat F_n(x)$. Построить график функции $N_{2;4}(x)$. Вычислить

$$\sup_x \left| N_{2;4}(x) - \hat F_n(x) \right|.$$

15.6. С помощью таблицы случайных чисел (см. табл. 22.10.1) оценить значение интеграла Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx.$$

Указание 1. Сделать в интеграле замену

$$y = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

Указание 2. Воспользовавшись таблицей случайных чисел (см. табл. 22.10.1), получить выборку из равномерного на отрезке $[0; 1]$ распределения и применить теорему 15.1.1.

15.7. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; \theta, b) = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}|x - b|\right\},$$

параметр $\theta > 0$ ($f(x; \theta, b)$ — плотность смещенного двустороннего показательного распределения).

Найти оценки $\hat{\theta}$ и $\hat{b}$ параметров θ и b методом моментов.

Выяснить, являются ли $\hat{\theta}$ и $\hat{b}$ несмещенными и состоятельными оценками θ и b.

15.8. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения

$$\mathsf{P}(k; \theta) = C_{k+r-1}^{r-1}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \; k = 0, 1, \ldots,$$

параметр $\theta > 0$, r известно.

Найти оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.

Выяснить, является ли оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ несмещенной, состоятельной, эффективной оценкой параметра θ.

Указание. См. задачу 14.2.

15.9. Воспользовавшись таблицей случайных чисел, получить выборку объемом $n = 20$ из равномерного на отрезке [0;1] распределения (см. задачу 19.4). По этой выборке построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$. Построить график функции $F(x)$ равномерного на отрезке [0;1] распределения. Вычислить

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.10. На отрезок [0;4] наудачу бросают точку и фиксируют ее координату ξ. Эксперимент проведен 15 раз. При этом получено 15 значений независимых наблюдений случайной величины ξ: 0,55; 2,94; 0,65; 1,49; 3,08; 1,01; 2,38; 1,18; 1,63; 3,18; 0,39; 1,71; 2,72; 0,95; 1,18.

Оценить по выборке математическое ожидание площади поверхности шара, радиус которого равен меньшей части отрезка [0;4] при его делении точкой ξ.

15.11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из геометрического распределения с параметром p:

$$\mathsf{P}(k;p) = (1-p)^k p,\ k = 0, 1, \ldots$$

Оценить параметр p методом моментов.

15.12. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;a,b) = \frac{1}{2a} \exp\left\{ -\frac{1}{a}|x-b| \right\},\ a > 0.$$

Найти оценки параметров a и b методом максимального правдоподобия.

15.13. Выпишите 10 случайных, на ваш взгляд, чисел из отрезка [0;1] (для определенности — с четырьмя знаками после запятой). Их можно рассматривать как выборку из некоторого распределения. По этой выборке построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$. Построить график функции $F(x)$ равномерного на отрезке [0;1] распределения. Вычислить

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.14. Длительность работы элемента до первого выхода из строя является показательно распределенной случайной величиной. Наблюдалась работа 20 элементов и фиксировали длительность их работы до первого выхода из строя (в часах): 11, 149, 846, 563, 384, 950, 864, 63, 990, 77, 685, 158, 348, 318, 25, 278, 1803, 83, 1544, 380.

По выборке найти оценку математического ожидания длительности безотказной работы элемента, если его меняют после 200 часов непрерывной работы, даже если элемент не вышел из строя.

15.15. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; a, \theta) =$$

$$= \begin{cases} (x - (a - \sqrt{\theta}))/\theta, & \text{если } x \in [a - \sqrt{\theta}, a]; \\ -(x - (a + \sqrt{\theta}))/\theta, & \text{если } x \in [a, a + \sqrt{\theta}]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a - \sqrt{\theta}, a + \sqrt{\theta}]. \end{cases}$$

Найти оценки $\hat{a}$ и $\hat{\theta}$ параметров a и θ методом моментов.

Выяснить, являются ли $\hat{a}$ и $\hat{\theta}$ несмещенными и состоятельными оценками параметров a и θ соответственно.

Указание. Вычисляя второй момент, целесообразно воспользоваться соотношением $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$.

15.16. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения

$$\mathsf{Q}(x) = p^x (1-p)^{1-x},\ x = 0; 1,\ p \in (0; 1).$$

Найти оценку параметра p методом максимального правдоподобия.

Выяснить, является ли оценка максимального правдоподобия параметра p его несмещенной, состоятельной, эффективной оценкой.

15.17. Получить выборку объемом $n = 10$ из $N_{0;1}$-распределения. По этой выборке построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$. Построить график функции $N_{0;1}(x)$ нормального распределения с параметрами (0;1). Вычислить

$$\sup_x \left| N_{0;1}(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

Указание. Если случайная величина ξ имеет своей функцией распределения $F(x)$, то случайная величина

$$\eta = F(\xi)$$

распределена равномерно на промежутке $[0;1]$. Отсюда следует, что если случайная величина η распределена равномерно на промежутке $[0;1]$, то случайная величина

$$\xi = F^{-1}(\eta)$$

имеет своей функцией распределения $F(x)$.

15.18. Воспользовавшись таблицей случайных чисел (см. табл. 22.10.1), оценить значение интеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin \beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx,\ \ \alpha = 1,\ \beta = 1.$$

Указание 1. Сделать в интеграле замену

$$y = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x.$$

Указание 2. По таблице получить выборку из равномерного на отрезке [0;1] распределения и воспользоваться теоремой 15.1.1.

15.19. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}|x|\right\}$$

($f(x;\theta)$ — плотность двустороннего показательного распределения).

Найти оценку дисперсии методом моментов и выяснить, является ли она несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии.

15.20. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & \text{если } x \in [\theta_0 - h, \theta_0 + h]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta_0 - h, \theta_0 + h]. \end{cases}$$

Найти оценку параметра h методом максимального правдоподобия.

Выяснить, является ли оценка максимального правдоподобия параметра h его несмещенной и состоятельной оценкой.

15.21. Наблюдаются цифровые части номеров 10 автомобилей (в номере пять цифр), проезжающих мимо вас. Пусть a_i, b_i, c_i, d_i, e_i — цифры, встречающиеся в номере i-го автомобиля, если его читать слева направо. Строится последовательность чисел

$$\xi_i = 10^{-1}a_i + 10^{-2}b_i + 10^{-3}c_i + 10^{-4}d_i + 10^{-5}e_i,$$

$i = 1, 2, \ldots, 10$. Их можно рассматривать как выборку из некоторого распределения.

По выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{10}$ построить график эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$ $(n = 10)$. Построить график функции $F(x)$ равномерного на отрезке [0;1] распределения. Вычислить

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

З а м е ч а н и е. Если номер автомобиля содержит четыре цифры, то рассмотрим последовательность чисел

$$\zeta_i = 10^{-1}a_i + 10^{-2}b_i + 10^{-3}c_i + 10^{-4}d_i,$$

$i = 1, 2, \ldots, 10$.

15.22. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta,p) = \begin{cases} \dfrac{p}{\theta}\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{p-1} \exp\left\{-\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{p}\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0, \end{cases}$$

параметр $\theta > 0$ и $p > 0$ ($f(x;\theta,p)$ — плотность распределения Вейбулла), p известно.

Найти оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.

15.23. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из равномерного на отрезке $[\theta - \sqrt{3\sigma^2}, \theta + \sqrt{3\sigma^2}]$ распределения, $\sigma > 0$.

Найти оценки $\hat{\theta}$ и $\hat{\sigma^2}$ параметров θ и σ^2 методом моментов.

Выяснить, являются ли оценки $\hat{\theta}$ и $\hat{\sigma^2}$ несмещенными, состоятельными оценками соответствующих параметров.

15.24. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\theta}\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0 \end{cases}$$

($f(x;\theta)$ — плотность распределения Рэлея).

Найти оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.

Выяснить, является ли оценка максимального правдоподобия параметра θ его несмещенной, состоятельной, эффективной оценкой.

15.25. Имеем выборку: 2,22; 0,67; −0,14; −0,33; −0,97; −1,81; −0,94; −0,91; 0,11; 3,94 из распределения с плотностью

$$f(x;a,c) = \frac{a}{\pi(a^2 + (x-c)^2)},$$

где $a = 0{,}5$ и $c = 1$ ($f(x;a,c)$ — плотность распределения Коши).

Построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$. Построить график функции $F(x)$ распределения Коши с параметрами $a = 0{,}5$; $c = 1$. Вычислить

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.26. На отрезок [0;3] наудачу бросают точку и фиксируют ее координату ξ. Эксперимент проведен 20 раз. При этом получено 20 значений независимых наблюдений случайной величины ξ: 1,91; 1,08; 1,25; 0,87; 2,42; 1,49; 2,10; 2,21; 0,33; 0,09; 0,39; 0,54; 2,39; 0,51; 2,51; 1,44; 0,96; 1,85; 2,38; 0,67.

Оценить по выборке математическое ожидание объема шара, радиус которого равен большей части отрезка [0;3] при его делении точкой ξ.

15.27. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения Эрланга с параметрами m и λ. Оценить параметры m и λ методом моментов.

Плотность распределения Эрланга с параметрами m и λ имеет вид

$$f(x; \lambda, m) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} \exp\{-\lambda x\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

15.28. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из равномерного распределения на промежутке:

1) $[\theta - 1; \theta + 1]$; 2) $[\theta; \theta + 1]$; 3) $[\theta - h_0; \theta + h_0]$.

Найти оценку $\hat{\theta}$ параметра θ методом моментов.

Выяснить, является ли оценка $\hat{\theta}$ несмещенной, состоятельной оценкой параметра θ.

15.29. Воспользовавшись таблицей случайных чисел (см. табл. 22.10.1), получить 10 независимых выборок объемом 12 из равномерного на промежутке [0;1] распределения (см. также задачу 19.4). Обозначим их

$$\xi_{k,1}, \xi_{k,2}, \ldots, \xi_{k,12}, \; k = 1, 2, \ldots, 10.$$

Пусть

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{12} \xi_{k,i} - 6, \; k = 1, 2, \ldots, 10.$$

Последовательность $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{10}$ является выборкой из некоторого распределения. По этой выборке построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_{10}(x)$. Построить график функции $N_{0;1}(x)$ нормального распределения с параметрами (0;1). Вычислить

$$\sup_x \left| N_{0;1}(x) - \hat{F}_{10}(x) \right|.$$

15.30. Интервалы безотказной эксплуатации (часы между последовательными отказами) аппаратуры кондиционирования воздуха на самолете “Боинг-720” приведены в таблице (читать по строкам).

6	23	261	87	7	120	14	62	32	24
47	225	71	246	21	42	20	5	97	18
12	120	11	3	14	71	11	14	100	7
11	16	90	1	16	52	95	97	98	5
51	11	4	141	18	142	68	77	85	91
80	1	16	106	206	82	54	31	3	230
216	46	111	39	63	18	191	18	3	131
163	24	50	44	102	72	22	39	18	95
3	15	197	188	79	88	46	5	62	74
5	36	22	139	210	97	30	23	81	48

Найти эмпирическую оценку математического ожидания длительности безотказной работы аппаратуры, если ее профилактический ремонт осуществляется после 100 часов эксплуатации.

15.31. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\nu,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} \exp\{-\alpha x\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0; \end{cases}$$

$\nu \ge 0, \alpha > 0$ ($f(x;\nu,\alpha)$ — плотность гамма-распределения с параметрами $(\nu;\alpha)$).

Найти оценки параметров ν и α методом моментов.

15.32. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения

$$\mathsf{P}(k;\theta) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k, \ k = 0, 1, \ldots, \ \theta > 0.$$

Найти оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.

Выяснить, является ли оценка максимального правдоподобия параметра θ его несмещенной, состоятельной, эффективной оценкой.

15.33. Воспользовавшись таблицей случайных чисел (см. табл. 22.10.1), получить выборку объемом 20 из распределения арксинуса (см. также пример 19.1.1). По этой выборке построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$, $n = 20$. Построить график функции распределения арксинуса

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}, & \text{если } x \in (0;1]; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Вычислить

$$\sup_x \left| A(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.34. На отрезок [0;1] наудачу бросают точку и фиксируют ее координату ξ. Эксперимент проведен 20 раз. При этом получено 20 значений независимых наблюдений случайной величины ξ: 0,33; 0,93; 0,62; 0,38; 0,65; 0,53; 0,31; 0,07; 0,61; 0,04; 0,70; 0,85; 0,83; 0,81; 0,40; 0,59; 0,93; 0,24; 0,55; 0,17.

Оценить по выборке математическое ожидание площади круга, радиус которого равен большей части отрезка [0;1] при его делении точкой ξ.

15.35. Обозначим через ξ случайную величину — число неудач до появления r-го успеха в неограниченной последовательности независимых испытаний с вероятностью успеха p в одном испытании. Случайная величина ξ имеет распределение

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_{k+r-1}^{r-1}\, p^r (1-p)^k, \;\; k = 0, 1, \ldots$$

Это распределение называют отрицательным биномиальным с параметрами $(r; p)$ или распределением Паскаля.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из отрицательного биномиального распределения с параметрами $(r; p)$, r — известно. Найти оценку параметра p методом моментов.

У к а з а н и е. Общее количество неудач до r-го успеха можно представить в виде суммы

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_r,$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет геометрическое распределение с параметром p.

15.36. С целью оценить количество N рыб в озере, выловили K рыб, пометили их и выпустили в озеро. Через некоторое время в озере выловили n рыб. При этом k из них оказались помеченными.

Какое наиболее вероятное количество рыб в озере?

У к а з а н и е. Задачу решить в предположении, что количество N рыб в озере большое по сравнению с n. В этом предположении случайную величину ξ — количество меченых рыб среди n выловленных — можно считать биномиально распределенной.

15.37. Стохастический эксперимент состоит в последовательном подбрасывании монеты четыре раза и регистрации результатов следующим образом: выпадение герба (Г) обозначается единицей, решки (Р) — нулем. Скажем, результаты экспериментов ГРРГ, РГРГ, и т. д., регистрируются соответственно как 1001, 0101, и т. д. Полученным последовательностям из нулей и единиц ставятся в соответствие числа из промежутка [0;1], которые в двоичной системе исчисления можно представить так: 0,1001; 0,0101 и т. д., т. е. 0,1001 — это запись в двоичной системе числа

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2^2} + 0 \cdot \frac{1}{2^3} + 1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{9}{16},$$

а 0,0101 — числа

$$0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 0 \cdot \frac{1}{2^3} + 1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{5}{16}.$$

Эксперимент проведен 16 раз. Получено 16 чисел. Их можно рассматривать как выборку из некоторого распределения. По этой выборке построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$ $(n = 16)$. Построить график функции $F(x)$ равномерного на отрезке [0;1] распределения. Вычислить

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right| .$$

15.38. Воспользовавшись таблицей случайных чисел (см. табл. 22.10.1), оценить значение интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx = G.$$

Указание. С помощью таблицы случайных чисел получить выборку из равномерного на отрезке $[0;1]$ распределения и воспользоваться теоремой 15.1.1.

Значение $G = 0{,}915965\ldots$ известно под названием "постоянной Каталана".

15.39. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \exp\left\{-\dfrac{1}{a}(x-b)\right\}, & \text{если } x > b; \\ 0, & \text{если } x \le b. \end{cases}$$

Найти оценки параметров a и b методом моментов.

15.40. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Найти оценки параметров a и b методом максимального правдоподобия.

Выяснить, являются ли оценки максимального правдоподобия $\hat{a}$ и $\hat{b}$ параметров a и b их несмещенными оценками? Состоятельными оценками?

15.41. Время, показываемое остановившимися механическими часами, естественно считать случайной величиной, распределенной равномерно на отрезке [0;12].

Ниже приведены показания 14 часов в витрине часового магазина: 9 ч 18 мин; 8 ч 35 мин; 10 ч 45 мин; 11 ч 30 мин; 3 ч 06 мин; 7 ч 50 мин; 4 ч 22 мин; 10 ч 12 мин; 7 ч 47 мин; 4 ч 28 мин; 11 ч 16 мин; 7 ч 08 мин; 5 ч 53 мин; 8 ч 00 мин. По этой выборке построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$. Построить график функции $F(x)$ равномерного на отрезке [0;12] распределения. Вычислить

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.42. На отрезок [0;1] наудачу бросают точку и фиксируют ее координату ξ. Эксперимент проведен 10 раз. При этом получено 10 значений независимых наблюдений случайной величины ξ: 0,33; 0,93; 0,62; 0,38; 0,65; 0,53; 0,81; 0,07; 0,61; 0,04.

Оценить по выборке математическое ожидание площади квадрата со стороной, равной меньшей части отрезка [0;1] при его делении точкой ξ.

15.43. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из биномиального распределения

$$\mathsf{P}(k;m) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \ \ k = 0, 1, \ldots, m,$$

m известно.

Найти оценку $\hat{p}$ параметра p методом моментов. Выяснить, является ли оценка $\hat{p}$ несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой p.

15.44. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & \text{если } x \in [\theta-h;\theta+h]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta-h;\theta+h] \end{cases}$$

($f(x;\theta,h)$ — плотность равномерного на отрезке $[\theta-h, \theta+h]$ распределения).

Найти оценки параметров θ и h методом максимального правдоподобия.

Выяснить, являются ли оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ и $\hat{h}$ параметров θ и h несмещенными оценками? Состоятельными оценками?

15.45. Имеем выборку: 0,04; 1,95; 0,38; 0,20; 0,24; 1,14; 0,10; 1,96; 1,00; 0,07 из распределения с плотностью

$$f(x;a) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\exp\left\{-\dfrac{x}{a}\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

По этой выборке построить график реализации эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$. Построить график показательной функции распределения $F(x)$ с параметром 1. Вычислить

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|.$$

15.46. Пользуясь таблицей случайных чисел (см. табл. 22.10.1), оценить значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx,$$

если $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Указание 1. Сделать в интеграле замену

$$y = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x.$$

Указание 2. С помощью таблицы случайных чисел получить выборку из равномерного на отрезке [0;1] распределения и воспользоваться теоремой 15.1.1.

15.47. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{3h}}, & \text{если } x \in [\theta - \sqrt{3h}; \theta + \sqrt{3h}]; \\ 0, & \text{если } x \notin [\theta - \sqrt{3h}; \theta + \sqrt{3h}]. \end{cases}$$

Найти оценки $\hat{\theta}$ и $\hat{h}$ параметров θ и h методом моментов.

Выяснить, являются ли $\hat{\theta}$ и $\hat{h}$ несмещенными, состоятельными оценками параметров θ и h соответственно.

15.48. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\left\{-\dfrac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0, \end{cases}$$

параметр $\sigma > 0$ ($f(x;\mu,\sigma^2)$ — плотность логарифмически нормального распределения).

Найти оценки параметров μ и σ^2 методом максимального правдоподобия.

15.49. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения

$$\mathsf{P}(k;\theta) = C_{k+r-1}^{r-1}\,(1/\theta)^r\,(1-1/\theta)^k,\ k=0,1,\ldots,$$

r известно (см. также задачу 15.35).

Найти оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.

Выяснить, является ли оценка максимального правдоподобия параметра θ его несмещенной, состоятельной, эффективной оценкой.

15.50. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a_0}, & \text{если } x \in [a_0;b]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a_0;b]. \end{cases}$$

Найти оценку параметра b методом максимального правдоподобия.

Выяснить, является ли оценка максимального правдоподобия параметра b его несмещенной и состоятельной оценкой.

15.51. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения Пуассона

$$\mathsf{P}(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\ldots$$

Найти оценку параметра λ методом максимального правдоподобия.

Выяснить, является ли оценка максимального правдоподобия параметра λ его несмещенной, состоятельной, эффективной оценкой.

15.52. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения

$$\mathsf{P}(k;\theta) = C_{k+r-1}^{r-1}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^r\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k,\ k=0,1,\ldots,$$

параметр $\theta > 0$, r известно.

Найти оценку $\hat{\theta}$ параметра θ методом моментов.

Выяснить, является ли $\hat{\theta}$ несмещенной, состоятельной, эффективной оценкой параметра θ.

Указание. См. задачу 14.2.

15.53. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из биномиального распределения

$$\mathsf{P}(k; m) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \;\; k = 0, 1, \ldots, m,$$

m известно.

Оценить параметр p методом максимального правдоподобия.

Выяснить, является ли оценка максимального правдоподобия параметра p его несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой.

15.54. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta^2} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\theta^2}\right\}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

Найти оценку $\hat{\theta}$ параметра θ методом моментов.

Выяснить, является ли $\hat{\theta}$ несмещенной и состоятельной оценкой параметра θ.

15.55. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из распределения с плотностью

$$f(x;\theta,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\theta\lambda^\theta}{x^{\theta+1}}, & \text{если } x > \lambda; \\ 0, & \text{если } x \le \lambda, \end{cases}$$

параметр $\theta > 1$, параметр $\lambda > 0$ ($f(x;\theta,\lambda)$ — плотность распределения Парето).

Найти оценки параметров θ и λ методом максимального правдоподобия.

Глава 16

Задача проверки статистических гипотез

16.1 Критерий, функция мощности критерия

Задача проверки статистических гипотез. Многие задачи математической статистики формулируются так. Имеется результат $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))'$ стохастического эксперимента, состоящего в наблюдении случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)'$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Распределение ξ неизвестно. Что можно сказать о распределении P_ξ вектора ξ по его наблюдению $\xi(\omega)$? Например, "Можно ли считать, что распределением P_ξ является данное распределение G?" или, например, "Можно ли считать, что распределением P_ξ является нормальное распределение?"

Общий подход к решению этой задачи такой. Из класса возможных распределений $\mathcal{P}$ вектора ξ выбираем распределение G (или класс распределений $\mathcal{G}$) — кандидатуру на распределение вектора ξ, фактически выдвигаем гипотезу (предположение): распределением вектора ξ является распределение G (или распределение вектора ξ принадлежит классу $\mathcal{G}$). И далее следуем Сократу, когда он хотел опровергнуть оппонента — если выдвинутая гипотеза противоречит результату эксперимента, ее необходимо отклонить. Так и мы — выдвинутую гипотезу о распределении P_ξ вектора ξ будем отклонять, если она противоречит результату $\xi(\omega)$ эксперимента и не будем отклонять в противном случае. Но, в отличие от Сократа, у нас ситуация сложнее, поскольку мы имеем дело со стохастическим экспериментом и в наши выводы вмешивается случай.

Далее мы будем пользоваться следующими принятыми в теории проверки статистических гипотез определениями и понятиями.

Нулевая и альтернативные гипотезы. Гипотезы относительно распределений случайных величин будем называть *статистическими* гипотезами.

Выбор из класса $\mathcal{P}$ возможных распределений вектора ξ кандидатуры на его распределение, например, распределением P_ξ является G, называют выбором нулевой гипотезы (основной, проверяемой). Нулевую гипотезу обычно обозначают через H_0. Вместе с выбором нулевой гипотезы H_0 относительно распределения P_ξ (распределение $\mathsf{P}_\xi = G$) из класса возможных гипотез о распределении вектора ξ выбирают альтернативную (конкурирующую) к H_0 гипотезу H_1 — распределение P_ξ вектора ξ принадлежит классу $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$. Далее нулевую гипотезу H_0 проверяют против альтернативной гипотезы — если H_0 противоречит результату $\xi(\omega)$ эксперимента, то H_0 отклоняют (в пользу альтернативной гипотезы), в противном случае — не отклоняют.

Альтернативная к H_0 гипотеза — это гипотеза, в пользу которой H_0 отклоняют (если H_0 отклоняют). Нулевая гипотеза всегда проверяется против альтернативной гипотезы.

В качестве класса $\mathcal{P}$ возможных распределений вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)'$ мы, как правило, будем рассматривать параметрический класс:

$$\mathcal{P} = \{\mathsf{P}_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s\}.$$

Проиллюстрируем введенные понятия на примере задачи проверки монеты на симметричность.

Монету, вероятность выпадения герба θ которой неизвестна, независимым образом подбрасывают n раз. Число выпавших гербов оказалось равным $\xi(\omega)$. Можно ли считать, что монета симметрична?

В терминах распределения наблюдаемой случайной величины ξ — числа выпавших гербов — задача о симметричности монеты формулируется так.

Распределение случайной величины ξ принадлежит классу вероятностных распределений

$$\mathcal{P} = \{B_{n,\theta};\ \theta \in (0,1)\},$$

$$B_{n,\theta}(k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Относительно распределения P_ξ выдвигается гипотеза H_0: распределением P_ξ случайной величины ξ является биномиальное распределение $B_{n,1/2}$, другими словами,

$$H_0 : \mathsf{P}_\xi(k) = C_n^k (1/2)^k (1-1/2)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Альтернативной (конкурирующей) к H_0 является гипотеза

$$H_1 : \mathsf{P}_\xi(k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n,\ \theta \neq 1/2.$$

Необходимо проверить гипотезу H_0 против альтернативы H_1 — отклонить H_0 или не отклонить. Если гипотеза H_0 противоречит результату эксперимента — число выпавших гербов равно $\xi(\omega)$ — мы ее отклоняем (в пользу альтернативы H_1), в противном случае — нет.

Гипотеза относительно распределения, однозначно его определяющая, называется *простой*, в противном случае — *сложной*. Например, гипотеза: случайная величина ξ имеет своим распределением

$$\mathsf{P}_{\theta_0}(k) = C_n^k \theta_0^k (1-\theta_0)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

(θ_0 и n — известны) — простая, а гипотеза: распределением случайной величины ξ является

$$\mathsf{P}_\theta(k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n,\ \theta \in (1/2, 1)$$

— сложная.

Критерий. Пусть $\xi(\omega)$ — результат (исход) эксперимента, состоящего в наблюдении вектора ξ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Распределение вектора ξ неизвестно, H_0 —

нулевая гипотеза относительно распределения P_ξ, пусть, к примеру, $H_0 : \mathsf{P}_\xi = \mathsf{G}$, альтернативная гипотеза — H_1. Необходимо проверить гипотезу H_0, а именно, вынести заключение: отклонить гипотезу H_0 или не отклонить. Согласно нашему общему подходу, мы гипотезу H_0 отклоняем (в пользу альтернативы H_1), если она противоречит результату эксперимента, и не отклоняем в противном случае. Результатов эксперимента, которым гипотеза H_0 противоречит, разумеется, может быть много, обозначим это множество исходов — подмножество выборочного пространства $X \subset \mathbb{R}^n$ — через S. Тогда мы гипотезу H_0 отклоняем, если исход эксперимента $\xi(\omega)$ оказался в множестве S (множестве исходов, которым H_0 противоречит) и не отклоняем в противном случае.

Определение. Борелевское подмножество S выборочного пространства $X \subset \mathbb{R}^n$ такое, что при $\xi \in S$ гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — нет, называется *критерием* (*критическим множеством, критической областью*) для проверки гипотезы H_0.

Далее естественно возникает задача: *как выбрать* (*построить*) *критическое множество S для проверки данной гипотезы H_0?* Чтобы найти подходы к ее решению, сначала рассмотрим так называемые ошибки первого и второго рода, неизбежные при проверке статистических гипотез.

Ошибки первого и второго рода. Пусть S — критическое множество для проверки гипотезы H_0: если исход $\xi(\omega)$ эксперимента попадает в S, то гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — нет. Поскольку заключение об отклонении или неотклонении гипотезы H_0 мы делаем по исходу стохастического эксперимента, при проверке гипотезы H_0 возможна одна из четырех ситуаций: гипотеза H_0 верна или нет (априори мы этого не знаем), реализация $\xi(\omega)$ случайного вектора ξ попала в S или нет. Подробнее.

1° Гипотеза H_0 верна. Реализация $\xi(\omega)$ не попала в S, и согласно критерию S гипотезу H_0 не отклоняем.

2° Гипотеза H_0 верна. Реализация $\xi(\omega)$ попала в S, и согласно критерию S гипотезу H_0 отклоняем.

3° Гипотеза H_0 неверна. Реализация $\xi(\omega)$ не попала в S, и согласно критерию S гипотезу H_0 не отклоняем.

4° Гипотеза H_0 неверна. Реализация $\xi(\omega)$ попала в S, и согласно критерию S гипотезу H_0 отклоняем.

Из четырех ситуаций две: 1° и 4° удовлетворительны и две: 2° и 3° неудовлетворительны.

В случаях 2° и 3° мы говорим, что в результате использования критерия S допускается ошибка.

Ошибки "верную гипотезу H_0 отклоняем" и "неверную гипотезу H_0 не отклоняем" качественно различны. Проиллюстрируем это различие на примере исследования медицинского препарата на токсичность.

Медицинский препарат перед выпуском в продажу исследуют на токсичность биологическими методами: определенную дозу препарата вводят подопытным животным (мышам, кроликам) и, в зависимости от количество ξ летальных исходов (число летальных исходов ξ — случайная величина), делают выводы о токсичности препарата — "препарат токсичен" или "препарат нетоксичен".

Задачу исследования препарата на токсичность биологическими методами в терминах проверки статистических гипотез формулируют так: относительно токсичности препарата выдвигают гипотезу H_0: препарат токсичен (альтернативная гипотеза H_1 — препарат нетоксичен). Необходимо проверить H_0, т. е. отклонить H_0 или нет. Выбор между этими действиями осуществляется по реализации $\xi(\omega)$ случайной величины ξ (по числу летальных исходов в группе животных) — если $\xi(\omega)$ оказалось малым, гипотезу H_0 отклоняют, в противном случае — нет.

Как и в каждой задаче проверки статистических гипотез, здесь возможны ошибки: 1° гипотеза H_0 верна, но согласно критерию ее отклоняют, и 2° гипотеза H_0 неверна, но согласно критерию ее не отклоняют.

Посмотрим, каковы последствия (какова "цена") этих ошибок в данной конкретной ситуации проверки препарата на токсичность (проверки гипотезы H_0: препарат токсичен).

1° Пусть допущена ошибка: гипотеза H_0 верна, но согласно критерию H_0 отклонили (число летальных исходов $\xi(\omega)$ оказалось малым). Утверждение "H_0 верна" означает, что препарат токсичен (опасен для здоровья пациентов, его принимающих). Утверждение "H_0 отклонили" означает, что препарат согласно критерию классифицирован как нетоксичный. В итоге — токсичный препарат (опасный для здоровья пациентов) классифицирован как нетоксичный (безопасный для здоровья пациентов) и отправлен в продажу для реализации. Последствия ошибки такого рода могут привести к летальным исходам пациентов, принимающих этот препарат ("цена" ошибки — летальные исходы).

2° Пусть допущена ошибка: гипотеза H_0 неверна, но согласно критерию H_0 не отклонили (число летальных исходов $\xi(\omega)$ оказалось большим). Утверждение "гипотеза H_0 неверна" в нашей задаче означает, что препарат нетоксичен (безопасен для здоровья пациентов). Утверждение "H_0 не отклонили" означает, что согласно критерию препарат классифицирован как токсичный. В итоге нетоксичный препарат классифицирован как токсичный, и, следовательно, отправлен поставщику (для переработки или уничтожения). Последствия ошибки такого рода выражаются в финансовых убытках, увеличении стоимости препарата ("цена" ошибки — финансовые потери).

Очевидно, из двух ошибок: верную гипотезу H_0 отклонить, (последствия ошибки — выпуск в продажу токсичного препарата), и неверную гипотезу H_0 не отклонить (последствия ошибки — возвращение поставщику нетоксичного препарата), важнее избежать первой.

Определение. Ошибка, состоящая в отклонении верной гипотезы H_0, называется ошибкой *первого рода.* Ошибка, состоящая в неотклонении неверной гипотезы H_0, называется ошибкой *второго рода.*

О выборе нулевой гипотезы. Испытуемую гипотезу из совокупности возможных гипотез мы выбираем сами. Ошибки, связанные с проверкой гипотез и состоящие в том, что данную гипотезу H_θ, $\theta \in \Theta$, отклоняют, когда она верна, можно рассматривать и не выбрав нулевую гипотезу. Так вот, в качестве проверяемой гипотезы, как правило, выбирают ту, для которой важней избежать ошибки, состоящей в ее отклонении, когда она верна. Ошибка первого рода — это ошибка, которой важней избежать ("цена" которой выше).

Относительно токсичности препарата имеется две гипотезы: H_1 — препарат нетоксичен, H_2 — токсичен (класс возможных гипотез состоит из двух гипотез: H_1 и H_2). Безусловно, важнее избежать ошибки, состоящей в классификации токсичного препарата как нетоксичного, т. е. в отклонении верной H_2. Поэтому в качестве проверяемой гипотезы H_0 выбираем гипотезу H_2 — препарат токсичен, тогда ошибка, состоящая в классификации токсичного препарата как нетоксичного, будет ошибкой первого рода.

Уровень значимости критерия. Мощность критерия. При проверке статистических гипотез ошибки неизбежны — каким бы ни было критическое множество S для проверки гипотезы H_0, значение $\xi(\omega)$ случайной величины ξ при верной H_0 может попасть в S, что приводит к ошибке первого рода, а при неверной гипотезе H_0 значение $\xi(\omega)$ может не попасть в S, что приводит к ошибке второго рода. И коль скоро невозможно (невозможно в принципе) строить критерии для проверки данной гипотезы, не приводящие к ошибкам, то естественно пытаться строить такие критерии, при использовании которых частота ошибок была бы по возможности меньшей (за ошибки надо “платить”). Посмотрим, как это можно делать.

Пусть H_0 — испытуемая гипотеза. Предположим для наглядности, что H_0 — простая и конкурирующая гипотеза только одна (обозначим ее H_1) и она также простая. Пусть S — критическое множество. Используя S для проверки гипотезы H_0, а именно, отклоняя H_0, если ξ попадает в S, и не отклоняя в противном случае, мы можем допустить ошибки первого и второго рода. Вероятность ошибки первого рода равна вероятности попадания ξ в критическое множество S при верной гипотезе H_0, т. е. равна $\mathsf{P}\{\xi \in S|H_0\}$ (коротко будем писать $\mathsf{P}(S|H_0)$). Вероятность ошибки второго рода равна вероятности попадания ξ в $\overline{S}$ при верной гипотезе H_1, т. е. $\mathsf{P}\{\xi \in \overline{S}|H_1\}$ (коротко будем писать $\mathsf{P}(\overline{S}|H_1)$). (Заметим, что $\mathsf{P}\{\xi \in S|H_0\}$ обозначает вероятность события $\{\xi \in S\}$, вычисленную при верной гипотезе H_0, и не имеет ничего общего с условной вероятностью.) Частоты ошибок первого и второго рода близки к вероятностям $\mathsf{P}(S|H_0)$ и $\mathsf{P}(\overline{S}|H_1)$ этих ошибок соответственно, поэтому, чтобы частоты ошибок были малыми, критерий S для проверки гипотезы H_0 следует выбирать так, чтобы $\mathsf{P}(S|H_0)$ и $\mathsf{P}(\overline{S}|H_1)$ были по возможности меньше. Обе вероятности $\mathsf{P}(S|H_0)$ и $\mathsf{P}(\overline{S}|H_1)$ однозначно задаются критическим множеством S. Поэтому, выбирая S, скажем, так, чтобы вероятность $\mathsf{P}(S|H_0)$ ошибки первого рода была малой, мы одновременно получаем вероятность ошибки второго рода. (Заметим, что критическое множество S можно выбрать и из условия малости вероятности ошибки второго рода, но при этом вероятность ошибки первого рода определится выбранным S.) Так что выбирать S так, чтобы можно было контролировались вероятности ошибок первого и второго рода “одновременно и независимо“ невозможно. Поэтому будем поступать следующим образом. Поскольку важнее избежать ошибки первого рода (ее “цена” выше), критерий S будем выбирать так, чтобы вероятность ошибки первого рода $\mathsf{P}(S|H_0)$ была малой. (Тогда, используя критерий S для проверки H_0, в длинной серии экспериментов верную гипотезу H_0 будем отклонять изредка.) Малую вероятность ошибки первого рода $\mathsf{P}(S|H_0)$ будем гарантировать следующим образом: фиксируем малое α и критическое множество S выберем так, чтобы вероятность ошибки первого рода не превосходила α:

$$\mathsf{P}(S|H_0) \leq \alpha.$$

Как правило, это требование может быть удовлетворено не одним способом. Поэтому окончательно критическое множество S выбираем так, чтобы вероятность ошибки второго рода $\mathsf{P}(\overline{S}|H_1)$ была минимальна. Для этого выбираем S “пошире”.

Определение. Число α, ограничивающее сверху вероятность ошибки первого рода, называется *уровнем значимости.*

Если критическое множество S удовлетворяет условию

$$\mathsf{P}(S|H_0) \leq \alpha,$$

то будем говорить, что оно соответствует уровню значимости α.

Определение. Вероятность $\mathsf{P}(S|H_1)$ отклонить нулевую гипотезу, когда верна альтернативная гипотеза H_1, называется *мощностью критерия* S.

Если альтернативная гипотеза сложная, причем когда она верна, верна одна из простых гипотез H_θ, $\theta \in \Theta$, то при каждом $\theta \in \Theta$ можно вычислить $\mathsf{P}(S|H_\theta)$.

Определение. Функция

$$\beta(\theta) = \mathsf{P}(S|H_\theta),\ \theta \in \Theta,$$

равная вероятности отклонить нулевую гипотезу H_0, если верна гипотеза H_θ, $\theta \in \Theta$, называется *функцией мощности критерия* S.

Мощность критерия $\mathsf{P}(S|H_1)$ и вероятность ошибки второго рода $\mathsf{P}(\overline{S}|H_1)$ связаны так:

$$\mathsf{P}(S|H_1) = 1 - \mathsf{P}(\overline{S}|H_1).$$

Чувствительность критерия и выбор уровня значимости. Задача критерия S для проверки гипотезы H_0 — не отклонять H_0, когда она верна, и отклонять, когда она неверна — мало того чтобы критерий не отклонял верную H_0, он должен отклонять H_0, когда H_0 неверна. Свойство критерия S отклонять H_0, кода H_0 неверна (когда верна альтернативная гипотеза H_1), называют чувствительностью критерия. Количественно чувствительность критерия S описывается мощностью $\mathsf{P}(S|H_1)$ критерия (функцией мощности $\beta(\theta) = \mathsf{P}(S|H_\theta)$, $\theta \in \Theta$, критерия) — чем больше мощность критерия, тем критерий чувствительнее.

Процедура проверки гипотезы H_0 сопровождается ошибками (первого и второго рода). Выбором уровня значимости α мы не только контролируем (ограничиваем) вероятность ошибки первого рода (а именно, $\mathsf{P}(S|H_0) \leq \leq \alpha$), но и определяем чувствительность $\mathsf{P}(S|H_1)$ критерия. При этом за уменьшение уровня значимости α (а вместе с ним и вероятности ошибки первого рода $\mathsf{P}(S|H_0)$) мы расплачиваемся уменьшением чувствительности $\mathsf{P}(S|H_1)$ критерия — потерей свойства критерия отклонять гипотезу H_0, когда она неверна. Последнее необходимо иметь в виду при выборе уровня значимости — критерии, соответствующие слишком малым уровням значимости α, имеют малую чувствительность (гипотеза H_0 неверна, а критерий ее не отклоняет).

Пример 16.1.1 (выборочный контроль). *Предназначенная для продажи партия изделий в количестве* 10 000 *штук проходит выборочный контроль на качество. Поставщик уверен, что доля дефектных изделий равна* 1 % (*или меньше*), *и хочет, чтобы всякий раз, когда эта доля составляет* 1 %, *партия выдерживала контроль с вероятностью* 0,90. *Покупатель считает, что партию целесообразно закупить даже в том случае, если доля дефектных изделий будет больше* 1 %, *но* 6 % *дефектных изделий он считает предельно допустимой долей и хочет, чтобы контроль обнаруживал партии с* 6 % *содержанием дефектных изделий с вероятностью* 0,95. *Поставщик и покупатель договорились осуществлять контроль следующим образом: из партии в* 10 000 *изделий извлекают случайную выборку объемом n, если при этом количество $\xi(\omega)$ дефектных изделий в выборке окажется малым* (*меньше некоторого l*), *то партия выдерживает контроль и закупается, в противном случае партия бракуется.*

Каким должен быть объем n выборки из партии и значение l?

Ответить на этот вопрос, сформулировав и решив поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез.

Решение. Изделия в выборку объемом n извлекают последовательно. Поскольку объем партии большой (10 000 изделий), то можно считать, что случайная величина ξ — число дефектных изделий в выборке — имеет биномиальное распределение с параметрами $(n;\theta)$:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = B_{n,\theta}(k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

параметр θ неизвестен (доля дефектных изделий неизвестна). Семейством возможных распределений случайной величины ξ является

$$\mathcal{P} = \{B_{n,\theta}, \theta \in (0;1)\},$$

через H_θ будем обозначать гипотезу — ξ имеет своим распределением $B_{n,\theta}$, $\theta \in (0;1)$.

Отметим, что распределение из семейства $\mathcal{P}$ однозначно определяется значением параметра θ и наоборот.

Для нас представляют интерес следующие значения параметра θ: $\theta_1 = 0{,}01$ и $\theta_2 = 0{,}06$ (им соответствует 1 % и 6 % содержание дефектных изделий в партии).

Поэтому в качестве нулевой гипотезы естественно выбрать одну из гипотез: гипотезу $H_{0,01}$ — ξ имеет распределение $B_{n;0,01}$, альтернативная гипотеза $H_{(0,01;1)}$ — распределение ξ принадлежит классу распределений $B_{n,\theta}$, $\theta \in (0{,}01; 1)$, или гипотезу $H_{0,06}$ — ξ имеет распределение $B_{n;0,06}$, альтернативная гипотеза $H_{(0;0,06)}$ — распределение ξ принадлежит классу распределений $B_{n;\theta}$, $\theta \in (0; 0{,}06)$. Остановимся на последней, а именно, $H_0 = H_{0,06}$, альтернативная гипотеза $H_1 = H_{(0;0,06)}$. Альтернатива $H_1 = H_{(0;0,06)}$ сложная, когда $H_{(0;0,06)}$ верна, верна одна из простых гипотез $H_\theta : \xi$ имеет распределение $B_{n,\theta}$, $\theta \in (0; 0{,}06)$.

Неотклонение нулевой гипотезы $H_{0,06}$ означает классификацию партии как партии, содержащей 6 % дефектных изделий, с последующим отказом в закупке партии. Отклонение нулевой гипотезы в пользу альтернативы $H_1 = H_{(0;0,06)}$ означает классификацию партии как такой, которая содержит долю дефектных изделий меньшую 0,06, с последующей закупкой партии. Если при этом партия с 6 % брака (гипотеза $H_0 = H_{0,06}$ верна) классифицируется как партия, содержащая меньше 6 % дефектных изделий и, как следствие, закупается (допущена ошибка первого рода), то покупатель, разумеется, понесет убытки. Если какая-то из партий с малым процентом дефектных изделий — меньшим 6 % (верна гипотеза $H_1 = H_{(0;0,06)}$), классифицируется как партия, содержащая 6 % брака, то партия бракуется (допущена ошибка второго рода), и это уже проблема поставщика.

Для проверки гипотезы H_0 в качестве критического естественно выбрать множество вида $S = \{k : k \leq l\}$. Это множество определяется числом l и объемом выборки n.

По договоренности между покупателем и поставщиком множество $S = \{k : k \leq l\}$, а фактически числа n и l, должны быть такими, чтобы выполнялись приведенные ранее договоренности между покупателем и поставщиком, а именно.

1. Партия с 6 % дефектных изделий должна обнаруживаться с вероятностью 0,95, т. е.

$$\mathsf{P}(\overline{S}|H_{0,06}) \geq 0{,}95,$$

или, что то же,

$$\mathsf{P}(S|H_{0,06}) = \mathsf{P}\{\xi \in S|H_0\} = \mathsf{P}\{\xi \leq l|H_0\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} C_n^k (0{,}06)^k (0{,}94)^{n-k} \leq \alpha = 0{,}05.$$

Последнее неравенство — формализованная запись требований покупателя, согласно которым партия, содержащая 6 % брака, должна обнаруживаться с вероятностью не меньшей, чем 0,95.

2. Значение $\beta(\theta) = \mathsf{P}(S|H_\theta)$ функции мощности критерия S в точке $\theta = 0{,}01$ должно быть не меньшим 0,9:

$$\beta(0{,}01) = \mathsf{P}(S|H_{0,01}) = \mathsf{P}\{\xi \in S|H_{0,01}\} = \mathsf{P}\{\xi \leq l|H_{0,01}\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} C_n^k (0{,}01)^k (0{,}99)^{n-k} \geq 0{,}9.$$

Последнее неравенство является формализованной записью требований поставщика, согласно которым партия, содержащая 1 % брака, должна выдерживать контроль с вероятностью не меньшей, чем 0,9.

Таким образом, искомые n и l должны удовлетворять соотношениям:

$$\sum_{k=0}^{l} C_n^k (0{,}06)^k (0{,}94)^{n-k} \leq 0{,}05, \qquad (16.1.1)$$

$$\sum_{k=0}^{l} C_n^k (0{,}01)^k (0{,}99)^{n-k} \geq 0{,}9, \qquad (16.1.2)$$

разумеется, при этом n следует выбрать по возможности меньшим.

В рассматриваемой задаче биномиальное распределение

$$B_{n,\theta}(m) = C_n^m \theta^m (1-\theta)^{n-m},\ m = 0, 1, \ldots, n,$$

можно аппроксимировать пуассоновским. Основанием для этого является теорема Пуассона (см. теорему 5.2.1) — параметр θ малый (вероятность θ выбора дефектного изделия мала), а объем n выборки — большой. Чтобы погрешность аппроксимации биномиального распределения пуассоновским была незначительной, n должно быть не меньшим нескольких десятков (а лучше сотен), а произведение $\lambda = n\theta$ должно лежать между 1 и 10. Тогда при верной гипотезе $H_{0,06}$ значение $\lambda_0 = n \cdot 0{,}06$, а

$$\mathsf{P}\{\xi = k | H_{0,06}\} = \mathsf{P}_{\lambda_0}(k) = \frac{\lambda_0^k}{k!} e^{-\lambda_0},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

При верной гипотезе $H_{0,01}$ значение $\lambda_1 = n \cdot 0{,}01$, а

$$\mathsf{P}\{\xi = k | H_{0,01}\} = \mathsf{P}_{\lambda_1}(k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

А объем выборки n и число l должны удовлетворять соотношениям

$$\mathsf{P}\{\xi \le l | H_{0,06}\} = \sum_{k=0}^{l} \frac{\lambda_0^k}{k!} e^{-\lambda_0} \le 0{,}05,\ \ \lambda_0 = n \cdot 0{,}06, \quad (16.1.3)$$

$$\mathsf{P}\{\xi \le l | H_{0,01}\} = \sum_{k=0}^{l} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \ge 0{,}90,\ \ \lambda_1 = n \cdot 0{,}01 \quad (16.1.4)$$

(сравните с неравенствами (16.1.1) и (16.1.2)).

Определяя n и l, мы, естественно, будем стремиться выбрать n по возможности меньшим.

Посмотрим, можно ли, скажем, для $n = 50$ выбрать l так, чтобы выполнялись соотношения (16.1.3) и (16.1.4). Если нет, выбираем n бóльшим, и так будем поступать до тех пор, пока не найдем n и l, которые будут удовлетворять неравенствам (16.1.3) и (16.1.4).

При $n = 50$ имеем $\lambda_0 = 50 \cdot 0{,}06 = 3$; $\lambda_1 = 50 \cdot 0{,}01 = 0{,}5$. Пользуясь таблицей распределения Пуассона (см. табл. 22.6.1), находим, что неравенство (16.1.3) удовлетворяется при $l = 0$, а неравенство (16.1.4) — при $l \geq 1$. Поэтому для $n = 50$ не существует l, которое бы удовлетворяло неравенствам (16.1.3) и (16.1.4).

При $n = 100$ имеем $\lambda_0 = 100 \cdot 0{,}06 = 6$; $\lambda_1 = 100 \times \times 0{,}01 = 1$. Из таблицы распределения Пуассона находим, что неравенство (16.1.3) удовлетворяется при $l \leq 1$, а неравенство (16.1.4) — при $l \geq 2$. Поэтому для $n = 100$ не существует l, которое бы удовлетворяло неравенствам (16.1.3) и (16.1.4).

При $n = 150$ имеем $\lambda_0 = 150 \cdot 0{,}06 = 9$; $\lambda_1 = 150 \cdot 0{,}01 = = 1{,}5$. Для таких λ_0 и λ_1 неравенство (16.1.3) удовлетворяется при $l \leq 4$, а неравенство (16.1.4) — при $l \geq 3$. Попытаемся уменьшить n.

Пусть $n = 130$. Тогда $\lambda_0 = 130 \cdot 0{,}06 = 7{,}8$; $\lambda_1 = = 130 \cdot 0{,}01 = 1{,}3$; неравенство (16.1.3) удовлетворяется, при $l \leq 3$, а неравенство (16.1.4) — при $l \geq 3$. Таким образом, для $n = 130$ и $l = 3$ неравенства (16.1.3) и (16.1.4) справедливы. И, следовательно, критическое множество (критерий) для проверки гипотезы H_0 имеет вид

$$S = \{k\colon k \leq 3\}.$$

Для критерия $S = \{k : k \leq 3\}$ вероятность ошибки первого рода

$$\mathsf{P}\{\xi \leq 3 | H_{0,06}\} = \mathsf{P}_{0,06}(S) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda_0^k}{k!} e^{-\lambda_0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \frac{7{,}8^k}{k!} e^{-7{,}8} = 0{,}048.$$

Это можно интерпретировать так. Пользуясь описанным критерием, на 100 партий изделий, содержащих 6 % брака, в среднем около 5 партий мы будем классифицировать как содержащие меньше 6 % брака и, следовательно, будем закупать.

Значения функции мощности

$$\beta(\theta) = \mathsf{P}(S|H_\theta) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(130\cdot\theta)^k}{k!} e^{-130\cdot\theta},\ \theta \in (0; 0{,}06),$$

критерия S в некоторых точках приведены в таблице 16.1.1.

Таблица 16.1.1

θ	0,005	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
$\beta(\theta)$	0,996	0,957	0,736	0,238	0,112	0,048	0,008

Заметим, что значение 0,048 функции мощности $\beta(\theta)$ в точке $\theta = 0{,}06$ равно вероятности ошибки первого рода (напомним, что $H_0 : \theta = 0{,}06$).

График функции мощности $\beta(\theta) = \mathsf{P}(S|H_\theta)$ критерия изображен на рис. 16.1.1.

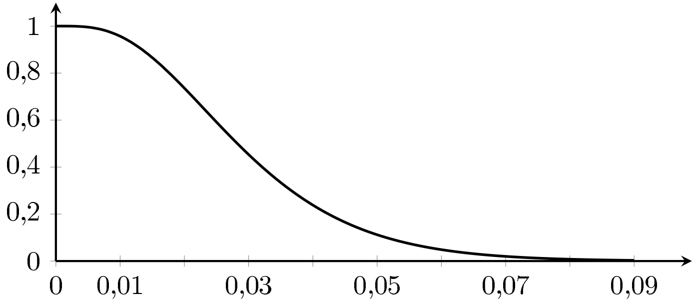


Рис. 16.1.1: График функции мощности критерия $\beta(\theta) = \mathsf{P}(S|H_\theta)$

В точке $\theta = 0{,}01$ значение функции мощности критерия

$$\beta(0{,}01) = \mathsf{P}\{\xi \le 3|H_{0{,}01}\} = \mathsf{P}_{0{,}01}(S) =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1{,}3^k}{k!} e^{-1{,}3} = 0{,}957.$$

Последнее обозначает, что на 100 партий изделий с 1 % брака в среднем около 96 партий будут выдерживать контроль.

В точке 0,005 значение

$$\beta(0{,}005) = \mathsf{P}\{\xi \le 3 | H_{0{,}005}\} = \mathsf{P}_{0{,}005}(S) = 0{,}995.$$

Это можно интерпретировать так: при использовании критерия $S = \{k\colon k \le 3\}$, в среднем на 100 партий изделий с 0,5 % дефектных изделий около 99 партий будут выдерживать контроль.

Далее, хотя гипотеза $H_0 = H_{0{,}06}$ проверяется против альтернативы $H_1 = H_{(0;0{,}06)}$ — параметр $\theta \in (0; 0{,}06)$, формально мы можем вычислять значения функции мощности $\beta(\theta) = \mathsf{P}(S|H_\theta)$ и при значениях параметра $\theta > 0{,}06$, что соответствует гипотезам о долях дефектных изделий в партии больших 0,06.

В частности, например, в точке $\theta = 0{,}08$ значение функции мощности

$$\beta(0{,}08) = \mathsf{P}\{\xi \le 3 | H_{0{,}08}\} = \mathsf{P}_{0{,}08}(S) = 0{,}008.$$

Последнее обозначает, что при верной гипотезе $H_{0{,}08}$ — партия содержит 8% дефектных изделий, гипотеза H_0 с вероятностью 0,008 будут отклоняется, и с вероятностью $1 - \beta(0{,}08) = 0{,}992$ не будет отклоняться и, как следствие, партия, содержащая 8% дефектных изделий, с вероятностью 0,992 будет браковаться. Так что критерий $\{k : k \le 3\}$ “хорошо работает” и при значениях параметра θ больших 0,06.

16.2 Задачи

АЗ: 16.1, 16.15.
СЗ: 16.9, 16.11.

16.1 (о телепатах). Некоторые люди утверждают, что они могут читать мысли на расстоянии — являются телепатами. При этом телепат не претендует на безошибочное чтение мыслей, но утверждает, что иногда ошибаясь, он все-таки чаще читает мысли верно, чем неверно.

Вам необходимо проверить способности телепата читать мысли на расстоянии. С этой целью предлагается провести такой эксперимент. Вы задумываете наудачу число (для простоты нуль или единицу) и фиксируете его, например, на бумаге. Телепат читает вашу мысль — задуманное число и также фиксирует его, и так n раз. Если телепат действительно читает ваши мысли, то доля правильно прочитанных нулей (нуль читается как нуль) и единиц (единица читается как единица), т. е. доля успехов (успех — правильно прочитанный символ) будет большой.

Вы предлагаете телепату прочитать n символов, $\xi(\omega)$ из них были прочитаны правильно. Свидетельствует ли это о способности телепата читать мысли на расстоянии?

Предложите правило (критерий), с помощью которого можно обнаружить способности телепата читать мысли на расстоянии.

Сформулируйте и решите поставленную задачу в терминах проверки статистических гипотез, а именно:

определите случайную величину, наблюдаемую в эксперименте;

предложите нулевую (основную) и альтернативные гипотезы;

выясните, в чем состоят ошибки первого и второго рода;

предложите критерий для проверки нулевой гипотезы;

выберите уровень значимости критерия;

вычислите вероятность ошибки первого рода;

постройте график функции мощности критерия;

исследуйте поведение функции мощности критерия в зависимости от уровня значимости, в зависимости от n;

дайте частотную интерпретацию полученным результатам.

16.2. Необходимо проверить монету на симметричность. Она может быть как симметричной — вероятность выпадения герба составляет 0,5, так и несимметричной — вероятность выпадения герба отлична от 0,5 (несимметричная и симметричная монеты внешне неразличимы). С этой целью подбрасываем монету n раз ($n = 5,\ 10, \ldots$) и регистрируем количество выпавших гербов.

Предложить правило (критерий) для проверки монеты на симметричность.

Какое минимальное число раз необходимо подбросить монету, чтобы симметричная монета классифицировалась как несимметричная с вероятностью, не большей чем 0,1, а несимметричная, вероятность выпадения герба которой равна 0,8, обнаруживалась с вероятностью 0,95?

Решить поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Построить график функции мощности критерия.

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

Пусть теперь уровень значимости и число n подбрасываний монеты мы можем выбирать сами. Исследовать, как меняется функция мощности критерия в зависимости от его уровня значимости, в зависимости от n.

16.3 (о диагностике начальной формы туберкулёза). Рассмотрим задачу диагностики туберкулёза, связанную с открытием того факта, что метод рентгеновского анализа не является абсолютно надежным при определении наличия или отсутствия заболевания: здоров индивидуум или нет, результат рентгеновского исследования на туберкулёз может быть как положительным, так и отрицательным.

Из опыта известно, что:

а) если пациент страдает туберкулёзом, то вероятность того, что отдельный рентгеновский анализ выявит заболевание (анализ будет положительным), составляет p_0;

б) если у пациента нет никаких признаков туберкулёза, то вероятность того, что отдельный рентгеновский анализ будет положительным (пациенту будет поставлен диагноз — болен туберкулёзом), равна p_1.

Предположим, что в некоторой клинике при обследовании состояния здоровья пациента делается одним и тем же способом n рентгеновских снимков с целью обнаружения возможных признаков туберкулёза. Допустим, что толкование снимков, принадлежащих одному и тому же пациенту, производится так, чтобы была обеспечена независимость диагноза по каждому снимку от выводов, сделанных по предыдущим снимкам.

Пусть $p_0 = 0{,}95$, $p_1 = 0{,}05$ и в условиях описанного обследования изготовили три снимка. При этом один из трех анализов оказался положительным. Вынести заключение, страдает пациент туберкулёзом или нет.

Сформулируйте и решите поставленную задачу в терминах проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Исследуйте, как меняется мощность критерия в зависимости от его уровня значимости.

16.4 (о телепатах). Есть люди утверждающие, что они могут читать мысли на расстоянии — являются телепатами (утверждают, что читают, но не гарантируют, что правильно будут прочитаны все мысли, т. е. признают, что иногда ошибаются — мысли на расстоянии читать непросто).

Вам предлагают проверить способности телепата читать мысли на расстоянии. С этой целью проведите такой эксперимент. Подбросьте правильную монету и зафиксируйте результат, например на бумаге. Телепат читает вашу мысль — герб или решетка — и также фиксирует результат. Далее подсчитываем количество правильно прочитанных гербов (герб читается как герб) и решеток (решетка читается как решетка). Если телепат в самом деле читает ваши мысли, то доля правильно прочитанных гербов и решеток, т. е. доля успехов, будет большой (успех — правильно прочитанный символ, неудача — неправильно прочитанный символ).

Монету подбросили n раз. При этом телепат правильно прочитал ξ символов. Свидетельствует ли это о способности телепата читать мысли на расстоянии?

Проверьте телепатические способности своего товарища. Предложите критерий, с помощью которого можно было бы обнаружить способности телепата читать мысли на расстоянии.

Сформулируйте и решите поставленную задачу в терминах проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Постройте график функции мощности критерия.

Исследуйте, как меняется функция мощности критерия в зависимости от его уровня значимости, в зависимости от числа n подбрасываний монеты.

16.5 (о статистике и экспериментаторе). У двух студентов (одного назовем статистиком, другого назовем экспериментатором) имеется пара монет: одна симметричная, другая несимметричная.

Экспериментатор и статистик договариваются о следующем: экспериментатор выходит в соседнюю комнату, выбирает одну из монет (какую — статистик не знает), подбрасывает ее n раз и результат (число выпадений герба) сообщает статистику. Последний утверждает, что может определить, какую из двух монет подбрасывал экспериментатор. Однако экспериментатор ставит под сомнение эти способности статистика и как аргумент выдвигает такие возражения: поскольку результат эксперимента (число выпавших гербов) предсказать невозможно, причем как для симметричной монеты, так и для несимметричной это число может быть любым из $0, 1, \ldots, n$, то определить, какая из монет подбрасывалась, невозможно.

Кто прав — статистик или экспериментатор?

Что можно сказать относительно возможности различить симметричную и несимметричную монеты?

Сформулируйте поставленную задачу с позиции статистика, т. е. как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Постройте график функции мощности критерия.

Исследуйте, как меняется функция мощности критерия в зависимости от его уровня значимости, в зависимости от числа n подбрасываний монеты.

16.6 (о проверке препарата на токсичность). Процесс производства некоторого медицинского препарата достаточно сложный, так что несущественные на первый взгляд отклонения от технологии могут вызвать появление высокотоксичных побочных примесей. Токсичность последних может оказаться столь высокой, что даже незначительное их количество, которое не может быть обнаружено при обычном химическом анализе, опасно для человека, принимающего этот препарат. Поэтому до реализации партии препарата его исследуют на токсичность биологическими методами. Определенная доза препарата вводится подопытным животным и регистрируется результат (количество летальных исходов). Если препарат токсичный, то все или почти все животные гибнут — количество летальных исходов $\xi(\omega)$ большое ($\xi(\omega) \geq l$). Если препарат нетоксичный количество летальных исходов

$\xi(\omega)$ малое ($\xi(\omega) < l$), или, что то же, количество выживших животных большое.

Известно, что если препарат токсичный, то вероятность летального исхода не меньше чем 0,9, а если препарат нетоксичный, то вероятность летального исхода не превышает 0,05. Какое минимальное число n животных необходимо инъецировать, чтобы токсичный препарат обнаруживался (классифицировался как токсичный) с вероятностью, не меньшей чем 0,999, а нетоксичный препарат выдерживал контроль (классифицировался как нетоксичный) с вероятностью 0,98?

Найти n, сформулировав поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

16.7 (о выборочном контроле). Большие партии изделий проходят выборочный контроль. Качество партии считается удовлетворительным, если доля дефектных изделий в ней не более чем 2 %, но покупатель допускает возможность незначительного превышения этой доли. Какое минимальное количество изделий в партии необходимо испытать, чтобы партия, содержащая 8 % дефектных изделий, обнаруживалась с вероятностью, не меньшей чем 0,95, а партия, содержащая 2 % таких изделий, принималась с вероятностью, не меньшей чем 0,9?

Сформулировать и решить поставленную задачу в терминах проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1 и пример 16.1.1).

Построить график функции мощности критерия.

Вычислить значение функции мощности критерия в точках 0,01; 0,04; 0,06; 0,10.

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

Замечание. Поскольку выборку для контроля можно взять большого объема, а процент дефектных изделий мал, то в качестве распределения числа ξ дефектных изделий можно рассматривать пуассоновское распределение.

16.8. Чтобы выяснить, является ли болезнь инфекционной, биолог прививает ее пяти мышам и размещает их в одной клетке с n непривитыми мышами. Если болезнь инфекционная, то вероятность того, что непривитая мышь заболеет в течение 10 дней, составляет 0,9; если же болезнь неинфекционная, то вероятность того, что непривитая мышь заболеет на протяжении указанного времени, составляет 0,05. Через 10 дней фиксируется количество непривитых мышей с признаками заболевания.

Какое минимальное количество непривитых мышей необходимо использовать в эксперименте, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,999, обнаружить инфекционное заболевание и с вероятностью, не большей чем 0,01, классифицировать неинфекционное заболевание как инфекционное?

Сформулировать и решить поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

16.9 (о контроле чистоты воды). Для нужд некоторого химического производства необходимо, чтобы используемая вода была чистой — содержала мало бактерий. Вода, содержащая в среднем менее одной бактерии на единицу объема, считается пригодной для данного химического производства. Если же среднее количество бактерий на единицу объема воды равно одной или больше, то ее использование недопустимо.

Обычная методика контроля воды на чистоту состоит в следующем. Берется 10 (в общем случае n) проб воды единичного объема. Затем каждая из этих проб добавляется в колбы с питательной средой, которые содержатся при температуре, благоприятной для роста бактерий. Если проба загрязнена, т. е. содержит по меньшей мере одну бактерию, то колония бактерий будет расти и первоначально прозрачный раствор помутнеет. О чистоте воды судят по количеству ξ загрязненных проб: если это количество не превышает определенного числа l, то вода считается чистой; в противном случае — загрязненной, тогда проводится дополнительная очистка воды, и она снова проходит контроль на чистоту. (Дополнительная очистка воды, естественно, требует труда и затрат, однако, если используемая вода содержит значительное количество бактерий, то вызванные этим потери существенно больше.)

Каким должно быть l, чтобы вода со средним содержанием бактерий, равным одной на единицу объема, обнаруживалась с вероятностью 0,99? Найти указанное l, сформулировав поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Построить график функции мощности критерия.

Пусть теперь уровень значимости и число n проб воды не фиксировано. Исследовать, как меняется функция мощности критерия в зависимости от его уровня значимости, в зависимости от n.

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

Замечание. В качестве распределения числа бактерий в единичном объеме воды со средним содержанием λ бактерий на единицу объема будем рассматривать пуассоновское распределение с параметром λ.

16.10 (о леди, пробующей чай). Некая леди утверждает, что, попробовав чашку чая с молоком, она может определить, что было сначала налито в чашку — молоко или чай (различает рецепты приготовления чая). При этом леди не претендует на безошибочное определение разницы во вкусе, но утверждает, что, пусть иногда ошибаясь, она чаще правильно определяет рецепт приготовления чая, нежели неправильно.

Прежде чем признать наличие у леди способностей различать рецепты приготовления чая, ей предлагают попробовать и классифицировать n пар чашек чая (по паре чашек за завтраком в течение n дней). В каждую пару входит по чашке чая, приготовленного по разным рецептам. Количество ξ правильно классифицированных пар регистрируется. Пусть леди из n пар чашек правильно классифицировала $\xi(\omega)$ пар. Свидетельствует ли это о способностях леди различать рецепты приготовления чая?

Вы — член доброжелательного жюри — не хотите отвергнуть способности леди различать рецепты приготовления чая, если они у леди в самом деле имеются. Предложите правило (критерий), которым должно руководствоваться жюри, вынося заключение о способностях леди различать рецепты приготовления чая.

Сформулируйте и решите поставленную задачу в терминах проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Постройте график функции мощности критерия.

Выясните, как меняется функция мощности критерия в зависимости от его уровня значимости, в зависимости от количества n пар чашек чая, предлагаемых для классификации.

Замечание. Как член жюри, вы, разумеется, не хотите признать за леди упомянутые способности, если их нет на самом деле; поэтому в качестве нулевой гипотезы предлагаете гипотезу H_0: леди не имеет способностей. Но как член доброжелательного жюри, не хотите понапрасну отвергать способности леди, если она их имеет, а поэтому назначаете не слишком малый уровень значимости критерия.

16.11 (о выборочном контроле). Потребитель приобретает крупные партии товара. Чтобы избежать при этом значительной доли дефектных изделий, осуществляется выборочный контроль. Из каждой партии для контроля выбирается n изделий. Партия принимается, если число дефектных изделий среди n проверенных не превышает l.

Потребитель предъявляет следующие требования к контролю: если доля дефектных изделий в партии меньше 8 %, то партия выдерживает контроль и закупается, но партии с 8 % дефектных изделий должны обнаруживаться с вероятностью, не меньшей 0,9. У поставщика свои пожелания относительно контроля: он хочет, чтобы партия, доля дефектных изделий в которой составляет 1 %, браковалась с вероятностью не большей, чем 0,04.

Каким должен быть объем n выборки из партии (разумеется, минимальный) и значение l?

Сформулировать и решить поставленную задачу в терминах проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1 и пример 16.1.1).

Построить график функции мощности критерия.

Какова вероятность забраковать партию товара, содержащую 1, 2, 4, 8, 10 % дефектных изделий?

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

16.12 (об игральных костях). Имеются две игральные кости: одна — симметричная (вероятность выпадения каждой грани равна $1/6$), другая — несимметричная, центр тяжести которой смещен так, что вероятность появления числа очков, большего 3, превышает $1/2$.

С целью обнаружения несимметричной кости, берем одну кость (какую именно, неизвестно — кости внешне различить невозможно), подбрасываем ее n раз и регистрируем количество выпавших очков. Какое минимальное количество подбрасываний необходимо выполнить, чтобы симметричная кость классифицировалась как несимметричная с вероятностью, не большей чем 0,1, а несимметричная, вероятность выпадения количества очков большего чем 3 которой равна 0,9, обнаруживалась с вероятностью 0,95?

Решить поставленную задачу, сформулировав ее как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Построить график функции мощности критерия.

Вычислить вероятность того, что несимметричная кость, вероятность выпадения числа очков большего чем 3 которой равна 0,6; 0,7; 0,8; 0,9, будет обнаружена; не будет обнаружена.

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

16.13. Решить задачу 16.9 в предположении, что в эксперименте используется n проб воды.

Построить график функции мощности критерия.

Выяснить, как изменяется функция мощности критерия в зависимости от его уровня значимости, в зависимости от количества n проб воды, используемых в эксперименте.

16.14. Некоторые люди претендуют на чтение мыслей на расстоянии, их называют телепатами. Как правило, телепаты не настаивают на безошибочном чтении мыслей, но утверждают, что чаще читают мысли верно, чем неверно.

Вам необходимо проверить способности телепата читать мысли на расстоянии. С этой целью предлагается провести такой эксперимент. Вы задумываете наудачу цифру от 0 до 9 (при этом можно воспользоваться таблицей случайных чисел) и фиксируете результат. Телепат читает Вашу мысль и фиксирует четность (четная, нечетная) задуманной Вами цифры, и так n раз. Если эффект телепатии в самом деле имеет место, то доля правильно прочитанных четных и нечетных цифр будет большой.

Вы предлагаете телепату определить четность n цифр. При этом телепат правильно определил четность ξ цифр из n предложенных. Свидетельствует ли это о способности телепата читать мысли на расстоянии?

Проверьте телепатические способности своего товарища. Предложите критерий, с помощью которого можно было бы обнаружить способности телепата читать мысли на расстоянии.

Сформулируйте и решите поставленную задачу в терминах проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Постройте график функции мощности критерия.

Исследуйте, как меняется функция мощности критерия в зависимости от его уровня значимости, в зависимости от количества n предлагаемых для чтения цифр.

16.15 (о булочках с изюмом). Государственным стандартом установлено, что при выпечке сладких булочек на 1000 изделий должно приходиться 10 000 изюмин (в среднем 10 на одну булочку). У нас, однако, имеются сомнения, что весь изюм использован по назначению (его могли, по крайней мере частично, использовать для других целей), и мы хотим проверить, так ли это. С этой целью покупаем одну булочку и подсчитываем количество изюмин в ней: оказалось, что в булочке $\xi(\omega)$ изюмин. По количеству $\xi(\omega)$ изюмин в булочке необходимо сделать вывод: весь изюм идет на выпечку булочек или он расходится и по другим каналам (не предусмотренным стандартом).

Решить поставленную задачу, сформулировав ее как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Построить график функции мощности критерия.

Исследовать поведение функции мощности критерия в зависимости от его уровня значимости.

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

Как изменятся выводы, если изюм подсчитывается в двух булочках?

16.16. Медицинский препарат проходит контроль на токсичность по методике, описанной в задаче 16.6.

Известно, что вероятность летального исхода при использовании токсичного препарата не меньше 0,6, а если препарат нетоксичный, то вероятность летального исхода не превосходит 0,02.

Можно ли, инъецировав 10 мышей, с вероятностью 0,999 выявить токсичный препарат (токсичный препарат классифицировать как токсичный)? Если да, то какова вероятность того, что нетоксичный препарат выдержит контроль (будет классифицирован как нетоксичный)?

Препарат был введен 10 мышам, при этом зафиксирована гибель двух мышей. Какой вывод относительно токсичности препарата необходимо сделать?

Решить поставленную задачу, сформулировав ее как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Какое минимальное число мышей достаточно, чтобы выявить токсичный препарат?

Вычислить мощность критерия.

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

16.17. Чтобы выяснить, является ли болезнь инфекционной, биолог прививает ее пяти мышам и помещает их в одной клетке с тремя непривитыми мышами. Если болезнь инфекционная, то вероятность того, что непривитая мышь заболеет в течение двух недель, равна 0,95; если же болезнь неинфекционная, то вероятность того, что непривитая мышь заболеет, равна 0,04. Через две недели фиксируется количество ξ непривитых мышей с признаками болезни.

Можно ли, наблюдая три непривитые мыши, с вероятностью, не меньшей 0,99, выявить инфекционное заболевание и с вероятностью, не превышающей 0,05, классифицировать неинфекционное заболевание как инфекционное? Если нет, то какое минимальное число непривитых мышей необходимо для этого?

Сформулируйте и решите поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Дайте частотную интерпретацию полученным результатам.

16.18. Имеем пять внешне неразличимых монет, вероятность выпадания герба которых составляет соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9.

Берем одну из монет (какую именно, неизвестно — монеты по внешнему виду неразличимы) и подбрасываем 20 раз. По результатам подбрасываний сделать вывод о симметричности монеты.

Сформулируйте и решите поставленную задачу в терминах проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1), выбрав гипотезу “монета симметрична” как основную. Постройте критерий для проверки этой гипотезы с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

Постройте график функций мощности критерия.

Какова вероятность обнаружить несимметричную монету, вероятность выпадения герба которой составляет 0,6; 0,7; 0,8; 0,9?

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

Пусть теперь уровень значимости и число n подбрасываний монет мы можем выбирать сами. Исследуйте, как меняется функция мощности критерия в зависимости от его уровня значимости, в зависимости от n.

16.19 (качество инсектицида). Как специалиста с математической подготовкой Вас приглашают проанализировать результаты исследовательской работы, связанной с производством инсектицидов. Качество инсектицида определяется процентом поражения — процентом погибших насекомых популяции, обработанной инсектицидом. Лучший из имеющихся инсектицидов имеет процент поражения 92. В лаборатории разработан новый инсектицид INC. Возникает вопрос: является ли он более качественным? Чтобы выяснить это, предлагается обработать новым инсектицидом 100 насекомых и подсчитать количество выживших. Если количество выживших насекомых меньше определенного числа l, то INC качественнее, в противном случае — нет.

Авторы нового препарата утверждают, что препарат имеет процент поражения не меньший 98, и хотят, чтобы это его свойство проявлялось с вероятностью, не меньшей 0,96. Инсектицид INC дороже, чем имеющийся в продаже препарат с процентом поражения 92, и покупатель, естественно, отказывается приобретать INC, если его процент поражения 92, и настаивает, чтобы при тестировании инсектицида INC, препарат, процент поражения которого составляет 92, обнаруживался с вероятностью не меньшей 0,95.

Можно ли, использовав в эксперименте 100 насекомых, сделать вывод относительно качества инсектицида INC, обеспечив перечисленные выше условия? Если 100 насекомых в эксперименте не достаточно, то каким должно быть минимальное количество насекомых в группе, чтобы можно было ответить на поставленный вопрос?

Дайте ответ на перечисленные вопросы, сформулировав поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Построить график функции мощности критерия.

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

Пусть теперь уровень значимости и число n насекомых в группе мы можем выбирать сами. Исследуйте, как меняется функция мощности критерия в зависимости от его уровня значимости, в зависимости от n.

16.20. Вы занимаетесь исследованиями, связанными с производством инсектицидов. Качество инсектицида определяется процентом поражения — процентом насекомых, которые гибнут от препарата в исследуемой популяции. Лучший из имеющихся инсектицидов имеет процент поражения 90. В лаборатории получен новый инсектицид NIP. Возникает вопрос: является ли этот препарат лучшим?

Чтобы выяснить, отличаются ли инсектициды по качеству, популяция из n насекомых обрабатывается NIP и подсчитывается количество выживших насекомых. Если их меньше определенного числа l, то считается, что инсектицид NIP качественнее, в противном случае — нет.

Авторы нового препарата утверждают, что он имеет процент поражения не меньший 99, и хотят, чтобы это его свойство проявлялось с вероятностью не меньшей 0,98. Инсектицид NIP дороже имеющихся в продаже препаратов, и покупатель, естественно, отказывается приобретать NIP, если его процент поражения 90, и настаивает, чтобы инсектицид NIP, процент поражения которого равен 90, обнаруживался с вероятностью 0,95.

Какими должны быть n (по возможности меньшим) и l, чтобы инсектицид, процент поражения которого 90, обнаруживался с вероятностью 0,95, а инсектицид, процент поражения которого 99, классифицировался как такой с вероятностью не меньшей чем 0,98?

Сформулировать и решить поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1). Построить график функции мощности критерия.

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

Пусть теперь уровень значимости и число n насекомых в группе мы можем выбирать сами. Исследуйте, как меняется функция мощности критерия в зависимости от его уровня значимости, в зависимости от n.

16.21. Пусть в условиях эксперимента, описанного в задаче 16.3, значения $p_0 = 0{,}98$, $p_1 = 0{,}01$.

Какое минимальное количество n снимков необходимо сделать при обследовании каждого пациента, чтобы пациента с признаками туберкулеза можно было выявить с вероятностью 0,95, а пациент, не имеющий признаков туберкулеза, выдерживал проверку на туберкулез с вероятностью 0,90?

Определить n, сформулировав поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез (см. задачу 16.1).

Дать частотную интерпретацию полученным результатам.

Глава 17

Проверка гипотез о параметрах распределения $\boldsymbol{N_{a;\sigma^2}}$

Критерии для проверки гипотез о параметрах нормального распределения из этой главы получены на основании следующей теоремы:

Т е о р е м а. *Если* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *— выборка из нормального распределения* $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$*, то оценки*

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \ \ \text{и} \ \ s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2$$

являются независимыми случайными величинами, причем $(n-1)s^2/\sigma^2$ *имеет распределение* χ^2 *с* $(n-1)$ *степенями свободы, а* $\overline{\xi}$ *распределена* $\mathsf{N}_{a;\sigma^2/n}$.

С л е д с т в и е. Если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *— выборка из нормального распределения* $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$*, то случайная величина*

$$(\overline{\xi} - a)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}}$$

имеет распределение Стьюдента с $n-1$ *степенями свободы.*

Относительно распределений χ^2 и Стьюдента см. главу 22.

17.1 Проверка гипотезы $a = a_0$ (дисперсия известна)

Постановка задачи. Пусть $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots \ldots, \xi_n(\omega))$ — реализация выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из нормального распределения с параметрами $(a; \sigma^2)$. Параметр a неизвестен, дисперсия σ^2 известна. Относительно значения среднего a нормального распределения выдвигается гипотеза $H_0 : a = a_0$ или, что то же, $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ — реализация выборки из $\mathsf{N}_{a_0;\sigma^2}$. Альтернатива H_1 к гипотезе H_0 может быть как односторонняя: если $a \neq a_0$, то $a > a_0$ (она может быть и такой: $a < a_0$), так и двусторонняя: если $a \neq a_0$, то $a > a_0$ или $a < a_0$ (выбор альтернативы определяется рассматриваемой задачей). Необходимо проверить гипотезу $H_0 : a = a_0$.

Выбор статистики для построения критерия. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$. Вне зависимости от того, верна гипотеза $H_0 : a = a_0$ или нет, выборочное среднее

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

является состоятельной и несмещенной оценкой параметра a — является хорошим приближением параметра a. Последнее обозначает, что *уклонение* $(\overline{\xi} - a)$ *оценки* $\overline{\xi}$ *от параметра* a *малое — лежит в пределах погрешности оценивания*[1] $\sqrt{\mathsf{M}(\overline{\xi} - a)^2} = \sigma/\sqrt{n}$, *т. е. отношение*

$$\varphi_0 = (\overline{\xi} - a) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

[1] Погрешности при оценивании параметров неизбежны, оценок параметра без погрешностей не бывает. Параметр a величиной $\overline{\xi}$ оценивается с погрешностью $\sqrt{\mathsf{M}(\overline{\xi} - a)^2} = \sigma/\sqrt{n}$.

является малым. Поэтому если гипотеза $H_0 : a = a_0$ верна, то отношение

$$\varphi = (\overline{\xi} - a_0) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = (\overline{\xi} - a) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

малое. Если же гипотеза $H_0 : a = a_0$ неверна (скажем, $a > a_0$), то *уклонение* $\overline{\xi} - a_0 = (\overline{\xi} - a) + (a - a_0)$ *оценки* $\overline{\xi}$ *от гипотетического значения* a_0 *параметра* a *большое — существенно превышает погрешность оценивания* $\sigma/\sqrt{n}$ *параметра* a *оценкой* $\overline{\xi}$, *т. е. отношение*

$$\varphi = (\overline{\xi} - a_0) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

является большим.

И, следовательно, для проверки гипотезы $H_0 : a = a_0$ вычисляем отношение

$$\varphi = (\overline{\xi} - a_0) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

— если φ приняло большое значение, то гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — не отклоняем.

Чтобы можно было судить, большое или малое значение приняло отношение

$$\varphi = (\overline{\xi} - a_0) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

необходимо знать, какие значения оно принимает, когда гипотеза H_0 верна (когда отношение φ является малым) и какие значения принимает отношение φ, когда гипотеза H_0 неверна (когда отношение φ является большим). Другими словами, необходимо знать распределение φ, когда гипотеза H_0 верна и когда она неверна (или хотя бы когда гипотеза H_0 верна).

Если гипотеза H_0 верна, отношение

$$\varphi_0 = (\overline{\xi} - a) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

имеет нормальное распределение с параметрами $(0;1)$, поскольку $\overline{\xi}$ имеет нормальное распределение с параметрами $(a;\sigma^2/n)$. Отсюда, в частности, следует, что при верной гипотезе H_0 отношение φ_0, будучи малым, "почти всегда" — с вероятностью $1-2\alpha$ — принадлежат промежутку $(-N_{\alpha;0;1}, N_{\alpha;0;1})$, где $N_{\alpha;0;1}$ — верхний α-предел $\mathsf{N}_{0;1}$-распределения (см. рис. 17.1.1, слева).

Если гипотеза $H_0\colon a=a_0$ неверна (пусть для определенности $a>a_0$), то отношение

$$\varphi = (\overline{\xi}-a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = (\overline{\xi}-a)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + (a-a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

имеет нормальное распределение с дисперсией 1 и математическим ожиданием

$$\mathsf{M}\varphi = \mathsf{M}\left((\overline{\xi}-a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a-a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = b > 0$$

(см. рис. 17.1.1, справа). Отсюда, в частности, следует, что

$$\mathsf{P}\left\{b - N_{\alpha;0;1} \le \varphi \le b + N_{\alpha;0;1}\right\} = 1-2\alpha.$$

Поэтому в качестве границ, отделяющих большие значения отношения φ от малых, естественно выбрать числа $-N_{\alpha;0;1}, N_{\alpha;0;1}$. Значения отношения φ, принадлежащие промежутку $(-N_{\alpha;0;1}, N_{\alpha;0;1})$, будем классифицировать как малые, а не принадлежащие — как большие.

Критерий для проверки гипотезы $H_0: a = a_0$. *Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — выборка из $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$ с известной дисперсией σ^2, $N_{\alpha;0;1}$ — верхний α-предел $\mathsf{N}_{0;1}$-распределения.*

Если гипотезу $H_0 : a=a_0$ отклонять при

$$|\varphi| = |\overline{\xi}-a_0|\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > N_{\alpha;0;1}$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью 2α гипотеза H_0 будет отклоняться, когда она верна.

Этим критерием мы пользуемся, проверяя гипотезу $H_0: a = a_0$ против двусторонней альтернативы $a < a_0$ или $a > a_0$.

Если альтернатива односторонняя, например, $a > a_0$, то φ сравнивают с $N_{\alpha;0;1}$: при

$$\varphi = (\overline{\xi} - a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > N_{\alpha;0;1}$$

гипотезу H_0 отклоняют, в противном случае — нет (уровень значимости этого одностороннего критерия равен α).

З а м е ч а н и е. Критерий для проверки гипотезы H_0: $a = a_0$ против двусторонней альтернативы $a \neq a_0$ как подмножество S пространства $\mathbb{R}^n$ (если $\xi(\omega)$ попадает в S, то H_0 отклоняется, в противном случае — нет) имеет вид:

$$S = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : |\overline{x} - a_0|\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > N_{\alpha;0;1}\right\},$$

где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, σ^2 — известная дисперсия.

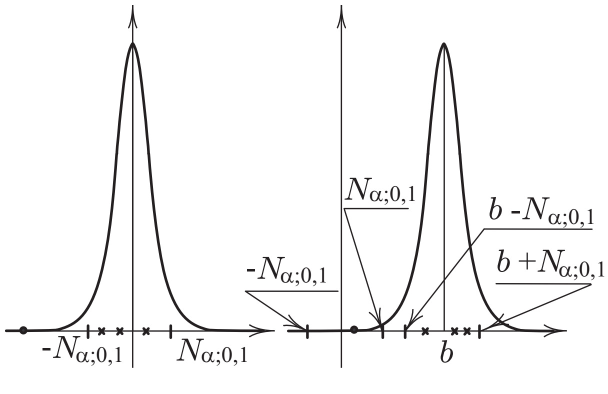


Рис. 17.1.1: Иллюстрация к критерию проверки гипотезы $H_0: a = a_0$, дисперсия известна (единицы по осям различные)

Об ошибках первого и второго рода. Вне зависимости от того, верна гипотеза H_0: $a = a_0$ или нет, отношение

$$\varphi_0 = (\overline{\xi} - a)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

имеет распределение $\mathsf{N}_{0;1}$, и как следствие,

$$\mathsf{P}\left\{|\overline{\xi} - a|\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le N_{\alpha;0;1}\right\} = 1 - 2\alpha.$$

Поэтому при верной гипотезе H_0: $a = a_0$ отношение $\varphi = \varphi_0$, "почти всегда" (с вероятностью $1-2\alpha$) принимая значения из окрестности $(-N_{\alpha;0;1}; N_{\alpha;0;1})$ точки 0 (см. рис. 17.1.1, слева, соответствующие значения φ_0 обозначены звездочками), может, хотя и изредка (с вероятностью 2α), принять значение вне окрестности $(-N_{\alpha;0;1}; N_{\alpha;0;1})$ (см. рис. 17.1.1, слева, соответствующее значение обозначено точкой). При этом мы гипотезу H_0 отклоним и тем самым совершим ошибку — ошибку первого рода (H_0 отклоняется, хотя она верна).

Далее, при неверной гипотезе H_0: $a = a_0$ отношение

$$\varphi = (\overline{\xi} - a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = (\overline{\xi} - a)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + (a - a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} =$$

$$= (\overline{\xi} - a)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + b,$$

"почти всегда" (с вероятностью $1 - 2\alpha$), принимая значения из промежутка $(b - N_{\alpha;0;1}, b + N_{\alpha;0;1})$ (см. рис. 17.1.1, справа, соответствующие значения обозначены звездочками), может принять значения из промежутка $(-N_{\alpha;0;1}; N_{\alpha;0;1})$ (см. рис. 17.1.1, справа, соответствующее значение обозначено точкой), при этом мы гипотезу H_0 не отклоним и тем самым совершим ошибку — ошибку второго рода (H_0 не отклоняется, хотя она и неверна).

Мощность критерия. Критерий S (критическое множество) описывается своей функцией мощности

$$\beta(\theta) = \mathsf{P}\left(S\,|H_\theta\right),\ \theta \in \Theta$$

($\beta(\theta)$ равно вероятности отклонить гипотезу H_0, когда верна гипотеза H_θ, $\theta \in \Theta$).

Критическое множество S для проверки гипотезы H_0: $a = a_0$ о параметре a нормального распределения $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$ (дисперсия σ^2 известна) при двусторонней альтернативе имеет вид:

$$S = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : |\overline{x} - a_0| \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > N_{\alpha;0;1}\right\}.$$

Функция мощности критерия S

$$\beta(a) = \mathsf{P}\left(S|H_a\right) = \mathsf{P}\left\{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in S|H_a\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{|\overline{\xi} - a_0| \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > N_{\alpha;0;1}|H_a\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{|\overline{\xi} - a_0| \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > N_{\alpha;0;1}\right\},\ a \in \mathbb{R}^1,$$

где $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ вычислена по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ из $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$. Подробнее,

$$\beta(a) = 1 - \mathsf{P}\left\{|\overline{\xi} - a_0| \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq N_{\alpha;0;1}\right\} =$$

$$= 1 - \mathsf{P}\left\{(a_0 - a) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - N_{\alpha;0;1} \leq (\overline{\xi} - a) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq\right.$$

$$\left.\leq (a_0 - a) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + N_{\alpha;0;1}\right\} =$$

$$= 1 - \left(N_{0;1}\left((a_0 - a) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + N_{\alpha;0;1}\right) -\right.$$

$$\left.-N_{0;1}\left((a_0 - a) \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - N_{\alpha;0;1}\right)\right),$$

$N_{0;1}(s)$ — значение функции нормального распределения с параметрами $(0;1)$ в точке $s \in \mathbb{R}^1$.

Пример (контроль прочности проволоки). *Для стальной проволоки, идущей на изготовление канатов, среднее предельное значение растягивающего усилия должно быть не меньшим* 6720 *кг/см*^{2}*. Серия последовательно проведенных наблюдений показала, что среднее предельное растягивающее усилие, выдерживаемое проволокой, можно считать нормально распределенным, а стандартное уклонение равным* 220 *кг/см*^{2}*. С целью контроля величины предельного растягивающего усилия из каждой партии проволоки, поступающей на завод, подвергается испытанию* 20 *экземпляров. Результаты одного из таких испытаний приведены ниже:* 6300, 6870, 6720, 6980, 6780, 6780, 6760, 6720, 6630, 6650, 6900, 7130, 6690, 6750, 6560, 6700, 6930, 6720, 6950, 6960.

Можно ли на основании этих данных утверждать, что для данной партии проволоки среднее предельное растягивающее усилие не менее 6720 *кг/см*^{2}*?*

Решить задачу, сформулировав ее в терминах проверки статистических гипотез:

— выбрать нулевую гипотезу и альтернативную;

— выяснить, в чем состоят ошибки первого и второго рода;

— предложить критерий для проверки нулевой гипотезы (а вместе с ним и уровень значимости);

— вычислить значения функции мощности критерия в точках $6000 + 50\,i,\ \ i = 10, 11, \ldots, 15$*;*

— вычислить вероятность забраковать партию, для которой среднее предельное растягивающее усилие равно 6500, 6550, 6600*;*

— определить, каким должно быть количество образцов для контроля, чтобы партия со средним предельным растягивающим усилием на разрыв равным 6600 *обнаруживалась с вероятностью* 0,99*;*

— исследовать, как будет меняться критерий с изменением n; что изменится, если для контроля отбирается 10 *образцов,* 30 *образцов;*

— дать частотную интерпретацию полученным результатам.

Решение. В качестве нулевой (проверяемой) гипотезы рассмотрим гипотезу H_0 — выборка получена из $\mathsf{N}_{a_0;\sigma^2}$, где $a_0 = 6720$. Поскольку наша задача — обнаружить проволоку, среднее предельное растягивающее усилие на разрыв которой меньше 6720 кг/см^2, то в качестве альтернативы будем рассматривать одностороннюю альтернативу H_a: $a < a_0$. При таком выборе нулевой и альтернативной гипотез ошибка первого рода будет состоять в том, что проволока со средним предельным растягивающим усилием на разрыв в 6720 кг/см^2 будет браковаться — классифицироваться как проволока со средним предельным растягивающим усилием на разрыв меньшим 6720 кг/см^2. Ошибка второго рода состоит в том, что проволока со средним предельным растягивающим усилием на разрыв, равным a ($a < 6720$), будет классифицироваться как проволока, выдерживающая среднее предельное усилие на разрыв в 6720 кг/см^2 — будет выдерживать контроль.

Для проверки гипотезы H_0: $a = a_0$ ($a_0 = 6720$) против односторонней альтернативы H_1: $a < a_0$ воспользуемся односторонним критерием: если

$$(\bar{\xi} - a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -N_{\alpha;0;1},$$

то гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — нет (уровень значимости критерия равен α).

В рассматриваемой задаче $n = 20$, $\bar{\xi} = 6775$, $\sigma = 220$. Уровень значимости α выберем равным 0,05, при этом $N_{0,05;0;1} = 1{,}65$ ($N_{0,05;0;1}$ — верхний 0,05-предел $\mathsf{N}_{0;1}$-распределения — найден по табл. 22.1.1). Отношение

$$(\bar{\xi} - a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = (6775 - 6720)\Big/\frac{220}{\sqrt{20}} =$$

$$= 1{,}13 > -1{,}65 = -N_{0,05;0,1}.$$

Поэтому на 5 % уровне значимости гипотеза H_0 — среднее предельное растягивающее усилие на разрыв равно 6720 кг/см^2 — не отклоняется.

Значение функции мощности критерия

$$S = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n):\ (\bar{x} - a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -N_{\alpha;0;1}\right\} \tag{17.1.1}$$

в точке a равно

$$\beta(a) = \mathsf{P}\left\{(\bar{\xi} - a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -N_{\alpha;0;1}\,\Big|\, H_a\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{(\bar{\xi} - 6720)\Big/\frac{220}{\sqrt{20}} < -N_{\alpha;0;1}\right\},$$

где $\bar{\xi} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ — оценка параметра a, полученная по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ из $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$. Поэтому $\beta(a)$ можно переписать так:

$$\beta(a) = \mathsf{P}\left\{(\bar{\xi} - a_0)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -N_{\alpha;0;1}\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{((\bar{\xi} - a) - (a_0 - a))\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -N_{\alpha;0;1}\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{(\bar{\xi} - a)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < (a_0 - a)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - N_{\alpha;0;1}\right\} =$$

$$= N_{0;1}\left((a_0 - a)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - N_{\alpha;0;1}\right)$$

или, учитывая, что $a_0 = 6720$, $\sigma = 220$, $n = 20$, так:

$$\beta(a) = N_{0;1}\left((a_0 - a)\Big/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - N_{\alpha;0;1}\right) =$$

$$= N_{0;1}\left((6720 - a)\Big/\frac{220}{\sqrt{20}} - 1{,}65\right)$$

($N_{0;1}(x)$ — значение функции нормального распределения с параметрами $(0; 1)$ в точке x).

Значения $\beta(a)$ функции мощности критерия S в некоторых точках приведены в табл. 17.1.1. График функции мощности критерия (17.1.1) приведен на рис. 17.1.2.

Таблица 17.1.1

a_i	6500	6550	6600	6650	6700	6720	6750
$\beta(a_i)$	0,997	0,965	0,785	0,409	0,108	0,049	0,012

Вероятность забраковать партию (классифицировать как имеющую среднее предельное значение на разрыв меньшее 6720), для которой это значение на самом деле 6500, равна $\beta(a) = \beta(6500) = 0{,}99$, для партий с $a = 6550$ и с $a = 6600$ эти вероятности соответственно равны $\beta(6550) = 0{,}96$ и $\beta(6600) = 0{,}79$.

Количество n образцов, необходимое для обнаружения с вероятностью 0,99 партии со средним предельным значением на разрыв 6600, получаем из соотношения

$$\beta(6600) = N_{0;1}\left((6720 - 6600)\Big/\frac{220}{\sqrt{n}} - 1{,}65\right) = 0{,}99.$$

Из последнего равенства, воспользовавшись таблицей нормального распределения (см. табл. 22.1.1), имеем:

$$120\Big/\frac{220}{\sqrt{n}} - 1{,}65 = 2{,}33.$$

Отсюда получаем, что необходимый объем выборки составляет $n = 54$.

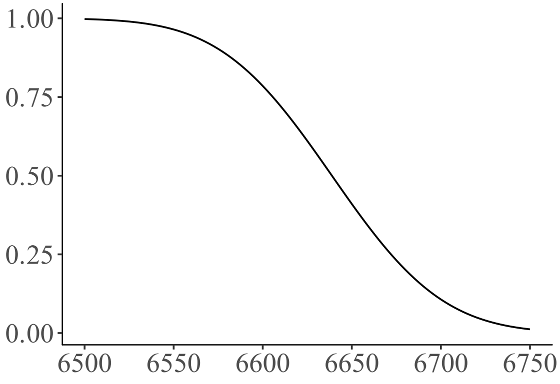


Рис. 17.1.2: Функция мощности критерия (17.1.1)

При изменении n (объема выборки) уровень значимости критерия не меняется, но меняется мощность критерия.

Для $n = 10$ значения функции мощности критерия S в некоторых точках приведены в табл. 17.1.2, а для $n = 30$ — в табл. 17.1.3.

Таблица 17.1.2

a_i	6500	6550	6600	6650	6700	6720	6750
$\beta(a_i)$	0,936	0,788	0,532	0,261	0,087	0,049	0,019

Таблица 17.1.3

a_i	6500	6550	6600	6650	6700	6720	6750
$\beta(a_i)$	0,999	0,996	0,910	0,534	0,125	0,049	0,008

Полученным результатам можно дать следующую частотную интерпретацию (для $n = 20$).

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ обозначает, что если производить контроль с отбором 20 образцов, то на 100 партий со средним предельным растягивающим усилием на разрыв $a = 6720$ кг/см^2 в среднем пять партий будут браковаться.

Значение $\beta(a) = \beta(6500) = 0{,}99$ функции мощности критерия в точке 6500 интерпретируется так. На 100 партий со средним предельным растягивающим усилием на разрыв $a = 6500$ кг/см^2 в среднем 99 будут браковаться. Аналогично интерпретируются значения $\beta(a)$ в других точках a.

Далее, хотя гипотеза H_0: $a = 6720$ проверяется против альтернативы H_1: $a < 6720$, мы можем вычислять значение функции мощности критерия и в точках $a > 6720$. Например, в точке $a = 6750$ значение функции мощности $\beta(6750) = 0{,}012$ (см. табл. 17.1.1). Последнее обозначает, что при верной гипотезе H_{6750} — среднее предельное усилие на разрыв проволоки равно 6750, гипотеза H_0 с вероятностью 0,012 будет отклоняться, и с вероятностью $1 - \beta(6750) = 0{,}988$ не будет отклоняться, т. е. партия проволоки со средним предельным растягивающим усилием на разрыв равным $a = 6750$ кг/см^2 будет выдерживать контроль с вероятностью 0,988. Так что наш критерий “правильно работает” и при значениях параметра $a > 6720$.

17.2 Проверка гипотезы $a = a_0$ (дисперсия неизвестна)

Постановка задачи. Пусть $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots \ldots, \xi_n(\omega))$ — реализация выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из нормального распределения с параметрами $(a; \sigma^2)$. Параметры a и σ^2 неизвестны. Относительно значения неизвестного нам, но вполне определенного a, выдвигается гипотеза H_0: $a = a_0$, или, что то же, $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots \ldots, \xi_n(\omega))$ — реализация выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из $\mathsf{N}_{a_0;\sigma^2}$. Альтернатива у гипотезы H_0 может быть как односторонняя: если $a \neq a_0$, то $a > a_0$ (она может быть и такой: $a < a_0$), так и двусторонняя — если $a \neq a_0$, то $a > a_0$ или $a < a_0$. Необходимо построить критерий для проверки этой гипотезы.

Выбор статистики для построения критерия. Из тех же соображений, что и при проверке гипотезы H_0: $a = a_0$, когда σ^2 известна (см. параграф 17.1), уклонение $(\overline{\xi} - a_0)$ оценки $\overline{\xi}$ параметра a от его гипотетического значения a_0 следовало бы сравнивать с погрешностью $\sqrt{\mathsf{M}(\overline{\xi} - a)^2} = \sigma/\sqrt{n}$ оценивания параметра a оценкой $\overline{\xi}$. *Если уклонение $(\overline{\xi} - a_0)$ лежит в пределах погрешности оценивания, гипотезу H_0: $a = a_0$ не отклоняем, если же уклонение $(\overline{\xi} - a_0)$ существенно превышает погрешность оценивания, гипотезу H_0 отклоняем.* Но здесь погрешность оценивания $\sqrt{\mathsf{M}(\overline{\xi} - a)^2} = \sigma/\sqrt{n}$ неизвестна. Поэтому мы будем сравнивать уклонение $(\overline{\xi} - a_0)$ с оценкой $s/\sqrt{n}$ погрешности $\sigma/\sqrt{n}$, используя вместо неизвестной дисперсии σ^2 ее несмещенную состоятельную оценку

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2,$$

а именно, если отношение

$$t = (\overline{\xi} - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}}$$

приняло большое значение, гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — нет.

Если гипотеза H_0 верна, отношение t, которое при этом обозначим через t_{n-1}:

$$t_{n-1} = (\overline{\xi} - a)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}},$$

будучи малым, имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Отсюда, в частности, следует, что значения отношения t_{n-1} "почти всегда" — с вероятностью $1-2\alpha$ — лежат в промежутке $(-t_{\alpha;n-1}, t_{\alpha;n-1})$, где $t_{\alpha;n-1}$ — верхний α-предел распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, и

$$\mathsf{M}t = \mathsf{M}t_{n-1} = 0.$$

Если же гипотеза H_0: $a = a_0$ неверна (пусть для определенности $a > a_0$), то отношение

$$t = (\overline{\xi} - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} = (\overline{\xi} - a)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} + (a - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} =$$

$$= t_{n-1} + (a - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда, частности, следует, что

$$\mathsf{P}\left\{(a-a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} - t_{\alpha;n-1} \le t \le (a-a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} + t_{\alpha;n-1}\right\}$$

равна $1 - 2\alpha$. Поэтому в качестве границ, отделяющих малые значения отношения t от больших значений, естественно выбрать числа $-t_{\alpha;n-1}$, $t_{\alpha;n-1}$. Значения отношения t, принадлежащие промежутку $(-t_{\alpha;n-1}, t_{\alpha;n-1})$, будем классифицировать как малые, а не принадлежащие — как большие.

Критерий Стьюдента для проверки гипотезы $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{a = a_0}$. *Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — выборка из $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$, $t_{\alpha;n-1}$ — верхний α-предел распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.*

Если гипотезу $H_0\colon a = a_0$ отклонять при

$$|t| = |\bar{\xi} - a_0| \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} > t_{\alpha;n-1}$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью 2α гипотеза H_0 будет отклоняться, когда она верна.

Если альтернатива односторонняя, например, $a > a_0$, то t сравниваем с $t_{\alpha;n-1}$: при

$$t = (\bar{\xi} - a_0) \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} > t_{\alpha;n-1}$$

гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — нет (уровень значимости этого одностороннего критерия равен α).

Об ошибках первого и второго рода. Вне зависимости от того, верна гипотеза $H_0 : a = a_0$ или нет, отношение $t_{n-1} = (\bar{\xi} - a) \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}}$ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, и, как следствие, t_{n-1} "почти всегда" (с вероятностью $1 - 2\alpha$) принимает значения из окрестности $(-t_{\alpha;n-1}, t_{\alpha;n-1})$ точки 0. Но изредка (с вероятностью 2α) отношение t_{n-1} может принять значения вне окрестности $(-t_{\alpha;n-1}, t_{\alpha;n-1})$. Поэтому при верной гипотезе H_0: $a = a_0$ отношение

$$t = (\bar{\xi} - a_0) \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}}$$

может (хотя и с малой вероятностью) принять "большое" значение, т. е. $|t| > t_{\alpha;n-1}$. При этом мы гипотезу H_0 отклоним и тем самым совершим ошибку — ошибку первого рода (H_0 отклоняется, хотя она верна).

Далее, при неверной гипотезе H_0: $a = a_0$ уклонение

$$t = (\bar{\xi} - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} = (\bar{\xi} - a)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} + (a - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} =$$

$$= t_{n-1} + (a - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}},$$

почти всегда принимая "большие" значения, может принять значение из промежутка $(-t_{\alpha;n-1}, t_{\alpha;n-1})$, при этом мы гипотезу H_0 не отклоним и тем самым совершим ошибку — ошибку второго рода (H_0 не отклонили, хотя она и неверна).

Пример 17.2.1 (об эффекте использования специальной сеялки). *С целью обнаружения эффекта использования специальной сеялки* 10 *участков земли засеяли обыкновенной сеялкой и* 10 *— специальной, а затем сравнили полученные урожаи. Сначала* 20 *участков одинаковой площади были разделены на пары, причем в каждую пару входили смежные участки. Вопрос о том, какой из двух смежных участков должен обрабатываться специальною машиной, решался подбрасыванием монеты.*

В таблице приведены разности урожаев с пар смежных участков, засеянных специальной сеялкой и обыкновенной.

Свидетельствуют ли приведенные данные о наличии эффекта использования специальной сеялки, другими словами, дает ли использование специальной сеялки прибавку к урожаю?

Номер пары	Разность урожаев	Номер пары	Разность урожаев
1	2,4	6	1,6
2	1,0	7	−0,4
3	0,7	8	1,1
4	0,0	9	0,1
5	1,1	10	0,7

Решение. В терминах проверки статистических гипотез эту задачу можно сформулировать так. Имеем 10 независимых наблюдений случайной величины (см. таблицу) — реализацию $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_{10}(\omega)$ выборки $\xi_1, \xi_2,$

$\ldots, \xi_{10}$ из нормального распределения $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$, параметры a и σ^2 которого неизвестны (предположение о нормальном распределении результатов измерений в большинстве случаев оправдывается). Относительно параметра a распределения $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$ выдвигается гипотеза H_0: $a = 0$ (обидная для разработчиков новой сеялки). Альтернатива односторонняя: $a > 0$ (специальная сеялка конструировалась для повышения урожайности). Отклонение гипотезы H_0: $a = 0$ в пользу альтернативы $a > 0$ будем трактовать как наличие эффекта использования специальной сеялки, неотклонение — как отсутствие эффекта.

Необходимо проверить гипотезу H_0. В соответствии с критерием Стьюдента для проверки гипотезы H_0: $a = a_0$ при альтернативе $a > a_0$ вычисляем отношение

$$t = (\overline{\xi} - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}}$$

и сравниваем его с $t_{\alpha;(n-1)}$ — верхним α-пределом $t_{(n-1)}$-распределения. Если

$$t = (\overline{\xi} - a_0)\Big/\frac{s}{\sqrt{n}} > t_{\alpha;(n-1)},$$

гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — нет (уровень значимости критерия равен α).

В рассматриваемом примере $n = 10$,

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \frac{1}{10}(2{,}4 + 1{,}0 + \ldots + 0{,}7) = 0{,}83;$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2 = \frac{1}{9}((2{,}4 - 0{,}83)^2 +$$

$$+(1{,}0 - 0{,}83)^2 + \ldots + (0{,}7 - 0{,}83)^2) = 0{,}667;$$

$$t = \overline{\xi}\Big/\sqrt{\frac{s^2}{n}} = 0{,}83\Big/\sqrt{\frac{0{,}667}{10}} = 3{,}22.$$

Таким образом,

$$t = \bar{\xi} \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} = 3{,}22 > 2{,}26 = t_{0{,}025;9}.$$

Поэтому согласно критерию Стьюдента гипотезу H_0: $a = 0$ отклоняем в пользу альтернативы $a > 0$. Другими словами, гипотеза о том, что выборка получена из нормального распределения со средним нуль, противоречит имеющимся данным.

Полученный результат можно интерпретировать так. Предположение о том, что разность урожаев с участков, засеянных специальной сеялкой и обычной, несущественно отклоняется от нуля, противоречит имеющимся данным. Для сеялки, использование которой не дает эффекта, уклонения разности урожаев от нуля, приведенные в таблице, невозможны (точнее, возможны, но крайне редко). Следовательно, эксперимент дает основания утверждать — эффект использования специальной сеялки существует (к радости ее разработчиков).

17.3 Проверка гипотезы H_0: $a_\xi = a_\eta$

Постановка задачи сравнения средних двух выборок. Пусть $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ — реализация выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из распределения $\mathsf{N}_{a_\xi;\sigma^2}$ и $\eta(\omega) = (\eta_1(\omega), \eta_2(\omega), \ldots, \eta_m(\omega))$ — реализация выборки $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ из распределения $\mathsf{N}_{a_\eta;\sigma^2}$, выборки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ независимы. Средние a_ξ, a_η и дисперсия σ^2 (одна и та же для обеих выборок) неизвестны.

Относительно значений параметров a_ξ и a_η выдвигается гипотеза H_0: $a_\xi - a_\eta = 0$, или, что то же, выборки ξ и η получены из одного и того же нормального распределения. Альтернатива к гипотезе может быть как односторонней, так и двусторонней. Необходимо построить критерий для проверки гипотезы H_0.

Выбор статистики для построения критерия. Вне зависимости от того, верна гипотеза H_0: $a_\xi - a_\eta = 0$

или нет, $\overline{\xi}$ и $\overline{\eta}$ — состоятельные и несмещенные оценки соответственно a_ξ и a_η, и, следовательно, $(\overline{\xi}-\overline{\eta})$ — состоятельная и несмещенная оценка разности $a_\xi - a_\eta$, другими словами, оценка $(\overline{\xi}-\overline{\eta})$ является хорошим приближением разности $(a_\xi - a_\eta)$. Из последнего следует, что при верной гипотезе H_0: $a_\xi - a_\eta = 0$ разность $(\overline{\xi}-\overline{\eta}) - (a_\xi - a_\eta) = \overline{\xi}-\overline{\eta}$ принимает малые значения — лежит в пределах погрешности $\sqrt{\mathsf{M}((\overline{\xi}-\overline{\eta}) - (a_\xi - a_\eta))^2} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ оценивания параметра $(a_\xi - a_\eta)$ оценкой $(\overline{\xi}-\overline{\eta})$. Если же гипотеза H_0: $a_\xi - a_\eta = 0$ неверна, разность $(\overline{\xi}-\overline{\eta})$, будучи близкой к $a_\xi - a_\eta$, существенно отличается от нуля — превышает погрешность оценивания. Поэтому для проверки гипотезы H_0: $a_\xi - a_\eta = 0$ следует вычислить разность $(\overline{\xi}-\overline{\eta})$ и сравнить ее с погрешностью оценивания $\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ — если $\overline{\xi}-\overline{\eta}$ лежит в пределах погрешности оценивания, гипотезу H_0 не отклоняем, в противном случае — отклоняем. А поскольку σ^2 неизвестна, то $\overline{\xi}-\overline{\eta}$ будем сравнивать с оценкой $s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ погрешности $\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$, используя вместо σ^2 ее несмещенную состоятельную оценку

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2}\left((n-1)s_\xi^2 + (m-1)s_\eta^2\right),$$

а именно, если отношение

$$t = (\overline{\xi}-\overline{\eta}) \Bigg/ \left(s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right)$$

приняло большое значение, гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — нет.

При верной гипотезе H_0 отношение t, которое в этом случае будем обозначать через t_{n+m-2}:

$$t_{n+m-2} = (\overline{\xi}-\overline{\eta}) \Bigg/ \left(s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right),$$

будучи малым, имеет распределение Стьюдента с $n+m-2$ степенями свободы. Отсюда, в частности, следует, что t_{n+m-2} "почти всегда" (с вероятностью $1-2\alpha$) принадлежит промежутку $(-t_{\alpha;n+m-2}, t_{\alpha;n+m-2})$, где $t_{\alpha;n+m-2}$ — верхний α-предел t-распределения с $n+m-2$ степенями свободы, и

$$\mathsf{M}t = \mathsf{M}t_{n+m-2} = 0.$$

Если гипотеза H_0: $a_\xi - a_\eta = 0$ неверна (пусть для определенности $a_\xi > a_\eta$), то

$$t = (\overline{\xi} - \overline{\eta}) \Bigg/ \left(s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right) =$$

$$= t_{n+m-2} + (a_\xi - a_\eta) \Bigg/ \left(s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right). \qquad (17.3.1)$$

Из представления (17.3.1), в частности, следует, что

$$\mathsf{P}\left\{t(a_\xi, a_\eta) - t_{\alpha;n+m-2} \leq t \leq t(a_\xi, a_\eta) + t_{\alpha;n+m-2}\right\} = 1-2\alpha,$$

где

$$t(a_\xi, a_\eta) = (a_\xi - a_\eta) \Bigg/ \left(s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\right).$$

Поэтому в качестве границ, отделяющих большие значения отношения t от малых, естественно выбрать числа $-t_{\alpha;n+m-2}$ и $t_{\alpha;n+m-2}$. Значения уклонения t, принадлежащие промежутку $(-t_{\alpha;n+m-2}, t_{\alpha;n+m-2})$, будем классифицировать как малые, в противном случае — как большие.

Критерий Стьюдента для проверки гипотезы H_0: $a_\xi = a_\eta$ (о равенстве средних нормальных распределений). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — независимые выборки соответственно из распределений $\mathsf{N}_{a_\xi;\sigma^2}$ и $\mathsf{N}_{a_\eta;\sigma^2}$, $t_{\alpha;(n+m-2)}$ — верхний α-предел t-распределения с $(n+m-2)$ степенями свободы.*

Если гипотезу H_0: $a_\xi = a_\eta$ отклонять при

$$|t| = |\overline{\xi} - \overline{\eta}| \Big/ \left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right) \geq t_{\alpha;(n+m-2)}$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью 2α гипотезу H_0 будем отклонять, когда она верна (альтернатива двусторонняя: $a_\xi < a_\eta$ или $a_\xi > a_\eta$).

Если альтернатива односторонняя, например $a_\xi > a_\eta$, то t сравниваем с $t_{\alpha;(n+m-2)}$: при

$$t = (\overline{\xi} - \overline{\eta}) \Big/ \left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right) \geq t_{\alpha;(n+m-2)}$$

гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — нет (уровень значимости одностороннего критерия равен α).

Пример 17.3.1. *Ниже приведены данные измерения неровностей поверхности одной и той же чистоты обработки с помощью двух двойных микроскопов.*

Микроскоп I: 0,8; 1,9; 3,0; 3,5; 3,8; 2,5; 1,7; 0,9; 1,0; 2,3; 3,3; 3,4.

Микроскоп II: 1,4; 2,1; 3,1; 3,6; 2,7; 1,7; 1,1; 0,2; 1,6; 2,8; 4,0; 4,7.

Можно ли считать, что между показаниями приборов нет систематического расхождения?

Решение. Для определенности обозначим через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ данные измерений, полученные с помощью первого микроскопа, через $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — второго.

В терминах проверки статистических гипотез эту задачу можно сформулировать так. Имеются реализации двух независимых выборок $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ соответственно из распределений $\mathsf{N}_{a_\xi;\sigma^2}$ и $\mathsf{N}_{a_\eta;\sigma^2}$ (предположение о нормальном распределении результатов измерений в большинстве случаев оправдывает себя). Относительно параметров a_ξ и a_η выдвигается гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$. Это гипотеза об отсутствии систематического расхождения между показаниями приборов. Априори, если $a_\xi \neq a_\eta$, то может быть как $a_\xi < a_\eta$, так и $a_\xi > a_\eta$; поэтому альтернатива двусторонняя. Отклонение гипотезы H_0 в пользу этой альтернативы интерпретируется как наличие систематического расхождения показаний приборов, неотклонение — как отсутствие расхождений показаний.

Согласно критерию Стьюдента для проверки гипотезы H_0: $a_\xi = a_\eta$ при двусторонней альтернативе $a_\xi < a_\eta$ или $a_\xi > a_\eta$ необходимо сравнить отношение

$$|t| = |\overline{\xi} - \overline{\eta}| \Bigg/ \left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right)$$

с $t_{\alpha;(n+m-2)}$ — верхним α-пределом $t_{(n+m-2)}$-распределения. Если

$$|t| = |\overline{\xi} - \overline{\eta}| \Bigg/ \left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right) \geq t_{\alpha;(n+m-2)},$$

гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — нет (уровень значимости критерия 2α).

В рассматриваемом примере $n = 12,\ m = 12$,

$$\overline{\xi} = \frac{1}{12}(0{,}8 + 1{,}9 + \ldots + 3{,}4) = 2{,}34;$$

$$\overline{\eta} = \frac{1}{12}(1{,}4 + 2{,}1 + \ldots + 4{,}7) = 2{,}42;$$

$$s_\xi{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2,\ s_\eta{}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\eta_i - \overline{\eta})^2;$$

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2}((n-1)s_\xi{}^2 + (m-1)s_\eta{}^2) = 1{,}44;$$

$$|t| = |\overline{\xi} - \overline{\eta}| \Big/ \left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right) =$$

$$= |2{,}42 - 2{,}34| \Big/ \sqrt{\frac{1{,}44(12+12)}{(12 \cdot 12)}} = 0{,}16.$$

Значение

$$|t| = 0{,}16 < 2{,}074 = t_{0{,}025;\,22}.$$

Поэтому согласно критерию Стьюдента гипотезу H_0 о равенстве $a_\xi = a_\eta$ на 5 %-м уровне значимости не отклоняем.

Этот результат можно трактовать так. Предположение об отсутствии систематического расхождения между показаниями микроскопов не противоречит экспериментальным данным. Такие показания вполне могли быть получены при работе с одним и тем же прибором. Другими словами, эксперимент не дает оснований говорить о существовании систематического расхождения между показаниями микроскопов.

17.4 Проверка гипотезы H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$

Постановка задачи. Пусть $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots$ $\ldots, \xi_n(\omega))$ — реализация выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$. Параметры a и σ^2 неизвестны. Относительно значения параметра σ^2 выдвигается гипотеза

$$H_0\colon\ \sigma^2/\sigma_0^2 = 1.$$

Альтернатива к гипотезе H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ может быть как односторонней: если $\sigma^2/\sigma_0^2 \neq 1$, то $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$ (она может быть и такой: $\sigma^2/\sigma_0^2 < 1$), так и двусторонней: если $\sigma^2/\sigma_0^2 \neq 1$, то $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$ или $\sigma^2/\sigma_0^2 < 1$. Альтернатива в каждой задаче своя.

Необходимо по реализации $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots$ $\ldots, \xi_n(\omega))$ выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$ прийти к выводу: отклонять гипотезу H_0 или нет.

Выбор статистики для построения критерия. Независимо от того, верна гипотеза H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ или нет,

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2$$

является несмещенной и состоятельной оценкой параметра σ^2 — является хорошим приближением параметра σ^2, т. е. отношение s^2/σ^2 мало уклоняется от 1. Так что если гипотеза H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ верна, отношение $s^2/\sigma_0^2 = s^2/\sigma^2$ мало уклоняется от 1, если же гипотеза H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ неверна, отношение s^2/σ_0^2 уклоняется от 1 существенно. Поэтому, проверяя гипотезу H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$, ее следует отклонять, если отношение s^2/σ_0^2 приняло значение, существенно уклоняющееся от 1, и не отклонять в противном случае.

Границы, отделяющие значения s^2/σ_0^2, существенно уклоняющиеся от 1, от значений s^2/σ_0^2, мало (допустимо) уклоняющихся от 1, устанавливаются на основании того, что для выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из распределения $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$ случайная величина

$$(n-1)s^2/\sigma^2$$

имеет распределение χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы (относительно распределения χ^2 см. гл. 22).

Критерий для проверки гипотезы H_0: $\dfrac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = 1$. *Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — выборка из $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$, $\chi^2_{\beta;(n-1)}$ — верхний β-предел $\chi^2_{(n-1)}$-распределения.*

Если гипотезу H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2 = 1$ отклонять при

$$\frac{s^2}{\sigma_0^2} \notin \left(\frac{1}{n-1}\chi^2_{(1-\alpha);(n-1)}, \frac{1}{n-1}\chi^2_{\alpha;(n-1)}\right)$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью 2α гипотезу H_0 будем отклонять, когда она верна (альтернатива двусторонняя: $\sigma^2/\sigma_0^2 < 1$ или $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$).

Если альтернатива односторонняя, например $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$, то при

$$\frac{s^2}{\sigma_0^2} > \frac{1}{n-1}\chi^2_{\alpha;(n-1)}$$

гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — нет (уровень значимости одностороннего критерия равен α).

17.5 Проверка гипотезы H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$

Постановка задачи. Пусть $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ и $\eta(\omega) = (\eta_1(\omega), \eta_2(\omega), \ldots, \eta_m(\omega))$ — реализации независимых выборок $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ соответственно из распределений $\mathsf{N}_{a_\xi;\sigma_\xi^2}$ и $\mathsf{N}_{a_\eta;\sigma_\eta^2}$. Параметры a_ξ, a_η, σ_ξ^2 и σ_η^2 нормальных распределений неизвестны. Относительно значений σ_ξ^2 и σ_η^2 выдвигается гипотеза

$$H_0\colon \sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$$

или, что то же, выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ получены из нормальных распределений с одной и той же дисперсией. Альтернатива к гипотезе H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ может быть как односторонней: если $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 \neq 1$, то $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$ (она может быть и такой: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$), так и двусторонней: если $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 \neq 1$, то $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ или $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$. Выбор альтернативы определяется поставленной задачей.

Необходимо по реализациям выборок $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ из распределений $\mathsf{N}_{a_\xi;\sigma_\xi^2}$ и $\mathsf{N}_{a_\eta;\sigma_\eta^2}$ соответственно прийти к выводу: отклонять гипотезу H_0 или нет.

Выбор статистики для построения критерия. Независимо от того, верна гипотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ или нет,

$$s_\xi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2 \quad \text{и} \quad s_\eta^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\eta_i - \overline{\eta})^2$$

являются несмещенными и состоятельными оценками соответственно параметров σ_ξ^2 и σ_η^2 — являются хорошими приближениями для σ_ξ^2 и σ_η^2, а, следовательно, отношение s_ξ^2/s_η^2 является хорошим приближением для $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2$ — мало уклоняется от $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2$. Так что если гипотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$

верна, отношение s_ξ^2/s_η^2 мало уклоняется от 1, а если гипотеза $H_0\colon \sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ неверна, отношение s_ξ^2/s_η^2 уклоняется от 1 существенно.

Поэтому, проверяя гипотезу $H_0\colon \sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, ее следует отклонять, если отношение s_ξ^2/s_η^2 приняло значение, существенно уклоняющееся от 1, и не отклонять в противном случае.

Границы, отделяющие значения s_ξ^2/s_η^2, существенно отличающиеся от 1, от значений s_ξ^2/s_η^2, отличающихся от 1 мало (допустимо), устанавливаются на основании того, что при $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ случайная величина s_ξ^2/s_η^2 имеет F-распределение с $(n-1, m-1)$ степенями свободы (относительно F-распределения см. гл. 22).

Критерий для проверки гипотезы $\boldsymbol{H_0\colon \sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1}$. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — независимые выборки соответственно из распределений $\mathsf{N}_{a_\xi;\sigma_\xi^2}$ и $\mathsf{N}_{a_\eta;\sigma_\eta^2}$, $F_{\beta;s;k}$ — верхний β-предел F-распределения с s, k степенями свободы.*

Если гипотезу H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ отклонять при

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} \notin \left(\frac{1}{F_{\alpha;(m-1);(n-1)}},\ F_{\alpha;(n-1);(m-1)}\right)$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью 2α гипотезу H_0 будем отклонять, когда она верна (этим критерием пользуемся, если альтернатива двусторонняя: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ или $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$).

Если альтернатива односторонняя, например $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$, то при

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} > F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$$

гипотезу H_0 будем отклонять, в противном случае — нет (уровень значимости этого одностороннего критерия равен α).

П р и м е р 17.5.1. *Определяется предел прочности на разрыв материала на двух стендах A и B. Получены такие выборки значений предела прочности на разрыв.*

Стенд A: 1,32; 1,35; 1,32; 1,35; 1,30; 1,30; 1,37; 1,31; 1,39; 1,39.

Стенд B: 1,35; 1,31; 1,31; 1,41; 1,39; 1,37; 1,32; 1,34.

Выяснить, можно ли считать, что точность измерений предела прочности на разрыв на стендах A и B одинакова.

Р е ш е н и е. В терминах проверки статистических гипотез эту задачу можно сформулировать так. Имеем две реализации независимых выборок из нормальных распределений $\mathsf{N}_{a_\xi;\sigma_\xi^2}$ и $\mathsf{N}_{a_\eta;\sigma_\eta^2}$ (пусть для определенности $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — выборка, полученная на стенде A, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ — на стенде B). Относительно неизвестных параметров σ_ξ^2 и σ_η^2 выдвигается гипотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ (это гипотеза об одинаковой точности измерений на стендах A и B). Альтернатива двусторонняя: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ или $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$, поскольку нет никакой априорной информации относительно точности работы стендов A и B. Отклонение гипотезы H_0 в пользу этой альтернативы будем интерпретировать как наличие отличий в точности измерений на стендах, неотклонение — как отсутствие отличий.

Согласно критерию для проверки гипотезы

$$H_0\colon \sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$$

при двусторонней альтернативе гипотезу H_0 отклоняем, если

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} \notin \left(\frac{1}{F_{\alpha;(m-1);(n-1)}},\ F_{\alpha;(n-1);(m-1)}\right),$$

и не отклоняем в противном случае.

В примере $n = 10$; $m = 8$; $\overline{\xi} = 1{,}34$; $\overline{\eta} = 1{,}35$;

$$s_\xi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2 = 12{,}2 \cdot 10^{-4};$$

$$s_\eta^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(\eta_i - \overline{\eta})^2 = 14{,}0\cdot 10^{-4};$$

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} = \frac{12{,}2\cdot 10^{-4}}{14{,}0\cdot 10^{-4}} = 0{,}87;$$

$$F_{\alpha;(n-1);(m-1)} = F_{0{,}01;9;7} = 6{,}72;$$

$$\frac{1}{F_{\alpha;(m-1);(n-1)}} = \frac{1}{5{,}61} = 0{,}18.$$

Значение s_ξ^2/s_η^2 принадлежит промежутку

$$\left(\frac{1}{F_{\alpha;(m-1);(n-1)}},\ F_{\alpha;(n-1);(m-1)}\right) = (0{,}18;\ 6{,}72),$$

поэтому гипотезу H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$ на 2 %-м уровне значимости не отклоняем.

Этот результат можно интерпретировать так. Предположение (гипотеза), что стенды A и B имеют одинаковую точность измерений предела прочности на разрыв, не противоречит экспериментальным данным. (Такие данные вполне могли быть получены при работе на одном и том же стенде.) Другими словами, эксперимент не дает оснований утверждать, что точность измерений предела прочности на разрыв на стендах A и B различна.

17.6 Задачи

АЗ: 17.1, 17.6, 17.8, 17.15.
СЗ: 17.4, 17.9, 17.14, 17.33.

Далее, если это не оговорено специально, мы будем предполагать, что результаты измерений являются выборками из нормальных распределений. В большинстве случаев это предположение оправдывает себя в опыте.

17.1. В течение летних каникул группа из 10 учеников находилась в спортивном лагере. В начале сезона и после его завершения у них измерялся объем легких (в миллилитрах). По результатам измерений необходимо сделать вывод, существенно ли изменился этот показатель под влиянием интенсивных физических упражнений.

Ученик	Объем легких		Ученик	Объем легких	
	В начале сезона	После окончания сезона		В начале сезона	После окончания сезона
1	3400	3800	6	3100	3200
2	3600	3700	7	3200	3200
3	3000	3300	8	3400	3300
4	3500	3600	9	3200	3500
5	2900	3100	10	3400	3600

17.2. С целью сравнения отражательной способности двух видов краски (A и B) провели следующий эксперимент: из 10 выбранных наудачу пробных образцов пять покрасили одной краской, остальные — другой и измерили их отражательную способность с помощью оптического прибора. Получили следующие результаты.

Краска A: 195; 150; 205; 120; 160.

Краска B: 200; 115; 220; 185; 170.

Свидетельствуют ли эти данные о различии отражательных способностей красок?

17.3. Один из методов количественного анализа степени износа шины состоит в измерении глубины проникновения щупа[2] в определенном месте шины. Имеется подозрение, что значительная часть дисперсии измерений связана с действиями контролеров. Чтобы выделить из общей дисперсии измерений указанную часть, двум контролерам (X и Y) предложили провести по 12 измерений в одной и той же точке шины. Получили следующие результаты.

Контролер X: 121; 121; 126; 130; 127; 131; 127; 124; 125; 119; 126; 123.

Контролер Y: 120; 129; 128; 136; 117; 138; 124; 119; 136; 136; 134; 132.

Существенно ли отличаются дисперсии измерений, проведенных контролерами X и Y?

[2] Здесь щуп — тонкая продолговатая металлическая пластинка прямоугольной формы.

17.4. В процессе производства электрические счетчики с вращающимся диском были отрегулированы так, что их работа стала синхронной с работой стандартного счетчика (работа счетчика характеризуется постоянной, равной 1,000). Проверка 10 счетчиков, состоящая в определении их постоянной с помощью точных ваттметров и секундомеров, показала следующие результаты:

Номер счетчика	Значение постоянной	Номер счетчика	Значение постоянной
1	0,983	6	0,988
2	1,002	7	0,994
3	0,998	8	0,991
4	0,996	9	1,005
5	1,003	10	0,986

.

Можно ли отклонения от стандарта рассматривать как случайные или, напротив, результаты указывают на то, что постоянная отрегулированных счетчиков систематически уклоняется от постоянной стандартного счетчика?

Дать ответ на этот вопрос, проверив гипотезу о том, что 10 измерений образуют выборку, полученную из нормального распределения со средним 1,000.

17.5. С целью сравнения двух сортов стали (I и II) на способность к глубокому отпуску изготовили по семь образцов из каждого сорта и испытали их по методу Эриксона, согласно которому в образец вдавливается конус с шаровым наконечником. Глубину проникновения шарика измеряют в миллиметрах. Результаты испытаний приведены ниже.

Сталь сорта I: 10,85; 10,24; 10,48; 10,35; 11,07; 9,54; 11,18.

Сталь сорта II: 11,05; 10,07; 10,03; 10,57; 10,27; 9,97; 9,92.

Можно ли считать, что оба сорта стали имеют одинаковую способность к глубокому отпуску?

Решить поставленную задачу, сформулировав ее как задачу проверки статистических гипотез.

17.6. Масса упаковки с натуральным красителем должна составлять 50 кг, а дисперсия массы упаковки не должна превышать 0,01 кг^2. Взвешивание 10 упаковок дало следующие результаты: 50,10; 50,07; 49,93; 49,81;

49,70; 49,76; 50,08; 50,18; 49,79; 51,02 (масса в килограммах).

Свидетельствуют ли приведенные данные о том, что указанные требования

1° к массе упаковки выполняются;

2° к дисперсии массы упаковки выполняются?

17.7. Приведенные ниже данные характеризуют твердость 14 образцов сплава в условных единицах: 12,1; 13,7; 11,0; 11,6; 11,9; 13,4; 12,2; 12,5; 11,9; 11,5; 12,9; 13,0; 10,5; 11,7.

Предположим, что твердость сплава распределена нормально. Можно ли считать, что среднее a нормального распределения равно 12,0?

17.8. Исследовалась возможность снижения затрат на разведку залежей золота на одном из участков рассыпного месторождения. С этой целью вместо части запланированных для закладки шурфов пробурили скважины ударно-канатного бурения (затраты на бурение меньше). Получили такие результаты исследований на содержание золота в образцах пород из шурфов и скважин (содержание золота в миллиграммах на кубический метр породы).

Скважины: 322; 250; 225; 315; 399; 348; 192; 375; 381; 538; 198; 317; 293.

Шурфы: 478; 299; 541; 457; 251; 221; 548; 431; 397; 462; 457; 251; 221; 548.

Можно ли считать, что результаты исследований образцов на содержание золота из скважин и из шурфов отличаются несущественно?

17.9. На станке-автомате производится один вид продукции. Критическим размером изделий является внешний диаметр. После настройки станка отобрали 20 изделий. При этом оказалось, что выборочная дисперсия размера внешнего диаметра составляет 0,84 мм^2. Через определенное время для контроля точности работы станка отобрали 15 изделий. Вычисленная по ним выборочная дисперсия оказалась равной 1,07 мм^2.

Свидетельствуют ли приведенные данные об изменении точности работы станка?

17.10. Проверялась скорость полимеризации на нескольких образцах полимера. Расчетная скорость полимеризации равна 24 %. В восьми экспериментах получены такие результаты (в %): 23,6; 22,8; 25,7; 24,8; 26,4; 24,3; 23,9; 25,0.

Имеются ли основания считать, что расчетная скорость полимеризации согласуется с этими данными?

17.11. С целью проверки влияния специального способа приготовления бетона на его прочность провели эксперимент. Из данной партии сырья взяли шесть порций. Затем порции случайным образом разделили на две группы по три в каждой. После этого сырье одной группы подвергли специальной обработке и из каждой порции изготовили пробный куб. После 28-дневной выдержки шести пробных кубов определили их сопротивление на сжатие. Регистрировали значения нагрузок, при которых происходит разрушение образцов (предел прочности на сжатие). Получили такие результаты:

Бетон (без обработки)	290	311	284
Бетон (с обработкой)	309	318	318

Свидетельствуют ли эти данные о наличии эффекта специальной обработки бетона?

17.12. С целью уменьшения выхода нежелательного побочного продукта использовали катализаторы A и B. Для каждого из них были получены выборки выхода нежелательного продукта (в %).

Катализатор A: 41; 52; 29; 43; 38; 45; 52; 42; 36.

Катализатор B: 40; 27; 59; 42; 25; 58; 42; 26; 37.

Можно ли считать, что разброс выхода нежелательного продукта при использовании катализаторов A и B одинаковый?

Замечание. Разброс характеризуется дисперсией.

17.13. На компьютере моделируется нормально распределенная случайная величина. Реализация выборки этой случайной величины: 2,41; 2,26; 2,10; 2,53; 1,96; 1,31; 2,32; 2,66.

Можно ли утверждать, что выборка получена из нормального распределения со средним 2,5?

17.14. В классе 20 детей, из них наудачу отобрали 10, которым ежедневно начали давать апельсиновый сок, остальные 10 учеников ежедневно получали молоко. Через некоторое время зафиксировали следующее увеличение веса детей в фунтах (1 фунт = 453,6 г):

Сок	4,0	2,5	3,5	4,0	1,5	1,0	3,5	3,0	2,5	3,5
Молоко	1,5	3,5	2,5	3,0	2, 5	2,0	2,0	2,5	1,5	3,0

.

Среднее увеличение веса на одного ученика в группе, где давали апельсиновый сок, составило 2,9 фунта, а в группе, где давали молоко, — 2,4. Существенно ли отличается увеличение среднего веса детей в группах?

17.15. Были измерены неровности поверхности с регулярным профилем (одного и того же уровня чистоты) с помощью двойных микроскопов (I и II). При этом получены такие результаты.

Микроскоп I: 0,8; 2,0; 3,1; 3,5; 2,1; 1,7; 0,9; 1,1; 3,3.

Микроскоп II: 0,7; 2,1; 3,1; 0,9; 3,6; 2,7; 0,8; 4,7; 0,3; 4,1; 2,8; 0,6.

Выяснить, можно ли считать, что точность измерений микроскопов одинакова?

Замечание. Точность измерений характеризуется дисперсией.

17.16. Номинальное сопротивление производимых резисторов 2000 Ом. С целью контроля отобрали партию из 12 резисторов. После измерения сопротивления каждого получили такие значения: 2130; 2090; 2030; 2080; 1920; 2020; 2015; 2000; 2045; 1940; 1980; 1970.

Можно ли отклонения сопротивлений резисторов от номинала (2000 Ом) рассматривать как случайные (допустимые), или, напротив, результаты измерений свидетельствуют о том, что сопротивление резисторов существенно отличается от номинала?

17.17. На сталелитейном заводе для контроля содержания марганца в одной из марок стали сделали 10 отливков из конвертора I и столько же из конвертора II. Ниже приведено содержание марганца (в %) в каждом отливке.

Конвертор I: 1,20; 1,17; 1,15; 1,21; 1,14; 1,17; 1,18; 1,21; 1,25; 1,14.

Конвертор II: 1,39; 1,29; 1,28; 1,34; 1,32; 1,30; 1,28; 1,35; 1,35; 1,30.

Можно ли считать содержание марганца в стали, выплавленной в этих конверторах, одинаковым?

17.18. В целях уменьшения дисперсии отражательной способности краски были внесены изменения в технологию ее изготовления. Чтобы убедиться, что такие изменения в самом деле дают эффект, изготовили 10 пробных образцов. С помощью специального оптического прибора определили отражательную способность краски, изготовленной по традиционной (A) и новой (B) технологии (в относительных единицах). Получили следующие результаты.

Технология A: 40; 45; 195; 65; 145.

Технология B: 110; 55; 120; 50; 80.

Свидетельствуют ли приведенные данные об изменении дисперсии отражательной способности краски?

17.19. С целью контроля напряжения в осветительной сети каждый час в течение суток регистрировали напряжение (в вольтах): 220; 222; 220; 220; 220; 222; 220; 218; 218; 220; 220; 222; 222; 220; 218; 220; 222; 216; 218; 214; 210; 218; 223; 215.

Можно ли отклонения от стандарта (стандарт равен 220 В) рассматривать как случайные? Или наоборот, приведенные данные указывают на систематическое отклонение напряжения от стандарта?

17.20. Исследования, проводимые на протяжении ряда лет после того, как в практике лыжного спорта стала применяться техника коньковых ходов, дают основания предполагать, что она в условиях специально подготовленной трассы обеспечивает на дистанции 15 км у мужчин выигрыш по сравнению с традиционной техникой более чем на 1 мин. Ниже приведены результаты соревнований (в минутах) двух групп лыжников (дистанция 15 км: одни проходили дистанцию традиционным ходом, другие — коньковым).

Традиционный ход: 37,02; 36,74; 37,82; 38,12; 36,91; 37,98; 38,21; 37,51; 37,56; 38,03.

Коньковый ход: 35,81; 35,61; 35,02; 35,53; 35,84; 35,12; 36,12; 36,49; 35,62; 36,28.

Можно ли на основании результатов этих соревнований сделать вывод, что эффект техники коньковых ходов на дистанции 15 км составляет более чем 1 мин?

17.21. На станках A и B одного класса точности изготавливают одинаковые изделия. Критическим размером изделия является его внешний диаметр. Ниже приведены значения несмещенных оценок внешнего диаметра и его дисперсии, вычисленные по выборкам объемов 15 и 10, полученным соответственно для станков A и B:

$$\overline{\xi}_A = 45{,}3;\ s_A^2 = 1{,}07;\ \overline{\xi}_B = 46{,}1;\ s_B^2 = 0{,}84.$$

Свидетельствуют ли приведенные данные о том, что внешний диаметр изделий, изготовленных на станках A и B, одинаковый?

17.22. Исследовалась коррозионная стойкость нержавеющей стали 18Cr10Ni2Mo (сталь, содержащая 18 % хрома, 10 % никеля, 2 % молибдена). Эксперимент проводили на 12 образцах. Прежде чем исследовать их на коррозионную стойкость, определяли содержание хрома, никеля и молибдена в стали, из которой были изготовлены образцы. В частности, содержание хрома (в процентах массы) в исследуемых образцах было таким: 17,4; 17,9; 17,6; 18,1; 17,6; 18,9; 16,9; 17,5; 17,8; 17,4; 24,6; 21,0.

Можно ли на основании приведенных данных утверждать, что содержание хрома в стали составляет 18 %?

17.23. В лаборатории, изучающей влияние окружающей среды на человека, с целью определения комнатной температуры, при которой наиболее комфортно чувствуют себя мужчины и женщины, были обследованы 10 мужчин и 10 женщин. Получили такие значения температуры наибольшей комфортности (по Фаренгейту).

Мужчины: 74; 71; 77; 76; 72; 75; 73; 74; 75; 72.

Женщины: 75; 77; 78; 79; 77; 73; 78; 78; 80; 76.

Свидетельствуют ли эти данные о том, что температура, при которой человек чувствует себя комфортно, для мужчин и женщин одинакова?

Примечание. $t\,°\mathrm{F} = (9/5)t\,°\mathrm{C} + 32$, где $t\,°\mathrm{F}$ — температура по Фаренгейту, $t\,°\mathrm{C}$ — температура по Цельсию.

17.24. Измеряя сопротивление провода двух типов (A и B), получили такие данные.

Провод A: 0,126; 0,131; 0,126; 0,127; 0,124; 0,130; 0,128; 0,124.

Провод B: 0,121; 0,121; 0,124; 0,122; 0,120; 0,124; 0,125; 0,120.

Утверждается, что между разбросом сопротивления провода типа A и типа B нет различий.

Не противоречит ли это утверждение имеющимся данным?

17.25. Расчетная прочность на изгиб изготовленной резины равна 11 условным единицам. Чтобы убедиться, действительно ли это так, испытали на изгиб 16 образцов этой резины.

Можно ли по приведенным ниже данным прийти к выводу, что изготовлена резина с ожидаемой прочностью на изгиб?

Прочность на изгиб: 10,3; 11,1; 11,8; 12,0; 10,8; 13,6; 12,0; 12,5; 11,6; 12,2; 12,3; 12,5; 12,6; 13,7; 13,3; 10,5.

17.26. В задаче 17.21 утверждается, что станки, на которых изготавливаются изделия, имеют одинаковый класс точности. Так ли это в действительности?

17.27. Предлагается новая методика определения содержания марганца в одной из марок сталей. Ожидается, что эта методика дает меньший разброс результатов по сравнению с традиционной. Ниже приведено процентное содержание марганца в 10 отливках, определенное по традиционной методике, и в 8 отливках — по новой.

Традиционная методика: 1,22; 1,15; 1,17; 1,22; 1,26; 1,27; 1,19; 1,22; 1,20; 1,15.

Новая методика: 1,21; 1,24; 1,18; 1,17; 1,15; 1,18; 1,17; 1,17.

Имеются ли основания считать, что новая методика определения содержания марганца дает меньший разброс по сравнению с традиционной?

17.28. Исследовалась потеря массы десяти одинаковых резиновых стержней при испытаниях на износ.

Для проведения исследований от каждого стержня отрезали по два образца. Один из них прошел вулканизацию при температуре 80 °C, другой — при температуре 150 °C.

Можно ли на основании приведенных данных утверждать, что различие между средними потерями массы образцов, которые прошли различную вулканизацию, является существенным?

Стержень	Потеря массы		Стержень	Потеря массы	
	80 °C	150 °C		80 °C	150 °C
1	3,02	2,91	6	3,11	3,20
2	2,22	2,30	7	2,70	2,50
3	4,60	4,15	8	2,58	2,29
4	4,53	2,63	9	3,27	3,11
5	2,31	2,40	10	4,19	3,80

17.29. Два предприятия (A и B) производят кирпичную футеровку для кислородных конверторов. Потребитель хочет выяснить, отличается ли футеровка предприятий по своим характеристикам, чтобы в дальнейшем закупать продукцию с лучшими показателями. Для этого он регистрирует количество плавок, проведенных в конверторе до очередной замены футеровки. При этом получены такие результаты.

Предприятие A: 237; 224; 218; 227; 234; 215; 219; 225; 230.

Предприятие B: 216; 202; 205; 200; 207; 198; 222; 214; 226; 204.

Можно ли на основании этих данных заключить, что различие между числом плавок до замены футеровки, изготовленной на предприятиях A и B, существенно?

17.30. Дисперсия предела прочности на разрыв волокна составляет 35,63 фунта^2 (предел прочности — усилие, при котором происходит разрыв волокна). Ожидается, что внесенные в технологический процесс изменения уменьшат дисперсию. Зарегистрированы такие значения предела прочности на разрыв (в фунтах, 1 фунт = 453,6 г): 151; 156; 147; 153; 155; 148; 160; 149; 156; 161; 154; 162; 163; 149; 150.

Уменьшилась ли дисперсия предела прочности на разрыв волокна с изменением технологического процесса?

17.31. На автоматическом станке обрабатывают втулки. После настройки станка получили выборку из 10 изделий. Оказалось, что выборочное среднее диаметра втулки $\overline{\xi} = 2{,}059$ мм, а значение несмещенной оценки дисперсии диаметра $s_\xi^2 = 4{,}4$ мкм^2. Через некоторое время для контроля настройки станка на заданный диаметр втулки снова получили выборку из 10 изделий, для которой выборочное среднее $\overline{\eta} = 2{,}063$ мм, а значение несмещенной оценки дисперсии $s_\eta^2 = 8{,}6$ мкм^2. Предположим, что в течение указанного интервала времени изменения в работе станка могут сказаться только на его настройке на заданный диаметр втулки, но точность работы станка не изменяется.

Свидетельствуют ли приведенные данные об изменении настройки станка за промежуток времени, отделяющий моменты получения выборок?

З а м е ч а н и е 1. Точность работы станка характеризуется дисперсией.

З а м е ч а н и е 2. 1 мм$= 10^{-3}$ м, 1 мкм$= 10^{-6}$ м.

17.32. В процессе разработки модификации автобусных шин, которые имели бы больший пробег, проводилось исследование ряда их параметров. В частности, регистрировалась температура, до которой нагревались передние шины во время движения автобуса. По приведенным в таблице значениям температуры (в условных единицах) левой и правой шин, которые использовались на 12-ти автобусах, выяснить, являются ли существенными отличия этих параметров.

Автобус	Шина		Автобус	Шина	
	Левая	Правая		Левая	Правая
1	36	27	7	41	60
2	42	45	8	40	34
3	55	84	9	100	117
4	59	84	10	58	78
5	79	70	11	38	56
6	108	99	12	73	88

17.33. При комнатной температуре исследовалась сила сцепления двух типов клейких веществ: изобутила 2-цианакрилата и MBR-4197. Ниже приведены значения силы сцепления для 20 образцов, которая измерялась в фунтах[3] на квадратный дюйм.

Изобутил 2-цианакрилат: 365; 169; 210; 297; 228; 146; 163; 213; 300; 218.

MBR-4197: 518; 403; 473; 329; 457; 419; 437; 396; 424; 363.

Можно ли считать, что дисперсии силы сцепления изобутила 2-цианакрилата и MBR-4197 одинаковы?

17.34. В таблице приведены данные измерения длины образцов изделий (в миллиметрах) до и после отжига их в высокочастотной печи.

Привела ли термообработка к изменению размеров изделий?

[3] 1 фунт = 453,6 г, 1 дюйм = 0,0254 м

Образец	Длина, мм: До отжига	Длина, мм: После отжига	Образец	Длина, мм: До отжига	Длина, мм: После отжига
1	11,94	12,00	6	11,96	11,98
2	11,99	11,99	7	11,95	12,03
3	11,98	11,95	8	11,96	12,02
4	12,03	12,07	9	11,92	12,01
5	12,03	12,03	10	12,00	11,99

17.35. С целью сравнения пределов прочности на растяжение резиновых смесей типов A и B изготовили партию из восьми образцов прямоугольной формы (по четыре из каждой смеси) и подвергли их продольному растяжению. (Один из образцов смеси A, который квалифицировали как дефектный, был исключен из партии до начала испытаний.) Фиксировался предел прочности на растяжение образцов двух резиновых смесей (значение растягивающего усилия, при котором происходит разрушение образца). Получили следующие результаты.

Предел прочности (смесь A): 3210; 3000; 3315.

Предел прочности (смесь B): 3225; 3320; 3365; 3145.

Можно ли считать, что состав резины не влияет на ее прочность?

17.36. В задаче 17.31 описывается процесс контроля за работой станка-автомата. При этом предполагается, что точность работы станка не изменяется, хотя значения несмещенных оценок дисперсий после настройки станка и через определенное время составляют соответственно $s_\xi^2 = 4{,}4$ мкм^2 и $s_\eta^2 = 8{,}6$ мкм^2.

Является ли обоснованным предположение о неизменности точности работы станка?

17.37 (длительность обезболивающего действия препарата). Сравнивается действие обезболивающих препаратов A и B. (В некоторых случаях одним из “лекарств” может быть инертное плацебо (пустышка), которое используется для “контроля” при исследовании действия другого препарата.)

В группе больных, выразивших желание принять участие в эксперименте, насчитывается восемь человек. Вполне возможно (и естественно), что у этих больных возраст, общее состояние и т. д. далеко не одинаковы. Поэтому каждому больному дают оба препарата и каждый раз фиксируют продолжительность обезболивающего действия. Чтобы обеспечить чистоту эксперимента, приняты все разумные меры предосторожности: второй препарат дают не раньше чем закончится действие первого, четверо больных получают сначала препарат A, а другие четверо — сначала B, при этом ни один из больных не знает, какой именно препарат он употребляет, и т. д. Результаты эксперимента приведены в таблице:

Больной	Длительность действия препарата, час		Разность длительности действия препаратов B и A, час
	A	B	
1	3,2	3,8	0,6
2	1,6	1,0	−0,6
3	5,7	8,4	2,7
4	2,8	3,6	0,8
5	5,5	5,0	−0,5
6	1,2	3,5	2,3
7	6,1	7,3	1,2
8	2,9	4,8	1,9

.

Можно ли считать, что препараты A и B различаются эффективностью своего действия в предположении, что:

1° отсутствует априорная информация об эффективности препаратов;

2° эффективность действия препарата B не уступает действию препарата A.

Ответ дать в терминах проверки статистических гипотез.

17.38. Два оператора (A и B) провели 14 независимых экспериментов, исследуя температуру возгорания эмали одного и того же состава. Каждый из операторов испытал по семь образцов. Результаты экспериментов оказались такими:

Оператор A: 1450; 1425; 1420; 1410; 1370; 1360; 1270.

Оператор B: 1430; 1420; 1380; 1320; 1320; 1290; 1280.

Является ли существенным отличие между результатами, полученными операторами?

Можно ли на основании приведенных данных утверждать, что различие между средними потерями массы образцов, которые прошли различную вулканизацию, является существенным?

Глава 18
Критерий χ^2

18.1 Критерий χ^2 (гипотетическое распределение не зависит от параметров)

Постановка задачи. Пусть $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots$ $\ldots, \xi_n(\omega))$ — реализация выборки из неизвестного распределения F, относительно которого выдвигается гипотеза H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$, где G принадлежит заданному классу распределений (в частности, G может быть полностью определенным распределением). Гипотезу H_0 можно сформулировать и так: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является выборкой из распределения G с заданными свойствами.

Необходимо проверить гипотезу H_0, т. е. по реализации выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ сделать вывод: отклонять гипотезу H_0 или нет.

Выбор статистики для построения критерия. Независимо от того, верна гипотеза H_0 или нет, эмпирическое распределение $\hat{\mathsf{F}}_n$, построенное по выборке $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из F, мало уклоняется от распределения F, а именно, при каждом фиксированном x эмпирическая функция распределения $\hat{F}_n(x)$ является состоятельной и несмещенной оценкой функции распределения $F(x)$, а вместе с этим $\hat{\mathsf{F}}_n([a, b))$ является состоятельной и несмещенной оценкой $\mathsf{F}([a, b))$ (для любых $a < b$). Поэтому, если ввести уклонение $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$ эмпирического $\hat{\mathsf{F}}_n$

распределения от гипотетического G, причем так, чтобы оно принимало малые значения, когда гипотеза H_0 верна, и большие, когда гипотеза H_0 неверна, то гипотезу H_0 естественно отклонять или не отклонять в зависимости от того, какое значение приняло уклонение $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$ — большое или малое.

Выбор $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$ определяет тот или иной критерий для проверки гипотезы H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$.

Уклонение Пирсона эмпирического распределения от гипотетического. Вероятностные распределения F и G, заданные на $X \subset \mathbb{R}^1$, совпадают, если для каждого борелевского множества B из X справедливо равенство $\mathsf{F}(B) = \mathsf{G}(B)$. Если F и G различны, то найдется борелевское множество $B' \subset X$ такое, что $\mathsf{F}(B') \neq \mathsf{G}(B')$. Поэтому в качестве уклонения между распределениями F и G естественно рассмотреть величину

$$\sum_{j=1}^{r} c_j (\mathsf{F}(X_j) - \mathsf{G}(X_j))^2,$$

где c_j — неотрицательные константы, $\{X_j\}$ — разбиение X на непересекающиеся борелевские множества:

$$\bigcup_{j=1}^{r} X_j = X,\ X_i \cap X_j = \emptyset,\ i \neq j,\ 2 \leq r < \infty.$$

Уклонение Пирсона между эмпирическим распределением $\hat{\mathsf{F}}_n$, построенным по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, и гипотетическим G из этих соображений и строится. А именно, в качестве уклонения между $\hat{\mathsf{F}}_n$ и G рассматриваем

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sum_{j=1}^{r} c_j (\hat{\mathsf{F}}_n(X_j) - \mathsf{G}(X_j))^2,$$

где $\{X_j\}$ — разбиение X на непересекающиеся борелевские множества (зачастую $X_j = [a_j, b_j)$, $j = 1, 2, \ldots, r$) $\mathsf{G}(X_j)$ — вероятность попадания выборочного значения в множество X_j, вычисленная по гипотетическому распределению G (далее $\mathsf{G}(X_j)$ будем обозначать через p_j), $\hat{\mathsf{F}}_n(X_j)$ — вероятность попадания выборочного значения в X_j, вычисленная по эмпирическому распределению $\hat{\mathsf{F}}_n$ (она численно равна частоте ν_j/n попадания выборочного значения в множество X_j, вычисленной по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, ν_j — число выборочных значений из $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$, попавших в X_j), c_j — коэффициенты, выбор которых и определяет уклонение $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$.

К. Пирсон в качестве c_j предложил рассматривать n/p_j, $j = 1, 2, \ldots, r$. При этом уклонение $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$ принимает вид

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{n}{p_j} \left(\hat{\mathsf{F}}_n(X_j) - \mathsf{G}(X_j)\right)^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{n}{p_j} \left(\frac{\nu_j}{n} - p_j\right)^2.$$

Вне зависимости от того, верна гипотеза H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$ или нет, частота ν_j/n попадания выборочных значений в X_j, вычисленная по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ из F, является несмещенной и состоятельной оценкой $\mathsf{F}(X_j)$, т. е.

$$\mathsf{M}(\nu_j/n) = \mathsf{F}(X_j)$$

и при $n \to \infty$

$$\nu_j/n \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{F}(X_j)$$

(для всех $j = 1, 2, \ldots, r$). Поэтому, если гипотеза H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$ верна, и, следовательно, $\mathsf{F}(X_j) = \mathsf{G}(X_j) = p_j$, то

$$(\nu_j/n - p_j)^2 = (\nu_j/n - \mathsf{G}(X_j))^2 = (\nu_j/n - \mathsf{F}(X_j))^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$$

при $n \to \infty$ (для всех $j = 1, 2, \ldots, r$). При этом распределение уклонения К. Пирсона

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{F}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{n}{p_j} \left(\frac{\nu_j}{n} - p_j\right)^2$$

сходится к χ^2-распределению с $(r-1)$ степенями свободы. Если же гипотеза H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$ неверна, т. е. $\mathsf{F} \neq \mathsf{G}$, то

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{n}{p_j} \left(\frac{\nu_j}{n} - p_j\right)^2$$

сходится к $+\infty$ при $n \to \infty$, поскольку

$$\left(\frac{\nu_j}{n} - p_j\right)^2 \xrightarrow{P} (\mathsf{F}(X_j) - p_j)^2 = (\mathsf{F}(X_j) - \mathsf{G}(X_j))^2,$$

а среди чисел $(\mathsf{F}(X_j) - \mathsf{G}(X_j))^2$, $j = 1, 2, \ldots, r$, при достаточно "мелком" разбиении выборочного пространства X найдутся числа строго большие нуля и, следовательно, найдутся X_j, для которых при $n \to +\infty$

$$\frac{n}{p_j} \left(\frac{\nu_j}{n} - p_j\right)^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} +\infty,$$

а вместе с ними и $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) \to +\infty$. Так что, когда гипотеза H_0 верна, уклонение К. Пирсона

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{n}{p_j} \left(\frac{\nu_j}{n} - p_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j}$$

принимает малые значения (при этом распределение уклонения $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{F})$ близко к распределению χ^2_{r-1}), а когда гипотеза H_0 неверна, $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$ принимает большие значения и

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) \to +\infty$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, для проверки гипотезы H_0: $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$ — выборка из распределения G, вычисляем уклонение $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$. Если при этом $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$ приняло малое значение, то гипотезу H_0 не отклоняем, в противном случае — отклоняем.

Границы, отделяющие большие значения уклонения $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$ от малых, устанавливаются на основании того, что для выборки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ из распределения F при больших n распределение $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{F})$ мало отличается от распределения χ^2 с $(r-1)$ степенями свободы.

Критерий $\boldsymbol{\chi^2}$ (гипотетическое распределение не зависит от неизвестных параметров). *Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — выборка из распределения F и $\chi^2_{\alpha;(r-1)}$ — верхний α-предел χ^2-распределения с $(r-1)$ степенями свободы.*

Если гипотезу H_0: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является выборкой из распределения G отклонять при

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} > \chi^2_{\alpha;(r-1)},$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью α гипотеза H_0 будет отклоняться, когда она верна.

О выборе классов. Сначала отметим один момент из практики использования критерия согласия χ^2.

Асимптотическая теория критерия согласия χ^2 справедлива при любом разбиении выборочного пространства X на непересекающиеся классы X_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$:

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i, \; X_i \cap X_j = \emptyset, \; i \neq j, \; i, j = 1, 2, \ldots, r,$$

по которым группируются наблюдения, если только классы определяются безотносительно к последним (безотносительно к выборке). Однако обычно классы выбираются по выборке, а это обозначает, что границы классов случайны. Можно ли при этом пользоваться критерием χ^2? Оказывается, можно — асимптотическая теория справедлива и в описанной ситуации.

Далее относительно проблемы выбора классов.

1° Если данные в задаче дискретны или мы имеем выборку из дискретного распределения, то задача о выборе классов возникает только в смысле объединения некоторых классов с целью уменьшения погрешности при замене распределения уклонения $D(\hat{F}_n, F)$ распределением χ^2 или с целью объединения классов, гипотетические вероятности попадания в которые малы, как, например, для пуассоновского распределения необходимо объединять классы с малыми гипотетическими вероятностями.

Но по существу проблема выбора классов возникает тогда, когда мы имеем выборку из непрерывного распределения.

2° О выборе классов по методу равных вероятностей.

Если из тех или иных соображений число классов r определено, то классы следует выбирать так, чтобы гипотетические вероятности были равны $1/r$ (и, следовательно, равны между собой) или, по-возможности, как можно ближе к $1/r$. (В противном случае погрешности при замене распределения уклонения $D(\hat{F}_n, F)$ распределением χ^2 будут бо́льшими.)

Определившись с границами классов, мы приходим к задаче о выборе числа классов.

3° Проблема выбора числа классов в методе равных вероятностей состоит в следующем: если r не достаточно велико, то критерий может терять “чувствительность” на “хвостах” распределения. Если же число классов r большое, то количество выборочных значений, попавших в классы, может быть малым, а это увеличивает погрешность при аппроксимации распределения уклонения $D(\hat{F}_n, F)$ распределением χ^2. На практике руководствуются следующим правилом: r выбираем так, чтобы

$$np_i \geq 10,\ \ i = 1, 2, \ldots, r.$$

Манн и Вальд доказали, что оптимальное число $r = r_n$ классов при $n \to \infty$ удовлетворяет соотношению

$$r_n \sim 4 \cdot 2^{1/5} \left(\frac{n}{N_{0;1;\alpha}} \right)^{2/5},$$

где $N_{0;1;\alpha}$ — верхний α-предел $N_{0;1}$-распределения (α — уровень значимости). Впоследствии было установлено, что без существенных потерь мощности критерия можно считать, что при больших n

$$r_n \approx 2 \cdot 2^{1/5} \left(\frac{n}{N_{0;1;\alpha}} \right)^{2/5}.$$

Рекомендации по применению критерия χ^2.

1° Использовать классы с равными или близкими к равным вероятностями.

2° Пользоваться соотношением

$$r_n \approx 2 \cdot 2^{1/5} \left(\frac{n}{N_{0;1;\alpha}} \right)^{2/5},$$

когда $n \geq 450$ и $\alpha = 0,05$ и когда $n \geq 300$ и $\alpha = 0,01$.

3° Когда $n \leq 450$ число r классов выбирают по-возможности бо́льшим, но при этом должны выполняться условия

$$np_i \geq 10, \; i = 1, 2, \ldots, r.$$

Если при данном разбиении для некоторых классов X_i значения

$$np_i < 10,$$

то эти X_i объединяют с другими (или рассматривают новое разбиение) так, чтобы для новых X'_j выполнялись неравенства

$$np'_j \geq 10, \; j = 1, 2, \ldots, r',$$

где $p'_j = \mathsf{G}(X'_j) = \mathsf{P}\{\xi_k \in X'_j\}, \; j = 1, 2, \ldots, r'$. Если же n настолько мало, что это сделать невозможно, критерием χ^2 не пользуются.

Обычно χ^2-распределение табулировано для числа степеней свободы, меньших 30. Если число степеней свободы больше 30, в качестве χ^2_r-распределения пользуются нормальным распределением с параметрами $(r; 2r)$.

Пример 18.1.1 (показания механических часов). *В таблице приведены показания* 500 *наудачу выбранных механических часов, выставленных в витринах часовых магазинов.*

Согласуется ли с приведенными данными гипотеза о равномерном распределении показаний часов на интервале $[0; 12)$*?*

i	n_i	i	n_i
0	41	6	41
1	34	7	33
2	54	8	37
3	39	9	41
4	49	10	47
5	45	11	39
		Всего	500

Здесь i *— номер интервала от* i*-го часа до* $(i+1)$*-го,* $i = 0, 1, \ldots, 11$*;* n_i *— количество часов,показания которых принадлежат* i*-му интервалу.*

Решение. Показания 500 часов можно рассматривать как реализацию выборки объемом 500 из некоторого непрерывного на интервале [0;12) распределения F. Относительно распределения F случайной величины ξ (показаний часов) выдвигается гипотеза H_0: F — равномерное на интервале [0;12) распределение, т. е. плотность $f(x)$ распределения F имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 1/12, & \text{если } x \in [0; 12); \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 12). \end{cases}$$

Для проверки гипотезы H_0 воспользуемся критерием χ^2. Разобьем множество возможных значений $X = [0; 12)$ случайной величины ξ на непересекающиеся подмножества $X_i = [i, i+1)$, $i = 0, 1, \ldots, 11$. Вероятность попадания ξ в X_i, вычисленная по гипотетическому распределению:

$$p_i = \mathsf{P}\{\xi \in [i, i+1)\} = \int\limits_i^{i+1} \frac{1}{12}\, dx = \frac{1}{12}.$$

И поскольку

$$np_i = 500 \cdot \frac{1}{12} = 41{,}7 > 10; \quad i = 0, 1, \ldots, 11,$$

то можно воспользоваться критерием χ^2 в приведенной выше форме.

Вычислим значение уклонения между эмпирическим распределением $\hat{\mathsf{F}}_n$ и гипотетическим G. Имеем

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} =$$

$$= \frac{1}{41{,}7}\left((41 - 41{,}7)^2 + \ldots + (39 - 41{,}7)^2\right) = 9{,}99.$$

Таким образом,

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = 9{,}99 < 19{,}7 = \chi^2_{0{,}05;11} = \chi^2_{\alpha;(r-1)}.$$

Поэтому, согласно критерию χ^2, гипотеза о равномерном на интервале $[0;12)$ распределении показаний механических часов в витринах магазинов не отклоняется. Другими словами, предположение о том, что показания часов распределены равномерно на интервале $[0;12)$, не противоречит наблюдениям.

18.2 Критерий χ^2 (параметры неизвестны)

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — выборка из неизвестного распределения F, относительно которого выдвигается гипотеза

$$H_0\colon \mathsf{F}(\cdot) = \mathsf{G}(\cdot\,; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k),\ (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \theta \in \Theta,$$

(распределение $\mathsf{G}(\cdot\,; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ зависит от неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, причем единственным источником информации о значениях этих параметров является выборка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$). Другими словами, гипотеза H_0 состоит в том, что $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является выборкой из распределения, принадлежащего классу распределений

$$\mathsf{G}(\cdot\,; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k),\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in \Theta,$$

т. е. $\mathsf{F}(\cdot)$ совпадает с распределением $\mathsf{G}(\cdot\,;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$ при некоторых значениях параметров $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$. Необходимо по реализации выборки $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n)$ сделать вывод: отклонять гипотезу H_0 или нет.

Будем поступать так. Рассмотрим в качестве неизвестных параметров $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ их оценки $\hat\theta_1,\hat\theta_2,\ldots,\hat\theta_k$, полученные по выборке $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, а в качестве гипотетического распределения рассмотрим $\mathsf{G}(\cdot\,;\hat\theta_1,\hat\theta_2,\ldots,\hat\theta_k)$.

Уклонение $D(\hat{\mathsf{F}}_n,\mathsf{G})$ строим так же, как и ранее:

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n,\mathsf{G})=\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(\nu_i-np_i(\hat\theta_1,\hat\theta_2,\ldots,\hat\theta_k)\right)^2}{np_i(\hat\theta_1,\hat\theta_2,\ldots,\hat\theta_k)},$$

где $p_i(\hat\theta_1,\hat\theta_2,\ldots,\hat\theta_k)$ — вероятность попадания выборочного значения в множество X_i, $i=1,2,\ldots,r$, вычисленная по гипотетическому распределению. Р. Фишер установил, что если гипотеза H_0 верна и оценки $\hat\theta_1,\hat\theta_2,\ldots,\hat\theta_k$ получены по методу максимального правдоподобия, то распределение уклонения $D(\hat{\mathsf{F}}_n,\mathsf{G})$ между $\hat{\mathsf{F}}_n$ и G при $n\to\infty$ сходится к распределению χ^2 с $(r-1-k)$ степенями свободы, где k — количество параметров, оцененных по выборке $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$.

Таким образом, если параметры оцениваются по выборке по методу максимального правдоподобия, можно пользоваться критерием χ^2 в следующей форме.

Если гипотезу H_0 отклонять при

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n,\mathsf{G})=\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(\nu_i-np_i(\hat\theta_1,\hat\theta_2,\ldots,\hat\theta_k)\right)^2}{np_i(\hat\theta_1,\hat\theta_2,\ldots,\hat\theta_k)}>\chi^2_{\alpha;(r-1-k)}$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью α гипотеза H_0 будет отклоняться, когда она верна.

Пример 18.2.1 *Среди* 2020 *семей с двумя детьми* 527 *имеют двух мальчиков,* 476 *— двух девочек, у остальных* 1017 *семей дети разного пола.*

Можно ли считать, что количество мальчиков в семье, имеющей двух детей, является биномиально распределенной случайной величиной?

Решение. Обозначим через ξ количество мальчиков в семье с двумя детьми, ξ принимает значения $0, 1, 2$. Относительно распределения P_ξ случайной величины ξ выдвигается гипотеза

$$H_0\colon \mathsf{P}_\xi(k) = \mathsf{G}(k;p) = C_2^k p^k (1-p)^{2-k},\ k = 0, 1, 2,$$

(гипотеза о биномиальном распределении ξ), которую необходимо проверить.

Гипотетическое распределение зависит от неизвестного параметра p. Оценкой максимального правдоподобия параметра p биномиального распределения

$$\mathsf{P}(k;p) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k},\ k = 0, 1, \ldots, m,$$

полученной по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ является

$$\hat{p} = \frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

В рассматриваемом примере значение оценки максимального правдоподобия параметра p равно

$$\hat{p} = \frac{0 \cdot 476 + 1 \cdot 1017 + 2 \cdot 527}{2 \cdot 2020} = 0{,}513.$$

Поэтому гипотетическим распределением является

$$\mathsf{G}(k;p) = C_2^k (0,513)^k (1-0,513)^{2-k},\ k = 0, 1, 2.$$

Его можно записать и в таком виде:

$$\mathsf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}237 & 0{,}500 & 0{,}263 \end{pmatrix}.$$

В качестве разбиения выборочного пространства $X = \{0, 1, 2\}$ рассмотрим $X_0 = \{0\}$, $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{2\}$. Оценки $\hat{p}_i$ гипотетических вероятностей p_i выборочному значению попасть в X_i, $i = 0, 1, 2$, соответственно равны 0,237; 0,500; 0,263; объем выборки $n =$ 2020, потому

$$n\hat{p}_i \geq 10,\ i = 0,\ 1,\ 2,$$

и, следовательно, пользоваться критерием χ^2 можно.

Вычислим значение уклонения Пирсона между эмпирическим $\hat{\mathsf{F}}_n$ и гипотетическим G распределениями:

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \frac{(\nu_0 - n\hat{p}_0)^2}{n\hat{p}_0} + \frac{(\nu_1 - n\hat{p}_1)^2}{n\hat{p}_1} + \frac{(\nu_2 - n\hat{p}_2)^2}{n\hat{p}_2} =$$

$$= \frac{(476 - 478{,}74)^2}{478{,}74} + \frac{(1017 - 1010)^2}{1010} + \frac{(527 - 531{,}26)^2}{531{,}26} =$$

$= 0{,}098.$

Отсюда имеем

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = 0{,}098 < 3{,}84 = \chi^2_{0{,}05;1} = \chi^2_{\alpha;(r-1-k)}$$

($r - 1 - k = 3 - 1 - 1$; $k = 1$ — количество параметров, оцененных по выборке; $r = 3$ — количество подмножеств, на которые разбивается выборочное пространство). Поэтому согласно критерию χ^2 гипотеза о биномиальном распределении случайной величины ξ на 5% уровне значимости не отклоняется. Предположение, что количество мальчиков в семьях с двумя детьми имеет биномиальное распределение, не противоречит имеющимся данным.

18.3 Критерий χ^2 как критерий независимости

Постановка задачи. Имеется n независимых наблюдений (a_i, b_j), $i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, k$ векторной случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$. При этом значение (a_i, b_j) случайная величина $\zeta = (\xi, \eta)$ приняла ν_{ij} раз, $i = 1, 2, \ldots, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, k$ (ясно, что $\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{k} \nu_{ij} = n$). Результаты наблюдений удобно представлять в виде так называемой таблицы сопряженности признаков (см. табл. 18.3.1). Но ни распределение векторной случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$

$$\mathsf{P}\{\zeta = (a_i, b_j)\} = p_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, k$$

(см. также табл. 18.3.2), ни распределения ее компонент ξ и η:

$$\mathsf{P}\{\xi = a_i\} = p_{i\cdot},\ i = 1, 2, \ldots, s;$$

$$\mathsf{P}\{\eta = b_j\} = p_{\cdot j},\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

неизвестны.

Таблица 18.3.1. Таблица сопряженности признаков

Значения ξ	Значения η				Сумма
	b_1	b_2	$\cdots$	b_k	
a_1	ν_{11}	ν_{12}	$\cdots$	ν_{1k}	$\nu_{1\cdot}$
a_2	ν_{21}	ν_{22}	$\cdots$	ν_{2k}	$\nu_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_s	ν_{s1}	ν_{s2}	$\cdots$	ν_{sk}	$\nu_{s\cdot}$
Сумма	$\nu_{\cdot 1}$	$\nu_{\cdot 2}$	$\cdots$	$\nu_{\cdot k}$	n

В таблице 18.3.1

$$\nu_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} \nu_{ij},\ \nu_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s} \nu_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, s,\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Относительно совместного распределения случайных величин ξ и η (распределения вектора $\zeta = (\xi, \eta)$), см. табл. 18.3.2, выдвигается гипотеза

$$H_0 : p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j},\ i = 1, 2, \ldots, s,\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Другими словами, H_0 — это гипотеза о независимости случайных величин ξ и η (еще говорят, гипотеза о независимости признаков).

По результатам наблюдений $\zeta = (\xi, \eta)$ (см. табл. 18.3.1) необходимо проверить гипотезу H_0 о независимости компонент ξ и η векторной случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$.

Таблица 18.3.2. Совместное распределение случайных величин ξ и η

Значения ξ	Значения η				Сумма
	b_1	b_2	$\cdots$	b_k	
a_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1k}	$p_{1\cdot}$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2k}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_s	p_{s1}	p_{s2}	$\cdots$	p_{sk}	$p_{s\cdot}$
Сумма	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot k}$	1

В табл. 18.3.2

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} p_{ij},\ \ i = 1, 2, \ldots, s;\ \ p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s} p_{ij},\ \ j = 1, 2, \ldots, k;$$

$$\sum_{i=1}^{s} p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1.$$

Для проверки гипотезы H_0 воспользуемся критерием χ^2, когда гипотетическое распределение зависит от неизвестных параметров. Неизвестными параметрами являются $p_{i\cdot}$ и $p_{\cdot j}$, $i = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1, 2, \ldots, k$, причем

$$\sum_{i=1}^{s} p_{i\cdot} = 1;\ \ \sum_{j=1}^{k} p_{\cdot j} = 1.$$

В качестве разбиения выборочного пространства

$$X = \{(a_i, b_j),\ i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, k\}$$

рассмотрим подмножества

$$X_{ij} = \{(a_i, b_j)\},\ i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Уклонение эмпирического распределения

$$\hat{\mathsf{F}}_n\{(a_i, b_j)\} = \frac{\nu_{ij}}{n},\ i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

от гипотетического

$$\mathsf{G}\{(a_i, b_j)\} = p_{i\cdot}p_{\cdot j},\ i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

равно

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_{ij} - n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j})^2}{n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}},$$

где

$$\hat{p}_{i\cdot} = \nu_{i\cdot}/n,\ i = 1, 2, \ldots, s;\ \hat{p}_{\cdot j} = \nu_{\cdot j}/n,\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

— оценки максимального правдоподобия соответственно параметров $p_{i\cdot}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, и $p_{\cdot j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. То есть

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_{ij} - (\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n)^2}{(\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n}.$$

Количество параметров, оцененных по выборке, равно $(s-1)+(k-1)$. Количество подмножеств $X_{ij}, i = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1, 2, \ldots, k$, на которые разбивается выборочное пространство X, равно sk. Поэтому число степеней свободы χ^2-распределения, предельного для $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$, равно $sk - 1 - ((s-1) + (k-1)) = (s-1)(k-1)$.

Таким образом, *гипотезу H_0 о независимости случайных величин ξ и η отклоняем, если*

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_{ij} - (\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n)^2}{(\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n} > \chi^2_{\alpha;(s-1)(k-1)},$$

и не отклоняем в противном случае; при этом с вероятностью α гипотезу H_0 будем отклонять, когда она верна.

Значения случайных величин ξ и η еще называют признаками, и в этом случае говорят о критерии χ^2 для независимости признаков.

Разбиение выборочного пространства (X, Y) двумерной случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ на непересекающиеся подмножества $X_i \times Y_j$ мы проводим сами. При этом необходимо следить, чтобы для гипотетических вероятностей $\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j}$ выборочным значениям (ξ, η) попасть в $X_i \times Y_j$ выполнялись неравенства

$$(\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j})n = \nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}/n \geq 10$$

(при всех возможных значениях i и j), где n — объем выборки.

Замечание. Следует отметить, что имея дело со статистическими зависимостями, необходимо быть очень осторожным. Из наличия статистической зависимости (отсутствия статистической независимости) не следует причинная зависимость. Идеи относительно причинных связей должны приходить “извне” статистики.

Пример 18.3.1 (прививка против холеры). *В таблице* (*Гринвуд, Юл,* 1915) *приведены данные о* 818 *случаях, классифицированных по двум признакам: наличию прививки против холеры и отсутствию заболевания.*

Можно ли на основании этих данных прийти к выводу о существовании зависимости между отсутствием заболевания и наличием прививки?

Наличие прививки	Наличие заболевания		Всего
	Не заболели	Заболели	
Привитые	276	3	279
Непривитые	473	66	539
Всего	749	69	818

Решение. В терминах проверки статистических гипотез поставленная задача формулируется как задача проверки гипотезы о независимости признаков (наличие прививки и отсутствие заболевания).

Таблица сопряженности признаков (см. табл. 18.3.1) приведена в условии примера, заметим, что здесь $s = 2$, $k = 2$, $n = 818$.

Поскольку

$$(\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j})n = \nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}/n \geq 10, \; i,j = 1,2,$$

то можно воспользоваться критерием χ^2.

Значение отклонения между эмпирическим распределением $\hat{\mathsf{F}}_n$ и гипотетическим G:

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_{ij} - (\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n)^2}{(\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j})/n} =$$

$$= \frac{(276 - 279 \cdot 749/818)^2}{279 \cdot 749/818} + \frac{(3 - 279 \cdot 69/818)^2}{279 \cdot 69/818} +$$

$$+ \frac{(473 - 539 \cdot 749/818)^2}{539 \cdot 749/818} + \frac{(66 - 539 \cdot 69/818)^2}{539 \cdot 69/818} = 29{,}61.$$

Таким образом,

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, G) = 29{,}61 > 3{,}84 = \chi^2_{0,05;1} = \chi^2_{\alpha;(s-1)(k-1)}.$$

Поэтому согласно критерию χ^2 гипотеза о независимости признаков (отсутствие заболевания и наличие прививки) отклоняется; она противоречит имеющимся данным. Другими словами, приведенные экспериментальные данные дают основания утверждать, что эффект прививки против холеры существует.

18.4 Задачи

АЗ: 18.2, 18.7, 18.17, 18.20.
СЗ: 18.14, 18.23, 18.29, 18.52.

18.1 (адекватность модели). В ряде прикладных задач при использовании методов теории вероятностей, прежде чем вычислять вероятность того или иного события, необходимо построить математическую модель стохастического эксперимента (вероятностное пространство).

Вероятность события можно вычислять только тогда, когда определено (явно или неявно) вероятностное пространство. Теория вероятностей дает правила, по которым в данной модели вычисляются вероятности событий, но ничего не говорит о выборе модели стохастического эксперимента. И принципиальный вопрос: "Адекватно ли описывает предложенная модель стохастический эксперимент?" остается открытым. Дать ответ на этот вопрос может математическая статистика. Ответ дается в терминах проверки статистических гипотез.

Например, рассматривается стохастический эксперимент, состоящий в подбрасывании игральной кости. Необходимо вычислить вероятность того, что выпадет четное число очков.

В качестве множества элементарных событий Ω выберем $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Вероятность элементарных событий можно задать, скажем, так:

$$\mathsf{P}(i) = \frac{1}{6},\ i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Тем самым вероятностное пространство определено. Почему именно $\mathsf{P}(i) = 1/6$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, теория вероятностей не дает ответа. Вероятности мы задаем сами. Кто-то другой может задать эти вероятности, например, так:

$$\mathsf{P}(i) = \frac{i}{21},\ i = 1, 2, \ldots, 6,$$

— пропорционально числу очков на грани (или еще какимнибудь способом), и это (как возможная гипотеза) будет ничуть не хуже.

По известной математической модели $\{\Omega, \mathsf{P}\}$ вычислить вероятность случайного события просто. Например, вероятность события A — "выпало четное число очков", вычисляется так:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathsf{P}(2) + \mathsf{P}(4) + \mathsf{P}(6).$$

Для симметричной игральной кости имеем

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(2) + \mathsf{P}(4) + \mathsf{P}(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, если предложенная модель адекватно описывает эксперимент, то $\mathsf{P}(A) = 1/2$.

Однако, *адекватно ли описывается эксперимент предложенной моделью*?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо провести эксперимент: подбросить кость достаточно большое число раз, зафиксировать результат и далее проверить, согласуется ли модель с результатом эксперимента.

Результаты наблюдений удобно представить в таком виде:

i	1	2	3	4	5	6
n_i						

,

где i — количество выпавших очков; n_i — число подбрасываний, в которых было зафиксировано i очков.

18.2 (количество смертей от удара копытом). Далее приведены классические данные фон Борткевича о количестве лиц, убитых ударом копыта коня в 10 прусских армейских корпусах за 20 лет (1875—1895):

i	0	1	2	3	4	5 и более	Всего
n_i	109	65	22	3	1	0	200

,

где i — количество смертей в одном корпусе за год; n_i — количество наблюдений, в которых случилось i смертей.

Проверить гипотезу о пуассоновском распределении количества смертей от удара копытом коня в одном корпусе в течение года.

18.3. В таблице приведены данные К. Пирсона о возрасте кандидатов, которые сдали и не сдали вступительные экзамены в Лондонский университет в 1908 и 1909 гг. (для двух старших возрастных групп указаны оценки среднего возраста).

Возраст кандидата	Результат экзамена		Всего
	Сдали	Не сдали	
16	583	563	1146
17	666	980	1646
18	525	868	1393
19—21	383	814	1197
22—30 (средний возраст 25)	214	439	653
Свыше 30 (средний возраст 33)	40	81	121
Всего	2411	3745	6156

Свидетельствуют ли эти данные о наличии зависимости между возрастом кандидатов и успешно сданными экзаменами?

18.4. Стохастический эксперимент состоит в подбрасывании двух игральных костей и регистрации минимального числа очков, выпавших на них.

Предложить математическую модель этого стохастического эксперимента. Проверить ее адекватность эксперименту. Для этого провести эксперимент достаточное число раз и проверить, согласуется ли предложенная модель с полученными данными.

Сформулировать и решить поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез (воспользоваться критерием χ^2).

Результаты эксперимента удобно представить в виде таблицы:

i	1	2	3	4	5	6
n_i						

,

где i — минимальное число очков, выпавших на игральных костях; n_i — количество экспериментов, в которых минимальное число очков на игральных костях оказалось равным i, $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Замечание. О выборе модели эксперимента и проверке ее адекватности см. задачу 18.1.

Указание. Чтобы предложить гипотетическое распределение (в предположении, что игральные кости симметричны), найдите распределение случайной величины $\min\{\xi, \eta\}$, где ξ, η — число очков на игральных костях. Распределение функции

$$g(\zeta) = \min\{\xi, \eta\}$$

от случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ по распределению P_ζ можно найти, воспользовавшись формулой

$$\mathsf{P}\{g(\zeta) \in B\} = \mathsf{P}\{g(\xi, \eta) \in B\} = \sum_{(x_i, y_j):\, g(x_i, y_j) \in B} \mathsf{P}_\zeta(x_i, y_j)$$

(относительно распределения функции от случайных величин см. также гл. 5 и, в частности, пример 5.1.2).

18.5 (вероятность рождения мальчика). С 1871 по 1900 гг. в Швейцарии родились 1 359 671 мальчиков и 1 285 086 девочек.

Согласуется ли с этими данными гипотеза H_0: вероятность рождения мальчика равна: а) 0,5; б) 0,515?

18.6 (распределение α-частиц). В эксперименте Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество наблюдалось в течение $N = 2612$ интервалов времени (каждый длительностью 1/8 мин), для которых регистрировалось количество α-частиц, достигших счетчика.

В таблице приведено количество N_k интервалов времени, в течение которых наблюдалось k α-частиц. Общее количество частиц $T = \sum\limits_k kN_k = 10\,132$. Среднее их количество, зарегистрированное за один интервал, равно $\lambda = T/N = 10\,132/2\,612 = 3{,}879$.

k	N_k	k	N_k
0	57	6	273
1	203	7	139
2	383	8	49
3	525	9	27
4	532	10	10
5	408	> 10	6
		Всего	2612

Воспользовавшись критерием χ^2, проверить гипотезу о пуассоновском распределении числа частиц, достигших счетчика, за интервал времени длительностью 1/8 мин.

18.7 (смышленость и материальные условия). В таблице приведены результаты обследования 697 школьников.

Мальчики были упорядочены согласно их IQ и условиям жизни дома. При этом использованы обозначения: A — очень способный, B — достаточно умный, C — имеет средние способности, D — недостаточно развит, E — умственно отсталый.

Материальная обеспеченность	Уровень смышлености					Всего
	A	B	C	D	E	
Хорошая	33	137	125	47	8	350
Плохая	21	127	129	61	9	347
Всего	54	264	254	108	17	697

Можно ли утверждать, что условия жизни (обеспеченность) детей влияют на их смышленость?

З а м е ч а н и е. IQ — Intellectual quality (умственные способности) — показатель умственных способностей школьников в баллах, используемый в американской педагогической практике.

18.8. Имеется три монеты: одна стоимостью 1 коп. и две — стоимостью 10 коп. Стохастический эксперимент состоит в выборе наудачу одной из монет (с возвращением) и регистрации количества шагов до первого появления монеты стоимостью 10 коп., т. е. в регистрации числа появлений монеты стоимостью 1 коп. до первого появления монеты стоимостью 10 коп.

Предложить математическую модель этого стохастического эксперимента. Проверить ее адекватность эксперименту. Для этого получить выборку (достаточно большого объема) и проверить, согласуется ли предложенная модель с результатами эксперимента — полученной выборкой.

Результаты эксперимента удобно представить в виде:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
n_i											

,

где i — количество шагов до первого появления монеты стоимостью 10 коп.; n_i — количество экспериментов, в которых до появления монеты стоимостью 10 коп. было сделано i шагов.

З а м е ч а н и е. О выборе модели стохастического эксперимента и проверке ее адекватности эксперименту см. задачу 18.1.

18.9. Четыре монеты были подброшены 20 160 раз, при этом комбинации: четыре герба, три герба и решетка, два герба и две решетки, один герб и три решетки, четыре решетки — появились соответственно такое число раз:

$$1181,\ 4909,\ 7583,\ 5085,\ 1402$$

(данные эксперимента, проведенного В. И. Романовским).

Свидетельствуют ли эти данные о том, что количество гербов, появившихся на четырех монетах, является биномиально распределенной случайной величиной?

Сформулировать и решить поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез.

18.10 (аромат сигарет). Менеджеры табачной фирмы хотели бы знать, можно ли отправлять заказчикам сигареты и трубочный табак в общей упаковке. (Если при этом качество сигарет не становится хуже, то можно существенно сократить затраты на транспортировку.) Для этого провели эксперимент. Изготовили 400 картонных коробок и в 250 из них положили табачные изделия обоих типов, а в остальные — только сигареты. Через месяц коробки открыли и все 400 упаковок сигарет разложили в случайном порядке. Несколько экспертов анализировали аромат сигарет, пытаясь обнаружить его отличие от начального. Результаты эксперимента приведены в таблице.

Вывод относительно аромата	Тип упаковки		Всего
	Общая	Раздельная	
Не изменился	72	119	191
Изменился	178	31	209
Всего	250	150	400

Можно ли на основании этих данных утверждать, что связь между ароматом сигарет и типом упаковки отсутствует?

18.11 (эксперимент Сведеборга). В начале XIX столетия было открыто замечательное явление, получившее название броуновского движения (по имени британского ботаника Р. Броуна, открывшего его). Это явление состоит в том, что мельчайшие частицы вещества, взвешенные в жидкости, пребывают в хаотическом движении без видимых на то причин.

Причины этого, казалось бы, самопроизвольного движения долго не могли объяснить, пока кинетическая теория газов не дала простого и исчерпывающего объяснения: движение взвешенных частиц является результатом ударов молекул жидкости по этим частицам. Кинетическая теория дает возможность вычислить вероятность того, что в данном объеме жидкости не будет ни одной частицы взвешенного вещества, таких частиц будет одна, две, три и т. д.

Для проверки результатов теории был проведен ряд экспериментов. Далее приведены результаты эксперимента шведского физика Сведеборга.

В тонком слое раствора золота через одинаковые промежутки времени регистрировалось количество частиц золота, попавших в поле зрения микроскопа. Было проведено 518 таких наблюдений. При этом были получены следующие результаты:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8 и более
n_i	112	168	130	69	32	5	1	1	0

В таблице i — количество частиц золота в поле зрения микроскопа; n_i — количество наблюдений, когда в поле зрения микроскопа было зарегистрировано i частиц золота.

Проверить гипотезу о пуассоновском распределении числа частиц золота, наблюдавшихся в поле зрения микроскопа.

18.12. В таблице приведены официальные данные шведской статистики за 1935 г. о распределении новорожденных по месяцам.

Месяц	Девочки	Всего детей	Месяц	Девочки	Всего детей
Январь	3537	7280	Июль	3621	7585
Февраль	3407	6957	Август	3596	7393
Март	3866	7883	Сентябрь	3491	7203
Апрель	3711	7884	Октябрь	3391	6903
Май	3775	7892	Ноябрь	3160	6552
Июнь	3665	7609	Декабрь	3371	7132
			Всего	42 591	88 273

Свидетельствуют ли эти данные о том, что в каждом месяце в течение года дети рождаются одинаково часто? Девочки рождаются одинаково часто? Мальчики рождаются одинаково часто?

18.13 (непредвзятость экспериментатора). Каждую из 150 спичек разломайте наудачу на две части. Линейкой с миллиметровым делением измерьте с точностью до десятых долей миллиметра длину 300 полученных частей. При этом придется оценивать первый знак после запятой в десятичной записи длины части спички в миллиметрах. Зафиксируйте этот знак (последнюю цифру записи).

Результаты измерений удобно представить в таком виде:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i										

,

где i — последняя цифра в записи результата измерения длины части спички, $i = 0, 1, \ldots, 9$; n_i — число появлений последней цифры i в измерениях.

Проверьте с помощью критерия χ^2 непредвзятость ваших измерений.

З а м е ч а н и е. Предвзятость при снятии показаний встречается достаточно часто. Сомнительно, чтобы была какая-то объективная причина, обуславливающая более частое появление одних цифр по сравнению с другими; поэтому естественно предположить, что неодинаковая частота появления цифр указывает на предвзятость наблюдателя. Даже те наблюдатели, которые знают о возможности предвзятости и о необходимости осторожности при снятии показаний, все-таки не всегда могут избежать ее.

18.14. Симметричную монету подбрасывают до второго выпадения герба и регистрируют число ξ выпавших решеток. Относительно распределения случайной величины ξ выдвигается гипотеза H_0 :

$$\mathsf{P}_\xi(k) = \frac{k+1}{2^{k+2}},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

(из каких соображений выдвинута гипотеза).

Проверьте гипотезу H_0. С этой целью проведите эксперимент достаточно большое число раз и воспользуйтесь критерием χ^2. Результаты эксперимента удобно представить в виде таблицы

0	1	2	...	k	...
n_0	n_1	n_2	...	n_k	...

,

где n_k — число экспериментов из n проведенных, в которых до второго выпадения герба решетка выпала k раз, $k = 0, 1, 2, \ldots$

18.15 (цвет волос и цвет глаз). В таблице приведены данные о 147 наудачу выбранных студентах, которые были распределены согласно цвету их волос (светлые, темные) и глаз (голубые, карие).

Цвет волос	Цвет глаз		Всего
	Голубые	Карие	
Темные	31	41	72
Светлые	40	35	75
Всего	71	76	147

Можно ли на основании этих данных сделать вывод о том, что цвет глаз связан с цветом волос?

18.16 (предвзятость наблюдателя). Перед датчиком, состоящим из круглого диска, разделенного на 10 одинаковых секторов, занумерованных от 0 до 9, поставили наблюдателя. Диск вращался с большой скоростью. Время от времени перед ним вспыхивала электрическая лампочка на столь короткое время, что диск казался неподвижным. Наблюдатель должен был смотреть на диск и записывать номер того сектора, который в момент вспышки лампочки находился напротив фиксированного указателя.

Прибор предназначался для получения случайных чисел и в самом деле их выдавал, когда в эксперименте участвовал другой наблюдатель. Однако наблюдатель, о котором шла речь выше, снимал показания с заметной предвзятостью.

Частоты появления цифр в 10 000 выполненных им наблюдениях приведены в таблице (в таблице частота цифры — количество ее появлений в 10 000 наблюдениях).

Проверить, свидетельствуют ли эти данные о предвзятости наблюдателя.

Цифра	Частота	Цифра	Частота
0	1083	5	1007
1	865	6	1081
2	1053	7	997
3	884	8	1025
4	1057	9	948
		Всего	10 000

З а м е ч а н и е. Если бы наблюдатель был непредвзятым, то цифры появлялись бы приблизительно с одинаковой частотой. Из таблицы, однако, видно, что он имел пристрастие к четным цифрам и предубеждение против нечетных цифр 1, 3 и 9. Причина такого поведения и предвзятости непонятна и загадочна, поскольку наблюдатель не должен был давать оценку, а должен только записывать то, что видит, или думал, что видит. Объяснение, по-видимому, состоит в том, что наблюдатель отдавал значительное предпочтение некоторым цифрам, при этом фиксировал не те из них, которые в момент вспышки лампочки в самом деле видел напротив указателя. Здесь мы имеем дело с одной из чрезвычайно сильных форм психологического предубеждения.

18.17. Рассматривается стохастический эксперимент, состоящий в подбрасывании четырех монет и регистрации количества выпавших гербов. Предложите математическую модель этого стохастического эксперимента. Проверьте ее адекватность эксперименту. Для этого проведите эксперимент достаточное число раз и воспользуйтесь критерием χ^2.

Результаты подбрасываний четырех монет удобно представить в виде таблицы:

i	0	1	2	3	4
n_i					

,

где i — количество гербов, выпавших на четырех монетах; n_i — количество экспериментов, в которых выпало i гербов.

З а м е ч а н и е. О выборе модели стохастического эксперимента и проверке ее адекватности эксперименту см. задачу 18.1.

18.18 (перестройка хромосом в клетке). Рентгеновское облучение вызывает в органических клетках определенные процессы, которые будем называть перестройкой хромосом. Число перестроек хромосом в клетке согласно теории должно подчиняться распределению Пуассона. В эксперименте подсчитывали количество перестроек хромосом под воздействием рентгеновских лучей. Результаты эксперимента оказались такими:

i	0	1	2	3	4 и более	Всего
n_i	434	195	44	9	0	682

.

Здесь i — количество перестроек хромосом в клетке; n_i — количество клеток, в которых наблюдалось i перестроек хромосом;

Согласуется ли с приведенными данными гипотеза о пуассоновском распределении числа перестроек?

18.19 (глухонемота и пол). При переписи населения Англии и Уэльса в 1901 г. было зарегистрировано (с точностью до тысяч) 15 729 000 мужчин и 16 799 000 женщин, из них 3497 мужчин и 3072 женщин глухонемые от рождения.

Проверить гипотезу о том, что глухонемота не связана с полом.

18.20 (случайно и произвольно). Случайно не означает произвольно: случайность подчиняется своим строгим законам. Например, на первый взгляд кажется, что предложить случайную последовательность цифр просто. Однако на самом деле это могут сделать немногие люди. Последовательность случайных цифр должна удовлетворять ряду требований случайности. В частности, от такой последовательности естественно потребовать, чтобы появление цифр $0, 1, \ldots, 9$ было равновероятным.

Проверьте свои способности, а именно: выпишите случайную (с вашей точки зрения) последовательность: 1) из 150 “четырехзначных” чисел (нуль может занимать первое место слева, как и любая другая цифра); 2) из 600 цифр. Проверьте с помощью критерия χ^2, действительно ли в предложенных вами последовательностях цифры $0, 1, \ldots, 9$ встречаются с вероятностью $1/10$.

Сравните результаты этих экспериментов.

П р и м е ч а н и е. Выписывая последовательность, не просматривайте и не используйте каким либо иным способом уже выписанную часть последовательности: каждое следующее число (каждую следующую цифру) выписывайте так, как будто вы его (ее) пишете впервые, как будто до этого ничего не выписывалось.

З а м е ч а н и е. Встречаются люди, у которых психологические процессы настолько хорошо сбалансированы, что они могут получать случайные выборки. Обычно такие лица считают себя чрезвычайно одаренными.

18.21. Стохастический эксперимент состоит в последовательном подбрасывании монеты три раза и регистрации результатов следующим образом: выпадение герба (Г) обозначается единицей, а решетки (Р) — нулем. Так что, выпадение, например, ГРР регистрируется как 100. Рассмотрим эти последовательности из нулей и единиц как запись чисел в двоичной системе исчисления, тогда 100 — это запись в двоичной системе исчисления четверки. Наибольшее число, которое можно получить таким образом, равно семи — его запись в двоичной системе 111.

Результаты эксперимента в десятичной системе исчисления удобно представить в виде таблицы:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i								

,

где n_i — количество экспериментов, в которых было зарегистрировано число i.

Можно ли считать появление цифр $0, 1, 2, \ldots, 7$ в описанном эксперименте равновероятным?

Дать ответ в терминах проверки статистических гипотез. Для этого предложить математическую модель стохастического эксперимента, провести его достаточное число раз и, воспользовавшись критерием χ^2, проверить адекватность модели эксперименту.

18.22 (умственные способности и качество одежды). В таблице приведены данные (полученные Гилби) о 1725 учениках, классифицированных в соответствии с: 1) качеством их одежды; 2) умственными способностями. При этом для характеристики умственных способностей использована следующая градация: A — умственно отсталый; B — медлительный и недостаточно развитый; C — недостаточно развитый; D — медлительный, но умный; E — достаточно умный; F — явно способный; G — очень способный.

Умственные способности	Качество одежды				Всего
	Очень хорошее	Хорошее	Сносное	Очень плохое	
A и B	33	41	39	17	130
C	48	100	58	13	219
D	113	202	70	22	407
E	209	255	61	10	535
F	194	138	33	10	375
G	39	15	4	1	59
Всего	636	751	265	73	1725

Можно ли на основании этих данных сделать вывод, что качество одежды учеников и их умственные способности — независимые признаки?

18.23 (бактерии в чашке Петри). В чашке Петри наблюдаются колонии бактерий. Под микроскопом их видно как темные пятнышки. Чашка Петри (ее дно) разделена на маленькие квадраты, в каждом из которых подсчитывается количество колоний (пятнышек). Результаты наблюдений приведены в таблице:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
n_k	5	19	26	26	21	13	8	0

,

где k — количество колоний в квадрате; n_k — количество квадратов с k колониями.

Проверить гипотезу о пуассоновском распределении количества колоний на квадрат.

18.24. В таблице приведены вероятности появления в тексте букв русского алфавита (включая пробел, он обозначен черточкой).

Вообще говоря, вероятности появления букв в тексте зависят от его характера, особенно это заметно в стихах. В качестве примера можно назвать стихотворение К. Д. Бальмонта "Камыши":

Полночной порою в болотной глуши

Чуть слышно, бесшумно шуршат камыши ...

Все построено на обыгрывании шипящих звуков "ч" и "ш", поэтому частота их появления заметно выше приведенных в таблице.

—	0,175	и	0,062	р	0,040	м	0,026
о	0,090	т	0,053	в	0,038	д	0,025
е,ё	0,072	н	0,053	л	0,035	п	0,023
а	0,062	с	0,045	к	0,028	у	0,021
я	0,018	б	0,014	х	0,009	ц	0,004
ы	0,016	г	0,013	ж	0,007	щ	0,003
з	0,016	ч	0,012	ю	0,006	э	0,003
ь,ъ	0,014	й	0,010	ш	0,006	ф	0,002

Рассмотрите отрывок из поэмы А. С. Пушкина "Руслан и Людмила" от "У лукоморья дуб зеленый ..." до "... сказку эту теперь поведаю я свету".

Проверьте, согласуются ли в этом отрывке частоты появления букв с вероятностями, приведенными в таблице.

18.25. Стохастический эксперимент состоит в подсчете числа появлений пары (1;1) на 100 пар, извлеченных из таблицы случайных чисел, например из табл. 22.10.1.

Предложить математическую модель стохастического эксперимента. Проверить ее адекватность эксперименту. Для этого провести эксперимент достаточное число раз и воспользоваться критерием χ^2.

Данные удобно представить в следующем виде:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
n_i											

,

где i — число появлений пары $(1; 1)$ на 100 пар, извлеченных из таблицы случайных чисел; n_i — количество тех экспериментов, в которых пара (1;1) встречается i раз.

Замечание. О выборе модели стохастического эксперимента и проверке ее адекватности эксперименту см. задачу 18.1.

18.26 (селекция гороха Г. Менделем). В экспериментах по селекции гороха Г. Мендель наблюдал частоту появления различных видов семян (в этой задаче частота — количество семян определенного вида), полученных в результате скрещивания растений с круглыми желтыми и морщинистыми зелеными семенами. Эти данные и значения теоретических вероятностей, определенные согласно теории наследственности Менделя, приведены в таблице.

Вид семян	Частота	Вероятность
Круглые желтые	315	$9/16$
Морщинистые желтые	101	$3/16$
Круглые зеленые	108	$3/16$
Морщинистые зеленые	32	$1/16$
Всего	556	1

Согласуются ли вероятности, полученные согласно теории Менделя, с приведенными экспериментальными данными?

18.27 (смышленость и качество питания). В социальном обозрении (Пирсон и Моул, 1925) 618 мальчиков были классифицированы согласно уровню их смышлености и качеству питания.

Результаты обследований приведены в таблице. При этом использованы обозначения: A — очень способный, B — способный, C — смышленый, D — недостаточно смышленый, E — медлительный, F — очень медлительный.

Качество питания	Уровень смышлености						Всего
	A	B	C	D	E	F	
Хорошее	9	27	60	63	24	5	188
Посредственное	5	41	126	120	36	6	334
Плохое	5	12	38	32	8	1	96
Всего	19	80	224	215	68	12	618

Существует ли связь между качеством питания детей и их смышленостью?

18.28 (автомобильные номера). Фиксируются числовые части номеров автомобилей, проезжающих мимо наблюдателя. Относительно появления цифр выдвигается вполне естественная гипотеза: цифры в автомобильных номерах встречаются одинаково часто (вероятность появления цифр в автомобильных номерах одинакова).

С целью проверки выдвинутой гипотезы, зарегистрируйте числовую часть номеров 40 — 50 автомобилей, проезжающих мимо вас (почему этого будет достаточно?) и воспользуйтесь критерием χ^2. Данные удобно представить в следующем виде:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i										

,

где n_i — количество появлений цифры i в числовых частях автомобильных номеров.

18.29. Во время Второй мировой войны на Лондон упало 537 самолетов-снарядов. Всю территорию Лондона разбили на 576 участков площадью 0,25 км^2. Ниже приведено количество ν_i участков, на которые упало i снарядов.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8 и более	Всего
ν_i	229	211	93	35	7	0	0	1	0	576

Воспользовавшись критерием χ^2, проверить гипотезу о пуассоновском распределении количества самолетов-снарядов, упавших на участок.

18.30. Одновременно подбрасывают 12 игральных костей и регистрируют значение случайной величины ξ — количества костей, на которых выпало число очков большее 3. Данные 4096 экспериментов приведены в таблице.

i	n_i	i	n_i
0	0	7	847
1	7	8	536
2	60	9	257
3	198	10	71
4	430	11	11
5	731	12	0
6	948	Всего	4096

Здесь i — значение случайной величины ξ; n_i — количество экспериментов, в которых случайная величина ξ приняла значение i, $i = 0, 1, \ldots, 12$.

Проверить гипотезу о биномиальном распределении случайной величины ξ.

18.31 (цвет волос и цвет бровей). В таблице приведено распределение цвета волос и цвета бровей у 46 542 шведских призывников.

Цвет бровей	Цвет волос: Светлые или рыжие	Цвет волос: Темные	Всего
Светлые или рыжие	30 472	3238	33 710
Темные	3364	9468	12 832
Всего	33 836	12 706	46 542

Свидетельствуют ли эти данные о связи между цветом волос и цветом бровей?

18.32. В таблице приведены длины интервалов между последовательными импульсами вдоль нервного волокна (единица измерения 1/50 с), полученные доктором П.Фетом и профессором Б.Кацу (Лондонский университет).

3,0	25,5	5,5	14,5	18,0	7,0	27,5	14,0
2,0	0,5	47,0	36,5	2,5	3,5	5,5	19,0
10,5	24,5	19,0	19,0	0,5	3,0	6,5	3,0
0,5	8,0	2,5	5,0	8,0	3,0	3,0	3,0
5,5	22,0	2,5	4,5	2,0	13,5	25,0	12,5
12,5	4,0	0,5	35,0	2,0	4,0	8,0	19,0
4,0	16,0	19,5	29,0	28,0	37,0	7,5	13,0
12,5	8,5	32,5	30,5	7,5	13,0	1,5	2,5
17,0	3,5	5,0	4,5	1,0	15,0		

Проверить гипотезу о: а) нормальном распределении; б) равномерном распределении длины интервала между импульсами.

18.33. Последовательно дважды подбрасывают пару монет и регистрируют число ξ выпавших гербов на паре монет при первом подбрасывании и η — при втором, т. е. регистрируют значение случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$.

Предложить математическую модель этого стохастического эксперимента. Проверить ее адекватность эксперименту. С этой целью провести эксперимент достаточное число раз и воспользоваться критерием χ^2.

Результаты подбрасываний удобно представить в виде следующей таблицы:

Значения ξ	Значения η			Сумма
	0	1	2	
0	ν_{00}	ν_{01}	ν_{02}	$\nu_{0\cdot}$
1	ν_{10}	ν_{11}	ν_{12}	$\nu_{1\cdot}$
2	ν_{20}	ν_{21}	ν_{22}	$\nu_{2\cdot}$
Сумма	$\nu_{\cdot 0}$	$\nu_{\cdot 1}$	$\nu_{\cdot 2}$	n

.

Здесь ν_{ij} — количество экспериментов, в которых случайная величина $\zeta = (\xi, \eta)$ приняла значение (i, j),

$$\nu_{i\cdot} = \sum_{j=0}^{2} \nu_{ij}, \ \nu_{\cdot j} = \sum_{i=0}^{2} \nu_{ij}, \ i, j = 0, 1, 2, \ n = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \nu_{ij}.$$

З а м е ч а н и е. Относительно выбора модели стохастического эксперимента и проверки ее адекватности эксперименту см. задачу 18.1.

18.34. В таблице приведены данные о 1426 заключенных, классифицированных по отношению к алкогольной зависимости (алкоголик, не алкоголик) и характеру преступлений, за которые их осудили (данные Горинга, цитированные К. Пирсоном). Строки таблицы упорядочены в соответствии с "интеллектуальностью" вида преступления, хотя это упорядочение довольно условное.

Вид преступления	Алкоголики	Не алкоголики	Всего
Поджог	50	43	93
Изнасилование	88	62	150
Насильственные действия	155	110	265
Воровство	379	300	679
Изготовление фальшивых денег	18	14	32
Мошенничество	63	144	207
Всего	753	673	1426

Можно ли на основании этих данных сделать вывод о наличии связи между алкоголизмом и характером преступления?

18.35 (о телепатах). В Гарвардском университете, университете Дюка и других университетах при проверке способностей телепатов "читать" мысли, в частности, ставились эксперименты по чтению цифр $0, 1, \ldots, 9$.

Проведите аналогичный эксперимент. Наудачу задумайте цифру: $0, 1, \ldots, 9$ и зафиксируйте результат. Телепат читает задуманную вами цифру и также фиксирует результат. Эксперимент проводится достаточное количество раз. Если телепат в самом деле обладает способностями читать мысли, то доля правильно прочитанных цифр: нуль читается как нуль, единица — как единица, и т. д., девятка — как девятка, т. е. доля успехов будет большой (успех — правильно прочитанная цифра, неудача — неправильно прочитанная).

По результатам проведенного эксперимента сделать вывод относительно способностей телепата читать мысли на расстоянии.

Указание. Для чистоты эксперимента, задумывая цифры $0, 1, \ldots, 9$, пользуйтесь таблицей случайных чисел.

18.36 (заряд электрона). В таблице приведены 58 значений величины e, найденных Р. Милликеном при определении заряда электрона, который равен $e \cdot 10^{-10}$ ед. СГС.

1	4,740	13	4,769	25	4,778	37	4,788	49	4,795
2	4,747	14	4,771	26	4,779	38	4,788	50	4,797
3	4,749	15	4,771	27	4,779	39	4,789	51	4,799
4	4,758	16	4,772	28	4,779	40	4,789	52	4,799
5	4,761	17	4,772	29	4,781	41	4,790	53	4,801
6	4,764	18	4,772	30	4,781	42	4,790	54	4,805
7	4,764	19	4,774	31	4,782	43	4,790	55	4,806
8	4,764	20	4,775	32	4,783	44	4,791	56	4,808
9	4,765	21	4,775	33	4,783	45	4,791	57	4,809
10	4,767	22	4,776	34	4,785	46	4,791	58	4,810
11	4,768	23	4,777	35	4,785	47	4,792		
12	4,769	24	4,777	36	4,785	48	4,792		

Проверить гипотезу о нормальном распределении результатов измерений величины e при определении заряда электрона.

18.37. Последовательно дважды подбрасывают пару монет и регистрируют число ξ выпавших гербов при первом подбрасывании и максимальное число η гербов выпавших при первом и втором подбрасываниях, т. е. регистрируют значение случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$.

Предложить математическую модель этого стохастического эксперимента. Адекватно ли описывает его предложенная модель? Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

Дать ответ на вопрос об адекватности модели в терминах проверки статистических гипотез. Для этого провести стохастический эксперимент достаточное число раз и воспользоваться критерием χ^2. Данные удобно представить в виде таблицы.

Замечание 1. О выборе математической модели стохастического эксперимента и проверке ее адекватности см. задачу 18.1.

Замечание 2. Распределение функции $g(\zeta)$ случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$, в частности функции

$$g(\zeta) = g(\xi, \eta) = (\xi, \max\{\xi, \eta\}),$$

по распределению ζ можно найти, воспользовавшись соотношением

$$\mathsf{P}\{g(\xi,\eta)=(x,y)\} = \sum_{\{(i,j):g(i,j)=(x,y)\}} \mathsf{P}_\zeta(i,j).$$

Значения ξ	Значения η			Сумма
	0	1	2	
0	ν_{00}	ν_{01}	ν_{02}	$\nu_{0\cdot}$
1	ν_{10}	ν_{11}	ν_{12}	$\nu_{1\cdot}$
2	ν_{20}	ν_{21}	ν_{22}	$\nu_{2\cdot}$
Сумма	$\nu_{\cdot 0}$	$\nu_{\cdot 1}$	$\nu_{\cdot 2}$	n

В таблице ν_{ij} — количество экспериментов, в которых случайная величина $\zeta = (\xi,\eta)$ приняла значение (i,j), $i,j=0,1,2$;

$$\nu_{i\cdot} = \sum_{j=0}^{2}\nu_{ij},\ \nu_{\cdot j} = \sum_{i=0}^{2}\nu_{ij},\ i,j=0,1,2;\ n = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\nu_{ij}.$$

18.38 (дорожно-транспортные происшествия с водителями автобусов). Частотное распределение 166 водителей лондонских автобусов в соответствии с количеством дорожно-транспортных происшествий, случившихся с ними в течение одного года, приведено в таблице:

i	n_i	i	n_i
0	45	6	3
1	36	7	2
2	40	8	1
3	19	9	0
4	12	10 и более	0
5	8	Всего	166

.

Здесь i — число дорожно-транспортных происшествий, n_i — количество водителей, с которыми случилось i дорожно-транспортных происшествий, $i = 0, 1, \ldots$

Можно ли считать, что количество дорожно-транспортных происшествий, случившихся при участии водителя в течение года, подчиняется распределению Пуассона?

18.39 (пирожные и бактериальные колонии). В таблице приведены данные о колониях бактерий, содержащихся в трех видах пирожных (данные А. Абрахамсона).

Можно ли утверждать, что существует зависимость между видами пирожных и размерами бактериальных колоний, содержащихся в них?

Вид пирожных	Размеры колонии			Всего
	Малые	Средние	Большие	
Эклер	92	37	46	175
Наполеон	53	15	19	87
Ореховое	75	19	12	106
Всего	220	71	77	368

Ответ дать в терминах проверки статистических гипотез.

18.40 (момент последнего уравнивания). Симметричную монету подбрасывают четыре раза и регистрируют значение случайной величины — момент, когда в последний раз количество гербов сравняется с количеством решеток (момент последнего уравнивания), этими моментами в эксперименте являются 0; 2; 4.

Относительно момента последнего уравнивания выдвигается гипотеза: распределением момента последнего уравнивания является

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3/8 & 2/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

(дискретное распределение арксинуса порядка 2).

Проверить выдвинутую гипотезу. Для этого получить выборку момента последнего уравнивания (достаточного объема) и воспользоваться критерием χ^2.

Результаты проведения экспериментов удобно представить в таком виде:

i	0	2	4
n_i			

где i — момент последнего уравнивания; n_i — количество наблюдений (экспериментов), в которых момент последнего уравнивания оказался равным i.

18.41 (показания механических часов). Механические часы, выставленные в витринах часовых магазинов, показывают случайное время. Выдвигается естественная гипотеза: показания часов распределены равномерно на интервале [0;12). Результаты 1000 наблюдений приведены в таблице (интервал [0;12) разбит на 12 равных частей: $[i, i+1)$, $i = 0, 1, \ldots, 11$).

i	n_i	i	n_i
0	77	6	73
1	81	7	70
2	95	8	77
3	86	9	82
4	98	10	84
5	90	11	87
		Всего	1 000

Здесь i — номер интервала от i-го часа до $(i+1)$-го, $i = 0, 1, \ldots, 11$; n_i — количество часов, показания которых принадлежат i-му интервалу.

Согласуется ли выдвинутая гипотеза с этими данными?

18.42 (смышленость и сложение). В таблице приведены данные о степени смышлености учеников с атлетическим сложением и с неатлетическим.

Сложение ученика	Степень смышлености		Всего
	Высокая	Низкая	
Атлетическое	581	567	1 148
Неатлетическое	209	351	560
Всего	790	918	1 708

Что можно сказать относительно связи между смышленостью учеников и их сложением?

Ответ дать в терминах проверки статистических гипотез.

18.43. Данные о количестве трещин в стержне, обнаруженных при испытании 600 нейлоновых стержней, приведены в таблице:

i	0	1	2	3	4	5	6 и более	Всего
n_i	275	207	81	23	8	6	0	600

,

где i — число трещин в стержне; n_i — количество стержней, в которых обнаружено i трещин.

Проверить гипотезу о пуассоновском распределении количества трещин в стержне.

18.44 (эксперимент К. Пирсона). В результате 24 000 подбрасываний монеты К. Пирсон зарегистрировал 12 012 случаев появления герба.

Согласуется ли гипотеза о симметричности монеты с этими данными?

18.45. В результате проверки 500 контейнеров со стеклянными изделиями получены такие данные о количестве поврежденных изделий:

i	n_i	i	n_i
0	199	5	3
1	169	6	1
2	87	7	1
3	31	8 и более	0
4	9	Всего	500

,

где i — число поврежденных изделий; n_i — количество контейнеров с i поврежденными изделиями, $i = 0, 1, \ldots$

Можно ли считать, что количество поврежденных изделий, приходящееся на контейнер, подчиняется распределению Пуассона?

18.46. В таблице приведены значения толщины (в микрометрах) пластикового покрытия медной проволоки (в выборку вошли 225 бобин проволоки).

Толщина	Частота	Толщина	Частота
145	1	153	37
146	3	154	25
147	3	155	23
148	7	156	11
149	11	157	9
150	25	158	2
151	33	159	0
152	34	160	1

Можно ли на основании этих данных считать, что толщина покрытия проволоки имеет нормальное распределение?

Замечание. В этой задаче частота — это количество бобин проволоки, для которых была зарегистрирована данная толщина покрытия.

18.47 (возраст молодоженов и уровень их доходов). С целью обнаружить связь между возрастом вступления в первый брак и уровнем доходов молодоженов было проведено обследование, результаты которого (количество семейных пар) приведены в таблице.

Уровень доходов	Возраст молодоженов		
	До 18	18—21	Старше 21
Низкий	45	25	15
Средний	35	60	25
Высокий	10	28	24

Свидетельствуют ли приведенные данные о наличии связи между возрастом вступления в первый брак и уровнем доходов молодоженов?

18.48. В эксперименте наблюдалась неотрицательная непрерывная случайная величина ξ. Для 48 наблюдений получены такие ее значения (упорядоченные и округленные до 0,01):

0,01	0,04	0,17	0,18	0,22	0,25	0,25	0,29
0,42	0,46	0,47	0,56	0,59	0,67	0,70	0,72
0,76	0,78	0,83	0,85	0,87	0,93	1,00	1,01
1,01	1,02	1,03	1,05	1,32	1,34	1,37	1,47
1,50	1,52	1,54	1,58	1,71	1,90	2,10	2,35
2,46	2,46	2,50	3,73	4,07	6,03	6,21	7,02

Проверить гипотезу о том, что эти данные являются реализацией выборки из показательного распределения с параметром $\lambda = 1$ (его функция распределения $F(x) = 1 - e^{-x}$ при $x > 0$).

18.49 (эксперимент Уэлдона). В одном из экспериментов с игральными костями Уэлдон подбросил кости 49 152 раз. При этом в 25 145 случаях выпали числа 4, 5 или 6.

Согласуется ли с этими данными гипотеза о симметричности костей?

18.50. При обследовании масти 1000 пар чистокровных скаковых лошадей-матерей и дочерей: black, brown, bay, chestnut, grey получены результаты, приведенные в таблице:

Масть лошади-дочери	Масть лошади-матери					Всего
	Black	Brown	Bay	Chestnut	Grey	
Black	7	8	11	11	5	42
Brown	7	40	75	20	9	151
Bay	13	95	230	101	42	481
Chestnut	6	23	113	82	17	241
Grey	5	7	18	16	39	85
Всего	38	173	447	230	112	1000

.

Свидетельствуют ли эти данные о связи между мастью лошади-матери и лошади-дочери?

18.51 (острота зрения). В таблице приведены данные об остроте зрения невооруженным глазом 3242 мужчин в возрасте 30—39 лет — служащих Королевских артиллерийских заводов Великобритании (1943 — 1946 гг.).

Степень остроты зрения (правый глаз)	Степень остроты зрения (левый глаз)				Всего
	Высшая	Вторая	Третья	Низшая	
Высшая	821	112	85	35	1053
Вторая	116	494	145	27	782
Третья	72	151	583	87	893
Низшая	43	34	106	331	514
Всего	1052	791	919	480	3242

Можно ли на основании этих данных сделать вывод о том, что острота зрения правого и левого глаз не связаны между собой?

18.52 (гипотеза Д'Аламбера). Стохастический эксперимент состоит в подбрасывании пары симметричных монет. Замечательный французский ученый и математик Д'Аламбер считал, что события A — "обе монеты выпали гербом", B — "обе монеты выпали решеткой", C — "монеты выпали разными сторонами", равновероятны и, следовательно, вероятность каждого из них равна $1/3$. А впрочем, и до Д'Аламбера и после него был известен правильный подход к решению этой задачи: монеты необходимо различать. Для симметричных различимых монет каждому исходу ГГ, РР, ГР, РГ необходимо приписать вероятность $1/4$ (буква Г обозначает появление герба, буква Р — решетки). Тогда

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\text{ГГ}) = 1/4,\ \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(\text{РР}) = 1/4,$$

$$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(\{\text{ГР}, \text{РГ}\}) = \mathsf{P}(\text{ГР}) + \mathsf{P}(\text{РГ}) = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

Но, по-видимому, невозможно логически обосновать, почему не прав Д'Аламбер, считая, что события A, B, C равновероятны. В физике элементарных частиц встречаются ситуации, в которых Д'Аламбер скорее прав, чем неправ.

Рассмотрите две модели стохастического эксперимента, состоящего в подбрасывании двух монет.

Модель 1° (гипотеза Д'Аламбера).

$$\Omega^* = \{A, B, C\},\ \mathsf{P}(A) = \frac{1}{3},\ \mathsf{P}(B) = \frac{1}{3},\ \mathsf{P}(C) = \frac{1}{3}$$

(события A, B, C определены выше).

Модель 2°.

$$\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\},$$

$$\mathsf{P}(\text{ГГ}) = \frac{1}{4},\ \mathsf{P}(\text{ГР}) = \frac{1}{4},\ \mathsf{P}(\text{РГ}) = \frac{1}{4},\ \mathsf{P}(\text{РР}) = \frac{1}{4}.$$

С целью проверки адекватности описания этими моделями стохастического эксперимента, проведите его достаточное число раз и проверьте:

1. Адекватно ли описывается стохастический эксперимент моделью 1° (согласуется ли гипотеза Д'Аламбера с результатами эксперимента)?

2. Адекватно ли описывается стохастический эксперимент моделью 2°?

Заметим, что, вообще говоря, для описания одного и того же стохастического эксперимента можно предложить не одну модель, которая адекватно его описывает, но из предложенных выше моделей одна заведомо не будет адекватно описывать эксперимент, поскольку вероятности, например, события “монеты легли разными сторонами”, вычисленные в разных вероятностных пространствах, различны.

Для проверки адекватности модели 1° будем фиксировать число подбрасываний, в которых обе монеты легли гербом; обе — решеткой; монеты легли разными сторонами.

Для проверки адекватности модели 2° будем регистрировать число подбрасываний, в которых обе монеты легли гербом; обе — решеткой; первая монета легла гербом, а вторая — решеткой; первая монета легла решеткой, а вторая — гербом.

Результаты экспериментов удобно записывать в виде приведенных далее таблиц:

A	B	C
N_A	N_B	N_C

,

ГГ	РР	ГР	РГ
$N_{\text{гг}}$	$N_{\text{рр}}$	$N_{\text{гр}}$	$N_{\text{рг}}$

(первая таблица для проверки адекватности модели 1°, вторая — модели 2°), где, например, $N_{\text{гр}}$ — количество подбрасываний из N проведенных, в которых на первой монете выпал герб, на второй — решетка.

18.53 (эксперимент Ж. Бюффона). В результате $n = 4\,040$ подбрасываний монеты Ж. Бюффон зарегистрировал $\nu_1 = 2\,048$ случаев появления герба и $\nu_0 = 1\,992$ случаев появления решетки.

Согласуется ли с этими данными гипотеза: вероятность выпадения герба равна $1/2$?

18.54 (время ожидания). Рассматривается время ожидания четного числа в последовательности целых неотрицательных случайных чисел, меньших 100. Другими словами, рассматривается случайная величина, равная количеству нечетных чисел между двумя последовательными (соседними) четными числами, меньшими 100.

Предложить математическую модель (распределение) случайной величины — времени ожидания четного числа. Проверить адекватность модели стохастическому эксперименту. Воспользовавшись таблицей случайных чисел (табл. 22.10.1), получить выборку времени ожидания четного числа (достаточного объема) и проверить, согласуется ли предложенная модель с результатом эксперимента — полученной выборкой.

Результаты наблюдений удобно представить в виде:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
n_i											

,

где i — время ожидания четного числа; n_i — число наблюдений, в которых время ожидания равно i.

Замечание. О выборе модели стохастического эксперимента и проверке ее адекватности эксперименту см. задачу 18.1.

18.55 (катастрофы на угольных шахтах). В таблице приведены интервалы (в днях, читать по строкам) между катастрофами на угольных шахтах Великобритании с 1875 по 1951 г. (данные В. Мегью, Е. Пирсона и А. Винна). Maguire B. A., Pearson E. S., Wynn A. H. A. The time intervals between industrial accidents // Biometrika. 1952. Vol. 39. P. 168 – 180.

Проверить гипотезу о показательном распределении интервалов между катастрофами.

378	36	15	31	215	11	137	4
15	72	96	124	50	120	203	176
55	93	59	315	59	61	1	13
189	345	20	81	286	114	108	188
233	28	22	61	78	99	326	275
54	217	113	32	23	151	361	312
354	58	275	78	17	1205	644	467
871	48	123	457	498	49	131	182
255	195	224	566	390	72	228	271
208	517	1613	54	326	1312	348	745
217	120	275	20	66	291	4	369
338	336	19	329	330	312	171	145
75	364	37	19	156	47	129	1630
29	217	7	18	1357			

Примечание. Катастрофой считается ситуация, влекущая за собой гибель 10 и более человек.

18.56 (предвзятость экспериментатора). В таблице приведено количество случаев появления последней цифры в результатах 1000 измерений, выполненных экспериментатором. Сомнительно, чтобы существовали объективные факторы, обуславливающие более частое появление одних цифр по сравнению с другими; поэтому вполне естественно предположить, что отклонение от одинаковой вероятности появления цифр свидетельствует о предвзятости экспериментатора.

Свидетельствуют ли приведенные данные о предвзятости экспериментатора?

k	n_k	k	n_k
0	158	5	71
1	97	6	90
2	125	7	56
3	73	8	125
4	76	9	129
		Всего	1 000

В таблице k — последняя цифра в результатах измерений, n_k — количество результатов измерений, в которых последней была цифра k, $k = 0, 1, \ldots, 9$.

Примечание. О предвзятости при измерениях см. замечание к задаче 18.16.

18.57 (задача Льюиса Кэррола II). Стохастический эксперимент из известной задачи Льюиса Кэррола (см. пример 4.1.2) состоит в последовательном извлечении из урны двух шаров. Можно предложить по меньшей мере две модели (два вероятностных пространства) этого стохастического эксперимента (как и в примере 4.1.2, белый шар обозначим через W, черный — через B, белый шар, который положили в урну, пометим звездочкой и обозначим через W^*).

Модель 1°:

$$\Omega = \{WW, WB, BW\},$$

$$\mathsf{P}(WW) = \frac{1}{3},\ \mathsf{P}(WB) = \frac{1}{3},\ \mathsf{P}(BW) = \frac{1}{3}.$$

Модель 2°:

$$\Omega = \{WW^*, W^*W, W^*B, BW^*\},$$

$$\mathsf{P}(WW^*) = \frac{1}{4},\ \mathsf{P}(W^*W) = \frac{1}{4},\ \mathsf{P}(W^*B) = \frac{1}{4},\ \mathsf{P}(BW^*) = \frac{1}{4}.$$

Правдоподобные рассуждения (см. пример 4.1.2) склоняют нас к мысли, что адекватной моделью стохастического эксперимента является модель 2°. Но так ли это на самом деле?

Проведите стохастический эксперимент достаточное число раз и проверьте:

1. Адекватно ли описывается стохастический эксперимент моделью 1°?

2. Адекватно ли описывается стохастический эксперимент моделью 2°?

Заметим, что хотя для одного и того же эксперимента можно предложить не одну модель, которая адекватно его описывает, но для данного стохастического эксперимента по меньшей мере одна из моделей не будет адекватной эксперименту уже хотя бы потому, что вероятности одного и того же события, вычисленные в различных вероятностных пространствах, разные (см. пример 4.1.2).

Стохастический эксперимент будем проводить следующим образом. Возьмем две урны: вспомогательную и основную. Во вспомогательной находятся два шара: белый и черный. Из вспомогательной урны наудачу выберем один из шаров и переложим в основную, не регистрируя результат. Таким образом, в основной урне находится белый шар (с вероятностью 1/2) или черный. Далее в основную урну кладем белый шар, его при проверке адекватности модели 2 пометим звездочкой. И наконец, из основной урны последовательно извлекаем оба шара, фиксируя результат эксперимента:

$$WW, WB, BW$$

— в случае проверки адекватности модели 1° и

$$WW^*, W^*W, W^*B, BW^*$$

— в случае проверки адекватности модели 2°.

Данные экспериментов удобно записать в виде таблиц:

WW	WB	BW
N_{WW}	N_{WB}	N_{BW}

,

WW^*	W^*W	W^*B	BW^*
N_{WW^*}	N_{W^*W}	N_{W^*B}	N_{BW^*}

(первая таблица — для проверки адекватности модели 1°, вторая — модели 2°), где, например, N_{WW} — количество экспериментов из N проведенных, в которых исходом была пара WW.

18.58. Подбрасывают пару монет и игральную кость, при этом ξ — число выпавших гербов на паре монет, η — число выпавших очков на игральной кости, $\zeta = (\xi, \theta)$ — случайная величина со значениями в $\mathbb{R}^2$, где $\theta = I_{\{2,4,6\}}(\eta)$.

Проверить гипотезу о независимости компонент случайной величины $\zeta = (\xi, \theta)$. С этой целью подбросить монеты и игральную кость достаточное число раз и воспользоваться критерием χ^2.

Результаты наблюдений удобно представить в виде таблицы:

Значения ξ	Значения θ		Сумма
	0	1	
0	ν_{00}	ν_{01}	$\nu_{0\cdot}$
1	ν_{10}	ν_{11}	$\nu_{1\cdot}$
2	ν_{20}	ν_{21}	$\nu_{2\cdot}$
Сумма	$\nu_{\cdot 0}$	$\nu_{\cdot 1}$	n

,

где ν_{ij} — количество подбрасываний, в которых случайная величина $\zeta = (\xi, \theta)$ приняла значение (i, j), $i = 0, 1, 2$; $j = 0, 1$;

$$\nu_{i\cdot} = \sum_{j=0}^{1} \nu_{ij},\ \nu_{\cdot j} = \sum_{i=0}^{2} \nu_{ij},\ i = 0, 1, 2;\ j = 0, 1.$$

З а м е ч а н и е. О выборе модели стохастического эксперимента и проверке ее адекватности см. задачу 18.1.

18.59 (телепатия и карты Зенера). Начиная с двадцатых годов XX столетия в Гарвардском университете, университете Дюка и других университетах финансируются экспериментальные исследования по телепатии (“чтении” мыслей на расстоянии), в которых, в частности, используются так называемые карты Зенера, на которых изображены пять символов: окружность, квадрат, плюс, три волнистые линии, звезда (рис. 18.4.1).

С помощью карт Зенера проверить способности телепата “читать” мысли на расстоянии. С этой целью провести следующий эксперимент. Из колоды карт Зенера вы наудачу выбираете одну и фиксируете результат. Телепат читает выбранную вами карту и также фиксирует результат. Эксперимент проводится достаточное число раз.

Если телепат в самом деле читает мысли, то частота правильно прочитанных символов (окружность читается как окружность, квадрат — как квадрат, и т. д.), т. е. частота успехов будет большой (успех — правильно прочитанный символ, неудача — неправильно прочитанный символ).

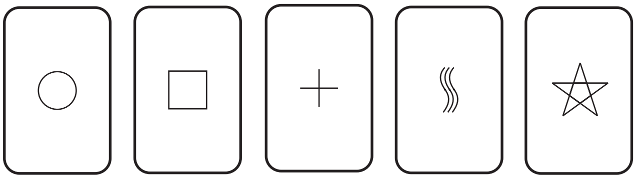


Рис. 18.4.1: Карты Зенера

По результатам проведенного эксперимента сделать вывод относительно способности телепата читать мысли на расстоянии.

Указание 1. Сформулировать задачу проверки способностей телепата читать мысли на расстоянии как задачу проверки статистических гипотез. В качестве нулевой рассмотреть гипотезу: телепат мысли не читает. Воспользоваться критерием χ^2.

Указание 2. Проверить телепатические способности своего товарища, знакомого (попросить прочитать ваши мысли).

18.60. Симметричную монету подбрасывают до первого появления герба и регистрируют количество μ решеток, которые при этом выпали (количество шагов до первого появления герба).

Предложите математическую модель этого стохастического эксперимента. Проверьте ее адекватность эксперименту. Для этого проведите эксперимент достаточное число раз и воспользуйтесь критерием χ^2.

18.61. Подбрасывают пару монет и регистрируют событие: “на обоих монетах выпал герб”.

Предложите математическую модель этого стохастического эксперимента. Проверьте ее адекватность эксперименту. Для этого проведите эксперимент достаточное число раз и воспользуйтесь критерием χ^2.

18.62. Ниже приведены моменты прибытия пациентов на пункт скорой помощи (Оксфорд, данные А. Барроу) в феврале, марте, апреле, мае 1963 г.

4 февраля	11.00	17 марта	11.05	29 апреля	18.45
	17.00	20 марта	16.00	4 мая	16.30
8 февраля	23.15	22 марта	19.00	6 мая	22.00
11 февраля	10.00	24 марта	17.45	7 мая	8.45
16 февраля	12.00		20.20	11 мая	19.15
18 февраля	8.45		21.00	13 мая	15.30
	16.00	28 марта	12.00	14 мая	12.00
20 февраля	10.00		12.00		18.15
	15.30	30 марта	18.00	16 мая	14.00
21 февраля	20.20	2 апреля	22.00	18 мая	13.00
25 февраля	4.00		22.00	19 мая	23.00
	12.00	6 апреля	22.05	20 мая	19.05
28 февраля	2.20	9 апреля	12.45	22 мая	22.00
1 марта	12.00		19.30	23 мая	10.05
3 марта	5.30	10 апреля	18.45		12.30
7 марта	7.30	11 апреля	16.15	24 мая	18.15
	12.00	15 апреля	16.00	25 мая	21.05
9 марта	16.00	16 апреля	20.30	28 мая	21.00
15 марта	16.00	23 апреля	23.40	30 мая	0.30
16 марта	1.30	28 апреля	20.20		

Можно ли на основании этих данных заключить, что момент прибытия пациента распределен равномерно в течение суток? Если нет, предложите свои варианты распределений момента прибытия пациента.

18.63. Проверить гипотезу о показательном распределении длины интервала времени между прибытием пациентов на пункт скорой помощи (см. задачу 18.62).

18.64. На отрезок $[0; 1]$ наудачу бросают две точки. Они делят отрезок на три части. Имеются основания считать, что вероятность p события $A =$ “из трех частей, образовавшихся при делении отрезка $[0;1]$ двумя наудачу брошенными точками, можно построить треугольник" равна $1/4$, другими словами, относительно вероятности p события A выдвигается гипотеза $H_0 : p = 1/4$ (из каких соображений выдвинута эта гипотеза?).

Проверить гипотезу H_0, для чего провести стохастический эксперимент достаточное число раз. Воспользоваться критерием χ^2.

Результаты эксперимента удобно записать в виде таблицы:

A	B
N_A	N_B

,

где N_A — число экспериментов, в которых произошло событие A, N_B — число экспериментов, в которых произошло событие $B = \overline{A}$.

Замечание. Реализовать (смоделировать) бросание точки на отрезок $[0;1]$ можно, например, с помощью таблицы случайных чисел.

18.65. На отрезок $[0;1]$ наудачу бросают пару точек. Имеются основания считать, что вероятность p события A="расстояние между точками не превосходит половины длины отрезка $[0;1]$" равна $3/4$.

Другими словами, относительно вероятности p события A выдвигается гипотеза $H_0 : p = 3/4$.

Проверить гипотезу H_0, для чего провести стохастический эксперимент достаточное число раз. Воспользоваться критерием χ^2.

Результаты эксперимента удобно записать в виде таблицы:

A	B
N_A	N_B

,

где N_A — число экспериментов, в которых произошло событие A, N_B — число экспериментов, в которых произошло событие $B = \overline{A}$.

Замечание. Реализовать (смоделировать) бросание точки на отрезок $[0;1]$ можно, например, с помощью таблицы случайных чисел.

18.66. Иглу случайной длины (длина равномерно распределена на $[0;1]$) наудачу бросают на отрезок $[0;1]$ и наблюдают случайную величину θ, которая принимает значение 1, если игла накрыла один из концов отрезка $[0;1]$ и 0 в противном случае.

Относительно распределения случайной величины θ выдвигается гипотеза

$$H_0 : \mathsf{P}\{\theta = j\} = 1/2,\ j = 0, 1.$$

Проверить гипотезу H_0, для чего провести стохастический эксперимент достаточное число раз. Воспользоваться критерием χ^2.

Замечание 1. Положение иглы на отрезке $[0;1]$ определяется положением ее середины. Поэтому под бросанием иглы на отрезок $[0;1]$ будем подразумевать бросание наудачу на отрезок $[0;1]$ ее середины.

Замечание 2. Получить реализацию равномерно распределенной на промежутке $[0;1]$ случайной величины можно, например, с помощью таблицы случайных чисел.

18.67. В двух урнах находятся четыре шара — в первой урне два белых, во второй — два черных. Наудачу из каждой урны берем по одному шару и перекладываем из одной в другую, и так 10 раз. Относительно случайной величины ξ — числа белых шаров в первой урне после 10 перекладываний выдвигается гипотеза H_0 : случайная величина ξ имеет распределение

0	1	2
1/6	4/6	1/6

(последнее распределение является эргодическим распределением марковской цепи $\{\xi_n\}$, где ξ_n — число белых шаров в первой урне после n-го перекладывания, см. [15]). Проверить гипотезу H_0. Для этого провести эксперимент (из 10 перекладываний) достаточно большое число раз и воспользоваться критерием χ^2.

Результаты экспериментов удобно записать в виде таблицы

0	1	2
n_0	n_1	n_2

,

где n_i — число экспериментов из n проведенных, в которых случайная величина ξ приняла значение i, $i = 0, 1, 2$.

18.68. Четыре шара, среди которых два белых и два черных, наудачу распределяют по двум урнам — по два в каждую. Относительно случайной величины ξ — числа белых шаров в первой урне — выдвигается гипотеза H_0: случайная величина ξ имеет распределение

0	1	2
1/6	4/6	1/6

.

Проверить гипотезу H_0. Для этого провести эксперимент достаточно большое число раз и воспользоваться критерием χ^2.

Результаты экспериментов удобно записывать в виде таблицы:

0	1	2
n_0	n_1	n_2

,

где n_i — число экспериментов из n проведенных, в которых случайная величина ξ приняла значение i, $i = 0, 1, 2$.

18.69 (задача о разделе ставки II). Вернемся к задаче о разделе ставки (см. задачу 4.28).

Два игрока играют в справедливую игру, например, подбрасывая симметричную монету — если монета легла гербом, партию выиграл первый игрок, если решеткой — второй. Игру выигрывает тот из игроков, кто первым выиграет 6 партий, при этом он получает весь приз. На самом деле игра остановилась, когда первый игрок выиграл 5 партий, а второй — 3. Как справедливо разделить приз?

Задачу пытались решить (безуспешно) многие знаменитые математики. Решение в 1654 г. независимо друг от друга получили Паскаль и Ферма — приз между игроками следует разделить пропорционально вероятностям 7/8 и 1/8 выигрыша шести партий соответственно первым и вторым игроками, если бы игра при счете 5 к 3 не была прервана.

Ну а как на самом деле?

Согласуется ли решение Паскаля и Ферма с опытом? Ведь решения, предлагавшиеся ранее видными математиками, выглядели не менее правдоподобно и тем не менее были ошибочными, в частности, Никколо Тарталья считал, что приз необходимо разделить в отношении 2 к 1. Поставленный вопрос это фактически вопрос об адекватности модели эксперименту.

В связи с такой постановкой вопроса о согласии с опытом решения задачи о разделе ставки проведем эксперимент.

Будем подбрасывать симметричную монету. При этом выпадение герба интерпретируем как выигрыш партии первым игроком, решетки — вторым. Монету будем подбрасывать пока не появится герб или три раза решетка (разумеется, кряду). На этом игра завершается — выигрышем первого игрока, если выпал герб и второго, если выпали три решетки.

Проведем эксперимент достаточно много раз. Результат удобно записать в виде таблицы

G_1	G_2
n_1	n_2

,

где n_1— число экспериментов из n проведенных, закончившихся выигрышем игры первым игроком (игроком G_1), n_2— вторым (игроком G_2).

Далее, воспользовавшись критерием χ^2, проверить, согласуется ли гипотеза H_0 :

G_1	G_2
7/8	1/8

о распределении вероятностей выигрыша игры первым и вторым игроком с результатами опыта:

G_1	G_2
n_1	n_2

.

18.70 (эксперимент В. Феллера). В. Феллер подбросил монету $n = 10\,000$ раз. При этом монета легла гербом $\nu_1 = 4\,979$ раз и решеткой $\nu_0 = 5\,021$ раз.

Можно ли считать, что монета, которую подбрасывал Феллер, была симметричной?

18.71. Из множества чисел $\{0, 1, \ldots, 99\}$ наудачу без возвращения последовательно выбирают три числа ξ_1, ξ_2, ξ_3. Имеются основания считать, что вероятность p события $A=$ "числа ξ_1, ξ_2, ξ_3 появляются в порядке возрастания" равна $1/6$.

Другими словами, относительно вероятности p события A выдвигается гипотеза $H_0 : p = 1/6$ (см. также задачу 3.38, с. 40).

Проверить гипотезу H_0, для чего провести стохастический эксперимент, состоящий в последовательном выборе без возвращения трех чисел, достаточное число раз. Воспользоваться критерием χ^2.

Результаты эксперимента удобно записать в виде таблицы

A	B
N_A	N_B

,

где N_A — число экспериментов, в которых произошло событие A, N_B — число экспериментов, в которых произошло событие $B = \overline{A}$.

Замечание. Последовательной выбор наудачу без возвращения чисел из множества $\{0, 1, \ldots, 99\}$ можно реализовать, например, с помощью таблицы случайных чисел, при этом "выбор без возвращения" обозначает, что выбранные ранее из таблицы числа далее в выборе не участвуют — их нет (они пропускаются).

18.72 (призовая игра II). Вы участвуете в призовой игре (приз 500 EUR). Перед вами три одинаковые урны (коробки), в одной из них находится банкнота достоинством 500 EUR, две другие урны пустые. Вы выбираете урну. Прежде чем проверить содержание выбранной вами урны ведущий (в игре участвуют двое) выбирает одну из оставшихся урн и демонстрирует вам ее содержание — банкноты в урне нет. После этого ведущий предлагает вам два варианта действий: проверить содержание первоначально выбранной урны, или оставшейся. Если в урне находится банкнота — она ваша.

Относительно вероятности p вашего выигрыша, если вы выбираете оставшуюся урну (меняете первоначальный выбор), выдвигается гипотеза $H_0\colon p = 2/3$.

Проверьте гипотезу H_0, для чего проведите эксперимент, выбирая оставшуюся урну, достаточно большое число раз. Воспользуйтесь критерием χ^2.

Результаты экспериментов удобно записать в виде таблицы

A	B
N_A	N_B

,

где N_A — число экспериментов, в которых выигрыш был за вами, N_B — число экспериментов, в которых выбранная вами урна оказалась пустой.

18.73 ((задача Льюиса Кэррола III). Вернемся к задаче Льюиса Кэррола (см. пример 4.1.2), состоящей в определении вероятности p повторного извлечения белого шара при последовательном извлечении двух шаров, если первый выбранный шар оказался белым.

Известны различные так или иначе аргументированные решения этой задачи, дающие различные вероятности повторного извлечения белого шара, если первый извлеченный шар оказался белым. Чаще всего называют числа $2/3$ и $1/2$ (см. пример 4.1.2). При этом авторы решений, как правило, глубоко убеждены в правильности полученных результатов. По сути, решения являются всего лишь аргументацией в пользу справедливости той или иной гипотезы о вероятности p повторного извлечения белого шара, если первый извлеченный шар оказался белым. Ну а как на самом деле? Какая из гипотез: $p = 1/2$ или $p = 2/3$ верна? А, может быть, как одна, так и другая гипотеза противоречит опыту?

В связи с такой постановкой вопроса о согласии с опытом предложенных решений задачи о вероятности повторного извлечения белого шара, если первый извлеченный шар оказался белым, проведем эксперимент.

Возьмем две урны: вспомогательную и основную. Во вспомогательной находятся два шара: белый и черный. Из вспомогательной урны наудачу выберем один из шаров и переложим в основную, не регистрируя результат. Таким образом, в основной урне находится белый шар (с вероятностью $1/2$) или черный. Далее в основную урну кладем белый шар. И наконец, из основной урны наудачу извлекаем шар, если он оказался черным — эксперимент закончен, если шар оказался белым, извлекаем следующий шар.

Результаты экспериментов удобно записать в виде таблицы

B	WW	WB
N_B	N_{WW}	N_{WB}

,

где N_B — число экспериментов, в которых первый выбранный шар черный, N_{WW} — число экспериментов, в которых первый шар белый и второй шар белый, N_{WB} — число экспериментов, в которых первый шар белый, второй шар черный.

Воспользовавшись критерием χ^2, проверить: 1) гипотезу $H_0 : p = 1/2$; 2) гипотезу $H_0 : p = 2/3$.

18.74. Наудачу берут три отрезка, длина каждого из которых не превосходит 1 (длина отрезка — случайная величина, равномерно распределенная на промежутке $[0; 1]$). Имеются основания считать, что вероятность p события A = "из трех наудачу выбранных отрезков, длина которых не превосходит 1, можно построить треугольник" равна 1/2, другими словами, относительно вероятности p события A выдвигается гипотеза $H_0 : p = 1/2$ (см. также задачу 8.18).

Проверить гипотезу H_0, для чего провести стохастический эксперимент достаточное число раз. Воспользоваться критерием χ^2.

Результаты эксперимента удобно записать в виде таблицы

A	B
N_A	N_B

,

где N_A — число экспериментов, в которых произошло событие A, N_B — число экспериментов, в которых произошло событие $B = \overline{A}$.

Замечание. Реализовать (смоделировать) выбор отрезка, длина которого равномерно распределена на промежутке $[0; 1]$ можно, например, с помощью таблицы случайных чисел.

18.75 (задача Бюффона II). На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, находящимися на расстоянии $2a = 2$ одна от другой, наудачу бросают иглу длиной $2l = 3/2$ (см. с. 117, пример 8.1.3). Имеются основания считать, что вероятность p события $A =$ “игла пересечет одну из прямых” равна $3/(2\pi)$, другими словами, относительно вероятности p события A выдвигается гипотеза $H_0 : p = 3/(2\pi)$.

Проверить гипотезу H_0, для чего провести стохастический эксперимент достаточное число раз. Воспользоваться критерием χ^2.

Результаты эксперимента удобно записать в виде таблицы

A	B
N_A	N_B

,

где N_A — число экспериментов, в которых произошло событие A, N_B — число экспериментов, в которых произошло событие $B = \overline{A}$.

Замечание 1. Реализовать эксперимент, состоящий в бросании иглы на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, можно так.

1° Выбираем наудачу на отрезке длиной 2, перпендикулярном параллельным прямым, и с концами на прямых середину иглы (середина иглы равномерно распределена на отрезке $[0; 2]$). Через x обозначим расстояние от середины иглы до ближайшей прямой (см. с. 117, рис. 8.1.3).

2° Выбираем наудачу угол φ из $[0, \pi]$, образованный иглой с параллельными прямыми (φ равномерно распределен на $[0, \pi]$). Угол φ будем откладывать против часовой стрелки от направления иглы до направления прямой.

3° Вычисляем $l \sin\varphi = (3/4)\sin\varphi$. Игла пересекает прямую тогда и только тогда, когда выполняется неравенство
$$x \le (3/4)\sin\varphi.$$

Замечание 2. Если ξ — равномерно распределенная на $[0; 1]$ случайная величина, то случайная величина $\eta = b\xi$ распределена равномерно на $[0; b]$. Поэтому реализацию равномерно распределенной на $[0; b]$ случайной величины η можно получить так:
$$\eta = b\xi,$$

где ξ — реализация равномерно распределенной на $[0;1]$ случайной величины.

18.76 (задача Банаха II). У вас две коробки спичек — по две спички в каждой. Вы наудачу выбираете коробку, из нее выбираете спичку и возвращаете коробку обратно и так продолжаете до тех пор, пока в выбранной коробке не окажется спичек (выбранная коробка пустая). Тогда вы регистрируете количество спичек в другой коробке.

Предложите математическую модель этого стохастического эксперимента. Проверьте ее адекватность эксперименту. С этой целью проведите эксперимент достаточно большое число раз и воспользуйтесь критерием χ^2. Результаты эксперимента удобно представить в виде таблицы

0	1	2
n_0	n_1	n_2

,

где n_k — число экспериментов из n проведенных, в которых количество спичек, оставшихся в другой коробке равно k, $k = 0, 1, 2$.

Замечание 1. Относительно выбора модели стохастического эксперимента и проверки ее адекватности стохастическому эксперименту см. задачу 18.1.

В качестве гипотетического распределения числа ξ оставшихся спичек, естественно рассмотреть распределение

0	1	2
3/8	3/8	2/8

(см. задачу Банаха, задача 5.23).

Замечание 2. При выборе наудачу коробки спичек удобно пользоваться таблицей случайных чисел.

18.77 (гипергеометрическое и биномиальное распределения). В урне 100 бусин, среди них 50 красные, остальные — белые. Из урны наудачу выбирают три бусины, и подсчитывают число ξ красных среди них. Относительно распределения случайной величины ξ выдвигается гипотеза H_0 :

$$\mathsf{P}_\xi(k) = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ k = 0, 1, 2, 3$$

Проверьте гипотезу H_0. С этой целью проведите эксперимент достаточно большое число раз и воспользуйтесь критерием χ^2. Результаты эксперимента удобно представить в виде таблицы

0	1	2	3
n_0	n_1	n_2	n_3

,

где n_k — число экспериментов из n проведенных, в которых среди 3 бусин k красных, $k = 0, 1, 2, 3$.

О гипергеометрическом и биномиальном распределениях см. с. 68.

18.78 (ошибочное соединение телефонных номеров). В таблице приведены данные о количестве ошибочных соединений телефонных номеров. Всего наблюдалось 267 номеров.

k	n_k	k	n_k	k	n_k
0	0	6	22	12	18
1	1	7	43	13	12
2	0	8	31	14	7
3	5	9	40	15	6
4	11	10	35	16	2
5	14	11	20	Всего	267

Здесь k — количество ошибочных соединений, n_k — число номеров, для которых было зафиксировано ровно k ошибочных соединений, $k = 0, 1, \ldots, 16$.

Проверить гипотезу о пуассоновском распределении количества ошибочных соединений.

Глава 19

Непараметрические критерии

19.1 Критерий Колмогорова

Постановка задачи. Пусть $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \ldots, \xi_n(\omega))$ — реализация выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из неизвестного непрерывного распределения F. Относительно F выдвигается гипотеза H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$ или, что то же, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — выборка из G, где G — полностью определенное непрерывное распределение.

Необходимо проверить гипотезу H_0, т. е. по реализаци выборки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ сделать вывод: отклонять гипотезу H_0 или не отклонять.

Статистика Колмогорова. В главе 18 описан общий подход к построению критериев для проверки гипотезы H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$, основанный на уклонении $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$ эмпирического распределения $\hat{\mathsf{F}}_n$, построенного по выборке $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, от гипотетического G.

А. Н. Колмогоров в качестве уклонения эмпирического распределения $\hat{\mathsf{F}}_n$, построенного по выборке $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, от гипотетического G предложил рассматривать

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sup_x \left| G(x) - \hat{\mathsf{F}}_n(x) \right|.$$

Так введенное уклонение при верной гипотезе H_0, т. е.

когда $\mathsf{F} = \mathsf{G}$, принимает значения

$$D_n = D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{F}) = \sup_x \left| \mathsf{F}(x) - \hat{\mathsf{F}}_n(x) \right|$$

и является малым по сравнению с уклонением $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$, когда распределение G отлично от F. Последнее вполне естественно, поскольку для каждого фиксированного x эмпирическая функция распределения $\hat{F}_n(x)$ является несмещенной и состоятельной оценкой $F(x)$. К тому же распределение уклонения D_n эмпирического распределения $\hat{\mathsf{F}}_n$ от теоретического F, во-первых, не зависит от F (одно и то же для всех непрерывных F) и, во-вторых, при больших n в качестве распределения нормированного уклонения

$$D_n \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}} = \sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right| \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

можно рассматривать распределение Колмогорова, его функция распределения

$$K(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp\{-2k^2\lambda^2\}, \ \lambda > 0.$$

Последнее следует из теоремы Колмогорова:

Т е о р е м а. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — выборка из непрерывного распределения F, $\hat{F}_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, тогда*

$$\lim_n \mathsf{P}\left\{ \sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right| \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}} < \lambda \right\} = K(\lambda), \ \lambda > 0.$$

Так что при верной гипотезе H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$ уклонение

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sup_x \left| G(x) - \hat{F}_n(x) \right| = \sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|$$

малое, в противном случае — большое. Поэтому, проверяя гипотезу H_0, ее естественно отклонять, если $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$

приняло большое значение, и не отклонять в противном случае.

Границы $\varepsilon_{\alpha;n}$, отделяющие большие значения уклонения $D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G})$ от малых, находят по известному распределению уклонения $D_n = D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{F})$. А именно, $\varepsilon_{\alpha;n}$ находится как верхний α-предел (критическое значение) распределения уклонения

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{F}) = \sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right|,$$

т. е. как наименьшее ε, для которого

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_x \left| F(x) - \hat{F}_n(x) \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \alpha.$$

Значения $\varepsilon_{\alpha;n}$ для заданных α (уровня значимости) и n (объема выборки) приведены в табл. 22.7.1. При больших n ($n \geq 100$), в качестве $\varepsilon_{\alpha;n}$ рассматривается $\lambda_\alpha / \sqrt{n}$, т. е.

$$\varepsilon_{\alpha;n} = \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}},$$

где λ_α — верхний α-предел распределения Колмогорова, т. е. λ_α — корень уравнения $K([\lambda_\alpha, +\infty)) = \alpha$.

Критерий Колмогорова. *Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — выборка из непрерывного распределения F. Если гипотезу H_0: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ является выборкой из распределения G отклонять при*

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sup_x \left| G(x) - \hat{F}_n(x) \right| \geq \varepsilon_{\alpha;n}$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью, не превосходящей α, гипотезу H_0 будем отклонять, когда она верна.

З а м е ч а н и е. Критерием Колмогорова можно пользоваться только тогда, когда гипотетическое распределение G непрерывно и полностью определено (не зависит от неизвестных параметров).

П р и м е р 19.1.1. *Воспользовавшись таблицей случайных чисел* (*табл.* 22.10.1), *получить выборку объемом* 10 *из стандартного нормального распределения* (*нормального распределения с параметрами* (0; 1)).

С помощью критерия Колмогорова проверить, действительно ли эта выборка получена из указанного распределения.

Р е ш е н и е. Пусть функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ монотонно возрастающая и непрерывна, тогда случайная величина η, определенная равенством

$$\eta = F(\xi), \tag{19.1.1}$$

распределена равномерно на $[0, 1]$. В самом деле,

$$F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{F(\xi) < x\}.$$

Если $x \leq 0$, то

$$P\{F(\xi) < x\} = 0,$$

если $x > 1$, то

$$P\{F(\xi) < x\} = 1,$$

если $x \in [0, 1)$, то

$$P\{F(\xi) < x\} = P\{\xi < F^{-1}(x)\} = F(F^{-1}(x)) = x.$$

Из равенства (19.1.1), в частности, следует, что случайная величина

$$\xi = F^{-1}(\eta)$$

имеет своей функцией распределения $F(x)$, если η распределена равномерно на $[0, 1]$.

Это утверждение дает возможность по выборке $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ из равномерного на промежутке [0;1] распределения строить выборку $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ из данного распределения F, а именно:

$$\xi_i = F^{-1}(\eta_i),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

— выборка из распределения F. В частности, если в качестве $F(x)$ рассмотреть функцию стандартного нормального распределения

$$N_{0;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\right\} ds,$$

то

$$\xi_i = N_{0;1}^{-1}(\eta_i), \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

будет выборкой из $\mathsf{N}_{0;1}$.

Выборку из равномерного на промежутке [0;1] распределения можно получить, воспользовавшись таблицей случайных чисел (табл. 22.10.1) (см. также задачу 19.4).

Из табл. 22.10.1 выберем 10 чисел (для определенности — четырехзначных). Выбор можно начинать с любого места таблицы (скажем, с верхнего правого угла) и продолжать любым оговоренным наперед способом. Например, двигаясь по диагонали, получим

1009	5420	2689	2529	7080
3407	5718	1656	7048	7835

Числа

0,1009	0,5420	0,2689	0,2529	0,7080
0,3407	0,5718	0,1656	0,7048	0,7835

из промежутка [0;1] можно рассматривать как реализацию выборки $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{10}$ из равномерного на промежутке $[0; 1]$ распределения. По значениям η_i, $i = 1, 2, \ldots,$ $\ldots, 10$, пользуясь тем, что функция $N_{0;1}(x)$ табулирована (табл. 22.1.1), получим реализацию выборки из стандартного нормального распределения как значения

$$\xi_i = N_{0;1}^{-1}(\eta_i) :$$

−1,27	0,11	−0,62	−0,67	0,55
−0,41	0,18	−0,97	0,54	0,78

Последний знак получен методом линейной интерполяции.

Далее, пользуясь критерием Колмогорова, проверим гипотезу H_0: выборка получена из распределения $\mathsf{N}_{0;1}$. Для этого вычислим уклонение

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{G}) = \sup_x \left| G(x) - \hat{F}_n(x) \right|,$$

где $G(x) = N_{0;1}(x)$ — функция нормального распределения с параметрами (0;1), $\hat{F}_n(x)$ — реализация эмпирической функции распределения, построенная по выборке, и сравним его с критическим значением $\varepsilon_{\alpha;n}$. Значение

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{N}_{0;1}) = \sup_x \left| N_{0;1}(x) - \hat{F}_n(x) \right| = 0{,}21$$

(методика вычисления $\sup\limits_x \left| G(x) - \hat{F}_n(x) \right|$ описана в гл. 15), критическое значение $\varepsilon_{0,05;10} = 0{,}4087$ найдено по табл. 22.7.1,

$$D(\hat{\mathsf{F}}_n, \mathsf{N}_{0;1}) = 0{,}21 < 0{,}4087 = \varepsilon_{0,05;10} = \varepsilon_{\alpha;n},$$

поэтому согласно критерию Колмогорова гипотеза: выборка получена из нормального распределения с параметрами (0;1) не отклоняется.

Для выборки объемом 10 из нормального распределения с параметрами (0;1) максимальное уклонение между эмпирической функцией распределения $\hat{F}_{10}(x)$ и функцией распределения $N_{0;1}(x)$, равное 0,21, не является большим, такое уклонение естественно и допустимо.

19.2 Критерий знаков

Постановка задачи (наблюдения повторные). Имеем n пар случайных величин

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n),$$

относительно которых известно, что разности $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$ представимы в виде

$$\zeta_j = \theta + e_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

где θ — константа, а случайные величины $e_1, e_2, \ldots, e_n$:
1° независимы (сами η_j и ξ_j могут быть зависимыми);
2° симметрично распределены относительно нуля (распределения e_j и $-e_j$ совпадают) и абсолютно непрерывны (далее это ограничение будет снято).

Относительно неизвестного параметра θ выдвигается гипотеза

$$H_0\colon \theta = 0.$$

Альтернатива к гипотезе H_0: $\theta = 0$ может быть как односторонней — если $\theta \neq 0$, то $\theta > 0$ (она может быть и такой: $\theta < 0$), так и двусторонней — если $\theta \neq 0$, то $\theta > 0$ или $\theta < 0$. В каждой задаче альтернатива своя. Необходимо построить критерий для проверки гипотезы H_0.

Замечание. Пары $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ можно интерпретировать как $2n$ наблюдений — по два наблюдения на каждые n объектов, пациентов, приборов, и т. д., при этом ξ_j называют наблюдениями "до обработки", а η_j — наблюдениями "после обработки", $j = 1, 2, \ldots, n$. Параметр θ, называют эффектом обработки. Отклонение гипотезы H_0 свидетельствует в пользу наличия эффекта обработки, неотклонение — в пользу отсутствия.

Статистика для построения критерия. Верна гипотеза H_0: $\theta = 0$ или нет, случайные величины e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, независимы, симметрично распределены относительно нуля и абсолютно непрерывно. Отсюда следует, что случайная величина, равная количеству e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, которые приняли положительные значения, имеет биномиальное распределение с параметрами $(n; 1/2)$ и поэтому количество положительных величин среди $e_j, j = 1, 2, \ldots, n$, близко к половине имеющихся, т. е. к $n/2$.

Обозначим через μ количество положительных разностей среди

$$\zeta_j = \eta_j - \xi_j = \theta + e_j,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{19.2.1}$$

Если гипотеза H_0 верна, т. е. $\theta = 0$, то количество положительных разностей среди (19.2.1) совпадает с количеством случайных величин e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, принявших положительные значения, а следовательно, мало отличается от $n/2$ — половины имеющихся разностей. Если же гипотеза H_0: $\theta = 0$ неверна, то количество положительных разностей среди $\zeta_j, j = 1, 2, \ldots, n$, существенно отличается от $n/2$.

Таким образом, если гипотеза H_0 верна, количество μ положительных разностей среди ζ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ (обозначим его через μ_0) мало отличается от $n/2$ по сравнению с отклонением μ от $n/2$, когда гипотеза H_0 неверна. Поэтому, проверяя гипотезу H_0: $\theta = 0$, ее естественно отклонять, если количество положительных разностей μ существенно отличается от $n/2$, и не отклонять в противном случае.

Границы $m_{\alpha;n}$, отделяющие большие значения уклонений μ от $n/2$ от малых, строятся по известному распределению количества μ_0 положительных разностей

$$\zeta_j = \eta_j - \xi_j = e_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

которое минимально отклоняется от $n/2$. А именно, $m_{\alpha;n}$ находится как минимальное число m, для которого

$$\mathsf{P}\{\mu_0 > m\} \leq \alpha, \tag{19.2.2}$$

где μ_0 — биномиально распределенная случайная величина с параметрами $(n; 1/2)$.

Значения $m_{\alpha;n}$ по данному уровню значимости α и объему выборки n табулированы (см. табл. 22.9.1).

Критерий знаков. *Пусть* $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ *— n пар случайных величин, для которых разности* $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$ *представимы в виде*

$$\zeta_j = \theta + e_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

где случайные величины e_j: 1° независимы, 2° симметрично распределены относительно нуля и абсолютно непрерывны; число $m_{\alpha;n}$ определяется из (19.2.2).

Если гипотезу H_0: $\theta = 0$ отклонять при

$$\mu > m_{\alpha;n}$$

и не отклонять при

$$\mu \le m_{\alpha;n},$$

то с вероятностью, не превосходящей α, гипотезу H_0 будем отклонять, когда она верна (односторонний критерий знаков, альтернатива: $\theta > 0$).

Если гипотезу H_0 отклонять при

$$\mu \notin [n - m_{\alpha;n};\, m_{\alpha;n}]$$

и не отклонять при

$$\mu \in [n - m_{\alpha;n};\, m_{\alpha;n}],$$

то с вероятностью, не превосходящей 2α, гипотезу H_0 будем отклонять, когда она верна (двусторонний критерий знаков, альтернатива: $\theta > 0$ или $\theta < 0$).

Ошибки первого и второго рода. При верной гипотезе H_0: $\theta = 0$ случайная величина μ — количество положительных разностей $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, имеет биномиальное распределение с параметрами $(n; 1/2)$. Поэтому μ, "почти всегда" мало уклоняясь от $n/2$, может (хотя и изредка) принимать значения, которые существенно отличаются от $n/2$. При этом гипотезу H_0: $\theta = 0$ отклоняем и тем самым допускаем ошибку первого рода (ее вероятность не превышает выбранного уровня значимости).

Если гипотеза H_0 неверна, например, $\theta > 0$, то, несмотря на то, что случайная величина μ (количество положительных разностей) почти всегда принимает большие значения (существенно большие, чем $n/2$), она может (хотя и изредка) принимать значения, которые мало отличаются от $n/2$. При этом мы гипотезу H_0 не отклоняем и тем самым допускаем ошибку второго рода.

Связи. Если снять требование об абсолютной непрерывности распределений случайных величин η_j и ξ_j, то разности $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, могут принимать нулевые значения с ненулевой вероятностью (говорят, что имеются связи). Можно ли в этом случае пользоваться критерием знаков для проверки гипотезы H_0: $\theta = 0$? Оказывается, что можно, предварительно отбросив равные нулю разности и применяя критерий знаков к оставшимся отличным от нуля разностям (разности, равные нулю, не учитываются, как будто их вообще не было).

Критерий знаков при наличии связей. Пусть $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ — n пар случайных величин, для которых разности $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, представимы в виде

$$\zeta_j = \theta + e_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

где случайные величины e_j: 1° независимы; 2° симметрично распределены относительно нуля.

Обозначим через s количество разностей $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, отличных от нуля, а через μ — количество положительных среди них. Для каждого фиксированного s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ определим число $m_{\alpha;s}$ как минимальное m, для которого

$$\mathsf{P}\{\mu > m\} \leq \alpha,$$

где μ — биномиально распределенная случайная величина с параметрами $(s; 1/2)$.

Если гипотезу H_0 отклонять при

$$\mu > m_{\alpha;s}$$

и не отклонять при

$$\mu \leq m_{\alpha;s},$$

то с вероятностью, не превышающей α, гипотезу H_0 будем отклонять, когда она верна (альтернатива односторонняя: $\theta > 0$).

Если гипотезу H_0 отклонять при

$$\mu \notin [s - m_{\alpha;s},\, m_{\alpha;s}]$$

и не отклонять при

$$\mu \in [s - m_{\alpha;s},\, m_{\alpha;s}],$$

то с вероятностью, не превышающей 2α, гипотезу H_0 будем отклонять, когда она верна (альтернатива двусторонняя: $\theta > 0$ или $\theta < 0$).

Двухвыборочный критерий знаков. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — независимые выборки соответственно из распределений F и G. Распределения F и G связаны соотношением $G(x) = F(x - \theta)$. Параметр θ (эффект обработки) неизвестен. Необходимо выяснить, отлично значение θ от нуля или нет. Будем решать поставленную задачу, проверяя гипотезу H_0: $\theta = 0$ (нулевую гипотезу можно сформулировать и так H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$). Альтернатива к гипотезе H_0: $\theta = 0$ может быть как односторонней, так и двусторонней.

Гипотезу H_0: $\theta = 0$ можно проверять, пользуясь критерием знаков в той же формулировке, что и для парных наблюдений: подсчитать число μ положительных разностей $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$ среди $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ и сравнивать его с $m_{\alpha;s}$.

Пример 19.2.1 (смещенность результатов измерений у контролеров). *Один из методов количественного анализа степени износа шины автомобиля состоит в измерении глубины проникновения щупа*[1] *в канавку протектора в определенном месте шины.*

В рамках дорожно-эксплуатационных исследований два контролера измеряют глубину канавок на шинах после каждого эксперимента. Основная сложность проведения измерений состоит в том, что каждый контролер имеет свое, присущее только ему смещение результатов измерений, связанное с силой давления на щуп (от силы давления зависит глубина проникновения щупа в канавку протектора).

Результаты 10 *измерений, выполненных контролерами в* 10 *фиксированных точках шины, приведены в таблице.*

Точка	Первый контролер	Второй контролер	Точка	Первый контролер	Второй контролер
1	126	125	6	159	152
2	128	120	7	152	150
3	157	163	8	138	136
4	131	118	9	138	140
5	142	129	10	142	136

[1] Здесь щуп — тонкая продолговатая металлическая пластинка прямоугольной формы.

Имеются основания предполагать, что первый контролер получает более высокие результаты, чем второй.

Согласуется ли это предположение с результатами эксперимента?

Решение. Результаты измерений, выполненных первым контролером, обозначим через η_j, а вторым — через ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, 10$. Разности $\zeta_j = \eta_j - \xi_j$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 10$, естественно считать представимыми в виде

$$\zeta_j = \theta + e_j,\ j = 1, 2, \ldots, 10,$$

где e_j — независимые случайные величины. Параметр θ характеризует различия (если они имеются) в силе давления на щуп первого и второго контролеров (если $\theta = 0$, то отличий нет, а если $\theta \neq 0$, они имеются).

Необходимо по результатам измерений сделать вывод о значении параметра θ, а именно: $\theta = 0$ или $\theta \neq 0$. Сформулируем поставленную задачу в терминах проверки статистических гипотез.

Относительно параметра θ выдвигаем гипотезу H_0 : $\theta = 0$, т. е. контролеры получают одинаковые результаты. Поскольку имеется подозрение, что первый контролер получает более высокие результаты, в качестве альтернативы к основной гипотезе выберем одностороннюю альтернативу: $\theta > 0$.

Отклонение гипотезы будем трактовать в пользу более высоких результатов первого контролера по сравнению с результатами второго, неотклонение — как отсутствие различий в измерениях контролеров.

Для проверки гипотезы H_0 воспользуемся критерием знаков. Имеем такие знаки разностей:

$$+ + - + + + + + - + .$$

Всего 10 разностей (все они отличны от нуля), количество μ положительных среди них равно 8. При этом

$$\mu = 8 \leq 8 = m_{0{,}025;10} = m_{\alpha;n}.$$

Поэтому согласно критерию знаков для проверки гипотезы H_0: $\theta = 0$ против альтернативы $\theta > 0$ гипотеза H_0 на уровне значимости 0,025 не отклоняется.

Этот результат можно трактовать так. Эксперимент не дает оснований утверждать, что результаты измерений (см. таблицу), полученные первым контролером, существенно выше по сравнению с результатами, полученными вторым контролером. (Такие результаты вполне могли быть получены одним и тем же контролером.)

19.3 Критерий Вилкоксона

Постановка задачи. Пусть $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots \ldots \xi_n(\omega))$ и $\eta(\omega) = (\eta_1(\omega), \eta_2(\omega), \ldots, \eta_m(\omega))$ — реализации независимых выборок $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots \ldots, \eta_m)$ соответственно из непрерывных распределений F и G. Относительно распределений F и G известно лишь то, что их функции распределений связаны соотношением

$$G(x) = F(x - \theta).$$

Параметр θ неизвестен. Относительно него выдвигается гипотеза

$$H_0 \colon \theta = 0.$$

Альтернатива к нулевой гипотезе H_0 может быть как двусторонней: если $\theta \neq 0$, то $\theta > 0$ или $\theta < 0$, так и односторонней: если $\theta \neq 0$, то $\theta > 0$ (односторонняя альтернатива может быть и такой: $\theta < 0$). Выбор альтернативы определяется решаемой задачей.

Статистика $\boldsymbol{W}$ (статистика Вилкоксона). Расположим выборочные значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ в общий вариационный ряд. Индексы, как правило, будем опускать. Получим перестановку из n букв ξ и m букв η, например

$$\omega = (\xi\eta\xi\eta\eta\eta\xi\xi\ldots\xi\eta). \tag{19.3.1}$$

Далее для определенности через $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ будем обозначать выборку меньшего объема.

Определим ранг каждого выборочного значения как номер места, на котором оно находится в общем вариационном ряду (19.3.1). Поскольку $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ — выборки из непрерывных распределений, вероятность того, что выборочные значения совпадут, равна нулю, но на практике выборочные значения регистрируются с конечным числом знаков и поэтому они могут совпадать с ненулевой вероятностью. В этом случае совпадающим выборочным значениям мы приписываем один и тот же средний ранг. Например, если $\xi_i = 7{,}1$; $\eta_j = 7{,}1$, причем имеются четыре выборочные значения, меньших 7,1, то каждому из выборочных значений ξ_i и η_j, равных 7,1 (они находятся на 5-м и 6-м местах) приписывается средний ранг $(5+6)/2 = 5{,}5$.

Далее определим W как сумму рангов выборки меньшего объема (т. е. выборки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$), а именно:

$$W = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — ранги выборочных значений $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$ в перестановке (19.3.1).

Величиной W можно описывать степень перемешанности букв ξ и η в общем вариационном ряду: если сумма рангов W большая (большинство выборочных значений ξ_i располагается справа от выборочных значений η_j) или малая (большинство выборочных значений ξ_i располагаются слева от выборочных значений η_j), то буквы ξ и η в общем вариационном ряду перемешаны плохо, в противном случае — хорошо.

Заметим, что минимально возможное значение суммы рангов W равно

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

максимально возможное —

$$(m+1) + (m+2) + \ldots + (m+n) = mn + \frac{n(n+1)}{2},$$

среднее —

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \left(mn + \frac{n(n+1)}{2}\right)\right) = \frac{n(n+m+1)}{2}.$$

При верной гипотезе H_0: $\theta = 0$ математическое ожидание W равно $n(n+m+1)/2$ (заметим, что $n(n+m+1)/2$ — координата середины отрезка с концами $n(n+1)/2$ и $nm + n(n+1)/2$).

Величину W называют *статистикой Вилкоксона.* На ее основе строится критерий для проверки гипотезы H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$.

Если гипотеза H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$ верна, то $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ являются независимыми выборками из одного и того же распределения. Поэтому буквы ξ и η в перестановке (19.3.1) перемешаны хорошо и W принимает значения, близкие к своему среднему значению

$$n(n+m+1)/2$$

(статистику W, когда гипотеза верна, будем обозначать W_0). Если же гипотеза H_0 неверна, W принимает значения, которые существенно отличаются от

$$n(n+m+1)/2$$

(при $\theta > 0$ статистика W принимает малые значения, а при $\theta < 0$ — большие). Следовательно, если гипотеза H_0 верна, случайная величина $W = W_0$ мало уклоняется от $n(n+m+1)/2$ по сравнению с уклонением величины W от $n(n+m+1)/2$, когда гипотеза H_0 неверна. Поэтому, проверяя гипотезу H_0, ее естественно не отклонять, когда W приняло значение, мало уклоняющееся от $n(n+m+1)/2$, и отклонять в противном случае. Границы, отделяющие значения W, мало уклоняющиеся от $n(n+m+1)/2$, от значений W, отличающихся от $n(n+m+1)/2$ существенно, строятся по известному распределению случайной величины W_0. По данным α (уровню значимости) и n, m (объемам выборок) определяем число $W_{\alpha;n;m}$ как наибольшее целое t, для которого

$$\mathsf{P}\{W_0 \le t\} \le \alpha.$$

Тогда искомыми границами являются: $W_{\alpha;n;m}$ — левая, и $(n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m})$ — правая.

Значения $W_{\alpha;n;m}$ табулированы (см. табл. 22.8.1).

Критерий Вилкоксона. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *и* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ *— независимые выборки соответственно из непрерывных распределений* F *и* G*, причем*

$$G(x) = F(x - \theta).$$

Если гипотезу

$$H_0 \colon \theta = 0$$

отклонять при

$$W \leq W_{\alpha;n;m}$$

и не отклонять при

$$W > W_{\alpha;n;m},$$

то с вероятностью, не большей α*, гипотезу* H_0 *будем отклонять, когда она верна (альтернатива односторонняя:* $\theta > 0$*).*

Если гипотезу H_0 *отклонять при*

$$W \geq n(n + m + 1) - W_{\alpha;n;m}$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью, не превосходящей α*, гипотезу* H_0 *будем отклонять, когда она верна (альтернатива односторонняя:* $\theta < 0$*).*

Если гипотезу H_0 *отклонять при*

$$W \notin (W_{\alpha;n;m}; n(n + m + 1) - W_{\alpha;n;m})$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью, не большей чем 2α*, гипотезу* H_0 *будем отклонять, когда она верна (альтернатива двусторонняя:* $\theta < 0$ *или* $\theta > 0$*).*

Если объемы выборок n и m большие (в критерии Вилкоксона n и m большие, когда $\min\{n, m\} \geq 6$, $m + n \geq 20$), то в качестве $W_{\alpha;n;m}$ используется

$$W_{\alpha;n;m} = \frac{1}{2}n(n + m + 1) + z_\alpha \sqrt{\frac{1}{12}nm(n + m + 1)},$$

где z_α — α-квантиль нормального распределения с параметрами (0;1), т. е. z_α — решение уравнения $N_{0;1}(z_\alpha) = \alpha$ (см. табл. 22.1.1). Это следует из того, что при $n, m \to \infty$, статистика W асимптотически нормальна со средним $n(n+m+1)/2$ и дисперсией $nm(n+m+1)/12$.

Ошибки первого и второго рода. При верной гипотезе H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$ случайная величина W — сумма рангов выборки меньшего объема, принимая значения из промежутка

$$[n(n+1)/2, nm + n(n+1)/2]$$

и почти всегда мало уклоняясь от среднего значения $n(n+m+1)/2$, т. е.

$$W \in \left(W_{\alpha;n;m};\ n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m}\right),$$

может, хотя и изредка, принять значение, которое существенно отличается от $n(n+m+1)/2$, т. е.

$$W \le W_{\alpha;n;m} \quad \text{или} \quad W \ge n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m}.$$

При этом мы гипотезу H_0 отклоняем и тем самым допускаем ошибку первого рода.

Если же гипотеза H_0 неверна, то W, почти всегда принимая значения, существенно отличающееся от среднего $n(n+m+1)/2$ (малые или большие) может, хотя и изредка, принять значение, близкое к $n(n+m+1)/2$, т. е.

$$W \in \left(W_{\alpha;n;m};\ n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m}\right).$$

При этом мы гипотезу H_0 не отклоняем и тем самым допускаем ошибку второго рода.

Пример 19.3.1. *Для исследования устойчивости к истиранию эпоксидной пластмассы с использованием как наполнителя окиси алюминия в разной концентрации изготовили две партии плиток.*

Рассматривались два значения относительной концентрации наполнителя в смоле, выражаемые отношениями 1/2 *к* 1 *и* 1 *к* 1. *Изготовили по* 18 *образцов плиток, при этом две из них с концентрацией* 1/2 *к* 1 *были забракованы и не испытывались. Затем каждую из плиток приводили в возвратно-поступательное движение по абразивному материалу (по* 10 000 *циклов для плитки).*

Измерялась разность толщины плиток до и после испытаний; точность измерений составляла 10^{-4} *дюйма* (1 *дюйм* $= 0,0254$ *м.*).

Концентрация 1/2 *к* 1: 7,0; 6,4; 7,3; 5,1; 5,7; 6,6; 5,0; 7,7; 6,8; 5,1; 4,6; 5,5; 5,8; 6,2; 4,8; 5,8.

Концентрация 1 *к* 1: 7,1; 5,0; 6,4; 6,9; 5,7; 6,5; 6,5; 4,0; 6,2; 6,8; 4,0; 7,5; 7,2; 5,2; 7,8; 4,8; 4,4; 6,0.

Различаются ли плитки из эпоксидной пластмассы по отношению к истиранию, в которых наполнителем была окись алюминия в разных концентрациях? Другими словами, влияет ли концентрация наполнителя на устойчивость плитки к истиранию?

Решение. Сформулируем поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез.

Обозначим через F и G распределения разности толщины плиток (до и после испытаний) соответственно с концентрацией наполнителя 1/2 к 1 и 1 к 1. Распределения F и G непрерывны. Предположим, что $G(x) = F(x-\theta)$ (θ — параметр, характеризующий различия в истирании, если они имеются).

Относительно различий плиток с разной концентрацией наполнителя выдвигается гипотеза H_0: концентрация наполнителя не влияет на устойчивость плитки к истиранию. Эту гипотезу можно сформулировать так: H_0: $\mathsf{F} = \mathsf{G}$ или, что то же, $H_0\colon \theta = 0$. Поскольку относительно влияния концентрации наполнителя на истирание ничего не известно, рассматриваем двустороннюю альтернативу: $\theta < 0$ или $\theta > 0$.

Необходимо проверить гипотезу H_0, т. е. по реализации выборки сделать вывод — отклонять гипотезу H_0 или не отклонять. Отклонение гипотезы H_0 будем интерпретировать как наличие влияния концентрации наполнителя на истирание плиток. Если же гипотеза H_0 не отклоняется, то можно утверждать, что в эксперименте влияние концентрации наполнителя на истирание не обнаружено.

Для проверки гипотезы H_0 воспользуемся критерием Вилкоксона. Гипотезу H_0 отклоняем при

$$W \notin (W_{\alpha;n;m};\, n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m})\,,$$

и не отклоняем в противном случае.

Сначала вычислим W — сумму рангов выборки меньшего объема в общем вариационном ряду: 4,0; 4,0; 4,4; $\underline{4{,}6}$; $\underline{4{,}8}$; 4,8; $\underline{5{,}0}$; 5,0; $\underline{5{,}1}$; $\underline{5{,}1}$; 5,2; $\underline{5{,}5}$; $\underline{5{,}7}$; 5,7; $\underline{5{,}8}$; $\underline{5{,}8}$; 6,0; $\underline{6{,}2}$; 6,2; $\underline{6{,}4}$; 6,4; 6,5; 6,5; $\underline{6{,}6}$; $\underline{6{,}8}$; 6,8; 6,9; $\underline{7{,}0}$; 7,1; 7,2; $\underline{7{,}3}$; 7,5; $\underline{7{,}7}$; 7,8 (подчеркнуты выборочные значения выборки меньшего объема).

$W = 4 + (5+6)/2 + (7+8)/2 + (9+10)/2 + (9+10)/2 + {}$
$+12 + (13+14)/2 + (15+16)/2 + (15+16)/2 + (18+19)/2 + {}$
$+(20+21)/2 + 24 + (25+26)/2 + 28 + 31 + 33 = 273.$

Далее, учитывая, что объемы выборок большие, а именно:

$$n = 16 > 6,\ m = 18 > 6,\ n + m = 34 > 20,$$

в качестве $W_{\alpha;n;m}$ можно рассмотреть

$$\frac{1}{2}n(n+m+1) + z_\alpha\sqrt{\frac{1}{12}nm(n+m+1)},$$

где z_α — α-квантиль нормального распределения с параметрами (0;1).

По таблице нормального распределения находим $z_\alpha = z_{0,025} = -1{,}96$ (см. табл. 22.1.1). Таким образом,

$$W_{\alpha;n;m} = W_{0,025;16;18} = \frac{1}{2}16(16+18+1) -$$

$$-1{,}96\sqrt{\frac{1}{12}16\cdot 18(16+18+1)} = 223{,}2;$$

$$n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m} =$$

$$= 16(16+18+1) - W_{0,025;16;18} = 336{,}8.$$

Для суммы рангов $W = 273$ имеем

$$W_{\alpha;n;m} = W_{0,025;16;18} = 223{,}2 < 273 < 336{,}8 =$$

$$= 16\cdot 35 - W_{0,025;16;18} = n(n+m+1) - W_{\alpha;n;m}.$$

Поэтому согласно критерию Вилкоксона гипотеза H_0: $\theta = 0$ не отклоняется. Она не противоречит результатам эксперимента. (Сумма рангов $W = 273$ естественна (типична) для выборок объема $n = 16$ и $m = 18$ из одного и того же распределения.)

Следовательно, экспериментальные данные не дают оснований утверждать, что плитки с разной концентрацией наполнителя отличаются устойчивостью к истиранию.

19.4 Задачи

АЗ: 19.7, 19.11, 19.12.
СЗ: 19.1, 19.13, 19.30.

19.1 (анкетирование "Преподаватель глазами студентов" — эффект экзаменационной оценки). Вопрос о непредвзятости оценивания тех или иных качеств, величин, параметров весьма интересен. При этом предвзятость в оценивании встречается заметно чаще, чем непредвзятость.

В некоторых ситуациях причины предвзятости можно объяснить, в других они абсолютно загадочны и непонятны (см., например, задачу 18.17 из гл. 18, где приведен пример сильного пристрастия при считывании цифр с вращающегося с большой скоростью круга).

При обработке результатов анкетирования "Преподаватель глазами студентов", как и при любом другом оценивании, возникают вопросы: 1) о непредвзятости оценивания (которую едва ли следует ожидать) и 2) о причинах предвзятости (в этом оценивании вполне понятных).

Мы, исследуя возможные причины предвзятого оценивания, рассмотрим:

1° эффект экзаменационной оценки (задача 19.1);

2° эффект практического занятия — зависимость оценки преподавателя студентами от того, проводит ли преподаватель в группе (параллельно с чтением лекций) практические занятия (задача 19.5);

3° эффект экзамена (задача 19.17).

Можно исследовать и другие факторы как возможные причины предвзятого оценивания.

Эффект экзаменационной оценки. Еще до начала анкетирования высказывались соображения, что оценка характеристик преподавателя студентами не может быть непредвзятой. Как на причину предвзятого оценивания указывалось на то, что студенту на экзамене преподаватель выставляет оценку, и поэтому, оценивая преподавателя, студент сознательно или подсознательно учитывает результат экзамена — полученную оценку, особенно если она неудовлетворительная.

В связи с выдвинутой гипотезой о наличии эффекта экзаменационной оценки возникает вопрос: согласуется ли она с экспериментом (результатами анкетирования)?

В таблице 19.4.1 (столбцы 2 и 3) приведены результаты анкетирования в студенческих группах: столбец 2 — в группе ПМ-84-4, столбец 3 — в группе ПМ-84-1. При этом обе студенческие группы находились в одинаковых условиях относительно преподавателя: в обеих группах на протяжении года он читал лекции, вел практические и лабораторные занятия, принимал зачеты, экзамены. Однако результаты экзамена в этих группах заметно отличаются количеством полученных студентами двоек (см. табл. 19.4.2 и примечание 1).

Сформулировать задачу об эффекте экзаменационной оценки как задачу проверки статистических гипотез и решить ее:

выбрать основную гипотезу и альтернативные (что обозначает отклонение основной гипотезы? ее неотклонение?);

предложить уровень значимости и критерий для проверки основной гипотезы;

проверить основную гипотезу;

дать частотную интерпретацию полученным результатам.

П р и м е ч а н и е 1. В таблице 19.4.1 приведены результаты оценивания автора как преподавателя студентами групп ПМ-84-4, ПМ-84-1, ПМ-85-1, ПМ-85-2, ПМ-85-3, ПМ-85-4, а именно, оценки в баллах характеристик преподавателя — среднее в группе или в нескольких группах (максимально возможная оценка характеристики — 9 баллов):

столбец 2 — в группе ПМ-84-4; на экзамене шесть студентов получили неудовлетворительные оценки (четверо из них отказались отвечать после ознакомления с содержанием экзаменационного билета, т. е. фактически сами оценили свои знания как неудовлетворительные (см. табл. 19.4.2));

столбец 3 — в группе ПМ-84-1; на экзамене девять студентов получили неудовлетворительные оценки (см. табл. 19.4.2);

столбец 4 — в группах ПМ-85-1, ПМ-85-2, где лектор вел также практические занятия;

Таблица 19.4.1. Оценки студентами характеристик преподавателя

Характеристика преподавателя	Оценка					
1	2	3	4	5	6	7
1. Преподает ясно и доступно	8,4	7,3	7,9	7,9	7,1	8,1
2. Разъясняет сложные места	8,3	7,3	8,5	8,0	7,5	8,3
3. Выделяет главные моменты	8,5	7,5	8,5	8,4	7,8	8,5
4. Умеет вызвать и поддержать интерес аудитории к предмету	8,6	6,4	7,9	8,7	5,8	7,2
5. Следит за реакцией аудитории	8,4	8,3	7,9	7,3	6,1	7,6
6. Задает вопросы, побуждает к дискуссии	8,2	5,5	7,2	6,0	4,7	6,7
7. Соблюдает логическую последовательность изложения	8,5	7,7	8,9	8,6	8,4	8,8
8. Демонстрирует культуру речи, четкость дикции, нормальный темп изложения	7,0	3,9	6,5	6,4	5,5	6,5
9. Умеет снять напряжение	8,1	5,6	7,1	5,8	5,1	6,5
10. Ориентирует на использование материала в будущей профессиональной деятельности	6,9	6,1	7,9	5,1	3,9	6,5
11. Творческий подход и интерес к своему делу	8,5	7,2	7,9	7,9	7,1	8,1
12. Доброжелательность и такт по отношению к студентам	8,0	6,6	7,9	8,1	7,7	7,9
13. Терпение	8,2	5,8	8,5	8,0	7,1	8,3
14. Требовательность	8,8	8,3	8,9	8,7	8,8	8,8
15. Заинтересованность в успехах студентов	8,4	6,4	8,0	7,7	7,2	7,8
16. Объективность в оценивании знаний студентов	8,7	6,2	7,4	7,7	7,3	7,5
17. Уважительное отношение к студентам	8,6	6,5	8,5	8,3	7,9	8,4
18. Располагает к себе высокой эрудицией, манерой поведения	8,8	6,5	7,9	8,4	8,1	8,2

столбец 5 — в группах ПМ-85-3, ПМ-85-4, где лектор не вел практических занятий (их проводил другой преподаватель);

столбец 6 — в группах ПМ-85-1, ПМ-85-2, ПМ-85-3, ПМ-85-4 (анкетирование проведено до экзамена);

столбец 7 — в группах ПМ-85-1, ПМ-85-2, ПМ-85-3, ПМ-85-4 (анкетирование проведено после экзамена).

Анкета приведена в оригинальном виде.

Таблица 19.4.2. Результаты экзамена

Оценка на экзамене	Количество оценок в группах			
	ПМ-84-4	ПМ-84-1	ПМ-85-1 ПМ-85-2	ПМ-85-3 ПМ-85-5
Отлично	1	4	3	4
Хорошо	7	2	10	6
Удовлетворительно	4	6	7	6
Неудовлетворительно	6	9	11	15

Примечание 2. В таблице 19.4.2 приведены результаты первой сдачи экзамена: речь идет об экзамене по курсу “Теория вероятностей и математическая статистика” на факультете прикладной математики Днепропетровского государственного университета во время зимних сессий 1986/87 и 1987/88 учебных годов.

19.2. Стохастический эксперимент состоит в последовательном подбрасывании симметричной игральной кости трижды и регистрации результатов следующим образом: появление 1 или 2 очков обозначаем нулем, 3 или 4 — единицей, 5 или 6 — двойкой. Если, например, результат эксперимента: выпало 3, 5, 1 очков, то это регистрируется как 120, если результат: выпало 6, 1, 4 очков, то это регистрируется как 201 и т. д.

Вместе с этими последовательностями из нулей, единиц и двоек рассмотрим числа из промежутка $[0;1]$, которые в троичной системе исчисления записываются соответственно так: 0,120; 0,201; ... Так что 0,120 — это запись в троичной системе числа

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 0 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{5}{9},$$

а 0,201 — числа

$$2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3^2} + 1 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{19}{27}.$$

Эксперимент проводится восемь раз.

Можно ли считать, что полученные таким образом восемь чисел являются реализацией выборки объемом 8 из равномерного на промежутке [0;1] распределения?

Дать ответ на этот вопрос в терминах проверки статистических гипотез, воспользовавшись критерием Колмогорова.

19.3. Регистрируются интервалы между последовательными импульсами вдоль нервного волокна у индивидуумов A и B (единица измерения — $1/50$ с). Они оказались такими.

Индивидуум A: 2,5; 2,0; 7,0; 4,0; 10,5; 1,0; 31,5; 17,5; 0,5; 19,5; 21,5; 1,5; 19,5; 2,0; 8,5; 11,5; 39,0; 7,0; 4,0; 5,5; 3,5; 22,5; 23,0; 10,0; 9,5; 25,5; 4,5; 11,0; 14,5; 0,5.

Индивидуум B: 9,5; 3,0; 19,5; 4,0; 1,5; 14,0; 4,5; 8,5; 22,5; 20,0; 3,5; 15,0; 8,0; 12,0; 40,5; 67,5; 0,5; 1,0; 1,5; 3,0; 6,0; 16,5; 32,5; 4,0; 7,5; 34,0; 15,0; 3,0.

Свидетельствуют ли эти данные об отличиях в интервалах между импульсами у индивидуумов A и B?

19.4. С помощью таблицы случайных чисел (см. табл. 22.10.1) можно получить (смоделировать) реализацию выборки из равномерного на промежутке [0;1] распределения описанным ниже способом (кстати, по выборке из равномерного на промежутке [0;1] распределения можно построить выборку из любого распределения F с монотонно возрастающей функцией распределения $F(x)$ (см. пример 19.1.1).

Из таблицы случайных чисел (см. табл. 22.10.1) выберем n чисел (пусть, например, $n = 10$). Выбор чисел можно начинать с любого места любым наперед оговоренным способом. Начиная, скажем, с левого верхнего угла таблицы и двигаясь книзу (для определенности будем выбирать четырехзначные числа), получим 1009, 3754, 0842, 9901, 1280, 6606, 3106, 8526, 6357, 7379.

Рассмотрим числа из промежутка [0;1], полученные по выбранным случайным числам: 0,1009; 0,3754; 0,0842; 0,9901; 0,1280; 0,6606; 0,3106; 0,8526; 0,6357; 0,7379.

Воспользовавшись критерием Колмогорова, убедитесь, что эту последовательность чисел можно считать реализацией выборки из равномерного на промежутке [0;1] распределения.

19.5 (анкетирование “Преподаватель глазами студентов” — эффект практического занятия). При оценивании студентами преподавателя выдвигается предположение о наличии эффекта практического занятия: если в группе параллельно с чтением лекций преподаватель ведет практические (лабораторные) занятия, то оценка его студентами выше.

В таблице 19.4.1 приведены оценки характеристик преподавателя студентами: столбец 4 — в группах ПМ-85-1 и ПМ-85-2, где преподаватель читал лекции и вел практические и лабораторные занятия, а столбец 5 — в группах ПМ-85-3 и ПМ-85-4, где практические и лабораторные занятия вел другой преподаватель (анкетирование проведено после экзамена).

Проверить, существует ли эффект практического (лабораторного) занятия.

Сформулировать задачу о наличии эффекта практического (лабораторного) занятия как задачу проверки статистических гипотез и решить ее, подробнее см. задачу 19.1 (выберите 5% уровень значимости).

19.6. Решить задачу 17.8, воспользовавшись критерием Вилкоксона.

19.7. Шейки рабочей части сверл обрабатываются на шлифовальном станке. Номинальный диаметр шейки сверла составляет 9,8 мм с техническим допуском 0,05 мм.

Измерения рабочей части шейки 20 сверл дало такие результаты (в миллиметрах): 9,76; 9,77; 9,83; 9,79; 9,80; 9,81; 9,79; 9,75; 9,80; 9,78; 9,75; 9,81; 9,82; 9,76; 9,78; 9,77; 9,81; 9,79; 9,77; 9,79.

Можно ли считать, что номинальный диаметр шейки сверла равен 9,8 мм с техническим допуском 0,05 мм при норме отхода 1 %, другими словами, что диаметр шейки сверла находится в пределах от 9,75 до 9,85 мм с вероятностью 0,99?

Сформулировать поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез. Воспользоваться критерием Колмогорова.

Указание. Задачу решить в предположении, что результаты измерений являются выборкой из нормального распределения.

19.8 (влияние работы метронома на плавность речи). В таблице приведены результаты эксперимента, в котором изучалось влияние работы метронома на речь людей, страдающих заиканием.

Номер участника	Число заиканий при условии			Номер участника	Число заиканий при условии		
	N	R	A		N	R	A
1	15	3	5	7	10	0	2
2	11	3	3	8	8	0	3
3	18	1	3	9	13	0	2
4	21	5	4	10	4	1	0
5	6	2	2	11	11	2	4
6	17	0	2	12	17	2	1

Обследовалось 12 человек с тяжелой формой заболевания. Каждый из них импровизировал трехминутную речь при условиях N, R, A:

N — говорить без метронома;

R — говорить при регулярной (ритмичной) работе метронома (120 ударов в минуту), причем человек был предварительно проинструктирован о необходимости произносить один слог слова на каждый удар метронома;

A — говорить при неритмичной работе метронома, работающего со случайными интервалами между ударами (от 0,3 до 0,7 с), совершая при этом в среднем те же 120 ударов в минуту (при условии A, как и при условии R, человек должен произносить один слог на каждый удар метронома).

Приведенные данные, безусловно, свидетельствуют о том, что работа метронома (как ритмичная, так и неритмичная) уменьшает количество заиканий (почему?). А существуют ли отличия во влиянии на заикание ритмично и неритмично работающих метрономов?

19.9. Пробы очень чистого железа, полученные по методам A и B, имели следующие точки плавления (в градусах Цельсия).

Метод A: 1439, 1519, 1518, 1512, 1514, 1489, 1508, 1503.

Метод B: 1509, 1494, 1512, 1483, 1507, 1491.

Различаются ли точки плавления железа, полученного разными методами?

19.10. На отрезок $[0;1]$ наудачу бросают точку и регистрируют ее координату ξ, а затем подбрасывают симметричную игральную кость и регистрируют число η выпавших очков.

Проведите описанный стохастический эксперимент 20 раз и рассмотрите последовательность чисел

$$\zeta_i = \xi_i + \eta_i,\ i = 1, 2, \ldots, 20.$$

Можно ли считать, что числа $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{20}$ образуют выборку из равномерного на промежутке $[1;7]$ распределения? Воспользуйтесь критерием Колмогорова.

Из каких соображений выдвинута гипотеза о равномерном на промежутке $[1;7]$ распределении случайной величины ζ?

З а м е ч а н и е. Реализовать (смоделировать) бросание точки на отрезок $[0;1]$ можно, например, с помощью таблицы случайных чисел.

19.11. Для исследования устойчивости к истиранию эпоксидной пластмассы с разными наполнителями изготовили две партии плиток с использованием как наполнителя железных и медных опилок. Изготовили по 27 образцов плиток с каждым наполнителем. Затем каждую плитку приводили в возвратно-поступательное движение по абразивному материалу (выполняя при этом 10 000 циклов для каждой плитки). Измеряли разницу в толщине плиток в дюймах (1 дюйм = 0,0254 м.) до и после испытаний; точность измерений составляла 10^{-4} дюйма. Получены следующие результаты.

Железные опилки: 3,6; 1,6; 2,3; 3,8; 1,0; 2,5; 2,9; 1,6; 2,4; 2,1; 1,1; 1,7; 2,6; 1,1; 1,0; 1,6; 0,9; 1,4; 2,3; 1,1; 1,8; 2,6; 1,2; 2,0; 2,1; 0,7; 2,4.

Медные опилки: 2,8; 1,5; 2,4; 2,6; 1,1; 2,1; 1,9; 1,4; 2,0; 2,1; 1,0; 1,5; 1,0; 1,6; 1,5; 1,2; 1,7; 2,6; 1,3; 2,6; 2,9; 1,5; 3,3; 2,8; 1,2; 2,7; 1,8.

Говорят ли эти данные о существенном различии устойчивости к истиранию образцов эпоксидных пластмасс, изготовленных с разными наполнителями?

19.12. Астрономы A и B измеряли в минутах большой диаметр наиболее ярких галактик. Каждый измерил диаметры 18 галактик. Результаты измерений приведены в таблице.

Номер галактики	Астроном A	Астроном B	Номер галактики	Астроном A	Астроном B
224	2,3	2,4	441	1,1	1,1
272	1,5	1,5	557	5,5	5,6
313	1,5	1,3	563	2,0	2,1
354	4,5	4,1	773	1,7	1,7
377	3,5	4,5	604	1,9	2,2
391	1,5	1,3	638	1,4	1,3
407	1,0	1,2	796	2,3	2,8
427	3,0	2,0	805	2,3	2,6
436	1,2	1,1	808	0,8	1,0

Указывают ли эти данные на существенное отличие результатов измерений?

19.13 (момент последнего уравнивания). Эксперимент состоит в последовательном подбрасывании монеты $2n = 40$ раз и регистрации момента (номера испытания), когда в последний раз количество выпавших "гербов" и "решеток" было одинаково. Будем говорить: наблюдается момент последнего уравнивания количества "гербов" и "решеток". В эксперименте этими моментами могут быть $0, 2, 4, \ldots, 40$.

Относительно распределения момента последнего уравнивания выдвигается гипотеза H_0: момент $2k$ последнего уравнивания имеет распределение арксинуса, подробнее — H_0: случайная величина $2k/2n = k/n$ имеет своей функцией распределения

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Провести эксперимент пять раз, фиксируя момент последнего уравнивания количества "гербов" и "решеток".

Можно ли на основании полученных данных считать, что момент последнего уравнивания имеет распределение арксинуса?

Ответ дать в терминах проверки статистических гипотез. Воспользоваться критерием Колмогорова.

З а м е ч а н и е 1. Эксперимент удобно проводить так. Подбрасываем монету и выпадение “герба” обозначаем через $+1$, а “решетки” через -1. После 40 подбрасываний получаем последовательность, образованную из чисел $+1$ и -1. Последовательно складывая члены последовательности, начиная с первого, зафиксируем момент, когда сумма будет равна нулю — это будет момент второго уравнивания (момент первого уравнивания равен нулю), и так продолжаем, пока не найдем значение момента последнего уравнивания (см. также задачу 19.22).

З а м е ч а н и е 2. Ниже приведены значения функции распределения арксинуса $A(x)$ в точках $0{,}05 \cdot i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$:

x	$A(x)$	x	$A(x)$
0,00	0,000	0,30	0,369
0,05	0,144	0,35	0,403
0,10	0,205	0,40	0,436
0,15	0,253	0,45	0,468
0,20	0,295	0,50	0,500
0,25	0,333		

Для вычисления значений $A(x)$, если $0{,}5 < x < 1{,}0$, можно воспользоваться соотношением

$$A(x) = 1 - A(1 - x).$$

19.14. Из большой группы рабочих, которые работают на сборочном конвейере, наудачу выбирают двух и несколько раз хронометрируют продолжительность сборки ими определенного изделия (в минутах). Получили такие результаты.

Первый рабочий: 19,4; 21,1; 16,2; 21,2; 21,6; 17,8; 19,6.

Второй рабочий: 19,9; 15,7; 15,2; 19,8; 18,9; 16,1; 16,2; 18,5; 17,3; 20,4.

Существенно ли различается время сборки изделия этими рабочими?

19.15. При испытании на устойчивость к истиранию люминесцентной краски типов А-102 и А-108 измеряли потерю массы (в граммах) через определенный интервал времени, причем известно, что устойчивость к истиранию краски А-108 не меньше, чем краски А-102. Краску каждого из двух типов наносили на восемь панелей. Получили такие результаты:

Потеря массы		Потеря массы	
А-102	А-108	А-102	А-108
17	19	33	35
10	17	20	25
19	16	22	23
17	12	28	21

Можно ли на основании этих данных утверждать, что краски существенно различаются по устойчивости к истиранию?

19.16 (показания механических часов). Механические часы, выставленные в витринах часовых магазинов, через некоторое время останавливаются. Момент остановки часов — случайная величина. Естественно предположить, что показания часов распределены равномерно на промежутке [0;12]. Наблюдения 20 часов дали следующую выборку:
10 час 57 мин, 3 час 28 мин, 5 час 18 мин, 1 час 32 мин, 3 час 21 мин, 4 час 13 мин, 4 час 06 мин, 10 час 10 мин, 6 час 48 мин, 2 час 51 мин, 0 час 44 мин, 3 час 57 мин, 4 час 16 мин, 4 час 58 мин, 7 час 47 мин, 11 час 04 мин, 7 час 54 мин, 10 час 30 мин, 11 час 06 мин, 11 час 52 мин.

Согласуется ли с этими данными гипотеза о равномерном распределении на промежутке [0;12] показаний часов?

19.17 (анкетирование “Преподаватель глазами студентов” — эффект экзамена). Анкетирование “Преподаватель глазами студентов” должно проводиться после экзамена, но в группах ПМ-85-1, ПМ-85-2, ПМ-85-3, ПМ-85-4 его ошибочно провели до экзамена (результаты анкетирования приведены в столбце 5 табл. 19.4.1). Потом анкетирование провели и после экзамена (результаты приведены в столбце 6 табл. 19.4.1). Эта ошибка дала возможность говорить о существовании эффекта экзамена (а может, это эффект еще какого-нибудь другого фактора?), а именно, влияет ли на оценивание преподавателя студентами проведение экзамена? В связи с этой гипотезой выяснить, согласуется ли она с данными анкетирования. Речь идет об экзамене по годовому курсу “Теория вероятностей и математическая статистика” (результаты экзамена приведены в табл. 19.4.2).

Сформулировать задачу о наличии эффекта экзамена при оценивании преподавателя как задачу проверки статистических гипотез и решить ее (подробнее см. задачу 19.1).

Примечание. Эффект экзамена оказался довольно неожиданным: несмотря на высокую требовательность преподавателя (см. табл. 19.4.2, а также строку “Требовательность” в табл. 19.4.1), данные анкетирования после экзамена заметно выше, чем до экзамена (см. столбцы 5 и 6 табл. 19.4.1).

19.18. Шейки рабочей части сверл обрабатываются на шлифовальном станке. Номинальный диаметр шейки составляет 9,8 мм с техническим допуском 0,04 мм.

Были измерены диаметры рабочей части шейки 16 сверл. Получены такие их значения (в миллиметрах): 9,76; 9,78; 9,81; 9,77; 9,75; 9,78; 9,75; 9,77; 9,74; 9,78; 9,77; 9,83; 9,78; 9,81; 9,79; 9,80.

Можно ли заключить, что номинальный диаметр шейки равен 9,8 мм с техническим допуском 0,04 мм при норме отхода 5 %, т. е. что размер диаметра шейки сверла находится в пределах от 9,76 до 9,84 мм с вероятностью 0,95?

Указание 1. Сформулировать поставленную задачу как задачу проверки статистических гипотез и воспользоваться критерием Колмогорова.

Указание 2. Задачу решить в предположении, что результаты измерений являются выборкой из нормального распределения.

19.19. Регистрировались интервалы безотказной работы (в часах) кондиционеров на двух самолетах “Боинг-720”. Получены такие результаты.

Самолет I: 74, 57, 48, 29, 502, 12, 70, 21, 386, 59, 22, 153, 26, 326.

Самолет II: 55, 320, 56, 104, 220, 239, 47, 246, 176, 182, 33, 15, 104, 35.

Можно ли на основании приведенных данных сделать вывод, что время безотказной работы кондиционеров на этих самолетах одинаково?

19.20. Средний объем стока воды в реке (в кубических футах за секунду, 1 фут = 0,3048 м) фиксируется ежемесячно в течение двух лет (обозначим их I и II).

Сравнивая сток за соответствующие месяцы (сток подчиняется годовым циклам), сделать вывод относительно отсутствия (или наличия) изменений объема стока воды в разные годы.

Месяц	Год I	Год II	Месяц	Год I	Год II
Январь	14,1	14,2	Июль	92,8	88,1
Февраль	12,2	10,5	Август	74,4	80,0
Март	104,0	123,0	Сентябрь	75,4	75,6
Апрель	220,0	190,0	Октябрь	51,7	48,8
Май	110,0	138,0	Ноябрь	29,3	27,1
Июнь	86,0	98,1	Декабрь	16,0	15,7

Проверить нулевую гипотезу об отсутствии систематических изменений объема стока за указанные годы.

19.21. Для изготовления корда с одинаковыми номинальными данными два завода (A и B) используют разные производственные процессы. Проведено по 20 испытаний на разрыв продукции каждого завода. Катушку корда для испытаний и место разрыва на ней выбирали наудачу.

Приведенные данные являются отклонениями прочности от 21,5 фунта (1 фунт = 453,6 г). Единица измерения составляет 0,1 фунта.

Завод A: -1; -5; 1; 10; 2; -3; 6; 10; -1; 4; -8; -1; -10; -9; -2; -2; -8; 1; 2; 5.

Завод B: 10; 8; 9; 12; 0; 8; 5; 9; -1; -1; 7; 16; -5; 1; 10; 9; -5; 6; 6; 15.

Существенно ли отличается корд, изготовленный на заводах A и B?

19.22 (время пребывания на положительной стороне). Эксперимент состоит в последовательном подбрасывании монеты $2n = 40$ раз (одно подбрасывание за единицу времени). Появление “герба” будем обозначать через $+1$, а появление “решетки” — через -1. Таким образом, на k-м шаге, $k = 1, 2, \ldots 2n$, имеем символ ε_k, равный $+1$ или -1 в зависимости от того, какой стороной легла монета. Пусть

$$s_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k,\ s_0 = 0,\ k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

где s_k — разность между количеством "плюсов" и "минусов" (между количеством "гербов" и "решеток"). Если воспользоваться геометрической терминологией и системой координат (t, x), то результат эксперимента можно представить в виде ломаной с вершинами в точках (k, s_k), $k = 1, 2, \ldots, 2n$ (рис. 19.4.1).

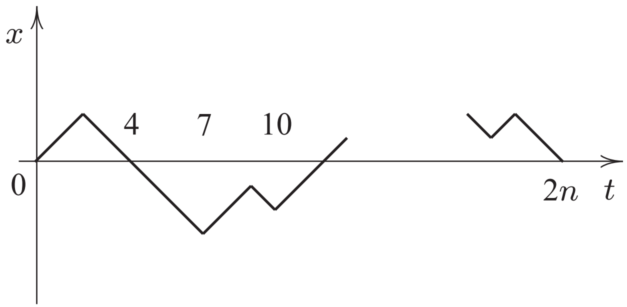


Рис. 19.4.1: Результат эксперимента — ломаная с вершинами в точках (k, s_k), $k = 0, 1, \ldots, 2n$

Вычислим время, когда монета находилась на положительной стороне, т. е. когда разность между количеством "гербов" и "решеток" была положительной. Например, если в результате первых 10 подбрасываний монеты получена последовательность $+1, +1, -1, -1, -1, -1, -1, +1, +1, -1$ (см. также рис. 19.4.1), то время пребывания монеты на положительной стороне составляет 4 единицы.

Пусть $2k$ — количество единиц времени (из $2n$ единиц), когда монета находилась на положительной стороне. Относительно времени пребывания на положительной стороне выдвигается гипотеза H_0: время пребывания на положительной стороне имеет распределение арксинуса, т. е. случайная величина $2k/2n = k/n$ имеет своей функцией распределения

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ \dfrac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Провести эксперимент пять раз, фиксируя время пребывания монеты на положительной стороне.

Можно ли на основании полученных данных заключить, что время пребывания монеты на положительной стороне имеет распределение арксинуса?

Ответ дать в терминах проверки статистических гипотез, воспользоваться критерием Колмогорова. См. также замечание к задаче 19.13.

19.23. Четное число мышей рассадили наудачу в клетки — по одной в клетку. Затем клетки снова-таки наудачу объединили в две одинаковые по количеству мышей группы. Мыши первой группы (A) предназначались для контроля, а второй — подопытной (B) подвергались действию определенного препарата. После этого все мыши в случайном порядке инфицировались туберкулезом.

Заметим, что экспериментаторы, как правило, инфицируют сначала мышей контрольной группы, а затем — подопытной, что абсолютно неверно.

Дни гибели мышей после инфицирования приведены в таблице (данные об одной из мышей были утеряны).

Группа A: 5, 6, 6, 7, 8, 9, 11, 12.

Группа B: 7, 7, 8, 8, 9, 10, 13, 14, 15.

В предыдущих экспериментах установлено, что используемый препарат нетоксичный. Поэтому можно предположить, что мыши в подопытной группе гибнут не быстрее, чем в контрольной группе.

Свидетельствуют ли приведенные данные о наличии эффекта препарата?

Указание. Проверить гипотезу H_0: препарат не влияет на течение туберкулеза. Воспользоваться критерием Вилкоксона.

19.24. Для сравнения эффективности двух методов преподавания математики сформировали две группы учеников (A и B) одного уровня подготовки, в каждой из которых математику изучали с использованием своего метода. После окончания учебного года каждому ученику был предложен тест. Результаты теста (в баллах) оказались такими.

Группа A: 94, 92, 90, 86, 86, 84, 82, 90.

Группа B: 90, 86, 84, 82, 80, 82, 78.

Можно ли на основании этих данных сделать вывод, что оценки, полученные в группах A и B, существенно отличаются?

19.25. Провести серию из 10 экспериментов, каждый из которых состоит в подбрасывании 16 монет и регистрации количества s_i выпавших "гербов" (i — номер эксперимента, $i = 1, 2, \ldots, 10$). Рассмотреть последовательность чисел

$$\xi_i = \frac{s_i - 8}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Можно ли считать, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{10}$ является выборкой из стандартного нормального распределения?

Из каких соображений выдвинута сформулированная гипотеза?

Примечание. Эксперимент, состоящий в подбрасывании 16 монет, удобно провести, например, так: поместить в коробку все 16 монет, а потом, хорошо встряхнув ее несколько раз, подсчитать количество выпавших "гербов".

19.26. Приборы типов A и B для измерения количества осадков размещены наудачу на некотором участке. За определенный промежуток времени над контролируемой областью пронеслось 14 ураганов. Среднее количество осадков, измеренное с помощью приборов A и B, приведено в таблице.

Можно ли заключить, что приборы A и B дают одинаковые результаты?

Ураган	Прибор типа		Ураган	Прибор типа	
	A	B		A	B
1	1,38	1,42	8	2,63	2,69
2	9,69	10,37	9	2,44	2,68
3	0,39	0,36	10	0,56	0,53
4	1,42	1,46	11	0,69	0,72
5	0,54	0,55	12	0,72	0,72
6	6,94	6,15	13	0,95	0,93
7	0,59	0,61	14	0,50	0,53

19.27. В таблице приведены значения объемов булок (в миллилитрах), выпеченных из 100-граммовых порций теста, изготовленного из 12 разных сортов муки, содержащей 1 и 2 мг бромистого калия (KBr).

Сорт муки	Объем булки, мл		Сорт муки	Объем булки, мл	
	KBr 1 мг	KBr 2 мг		KBr 1 мг	KBr 2 мг
1	1075	1055	7	900	905
2	980	955	8	860	870
3	850	820	9	940	1000
4	815	765	10	1000	1015
5	1040	1065	11	935	965
6	960	985	12	835	870

Свидетельствуют ли приведенные данные о влиянии содержания бромистого калия на объем булок?

Ответ дать в терминах проверки статистических гипотез.

19.28. Стохастический эксперимент состоит в подбрасывании игральной кости пять раз и вычислении суммы выпавших очков. Для i-го эксперимента обозначим эту сумму через s_i. Проведем эксперимент 16 раз и рассмотрим последовательность чисел

$$\xi_i = \frac{s_i - 17{,}5}{3{,}82}, \ i = 1, 2, \ldots, 16.$$

Можно ли считать, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots \ldots, \xi_{16}$ является реализацией выборки из нормального распределения, со средним $a = 0$ и дисперсией $\sigma^2 = 1$? Из каких соображений относительно распределения случайной величины ξ выдвинута именно эта гипотеза?

Ответ дать в терминах проверки статистических гипотез, воспользовавшись критерием Колмогорова.

19.29 (катастрофы на угольных шахтах). В таблицах приведены интервалы в днях между катастрофами (катастрофа влечет смерть 10 и более человек) на угольных шахтах Великобритании с 1875 по 1951 г. (данные В. Мегью, К. Пирсона, А. Винна, их следует читать по строкам).

Интервалы между катастрофами с 1875 по 1900 г.

378	36	15	31	215	11	137	4
15	72	96	124	50	120	203	176
55	93	59	315	59	61	1	13
189	345	20	81	286	114	108	188
233	28	22	61	78	99	326	275
54	217	113	32	23	151	361	312
354	58	275	78	17	1205	644	

Интервалы между катастрофами с 1901 по 1951 г.

467	871	48	123	457	498	49	131
182	255	195	224	566	390	72	228
271	208	517	1613	54	326	1312	348
745	217	120	275	20	66	291	4
369	338	336	19	329	330	312	171
145	75	364	37	19	156	47	129
1630	29	217	7	18	1357		

Свидетельствуют ли эти данные о наличии существенных отличий между интервалами времени от катастрофы к катастрофе за период с 1875 по 1900 г. и с 1901 по 1951 г.?

19.30 (автомобильные номера). Выпишите цифровые части номеров 20 автомобилей, проезжающих мимо (номер содержит пять цифр). Обозначим через a_i, b_i, c_i, d_i, e_i цифры, встретившиеся в номере, если его читать слева направо.

Рассмотрим последовательность чисел

$$\zeta_i = 10^{-1}a_i + 10^{-2}b_i + 10^{-3}c_i + 10^{-4}d_i + 10^{-5}e_i,$$

где $i = 1, 2, \ldots, 20$.

Можно ли считать, что последовательность ζ_i, $i = 1, 2, \ldots, 20$, является реализацией выборки из равномерного на промежутке [0;1] распределения?

З а м е ч а н и е. Если номер автомобиля содержит четыре цифры, то рассмотрим последовательность

$$\zeta_i = 10^{-1}a_i + 10^{-2}b_i + 10^{-3}c_i + 10^{-4}d_i,$$

где $i = 1, 2, \ldots, 20$.

19.31. Исследовалась длительность эксплуатации авиационных пневматических шин марок U и V на самолетах, базирующихся на авианосцах. Для испытаний отобрали 10 самолетов. Приведенные в таблице данные — количество посадок до разрушения шин.

Можно ли по результатам этих испытаний сделать вывод о наличии отличий в длительности эксплуатации шин марок U и V?

Самолет	Количество посадок		Самолет	Количество посадок	
	Марка U	Марка V		Марка U	Марка V
1	5	5	6	7	24
2	55	14	7	14	38
3	5	24	8	32	41
4	32	27	9	10	32
5	56	24	10	8	24

19.32. Токсичность двух препаратов (A и B) сравнивали на двух группах мышей (по 50 в каждой). Мышам первой группы ввели препарат A, а второй — такую же дозу препарата B. Количество мышей, которые остались живыми в каждой группе через определенное время T (в часах) после введения препаратов, приведено в таблице.

Время T	Количество живых мышей	
	После действия A	После действия B
1	29	35
3	21	23
8	16	16
16	12	13
24	10	10
48	9	8
72	7	8
96	6	7

Свидетельствуют ли приведенные данные о различной токсичности препаратов A и B?

19.33 (электрошок и аккомодация). При последовательном чтении вслух людьми, страдающими заиканием, одного и того же текста несколько раз подряд число заиканий имеет тенденцию к уменьшению. Электрошок как метод борьбы с заиканием претендует на ускорение этого процесса (аккомодацию). Цель описанного ниже эксперимента — ответить на вопрос: так ли это?

Восемнадцать человек студенческого возраста, страдающих заиканием, согласились участвовать в эксперименте — читали вслух фрагмент текста последовательно по пять раз (без действия электрошока). Потом они читали вслух пять раз другой фрагмент текста и в момент заикания подвергались воздействию электрошока.

В таблице приведены полученные по специальной методике оценки аккомодации в баллах. Высокий балл соответствует лучшей аккомодации. (Данные из работы: Daly

D. A. and Cooper E. B. Rate of stuttering adaptation under condition// Behav. Res. Theory. 1967. Vol. 5. P. 49–54.)

Номер участника	Баллы		Номер участника	Баллы	
	Без шока	С шоком		Без шока	С шоком
1	57	51	10	50	50
2	59	56	11	44	56
3	41	44	12	50	46
4	51	44	13	70	74
5	43	50	14	42	57
6	49	54	15	68	74
7	48	50	16	54	48
8	56	40	17	38	48
9	44	50	18	48	44

Свидетельствуют ли эти данные о том, что шок в момент заикания влияет на аккомодацию?

19.34. Ниже приведены данные о пористости конденсаторной бумаги двух партий (из каждой партии рулоны, пористость бумаги в которых измерялась, брали наудачу).

Партия I : 1,5; 1,5; 2,7; 3,0; 1,6; 1,9; 2,4; 1,6; 1,7; 2,0.

Партия II : 1,9; 2,3; 1,8; 1,9; 1,5; 2,4; 2,9; 3,5; 4,7.

Можно ли по этим данным сделать вывод, что пористость конденсаторной бумаги в партиях I и II различна?

19.35. На отрезок $[0;1]$ наудачу бросают точку и регистрируют ее координату ξ, а затем подбрасывают симметричную монету и регистрируют число η выпавших гербов.

Проведите описанный стохастический эксперимент 10 раз и рассмотрите последовательность чисел

$$\zeta_i = \xi_i + \eta_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Можно ли считать, что числа $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{10}$ образуют выборку из равномерного на промежутке $[0;2]$ распределения? Воспользуйтесь критерием Колмогорова.

Из каких соображений выдвинута гипотеза о равномерном на промежутке $[0;2]$ распределении случайной величины ζ?

З а м е ч а н и е. Реализовать эксперимент, состоящий в бросании наудачу точки на отрезок $[0;1]$, можно, например, с помощью таблицы случайных чисел.

19.36 (мантиссы логарифмов чисел $n!$). В таблице приведены значения десятичных логарифмов чисел $n!$

n	$n!$	$\lg n!$
1	1	0,000000
2	2	0,301030
3	6	0,778151
4	24	1,380211
5	120	2,079181
6	720	2,857332
7	5040	3,702431
8	40320	4,605521
9	362880	5,559763
10	3628800	6,559763
11	39916800	7,601156
12	$47900160 \cdot 10$	8,680337
13	$62270208 \cdot 10^2$	9,794280
14	$87178291 \cdot 10^3$	10,940408
15	$13076744 \cdot 10^5$	12,116499
16	$20922790 \cdot 10^6$	13,320619

Можно ли считать, что мантиссы логарифмов чисел $n!$ равномерно распределены на промежутке $[0; 1]$?

Ответ дать в терминах проверки статистических гипотез, воспользоваться критерием Колмогорова.

Замечание. Мантисса логарифма числа — это дробная часть логарифма.

19.37. Получили 10 чисел способом, описанным в задаче 15.37. Можно ли считать, что полученные таким образом 10 чисел являются реализацией выборки из равномерного на промежутке [0;1] распределения?

Ответ дать в терминах проверки статистических гипотез, воспользоваться критерием Колмогорова.

19.38. С помощью таблицы случайных чисел (см. табл. 22.10.1) получить выборку объемом 16 из нормального распределения со средним $a = 1$ и дисперсией $\sigma^2 = 0{,}01$.

Проверить, воспользовавшись критерием Колмогорова, действительно ли полученная последовательность чисел является реализацией выборки из указанного нормального распределения.

Глава 20

Линейная регрессия

20.1 Нормальная линейная регрессия

Задача восстановления зависимости. В математической статистике часто встречается следующая задача.

Известно, что величины y и x связаны функциональной зависимостью, сама же зависимость $y = f(x)$ неизвестна. Мы имеем возможность в данных, вполне определенных точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наблюдать соответствующие значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ величины y, но не точно, а с некоторыми погрешностями e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ (наблюдений, измерений без погрешностей не бывает), т. е. наблюдая y_j, мы фактически в качестве результата наблюдения получаем

$$\xi_j = y_j + e_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Погрешности $e_j, j = 1, 2 \ldots n$, неизвестны, однако их естественно считать независимыми (наблюдения производятся независимо) нормально распределенными случайными величинами со средними $\mathsf{M}e_j$ равными нулю (при этом $\mathsf{M}\xi_j = y_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$) и одной и той же неизвестной дисперсией σ^2 (последняя в предположении нормальности как раз и определяет погрешность наблюдений).

По результатам наблюдений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ величины y в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ необходимо восстановить (найти) зависимость величины y от x.

Далее мы будем рассматривать поставленную задачу восстановления зависимости $y = f(x)$ в часто встречающейся ситуации, когда из тех или иных соображений известно (можно считать), что зависимость $y = f(x)$ величины y от x линейная, т. е.

$$y = a + bx.$$

В этом случае восстановление зависимости сводится к определению (оцениванию) параметров a, b, σ^2 по наблюдениям $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ величин $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Разумеется, коль скоро значения y_j, $j = 1, 2 \ldots n$, наблюдаются с погрешностью, то и параметры a, b, σ^2 неизбежно будут оцениваться с погрешностью.

В строгой математической постановке задача восстановления (определения) зависимости $y = a + bx$ формулируется следующим образом.

Дана последовательность независимых нормально распределенных случайных величин ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, соответственно со средними $y_j = a + bx_j$ и одной и той же дисперсией σ^2. Параметры a, b, σ^2 неизвестны, и их необходимо оценить по $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Функцию

$$y = a + bx,$$

задающую зависимость y от x, называют простой нормальной линейной регрессией, кратко — линейной регрессией (“простая” обозначает зависимость от одной переменной). Когда переменная y является функцией от x, то говорим “регрессия y на x”, когда x является функцией от y, то говорим “регрессия x на y”.

Простая линейная регрессия. Простую линейную регрессию удобно записывать в виде

$$y = \alpha + \beta(x - \bar{x}),$$

где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — значения переменной x, α, β, σ^2 — неизвестные параметры.

Далее приводятся оценки максимального правдоподобия параметров α, β, σ^2 линейной регрессии и их свойства. При этом используются обозначения

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,\ S_1 = \sqrt{S_1^2},$$

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2,\ S_2 = \sqrt{S_2^2},$$

$$R_{12} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(\xi_i - \overline{\xi}).$$

Т е о р е м а 20.1.1 (об оценках максимального правдоподобия параметров α, β, σ^2). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые нормально распределенные случайные величины со средними*

$$\mathsf{M}\xi_i = \alpha + \beta(x_i - \overline{x}),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

и дисперсией σ^2.

Оценками максимального правдоподобия параметров α, β, σ^2 линейной регрессии

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$$

являются

$$\hat{\alpha} = \overline{\xi},\ \hat{\beta} = \frac{R_{12}}{S_1^2},\ \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_i - \overline{x})))^2.$$

З а м е ч а н и е. Для оценки $\hat{\sigma^2}$ имеет место представление

$$\hat{\sigma^2} = S_2^2\left(1 - \frac{R_{1,2}^2}{S_1^2 S_2^2}\right).$$

Далее мы будем использовать обозначение $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma^2}}$. Знак $\sim$ заменяет оборот “имеет распределение”.

Теорема 20.1.2 (о распределении оценок $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma^2}$). *Оценки максимального правдоподобия*

$$\hat{\alpha} = \overline{\xi}, \;\; \hat{\beta} = \frac{R_{12}}{S_1^2}, \;\; \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_i - \overline{x})))^2$$

параметров α, β, σ^2 *нормальной регрессии*

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$$

обладают следующими свойствами:

1) $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, $\hat{\sigma^2}$ *являются независимыми в совокупности случайными величинами;*

2) $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ *— несмещенные и состоятельные оценки соответственно* α *и* β*;* $\hat{\sigma^2}$ *— асимптотически несмещенная и состоятельная оценка* σ^2*;*

3)

$$(\hat{\alpha} - \alpha)\Big/\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-2}} \sim t_{n-2}, \tag{20.1.1}$$

$$(\hat{\beta} - \beta)\Big/\frac{\hat{\sigma}}{S_1\sqrt{n-2}} \sim t_{n-2}, \tag{20.1.2}$$

$$\frac{n\hat{\sigma^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}, \tag{20.1.3}$$

$$\frac{\Big((\hat{\alpha} - \alpha)^2 + S_1^2(\hat{\beta} - \beta)^2\Big)\Big/ 2}{\hat{\sigma^2}/(n-2)} \sim F_{2;n-2}. \tag{20.1.4}$$

Проверка гипотез о параметрах простой нормальной регрессии. Из соотношений (20.1.1) – (20.1.4) получаются критерии для проверки гипотез о коэффициентах α, β и дисперсии σ^2 и строятся доверительные интервалы для них.

Далее через $t_{\gamma;k}$, $\chi^2_{\gamma;k}$, $F_{\gamma;n,m}$ обозначаем верхние γ-пределы соответственно распределений t_k, χ^2_k, $\mathsf{F}_{n,m}$.

Критерий для проверки гипотезы $H_0\colon \alpha = \alpha_0$. *Если гипотезу* $H_0\colon \alpha = \alpha_0$ *отклонять при*

$$\left|(\hat\alpha - \alpha_0)\Big/\frac{\hat\sigma}{\sqrt{n-2}}\right| > t_{\gamma;n-2} \tag{20.1.5}$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью 2γ *гипотеза* H_0 *будет отклоняться, когда она верна* (*альтернатива двусторонняя*).

Критерий для проверки гипотезы $H_0\colon \beta = \beta_0$. *Если гипотезу* $H_0\colon \beta = \beta_0$ *отклонять при*

$$\left|(\hat\beta - \beta_0)\Big/\frac{\hat\sigma}{S_1\sqrt{n-2}}\right| > t_{\gamma;n-2} \tag{20.1.6}$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью 2γ *гипотеза* H_0 *будет отклоняться, когда она верна* (*альтернатива двусторонняя*).

В частности, для проверки гипотезы $H_0\colon \beta = 0$ (гипотеза о значимости регрессии) имеем критерий.

Если гипотезу $H_0\colon \beta = 0$ *отклонять при*

$$\left|\hat\beta\Big/\frac{\hat\sigma}{S_1\sqrt{n-2}}\right| > t_{\gamma;n-2} \tag{20.1.7}$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью 2γ *гипотеза* H_0 *будет отклоняться, когда она верна* (*альтернатива двусторонняя*).

Критерий для проверки гипотезы $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$. *Если гипотезу* $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2$ *отклонять при*

$$\frac{n\widehat{\sigma^2}}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\gamma;n-2} \tag{20.1.8}$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью γ *гипотеза* H_0 *будет отклоняться, когда она верна* (*альтернатива односторонняя:* $\sigma^2 > \sigma_0^2$).

Критерий для проверки гипотезы $H_0\colon \alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$. *Если гипотезу* $H_0\colon \alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ *отклонять при*

$$\frac{((\hat\alpha - \alpha_0)^2 + S_1^2(\hat\beta - \beta_0)^2)/2}{\widehat{\sigma^2}/(n-2)} > F_{\gamma;2;n-2} \tag{20.1.9}$$

и не отклонять в противном случае, то с вероятностью γ *гипотеза* H_0 *будет отклоняться, когда она верна* (*альтернатива:* $\alpha \neq \alpha_0$ *или* $\beta \neq \beta_0$).

Доверительные интервалы для параметров простой линейной регрессии. Доверительные интервалы для параметров α, β, σ^2 простой линейной регрессии очевидным образом получаются из соотношений (20.1.1), (20.1.2), (20.1.3), а именно, с вероятностью $1 - 2\gamma$ имеет место каждое из неравенств:

$$\hat{\alpha} - t_{\gamma;n-2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-2}} \leq \alpha \leq \hat{\alpha} + t_{\gamma;n-2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-2}}, \qquad (20.1.10)$$

$$\hat{\beta} - t_{\gamma;n-2}\frac{\hat{\sigma}}{S_1\sqrt{n-2}} \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_{\gamma;n-2}\frac{\hat{\sigma}}{S_1\sqrt{n-2}}, \qquad (20.1.11)$$

$$\frac{n\hat{\sigma^2}}{\chi^2_{\gamma;n-2}} < \sigma^2 < \frac{n\hat{\sigma^2}}{\chi^2_{1-\gamma;n-2}}. \qquad (20.1.12)$$

Совместная доверительная область для $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Из соотношения (20.1.4) получаем

$$\mathsf{P}\left\{\frac{((\alpha-\hat{\alpha})^2 + S_1^2(\beta-\hat{\beta})^2)/2}{\hat{\sigma^2}/(n-2)} \leq F_{\gamma;2;n-2}\right\} = 1-\gamma. \qquad (20.1.13)$$

Равенство (20.1.13) обозначает, что множество точек (x, y), задаваемое неравенством

$$\frac{(x-\hat{\alpha})^2}{2F_{\gamma;2;n-2}\,\hat{\sigma^2}/(n-2)} + \frac{(y-\hat{\beta})^2}{2F_{\gamma;2;n-2}\,\hat{\sigma^2}/(S_1^2(n-2))} \leq 1, \qquad (20.1.14)$$

является доверительной областью для параметров (α, β) с коэффициентом доверия $1-\gamma$ (доверительная область (20.1.14) "накрывает" неизвестные параметры (α, β) линейной регрессии $y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$ с вероятностью $1-\gamma$). Границей этой области является эллипс

$$\frac{(x-\hat{\alpha})^2}{2F_{\gamma;2;n-2}\,\hat{\sigma^2}/(n-2)} + \frac{(y-\hat{\beta})^2}{2F_{\gamma;2;n-2}\,\hat{\sigma^2}/(S_1^2(n-2))} = 1$$

с центром в точке $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ и полуосями

$$\sqrt{2F_{\gamma;2;n-2}\,\hat{\sigma^2}/(n-2)},\ \sqrt{2F_{\gamma;2;n-2}\,\hat{\sigma^2}/(S_1^2(n-2))}.$$

Проверка адекватности регрессии. Как и в задаче восстановления зависимости, см. с. 465, известно, что величины y и x связаны функциональной зависимостью, но сама зависимость неизвестна. Мы имеем возможность в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наблюдать значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, разумеется, с некоторыми погрешностями e_j, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, см. с. 465.

Относительно функциональной зависимости y от x из тех или иных соображений выдвигается гипотеза H_0: зависимость y от x имеет вид

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ — вполне определенная функция (или $f(x)$ принадлежит данному классу функций). Гипотеза

$$H_0 : y = f(x)$$

— это гипотеза об адекватности описания зависимости y от x функцией $y = f(x)$ (регрессией $y = f(x)$). По результатам наблюдений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственно в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ необходимо сделать выводы о гипотезе H_0 — отклонять H_0 или не отклонять. Если гипотеза $H_0\colon y = f(x)$ не отклоняется, то мы говорим, что регрессия $y = f(x)$ адекватно (хорошо) описывает зависимость y от x, в противном случае — нет.

При наличии повторных наблюдений можно построить критерий для проверки гипотезы $H_0 : y = f(x)$, по меньшей мере для проверки гипотезы

$$H_0\colon y = \alpha + \beta(x - \overline{x}).$$

Под *повторными наблюдениями* значения y_j (в точке x_j) будем понимать независимые нормально распределенные случайные величины $\xi_{j,1}, \xi_{j,2}, \ldots, \xi_{j,n_j}$ со средним y_j:

$$\mathsf{M}\xi_{j,\nu} = y_j,\ \nu = 1, 2, \ldots, n_j, \tag{20.1.15}$$

и дисперсией σ^2, одной и той же для всех наблюдений $\xi_{j,\nu}$:

$$\mathsf{D}\xi_{j,\nu} = \sigma^2,\ \nu = 1, 2, \ldots, n_j,$$

n_j — количество повторных наблюдений в точке x_j. Всего имеется k точек x_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, в каждой из которых проводилось соответственно по n_j наблюдений. Количество всех наблюдений, как и ранее, будем обозначать через n, ясно, что

$$\sum_{j=1}^{k} n_j = n.$$

В терминах наблюдений $\xi_{j,\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n_j, j = 1, 2, \ldots, k$, гипотеза H_0 — зависимость y от x имеет вид $y = f(x)$, формулируется так: у независимых нормально распределенных случайных величин $\xi_{j,\nu}$ со средними $\mathsf{M}\xi_{j,\nu} = y_j$, $\nu = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, и одной и той же дисперсией σ^2

$$y_j = f(x_j),\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Идея построения критерия для проверки гипотезы H_0: зависимость y от x описывается функцией $y = f(x)$, состоит в следующем. Тем или иным способом (чаще всего методом максимального правдоподобия или методом наименьших квадратов) по результатам наблюдений $\xi_{j,\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, оцениваем гипотетическую зависимость $y = f(x)$ — получаем эмпирическую регрессию $y = \hat{f}(x)$, если проверяется гипотеза

$$H_0 : y = \alpha + \beta(x - \overline{x}),$$

эмпирическая регрессия имеет вид $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x - \overline{x})$. И если функция $y = f(x)$ адекватно (хорошо) описывает зависимость y от x (гипотеза H_0 верна), то уклонения наблюдений $\xi_{j,\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n_j, j = 1, 2, \ldots, k$, относительно эмпирической регрессии $y = \hat{f}(x)$ должны быть малыми. Если же функция $y = f(x)$ неадекватно описывает зависимость y от x (гипотеза H_0 неверна), то наблюдения

$\xi_{j,\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n_j, j = 1, 2, \ldots, k$, уклоняются от эмпирической регрессии $y = \hat{f}(x)$ значительно.

Количественно уклонение наблюдений $\xi_{j,\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n_j, j = 1, 2, \ldots, k$, относительно эмпирической регрессии $y = \hat{f}(x)$ (разумеется, в точках x_j) естественно описывать величиной

$$s_2^2 = \frac{1}{k-2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(\overline{\xi}_j - \hat{f}(x_j))^2. \tag{20.1.16}$$

Поэтому для проверки гипотезы $H_0 : y = f(x)$ вычисляем уклонение s_2^2. Если s_2^2 приняло малое значение — лежит в пределах погрешности наблюдений σ^2, т. е. отношение s_2^2/σ^2 малое, мы гипотезу H_0 не отклоняем. Если значение уклонения s_2^2 превышает погрешность наблюдений σ^2, т. е. отношение s_2^2/σ^2 большое, мы гипотезу H_0 отклоняем. А поскольку погрешность наблюдений σ^2 неизвестна, мы будем сравнивать уклонение s_2^2 не с σ^2, а с ее несмещенной оценкой

$$s_1^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(\xi_{j,\nu} - \overline{\xi_j})^2,$$

где

$$\overline{\xi_j} = \frac{1}{n_j}\sum_{\nu=1}^{n_j}\xi_{j,\nu},\ j = 1, 2, \ldots, k,\ n = \sum_{j=1}^{k} n_j,$$

— если отношение s_2^2/s_1^2 приняло большое значение — гипотезу H_0 отклоняем, в противном случае — нет.

Заметим, что оценку для σ^2 можно получить только при наличии повторных наблюдений.

В случае проверки гипотезы H_0: зависимость y от x описывается функцией

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}),$$

уклонение s_2^2 (см. (20.1.16)) наблюдений $\xi_{j,\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n_j, j = 1, 2, \ldots, k$, относительно эмпирической регрессии

$$y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x - \overline{x})$$

имеет вид

$$s_2^2 = \frac{1}{k-2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_j} (\overline{\xi_j} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_j - \overline{x})))^2 =$$

$$= \frac{1}{k-2} \sum_{j=1}^{k} n_j (\overline{\xi_j} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_j - \overline{x})))^2. \qquad (20.1.17)$$

И, что важно, *при верной гипотезе H_0 отношение s_2^2/s_1^2 имеет $\mathsf{F}_{k-2;n-k}$-распределение.* Последнее дает возможность определить границы, отделяющие большие значения отношения s_2^2/s_1^2 от малых и вместе с тем получить следующий критерий для проверки гипотезы

$$H_0\colon \mathsf{M}\xi_{j,\nu} = \alpha + \beta(x_j - \overline{x}),\ \nu = 1, 2, \ldots, n_j,\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

— гипотезы об адекватности описания зависимости y от x линейной регрессией $y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$.

Если гипотезу H_0 об адекватности линейной регрессии не отклонять при

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} < F_{\gamma;k-2;n-k} \qquad (20.1.18)$$

и отклонять в противном случае, то с вероятностью γ гипотезу H_0 будем отклонять, когда она верна.

З а м е ч а н и е. В случае повторных наблюдений, выписывая значение $\overline{x}$ и значения оценок $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}, \hat{\sigma^2}$ соответственно параметров α, β, σ^2, удобно пользоваться двойными индексами не только для наблюдений:

$$\xi_{j,\nu},\ \nu = 1, 2, \ldots, n_j,\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

но и для точек x_j, в которых проводились наблюдения, а именно

$$x_{j,\nu} = x_j,\ \nu = 1, 2, \ldots, n_j,\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

При этом для $\overline{x}$, S_1^2, $\overline{\xi}$, S_2^2, R_{12} (см. теорему 20.1.1 об оценках параметров) мы получим следующие выражения:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j} x_{j,\nu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j,$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(x_{j,\nu} - \overline{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(x_j - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j(x_j - \overline{x})^2,$$

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}\xi_{j,\nu},$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(\xi_{j,\nu} - \overline{\xi})^2,$$

$$R_{12} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(x_{j,\nu} - \overline{x})(\xi_{j,\nu} - \overline{\xi}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(x_j - \overline{x})(\xi_{j,\nu} - \overline{\xi}).$$

Проверка адекватности теории эксперименту. Для величины y известно теоретически предсказанное (вычисленное) значение x. Величина y наблюдается в эксперименте n раз и для каждого наблюдения y_j мы имеем его теоретически предсказанное значение x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

В эксперименте мы наблюдаем значения y_j с погрешностями, т. е. наблюдая y_j, мы фактически получаем

$$\xi_j = y_j + e_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

где e_j — погрешность j-го наблюдения, $j = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому даже если теоретические значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точно предсказывают $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т. е. $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n$ — теория согласуется с экспериментом, наблюдаемые значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ соответственно величин $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их теоретические значения $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ совпадать не будут — погрешности

$$\xi_j - x_j = e_j, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

неизбежно отличны от нуля.

В связи с этим возникает вопрос: “Можно ли по теоретически предсказанным значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ величин $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их наблюдаемым значениям $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ сделать выводы о согласии (или несогласии) теории с экспериментом?” Другими словами, можно ли считать, что расхождения $\xi_1 - x_1 = e_1, \xi_2 - x_2 = e_2, \ldots, \xi_n - x_n = e_n$ между наблюдаемыми значениями $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ величин $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их теоретическими значениями $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ находятся в пределах погрешностей наблюдений или же эти расхождения свидетельствуют о неадекватности описания теорией наблюдений?

Один из возможных подходов состоит в следующем. Пусть из тех или иных соображений известно (можно считать), что величина y и её предсказанное теорией значение x связаны линейной зависимостью

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}).$$

По наблюдениям $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ можно получить оценки $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, для коэффициентов линейной регрессии $y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$ и проверить те или иные гипотезы о параметрах α, β. В рассматриваемой задаче об адекватности теории эксперименту представляет интерес результаты проверки гипотез

$$1)\ H_{0;1}\colon \beta = 0; \ \ 2)\ H_{0;2}\colon \beta = 1;$$

$$3)\ H_{0;3}\colon \beta = \beta_0 = 1,\ \alpha = \alpha_0 = \overline{x},$$

которые дают возможность говорить о согласии или несогласии теории с экспериментом.

1. Гипотеза $H_{0;1}\colon \beta = 0$. Если гипотеза $H_{0;1}\colon \beta = 0$ не отклоняется, то зависимость y от x имеет вид

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}) = \alpha.$$

Последнее обозначает, что величина y не зависит от x, т. е. значение x_j, "претендующее" на роль предсказанного значения y_j, на самом деле таковым не является.

2. Гипотеза $H_{0;2} : \beta = 1$. Неотклонение гипотезы свидетельствует в пользу согласия теории с экспериментом, если при этом $\alpha - \overline{x} \neq 0$, то присутствует систематическая ошибка.

3. Гипотеза $H_{0;3} : \beta = \beta_0 = 1,\ \alpha = \alpha_0 = \overline{x}$. Если гипотеза $H_{0;3} : \beta = \beta_0 = 1,\ \alpha = \alpha_0 = \overline{x}$ не отклоняется, то можно считать, что зависимость $y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$ величины y от x имеет вид

$$y = x,$$

что естественно интерпретировать как согласие теории с экспериментом.

Замечание. Гипотеза об адекватности описания теорией наблюдаемой в опыте величины y проверяется в предположении о линейной зависимости

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$$

величины y и ее предсказанных теорией значений x. В справедливости (или ошибочности) последнего предположения можно убедиться проверив, гипотезу об адекватности линейной регрессии $y = \alpha + \beta(x - \overline{x})$ (при наличии повторных наблюдений это всегда можно сделать). Если при этом гипотеза об адекватности линейной регрессии не отклоняется, то можно воспользоваться изложенным подходом проверки согласия теории с экспериментом (с опытными данными), в противном случае — нет.

Пример 20.1.1 (эксперимент Эддингтона). *Рассмотрим пример проверки адекватности теории эксперименту. Речь идет о проверке общей теории относительности по отклонению луча света в поле тяготения. Данные для статистической обработки взяты из сборника статей Альберта Эйнштейна "Физика и реальность" (М.,"Наука",* 1965).

Схема опыта, проведенного под руководством Эддингтона, состоит в следующем (см. рис. 20.1.1). *Пусть звезда лежит примерно в плоскости земной орбиты. Тогда* *в момент, когда Земля находится в положении 1, звезда видна в направлении 1.*

Через полгода Земля окажется в положении 2, и если бы луч света в поле тяготения Солнца не отклонялся, звезда из положения 2 Земли в направлении 2 не наблюдалась бы. Тем не менее звезда из положения 2 наблюдается (см. рис. 20.1.1), но она как бы смещена и это смещение можно вычислить. (Разумеется, наблюдать звезду из положения 2 Земли в направлении 2 можно лишь в момент полного солнечного затмения — когда Солнце "не мешает" наблюдать звезду.)

Для наблюдения было выбрано 7 звезд. Их видимые перемещения (векторы на небесной сфере, которые из-за малости можно считать векторами на плоскости) разлагались по двум осям координат. Полученные результаты (в угловых секундах) приведены в таблицах 20.1.1, 20.1.2, где x_i *— вычисленная координата вектора перемещения,* ξ_i *— наблюденная координата вектора перемещения.*

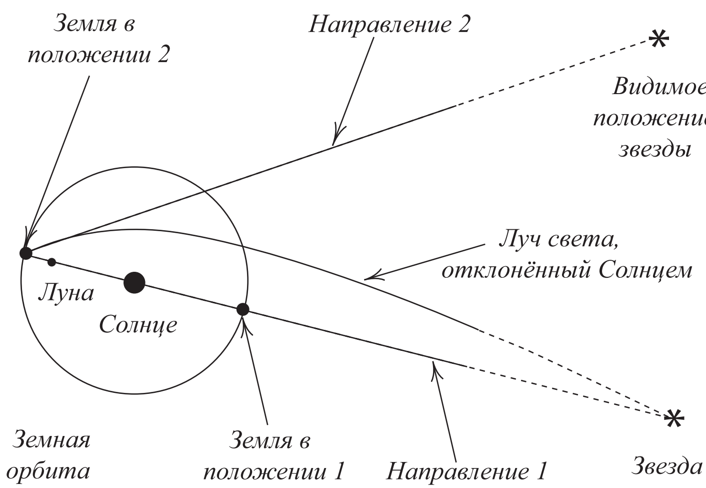


Рис. 20.1.1: Отклонение луча света звезды в поле тяготения Солнца

Таблица 20.1.1. Первая координата

x_i	$-0{,}22$	$+0{,}31$	$+0{,}10$	$+0{,}12$	$+0{,}04$	$+0{,}09$	$+0{,}85$
ξ_i	$-0{,}19$	$+0{,}29$	$+0{,}11$	$+0{,}20$	$+0{,}10$	$-0{,}08$	$+0{,}95$

Таблица 20.1.2. Вторая координата

x_i	$+0{,}02$	$-0{,}43$	$+0{,}74$	$+0{,}87$	$+0{,}40$	$+0{,}32$	$-0{,}09$
ξ_i	$+0{,}16$	$-0{,}46$	$+0{,}83$	$+1{,}00$	$+0{,}57$	$+0{,}35$	$-0{,}27$

Согласуются ли вычисленные значения координат векторов перемещений с наблюденными?

Решение. Рассмотрим вопрос о согласии вычисленных значений координат с наблюденными для первой координаты (см. табл. 20.1.1).

Проведенные ранее наблюдения дают основания считать, что вычисленные (предсказанные теорией) значения x координат и наблюденные y связаны линейной зависимостью

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}).$$

Здесь

$$\overline{x} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = 0{,}184.$$

По результатам наблюдений (см. табл. 20.1.1) получим оценки неизвестных параметров регрессии:

$$\hat{\alpha} = \overline{\xi} = 0{,}197,\ \hat{\beta} = 1{,}081,\ \hat{\sigma^2} = 0{,}006,\ S_1^2 = 0{,}0948$$

(см. теорему 20.1.1).

Сначала проверим гипотезу $H_{0;1} : \beta = 0$, неотклонение которой свидетельствует об отсутствии какой-либо связи между теорией и экспериментом.

Согласно (20.1.7),

$$\left|\frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}/(S_1\sqrt{n-2})}\right| = \left|\frac{1{,}081}{\sqrt{0{,}006/(0{,}0948\cdot 5)}}\right| =$$

$$= 9{,}61 > t_{0,01;5} = 3{,}365.$$

Так что обидная для Эйнштейна гипотеза об отсутствии связи теории с опытом отклоняется.

Далее проверим гипотезу $H_{0;2}\colon \beta = \beta_0 = 1$. Согласно (20.1.6),

$$\left|\frac{\hat{\beta}-\beta_0}{\hat{\sigma}/(S_1\sqrt{n-2})}\right| = \left|\frac{1{,}081-1}{\sqrt{0{,}006/(0{,}0948\cdot 5)}}\right| =$$

$$= 0{,}72 < t_{0{,}01;5} = 3{,}365.$$

И, следовательно, гипотеза $H_{0;2}\colon \beta = \beta_0 = 1$ не отклоняется. Последнее можно трактовать как согласие опыта с экспериментом, но при этом возможна систематическая ошибка (если $\alpha \neq \overline{x}$).

В согласии (или несогласии) теории с опытом можно убедиться, проверяя гипотезу

$$H_{0;3}\colon \beta = 1,\ \alpha = 0{,}184.$$

Согласно (20.1.9)

$$\frac{((\hat{\alpha}-\alpha)^2 + S_1^2(\hat{\beta}-\beta)^2)/2}{\hat{\sigma^2}/(n-2)} =$$

$$= \frac{((0{,}197-0{,}184)^2 + 0{,}0948(1{,}081-1)^2)/2}{0{,}006/5} =$$

$$= 0{,}33 < F_{0{,}01;2;5} = 13{,}3.$$

Следовательно гипотеза $H_{0;3}$ не отклоняется, поэтому можно считать, что $\beta = 1$, $\alpha = 0{,}184$, а зависимость y от x имеет вид

$$y = x,$$

что подтверждает согласие теории с опытом по первой координате.

Аналогично можно убедиться в согласии теории с опытом по второй координате.

Пример 20.1.2. *В книге Д. И. Менделеева “Основы химии” приведены данные о растворимости азотнокислого натрия* $\mathrm{NaNO_3}$ *в зависимости от температуры воды. В таблице приведены данные о количестве условных частей* $\mathrm{NaNO_3}$, *которые растворяются в* 100 *частях воды при соответствующих температурах* (x — *температура в градусах по Цельсию,* ξ — *растворимость в условных частях на* 100 *частей воды*).

x	ξ	x	ξ
0	66,7	29	92,9
4	71,0	36	99,4
10	76,3	51	113,6
15	80,6	68	125,1
21	85,7		

Теоретические соображения дают основания предполагать, что зависимость количества растворенного вещества от температуры является линейной:

$$\xi = \alpha + \beta(x - \overline{x}).$$

Найти оценки максимального правдоподобия параметров α, β и дисперсии σ^2. Построить доверительные интервалы для α, β, σ^2. Проверить гипотезу $H_0 : \beta = 0$ о значимости регрессии.

Решение.

$$\overline{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = 26, \ \overline{\xi} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} \xi_i = 90{,}14,$$

$$S_1^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})^2 = 451{,}11,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(\xi_i - \overline{\xi})^2 = 342{,}66,$$

$$R_{12} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})(\xi_i - \overline{\xi}) = 392{,}75.$$

Оценки максимального правдоподобия коэффициентов α, β простой линейной регрессии:

$$\hat{\alpha} = \overline{\xi} = 90{,}14, \ \hat{\beta} = \frac{R_{12}}{S_1^2} = 0{,}87.$$

Оценка максимального правдоподобия дисперсии σ^2:

$$\hat{\sigma^2} = S_2^2\left(1 - \frac{R_{12}^2}{S_1^2 S_2^2}\right) = 0{,}72.$$

Уравнение эмпирической линии регрессии:

$$y = 90{,}14 + 0{,}87(x - 26).$$

Проверим гипотезу $H_0 : \beta = 0$ о значимости линии регрессии. Согласно (20.1.7)

$$\left| \frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}/\sqrt{S_1^2(n-2)}} \right| = \left| \frac{0{,}87}{\sqrt{0{,}7158/451{,}11(9-2)}} \right| =$$

$$= 57{,}83 > t_{0{,}05;7} = 1{,}895,$$

поэтому гипотеза $H_0 : \beta = 0$ отклоняется, линейная регрессия значима.

Согласно (20.1.10) – (20.1.12) доверительными интервалами с коэффициентами надежности 0,90 для параметров регрессии являются: (89,54; 90,75) — для параметра α, (0,84; 0,90) — для параметра β, (0,46; 2,97) — для параметра σ^2.

20.2 Задачи

20.1 (тормозной путь). При изучении движения уличного транспорта фиксировалось расстояние s, пройденное автомобилем по инерции после сигнала "остановиться" (тормозной путь) в зависимости от скорости v. Наблюдения проводились для различных автомобилей, с разными водителями, различным поверхностным покрытием дороги и т. д. Результаты наблюдений приведены в таблице, где s — тормозной путь в метрах, v — скорость автомобиля в км/час.

В предположении, что зависимость между тормозным путем автомобиля и скоростью линейная:

$$s = \alpha + \beta(v - \overline{v}),$$

найти оценки максимального правдоподобия параметров α, β и дисперсии σ^2; построить доверительные интервалы для параметров α, β, σ^2; проверить гипотезу о значимости линейной регрессии. Проверить гипотезу об адекватности линейной регрессии.

На плоскости (v, s) изобразить исходные данные и построить эмпирическую линию регрессии.

v	s	v	s	v	s	v	s
6	0,6	19	7,3	26	9,8	32	14,6
6	3,0	19	8,5	26	12,2	32	15,6
11	1,2	21	7,9	27	9,8	32	17,1
11	6,7	21	10,4	27	12,2	32	19,5
13	4,9	21	10,4	27	15,2	35	20,1
14	3,0	21	14,0	29	12,8	37	16,5
16	5,5	23	7,9	29	17,1	39	21,3
16	7,9	23	11,0	29	23,2	39	28,0
16	10,4	23	18,3	29	25,6	39	28,4
18	5,2	23	24,4	31	11,0	39	36,6
18	8,5	24	6,1	31	14,0	40	25,9
19	4,3	24	7,9	31	20,8		
19	6,1	24	16,5	32	9,8		

20.2. Исследуется содержание аскорбиновой кислоты, сохранившейся в овощах в процессе их сушки и хранения.

Далее приведено содержание сухого вещества в свежем шпинате и содержание аскорбиновой кислоты, сохранившейся после сушки шпината при температуре 90°C (x — содержание сухого вещества в свежем шпинате в процентах; y — содержание аскорбиновой кислоты после сушки в процентах).

Имеются основания предполагать, что зависимость содержания сохранившейся аскорбиновой кислоты от содержания сухого вещества линейная:

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}).$$

Найти оценки максимального правдоподобия параметров α, β простой линейной регрессии и дисперсии σ^2, построить доверительные интервалы для параметров α, β, и σ^2, проверить гипотезу о значимости регрессии, гипотезу об адекватности линии регрессии.

x	y	x	y	x	y
7,8	69,4	10,0	66,7	11,2	89,6
8,2	50,9	10,0	88,9	11,2	83,8
8,9	74,0	10,1	76,0	11,2	67,9
8,9	58,6	10,2	77,2	11,8	79,9
9,0	66,4	10,3	69,8	12,3	83,1
9,2	80,6	10,7	69,0	12,5	74,2
9,5	61,9	10,8	65,2	12,9	86,0
10,0	70,9	11,1	77,2	14,9	88,2

На плоскости (x, y) изобразить исходные данные и построить эмпирическую линию регрессии.

20.3. В таблице приведены результаты экспериментального исследования количества тепла, выделяемого в процессе затвердения портландского цемента в зависимости от состава клинкеров (x — содержание в клинкерах алюмината кальция $3CaOAl_2O_3$ в процентах от веса клинкеров, y — количество тепла, выделенного на протяжении 180 дней, в калориях на грамм цемента).

x	y	x	y	x	y
1	74,3	7	78,5	11	109,2
1	72,5	7	95,9	11	113,3
1	83,8	10	109,4	21	115,9
2	93,1	11	104,3		
3	102,7	11	87,6		

Предполагая, что количество тепла является линейной функцией содержания алюмината кальция:

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}),$$

найти оценки максимального правдоподобия параметров α, β простой линейной регрессии и дисперсии σ^2. Построить доверительные интервалы для параметров α, β, σ^2, проверить гипотезу о значимости регрессии, гипотезу об адекватности линейной регрессии.

На плоскости (x, y) изобразить исходные данные и построить эмпирическую линию регрессии.

20.4 (барометрическое давление и точка кипения воды). Исследовалась зависимость между барометрическим давлением и точкой кипения воды. Цель исследования — оценить высоту над уровнем моря по температуре кипения воды. В горных условиях для определения барометрического давления удобнее измерять температуру кипения воды. В таблице приведены данные об измерениях барометрического давления и точки кипения воды в 17 экспериментах.

Предполагая, что зависимость барометрического давления от точки кипения воды линейная:

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}),$$

найти оценки максимального правдоподобия параметров α, β и дисперсии σ^2. Построить доверительные интервалы для α, β, σ^2. Проверить гипотезу о значимости регрессии.

Номер	Давление	Точка кипения	Номер	Давление	Точка кипения
1	20,79	194,5	10	24,01	201,3
2	20,79	194,3	11	25,14	203,6
3	22,40	197,9	12	26,57	204,6
4	22,67	198,4	13	28,49	209,5
5	23,15	199,4	14	27,76	208,6
6	23,35	199,9	15	29,04	210,7
7	23,89	200,9	16	29,88	211,9
8	23,99	201,1	17	30,66	212,2
9	24,02	201,4			

На плоскости (x, y) изобразить исходные данные и построить эмпирическую линию регрессии.

20.5 (потребление вина и смерть от сердечного приступа). Полезно ли вино для здоровья? Имеются данные, свидетельствующие о том, что употребление вина в умеренных количествах способствует предотвращению сердечных приступов.

В таблице приведены данные о годовом потреблении вина на человека (в литрах l алкоголя, выпитого с вином) и количестве n смертей в год от сердечных заболеваний (на 100 000 человек) в 19 развитых странах.

Предполагая, что зависимость количества n смертей от годового потребления l вина линейная:

$$n = \alpha + \beta(l - \bar{l}),$$

найти оценки максимального правдоподобия параметров α, β и дисперсии σ^2. Построить доверительные интервалы для α, β, σ^2. Проверить гипотезу о значимости регрессии.

Страна	l	n	Страна	l	n
Австралия	2,5	211	Нидерланды	1,8	167
Австрия	3,9	167	Новая Зеландия	1,9	266
Бельгия	2,9	131	Норвегия	0,8	227
Канада	2,4	191	Испания	6,5	86
Дания	2,9	220	Швеция	1,6	207
Финляндия	0,8	297	Швейцария	5,8	115
Франция	9,1	71	Великобритания	1,3	285
Исландия	0,8	211	США	1,2	199
Ирландия	0,7	300	Германия	2,7	172
Италия	7,9	107			

На плоскости (l, n) изобразить исходные данные и построить эмпирическую линию регрессии.

20.6 (остеопения и количество выводимого из организма кальция). Потеря кальция в костной ткани человека — остеопения 1, 2, 3, 4 степени в своих тяжелых формах (4-я степень остеопении — остеопороз) ведет к разрушению костной ткани. В настоящее время остеопороз приобретает формы широко распространенного заболевания. Степень потери кальция в костной ткани человека определяют при помощи ультразвуковой денситометрии, которая не всегда доступна как по причине ее дороговизны, так и недостаточной обеспеченности соответствующей аппаратурой. Предлагается метод диагностирования степени остеопении — по содержанию кальция, выводимого с мочой. Обозначим через T результат денситометрического исследования, характеризующего плотность костной ткани и содержание кальция в ней. Если значение T принадлежит промежутку $[-i-1; -i)$, то состояние костной ткани определяется как i-я степень остеопении, $i = 1, 2, 3, 4$. При значении T из промежутка $[-2; -1)$ степень остеопении классифицируется как средняя, при $T \leq -2$ — как тяжелая. Через Ca обозначим количество кальция, выводимого с мочой. Исходя из данных Института гастроэнтерологии Академии медицинских наук Украины (см. таблицу), убедитесь, что между величинами T и Ca существует линейная зависимость — постройте линейную регрессию T на Ca.

Ca	T	Ca	T	Ca	T	Ca	T
2,20	0,23	3,12	–1,63	3,84	–2,10	4,40	–1,77
2,20	0,60	3,20	–0,21	4,10	–1,51	4,63	–1,61
2,24	–1,21	3,20	2,06	4,12	–1,86	4,80	–1,04
2,32	–0,04	3,20	–1,20	4,12	–0,65	5,80	–2,13
2,50	0,14	3,20	-1,49	4,20	–0,80	5,84	–2,94
2,60	0,49	3,35	–0,90	4,20	–0,60	5,90	–2,34
2,60	0,07	3,50	–1,40	4,20	0,54	6,10	–2,56
2,62	–0,02	3,50	0,23	4,20	–2,23	6,70	–1,62
2,64	–0,27	3,60	–0,15	4,24	0,15	6,80	–2,67
2,67	–1,62	3,60	–0,20	4,24	0,00	6,82	–2,96
2,76	–0,05	3,60	–0,20	4,30	–1,43	7,82	–4,08
2,80	–1,84	3,60	1,00	4,32	–1,80	7,82	–3,61
2,80	–2,04	3,64	–1,46	4,40	–1,61	7,82	–2,91

Проверьте гипотезы о значимости и адекватности линейной регрессии. По известной зависимости T от Ca

дифференцируйте тяжелую форму остеопении (остеопороз) по количеству выводимого Ca.

На плоскости (Ca, T) изобразить исходные данные и построить эмпирическую линию регрессии.

20.7. В таблице приведено содержание в процентах крахмала и протеина в зернах пшеницы, которым характеризуется качество пшеницы (y — содержание протеина, x — содержание крахмала). Определение протеина требует сложного химического анализа, тогда как содержание крахмала определить просто.

y	x	y	x	y	x
10,3	60	10,8	45	14,4	85
12,2	75	11,4	51	15,8	96
14,5	87	11,0	17	15,6	92
11,1	55	10,2	36	15,0	94
10,9	34	17,0	97	13,3	84
18,1	98	13,8	74	19,0	99
14,0	91	10,1	24		

Предполагая, что зависимость содержания протеина от содержания крахмала линейная:

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}),$$

найти оценки максимального правдоподобия параметров α, β и дисперсии σ^2. Построить доверительные интервалы для параметров α, β, σ^2. Проверить гипотезу о значимости регрессии.

На плоскости (x, y) изобразить исходные данные и построить эмпирическую линию регрессии.

20.8. В таблице приведены результаты измерения скоростей v (в км/сек) и расстояний s от Земли до туманности (в млн парсек) для десяти внегалактических туманностей.

v	s	v	s
1,20	630	9,12	4820
1,82	890	10,97	5230
3,31	2350	14,45	7500
7,24	3810	22,91	11800
8,92	4630	36,31	19600

Предполагая, что скорость галактики линейно зависит от расстояния:

$$v = \alpha + \beta(s - \overline{s}),$$

найти оценки параметров α, β и дисперсии σ^2; построить доверительные интервалы для параметров α, β, σ^2. Проверить гипотезу $H_0 \colon \beta = 0$ о значимости регрессии.

На плоскости (s, v) изобразить исходные данные и построить эмпирическую линию регрессии.

20.9 (стоимость эксплуатации самолета и его возраст). Дирекция авиакомпании с целью планирования расходов хочет установить количественную зависимость стоимости эксплуатации самолета от продолжительности его эксплуатации (от "возраста" самолета). Со временем из-за старения деталей и узлов самолета компания несет большие затраты на поддержание его в рабочем состоянии, в частности, необходимо чаще проводить ремонтно-профилактические работы, заменять отдельные узлы.

В таблице приведены данные о стоимости эксплуатации самолетов и их возрасте (x — возраст самолета в годах, y — стоимость эксплуатации самолета в течение полугода в долларах).

Предполагая, что зависимость стоимости эксплуатации самолета от его "возраста" линейная, найти оценки максимального правдоподобия параметров α, β и дисперсии σ^2. Построить доверительные интервалы для параметров α, β, σ^2. Проверить гипотезу о значимости линейной регрессии, гипотезу об адекватности линейной регрессии.

x	y	x	y
4,5	619	5,5	987
4,5	1049	0,5	163
4,5	1033	0,5	182
4,0	495	6,0	764
4,0	723	6,0	1373
4,0	681	1,0	978
5,0	890	1,0	466
5,0	1522	1,0	549
5,0	1194		

На плоскости (x, y) изобразить исходные данные и построить эмпирическую линию регрессии.

20.10. Ниже приведены результаты эксперимента по изучению нового метода измерения скорости крови в организме человека (x — скорость крови, найденная стандартным методом, y — с помощью нового метода).

x	y	x	y	x	y
1190	1115	1900	1830	2720	2630
1455	1425	1920	1920	2710	2740
1550	1515	1960	1970	2530	2390
1730	1795	2295	2300	2900	2800
1745	1715	2335	2280	2760	2630
1770	1710	2490	2520	3010	2970

Предполагая, что зависимость между скоростью крови, измеренной с помощью нового метода, и стандартного линейна:

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}),$$

найти оценки максимального правдоподобия параметров α, β и дисперсии σ^2. Построить доверительные интервалы для α, β, σ^2. Проверить гипотезу о значимости регрессии.

На плоскости (x, y) изобразить исходные данные и построить эмпирическую линию регрессии.

20.11. Функциональной и структурной единицей нервной системы является нейрон (нервная клетка), составляющей которого является дендрит (он по форме напоминает дерево). Большинство характеристик дендрита нейрона — случайные величины, в частности, диаметр сегмента дендрита нейрона.

В таблице приведены результаты измерений (в мкм) диаметра y начала дочернего сегмента и диаметра x материнского сегмента. Предполагая, что зависимость y от x линейная:

$$y = \alpha + \beta(x - \overline{x}),$$

найти оценки максимального правдоподобия параметров α, β и дисперсии σ^2. Построить доверительные интервалы для параметров α, β, σ^2. Проверить гипотезу о значимости регрессии, гипотезу об адекватности линейной регрессии.

x	y	x	y	x	y	x	y
0,40	0,40	0,60	0,60	0,75	0,60	1,00	0,45
0,45	0,45	0,60	0,60	0,75	0,70	1,00	0,55
0,45	0,45	0,60	0,60	0,75	0,75	1,00	0,75
0,45	0,45	0,65	0,35	0,75	0,75	1,00	0,85
0,45	0,45	0,65	0,45	0,80	0,40	1,00	0,85
0,45	0,45	0,65	0,45	0,80	0,50	1,00	1,00
0,50	0,40	0,65	0,45	0,80	0,50	1,05	0,60
0,50	0,40	0,65	0,50	0,80	0,50	1,05	0,65
0,50	0,45	0,65	0,50	0,80	0,60	1,05	0,75
0,50	0,45	0,65	0,50	0,80	0,60	1,10	0,90
0,50	0,50	0,65	0,60	0,80	0,80	1,15	0,60
0,50	0,50	0,65	0,60	0,85	0,50	1,15	0,65
0,50	0,70	0,65	0,65	0,85	0,55	1,20	0,65
0,55	0,35	0,65	0,65	0,85	0,55	1,25	0,85
0,55	0,40	0,65	0,65	0,85	0,60	1,25	1,00
0,55	0,45	0,65	0,65	0,85	0,65	1,30	0,85
0,55	0,45	0,65	0,65	0,85	0,65	1,35	0,90
0,55	0,55	0,70	0,45	0,85	0,65	1,35	0,90
0,55	0,55	0,70	0,45	0,85	0,85	1,35	1,00
0,55	0,55	0,70	0,50	0,90	0,90	1,35	1,60
0,55	0,55	0,70	0,50	0,90	0,90	1,40	0,75
0,55	0,55	0,70	0,55	0,95	0,60	1,45	0,75
0,55	0,55	0,70	0,65	0,95	0,60	1,50	0,90
0,60	0,50	0,70	0,80	0,95	0,80	1,60	0,95
0,60	0,55	0,75	0,50	0,95	0,95	1,65	0,65
0,60	0,60	0,75	0,50	0,95	1,05		

На плоскости (x, y) изобразить исходные данные и построить эмпирическую линию регрессии.

20.12. Проверить, согласуется ли теория с экспериментом по второй координате (см. пример 20.1.1 и данные таблицы 20.1.2).

Найти оценки максимального правдоподобия параметров α, β и дисперсии σ^2, построить доверительные интервалы для параметров α, β, σ^2.

Глава 21

Решения, указания, ответы

21.1 К главе 1

1.1°. mn. **1.2°.** 49; 42. **1.3°.** $17 \cdot 16 \cdot 15$.
1.4°. $4 \cdot 5 \cdot 5$. **1.5°.** $4 \cdot 4 \cdot 3$. **1.6°.** 7! **1.7°.** A_{10}^6.
1.8°. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2$. **1.9°.** $26^2 \cdot 10^4$. **1.10.** $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot C_{13}^2$.
1.11°. C_9^4. **1.12°.** C_5^3. **1.13°.** 4!

1.14. Делители числа $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ имеют вид $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ и определяются набором целых неотрицательных чисел $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ $(0 \le \beta_i \le \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n)$. Число таких упорядоченных наборов (а вместе с ними и делителей) согласно правилу умножения равно

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1).$$

1.15. $2 \cdot (n-1)!$ **1.16°.** A_{25}^4. **1.17°.** A_8^4. **1.18.** $(n-2)!$

1.19. C_9^4, указанные числа однозначно задаются множеством своих цифр.

1.20. C_{10}^4 (см. решение к задаче 1.19).

1.21*. Заполняем все клетки таблицы, кроме клеток последней строки и последнего столбца (правого), числами $+1$ и -1 (согласно правилу умножения, это можно сделать $2^{(n-1)(m-1)}$ способами). Заполняем $n-1$ клеток последней строки, кроме последней (правой) так, чтобы произведение чисел в каждом столбце равнялось $+1$. Заполняем клетки последнего столбца так, чтобы произведение чисел в каждой из $m-1$ первых строк и в последнем столбце равнялось $+1$. Следовательно, произведение чисел в каждом столбце будет равно $+1$ и в каждом из $m-1$ первых строк будет равно $+1$, но тогда произведение чисел и в последней строке будет равно $+1$, поскольку в таблице произведение чисел по строкам равно произведению по столбцам.

Ответ: $2^{(n-1)(m-1)}$.

1.22. Из $p+1$ промежутков между белыми шарами (учитывая два крайние бесконечные промежутка) выберем q, в которых расположим черные шары. Это можно сделать C_{p+1}^q способами.

1.23 (3). Последовательно проводим на плоскости прямые. Пусть проведено $n-1$ прямых и A_{n-1} — число частей плоскости, которые при этом образовались. Проведем n-ю прямую. К A_{n-1} частям n-я прямая добавит еще n частей, поэтому $A_n = A_{n-1} + n$. Подробнее: $A_1 = 2$, $A_2 = A_1 + 2, \ldots, A_n = A_{n-1} + n, \ldots$ Складывая почленно первые n равенств, получим $A_n = n(n+1)/2 + 1$.

Ответы: 1) C_n^2; 2) C_n^3; 3) $n(n+1)/2+1$; 4) $2n$ — количество неограниченных частей, $n(n-3)/2+1$ — количество ограниченных.

1.24. $n(n-3)/2$.

1.25. Каждая точка пересечения диагоналей задает четыре вершины n-угольника и наоборот, поэтому число точек пересечения диагоналей равно C_n^4.

1.26*. Всего диагоналей $N = n(n-3)/2$ (см. задачу 1.24). Пусть $k-1$ первых диагоналей делят многоугольник на A_{k-1} частей. Проведем k-ю диагональ. Обозначим через p_k число точек пересечения k-й диагонали с первыми $k-1$ диагоналями. Тогда $A_k = A_{k-1} + (p_k + 1)$.

Ответ: $1 + C_n^4 + n(n-3)/2$.

1.27. Воспользоваться методом математической индукции.

1.28. Записать элементы в список и приписать каждому из них номер места в списке.

1.29. Воспользоваться правилом умножения.

1.30. С одной стороны, n-элементное множество можно упорядочить $n!$ способами. С другой — $C_n^k k!(n-k)!$ способами — сначала разбить его на два непересекающихся подмножества (C_n^k способами), а затем упорядочить каждое из них (соответственно $k!$ и $(n-k)!$ способами). Поэтому $n! = C_n^k k!(n-k)!$

1.32. С одной стороны, n-элементное множество можно упорядочить $n!$ способами. С другой стороны —

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) k_1! k_2! \ldots k_m!$$

способами — сначала разбить его на m непересекающихся подмножеств, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов (это можно сделать $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ способами), а затем упорядочим каждое из них соответственно $k_1!, k_2!, \ldots, k_m!$ числом способов. Поэтому

$$n! = C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) k_1! k_2! \ldots k_m!$$

1.33. Слово задается выбором мест под букву каждого типа (разбиением множества на подмножества).

1.34. $C_{m+n+s}(m, n, s)$. **1.35.** $C_{3n}(n, n, n)$.

1.36. Слову длиной n из k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, ..., k_m букв a_m (а таких слов $n!/(k_1!k_2!\ldots k_m!)$) соответствует произведение $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$.

1.37. Каждому сочетанию с повторениями из m элементов по n можно поставить в соответствие последовательность из n нулей, разделенных $m-1$ единицами (причем число нулей между единицами равно числу элементов данного типа) и наоборот.

1.38. $m-1$ единиц должны располагаться в $n-1$ промежутках между нулями (см. предыдущую задачу).

1.40. Ответ: 3, а именно: в одном ящике три шара; в одном ящике два шара, в другом — один; в каждом ящике по одному шару.

1.43. $C_{m+n+k}(m, n, k)$.

21.2 К главе 2

2.1°. а) $\overline{A}$ — герб не выпал; б) $\overline{B}$ — хотя бы один промах при трех выстрелах; в) $\overline{C}$ — ни одного попадания при трех выстрелах.

2.2°. а) $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$; б) $B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$; в) $C = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)$; г) $D = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup$ $\cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

2.3°. а) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; б) $A \cap B \cap \overline{C}$; в) $A \cap B \cap C$; г) $A \cup B \cup C$; д) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$; е) $\overline{A \cap B \cap C}$.

2.4.

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \; B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

$$C = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \ldots$$
$$\ldots \cap \overline{A_n}) \cup \ldots \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \ldots \cap A_n).$$

2.5.

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} A_{ji}, \; B = \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} A_{ji}.$$

2.7°. Пространство Ω — множество упорядоченных пар $(i, j), i, j = 1, 2, \ldots, 6$, согласно правилу умножения $n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$; $A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$, $n(A) = 5$; B — множество пар (i, j), в которых встречается 6, $n(B) = 11$; C — множество пар (i, j), в которых i принимает значения $2, 4, 6$, $n(C) = 18$; $D = \{(i, j) : i, j = 1, 3, 5\}$, $n(D) = 9$.

2.11. Пространство Ω состоит из n-элементных подмножеств N-элементного множества изделий; в событие A входят те из них, которые содержат ровно m бракованных изделий; $n(\Omega) = C_N^n$; $n(A) = C_M^m C_{N-M}^{n-m}$.

2.12. Пространство Ω составляют последовательности длиной 7, образованные из 10 чисел (номеров этажей, на которых останавливается лифт); в событие A входят последовательности, состоящие из различных чисел; $n(\Omega) = 10^7$; $n(A) = 10 \cdot 9 \dots 4$.

2.13. $\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \dots\}$; $A = \{\underbrace{\text{РР}\dots\text{РГ}}_{k}\}$; $B = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \dots, \underbrace{\text{РР}\dots\text{РГ}}_{k-1}\}$; $C = \{\text{Г}, \text{РРГ}, \text{РРРРГ}, \dots\}$; $D = \{\text{РГ}, \text{РРРГ}, \text{РРРРРГ}, \dots\}$.

2.14. Можно предложить по меньшей мере два пространства элементарных событий этого стохастического эксперимента.

Если обозначить белый шар через W, черный — через B, то множеством исходов стохастического эксперимента будет $\Omega = \{WW, WB, BW\}$.

Если белый шар, который кладут в урну, обозначить, например, через W^*, то $\Omega^* = \{WW^*, W^*W, BW^*, W^*B\}$.

2.15. Ω состоит из слов длиной n, образованных из “букв” $1, 2, \dots, 6$; $n(\Omega) = 6^n$. Событие A описывается словами длиной n, образованными из n_1 букв 1, n_2 букв 2, и т. д., n_6 букв 6; $n(A) = n!/(n_1!n_2!\dots n_6!)$.

2.16. $n(\Omega) = C_{2n}^n$; $n(A) = C_{2n-2}^{n-1}C_2^1$; $n(B) = C_{2n-4}^{n-2}C_4^2$.

2.17. $n(\Omega) = 12^r$; $n(B) = r11^{r-1}$; $n(A) = 12^r - 12 \cdot 11 \dots (12 - (r - 1))$; $n(C) = 12^r - 11^r$; $n(D) = 11^r$.

2.18. $n(\Omega) = n!$; $n(A) = (n-1)!$; $n(B) = (n-2)!$

2.19. Ω — множество упорядоченных троек, составленных из чисел от 1 до 6; A — подмножество упорядоченных троек, в которых 1 встречается один раз; B — в которых 6 встречается ровно два раза; C — подмножество упорядоченных троек, составлено из различных чисел; $D = \{(1;1;1), (2;2;2), \dots, (6;6;6)\}$; $n(\Omega) = 6^3$; $n(A) = C_3^1 5^2$; $n(B) = C_3^2 5$; $n(C) = 6 \cdot 5 \cdot 4$; $n(D) = 6$.

2.20. Ω — множество всех бесконечных последовательностей, образованных буквами Г, Р на нечетных местах и цифрами $1, 2, \dots, 6$ на четных. Событие A описывается последовательностями из Ω, которые записываются до первого появления буквы Г буквами Р на нечетных местах и цифрами $1, 2, \dots, 5$ — на четных. Событие B описывается последовательностями из Ω, которые записываются до первого появления цифры 5 буквами Р на нечетных местах и цифрами $1, 2, 3, 4, 6$ — на четных.

2.21*. Каждой частице поставим в соответствие номер ячейки, в которой она оказалась. Ω — множество последовательностей, длиной n, составленных из чисел $1, 2, \ldots, m$. Событие A описывается последовательностями длиной n, составленными из k_1 единиц, k_2 двоек, ..., k_m чисел m.

2.22*. Ω — множество последовательностей $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_m)$, составленных из неотрицательных чисел, таких, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n.$$

Событие A описывается последовательностями $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_m)$, образованными положительными целыми числами.

21.3 К главе 3

3.1. $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - A_{365}^r/365^r$.

3.2. $\mathsf{P}(A) = 1 - A_{12}^r/12^r$, если $r \leq 12$, и $\mathsf{P}(A) = 1$, если $r > 12$.

3.3. Мы будем различать подгруппы: подгруппа 1° и подгруппа 2°. Исход эксперимента — упорядоченная пара n-элементных подмножеств $2n$-элементного множества (пространство элементарных событий — множество всех таких пар). При этом выбор одного из n-элементных подмножеств пары (одной из подгрупп, например, подгруппы 1°), определяет состав другого подмножества (подгруппы 2°). Поэтому исходов всего C_{2n}^n. Модель классическая.

Событие A — "две наиболее сильные команды оказались в разных подгруппах" описывается упорядоченными парами n-элементных подмножеств, в состав каждого из которых входит ровно одна из наиболее сильных команд. Поэтому

$$\mathsf{P}(A) = C_2^1 C_{2n-2}^{n-1}/C_{2n}^n.$$

Событие B — "две самые сильные команды оказались в одной подгруппе" описывается упорядоченными парами n-элементных подмножеств, причем в состав одного n-

элементного подмножества (первого или второго) входят две самые сильные команды, в состав другого — ни одной. Поэтому сначала выберем подгруппу (1° или 2°), в состав которой войдут две самые сильные команды (C_2^1 способами), а затем сформируем эту подгруппу — C_{2n-2}^{n-2} способами. Отсюда

$$\mathsf{P}(B) = C_2^1 C_{2n-2}^{n-2} / C_{2n}^n.$$

3.4°. $1/5!$ **3.5.** $2/n$.

3.6. 1) C_{20}^3/C_{25}^3; 2) $C_{20}^2 C_5^1/C_{25}^3$; 3) $C_{20}^2 C_5^1/C_{25}^3 + C_{20}^3/C_{25}^3$; 4) $1-(C_{20}^3/C_{25}^3 + C_{20}^2 C_5^1/C_{25}^3)$. (См. также задачи 3.16; 3.17; 3.18; 3.19; 3.37.)

3.7. $1/2^6$. **3.8.** $C_2^1 C_3^2 C_2^1 / C_{10}^7$.

3.9. Решение 1. Будем считать буквы А,М,Т различимыми, например, занумеруем: $А_1$,$А_2$,$А_3$,$М_1$,$М_2$,$Т_1$,$Т_2$. Исход эксперимента — перестановка из 10 различимых букв. Модель классическая. Событие A — получилось слово “математика” — образуют перестановки, в которых буквы стоят на своих местах. Таких перестановок 3!2!2! Поэтому $\mathsf{P}(A) = 3!2!2!/10!$

Решение 2. Исход эксперимента — слово длиной 10, составленное из букв А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т, всего таких слов $C_{10}(3,1,1,1,2,2)$, модель классическая. Вероятность искомого события равна $1/C_{10}(3,1,1,1,2,2)$, поскольку оно образовано одним словом.

3.10. Исход эксперимента — перестановка из n элементов. Событие “между A и B расположены r человек” описывается перестановками, в которых между элементами A и B размещено r элементов. Число таких перестановок равно $(n-r-1)2!(n-2)!$ Искомая вероятность равна $2(n-r-1)/(n(n-1))$.

3.11. а) $C_2^1 C_{18}^9/C_{20}^{10}$; б) $C_4^2 C_{16}^8/C_{20}^{10}$.

3.12. $(k-1)(n-k)/C_n^2$.

3.13. Оборот “девять пассажиров рассаживаются по трем вагонам” обозначает, что каждому пассажиру приписан номер вагона, в который он сел; исход ω — последовательность длиной 9, составленная из чисел 1,2,3 — слово длиной 9, образованное “буквами” 1,2,3; модель классическая.

Событие “в каждый вагон сядут по три пассажира” описывается словами длиной 9, образованными 3 единицами, 3 двойками, 3 тройками; таких слов $C_9(3,3,3)$. Поэтому искомая вероятность равна $C_9(3,3,3)/3^9$.

Событие “в один вагон сядут четыре пассажира, во второй — три, в третий — два” описывается последовательностями (словами) длиной 9, образованными цифрами (буквами) $1, 2, 3$, причем одна цифра встречается четыре раза, другая три, третья два раза. Подсчитаем число таких слов. Первым действием выбираем букву (цифру), которая встречается четыре раза (тремя способами), затем цифру, которая встречается три раза (двумя способами); цифра, встречающаяся два раза, может быть выбрана одним способом. Вторым действием из выбранных букв (цифр) образуем слово длиной 9 с заданным числом букв, $C_9(4,3,2)$ способами. Поэтому число описанных выше слов, согласно правилу умножения, равно $3!C_9(4,3,2)$. Искомая вероятность равна $3!C_9(4,3,2)/3^9$.

3.14. Каждому пассажиру припишем номер этажа, на котором он вышел. Ответ: $A_{10}^7/10^7$, что приближенно равно 0,06.

3.15. $12!/12^{12}$. **3.16.** $\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

3.17. $\displaystyle\sum_{s=1}^{\min\{m,r\}} \frac{C_m^s C_{n-m}^{r-s}}{C_n^r}$, если $r \le n-m$, и 1, если $r > n-m$.

3.18. $\displaystyle\sum_{s=r}^{\min\{n,k\}} \frac{C_n^s C_{N-n}^{k-s}}{C_N^k}$.

3.19. $A_r = \{$участник угадал r видов$\}$, $r = 3,4,5,6$; $\mathsf{P}(A_3) = 0,017650$, $\mathsf{P}(A_4) = 0,000969$, $\mathsf{P}(A_5) = 0,000018$, $\mathsf{P}(A_6) = 0,00000007151$, $\mathsf{P}\{$участник получил выигрыш$\} = \mathsf{P}(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) = \mathsf{P}(A_3) + \mathsf{P}(A_4) + \mathsf{P}(A_5) + \mathsf{P}(A_6) = 0,018637$.

3.20. $12!/(2^6 6^{12})$, что составляет приблизительно 0,0034.

3.21. $C_n(n_1, n_2, \ldots, n_6)/6^n$. **3.22°.** $1/4!$

3.24°. $\mathsf{P}(A) = 3/8$, $\mathsf{P}(B) = 7/8$, $\mathsf{P}(A \cap B) = 3/8$, $\mathsf{P}(B/A) = 1$.

3.25. $1/6^{n-1}$. **3.26°.** $1/6^5$.

3.27. Если лица садятся в ряд, искомая вероятность равна $2/n$.

Способы размещения лиц за круглым столом отличаются только взаимным размещением лиц между собой.

Сначала размещаем за круглым столом первое из двух указанных лиц (не имеет значения на каком месте — стол круглый). Далее перенумеруем оставшиеся места, например, против часовой стрелки, и расположим на них остальные $(n-1)$ лиц, $(n-1)!$ способами. При этом число способов, когда два указанные лица будут сидеть рядом, равно $2!(n-2)!$ Поэтому искомая вероятность равна $(2!(n-2)!)/(n-1)! = 2/(n-1)$.

3.28*. Исход эксперимента, состоящего в четырех подбрасываниях игральной кости, — последовательность длиной 4, составленная из чисел от 1 до 6. Число таких последовательностей равно 6^4, число последовательностей, в которых 1 не встречается, равно 5^4. Поэтому вероятность появления хотя бы одной единицы при подбрасывании четырех костей равна $1-(5/6)^4$.

Исход эксперимента, состоящего в подбрасывании пары костей 24 раза, — последовательность длиной 24, элементами которой являются пары (i,j), $i,j = 1,2,\ldots,6$. Число таких последовательность — 36^{24}, число последовательностей, в которых пара (1,1) не появится ни разу, равно 35^{24}, поэтому вероятность появления пары $(1,1)$ хотя бы один раз при 24 подбрасываниях пары костей равна $1-(35/36)^{24}$.

Необходимо доказать, что $1-(5/6)^4 > 1-(35/36)^{24}$. Для этого достаточно установить, что $(35/36)^{24} > (5/6)^4$ или $(35/36)^6 > 5/6$. Последнее следует, например, из неравенства

$$(1+x)^n > 1+nx,\ x \geq -1,$$

при $n=6$, $x=-1/36$.

3.29. Воспользоваться тем, что

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathsf{P}(\omega) = 1.$$

3.30. Исход эксперимента — упорядоченная пара шаров (a_i, b_j), где a_i обозначает шар, вынутый из первой урны, b_j — из второй. Число всех исходов n^2. Модель классическая. Событие A — "число белых шаров в первой урне увеличится" описывается парами (a_i, b_j), в которых a_i — черный шар, b_j — белый; таких исходов $(n-k)^2$, вероятность $\mathsf{P}(A) = (n-k)^2/n^2$. Аналогично получаем вероятность того, что число белых шаров в первой урне уменьшится — k^2/n^2, не изменится — $2k(n-k)/n^2$.

3.31. Оборот "распределить (разместить) n частиц по m ячейкам" обозначает — каждой частице приписать номер ячейки, в которой она оказалась. Исход ω стохастического эксперимента — последовательность (слово) длиной n, составленная из чисел $1, 2, \ldots, m$. Согласно правилу умножения число всех исходов равно m^n. Поскольку относительно ячеек все частицы находятся в одинаковых условиях, то каждому исходу естественно приписать одну и ту же вероятность (модель классическая). Событие "в первой, второй, ..., m-й ячейках будет соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ частиц" образуют слова длиной n, составленные из k_1 единиц, k_2 двоек, ..., k_m чисел m. Всего таких слов $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. И поскольку модель классическая, то искомая вероятность равна $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)/m^n$.

3.32. $\dfrac{6}{(n-2)(n-1)}$ (см. также решение задачи 3.27).

3.36. а) Вероятность того, что четырехзначный номер состоит из разных цифр, равна $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7/10^4$.

б) Искомая вероятность равна $10C_9^2 C_4(2,1,1)/10^4$.

в) Четырехзначный автомобильный номер — упорядоченная последовательность длиной 4 (слово), образованное цифрами $0, 1, 2, \ldots, 9$; всего таких последовательностей 10^4. Номера, имеющие две пары одинаковых цифр, — это последовательности длиной 4 (слова), образованные двумя разными цифрами, которые встречаются по два раза, их всего $C_{10}^2 C_4(2,2)$. (Сначала из 10 цифр выбираем две (C_{10}^2 способами), а затем из них образуем слово длиной 4, в которое каждая буква входит дважды — $C_4(2,2)$ способами.) Поэтому вероятность того, что четырехзначный номер имеет две пары одинаковых цифр, равна $C_{10}^2 C_4(2,2)/10^4$ (см. также задачу 3.13).

г) Вероятность того, что четырехзначный номер имеет три одинаковые цифры, равна $10 \cdot 9 \cdot C_4(3,1)/10^4$.

д) Вероятность того, что четырехзначный номер состоит из одинаковых цифр, равна $1/10^3$.

3.37. $C_{M_1}^{m_1} C_{M_2}^{m_2} \ldots C_{M_k}^{m_k} / C_{M_1+M_2+\ldots+M_k}^{n}$.

3.38. 1. Исход эксперимента — упорядоченная целочисленная пара (i,j), $1 \le i,j \le N$, у которой $i \ne j$. Число всех исходов равно $N(N-1)$.

Упорядоченная пара (i,j), у которой $i < j$, однозначно задается набором чисел, ее образующих, а количество таких наборов равно C_N^2. Искомая вероятность равна $C_N^2/(N(N-1)) = 1/2$.

3. Исход эксперимента — целочисленная последовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, составленная из различных чисел $i_k \in [1, N]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Число всех таких последовательностей равно $N(N-1)\ldots(N-(n-1))$.

Каждой упорядоченной последовательности из n чисел $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, у которой $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, соответствует набор из n различных чисел, образующих эту последовательность, и каждому набору $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ из n различных чисел соответствует упорядоченная последовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, у которой $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$. Поэтому количество упорядоченных последовательностей чисел $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, таких что $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ равно количеству n-элементных наборов чисел, из которых эти строятся, т. е. равно C_N^n.

Искомая вероятность равна

$$C_N^n/(N(N-1)\ldots(N-(n-1))) = 1/n!$$

3.40. Вероятность того, что автомобиль находится за данной (выбранной вами) дверью, равна $1/3$, а следовательно, вероятность того, что за данной дверью автомобиля нет — автомобиль находится за оставшимися дверями — равна $2/3$ (вне зависимости от того открыл ведущий дверь или нет). Поэтому следует отказаться от первоначального выбора двери и выбрать оставшуюся дверь (одну дверь ведущий уже открыл и за ней автомобиля не оказалось).

Предложенное решение особенно “прозрачно”, если автомобиль находится за одной из n дверей (например, $n = 1000$).

Вероятность автомобилю находиться за выбранной вами дверью равна $1/n$, и следовательно, вероятность противоположного события — автомобиль находится за оставшимися дверями — равна $1 - 1/n$. При $n = 1000$ эта вероятность составляет $0,999$. Так что открыв оставшуюся дверь, вы почти наверняка уедете домой на автомобиле.

3.41. Будем считать шары различимыми. Исход эксперимента — n-элементное подмножество $2n$-элементного множества (n шаров, которые положили в первую урну). Число исходов, благоприятствующих событию “в первой урне k белых шаров”, равно $C_n^k C_n^{n-k}$. Искомая вероятность равна

$$C_n^k C_n^{n-k} / C_{2n}^n.$$

21.4 К главе 4

4.2°.
а) $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$; б) $1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$; в) $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \prod\limits_{k=1,k\neq i}^{n}(1-p_k)$.

4.3°. Обозначим через A_i событие “объект обнаружен в i-м цикле”, $i = 1, 2, \ldots, n$; события A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, независимы. Событие C — “объект обнаружен” — через события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно выразить так: $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$;

$\mathsf{P}(C) = = 1 - \mathsf{P}(\overline{C}) = 1 - \mathsf{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i) = 1 - (1-p)^n$.

4.4°. A_i — событие “i-й блок работает”, $i = 1, 2, \ldots, n$; события A_i независимы. $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ — событие “прибор работает”; $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i) = p^n$ (см. так же задачу 4.6).

4.5. 1) $1-(1-p)^2$; 2) $1-(1-p)(1-pp_1)$.

4.6. 1) $1-(1-p)^n$; чтобы надежность системы была не меньшей P, число дублирующих приборов должно быть не меньше

$$\ln(1-P)\big/\ln(1-p).$$

2) A_1 — "основной прибор работает"; A_i — "работает i-й дублирующий прибор", $i = 2, 3, \ldots, n$; B_i — "работает прибор включения i-го дублирующего прибора", $i = 2, 3, \ldots, n$ (все события независимы); $\overline{C}$ — "система вышла из строя",

$$\overline{C} = \overline{A}_1 \bigcap \Bigl(\bigcap_{i=2}^{n} \bigl(\overline{B}_i \cup \bigl(B_i \cap \overline{A}_i\bigr)\bigr)\Bigr);$$

$$\mathsf{P}(C) = 1 - \mathsf{P}(\overline{C}) = 1 - (1-p)(1-pp_1)^{n-1};$$

4.7°. а) $1/3$; б) $3/11$. **4.8°.** $1/2$.

4.9°. $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{m_i}{n_i}$. **4.10°.** $\dfrac{m_1 + n_1 m_2}{n_1(n_2+1)}$.

4.11°. $4/11$.

4.12. $1 - (1 - pp_1 - (1-p)p_0)^n$.

4.13. $1 - (1 - pp_2 - (1-p)p_1)^n$. **4.14°.** $\dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

4.15°. Вероятность предположения "в урне k белых шаров" равна $2k/(n(n+1))$.

4.17. Вероятнее, что стрелок C в мишень попал.

4.18. $48/95$. **4.19.** 0,52. **4.20.** $\dfrac{np_2}{p_1 + np_2}$.

4.21*. Обозначим через A событие "за первоначально выбранной вами дверью находится автомобиль", через B — "за открытыми наудачу ведущим $n-2$ дверями находится автомобиль". Вычислим $\mathsf{P}(A/\overline{B})$ и $\mathsf{P}(\overline{A}/\overline{B})$ и выберем ту из стратегий выбора, которая обеспечивает большую вероятность выигрыша автомобиля. Воспользуемся формулой Байеса (в качестве полной группы событий рассмотрим A и $\overline{A}$):

$$\mathsf{P}(A/\overline{B}) = \frac{\mathsf{P}(\overline{B}/A)\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(\overline{B}/A)\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{B}/\overline{A})\mathsf{P}(\overline{A})}.$$

Исходя из классической модели, имеем

$$\mathsf{P}(A) = 1/n,\ \mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - 1/n,\ \mathsf{P}(\overline{B}/A) = 1,$$

$$\mathsf{P}(\overline{B}/\overline{A}) = 1/C_{n-1}^{n-2} = 1/(n-1).$$

И, следовательно,

$$\mathsf{P}(A/\overline{B}) = 1/2,\ \mathsf{P}(\overline{A}/\overline{B}) = 1 - 1/2 = 1/2.$$

Так что если автомобиль не оказался за выбранными наудачу ведущим дверями, то не имеет значения какую из двух оставшихся дверей выбрать — автомобиль с вероятностью $1/2$ находится как за одной, так и за другой дверью.

Далее, событие “вы выиграете автомобиль, остановившись на первоначальном выборе” можно представить как $\overline{B} \cap A$, а событие “вы выиграете автомобиль, изменив первоначальный выбор” можно записать как $\overline{B} \cap \overline{A}$. Вероятности этих событий:

$$\mathsf{P}(\overline{B} \cap A) = \mathsf{P}(\overline{B}/A)\mathsf{P}(A) = 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n},$$

$$\mathsf{P}(\overline{B} \cap \overline{A}) = \mathsf{P}(\overline{B}/\overline{A})\mathsf{P}(\overline{A}) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Заметим, что вероятность выигрыша автомобиля равна $1/n$ (если, например, $n = 1000$, это составляет $1/1000$). Вероятность выигрыша автомобиля, если за выбранными наудачу ведущим дверями автомобиля нет, равна $1/2$ — в 500 раз больше. Но событие “за выбранными наудачу ведущим дверями автомобиля нет” еще должно произойти.

Вероятность того, что автомобиль оказался за выбранными ведущим дверями

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B/A)\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B/\overline{A})\mathsf{P}(\overline{A}) =$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{C_{n-2}^{n-3}}{C_{n-1}^{n-2}}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{2}{n}.$$

При больших n вероятность того, что автомобиль окажется за выбранными наудачу ведущим дверями большая, а следовательно, вероятность выигрыша автомобиля вами мала, что вполне согласуется с нашей интуицией.

4.22. Обозначим через A_{ij} событие "i-я радиостанция работает на j-й частоте", $i, j = 1, 2, 3$. Тогда событие B — "все радиостанции работают на одной частоте" опишется так:

$$B = \bigcup_{j=1}^{3}(A_{1j} \cap A_{2j} \cap A_{3j}),$$

а событие C — "все радиостанции работают на разных частотах" — так:

$$C = \bigcup_{(k,l,m)} (A_{1k} \cap A_{2l} \cap A_{3m}),$$

объединение по тройкам (k, l, m), образованным различными числами k, l, m, каждое из которых равно $1, 2, 3$; $\mathsf{P}(B) = 1/9$; $\mathsf{P}(C) = 2/9$.

4.23. Пусть событие S — "человек болен", $\overline{S}$ — "человек здоров", R_S — "результат рентгеновского анализа положительный" (человек согласно результату рентгеновского анализа признан больным). По условию задачи

$$\mathsf{P}(R_S|S) = 1 - \beta,\ \mathsf{P}(R_S|\overline{S}) = \alpha,\ \mathsf{P}(S) = \gamma,\ \mathsf{P}(\overline{S}) = 1 - \gamma.$$

Необходимо вычислить $\mathsf{P}(\overline{S}|R_S)$. Согласно формуле Байеса

$$\mathsf{P}(\overline{S}|R_S) = \alpha(1-\gamma)/(\alpha(1-\gamma) + (1-\beta)\gamma).$$

4.24. Пусть событие S — "изделие стандартное", $\overline{S}$ — "изделие нестандартное", D_S — "классификация изделия как стандартного". По условию

$$\mathsf{P}(S) = 0{,}96,\ \mathsf{P}(D_S|S) = 0{,}98,\ \mathsf{P}(D_S|\overline{S}) = 0{,}05.$$

Необходимо вычислить $\mathsf{P}(S|D_S)$.

$\mathsf{P}(S|D_S) = 0{,}9978$.

4.25°. $2/5$.

4.26. Шар, который изначально находится в урне, обозначим через W, если он белый, и через B, если он черный (так же будем обозначать и события "в урне изначально белый шар", "в урне изначально черный шар").

Белые шары, которые кладут в урну, обозначим через W_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (будем считать их различимыми). Эксперимент состоит в последовательном извлечении из урны $(n + 1)$ шаров. Исходы эксперимента — последовательности длиной $(n + 1)$, составленные из букв $W_1, W_2, \ldots$ $\ldots, W_n, W$ или из букв $W_1, W_2, \ldots, W_n, B$. Поскольку сначала в урне с вероятностью $1/2$ находится белый или черный шар, то естественно считать модель классической. Пусть A_n — событие "первые n извлеченных шаров белые", A — "последний извлеченный шар белый". Ясно, что необходимо вычислить вероятность

$$\mathsf{P}(A/A_n) = \frac{\mathsf{P}(A \cap A_n)}{\mathsf{P}(A_n)}.$$

Вычислим вероятности $\mathsf{P}(A_n)$ и $\mathsf{P}(A \cap A_n)$ по формуле полной вероятности, в качестве полной группы событий рассмотрим события W, B. Имеем

$$\mathsf{P}(A_n/W) = 1,\ \mathsf{P}(A_n/B) = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1},$$

$$\mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}(A_n/W)\mathsf{P}(W) + \mathsf{P}(A_n/B)\mathsf{P}(B) =$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\mathsf{P}(A \cap A_n) = \mathsf{P}((A \cap A_n)/W)\mathsf{P}(W) + \mathsf{P}((A \cap A_n)/B)\mathsf{P}(B) =$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Так что

$$\mathsf{P}(A/A_n) = \frac{1/2}{(1/2)(1 + 1/(n+1))} = \frac{n+1}{n+2}. \qquad (21.4.1)$$

Заметим, что если в урне находится черный шар, то вероятность того, что первые n вынутых шаров окажутся белыми

$$\mathsf{P}(A_n/B) = \frac{1}{n+1},$$

а вероятность того, что среди первых n вынутых шаров окажется черный

$$\mathsf{P}(\overline{A}_n/B) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

т. е. если в урне имеется черный шар, то он скорее всего появится среди первых n вынутых.

И если первые n вынутых шаров оказались белыми, то скорее всего черного шара в урне и не было —

$$\mathsf{P}(B/A_n) = 1 - \mathsf{P}(A/A_n) = 1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

(см. (21.4.1)).

Поэтому естественно, что если среди первых n шаров окажутся только белые, то и $(n+1)$-й шар скорее всего будет белым:

$$\mathsf{P}(A/A_n) = \frac{n+1}{n+2}.$$

Полученные результаты вполне согласуются с нашей интуицией.

Заметим, что в частном случае, когда $n = 1$, мы имеем дело с задачей Льюиса Кэррола, при этом

$$\mathsf{P}(A/A_1) = \frac{n+1}{n+2} = \frac{2}{3},$$

что совпадает с ответом к этой задаче.

4.27.

$$\frac{N_k M_k}{(N_k+M_k)(N_k+M_k-1)}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{N_i M_i}{(N_i+M_i)(N_i+M_i-1)}\right)^{-1},$$

$k = 1, 2, 3.$

4.28*. Задачу о разделе ставки Паскаль и Ферма рассматривали как вероятностную.

Пусть вместо игроков, которые прервали игру, ее продолжают двое новых игроков (один за первого, другой — за второго, мы по-прежнему будем называть их первым и вторым игроками). Они играют до выигрыша одним из игроков шести партий. При этом 6 партий может выиграть как первый игрок, так и второй. Вот только с разными вероятностями. Поэтому естественно считать справедливым раздел приза пропорционально вероятностям выиграть 6 партий соответственно первым и вторым при продолжении игры.

Игра продолжается не более трех партий. Второй игрок выигрывает игру, если в трех последовательных подбрасываниях монеты выпадет три решетки. Вероятность выпадения трех решеток — 1/8. Поэтому вероятность выигрыша игры вторым игроком равна 1/8. Вероятность выигрыша игры первым игроком равна 7/8. Следовательно, приз необходимо разделить в отношении 7 : 1.

4.29. Приз необходимо разделить в отношении 15 : 1.

21.5 К главе 5

5.1°.

x_i	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

5.2°.

y_j	-1	1
$\mathsf{P}_\eta(y_j)$	$3/7$	$4/7$

5.3°.

x_i	0	1	2
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	$0,27$	0,58	0,15

5.4°. $\mathsf{P}\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_n = k_n\} = \prod\limits_{i=1}^{n} p(1-p)^{k_i}$; $k_1 = 0, 1, \ldots;\ k_2 = 0, 1,\ \ldots;\ \ldots; k_n = 0, 1, \ldots$

5.6*. $(\mu, s) = (\mu(\zeta^*), s(\zeta^*))$ — функция случайного вектора $\zeta^* = (\operatorname{sign}\xi_1, \operatorname{sign}\xi_2, \ldots, \operatorname{sign}\xi_n)$.

Сначала найдем распределение ζ^*:

$$\mathsf{P}\{\zeta^* = x\} =$$

$$= \mathsf{P}\{(\operatorname{sign}\xi_1, \operatorname{sign}\xi_2, \ldots, \operatorname{sign}\xi_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n,)\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{\operatorname{sign}\xi_i = x_i\} = p^{\mu(x)} q^{s(x)-\mu(x)} f^{n-s(x)},$$

где x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, принимает значения $-1, 0, 1$, $s(x)$ — количество компонент вектора x отличных от нуля, $\mu(x)$ — равных $+1$.

$$\mathsf{P}\{\mu = k, s = j\} = \mathsf{P}\{\mu(\zeta^*) = k, s(\zeta^*) = j\} =$$

$$= \sum_{x:\mu(x)=k, s(x)=j} \mathsf{P}_{\zeta^*}(x) =$$

$$= \sum_{x:\mu(x)=k, s(x)=j} p^{\mu(x)} q^{s(x)-\mu(x)} f^{n-s(x)} = C_n^j C_j^k p^k q^{j-k} f^{n-j},$$

$k = 1, 2, \ldots, j$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

5.7. См. 5.8.

5.8. Решение к пункту 2(л). Сначала найдем распределение $\zeta = (\xi, \eta)$.

Случайная величина $\zeta = \zeta(\omega) = (\xi(\omega), \eta(\omega))$ является функцией на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathsf{P}\}$. Пространство элементарных событий образуют пары (i, j), $i = 1, 2, \ldots, 6$, $j = 1, 2, \ldots, 6$, а $\mathsf{P}(i, j) = 1/36$ для всех (i, j) (выбрана классическая модель, поскольку кости симметричны). Поэтому распределением $\zeta = (\xi, \eta)$ является

$$\mathsf{P}_\zeta(i, j) = \mathsf{P}\{\zeta = (i, j)\} = 1/36, \; i, j = 1, 2, \ldots, 6.$$

Табличная форма записи распределения случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ приведена в табл. 21.5.1.

По известному распределению случайной величины $\zeta = (\xi, \eta)$ (см. табл. 21.5.1), пользуясь формулой (5.1.2) (в качестве $g(s,t)$ и B рассмотрим $g = g(s,t) = \max\{s,t\}$, и $B = [3,+\infty)$), находим

$$\mathsf{P}\{\max\{\xi,\eta\} \geq 3\} = 1 - \mathsf{P}\{\max\{\xi,\eta\} < 3\} =$$

$$= 1 - \sum_{(i,j):\max\{i,j\}<3} \mathsf{P}_\zeta(i,j) = 1 - (\mathsf{P}_\zeta(1,1) + \mathsf{P}_\zeta(1,2) +$$

$$+\mathsf{P}_\zeta(2,1) + \mathsf{P}_\zeta(2,2)) = 1 - 4/36 = 8/9.$$

Таблица 21.5.1. Распределение $\zeta = (\xi,\eta)$

Значения ξ	Значения η					
	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Решение к пункту 3(в). Совместное распределение ξ и $\min\{\xi,\eta\}$ (распределение вектора $(\xi,\min\{\xi,\eta\})$) находим как распределение функции

$$\theta = g(\xi,\eta) = (\xi,\min\{\xi,\eta\})$$

от $\zeta = (\xi,\eta)$ по известному распределению $\zeta = (\xi,\eta)$ (см. табл. 21.5.1). Пользуясь формулой (5.1.2), вычислим несколько значений $\mathsf{P}_\theta(i,j) = \mathsf{P}\{(\xi,\min\{\xi,\eta\}) = (i,j)\}$. Имеем

$$\mathsf{P}\{(\xi,\min\{\xi,\eta\}) = (1,1)\} = \sum_{(i,j):(i,\min\{i,j\})=(1,1)} \mathsf{P}_\zeta(i,j) =$$

$$= \mathsf{P}_\zeta(1,1) + \mathsf{P}_\zeta(1,2) + \ldots + \mathsf{P}_\zeta(1,6) = 6/36;$$

$$\mathsf{P}\{(\xi, \min\{\xi,\eta\}) = (1,2)\} = \sum_{(i,j):(i,\min\{i,j\})=(1,2)} \mathsf{P}_\zeta(i,j) = 0;$$

$$\mathsf{P}\{(\xi, \min\{\xi,\eta\}) = (1,k)\} = \sum_{(i,j):(i,\min\{i,j\})=(1,k)} \mathsf{P}_\zeta(i,j) = 0;$$

$k = 3, 4, 5, 6$.

Совместное распределение ξ и $\min\{\xi,\eta\}$ (распределение случайной величины $\theta = (\xi, \min\{\xi,\eta\})$) приведено в табл. 21.5.2.

Случайные величины независимы тогда и только тогда, когда совместное распределение этих случайных величин равно произведению их распределений (см. также (5.1.3)).

Случайные величины ξ и $\min\{\xi,\eta\}$ не являются независимыми, поскольку их совместное распределение отлично от произведения распределений случайных величин ξ и $\min\{\xi,\eta\}$ (распределение $\min\{\xi,\eta\}$ приведено в ответе к пункту 1(б)).

Таблица 21.5.2. Распределение $\theta = (\xi, \min\{\xi,\eta\})$

Значения ξ	Значения $\min\{\xi,\eta\}$					
	1	2	3	4	5	6
1	6/36	0	0	0	0	0
2	1/36	5/36	0	0	0	0
3	1/36	1/36	4/36	0	0	0
4	1/36	1/36	1/36	3/36	0	0
5	1/36	1/36	1/36	1/36	2/36	0
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Ответ к пункту 1(а):

1	2	3	4	5	6
1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

.

Ответ к пункту 1(б):

1	2	3	4	5	6
11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

.

Ответы: 2(а) 1/6; 2(б) 3/4; 2(в) 1/3; 2(г) 1/3; 2(д) 1/9; 2(е) 4/9; 2(к) 1/9; 2(л) 8/9; 2(м) 7/9.

Ответ к пункту 3(б).

Распределение случайной величины $\theta = (\xi, \max\{\xi, \eta\})$ (совместное распределение ξ и $\max\{\xi, \eta\}$) приведено в табл. 21.5.3.

Случайные величины ξ и $\max\{\xi, \eta\}$ не являются независимыми, поскольку их совместное распределение (см. табл. 21.5.3), отлично от произведения распределений случайных величин ξ и $\max\{\xi, \eta\}$ (распределение $\max\{\xi, \eta\}$ приведено в ответе к пункту 1(а)).

Таблица 21.5.3. Совместное распределение ξ и $\max\{\xi, \eta\}$

Значения ξ	Значения $\max\{\xi, \eta\}$					
	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36
5	0	0	0	0	5/36	1/36
6	0	0	0	0	0	6/36

5.10. $\mathsf{P}\{\xi = \eta\} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k.$

5.12.

$$\mathsf{P}\{\xi + \eta = k\} = \begin{cases} \dfrac{k+1}{(n+1)^2}, & \text{если } 0 \le k \le n; \\ \dfrac{2n-k+1}{(n+1)^2}, & \text{если } n < k \le 2n. \end{cases}$$

5.13. Случайная величина $\zeta = \xi + \eta$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda + \mu$.

Воспользуйтесь формулой (5.1.2). При этом совместное распределение случайных величин ξ и η равно произведению пуассоновских распределений, а $g = g(x, y) = x + y$.

5.15.

$\mathsf{P}\{(\xi, \max\{\xi, \eta\}) = (i, j)\} =$

$$= \begin{cases} p^2(1-p)^{i+j}, & \text{если } i < j; \\ p(1-p)^i(1-(1-p)^{i+1}), & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i > j; \end{cases}$$

$i, j = 0, 1, \ldots.$

Распределение $\max\{\xi, \eta\}$:

$\mathsf{P}\{\max\{\xi, \eta\} = k\} = p^2(1-p)^k \left(2(1-(1-p)^k)/p + (1-p)^k\right),$

$k = 0, 1, \ldots$

5.16.

1	2	3	4	5	6	7
1/18	3/18	3/18	3/18	3/18	3/18	2/18

5.17.

Распределение случайной величины $\eta = (\xi_1, \xi_2)$

Значения ξ_1	Значения ξ_2 0	1	2
0	1/8	1/4	1/8
1	1/8	1/4	1/8

.

5.18*. Воспользуйтесь соотношением

$$\mathsf{P}\{\min\{\xi_1,\xi_2\}=m\}=$$

$$=\mathsf{P}(\{\xi_1=m,\xi_2>m\}\cup\{\xi_1>m,\xi_2=m\}\cup\{\xi_1=m,\xi_2=m\}).$$

Параметр геометрически распределенной случайной величины $\min\{\xi_1,\xi_2\}$ равен $p_1+p_2-p_1p_2$.

5.19°. 1) 80/243. **5.20°.** 0,0536. **5.21°.** 5/16.

5.22. Здесь “успех” — изделие дефектное, “неудача” — изделие стандартное.

1. Вероятность одного успеха в 10 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании равна $C_{10}^1p(1-p)^9$.

2. Количество неудач до первого успеха в последовательности независимых испытаний имеет геометрическое распределение, поэтому искомая вероятность равна $(1-p)^{k-1}p$.

3. Случайная величина ξ — число стандартных изделий (число неудач) до первого появления дефектного изделия (до первого успеха) имеет геометрическое распределение с параметром p:

$$\mathsf{P}\{\xi=m\}=(1-p)^mp;\ m=0,1,2,\ldots$$

Вероятность того, что последующие 10 изделий будут стандартными, если первые l были стандартными равна

$$\mathsf{P}\{\xi\ge l+10\,|\,\xi\ge l\}=$$

$$=\frac{\mathsf{P}\{\xi\ge l+10,\xi\ge l\}}{\mathsf{P}\{\xi\ge l\}}=\frac{\mathsf{P}\{\xi\ge l+10\}}{\mathsf{P}\{\xi\ge l\}}=$$

$$=\sum_{k=l+10}^{\infty}(1-p)^kp\Big/\sum_{k=l}^{\infty}(1-p)^kp=(1-p)^{10}.$$

5.23*. Пометим одну из коробок, например, звездочкой. Обозначим через B^* событие “пустой оказалась помеченная коробка”, через B — событие “пустой оказалась непомеченная коробка”, через A_r обозначим событие “оставшаяся коробка содержит r спичек”. Тогда

$$\mathsf{P}(A_r)=\mathsf{P}(A_r|B^*)\mathsf{P}(B^*)+\mathsf{P}(A_r|B)\mathsf{P}(B).$$

Коробки берут наудачу, поэтому естественно положить $\mathsf{P}(B^*) = 1/2$, $\mathsf{P}(B) = 1/2$.

Вычислим $\mathsf{P}(A_r|B^*)$. Коль скоро произошло событие B^* — "пустой оказалась помеченная коробка", то событие "оставшаяся коробка содержится r спичек" происходит тогда, когда коробки брали $(2N-r)$ раз (осталось r спичек), причем помеченную брали N раз. Поэтому $\mathsf{P}(A_r|B^*)$ равна вероятности N успехов (успех — выбрана помеченная коробка) в $(2N-r)$ испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $1/2$ в одном испытании, т. е.

$$\mathsf{P}(A_r|B^*) = C_{2N-r}^{N}(1/2)^{2N-r}.$$

Аналогично получаем

$$\mathsf{P}(A_r|B) = C_{2N-r}^{N}(1/2)^{2N-r}.$$

Так что искомая вероятность

$$\mathsf{P}(A_r) = \frac{1}{2}C_{2N-r}^{N}(1/2)^{2N-r} + \frac{1}{2}C_{2N-r}^{N}(1/2)^{2N-r} =$$

$$= C_{2N-r}^{N}(1/2)^{2N-r},\ r = 1, 2, \ldots, N.$$

5.24.
а) $1 - \dfrac{5^6}{6^6}$; б) $1 - \dfrac{17 \cdot 5^{11}}{6^{12}}$; в) $1 - \dfrac{268 \cdot 5^{16}}{6^{18}}$.

5.25°. $\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_{10}^{k}/2^{10}$; $k = 0, 1, \ldots, 10$.

5.26°.

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_{10}^{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k},\ k = 0, 1, \ldots, 10.$$

5.27°.

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_{3}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{3-k},\ k = 0, 1, 2, 3.$$

5.28. Вероятнее выиграть:
1) 3 партии из 5;

2) 2 партии из 4;
3) 3 партии из 4;
4) не менее 5 партий из 8;
5) не более чем n из $2n$ партий.

5.29. Сначала выпишем совместное распределение $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$, а затем распределение функции

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r$$

от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$.

Совместным распределением $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ является

$$\mathsf{P}(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \mathsf{P}\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \ldots, \xi_r = k_r\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{r} p(1-p)^{k_i} = p^r (1-p)^{k_1+k_2+\cdots+k_r},$$

$$k_1 = 0, 1, \ldots;\ k_2 = 0, 1, \ldots;\ \ldots;\ k_r = 0, 1, \ldots$$

Для каждого $k,\ k = 0, 1, \ldots,$

$$\mathsf{P}_\eta(k) = \mathsf{P}\{\eta = k\} = \mathsf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r = k\} =$$

$$= \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_r): k_1+k_2+\cdots+k_r = k} p^r (1-p)^{k_1+k_2+\cdots+k_r} =$$

$$= \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_r): k_1+k_2+\cdots+k_r = k} p^r (1-p)^k = C_{k+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^k$$

(суммирование ведется по всем последовательностям неотрицательных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_r$, являющихся решениями уравнения $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = k$, всего таких решений — C_{k+r-1}^{r-1}, см. пример 1.1.14). Так что η имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами (r, p).

5.30. Пусть ξ — количество лиц, обратившихся в справочное бюро, η — количество отказав. События $\{\xi = k\}$, $k = 0, 1, 2\ldots$, образуют полную группу событий. Согласно формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}\{\eta = s\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\eta = s | \xi = k\} \mathsf{P}\{\xi = k\} =$$

$$= \sum_{k=s}^{\infty} \mathsf{P}\{\eta = s | \xi = k\} \mathsf{P}\{\xi = k\} =$$

$$= \sum_{k=s}^{\infty} \frac{k!}{s!(k-s)!} p^s (1-p)^{k-s} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^s}{s!} \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{(k-s)!} (1-p)^{k-s} \lambda^k =$$

Обозначив $k - s = m$, получим

$$\mathsf{P}\{\eta = s\} = \frac{e^{-\lambda} p^s}{s!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (1-p)^m \lambda^{s+m} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^s}{s!} \lambda^s e^{(1-p)\lambda} = \frac{(\lambda p)^s}{s!} e^{-\lambda p}.$$

Следовательно, количество отказов имеет пуассоновское распределение с параметром λp.

5.31. Пуассоновское распределение с параметром λp (см. задачу 5.30).

5.32. Пуассоновское распределение с параметром λp (см. задачу 5.30).

5.34. Обозначим через k количество мест в каждом гардеробе. Пусть μ_i — случайная величина, принимающая значение 1, если i-й зритель выбрал вход 1, и 0, если выбрал вход 2, $i = 1, 2, \ldots, 1000$; μ_i — независимые случайные величины, каждая с распределением

$$\mathsf{P}\{\mu_i = x\} = (1/2)^x (1/2)^{1-x}, \ x = 0, 1.$$

Тогда $\mu = \sum\limits_{i=1}^{1000} \mu_i$ — количество зрителей, которые вошли через вход 1, а $1000 - \mu$ — через вход 2.

Событие “все зрители имеют возможность раздеться” в терминах случайной величины μ запишется так:

$$\{\mu < k, 1000 - \mu < k\} = \{1000 - k < \mu < k\}.$$

Количество мест k (в каждом гардеробе) находится как минимальное натуральное число, удовлетворяющее условию
$$\mathsf{P}\{1000 - k < \mu < k\} \geq 0{,}90.$$

Чтобы найти k, воспользуемся интегральной теоремой Муавра–Лапласа (см. формулу (5.2.5)). См. также пример 5.2.1 и задачу 5.39.

Ответ: $k = 527$.

5.35. Упорядочить $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по возрастанию.

5.37. $p_k = (1/2)^k$. Вероятность выигрыша для начинающего первым в два раза больше.

5.38. 1. Вероятнее, что стрелки получат приз, поскольку $\mathsf{P}\{\text{стрелки не получат приз}\} = (1 - 1/5)^4 < 0{,}5$.

2. Отношение вероятностей равно $3/2$.

5.39. Решение. Частота ν_n равна μ/n, где μ — число тех экспериментов из n проведенных, в которых событие произошло.

Отклонение в опыте Бюффона составляет $2048/4040 - 0{,}5 = 0{,}007 = \varepsilon$. Необходимо вычислить
$$\mathsf{P}\{|\nu_n - 0{,}5| < \varepsilon\}$$
для $n = 4040$.

Частоту $\nu_n = \mu/n$ представим в виде
$$\nu_n = \mu/n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i,$$
где μ_i принимает значение 1, если в эксперименте событие произошло и 0 — в противном случае. Случайные величины μ_i независимы и $q = \mathsf{P}\{\mu_i = 0\} = 1/2$, $p = \mathsf{P}\{\mu_i = 1\} = 1/2$. Поскольку число экспериментов n большое ($n = 4040$), то для вычисления $\mathsf{P}\{|\nu_n - 0{,}5| < \varepsilon\}$ можно воспользоваться интегральной предельной теоремой Муавра—Лапласа (см. (5.2.5)):
$$\mathsf{P}\{|\nu_n - 0{,}5| \leq \varepsilon\} = \mathsf{P}\left\{0{,}5 - \varepsilon \leq \frac{\mu}{n} \leq 0{,}5 + \varepsilon\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\frac{n(0{,}5 - \varepsilon) - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{n(0{,}5 + \varepsilon) - np}{\sqrt{npq}}\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{-0{,}88 \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le 0{,}88\right\}.$$

А последняя вероятность с незначительной погрешностью равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-0{,}88}^{0{,}88} \exp\left\{\frac{-t^2}{2}\right\} dt = 0{,}6212$$

(значение интеграла найдено по табл. 22.1.1 нормального распределения).

5.40. Уравнение имеет действительные корни, если $\eta^2 - 4\xi\zeta \ge 0$.

Согласно (5.1.1) для случайной величины $\varphi = (\xi, \eta, \zeta)$ с распределением

$$\mathsf{P}_\varphi(i, j, k) = \mathsf{P}\{(\xi, \eta, \zeta) = (i, j, k)\} = 1/27,\ i, j, k = 1, 2, 3,$$

функции $g(\varphi) = g(\xi, \eta, \zeta) = \eta^2 - 4\xi\zeta$ и множества $B = [0, \infty)$ имеем

$$\mathsf{P}\{\eta^2 - 4\xi\zeta \ge 0\} = \sum_{(i,j,k):j^2-4ik\ge 0} \mathsf{P}_\varphi(i, j, k) =$$

$$= \sum_{(i,j,k):j^2-4ik\ge 0} 1/27 = 4/27.$$

5.41.

$$\mathsf{P}_\xi(x_i) = \mathsf{P}\{\xi = x_i\} = \mathsf{P}\{(\xi, \eta) \in \{x_i\} \times \mathbb{R}^1\} =$$

$$= \sum_{(x_k,y_j)\in\{x_i\}\times\mathbb{R}^1} \mathsf{P}_\zeta(x_k, y_j) = \sum_{y_j} \mathsf{P}_\zeta(x_i, y_j).$$

5.42. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$; $\mathsf{P}(\omega_1) = 1/2$, $\mathsf{P}(\omega_2) = 1/2$. Случайные величины $\xi = \xi(\omega)$, $\eta = \eta(\omega)$ зададим равенствами

$$\xi(\omega_1) = -1,\ \xi(\omega_2) = 1;$$

$$\eta(\omega_1) = 1,\ \eta(\omega_2) = -1.$$

Распределения

$$\mathsf{P}_\xi((-1)^i) = 1/2,\ i = 1, 2;$$

$$\mathsf{P}_\eta((-1)^j) = 1/2,\ j = 1, 2;$$

совпадают, при этом

$$\xi(\omega) \neq \eta(\omega)$$

для всех $\omega \in \Omega$.

5.43. Поскольку случайные величины ξ и η независимы, то их совместным распределением является

$$\mathsf{P}\{(\xi, \eta) = (k, l)\} = p_k q_l,\ k = 0, 1, \ldots;\ l = 0, 1, \ldots$$

Далее, согласно (5.1.2) имеем

$$\mathsf{P}\{\zeta = m\} = \mathsf{P}\{\xi + \eta = m\} =$$

$$= \sum_{(k,l):k+l=m} p_k q_l = \sum_{k=0}^{m} p_k q_{m-k},\ m = 0, 1, \ldots$$

Распределение

$$f_m = \sum_{k=0}^{m} p_k q_{m-k} = p_0 q_m + p_1 q_{m-1} + \ldots + p_m q_0,\ m = 0, 1, \ldots,$$

называют сверткой распределений $\{p_k\}$ и $\{q_l\}$.

Так что распределение суммы независимых целочисленных случайных величин равно свертке распределений слагаемых.

5.44. Число неудач ξ до r-го успеха в последовательности независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $(r; p)$:

$$\mathsf{P}_\xi(k) = C_{k+r-1}^{r-1} (1-p)^k p^r,\ k = 0, 1, \ldots$$

Решение задачи сводится к вычислению вероятности того, что число неудач до 4-го успеха равно 6 (вероятность успеха в каждом испытании 1/2). Искомая вероятность

$$C_{6+4-1}^{6}(1/2)^6(1-1/2)^4 = C_9^6(1/2)^{10}.$$

5.45. Исход эксперимента — последовательность длиной n, составленная из 0 и 1, модель классическая, вероятность исхода 2^n. Перемены знака обозначим "разделителями" — вертикальными черточками между единицами и нулями. Выбрать из $(n-1)$ мест k под разделители можно C_{n-1}^k способами, при этом получим $2C_{n-1}^k$ исходов с k переменами знака (перемена знака происходит, если рядом как 0 и 1 так и 1 и 0). Поэтому вероятность k перемен знака равна $2C_{n-1}^k/2^n = C_{n-1}^k/2^{n-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, т.е. числа перемен знака имеет распределение $B_{(n-1),1/2}$.

5.46. Вероятность $k = n-1$ неудач до r-го успеха равна

$$C_{k+r-1}^{r-1}p^r(1-p)^k = C_{n+r-2}^{n-1}\,p^r(1-p)^{n-1},$$

см. также решение задачи 5.44.

5.47. Распределение числа белых шаров в первой урне:

0	1	2
1/6	4/6	1/6

.

5.48.

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k C_n^{n-k}/C_{2n}^n,\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

5.49. Поскольку случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, их совместное распределение (распределение вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$)

$$\mathsf{P}_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathsf{P}\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_n = x_n\} =$$

$$= \prod_{i=1}^n \mathsf{P}\{\xi_i = x_i\} = \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum\limits_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^n x_i},$$

где x_j — возможное значение случайной величины ξ_j, равное 0 или 1, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Распределение случайной величины $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ вычислим как распределение функции

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

от случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ по его распределению (см. теорему 5.1.1):

$$\mathsf{P}\{S_n = k\} = \mathsf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = k\} =$$

$$= \sum_{(x_1, x_2, \ldots x_n):\, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k} \mathsf{P}_\xi(x_1, x_2, \ldots x_n) =$$

$$= \sum_{(x_1, x_2, \ldots x_n):\, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k} p^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i} =$$

$$= \sum_{(x_1, x_2, \ldots x_n):\, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k} p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

21.6 К главе 6

6.1°. 1) $-1/8$; 2) $(1+e)(2+\sqrt{3})/12$.
6.2. $\mathsf{M}\xi = 3/5$, $\mathsf{D}\xi = 28/75$,

x_i	0	1	2
$\mathsf{P}_\xi(x_i)$	7/15	7/15	1/15

.

6.3°. 27/40. **6.4°.** $-\sqrt{3}/8$. **6.6°.** 0.
6.7°. 1) 0; 2) 0; 3) $3\sqrt{3}/4$. **6.8°.** 69/8.
6.9°. 1) $\sqrt{3}$; 2) $(8+\sqrt{3})/4$.
6.10. $\mathsf{M}\eta = 13/12$; $\mathsf{D}\eta = 59/144$,

y_j	0	1	2
$\mathsf{P}_\xi(y_j)$	1/6	7/12	1/4

.

6.11°. $(2-\sqrt{3})/12$. **6.12°.** 1) $(20+\sqrt{3})/8$; 2) $-5/2$.
6.13. $5/6$. **6.14.** $29/54$.
6.15. 1) $\mathsf{M}\xi = 0$; 2) $\mathsf{M}|\xi| = \dfrac{n(n+1)}{2n+1}$.
6.16. $\mathsf{M}\xi = \lambda$, $\mathsf{M}\xi^2 = \lambda + \lambda^2$, $\mathsf{D}\xi = \lambda$.
6.17. Решение к пункту 3):

$$\mathsf{D}\xi\eta = \mathsf{M}\xi^2\eta^2 - (\mathsf{M}\xi\eta)^2 = \mathsf{M}\xi^2\mathsf{M}\eta^2 - (\mathsf{M}\xi)^2(\mathsf{M}\eta)^2$$

(см. также пример 6.1.2).

Ответы: 1) $1-e^{-\lambda}$; 2) λ^2; 3) $\lambda^2(1+2\lambda)$; 4) 2λ.

6.18. Для $|x|<1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Продифференцировав последнее равенство и умножив на x, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}. \qquad (21.6.2)$$

Продифференцировав равенство (21.6.2) и умножив его на x, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2x^k = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}. \qquad (21.6.3)$$

Из теоремы 6.1.1, воспользовавшись равенствами (21.6.2) и (21.6.3) при $x = 1-p$, имеем

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = p\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k = p\frac{1-p}{p^2} = \frac{1-p}{p},$$

$$\mathsf{M}\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^k p = p\sum_{k=0}^{\infty} k^2(1-p)^k = \frac{(1-p)(2-p)}{p^2},$$

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

6.19. Число ξ подбрасываний кости до первого выпадения шестерки — геометрически распределенная случайная величина с параметром $p = 1/6$. Число η подбрасываний кости равно $\xi + 1$, т. е. $\eta = \xi + 1$. Поэтому $\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}(\xi + 1) = \mathsf{M}\xi + 1 = 5 + 1 = 6$; $\mathsf{P}\{\eta \leq 2\} = \mathsf{P}\{\xi \leq 1\} = 11/36$.

6.20.

$$1)\,\mathsf{M}t^{\xi} = \frac{p}{1-(1-p)t};\;\; 2)\,\mathsf{M}e^{it\xi} = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}.$$

6.21. 1) $\mathsf{M}t^{\xi} = e^{\lambda(t-1)}$; 2) $\mathsf{M}e^{it\xi} = \exp\big\{\lambda(e^{it}-1)\big\}$.

6.22°. $\mathsf{M}\xi = 70$; $\mathsf{D}\xi = 21$.

6.24°. $\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_{10}^{k}/2^{10}$, $k = 0, 1, \ldots, 10$; $\mathsf{M}\xi = 5$; $\mathsf{D}\xi = 2{,}5$.

6.25°. $\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_{10}^{k}(1/6)^{k}(5/6)^{10-k}, k = 0, 1, \ldots, 10$; $\mathsf{M}\xi = 5/3$; $\mathsf{D}\xi = 25/18$.

6.26°. $\mathsf{M}\xi = 3/4$; $\mathsf{D}\xi = 9/16$.

6.27*. Распределение случайной величины ξ совпадает с распределением суммы $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r$, независимых случайных величин ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, каждая из которых имеет геометрическое распределение с параметром p (см. также задачу 5.29), поэтому $\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\eta$, $\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\eta$.

Геометрически распределенная с параметром p случайная величина имеет математическое ожидание равное $(1-p)/p$, а дисперсию — $(1-p)/p^2$ (см. задачу 6.18) и, следовательно,

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r) = r\frac{1-p}{p},$$

$$\mathsf{D}\eta = \mathsf{D}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_r) = r\frac{1-p}{p^2}.$$

6.30.

$$\mathsf{M}\exp\{i(t,\nu)\} = \sum_{k=1}^{r} p_k \exp\{it_k\}.$$

6.31*. Последовательность независимых одинаково распределенных случайных величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ со значениями в $\mathbb{R}^1$ и разбиение прямой

$$\mathbb{R}^1 = \bigcup_{j=1}^{r} X_j,\ X_s \cap X_l = \emptyset, s \neq l,$$

задают последовательность n незасимых испытаний с r исходами. Испытание закончилось j-м исходом, если случайная величина ξ_k попала в X_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, вероятность j-го исхода $p_j = \mathsf{P}\{\xi_k \in X_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Поэтому распределением $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ является мультиномиальное распределение:

$$\mathsf{P}\{\nu_1 = k_1, \nu_2 = k_2, \ldots, \nu_r = k_r,\} =$$

$$= C_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r},\ k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n.$$

Распределением ν_j, очевидно, является

$$\mathsf{P}_{\nu_j}(k) = C_n^k p_j^k (1 - p_j)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, r.$$

Чтобы вычислить $\mathsf{M} \exp\{i(t, \nu)\}$, представим вектор $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ в виде суммы векторов

$$\mu^{(k)} = \left(I_{X_1}(\xi_k), I_{X_2}(\xi_k), \ldots, I_{X_r}(\xi_k)\right),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

(I_A — индикатор множества A), а именно,

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{k=1}^{n} \mu^{(k)}.$$

Векторы $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots, \mu^{(n)}$ независимы, каждый с распределением

$$\mathsf{P}\{\mu^{(k)} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\} = \mathsf{P}\{\xi_k \in X_j\} = p_j,$$

$j = 1, 2, \ldots, r$, в последовательности $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ на j-м месте находится единица, на остальных — нули.

Воспользовавшись мультипликативным свойством математического ожидания и теоремой 6.1.2, получим

$$\mathsf{M}\exp\{i(t,\nu)\} =$$

$$= \mathsf{M}\exp\left\{i\left(t,\sum_{k=1}^{n}\mu^{(k)}\right)\right\} = \mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\left(t,\mu^{(k)}\right)\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\prod_{k=1}^{n}\exp\left\{i\left(t,\mu^{(k)}\right)\right\} = \prod_{k=1}^{n}\mathsf{M}\exp\left\{i\left(t,\mu^{(k)}\right)\right\} =$$

$$= \left(\mathsf{M}\exp\left\{i\left(t,\mu^{(1)}\right)\right\}\right)^{n} = \left(\sum_{k=1}^{r}p_k\exp\{it_k\}\right)^{n}.$$

6.32. Найдем распределение случайной величины ξ — количества анализов, необходимых для обследования крови k человек, если обследование проводится способом 2.

Случайная величина ξ принимает два значения: 1 и $k+1$. Вероятность того, что индивидуальный анализ отрицателен равна $1-p$, а вероятность того, что k индивидуальных анализов отрицательна равна $(1-p)^k$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\xi = 1\} = (1-p)^k,\ \mathsf{P}\{\xi = k+1\} = 1-(1-p)^k.$$

Отсюда

$$\mathsf{M}\xi = 1(1-p)^k + (k+1)(1-(1-p)^k) = k(1-(1-p)^k)+1.$$

6.34. Если

$$\sum_{k=0}^{\infty}kp_k < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}kt^{k-1}p_k,\ |t| \le 1,$$

полученный почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k p_k,\ |t| \leq 1$, сходится в точке $t = 1$, а, следовательно, сходится равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому ряд (6.1.4) можно почленно дифференцировать на отрезке $[-1, 1]$, а именно

$$P'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1}p_k,\ |t| \leq 1.$$

При этом в точке $t = 1$

$$P'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \mathsf{M}\xi.$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

6.35. 1° Пусть случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = (1-p)^k p,\ p \in (0; 1),\ k = 0, 1, \ldots$$

Тогда

$$P(t) = \mathsf{M}t^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k (1-p)^k p =$$

$$= p\sum_{k=0}^{\infty}(t(1-p))^k = \frac{p}{1-t(1-p)},\ |t| < 1. \qquad (21.6.4)$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p$ сходится, поэтому существует $\mathsf{M}\xi$ и согласно (6.1.5) значение $\mathsf{M}\xi = P'(1)$. Здесь

$$P'(t) = \frac{p(1-p)}{(1-t(1-p))^2},\ P'(1) = \frac{(1-p)}{p},$$

и, следовательно,

$$\mathsf{M}\xi = \frac{1-p}{p}.$$

2° Пусть случайная величина ξ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами (r, p):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_{k+r-1}^{r-1}(1-p)^k p^r,\ k = 0, 1, \ldots;\ p \in (0; 1).$$

Тогда

$$P(t) = \mathsf{M}t^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k C_{k+r-1}^{r-1}(1-p)^k p^r =$$

$$= p^r \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r-1}^{r-1}((1-p)t)^k.$$

Учитывая разложение функции $1/(1-x)^r$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r-1}^{r-1} x^k,\ |x| < 1,$$

получаем производящую функцию отрицательного биномиального распределения с параметрами (r, p):

$$P(t) = \frac{p^r}{(1-t(1-p))^r},\ |t| < 1. \qquad (21.6.5)$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kC_{k+r-1}^{r-1}(1-p)^k p^r$ сходится, поэтому существует $\mathsf{M}\xi$ и согласно (6.1.5) значение $\mathsf{M}\xi = P'(1)$. Здесь

$$P'(t) = \frac{r(1-p)p^r}{(1-t(1-p))^{r+1}},\ P'(1) = \frac{r(1-p)p^r}{p^{r+1}} = r\frac{1-p}{p},$$

и, следовательно,

$$\mathsf{M}\xi = P'(1) = r\frac{1-p}{p}.$$

3° Пусть ξ — биномиально распределенная с параметром p случайная величина:

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n;\ p \in (0; 1).$$

Тогда

$$P(t) = \mathsf{M}t^{\xi} = \sum_{k=0}^{n} t^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (tp)^k (1-p)^{n-k} = (tp + (1-p))^n.$$

Так что производящая функция биномиального распределения с параметрами (n, p)

$$P(t) = (tp + (1-p))^n. \tag{21.6.6}$$

Поскольку

$$P'(t) = np(tp + (1-p))^{n-1},\ P'(1) = np,$$

то согласно (6.1.5)

$$\mathsf{M}\xi = P'(1) = np.$$

6.36. Пусть p_k, $k = 0, 1, \ldots$, и f_n, $n = 0, 1, \ldots$, — вероятностные распределения,

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k,\ |t| < 1,\ F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k f_k,\ |t| < 1$$

— их производящие функции. Предположим, что

$$P(t) = F(t),\ |t| < 1. \tag{21.6.7}$$

Из равенства (21.6.7) при $t = 0$ имеем $P(0) = F(0)$, или $p_0 = f_0$. Степенные абсолютно сходящиеся ряды можно почленно дифференцировать, поэтому из (21.6.7) следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1} p_k = P'(t) = F'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1} f_k.$$

Отсюда при $t = 0$ имеем $P'(0) = F'(0)$ или $p_1 = f_1$ и т. д. Так что для всех $k = 0, 1, \ldots$

$$p_k = f_k,$$

т. е. распределения $\{p_k\}$ и $\{f_k\}$ совпадают. Последнее обозначает, что различным вероятностным распределениям соответствуют различные производящие функции.

6.37. Если ξ и η — независимые случайные величины и $P_\xi(t)$, $P_\eta(t)$ — их производящие функции, то в силу мультипликативного свойства математического ожидания

$$\mathsf{P}_{\xi+\eta}(t) = \mathsf{M}t^{\xi+\eta} = \mathsf{M}t^\xi t^\eta = \mathsf{M}t^\xi \mathsf{M}t^\eta = P_\xi(t)P_\eta(t).$$

6.38.

1° Производящая функция геометрически распределенной случайной величины с параметром θ равна $\theta/(1-t(1-\theta))$ (см. (21.6.4)), а производящая функция суммы $\zeta = \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_r$ независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ в силу мультипликативного свойства производящих функций, равна

$$P_\zeta(t) = \prod_{i=1}^{r} P_{\xi_i}(t) = \frac{\theta^r}{(1-t(1-\theta))^r},\ |t| < 1.$$

Производящая функция $P_\zeta(t)$ суммы $\zeta = \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_r$ совпадает с производящей функцией отрицательного биномиального распределения с параметрами (r, θ). Поэтому в силу теоремы единственности (см. теорему 6.1.6) случайная величина $\zeta = \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_r$ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами (r, θ).

2° Производящие функции отрицательных биномиально распределенных случайных величин с параметрами (r_1, θ) и (r_2, θ) соответственно равны

$$P_{\xi_1}(t) = \frac{\theta^{r_1}}{(1-t(1-\theta))^{r_1}},\ |t| < 1;$$

$$P_{\xi_2}(t) = \frac{\theta^{r_2}}{(1-t(1-\theta))^{r_2}},\ |t| < 1,$$

(см. (21.6.5)), а производящая функция суммы $\zeta = \xi_1+\xi_2$ в силу мультипликативного свойства производящих равна

$$P_\zeta(t) = P_{\xi_1}(t)P_{\xi_2}(t) = \frac{\theta^{r_1+r_2}}{(1-t(1-\theta))^{r_1+r_2}},\ |t| < 1,$$

Производящая функция $P_\zeta(t)$ суммы $\zeta = \xi_1 + \xi_2$ совпадает с производящей функцией отрицательного биномиального распределения с параметрами $(r_1 + r_2, \theta)$. Поэтому в силу теоремы единственности сумма независимых случайных величин, имеющих отрицательные биномиальные распределения с параметрами (r_1, θ) и (r_2, θ) соответственно, имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $(r_1 + r_2, \theta)$.

3° Производящая функция суммы $\zeta = \xi + \eta$ независимых биномиально распределенных случайных величин с параметрами (n, θ) и (m, θ)

$$P_\zeta(t) = P_\xi(t) P_\eta(t) =$$

$$= (t\theta + (1-\theta))^n (t\theta + (1-\theta))^m = (t\theta + (1-\theta))^{n+m}.$$

(см. (21.6.6)). С другой стороны $(t\theta+(1-\theta))^{n+m}$ — производящая функция биномиально распределенной случайной величины с параметрами $(n+m, \theta)$. Поэтому согласно теореме единственности (см. теорему 6.1.6) распределение суммы $\zeta = \xi_1 + \xi_2$ независимых биномиально распределенных с параметрами (n, θ) и (m, θ) случайных величин совпадает с биномиальным распределением с параметрами $(n + m, \theta)$.

6.39.

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} a p^\omega = a \sum_{\omega \in \Omega} p^\omega = a \frac{1}{1-p} = 1.$$

Отсюда $a = 1 - p$, поэтому $\mathsf{P}(\omega) = (1-p)p^\omega, \omega \in \Omega$, или, что то же,

$$\mathsf{P}(k) = (1-p)p^k,\ k = 0, 1, \ldots$$

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \mathsf{P}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} (1-p) p^k = \frac{2(1-p)}{2-p}.$$

6.40.

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} a \frac{1}{\omega!} = \sum_{k=0}^{\infty} a \frac{1}{k!} = ae.$$

Отсюда $a = e^{-1}$, поэтому $\mathsf{P}(\omega) = e^{-1}\dfrac{1}{\omega!}$, $\omega \in \Omega$, или, что то же,

$$\mathsf{P}(k) = \frac{1}{k!}e^{-1},\ k = 0, 1, \ldots$$

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\mathsf{P}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\frac{1}{k!}e^{-1} = e^{-1}e^2 = e.$$

$$\mathsf{M}\xi = e,\ \mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi)^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = e^3 - e^2.$$

6.41. См. решения задач 6.39, 6.40.

$$a = e^{-\lambda},\ \mathsf{M}\xi = e^{\lambda},\ \mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi)^2 - (\mathsf{M}\xi)^2 = e^{3\lambda} - e^{2\lambda}.$$

6.42.

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2 = \sum_{\omega\in\Omega}(\xi(\omega) - \mathsf{M}\xi(\omega))^2\mathsf{P}(\omega) \geq$$

$$\geq \sum_{\omega:|\xi(\omega)-\mathsf{M}\xi(\omega)|\geq\varepsilon}(\xi(\omega) - \mathsf{M}\xi(\omega))^2\mathsf{P}(\omega) \geq$$

$$\geq \varepsilon^2\sum_{\omega:|\xi(\omega)-\mathsf{M}\xi(\omega)|\geq\varepsilon}\mathsf{P}(\omega) = \varepsilon^2\mathsf{P}\{\omega : |\xi(\omega) - \mathsf{M}\xi(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

6.43.

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| \geq \varepsilon\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \mathsf{M}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathsf{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0.$$

6.44. Случайная величина ξ является функцией от вектора $\zeta = (\xi, \eta)$:

$$\xi = g(\zeta) = g(\xi, \eta).$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}g(\xi, \eta) = \sum_{x_i, y_j} x_i \mathsf{P}_\zeta(x_i y_j).$$

6.45. Обозначим число очков, выпавших на i-й кости, через $\xi_i, i = 1, 2, 3$. Тогда $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ — сумма очков выпавших на трех костях. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимы, их распределения имеют вид

$$\mathsf{P}_{\xi_1}(i) = 1/2,\ i = 1, 2;$$

$$\mathsf{P}_{\xi_2}(j) = 1/2,\ j = 3, 4;$$

$$\mathsf{P}_{\xi_3}(k) = 1/2,\ k = 5, 6.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\xi_1 + \mathsf{M}\xi_2 + \mathsf{M}\xi_3,$$

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\xi_1 + \mathsf{D}\xi_2 + \mathsf{D}\xi_3.$$

Распределение $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ можно найти, например, так. Определим случайные величины η_1, η_2, η_3 следующим образом:

$$\xi_1 = (\xi_1 - 1) + 1 = \eta_1 + 1,$$

$$\xi_2 = (\xi_2 - 3) + 3 = \eta_2 + 3,$$

$$\xi_3 = (\xi_3 - 5) + 5 = \eta_3 + 5.$$

Случайные величины η_1, η_2, η_3 независимы как функции от независимых случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 и одинаково распределены, каждая с распределением

n	0	1
p_n	1/2	1/2

Тогда

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + 9 = \eta + 9,$$

где $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$. Очевидно, η имеет биномиальное распределение с параметрами $(3, 1/2)$. Распределение функции $\xi = \eta + 9$ от случайной величины η находим согласно (5.1.1).

6.48.

$$cov(\xi, \eta) = \mathsf{M}((\zeta_1 + \zeta_2) - \mathsf{M}(\zeta_1 + \zeta_2))((\zeta_1 - \zeta_2) - \mathsf{M}(\zeta_1 - \zeta_2)) =$$

$$= \mathsf{M}((\zeta_1 - \mathsf{M}\zeta_1) + (\zeta_2 - \mathsf{M}\zeta_2))((\zeta_1 - \mathsf{M}\zeta_1) - (\zeta_2 - \mathsf{M}\zeta_2)) =$$

$$= \mathsf{M}((\zeta_1 - \mathsf{M}\zeta_1)^2 - (\zeta_2 - \mathsf{M}\zeta_2)^2) = \mathsf{D}\zeta_1 - \mathsf{D}\zeta_2 = 0.$$

21.7 К главе 7

7.2. $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$; $B = \{(0, 0)\}$.

7.10. Рассмотрите совокупность всех алгебр $\mathfrak{A}_\alpha$, содержащих класс $\mathfrak{K}$, и докажите, что $\bigcap\limits_\alpha \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}(\mathfrak{K})$.

7.13. Рассмотрите совокупность всех σ-алгебр $\mathfrak{F}_\alpha$, содержащих класс $\mathfrak{K}$, и докажите, что $\bigcap\limits_\alpha \mathfrak{F}_\alpha = \sigma(\mathfrak{K})$.

7.14. Пусть $\mathfrak{K}_1$ — класс промежутков $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^1\}$ (напомним, что $\sigma(\mathfrak{K}_1) = \mathfrak{B}^1$). Имеет место включение

$$\mathfrak{K}_1 \subset \sigma(\mathfrak{K}).$$

В самом деле, $\sigma(\mathfrak{K})$ содержит $\{a\}$, поскольку

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{n} (a - 1/n, a + 1/n),$$

а $[a, b) = (a, b) \cup \{a\}$.

Из определения σ-алгебры, порожденной классом $\mathfrak{K}_1$, имеем

$$\sigma(\mathfrak{K}_1) \subset \sigma(\mathfrak{K}).$$

А поскольку $\sigma(\mathfrak{K}_1) = \mathfrak{B}^1$, то $\mathfrak{B}^1 \subset \sigma(\mathfrak{K})$.

Далее, $\mathfrak{K} \subset \sigma(\mathfrak{K}_1) = \mathfrak{B}^1$ (это устанавливается аналогично тому, как устанавливается включение $\mathfrak{K}_1 \subset \sigma(\mathfrak{K})$).

Потому согласно определению σ-алгебры, порожденной классом $\mathfrak{K}$, имеем
$$\sigma(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{B}^1.$$
Следовательно,
$$\sigma(\mathfrak{K}) = \mathfrak{B}^1.$$

7.15. Указание. См. решение задачи 7.14.

7.16. Указание. См. решение задачи 7.14.

7.22. σ-Алгебру $\sigma(\mathfrak{K})$ образует класс не более чем счетных объединений непересекающихся множеств A_i.

Пусть
$$B = \bigcup_{i\in I} A_i,\ I \subset \mathbb{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,$$
тогда
$$\overline{B} = \Omega \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in \overline{I}} A_i,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j.$$
Пусть
$$B_k = \bigcup_{i\in I_k} A_i,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ I_k \subset \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots,$$
тогда
$$\bigcap_k B_k = \bigcap_k \Bigl(\bigcup_{i\in I_k} A_i\Bigr) = \bigcup_{i\in I} A_i,\ I = \bigcap_k I_k.$$

21.8 К главе 8

8.1°. 1) $(1 + \ln 2)/2$; 2) $(1 - e^{-1})/2$; 3) $1/3$; 4) $1/4 + e^{-1} + 3(\ln 3 - \ln 4)/4$; 5) $1 - 2/3^4$; 6) $\pi/16$; 7) $1/18$; 8) $1/2 + \ln 3 - \ln 2$; 9) $1/6$; 10) $1/9$.

8.2°. 1) $(1 - \ln 2)/2$; 2) $\pi/64$; 3) $1 - \pi/4$; 4) $\pi/4$.

8.3°. 1) $1/4$; 2) $8/9$; 3) $7/16$; 4) $1/4$; 5) $1-\pi/4$; 6) $1-\pi/4$; 7) $\pi/8$; 8) $a\sqrt{a}$; 9) $1-a\sqrt{a}$; 10) $1-1/e$; 11) $\pi/4$; 12) $1-\pi/8$; 13) $1/2$; 14) $3/4$.

8.4. 1) $1/4$; 2) $1/4$; 3) $1/4$; 4) $3/16$; 5) $3/16$; 6) $1/2$; 7) $1/8$; 8) $1/4$; 9) $3/8$; 10) $1/8$; 11) $1/2$; 12) $5/8$; 13) $\pi/4$; 14) $1/2$; 15) $1/4$; 16) $(\pi-2)/4$.

8.5°. $a/(a+b-2r)$. **8.6.** $1-(1-k)^2$.

8.7. Если ξ — момент прихода к причалу первого сýдна, η — второго, то событие “одно из сýден будет ждать освобождения причала” можно представить в виде

$$\{(\xi,\eta):\ \eta\in[\xi,\xi+1]\}\cup\{(\xi,\eta):\ \xi\in[\eta,\eta+2]\}.$$

Ответ: 0,121.

8.8°. $(a-d)^2/a^2$. **8.9.** $\dfrac{1}{2\pi}n\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

8.10. а) $1-\frac{2}{\pi}\arccos r$; б) $\begin{cases} \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{r}{2}, & \text{если } r\le 2;\\ 1, & \text{если } r>2.\end{cases}$

8.11°. 1) r^2/R^2. **8.12°.** 1) r^{2N}/R^{2N}.

8.13. $C_5^2(b/a)^2(1-b/a)^3$.

8.14. Суммарная длина “окрестностей неразличимости” фраунгоферовых линий составляет $1/2$ от суммарной длины между солнечными фраунгоферовыми линиями. Поэтому вероятность того, что фраунгоферова линия железа совпадает с фраунгоферовой линией солнца равна $1/2$, а вероятность 60 таких совпадений равна $(1/2)^{60}$. Заметим, что $(1/2)^{60}$ — это также вероятность того, что при бросании симметричной монеты 60 раз, 60 раз выпадет герб.

8.15. Точки будем считать различимыми. Три точки на отрезке $[0,1]$ задают одну точку в кубе $[0,1]\times[0,1]\times$ $\times[0,1]$.

1. Из отрезков длиной ξ,η,ζ можно построить треугольник, если $\xi<\eta+\zeta$, $\eta<\xi+\zeta$, $\zeta<\xi+\eta$. Искомая вероятность равна $1/2$ и вычисляется как геометрическая вероятность.

2. В кубе $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ точки, для которых $\xi+\eta+\zeta<3/2$, лежат ниже плоскости $\xi+\eta+\zeta=3/2$, проходящей через точки $(3/2,0,0)$, $(0,3/2,0)$, $(0,0,3/2)$. Объем части куба, отсекаемый плоскостью $\xi+\eta+\zeta=3/2$

равен разности объема пирамиды с вершинами в точках $(0,0,0)$, $(3/2,0,0)$, $(0,3/2,0)$, $(0,0,3/2)$ и объемов трех пирамид, отсекаемых гранями куба, параллельными координатным плоскостям. Искомая вероятность вычисляется как геометрическая вероятность и равна $1/2$.

3. Вероятность того, что $\max\{\xi,\eta,\zeta\} \le t$, равна t^3.

8.16. 1) $1-(1-t)^2$; 2)(а) $1/2$; 2)(б) $(1-q)^2/2$.

8.17°. 2) Пусть ξ_i — расстояние от i-й точки до центра сферы, $i = 1,2,\ldots,N$. Тогда искомая вероятность $\mathsf{P}\{\min\{\xi_i\} > r\} = \mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\{\xi_i > r\}\right) = \prod\limits_{i=1}^{n}\mathsf{P}\{\xi_i > r\} = (1-r^3/R^3)^N$.

8.18. $1/2$. **8.19.** $13/24$; $11/24$. **8.20.** $1/3$.

8.21°. $2/\pi$. **8.24.** 1) $\pi/4$; 2) $\pi/(2\sqrt{3})$.

8.25. 1) $1/3$; 2)$1/6$.

8.26. Обозначим координаты точек на отрезке $[0;1]$ через ξ,η,ζ. Бросание наудачу трех точек на отрезок $[0;1]$ равносильно бросанию наудачу одной точки (ξ,η,ζ) в куб $[0;1]\times[0;1]\times[0;1]$. Точка из куба $[0;1]\times[0;1]\times[0;1]$ принадлежит одному из кубиков

$$[(i-1)/3, i/3]\times[(j-1)/3, j/3]\times[(k-1)/3, k/3], i,j,k = 1,2,3.$$

При этом точки находятся в разных частях отрезка $[0;1]$, если они принадлежат кубикам, у которых все i,j,k различны. Всего таких кубиков $3\cdot2\cdot1$. Их суммарный объем равен $6/27$. Поэтому искомая вероятность, вычисленная как геометрическая вероятность, равна $2/9$. См. также решение задачи 8.28.

8.27. 1) $1/9$; 2) $8/9$; 3) $8/27$. См. также решение задачи 8.28.

8.28. Занумеруем части отрезка слева направо числами от 1 до n. Точки различимы, например, занумерованы.

Оборот “на отрезок $[0,1]$, разбитый на n частей, брошены n различимых точек” обозначает, что каждой точке приписан номер части, на который она попала. Так что исход бросания n точек — упорядоченная последовательность $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ длиной n, составленная из чисел $1,2,\ldots,n$; x_1 — номер части, на который попала точка с номером 1, x_2 — номер части, на который попала точка с номером 2, и т. д., x_n — номер части, на который попала точка с номером n, всего исходов n^n.

Каждому исходу $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ приписываем вероятность из следующих соображений. Поскольку точки на отрезок бросают наудачу, то вероятность точке попасть на данную часть отрезка равна $1/n$ (вероятность $1/n$ получена как геометрическая вероятность). Точки на отрезок бросают независимо, поэтому вероятность того, что они попадут на части с номерами $u_1, u_2, \dots, u_n$, равна $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^n}$ (вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей). Так что исходу $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ приписываем вероятность $1/n^n$. С другой стороны, n^n — это число последовательностей длиной n, составленных из чисел от 1 до n — число всех исходов. Поэтому в качестве математической модели стохастического эксперимента будем рассматривать классическую модель. Фактически мы имеем дело с моделью Максвелла-Больцмана размещения n различимых частиц по n ячейкам (см. параграф 4.3).

1) Событие “все точки попадут в одну часть” описывается последовательностями длиной n, составленными из одинаковых чисел. Таких последовательностей n, поэтому искомая вероятность равна $n/n^n = 1/n^{n-1}$.

2) Событие “все части будут заняты” описывается последовательностями длиной n, составленными из чисел от 1 до n, в которых встречается каждое из чисел $1, 2, \dots, n$. Таких последовательностей $n!$, поэтому искомая вероятность равна $n!/n^n$.

3) Событие “не занята только крайняя левая часть” описывается последовательностями длиной n, составленными из чисел $2, 3, \dots, n$, каждое из которых встречается хотя бы один раз. Число таких последовательностей равно $(n-1)C_n^2(n-2)!$ — сначала выберем номер ячейки, в которую попадут две частицы — $(n-1)$ способами, затем выберем две частицы с одинаковыми номерами — C_n^2 способами, оставшиеся $(n-2)$ частиц упорядочим $(n-2)!$ способами. И, следовательно, искомая вероятность равна $C_n^2(n-1)!/n^n$.

6) Событие “заняты ровно s частей” описывается последовательностями длиной n, составленными из s раз-

личных чисел (каждое от 1 до n), т. е. словами длиной n, составленными из s букв. Сначала выберем s различных чисел (C_n^s способами). Число последовательностей длиной n, составленных из этих s чисел, равно

$$\sum C_n(k_1, k_2, \dots, k_s),$$

суммирование ведется по таким последовательностям $(k_1, k_2, \dots, k_s)$, для которых $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$, $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$, $\dots, k_s \geq 1$. Так что искомая вероятность равна

$$C_n^s \sum C_n(k_1, k_2, \dots, k_s)/n^n.$$

8.29. Точки будем считать различимыми, например, окрашенными.

При любом повороте окружности вероятность события "треугольник остроугольный" (и не только этого события) остается неизменной, поэтому можно считать, что из трех вершин A, B, C одна, например C, фиксирована. Две другие выбирают наудачу. Будем задавать положения точек A и B относительно точки C величинами дуг $CA = \alpha$ и $CB = \beta$ (рис. 21.8.1), откладывая их против движения часовой стрелки, дуги будем измерять в радианах. Треугольник ABC остроугольный (при $\alpha < \beta$), если каждая из дуг $CA = \alpha, AB = \beta - \alpha, BC = 2\pi - \beta$ меньше π, т. е.

$$\beta > \alpha,\ \alpha < \pi,\ \beta - \alpha < \pi,\ \beta > \pi, \tag{21.8.1}$$

или (при $\beta < \alpha$) каждая из дуг $CB = \beta$, $BA = \alpha - \beta$, $CA = 2\pi - \alpha$ меньше π, т. е.

$$\beta < \alpha,\ \beta < \pi,\ \alpha - \beta < \pi,\ \alpha > \pi. \tag{21.8.2}$$

Различимой паре точек на окружности соответствует упорядоченная пара чисел, а упорядоченной паре чисел (α, β), $0 < \alpha < 2\pi$, $0 < \beta < 2\pi$ соответствует одна точка квадрата $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ на плоскости с осями $O\alpha$ и $O\beta$ и наоборот. А следовательно, множеству дуг α, β, которые удовлетворяют одному из условий: (21.8.1) или (21.8.2), соответствует множество точек квадрата $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, координаты которых удовлетворяют одному из условий: (21.8.1) или (21.8.2). Это множество точек квадрата имеет вид, аналогичный изображенному на рис. 8.1.2.

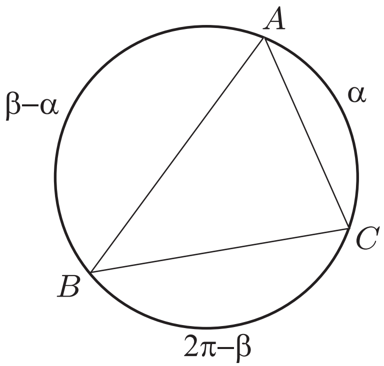


Рис. 21.8.1: К задаче 8.29

Искомая вероятность равна $\dfrac{2\pi^2/2}{(2\pi)^2} = \dfrac{1}{4}$.

8.30. 1) 3/4; 2) 1/4 (см. также задачу 8.29).

8.31. Зафиксируем одну из точек, например A. Тогда положение других можно описать дугами AB, AC, AD, которые откладываются против движения часовой стрелки (см. также задачу 8.29).

Ответ: 1/3.

8.34(1°). Положение отрезка, бросаемого на $[0; nd]$, определяется положением его середины. Поэтому бросание отрезка на $[0; nd]$ равносильно бросанию наудачу его середины на промежуток $[d/2, d(n-1/2)]$. Для вычисления вероятности того, что отрезок “накроет” одну из точек деления, достаточно рассмотреть бросание середины отрезка на промежуток $[d/2, 3d/2]$.

Обозначим через η координату середины отрезка, а через ζ его длину. Отрезок “накрывает” точку с координатой d тогда и только тогда, когда

$$|d-\eta| \le \zeta/2.$$

Решение задачи сводится к вычислению $\mathsf{P}\{|d-\eta| \le \zeta/2\}$. Эта вероятность вычисляется как геометрическая вероятность события $|d-\eta| \le \zeta/2$ в эксперименте, состоящем в бросании наудачу точки (η, ζ) в квадрат $[d/2, 3d/2] \times$ $\times[0, d]$, и равна $1/2$.

8.35°. $\pi/4$. **8.36°.** $(a-r)/a$. **8.37°.** $2l/L$.

21.9 К главе 9

9.1°. $1/4$. **9.2°.** $3/4$. **9.3°.** 1) $7/12$; 2) $1/3$.

9.4°. Решение к пункту (5). Бросание пары точек на отрезок $[0;1]$ равносильно бросанию одной точки в квадрат $[0;1] \times [0;1]$ и наоборот (см. также примеры 8.1.1, 8.1.2, 8.1.3).

Обозначим

$$F_\zeta(x) = \mathsf{P}\{\zeta < x\} = \mathsf{P}\{\max\{\xi^2, \eta\} < x\}.$$

Очевидно, $F_\zeta(x) = 0$, если $x < 0$, и $F_\zeta(x) = 1$, если $x > 1$. Если $0 < x \le 1$, то

$$F_\zeta(x) = \mathsf{P}\{\max\{\xi^2, \eta\} < x\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\xi < \sqrt{x}, \eta < x\} = \mathsf{P}\{(\xi, \eta) \in A\},$$

где $A = [0; \sqrt{x}] \times [0; x]$. Вероятность события $\{(\xi, \eta) \in A\}$ вычисляем как геометрическую вероятность:

$$F_\zeta(x) = \mathsf{P}\{(\xi, \eta) \in A\} = \frac{\mathsf{L}(A)}{\mathsf{L}([0;1] \times [0;1])} = \frac{x\sqrt{x}}{1^2} = x^{3/2}.$$

Следовательно,

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ x^{3/2}, & \text{если } 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Ответы:

$$1) F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ x^2, & \text{если } 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$2) F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1-(1-x)^2, & \text{если } 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$3) F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ x(1-\ln x), & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$4) F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ x^2/2, & \text{если } 0 \le x < 1; \\ 1-(2-x)^2/2, & \text{если } 1 \le x < 2; \\ 1, & \text{если } x \ge 2; \end{cases}$$

$$6) F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1-(1-x)^2, & \text{если } 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

9.5°. Функция распределения случайной величины ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ x/l, & \text{если } 0 < x \le l; \\ 1, & \text{если } x > l; \end{cases}$$

плотность распределения ξ

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 1/l, & \text{если } 0 < x \le l; \\ 0, & \text{если } x > l. \end{cases}$$

9.6.

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \sqrt{x}/2, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ (\sqrt{x}+1)/4, & \text{если } 1 < x \le 9; \\ 1, & \text{если } x > 9. \end{cases}$$

9.7.

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0;2]; \\ 1/2, & \text{если } x \in [0;2]. \end{cases}$$

9.8.

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1; \\ 1/x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

9.9.
$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1/4; \\ x^{-\frac{3}{2}}/6, & \text{если } 1/4 < x \le 1; \\ x^{-\frac{3}{2}}/3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

9.10.
$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0;1]; \\ 1, & \text{если } x \in [0;1]. \end{cases}$$

9.11. Пусть $F_\xi(x)$ и $F_\zeta(x)$ — функции распределения случайных величин ξ и ζ, а $f_\xi(x)$ и $f_\zeta(x)$ — их плотности.

Легко видеть, что $F_\zeta(x) = 1 - F_\xi(e^{-x})$, а $f_\zeta(x) = f(e^{-x})e^{-x}$. Из последнего равенства, учитывая, что ξ равномерно распределена на промежутке $[0;1]$, имеем

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

9.12*. Воспользуйтесь (9.1.3).
$$F_\eta(x) = \begin{cases} \int\limits_1^{1-1/x} \lambda e^{-\lambda t} dt, & \text{если } x \le 0, \\ \int\limits_1^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ \int\limits_0^{1-1/x} \lambda e^{-\lambda t} dt + \int\limits_1^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt, & \text{если } x > 1, \end{cases}$$
$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0;1]; \\ \lambda \exp\{-\lambda(1 - 1/x)\}/x^2, & \text{если } x \notin [0;1]. \end{cases}$$

9.13. $F_\eta(x) = 1 - F(-x + 0)$.

9.14. Сначала найти распределение дискретной случайной величины $\eta = \operatorname{sign} \xi$, потом по распределению η выписать ее функцию распределения:
$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1; \\ F(0), & \text{если } -1 < x \le 0; \\ F(0+0), & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

9.15.
$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ x, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

9.16.

1) $p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ p(x) + p(-x), & \text{если } x > 0; \end{cases}$

2) $p_\eta(x) = \dfrac{1}{|a|} p(x/a);$

3) $p_\eta(x) = p(-x);$

4) $p_\eta(x) = p(x - b).$

9.17.

$F_\eta(x) = \begin{cases} F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x} + 0), & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$

9.18. Ответ к пункту (1):

$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ \lambda\left(e^{-\lambda(x+1)} + e^{\lambda(x-1)}\right), & \text{если } x \in [0; 1]; \\ \lambda e^{-\lambda(x+1)}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

9.19. Случайная величина $\eta = F(\xi)$ распределена равномерно на отрезке $[0; 1]$.

9.20. 1) $p_\eta(x) = \frac{1}{2} p\left(\dfrac{1-x}{2}\right);$

2) $p_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(p(\sqrt{x}) + p(-\sqrt{x})), & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$

9.21.

1) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ F(\ln x), & \text{если } x > 0; \end{cases}$

2) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ F(x) - F(-x + 0), & \text{если } x > 0. \end{cases}$

9.22. 1) $2x - x^2$; 2) $x(1 - \ln x)$. **9.23.** $(F(x))^n$.

9.24. 1) $\prod\limits_{i=1}^{n} F_i(x)$; 2) $1 - \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - F_i(x))$.

9.25.

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left(\int_{-\infty}^{x} p_j(y) dy \right);$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left(\int_{x}^{+\infty} p_j(y) dy \right).$$

9.26.

$$1)\, np(x)\left(\int\limits_{-\infty}^{x} p(y)dy\right)^{n-1}; \quad 2)\, np(x)\left(\int\limits_{x}^{+\infty} p(y)dy\right)^{n-1}.$$

9.27. $a = \lambda/2, \quad F_\eta(x) = \begin{cases} e^{\lambda x}/2, & \text{если } x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}/2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

9.28. Можно предложить по меньшей мере два подхода к решению этой задачи.

Пусть ξ — координата брошенной на отрезок $[0; 1]$ точки, тогда длина η меньшей части отрезка равна

$$\eta = g(\xi) = \min\{\xi, 1 - \xi\}.$$

По определению

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\eta < x\} = \mathsf{P}\{\min\{\xi, 1 - \xi\} < x\}.$$

Очевидно, $F_\eta(x) = 0$, если $x \leq 0$ и $F_\eta(x) = 1$, если $x \geq 1/2$. Если $0 < x \leq 1/2$, то

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\min\{\xi, 1-\xi\} < x\} = 1 - \mathsf{P}\{\min\{\xi, 1-\xi\} \geq x\} =$$

$$= 1 - \mathsf{P}\{\xi \geq x, 1 - \xi \geq x\} = 1 - \mathsf{P}\{x \leq \xi \leq 1 - x\}.$$

Вероятность $\mathsf{P}\{x \leq \xi \leq 1 - x\}$ вычисляем как геометрическую вероятность.

Другой подход.

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\eta < x\} = \mathsf{P}\{g(\xi) < x\} =$$

$$= \int\limits_{t:g(t)<x} p_\xi(t)dt = \int\limits_{t:\min\{t,1-t\}<x} p_\xi(t)dt.$$

Следовательно,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ 2x, & \text{если } 0 < x \leq 1/2; \\ 1, & \text{если } x > 1/2. \end{cases}$$

9.29. См. решение задачи 9.28.

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le l/2; \\ (2x-l)/l, & \text{если } l/2 < x \le l; \\ 1, & \text{если } x > l. \end{cases}$$

9.30.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 1-(1-x/T)^2, & \text{если } 0 < x \le T; \\ 1, & \text{если } x > T; \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 2(1-x/T)/T, & \text{если } 0 < x \le T; \\ 0, & \text{если } x > T. \end{cases}$$

9.32. Воспользуемся формулой (9.1.3):

$$F(x) = \mathsf{P}\left\{\frac{1}{\xi} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{t\colon 1/t<x} \exp\left\{-t^2/2\right\}\, dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{1/x}^{0} \exp\left\{-t^2/2\right\}\, dt, & \text{если } x < 0; \\ 1/2, & \text{если } x = 0; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{1/x}^{+\infty} \exp\left\{-t^2/2\right\}\, dt, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

9.33. $F_\eta(x) = 0$, если $x \le 0$, а если $x > 0$, то

$$F_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-1/\sqrt{x}} \exp\{-t^2/2\}\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \exp\{-t^2/2\}\, dt.$$

9.34. По определению, случайная величина ξ симметрично распределена, если $\mathsf{P}_\xi(B) = \mathsf{P}_{-\xi}(B)$, $B \in \mathfrak{B}^1$, или, что то же, $F_\xi(x) = F_{-\xi}(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$.

Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ, т. е. $F_\xi(x) = F(x)$. Функция распределения

$$F_{-\xi}(x) = 1 - F(-x+0).$$

Поэтому случайная величина симметрично распределена, если

$$F(x) = 1 - F(-x+0).$$

Пусть ξ — абсолютно непрерывная (с плотностью распределения $p(x)$ и функцией распределения $F(x)$) и симметрично распределенная случайная величина, т. е.

$$F(x) = 1 - F(-x).$$

Продифференцировав последнее равенство, получим

$$p(x) = p(-x)$$

— условие симметричной распределенности случайной величины в терминах плотности распределения.

9.35.

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\eta < x\} = \mathsf{P}\{1 - \xi < x\} =$$

$$= 1 - \mathsf{P}\{\xi < 1 - x\} = 1 - F_\xi(1 - x),$$

$$p_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\eta(x) = \frac{d}{dx}(1 - F_\xi(1 - x)) = p_\xi(1 - x) = p_\xi(x).$$

Ответ: $\eta = 1 - \xi$ равномерно распределена на промежутке $[0; 1]$.

9.36.

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\} = \mathsf{P}\left\{\frac{\eta - a}{\sigma} < x\right\} = \mathsf{P}\{\eta < a + \sigma x\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{a+\sigma x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-u^2/2\right\} du$$

(воспользовались заменой $(t - a)/\sigma = u$ в последнем интеграле).

9.37. Случайная величина η имеет распределение $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$.

9.38. Воспользуемся формулой (9.1.4):

$$F_{\eta^+}(x) = \mathsf{P}\{\max\{0, \eta\} < x\} =$$

$$= \int\limits_{t:\max\{0,t\}<x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-t^2/2\right\} dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left\{-t^2/2\right\} dt, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

9.39. $F_{\eta^+}(x) =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_0^x \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\} dt, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

9.40. Воспользоваться (9.1.4):

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{(\xi - a)^+ < x\} =$$

$$= \int\limits_{t:(t-a)^+<x} \mathsf{P}_\xi(dt) = \int\limits_{t:\max\{0,t-a\}<x} \mathsf{P}_\xi(dt) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \mathsf{P}_\xi(-\infty, x+a), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ F(x+a), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

9.41. Воспользуйтесь формулой (9.1.4) (см. также решение к задаче 9.40).

$$F_\eta(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x+a} p(t)\, dt, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \le 0. \end{cases}$$

Случайная величина $\eta = (\xi - a)^+$ абсолютно непрерывна, если для $t \le a$ плотность $p(t)$ случайной величины ξ равна нулю.

9.42. Воспользоваться (9.1.3):

$$F_\eta(x) = \mathsf{P}\{\eta < x\} = \mathsf{P}\{\min\{\xi, L\} < x\} =$$

$$= \int\limits_{t:\min\{t,L\}<x} \mathsf{P}_\xi(dt) = \begin{cases} \mathsf{P}_\xi(-\infty, x), & \text{если } x \le L; \\ 1, & \text{если } x > L. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } x \le L; \\ 1, & \text{если } x > L. \end{cases}$$

9.43. См. решение задачи 9.42.
9.44. См. решение задачи 9.35.
9.50.

1) $F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty; 0]; \\ x, & \text{если } x \in (0; 1]; \\ 1, & \text{если } x \in (1; \infty). \end{cases}$

2) $F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty; 0]; \\ x, & \text{если } x \in (0; 1]; \\ 1, & \text{если } x \in (1; \infty). \end{cases}$

3) $F_{\xi_3}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty; 0]; \\ x, & \text{если } x \in (0; 1/4]; \\ x + 1/4, & \text{если } x \in (1/4; 1/2]; \\ 1, & \text{если } x \in (1/2; \infty). \end{cases}$

9.51.
Пусть $\Omega = [0; 1]$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}^1_{[0;1]}$, $\mathsf{P} = \mathsf{L}$,

$\xi_1 = \xi_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in [0; 1/2); \\ 0, & \text{если } \omega \in [1/2; 1]; \end{cases}$

$\xi_2 = \xi_2(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega \in [0; 1/2); \\ 1, & \text{если } \omega \in [1/2; 1]; \end{cases}$

$\eta_1 = \eta_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in [0; 1/2); \\ 0, & \text{если } \omega \in [1/2; 1]; \end{cases}$

$\eta_2 = \eta_2(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in [0; 1/2); \\ 0, & \text{если } \omega \in [1/2; 1]. \end{cases}$

Так определенные случайные величины удовлетворяют условиям задачи, но 1) распределения $\xi_1\eta_1$ и $\xi_2\eta_2$ различны; 2) распределения $\xi_1 + \eta_1$ и $\xi_2 + \eta_2$ различны.

9.52. Пусть $\Omega = [0;1]$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_{[0;1]}$, $\mathsf{P} = \mathsf{L}$. Распределения случайных величин

$$\xi = \xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in [0;1/2); \\ -1, & \text{если } \omega \in [1/2;1]; \end{cases}$$

и $\eta = \eta(\omega) = -\xi(\omega)$ совпадают, но $\mathsf{P}\{\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)\} = 1$.

Примером абсолютно непрерывных случайных величин (на одном и том же вероятностном пространстве), удовлетворяющих условиям задачи, являются

$$\zeta = \zeta(\omega) = \omega,\ \chi = \chi(\omega) = 1 - \omega$$

(обе равномерно распределены на $[0;1]$).

9.53.

$$F_\eta(y) = \mathsf{P}\{\eta < y\} = \mathsf{P}\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^1 \times (-\infty, y)\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1 \times (-\infty,y)} f_\zeta(u,v)d(u,v) = \int\limits_{-\infty}^{y} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} f_\zeta(u,v)du \right) dv,$$

т.е.

$$F_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} f_\zeta(u,v)du \right) dv.$$

Последнее равенство означает, что случайная величина η абсолютно непрерывна и ее плотность

$$f_\eta(v) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_\zeta(u,v)du.$$

9.54. Функция $f(t-a)$ является плотностью распределения случайной величины $\xi + a$.

9.55.

$$F_{\xi_a}(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } x \in (-\infty;-a); \\ F(-a), & \text{если } x \in [-a;0]; \\ F(-a) + \mathsf{P}\{\xi \in [-a,a]\}, & \text{если } x \in (0;a]; \\ F(x), & \text{если } x \in (0;+\infty); \end{cases}$$

$$F_{\eta_a}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty;-a]; \\ F(x), & \text{если } x \in (-a;a]; \\ 1, & \text{если } x \in (a;+\infty). \end{cases}$$

21.10 К главе 10

10.1°. 1) $\mathsf{M}\xi = 0$, $\mathsf{D}\xi = a^2/3$; 2) $\mathsf{M}\xi = (a+b)/2$, $\mathsf{D}\xi = (b-a)^2/12$. **10.2°.** 1) 1; 2) 1/2; 3) $e-1$.

10.3°. 1) 3; 2) $1-2/e$; 3) 3; 4) 0.

10.4. 1) $(\ln 2)/\pi + 1/2$. **10.5.** $\exp\{\sigma^2/2\}$.

10.6°. Решение (пункт (3)). Математическое ожидание функции $\eta = I_{[1/3,3]}(\xi^2)$ от случайной величины ξ вычисляется по плотности распределения ξ согласно формуле (10.1.1):

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}I_{[1/3,3]}(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_{[1/3,3]}(x^2)\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{+\infty} I_{[1/3,3]}(x^2)\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{3}.$$

Ответы: 1) $\sqrt{3}/\pi$; 2) $(\sqrt{3}-1)/\pi - 1/12$; 3) 1/3; 4) 1/2.

10.7. 1) $\mathsf{M}\xi = 1/\lambda$; 2) $\mathsf{D}\xi = 1/\lambda^2$; 3) $\mathsf{P}\{\xi > 1\} = e^{-\lambda}$; 4) $k!/\lambda^k$.

10.8.

$$\mathsf{M}\min\{\xi, 365\} = \int\limits_{0}^{+\infty} \min\{x, 365\}\lambda\exp\{-\lambda x\}dx =$$

$$= \lambda\int\limits_{0}^{365} x\exp\{-\lambda x\}dx + 365\lambda\int\limits_{365}^{+\infty}\exp\{-\lambda x\}dx =$$

$$= (1-\exp\{-365\lambda\})/\lambda = 222.$$

10.9. $\mathsf{M}\zeta = 1$; $\mathsf{D}\zeta = 4/9$.

10.10°. $\mathsf{M}\xi = a+1$ — достаточно заметить, что плотность ξ симметрична относительно прямой $x = a+1$.

$\mathsf{M}\xi^2 = (a+1)^2 + 1/6$ (см. также пример 10.1.5).

10.11. $1 - 1/e^2$. **10.12.** $\mathsf{M}\xi = 0$, $\mathsf{D}\xi = 2/\lambda^2$.

10.13. Выражение “точка A равномерно распределена на окружности с центром в точке O” означает, что угол φ между осью Ox и радиус-вектором $\overline{OA}$ равномерно распределен на отрезке $[0; 2\pi]$. Очевидно, $\xi = |R \operatorname{tg} \varphi|$. Для $x > 0$

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\} = \mathsf{P}\{|\operatorname{tg}\varphi| < x/R\} = \mathsf{P}(A_x),$$

где A_x — множество точек φ, удовлетворяющих соотношениям

$$|\operatorname{tg}\varphi| < x/R,\ \ \varphi \in [0, 2\pi],$$

подробнее

$$A_x = [0, \operatorname{arctg}(x/R)] \cup$$

$$\cup[\pi - \operatorname{arctg}(x/R), \pi + \operatorname{arctg}(x/R)] \cup [2\pi - \operatorname{arctg}(x/R), 2\pi].$$

Вероятность $F_\xi(x) = \mathsf{P}(A_x)$, вычисленная как геометрическая вероятность, равна $(2\operatorname{arctg}(x/R))/\pi$.

Ответ:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \dfrac{2R}{\pi(x^2 + R^2)}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины ξ равно $+\infty$.

10.14.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ x^2/R^2, & \text{если } 0 < x \le R; \\ 1, & \text{если } x > R; \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (0; R]; \\ 2x/R^2, & \text{если } x \in (0; R]; \end{cases}$$

$\mathsf{M}\eta = 2R/3$; $\mathsf{D}\eta = R^2/18$.

10.15. Оборот “точка A равномерно распределена на окружности” означает, что угол φ между осью Ox и радиус-вектором $\overline{OA}$ равномерно распределен на отрезке $[0; 2\pi]$. Случайная величина ξ равна $\cos\varphi$, поэтому

$$F_{|\xi|}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 1 - \dfrac{2}{\pi}\arccos x, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$p_{|\xi|}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (0;1]; \\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{если } x \in (0;1]; \end{cases}$$

$\mathsf{M}|\xi| = 2/\pi$.

10.16.

$$1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a^2; \\ \dfrac{\sqrt{x}-a}{b-a}, & \text{если } a^2 < x \le b^2; \\ 1, & \text{если } x > b^2; \end{cases}$$

$\mathsf{M}\eta = \dfrac{b^3-a^3}{3(b-a)}$;

$$2) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \int\limits_0^{\sqrt{x}} \dfrac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-\theta t} dt, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$\mathsf{M}\eta = \dfrac{\nu(\nu+1)}{\theta^2}$;

$$3) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$\mathsf{M}\eta = 2/\lambda^2$.

10.17.

$$1) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2\pi a; \\ \dfrac{x-2\pi a}{2\pi(b-a)}, & \text{если } 2\pi a < x \le 2\pi b; \\ 1, & \text{если } x > 2\pi b; \end{cases}$$

$\mathsf{M}\eta = \pi(a+b)$;

$$2) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ \int\limits_0^{x/(2\pi)} \dfrac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-\theta t} dt, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$\mathsf{M}\eta = 2\pi\nu/\theta$;

$$3) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 1 - \exp\left\{-\dfrac{\lambda}{2\pi} x\right\}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$\mathsf{M}\eta = 2\pi/\lambda$.

10.18. 1) $\mathsf{M}\eta = \dfrac{b^4-a^4}{4(b-a)}$; 2) $\dfrac{6}{\lambda^4}$.

10.19.

1(а) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ x/\pi, & \text{если } 0 < x \le \pi; \\ 1, & \text{если } x > \pi; \end{cases}$

$\mathsf{M}\eta = \pi/2$;

1(б) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le \pi; \\ x/\pi - 1, & \text{если } \pi < x \le 2\pi; \\ 1, & \text{если } x > 2\pi; \end{cases}$

$\mathsf{M}\eta = 3\pi/2$;

2(а) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 2\sqrt{x/\pi}, & \text{если } 0 < x \le \pi/4; \\ 1, & \text{если } x > \pi/4; \end{cases}$

$\mathsf{M}\eta = \pi/12$;

2(б) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le \pi/4; \\ 2\sqrt{x/\pi} - 1, & \text{если } \pi/4 < x \le \pi; \\ 1, & \text{если } x > \pi; \end{cases}$

$\mathsf{M}\eta = 7\pi/12$;

3(а) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 2\sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \le 1/4; \\ 1, & \text{если } x > 1/4; \end{cases}$

$\mathsf{M}\eta = 1/12$;

3(б) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1/4; \\ 2\sqrt{x} - 1, & \text{если } 1/4 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$

$\mathsf{M}\eta = 7/12$;

4(а) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 2\sqrt[3]{x}, & \text{если } 0 < x \le 1/8; \\ 1, & \text{если } x > 1/8; \end{cases}$

$\mathsf{M}\eta = 1/32$;

4(б) $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1/8; \\ 2\sqrt[3]{x} - 1, & \text{если } 1/8 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$

$\mathsf{M}\eta = 15/32$.

10.20. В задачах 1°, 2°, 6° целесообразно сначала найти распределения соответствующих случайных величин, в остальных задачах удобнее воспользоваться мультипликативным свойством математического ожидания.

1°а) 1/3; 2°а) 2/3; 2°б) 13/12; 3°а) 1/4; 3°б) 1/2; 3°в) $1/(2\lambda)$; 3°г) $1/\lambda^2$; 5°в) $(e-1)/\lambda$; 6°г) $1/(\lambda^3(1+\lambda))$.

10.21. $\alpha + 1/n$.

10.22. 1) $\dfrac{n}{n+1}a+\dfrac{1}{n+1}b$; 2) $\dfrac{n}{n+1}b+\dfrac{1}{n+1}a$; 3) $\dfrac{a+b}{2}$.

10.23. 1) $\theta - \dfrac{n-1}{n+1}h$; 2) $\theta + \dfrac{n-1}{n+1}h$; 3) $\dfrac{n-1}{n+1}h$.

10.24. 1) $\mathsf{M}\overline{\xi} = \theta + \alpha$; 2) $\mathsf{M}\min\{\xi_i\} = \theta + \alpha/n$; 3) $\mathsf{M}\hat{\theta}_1 = \theta + \alpha/n^2$; 4) $\mathsf{M}\hat{\theta}_2 = \alpha(1 - 1/n^2)$.

10.25. $\mathsf{M}\overline{\xi} = \theta$.

10.26.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0;\\ 1 - \dfrac{(T-x)^2}{T^2}, & \text{если } 0 < x \le T;\\ 1, & \text{если } x > T. \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0;\\ \dfrac{2(T-x)}{T^2}, & \text{если } 0 < x \le T;\\ 0, & \text{если } x > T. \end{cases}$$

$\mathsf{M}\xi = \dfrac{T}{3}$; $\mathsf{D}\xi = \dfrac{T^2}{18}$; $\mathsf{M}\xi^n = \dfrac{2T^n}{(n+1)(n+2)}$.

10.27.

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (0;1);\\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{если } x \in (0;1); \end{cases}$$

$\mathsf{M}\eta = 2/\pi$.

10.28*. Поскольку при любом повороте окружности вероятность события, зависящая только от расстояния η между двумя точками окружности, остается неизменной, то одну из точек (например, точку A) можно считать фиксированной, а положение второй точки (точки B) по отношению к точке A будем описывать дугой φ, откладываемой от радиус вектора $\overline{OA}$ к радиус вектору $\overline{OB}$. Очевидно, $\eta = |2R\sin(\varphi/2)|$. Далее, аналогично тому как это делалось в задаче 10.13, получаем

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0;\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2R}, & \text{если } 0 < x \le 2R;\\ 1, & \text{если } x > 2R. \end{cases}$$

10.30*. Поскольку ξ и η — независимые случайные величины, распределением случайной величины (ξ, η) является $\mathsf{F} \times \mathsf{G}$. Согласно теореме о вычислении математического ожидания функции от случайной величины по ее распределению, имеем

$$\mathsf{M} I_{A_x}(\xi, \eta) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} I_{A_x}(u, v) \mathsf{F} \times \mathsf{G}(d(u, v)) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} I_{A_x}(u, v) \mathsf{F}(du) \right) \mathsf{G}(dv) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} F(x - v) \mathsf{G}(dv).$$

А если ξ и η — абсолютно непрерывные случайные величины, то для последнего интеграла имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} F(x - v) \mathsf{G}(dv) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{x-v} f(s) ds \right) g(v) dv.$$

Заметим, что $\mathsf{M} I_{A_x}(\xi, \eta)$, как математическое ожидание от простой случайной величины $I_{A_x}(\xi, \eta)$, равно значению $\mathsf{P}\{\xi + \eta < x\}$ — функции распределения случайной величины $\xi + \eta$ в точке x.

10.31. $\mathsf{M}\eta^+ = 1/\sqrt{2\pi}$. **10.32.** $\mathsf{M}\eta^+ = \sigma/\sqrt{2\pi}$.

10.33. $\mathsf{M}\xi = \dfrac{1}{\theta}$; $\mathsf{D}\xi = \dfrac{1}{\theta^2}$; $\mathsf{M}\xi^2 = \dfrac{2}{\theta^2}$ (см. также пример 10.1.4).

10.34. $\mathsf{M}\xi = \dfrac{m}{\theta}$; $\mathsf{D}\xi = \dfrac{m}{\theta^2}$; $\mathsf{M}\xi^2 = \dfrac{m(m+1)}{\theta^2}$ (см. также пример 10.1.4).

10.35. $\mathsf{M}\xi = n$; $\mathsf{D}\xi = 2n$; $\mathsf{M}\xi^2 = n(n+2)$ (см. также пример 10.1.4).

10.36. $\mathsf{M}\xi = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}$; $\mathsf{M}\xi^2 = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\}$; $\mathsf{D}\xi = \exp\{2\mu + \sigma^2\}(\exp\{\sigma^2\} - 1)$.

10.37. $\mathsf{M}\xi = \dfrac{\theta\lambda}{\theta - 1}$; $\mathsf{M}\xi^2 = \dfrac{\theta\lambda^2}{\theta - 2}$.

10.38. 1) $\mathsf{M}\zeta_1 = \dfrac{3}{2\theta}$; $\mathsf{D}\zeta_1 = \dfrac{29}{12\theta^2}$; 2) $\mathsf{M}\zeta_2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{\theta}$; $\mathsf{D}\zeta_2 = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{\theta^2}$; 3) $\mathsf{M}\zeta_3 = \dfrac{\ln 2}{\theta}$; $\mathsf{D}\zeta_3 = \dfrac{\ln^2 2 - 1}{\theta^2}$.

10.39. Случайная величина ξ является функцией вектора $\zeta = (\xi, \eta)$:

$$\xi = g(\zeta) = g(\xi, \eta) = \xi,$$

поэтому

$$\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}g(\zeta) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_\zeta(x,y) d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x f_\zeta(x,y) d(x,y).$$

10.42. Сумму

$$S_\nu = \sum_{j=0}^{\nu} \xi_j$$

следует понимать так:

$$S_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} S_k I_{\{\nu=k\}},\ S_k = \sum_{j=0}^{k} \xi_j,\ \xi_0 = 0$$

— поскольку

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} I_{\{\nu=k\}},$$

то

$$S_\nu = S_\nu \sum_{k=0}^{\infty} I_{\{\nu=k\}} = \sum_{k=0}^{\infty} S_\nu I_{\{\nu=k\}} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k I_{\{\nu=k\}}.$$

Обозначим первый и второй моменты случайной величины ξ_j соответственно через m_1 и m_2, параметр пуассоновского распределения обозначим через θ (напомним, что у пуассоновской случайной величины ν с параметром θ значения $\mathsf{M}\nu = \theta$, $\mathsf{M}\nu^2 = \theta^2 + \theta$).

В силу свойств счётной аддитивности и мультипликативности математического ожидания имеем

$$\mathsf{M}S_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{M}(S_\nu I_{\{\nu=k\}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{M}(S_k I_{\{\nu=k\}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{M}S_k \mathsf{M}I_{\{\nu=k\}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{M}S_k \cdot \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} m_1 k \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} = m_1\theta.$$

Далее,

$$\mathsf{D}S_\nu = \mathsf{M}S_\nu^2 - (\mathsf{M}S_\nu)^2.$$

Вычислим $\mathsf{M}S_\nu^2$.

$$\mathsf{M}S_\nu^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{M}(S_\nu^2 I_{\{\nu=k\}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{M}(S_k^2 I_{\{\nu=k\}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{M}S_k^2 \mathsf{M}I_{\{\nu=k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{M}S_k^2 \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta};$$

$$\mathsf{M}S_k^2 = \mathsf{M}\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i\right)^2 = \mathsf{M}\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 + \sum_{i,j,i\neq j}^{k} \xi_i\xi_j\right) =$$

$$= km_2 + k(k-1)m_1^2,$$

поэтому

$$\mathsf{M}S_\nu^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{M}S_k^2 \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} (km_2 + k(k-1)m_1^2) \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} =$$

$$= m_2 \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} + m_1^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}\right) =$$

$$= m_2\theta + m_1^2(\theta^2 + \theta - \theta) = m_2\theta + m_1^2\theta^2.$$

Так что

$$\mathsf{D}S_\nu = m_2\theta + m_1^2\theta^2 - (m_1\theta)^2 = m_2\theta.$$

10.43. Пусть x произвольное фиксированное. Дискретная случайная величина $\hat{F}_n(x)$ принимает значения k/n, $k = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно,

$$\mathsf{P}\left\{\hat{F}_n(x) = \frac{k}{n}\right\} = \mathsf{P}\left\{n\hat{F}_n(x) = k\right\} = \mathsf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} I_{(-\infty,x)}(\xi_j) = k\right\}.$$

Случайная величина

$$n\hat{F}_n(x) = \sum_{j=1}^{n} I_{(-\infty,x)}(\xi_j)$$

как сумма независимых одинаково распределенных случайных величин $I_{(-\infty,x)}(\xi_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, каждая с распределением

$$\mathsf{P}\left\{I_{(-\infty,x)}(\xi_j) = 1\right\} = F(x),\ \mathsf{P}\left\{I_{(-\infty,x)}(\xi_j) = 0\right\} = 1 - F(x),$$

биномиально распределена с параметрами $(n, F(x))$, т. е.

$$\mathsf{P}\left\{n\hat{F}_n(x) = k\right\} = C_n^k (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому при каждом фиксированном x

$$\mathsf{P}\left\{\hat{F}_n(x) = \frac{k}{n}\right\} = \mathsf{P}\left\{n\hat{F}_n(x) = k\right\} = C_n^k (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k},$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

Далее, у биномиально распределенной с параметрами $(n, F(x))$ случайной величины $n\hat{F}_n(x)$

$$\mathsf{M}(n\hat{F}_n(x)) = nF(x),$$

$$\mathsf{D}(n\hat{F}_n(x)) = nF(x)(1 - F(x)).$$

Отсюда

$$\mathsf{M}(\hat{F}_n(x)) = F(x),$$

$$\mathsf{D}(\hat{F}_n(x)) = \frac{1}{n} F(x)(1 - F(x)).$$

10.45. Если

$$a = \int\limits_{\mathbb{R}^1} x\mathsf{F}(dx) \neq \infty,$$

то функция множества

$$\mathsf{Q}(A) = \int\limits_{A} x\mathsf{F}(dx)$$

является непрерывной по монотонно убывающей последовательности множеств, т. е. из $A_{n+1} \subset A_n$, $n = 1, 2, \dots$, следует

$$\mathsf{Q}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_n \mathsf{Q}(A_n).$$

В частности, для последовательности

$$A_n = (-\infty, -n) \cup (n, +\infty),\ \ n = 1, 2, \dots,$$

имеем

$$\lim_n \mathsf{Q}(A_n) = \lim_n \int\limits_{A_n} x\mathsf{F}(dx) = \int\limits_{\emptyset} x\mathsf{F}(dx).$$

И, следовательно,

$$\lim_n \mathsf{M}\eta_n = \lim_n \int\limits_{\mathbb{R}^1} xI_{A_n}(x)\mathsf{F}(dx) = \lim_n \int\limits_{A_n} x\mathsf{F}(dx) = 0.$$

Далее, поскольку

$$\xi = \xi_n + \eta_n,$$

то

$$\mathsf{M}\xi = \mathsf{M}\xi_n + \mathsf{M}\eta_n.$$

Отсюда

$$\lim_n \mathsf{M}\xi_n = \mathsf{M}\xi = a.$$

21.11 К главе 11

11.2. Собственное атомическое распределение, сосредоточенное в точке $2a$.

11.3. Q^{*n} — атомическое распределение, сосредоточенное в точке n.

11.4.

1) Плотность свертки $\mathsf{P}_\theta * \mathsf{U}_{[0,1]}$:

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} I_{[0,1)}(x-k).$$

2) Плотность свертки $\mathsf{P}_\theta * \mathsf{U}_{[0,1/2]} * \mathsf{U}_{[0,1/2]}$:

$$f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} \varphi(x-k),$$

где $\varphi(x) = I_{[0,1)}(x)(2 - 4|x - 1/2|)$.

11.8. Плотность равна свертке плотности абсолютно непрерывного распределения с распределением другого:

$$p(x) = I_{[0,1]}(x)/2 + I_{[0,1]}(x - 1/2)/2.$$

11.9. Равномерное на промежутке $[0;1]$ распределение.

11.10. ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, поэтому $\zeta = \xi + \eta$ также абсолютно непрерывна и

$$f_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_\xi(x-y)\mathsf{P}(dy) = \frac{1}{2} f_\xi(x) + \frac{1}{2} f_\xi(x-1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ f_\xi(x)/2, & \text{если } 0 \le x < 1; \\ f_\xi(x-1)/2, & \text{если } 0 \le x - 1 < 1; \\ 0, & \text{если } x - 1 \ge 1. \end{cases}$$

Или

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0;2]; \\ 1/2, & \text{если } x \in [0;2]. \end{cases}$$

11.12. Равномерное на промежутке $[0, 2]$ распределение.

11.13. Плотность распределения случайной величины ζ

$$p_\zeta(x) = P_\eta * p_\xi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} p_\xi(x-y)P_\eta(dy) =$$

$$= \sum_{k=1}^{6} p_\xi(x-k)P_\eta(k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} p_\xi(x-k).$$

Очевидно, $p_\xi(x-k) = I_{[k,k+1)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Поэтому

$$p_\zeta(x) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} p_\xi(x-k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} I_{[k,k+1)}(x) = \frac{1}{6}I_{[1,7)}(x),$$

т. е. случайная величина ζ распределена равномерно на промежутке $[1; 7)$.

11.15. Функция распределения суммы $\zeta = \xi + \eta$ независимых случайных величин ξ и η равна свертке функций распределения слагаемых, т. е.

$$F_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} Q(x-y)\mathsf{G}(dy).$$

Учитывая, что G — дискретное распределение, сосредоточенное в точках -1 и 1 (с “массой” $1/2$ в каждой), имеем

$$F_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} Q(x-y)\mathsf{G}(dy) = \frac{1}{2}Q(x-1) + \frac{1}{2}Q(x+1).$$

11.16. Функция распределения суммы $\zeta = \xi + \eta$ независимых случайных величин ξ и η равна свертке функций распределения $F(x)$ и $H(x)$ слагаемых ξ и η ($H(x)$ — функция распределения случайной величины η), т. е.

$$F_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} F(x-y)\mathsf{H}(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} H(x-y)\mathsf{F}(dy).$$

Поскольку распределение H имеет плотность

$$h(y) = \begin{cases} 1/2h, & \text{если } y \in [-h; h]; \\ 0, & \text{если } y \notin [-h; h], \end{cases}$$

то

$$F_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} F(x-y)\mathsf{H}(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} F(x-y)h(y)dy =$$

$$= \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} F(x-y)dy = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} F(t)dt$$

(воспользовались заменой $x - y = t$).

Далее, распределение случайной величины η абсолютно непрерывно, поэтому распределение суммы $\zeta = \xi + \eta$ также абсолютно непрерывно и его плотность $f_\zeta(x)$ равна свертке плотности распределения $h = h(t)$ случайной величины η с распределением случайной величины ξ:

$$f_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} h(x-y)\mathsf{F}(dy).$$

По определению функции $h(t)$

$$h(x-y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - y < -h; \\ 1/(2h), & \text{если } -h \le x - y \le h; \\ 0, & \text{если } x - y > h, \end{cases}$$

или

$$h(x-y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < x - h; \\ 1/(2h), & \text{если } x - h \le y \le x + h; \\ 0, & \text{если } y > x + h. \end{cases}$$

Поэтому

$$f_\zeta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} h(x-y)\mathsf{F}(dy)$$

как интеграл от простой функции, принимающей значение $1/(2h)$ на промежутке $[x-h;x+h]$ и значение 0 вне промежутка $[x-h;x+h]$, равен $\mathsf{F}([x-h;x+h])/(2h)$. Следовательно,

$$f_\zeta(x) = \frac{1}{2h}\mathsf{F}([x-h;x+h]).$$

11.17. Ответ к пункту 1):

$$p_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2a; \\ (x-2a)/(b-a)^2, & \text{если } 2a < x \le a+b; \\ (2b-x)/(b-a)^2, & \text{если } a+b < x \le 2b; \\ 0, & \text{если } x > 2b. \end{cases}$$

11.18.

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ x/2, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 1/2, & \text{если } 1 < x \le 2; \\ (3-x)/2, & \text{если } 2 < x \le 3; \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

11.19.

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 2x^2, & \text{если } 0 < x \le 1/2; \\ 1-2(1-x)^2, & \text{если } 1/2 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

11.20. Ответ к пункту 1):

$p_\zeta(x) =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -(b-a); \\ (x+(b-a))/(b-a)^2, & \text{если } -(b-a) < x \le 0; \\ ((b-a)-x)/(b-a)^2, & \text{если } 0 < x < b-a; \\ 0, & \text{если } x \ge b-a. \end{cases}$$

11.21. $1-(1-x)^2$.

11.22. Сначала найти распределение суммы (разности) соответствующих случайных величин. Другой подход — найти совместную плотность распределения ξ и η, а потом воспользоваться равенством (9.1.3).

Ответы: 1) $1-1/(3\sqrt{2})$; 2) $1/4$; 3) $9/16$; 4) $7/16$; 5) $2/3$; 6) $1/2$.

11.24.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

11.25. Чтобы найти распределение η, воспользуйтесь тем, что $-\ln \xi_i$ имеет показательное распределение.

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}\xi_1\xi_2\ldots\xi_n = \mathsf{M}\xi_1\mathsf{M}\xi_2\ldots\mathsf{M}\xi_n = (1/2)^n$$

11.28. 1/8. **11.29.** 0,9974. **11.30.** 0,9889.

11.32. Для независимых случайных величин ξ и η соответственно с распределениями F и G сначала вычислить $\mathsf{M}u(\xi + \eta)$ как математическое ожидание функции от случайной величины $\zeta = \xi+\eta$ (с распределением $\mathsf{F}*\mathsf{G}$), а затем как математическое ожидание от случайной величины (ξ, η) (с распределением $\mathsf{F} \times \mathsf{G}$).

11.33. Достаточно в задаче 11.32 положить $u(s) = s$.

Утверждение можно получить и из равенства

$$\mathsf{M}(\xi + \eta) = \mathsf{M}\xi + \mathsf{M}\eta,$$

записав его в терминах распределений соответствующих случайных величин.

11.34.

1) $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{-\lambda_2 x} - e^{-\lambda_1 x}), & \text{если } x > 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}e^{\lambda_1 x}, & \text{если } x \leq 0; \\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}e^{-\lambda_2 x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

11.35.

1) $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

2) $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x}/2, & \text{если } x \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}/2, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

3) $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

11.37. Плотность распределения $f(x)$ суммы $\xi+\eta$

$$f(x)=\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}e^{-|y|}dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-|x-y|}e^{y}dy+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-|x-y|}e^{-y}dy.$$

Сделаем в интегралах замену $x-y=t$. Получим

$$f(x)=\frac{1}{4}\left(e^{x}\int\limits_{x}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-t}dt+e^{-x}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-|t|}e^{t}dt\right).$$

Рассмотрим два случая: $x<0$ и $x>0$.

При $x<0$ имеем $f(x)=$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{x}\left(\int\limits_{x}^{0} e^{t}e^{-t}dt+\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2t}dt\right)+e^{-x}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-|t|}e^{t}dt\right)=$$

$$=e^{x}(1-x)/4.$$

При $x>0$

$$f(x)=\frac{1}{4}\left(e^{x}\int\limits_{x}^{+\infty} e^{-2t}dt+e^{-x}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}dt+\int\limits_{0}^{x} e^{-t}e^{t}dt\right)\right)=$$

$$=e^{-x}(1+x)/4.$$

Аналогично находим плотность $g(x)$ распределения разности $\xi-\eta$.

Так что

$$1)\; f(x)=\begin{cases} e^{x}(1-x)/4, & \text{если } x\le 0;\\ e^{-x}(1+x)/4, & \text{если } x>0;\end{cases}$$

$$2)\; g(x)=\begin{cases} e^{x}(1-x)/4, & \text{если } x\le 0;\\ e^{-x}(1+x)/4, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

21.12 К главе 12

12.1. Последовательность распределений сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке 0.

12.2. Последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ собственно сходится к F; последовательности распределений $\{\mathsf{G}_n\}$, $\{\mathsf{S}_n\}$, $\{\mathsf{P}_n\}$, $\{\mathsf{Q}_n\}$ сходятся к несобственному распределению тождественно равному нулю (см. также пример 12.1.3).

12.3. Последовательность распределений сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке 0.

12.4. Последовательность распределений сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке 0.

12.6. Распределение Q^{*n} при $n \to \infty$ сходится к несобственному распределению, тождественно равному нулю. Достаточно заметить, что Q^{*n} является собственным атомическим распределением, сосредоточенным в точке n.

12.7. Распределение Q_n и при $a_n \to +\infty$, и при $a_n \to -\infty$ сходится к несобственному распределению, тождественно равному нулю. При $a_n \to a$ распределение Q_n сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке a.

12.8. Последовательность распределений сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке 0.

12.9. Для любого конечного промежутка $[a, b)$ значение $\mathsf{D}_n([a, b)) = l/n$, где l — число атомов распределения D_n из промежутка $[a, b)$, стремится к нулю при $n \to \infty$. Последнее обозначает, что D_n сходится к несобственному распределению, тождественно равному нулю.

12.10. Распределение Q_n при $n \to \infty$ сходится к равномерному на промежутке $[0, 1]$ распределению.

Достаточно заметить, что при $0 \le x \le 1$ для функции распределения $Q_n(x)$ атомического распределения Q_n и функции распределения $U_{[0,1]}(x) = x$ равномерного на $[0, 1]$ распределения имеют место неравенства

$$U_{[0,1]}(x) - 1/n \le Q_n(x) \le U_{[0,1]}(x),$$

а, следовательно, и

$$|U_{[0,1]}(x) - Q_n(x)| \leq 1/n.$$

12.11. Воспользуйтесь достаточным условием 1° сходимости вероятностных распределений (см. также пример 12.1.3).

Ответы: 1) последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ сходится к несобственному распределению, тождественно равному нулю; 2) последовательность распределений $\{\mathsf{G}_n\}$ сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке 0; 3) последовательность распределений $\{\mathsf{Q}_n\}$ сходится к несобственному распределению, тождественно равному нулю; 4) последовательность распределений $\{\mathsf{S}_n\}$ предела не имеет.

12.12. В интеграле

$$N_{x;\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}\right\} dt$$

сделать замену $(t-x)/\sigma = s$ и найти $\lim\limits_{\sigma \to 0} N_{x;\sigma^2}(y)$.

Другое решение. $N_{x;\sigma^2}(y)$ — функция распределения вероятностного распределения $N_{x;\sigma^2}$ со средним x и дисперсией σ^2, стремящейся к нулю. Поэтому $N_{x;\sigma^2}$ при $\sigma \to 0$ сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке x, а вместе с этим функция распределения $N_{x;\sigma^2}(y)$ сходится к функции распределения собственного атомического распределения, сосредоточенного в точке x, т. е. сходится к $I_{(x,\infty)}(y)$ в точках $y \neq x$.

12.13. Поскольку F_n и F — атомические распределения, сосредоточенные на $\mathbb{N}$, то для каждого k

$$\mathsf{F}_n([k-1/2, k+1/2)) = \mathsf{F}_n(\{k\}),$$

$$\mathsf{F}([k-1/2, k+1/2)) = \mathsf{F}(\{k\}).$$

Пусть

$$\mathsf{F}_n \to \mathsf{F},$$

тогда для любого промежутка непрерывности $[a, b)$ распределения F, в частности и для $[k-1/2, k+1/2)$

$$\mathsf{F}_n([k-1/2, k+1/2)) \to \mathsf{F}([k-1/2, k+1/2));$$

или, что то же,

$$\mathsf{F}_n(\{k\}) \to \mathsf{F}(\{k\}).$$

Далее, пусть

$$\mathsf{F}_n(\{k\}) \to \mathsf{F}(\{k\}) \tag{21.12.3}$$

для каждого $k \in \mathbb{N}$ и пусть $[a, b)$ — конечный промежуток непрерывности распределения F, а, следовательно, множество $\mathbb{N} \cap [a, b)$ конечно. Поэтому в силу (21.12.3) при $n \to \infty$

$$\mathsf{F}_n([a, b)) = \sum_{k \in \mathbb{N} \cap [a,b)} \mathsf{F}_n(\{k\}) \to \sum_{k \in \mathbb{N} \cap [a,b)} \mathsf{F}(\{k\}) = \mathsf{F}([a, b)).$$

12.15. Сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке нуль.

12.16. См. пример 12.1.7.

12.17. Достаточно установить, что в точках непрерывности y функции $F(x)$ распределения F при $h \to 0$

$$F_h(y) \to F(y).$$

В силу коммутативности операции свертки

$$\mathsf{F} * \mathsf{U}_{[-h,h]} = \mathsf{U}_{[-h,h]} * \mathsf{F}.$$

По определению

$$F_h(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y-x)\mathsf{U}_{[-h,h]}(dx) = \int\limits_{-h}^{+h} F(y-x)\frac{1}{2h}dx.$$

Сделав замену $x/2h = t$, получим

$$F_h(y) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} F(y-2ht)dt = \int\limits_{\mathbb{R}^1} F(y-2ht)\mathsf{U}_{[-1/2,1/2]}(dt),$$

где $\mathsf{U}_{[-1/2,1/2]}$ — равномерное на $[-1/2, 1/2]$ распределение. Подынтегральная функция $F(y - 2ht)$ мажорируема интегрируемой по распределению $\mathsf{U}_{[-1/2,1/2]}$ функцией (например, функцией $f(t) = 1$) и при $h \to 0$

$$F(y - 2ht) \to F(y).$$

Поэтому в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости при $h \to 0$

$$F_h(y) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} F(y - 2ht)\mathsf{U}_{[-1/2,1/2]}(dt) \to$$

$$\to \int\limits_{-1/2}^{1/2} F(y)\mathsf{U}_{[-1/2,1/2]}(dt) = F(y).$$

12.18. Воспользоваться неравенством Чебышева, см. пример 12.1.5.

12.19. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $Q_q(x) \to Q(x)$ при $q \to 0$ в каждой точке непрерывности $Q(x)$.

12.20. См. пример 12.1.7.

12.21. Распределение $\mathsf{U}_{[0,1]} * \mathsf{D}_n$ сходится к несобственному распределению, тождественно равному нулю. Достаточно заметить, что $\mathsf{U}_{[0,1]} * \mathsf{D}_n$ — равномерное на $[0, n]$ распределение.

12.22. Функция распределения

$$U_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ (x-a)/(b-a), & \text{если } a < x \le b; \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Пусть $[c, d)$ — произвольный фиксированный промежуток. Так как $a \to -\infty$, $b \to +\infty$, то можно считать, что $a < c < b$ и $a < d < b$. Значение

$$\mathsf{U}_{[a,b]}([c, d)) = U_{[a,b]}(d) - U_{[a,b]}(c) =$$

$$= \frac{1}{b-a}(d-a) - \frac{1}{b-a}(c-a) = \frac{d-c}{b-a},$$

что при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$ стремится к 0. Поэтому по определению $\mathsf{U}_{[a,b]}$ сходится к несобственному распределению, тождественно равному нулю.

12.23. Распределение Q_{2^n} сходится к равномерному на промежутке $[0,1]$ распределению. Достаточно заметить, что при $0 \le x \le 1$ для функции распределения $Q_{2^n}(x)$ атомического распределения Q_{2^n} и функции распределения $U_{[0,1]}(x) = x$ равномерного на $[0,1]$ распределения имеют место неравенства

$$U_{[0,1]}(x) - 1/2^n \le Q_{2^n}(x) \le U_{[0,1]}(x).$$

Отсюда

$$|U_{[0,1]}(x) - Q_{2^n}(x)| \le 1/2^n,$$

поэтому

$$\mathsf{Q}_{2^n} \to \mathsf{U}_{[0,1]}.$$

12.24. Функция распределения

$$\mathsf{C}_{a,b}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (y-b)^2} dy = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-b}{a} + \frac{\pi}{2} \right)$$

при $b \to +\infty$ сходится к функции распределения, тождественно равной нулю.

12.27. Последовательность распределений $\{\mathsf{F}_n\}$ не является сходящейся.

12.28. $F_\lambda(y)$ — функция распределения пуассоновского распределения F_λ с параметром λ. Математическое ожидание и дисперсия пуассоновского распределения с параметром λ равны λ. При $\lambda \to 0$ пуассоновское распределение сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке 0 (см. достаточное условие 3° сходимости к собственному атомическому распределению). А так как собственная сходимость распределений равносильна сходимости функций распределения, то функция распределения $F_\lambda(y)$ пуассоновского распределения F_λ при $\lambda \to 0$ сходится к функции распределения атомического распределения, сосредоточенного в точке 0, т. е. к $I_{(0,+\infty)}(y)$.

12.30. Вычислить первый момент $m_1(t)$ и дисперсию $\sigma^2(t)$ распределения Q_t.

12.31. Вычислить первый момент $m_1(t)$ и дисперсию $\sigma^2(t)$ распределения Q_t.

12.32. Распределение G_p сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в нуле (исследовать на сходимость первый момент $m_1(p)$ и дисперсию $\sigma^2(p)$ распределения G_p при $p \to 1$).

12.33. Рассмотрим распределение

$$\mathsf{F}_h = \mathsf{D} * \mathsf{U}_{[-h,h]}.$$

Распределение F_h абсолютно непрерывно, т. к. $\mathsf{U}_{[-h,h]}$ абсолютно непрерывно и его плотность f_h равна свертке плотности $u(x)$ распределения $\mathsf{U}_{[-h,h]}$ с распределением D:

$$f_h(x) = \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(x-1) =$$

$$= \frac{1}{4h}I_{[-h,h]}(x) + \frac{1}{4h}I_{[-h,h]}(x-1).$$

При $h \to 0$ распределение

$$\mathsf{F}_h = \mathsf{D} * \mathsf{U}_{[-h,h]}$$

сходится к распределению D (см. задачу 12.17).

Полезно построить графики функции распределения $F_h(x)$ и плотности распределения $f_h(x)$ и исследовать их поведение при $h \to 0$.

12.34. Указание. См. пример 12.1.7.

12.35. Воспользоваться теоремой 12.1.1, предварительно убедившись, что последовательность распределений F_n сходится в собственном смысле. Ответ: 0.

12.36. После замены $t - x = s$ интеграл

$$N_{x;\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}\right\} dt$$

запишется в виде

$$N_{x;\sigma^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{y-x} \exp\left\{-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right\} ds = N_{0;\sigma^2}(y-x),$$

а, следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_{x;\sigma^2}(y)\mathsf{F}(dx) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} N_{0;\sigma^2}(y-x)\mathsf{F}(dx) = \mathsf{F} * N_{0;\sigma^2}(y).$$

Предельное поведение $\mathsf{F} * N_{0;\sigma^2}$ при $\sigma \to 0$ описано в примере 12.1.7.

Ответ: $\mathsf{F}((-\infty; y))$.

12.37. Воспользоваться теоремой 12.1.1, предварительно убедившись, что при $\lambda \to 0$ распределение F_λ сходится. Ответ: 1.

12.38. Ответ: $\varphi(0)$.

12.39. Ответ: $1 - \cos 1$.

21.13 К главе 13

13.1. $\cos t$. **13.2.** $(e^{it} + e^{-it} + 1)/3$.

13.3. Указание. См. задачи 13.1, 13.5.

13.4. См. задачу 13.1.

13.5. $\cos^n z$.

13.6. См. задачу 13.5.

13.7. Как известно, случайную величину ξ, имеющую биномиальное распределение с параметрами $(n; p)$, можно представить в виде суммы

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \mu_k$$

независимых случайных величин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, каждая из которых имеет распределение:

$$\mathsf{P}\{\mu_k = s\} = p^s(1-p)^{1-s},\ s = 0, 1;\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Характеристическая функция μ_k:

$$\varphi_k(t) = \mathsf{M}e^{it\mu_k} = e^{it\cdot 1}p + e^{it\cdot 0}(1-p) = 1 + p(e^{it} - 1).$$

Отсюда, пользуясь мультипликативным свойством характеристических функций, получаем

$$\varphi_\xi(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(t) = \big(1 + p(e^{it} - 1)\big)^n .$$

13.8. $\varphi(t) = \dfrac{p}{1 - e^{it}(1-p)}$.

13.9. Найти характеристическую функцию $\varphi_\xi(t)$ случайной величины ξ. Воспользоваться тем, что характеристическая функция $\varphi_\eta(t)$ случайной величины $\eta = a + \sigma\xi$ равна $e^{ita}\varphi_\xi(\sigma t)$.

Ответ: $\exp\Big\{-\lambda - it\sqrt{\lambda} + \lambda \exp\{it/\sqrt{\lambda}\}\Big\}$.

13.10. $\varphi(t) = e^{ita}$.

13.11. (2) $\varphi(t) = \dfrac{e^{ita} - e^{-ita}}{2ita}$; (3) $\varphi(t) = \dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{i(b-a)t}$.

13.12. $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. **13.13.** $\varphi(t) = \dfrac{a}{a - it}$.

13.14. $\varphi(t) = \dfrac{a^2}{a^2 + t^2}$. **13.15.** $\varphi(t) = 2\dfrac{1 - \cos at}{a^2t^2}$.

13.17. Свертка $\mathsf{F} * \mathsf{Q}$ является распределением Коши с параметром $(a + b; 0)$.

13.18. Сумма $\xi + \eta$ распределена нормально с параметрами $(a_1 + a_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

13.19. Сумма $\xi + \eta$ имеет распределение Коши с параметром $(a_1 + a_2)$.

13.20. Сума $\xi + \eta$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

13.21. $\varphi(t) = 1 + ita - \frac{1}{2}(\sigma^2 + a^2)t^2 + o(t^2)$.

13.23. Найти характеристическую функцию $\varphi_\lambda(t)$ случайной величины $(\xi_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$, исследовать сходимость $\varphi_\lambda(t)$ при $\lambda \to \infty$ (см. также задачу 13.9) .

13.24. Воспользуйтесь теоремой единственности.

13.25.
1° $\psi_n(t) = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$;
2° $\varphi(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2)$;
3° $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(t) = \exp\left\{-t^2/2\right\}$.

13.26. Обозначим через $\varphi(t)$ характеристическую функцию случайной величины ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, а через $\psi_n(t)$ — характеристическую функцию случайной величины

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Последовательно решите следующие задачи:

1° Выразите характеристическую функцию $\psi_n(t)$ через характеристическую функцию $\varphi(t)$.

2° Выпишите разложение Тейлора для $\varphi(t)$ в окрестности точки $t = 0$, включающее t.

3° Воспользовавшись решениями задачи из пунктов 1° и 2°, найдите предел характеристической функции $\psi_n(t)$ при $n \to \infty$.

4° Воспользовавшись решением задачи из пункта 3° и теоремой Леви, докажите, что при $n \to \infty$ распределение случайной величины S_n сходится к собственному атомическому распределению, сосредоточенному в точке a.

5° Сходимость последовательности $\{\mathsf{F}_n\}$ распределений к собственному атомическому распределению F_0, сосредоточенному в точке a, равносильна сходимости функций распределений $F_n(x)$ к функции распределения $F_0(x)$, т. е.

$$F_n(x) = \mathsf{P}\{|S_n/n < x|\} \to F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a; \\ 1, & \text{если } x > a. \end{cases}$$

Далее несложно убедиться, что при $n \to \infty$ из сходимости $F_n(x) \to F_0(x)$ следует

$$\mathsf{P}\{|S_n - a| \ge \varepsilon\} \to 0.$$

13.27. Указание. Убедитесь, что при любом n случайная величина $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ имеет распределение Коши

13.29. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{k,n}$ и воспользуйтесь теоремой непрерывности.

13.30. Воспользуйтесь центральной предельной теоремой.

13.37. Пусть $\varphi(t)$ и $\varphi_\sigma(t)$ — характеристические функции соответственно случайных величин ξ и η_σ. В силу мультипликативного свойства характеристическая функция случайной величины $\zeta_\sigma = \xi + \eta_\sigma$

$$\psi_\sigma(t) = \varphi(t)\varphi_\sigma(t) = \varphi(t)\exp\{-t^2\sigma^2/2\}.$$

Отсюда

$$\lim_{\sigma\to 0} \psi_\sigma(t) = \varphi(t).$$

Поэтому в силу теоремы Леви распределение случайной величины ζ_σ сходится к распределению F случайной величины ξ.

13.38. См. решение задачи 13.37.

21.14 К главе 14

14.1. Функция $L(\theta, h)$ достигает наибольшего значения в точке

$$(\hat\theta, \hat h) = ((\max\{\xi_i\} + \min\{\xi_i\})/2, (\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\})/2).$$

Учитывая, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и каждая из них имеет своей плотностью $f(x;\theta,h)$, сначала находим плотности случайных величин

$$\max\{\xi_i\},\ \min\{\xi_i\},$$

а затем вычисляем

$$\mathsf{M}\max\{\xi_i\},\ \mathsf{M}\min\{\xi_i\},\ \mathsf{P}-\lim_{n\to\infty}\max\{\xi_i\},\ \mathsf{P}-\lim_{n\to\infty}\min\{\xi_i\}$$

и убеждаемся, что $\hat\theta$ — несмещенная и состоятельная оценка θ, а $\hat h$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка h (см. также пример 14.1.1).

14.2. $\hat\theta = \frac{1}{rn}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ — несмещенная и состоятельная оценка θ.

14.3. Да.

14.4. Относительно оценок $\hat\theta_1, \hat\theta_2, \hat\theta_3, \hat\theta_4$ см. пример 14.1.1; $\hat\theta_5$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка параметра $b-a$; $\hat\theta_6, \hat\theta_7, \hat\theta_8$ — несмещенные и состоятельные оценки соответственно параметров $(a+b)/2, a, b$.

14.5. $\hat\lambda$ — несмещенная и состоятельная оценка λ.

14.6. Да.

14.7. Функция

$$L(\theta) = \begin{cases} 1/2^n, & \text{если все } \xi_i \in [\theta-1, \theta+1]; \\ 0, & \text{если существует } \xi_j \notin [\theta-1, \theta+1] \end{cases}$$

принимает два значения: $1/2^n$ и 0. Наибольшее значение, равное $1/2^n$, функция $L(\theta)$ принимает, если

$$\theta - 1 \le \xi_i \le \theta + 1,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

или, что то же, если

$$\max\{\xi_i\} - 1 \le \theta \le \min\{\xi_i\} + 1,$$

другими словами, $L(\theta)$ принимает наибольшее значение в точках

$$\hat\theta_\lambda = \lambda(\max\{\xi_i\} - 1) + (1-\lambda)(\min\{\xi_i\} + 1),\ \lambda \in [0; 1],$$

промежутка $[\max\{\xi_i\} - 1, \min\{\xi_i\} + 1]$.

Относительно несмещенности и состоятельности $\hat\theta_\lambda$ см. также пример 14.1.1.

14.8. $\hat\theta_1, \hat\theta_2$ — асимптотически несмещенные и состоятельные оценки соответственно параметров θ, α.

14.9. Да.

14.10. $\hat\theta$ — несмещенная и состоятельная оценка θ.

14.11. $\hat a$ — несмещенная и состоятельная оценка a, $\hat\sigma^2$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка σ^2.

14.12. Да.

14.13. $L(\theta)$ достигает наибольшего значения в точках

$$\hat{\theta}_\lambda = \lambda(\max\{\xi_i\} - h_0) + (1-\lambda)(\min\{\xi_i\} + h_0), \ \ \lambda \in [0;1],$$

промежутка $[\max\{\xi_i\} - h_0, \min\{\xi_i\} + h_0]$. См. также задачу 14.7.

14.14.

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2.$$

$\hat{\theta}$ — несмещенная и состоятельная оценка θ; $\hat{\sigma}^2$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка σ^2.

14.15. Да.

14.16. $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_\lambda$ — асимптотически несмещенные и состоятельные оценки параметров $\theta - h_0$, $\theta + h_0$, θ соответственно; $\hat{\theta}_3$ — несмещенная и состоятельная оценка θ.

14.17.

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2.$$

$\hat{a}$ — несмещенная и состоятельная оценка a; $\hat{\sigma}^2$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка σ^2.

14.18. Да.

14.19. Функция $L(a,b)$ достигает наибольшего значения в точке $(\hat{a},\hat{b}) = (\min\{\xi_i\}, \max\{\xi_i\})$; $\hat{a}$ и $\hat{b}$ — асимптотически несмещенные и состоятельные оценки соответственно параметров a и b.

14.20. $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ — несмещенная и состоятельная оценка параметра θ.

14.21. Да.

14.22. $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$, $\hat{\theta}_4$ — несмещенные и состоятельные оценки соответственно параметров θ, $\theta - h$, $\theta + h$; $\hat{\theta}_1$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка h.

14.23. $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ — несмещенная и состоятельная оценка параметра $(1-p)/p$.

14.24. Да.

14.25. $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$, $\hat{\theta}_4$, — асимптотически несмещенные и состоятельные оценки соответственно параметров h, $\theta - h_0$, $\theta + h_0$, h. Относительно оценок $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$ см. пример 14.1.1.

Для исследования оценки $\hat{\theta}_4$, сначала найдем ее функцию распределения $G(x)$.

Поскольку случайная величина

$$\hat{\theta}_4 = \max\{\theta_0 - \min\{\xi_i\}, \max\{\xi_i\} - \theta_0\}$$

неотрицательна, то при $x \le 0$ значения

$$G(x) = P\{\hat{\theta}_4 < x\} = 0.$$

При $x > 0$, учитывая независимость $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, имеем

$$G(x) = P\{\hat{\theta}_4 < x\} =$$

$$= P\{\max\{\theta_0 - \min\{\xi_i\}, \max\{\xi_i\} - \theta_0\} < x\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\theta_0 - x < \min\{\xi_i\}, \max\{\xi_i\} < \theta_0 + x\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{n}\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\}\right\} =$$

$$= \prod_{n=1}^{n}\mathsf{P}\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\} =$$

$$= \left(\mathsf{P}\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\}\right)^n = \left(F(\theta_0 + x) - F(\theta_0 - x)\right)^n,$$

где

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \le \theta_0 - h; \\ (t - (\theta_0 - h))/2h, & \text{если } \theta_0 - h < t \le \theta_0 + h; \\ 1, & \text{если } t > \theta_0 + h \end{cases}$$

— функция равномерного на отрезке $[\theta_0 - h, \theta_0 + h]$ распределения. При $x > 0$

$$F(\theta_0 + x) = \begin{cases} (x+h)/2h, & \text{если } 0 < x \le h; \\ 1, & \text{если } x > h; \end{cases}$$
$$F(\theta_0 - x) = \begin{cases} (h-x)/2h, & \text{если } 0 < x \le h; \\ 0, & \text{если } x > h. \end{cases}$$

После несложных преобразований получим

$$p(x) = \frac{d}{dx} G(x) = \begin{cases} nx^{n-1}/h^n, & \text{если } x \in [0, h]; \\ 0, & \text{если } x \notin [0, h]. \end{cases}$$

По известной плотности распределения оценки $\hat{\theta}_4$ находим

$$\mathsf{M}\hat{\theta}_4 = \frac{n}{n+1} h,$$

$$\mathsf{P}\{|\theta_4 - h| > \varepsilon\} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{h}\right)^n \ (0 < \varepsilon < h).$$

Поэтому $\hat{\theta}_4$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка h.

14.26. $\hat{\theta}_2$ — несмещенная оценка параметра α, но не является его состоятельной оценкой.

14.27. Да.

14.28. $\hat{\theta}_1$ — несмещенная и состоятельная оценка $\theta + b$; $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$ — асимптотически несмещенные и состоятельные оценки соответственно параметров b и θ.

14.29. $\hat{\theta} = \frac{1}{mn} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ — несмещенная и состоятельная оценка θ.

14.30. Да.

14.31. $L(h)$ достигает наибольшего значения в точке

$$\hat{h} = \max\left\{\max\{\xi_i\} - \theta_0, \theta_0 - \min\{\xi_i\}\right\},$$

и $\hat{h}$ является асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой h (см. также задачу 14.25).

14.32. $\hat{\theta}$ — несмещенная и состоятельная оценка σ^2.

14.33. Да.

14.34. $\hat{\theta}_2$ — несмещенная и состоятельная оценка параметра $(a+b)/2$; $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_3$ — асимптотически несмещенные и состоятельные оценки b.

14.35. Да.

21.15 К главе 15

15.1. $0,3$. **15.2.** $0,18$. **15.3.** $\hat{\mu} = 2\ln\hat{m}_1 - (\ln\hat{m}_2)/2$.

15.4. Оценкой максимального правдоподобия θ является

$$\hat{\theta}_\lambda = \lambda(\max\{\xi_i\} - h_0) + (1-\lambda)(\min\{\xi_i\} + h_0),\ \lambda \in [0;1];$$

$\hat{\theta}_\lambda$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка параметра θ; $\hat{\theta}_{1/2}$ — несмещенная и состоятельная оценка θ.

15.7. $\hat{b} = \hat{m}_1,\ \hat{\theta} = (\hat{m}_2 + (\hat{m}_1)^2)/2$; $\hat{b}$ — несмещенная и состоятельная оценка параметра b; $\hat{\theta}$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка параметра θ.

15.8. $\hat{\theta} = \frac{1}{rn}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$; $\hat{\theta}$ — несмещенная, состоятельная и эффективная оценка θ.

15.10. $5{,}4\pi$. **15.11.** $\hat{p} = 1/(\bar{\xi}+1)$.

15.12. Функцией максимального правдоподобия является

$$L(a,b) = \frac{1}{(2a)^n}\exp\left\{-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - b|\right\},\ a > 0.$$

Если $\hat{b}$ — точка, в которой $Q(b) = \sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i - b|$ достигает наименьшего значения, а $\hat{a}$ — точка, в которой $L(a,\hat{b})$ достигает наибольшего значения, то в точке $(\hat{a},\hat{b})$ функция $L(a,b)$ достигает наибольшего значения. Это утверждение проверяется непосредственно.

Далее, пусть $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ — вариационный ряд выборки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. При $n = 2k$, функция $Q(b)$ достигает наименьшего значения в каждой точке промежутка $[\xi_k^*, \xi_{k+1}^*]$, поэтому оценкой b является

$$\hat{b}_\lambda = \lambda\xi_k^* + (1-\lambda)\xi_{k+1}^*,$$

$\lambda \in [0; 1]$. Если $n = 2k+1$, функция $Q(b)$ достигает наименьшего значения в точке $\hat{b} = \xi_{k+1}^*$. Это хорошо видно из графиков функции $y = Q(b)$ (при четном и нечетном n).

Обозначим $Q^* = Q(\hat{b})$. Функция

$$L(a, \hat{b}) = \frac{1}{(2a)^n} \exp\left\{-\frac{1}{a} Q^*\right\}$$

достигает наибольшего значения в точке $\hat{a} = Q^*/n$. Следовательно, оценкой максимального правдоподобия $(\hat{a}, \hat{b})$ параметра (a, b) является $(Q^*/n, \hat{b})$.

15.14. 158,3.

15.15. Для случайной величины с плотностью распределения

$f(x; a, \theta) =$

$$= \begin{cases} (x - (a - \sqrt{\theta}))/\theta, & \text{если } x \in [a - \sqrt{\theta}, a]; \\ -(x - (a + \sqrt{\theta}))/\theta, & \text{если } x \in [a, a + \sqrt{\theta}]; \\ 0, & \text{если } x \notin [a - \sqrt{\theta}, a + \sqrt{\theta}] \end{cases}$$

имеем

$$m_1 = m_1(a, \theta) = a, \;\; m_2 = m_2(a, \theta) = a^2 + \theta/6.$$

Согласно методу моментов оценки $\hat{a}$ и $\hat{\theta}$ получаем как решение системы

$$\begin{cases} \hat{m}_1 = \hat{a}; \\ \hat{m}_2 = \hat{a}^2 + \hat{\theta}/6. \end{cases}$$

Отсюда

$$\hat{a} = \hat{m}_1; \;\; \hat{\theta} = 6(\hat{m}_2 - (\hat{m}_1)^2).$$

Из теоремы 15.1.1 следует, что $\hat{a}$ и $\hat{\theta}$ — состоятельные оценки соответственно параметров a и θ; $\hat{a}$ — несмещенная оценка a. Поскольку выборочная дисперсия $\hat{\sigma}^2$ является асимптотически несмещенной оценкой σ^2, то $\hat{\theta}$ является асимптотически несмещенной оценкой θ.

15.16. $\hat{p} = \overline{\xi}$; $\hat{p}$ — несмещенная, состоятельная, эффективная оценка параметра p.

15.20. Функция максимального правдоподобия

$$L(\theta) = \begin{cases} 1/(2h)^n, & \text{если все } \xi_i \in [\theta_0 - h, \theta_0 + h]; \\ 0, & \text{если существует } \xi_j \notin [\theta_0 - h, \theta_0 + h] \end{cases}$$

достигает наибольшего значения для наименьшего h, при котором промежуток $[\min\{\xi_i\}, \max\{\xi_i\}]$ содержится в промежутке $[\theta_0 - h, \theta_0 + h]$. Таким h, а вместе с тем и оценкой максимального правдоподобия h является

$$\hat{h} = \max\left\{|\max\{\xi_i\} - \theta_0|, |\theta_0 - \min\{\xi_i\}|\right\}.$$

Функция распределения оценки $\hat{h}$:

$$F(x) = P\{\hat{h} < x\} =$$

$$= P\{\max\left\{\max\{\xi_i\} - \theta_0, \theta_0 - \min\{\xi_i\}\right\} < x\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\max\{\xi_i\} - \theta_0 < x, \theta_0 - \min\{\xi_i\} < x\} =$$

$$= \mathsf{P}\{\theta_0 - x < \min\{\xi_i\} < \max\{\xi_i\} < \theta_0 + x\} =$$

$$= \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\} = (\mathsf{P}\{\theta_0 - x < \xi_i < \theta_0 + x\})^n.$$

И поскольку случайные величины $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n$, распределены равномерно на промежутке $[\theta_0 - h, \theta_0 + h]$, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ (x/h)^n, & \text{если } 0 < x \le h; \\ 1, & \text{если } x > h. \end{cases}$$

Отсюда
$$\mathsf{M}\hat{h} = \frac{n}{n+1}h \to h,$$
при $n \to \infty$, т. е. $\hat{h}$ является асимптотически несмещенной оценкой h.

Для достаточно малых $\varepsilon > 0$
$$\mathsf{P}\{|\hat{h} - h| < \varepsilon\} = \mathsf{P}\{h - \varepsilon < \hat{h} < h + \varepsilon\} =$$
$$= \mathsf{P}\{h - \varepsilon < \hat{h}\} = 1 - \mathsf{P}\{\hat{h} < h - \varepsilon\} = 1 - \left(\frac{h-\varepsilon}{h}\right)^n,$$
что стремится к 1 при $n \to \infty$, т. е. $\hat{h}$ — состоятельная оценка h.

15.22. $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi^p\right)^{1/p}$.

15.23. $\hat{\theta} = \hat{m}_1$, $\hat{\sigma}^2 = \hat{m}_2 - (\hat{m}_1)^2$; $\hat{\theta}$ — несмещенная и состоятельная оценка θ; $\hat{\sigma}^2$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка σ^2.

15.24. $\hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$; $\hat{\theta}$ — несмещенная, состоятельная и эффективная оценка параметра θ.

15.26. $15{,}52 \cdot \pi$.

15.27. $\hat{m} = 1/\left(\hat{m}_2/(\hat{m}_1)^2 - 1\right)$; $\hat{\lambda} = 1/\left(\hat{m}_2/\hat{m}_1 - m_1\right)$.

15.28.

1) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$; $\hat{\theta}$ — несмещенная, состоятельная, эффективная оценка параметра θ.

2) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{1}{2}$; $\hat{\theta}$ — несмещенная, состоятельная, эффективная оценка параметра θ.

3) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$; $\hat{\theta}$ — несмещенная, состоятельная, эффективная оценка параметра θ.

15.31. $\hat{\nu} = 1/\left(\hat{m}_2/\hat{m}_1^2 - 1\right)$; $\hat{\alpha} = 1/\left(\hat{m}_2/\hat{m}_1 - \hat{m}_1\right)$.

15.32. $\hat{\theta} = \hat{m}_1$ — несмещенная, состоятельная и эффективная оценка θ.

15.34. 0,56π. **15.35.** $\hat{p} = \left(1 + \dfrac{1}{rn}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right)^{-1}$.

15.36. Поскольку N большое по сравнению с n, то число помеченных рыб среди n выловленных можно считать биномиально распределенной случайной величиной с параметрами n и K/N:

$$\mathsf{P}\{\xi = j\} = C_n^j (K/N)^j (1 - K/N)^{n-j},\ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Объем выборки равен 1, реализация выборки: $\xi = k$. Функция максимального правдоподобия

$$L(N) = C_n^k (K/N)^k (1 - K/N)^{n-k}.$$

Оценка максимального правдоподобия $\hat{N} = (nK/k)$.

15.39. $\hat{a} = \sqrt{\hat{m}_2 - (\hat{m}_1)^2}$; $\hat{b} = \hat{m}_1 - \hat{a}$.

15.40. Поскольку $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, то их совместная плотность распределения равна $\prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i; a, b)$, а функция максимального правдоподобия

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i; a, b) =$$

$$= \begin{cases} 1/(b-a)^n, & \text{если все } \xi_i \in [a, b]; \\ 0, & \text{если существует } \xi_j \notin [a, b]. \end{cases}$$

Функция $L(a, b)$ достигает максимального значения в точке $(\hat{a}, \hat{b})$, где разность $(b-a)$ достигает минимального значения, последняя же достигает минимального значения при

$$a = \hat{a} = \min\{\xi_i\};\ b = \hat{b} = \max\{\xi_i\}.$$

$\hat{a}, \hat{b}$ — асимптотически несмещенные и состоятельные оценки соответственно параметров a, b (см. также пример 14.1.1).

15.41. Время указать в часах,

$$\sup_x \left| F(x) - \hat{F}_{14}(x) \right| = 0{,}306.$$

15.42. 0,09.

15.43. $\hat{p} = \frac{1}{mn}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$; $\hat{p}$ — несмещенная, состоятельная и эффективная оценка p.

15.44. Оценкой параметра (θ, h) является

$$(\hat{\theta}, \hat{h}) = ((\max\{\xi_i\} + \min\{\xi_i\})/2; (\max\{\xi_i\} - \min\{\xi_i\})/2);$$

$\hat{\theta}$, $\hat{h}$ — асимптотически несмещенные и состоятельные оценки соответственно параметров θ и h.

15.45. $\sup\limits_x \left|F(x) - \hat{F}_n(x)\right| = 0{,}287$.

15.47. $\hat{\theta} = \hat{m}_1$, $\hat{h} = \hat{m}_2 - (\hat{m}_1)^2$, $\hat{\theta}$ — несмещенная и состоятельная оценка θ; $\hat{h}$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка h.

15.48. $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\xi_i$; $\hat{\sigma}^2 = \frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\ln\xi_i - \sum\limits_{i=1}^{n}\ln\xi_i\right)^2$.

15.49. $\hat{\theta} = 1 + \frac{1}{rn}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$.

15.50. $\hat{b} = \max\{\xi_i\}$; $\hat{b}$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка b.

15.51. $\hat{\lambda} = \bar{\xi}$; $\hat{\lambda}$ — несмещенная, состоятельная и эффективная оценка λ.

15.53. $\hat{p} = \frac{1}{mn}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$; $\hat{p}$ — несмещенная, состоятельная и эффективная оценка p.

15.54. $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{m}_1$; $\hat{\theta}$ — несмещенная и состоятельная оценка θ.

15.55. Функция максимального правдоподобия

$$L(\theta, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\theta^n\lambda^{n\theta}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\xi_i\right)^{\theta+1}}, & \text{если все } \xi_i > \lambda; \\ 0, & \text{если хотя бы одно } \xi_i \le \lambda. \end{cases}$$

Зафиксируем значение переменной θ, т. е. θ произвольное, но фиксированное. Функция $L(\theta, \lambda)$ одной переменной λ (не дифференцируемая) достигает своего наибольшего значения в точке

$$\hat{\lambda} = \min\{\xi_i\}.$$

Функция $L(\theta, \hat{\lambda})$ дифференцируема и достигает наибольшего значения в точке

$$\hat{\theta} = 1\Big/\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i - \ln \min\{\xi_i\}\Big).$$

И поскольку $L(\theta, \lambda) \leq L(\theta, \hat{\lambda}) \leq L(\hat{\theta}, \hat{\lambda})$, то $(\hat{\theta}, \hat{\lambda})$ — оценка максимального правдоподобия параметра (θ, λ).

21.16 К главе 16

16.1. Пусть гипотеза H_p — телепат "читает" мысли с вероятностью p (каждый символ), $p \in (0, 1)$. Нулевая гипотеза H_0 — телепат мысли не читает: $p = 1/2$. Альтернативная к H_0 гипотеза H: $p \in (1/2, 1)$ — телепат мысли читает (гипотеза H верна, когда верна одна из гипотез H_p, $p \in (1/2, 1)$). В качестве критерия для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H естественно рассматривать $S = \{x : x \geq l\}$.

16.2. Нулевая гипотеза H_0: монета симметричная, альтернатива — двусторонняя (см. также указание к решению задачи 16.1).

16.3. Нулевая гипотеза H_0: больной страдает туберкулезом.

16.4. Нулевая гипотеза H_0: телепат мысли не читает (см. также указание к решению задачи 16.1).

16.5. Нулевая гипотеза H_0: монета симметричная, альтернатива — двусторонняя (см. также указание к решению задачи 16.1).

16.6. Нулевая гипотеза H_0: препарат токсичный.

16.7. Обозначим через H_θ гипотезу "доля дефектных изделий в партии равна θ", $\theta \in (0; 1)$. Для нас представляют интерес значения параметра $\theta_1 = 0{,}02$ и $\theta_2 = 0{,}08$.

В качестве нулевой гипотезы выберем гипотезу $H_{0,08}$, а в качестве альтернативной гипотезы к гипотезе $H_{0,08}$ гипотезу $H_{(0;0,08)}$. Альтернативная гипотеза $H_{(0;0,08)}$ сложная, когда $H_{(0;0,08)}$ верна, верна одна из простых гипотез H_θ, $\theta \in (0; 0{,}08)$. В качестве критерия для проверки гипотезы $H_0 = H_{0,08}$ против альтернативы $H_{(0;0,08)}$ будем использовать $S = \{x : x \leq l\}$.

Число n изделий в партии и l выбираем так чтобы

$$\mathsf{P}(\overline{S}|H_{0,08}) \geq 0{,}95, \ \mathsf{P}(S|H_{0,02}) \geq 0{,}90.$$

16.8. Нулевая гипотеза H_0: болезнь инфекционная, альтернатива — болезнь неинфекционная.

16.9. Нулевая гипотеза H_0: $\lambda = 1$ — среднее содержание бактерий на единицу объема воды составляет 1. Альтернативная гипотеза H_λ $(\lambda < 1)$ — среднее содержание бактерий на единицу объема воды меньше чем 1.

Наблюдается случайная величина ξ — количество загрязненных проб; ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $(10; p)$, где p — вероятность того, что в пробе будет по меньшей мере одна бактерия. Если гипотеза H_0 верна, т. е. среднее содержание λ бактерий на единицу объема равно 1, то $p = p_0 = 1 - e^{-1}$. В качестве критерия для проверки гипотезы H_0 естественно рассматривать $S = \{k : k \leq l\}$.

16.10. Пусть H_p — гипотеза “леди различает рецепты приготовления чая с вероятностью p”, $p \in (0, 1)$. Нулевая гипотеза H_0 — леди не различает рецепты приготовления чая или, что то же, $p = 1/2$. Альтернативная к H_0 гипотеза H: $p \in (1/2, 1)$ — леди различает рецепты приготовления чая. Альтернатива H сложная — гипотеза H верна, когда верна одна из гипотез H_p, $p \in (1/2, 1)$. В качестве критерия для проверки гипотезы H_0 естественно рассматривать $S = \{k : k \geq l\}$.

16.11. Обозначим через H_p гипотезу “доля дефектных изделий в партии равна p”, $p \in (0; 1)$. Нулевая гипотеза $H_{0,08}$ — доля дефектных изделий составляет 0,08, альтернативная к $H_{0,08}$ гипотеза $H_{(0;0,08)}$. Гипотеза $H_{(0;0,08)}$ сложная, когда $H_{(0;0,08)}$ верна, верна одна из простых гипотез H_p, $p \in (0; 0{,}08)$. В качестве критерия для проверки гипотезы $H_0 = H_{0,08}$ против альтернативы $H_{(0;0,08)}$ будем использовать $S = \{x : x \leq l\}$. Требование потребителя:

$$\mathsf{P}(\overline{S}|H_{0,08}) \geq 0{,}90,$$

пожелания поставщика —

$$\mathsf{P}(S|H_{0,01}) \geq 0{,}96.$$

См. также задачу 16.7.

16.12. Нулевая гипотеза — H_0: игральная кость симметричная, альтернативная гипотеза — H_p: $p \in (0{,}5; 1]$. Критическое множество: $S = \{k : k > l\}$.

16.15. Обозначим через H_θ гипотезу "доля изюма, который пошел в булочки, равна θ", $\theta \in (0; 1)$.

В качестве нулевой гипотезы H_0 рассмотрим гипотезу: $\theta = 1$ — весь изюм пошел в булочки. Альтернативная к H_0 гипотеза $H_{(0;1)}$. Альтернативная гипотеза $H_{(0;1)}$ сложная, когда $H_{(0;1)}$ верна, верна одна из простых гипотез H_θ, $\theta \in (0; 1)$. В качестве критерия для проверки гипотезы H_0 против альтернативы $H_{(0;1)}$ будем использовать $S = \{k : k \leq l\}$.

Распределение числа ξ изюмин в булочке естественно считать пуассоновским. При верной гипотезе H_θ число изюмин, которые пошли в булочки равно $\theta \cdot 10000$. Каждая из $\theta \cdot 10000$ изюмин попадает в данную булочку с вероятностью $1/1000$ (булочек 1000). Поэтому при верной гипотезе H_θ случайная величина ξ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda = (1/1000)\cdot\theta\cdot 10000 = 10\cdot\theta$.

Если в качестве уровня значимости выбрать 0,05, то l в критическом множестве $S = \{k : k \leq l\}$ выбираем из условия

$$\mathsf{P}(S|H_0) \leq 0{,}05.$$

16.16. Регистрируем количество погибших мышей.

Нулевая гипотеза H_0: препарат токсичный, альтернативная гипотеза H_1 — препарат нетоксичный. Критическое множество для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 будем искать в виде

$$S = \{k : k \leq l\}.$$

По условию

$$\mathsf{P}\{S|H_0\} \leq 0{,}0001$$

или

$$\sum_{k=0}^{l} C_{10}^{k}(0{,}8)^k(0{,}2)^{10-k} \leq 0{,}0001.$$

Последнему неравенству удовлетворяют $l \in [0;2]$, поэтому $S = \{k : k \leq 2\}$. Вероятность того, что при проверке на токсичность с помощью критерия S нетоксичный препарат выдержит контроль:

$$\mathsf{P}\{S|H_1\} = \sum_{k=0}^{2} C_{10}^{k}(0{,}02)^k(0{,}98)^{10-k} \geq 0{,}996.$$

Результат эксперимента свидетельствует в пользу нетоксичности препарата.

16.18. Нулевая гипотеза — H_0: монета симметрична, альтернативная гипотеза — H_p: p равно одному из чисел 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 (альтернатива сложная).

16.19. Обозначим через H_θ гипотезу “доля выживших насекомых равна θ”, $\theta \in (0;1)$. В качестве нулевой гипотезы рассмотрим гипотезу $H_{0,08}$. В качестве альтернативной гипотезы к $H_{0,08}$ рассмотрим $H_{(0;0,08)}$, альтернативная гипотеза $H_{(0;0,08)}$ сложная, когда $H_{(0;0,08)}$ верна, верна одна из простых гипотез H_θ, $\theta \in (0;0{,}08)$. В качестве критерия для проверки гипотезы $H_0 = H_{0,08}$ против альтернативы $H_{(0;0,08)}$ будем использовать $S = \{x : x \leq l\}$.

Требования к контролю (критерию) авторов инсектицида:

$$\mathsf{P}(S|H_{0,02}) \geq 0{,}96,$$

требования к контролю (критерию) покупателей:

$$\mathsf{P}(\overline{S}|H_{0,08}) \geq 0{,}95.$$

16.20. См. указание к задаче 16.19.

21.17 К главе 17

Далее, проверяя гипотезу H_0: $a = a_0$, через t будем обозначать $(\bar{\xi}-a_0)\Big/\dfrac{s}{\sqrt{n}}$, а проверяя гипотезу H_0: $a_\xi = a_\eta$, через t будем обозначать $(\bar{\xi}-\bar{\eta})\Big/\left(s\sqrt{\dfrac{n+m}{nm}}\right)$.

17.1. Рассмотрим разность $\zeta = \eta - \xi$ между объемом легких после и до сезона (в данном случае пользоваться критерием Стьюдента для проверки гипотезы H_0: $a_\xi = a_\eta$ нельзя, поскольку выборки объема легких после и до сезона не являются независимыми). Относительно среднего разности ζ выдвигается гипотеза $H_0 : a = 0$ (гипотеза об отсутствии эффекта физических упражнений), в качестве альтернативной к гипотезе H_0 естественно рассматривать гипотезу $a > 0$. Значение $t = \bar{\zeta}\Big/\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 3{,}36 > 1{,}833 = t_{0{,}05;9} = t_{\alpha;n-1}$. Поэтому согласно критерию Стьюдента гипотеза H_0 отклоняется (на 5 %-м уровне значимости), что интерпретируется как существенное увеличение объема легких под влиянием физических упражнений.

17.2. Нулевая гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = 0{,}51 < 2{,}306 = t_{0{,}025;8} = t_{\alpha;n+m-2}$. Поэтому согласно критерию Стьюдента гипотеза H_0 не отклоняется (на 5 %-м уровне значимости), что интерпретируем как отсутствие различий отражательных способностей красок.

17.3. Нулевая гипотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива двусторонняя. Значение $s_\xi^2/s_\eta^2 = 0{,}24$. Гипотеза H_0 на 2 %-м уровне значимости отклоняется. Последнее обозначает, что точность работы контролеров необходимо квалифицировать как различную.

17.4. Нулевая гипотеза H_0: $a = 1$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = 2{,}35 > 2{,}262 = t_{0{,}025;9} = t_{\alpha;n-1}$. Поэтому гипотеза H_0 (на 5 %-м уровне значимости) отклоняется, что указывает на то, что счетчики отрегулированы неудовлетворительно.

17.5. Нулевая гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = 0{,}991 < 2{,}262 = t_{0{,}025;9} = t_{\alpha;n+m-2}$. Поэтому гипотеза H_0 на 5 %-м уровне значимости не отклоняется (не противоречит экспериментальным данным). Другими словами, эксперимент дает основания утверждать, что сталь I и сталь II не отличаются по способности к глубокому отпуску.

17.6. (2°) Нулевая гипотеза H_0: $\sigma^2/0{,}01 = 1$, альтернатива односторонняя: $\sigma^2/0{,}01 > 1$ (нас интересует только превышение дисперсией заданного уровня). Значение $s^2/0{,}01 = 14{,}53$, $\chi^2_{\alpha;(n-1)}/(n-1) = \chi^2_{0{,}05;9}/9 = 1{,}88 < 14{,}53 = s^2/0{,}01$. Поэтому гипотеза H_0 на 5 %-м уровне значимости отклоняется. Результаты взвешивание 10 упаковок дают основания утверждать, что требования относительно дисперсии массы упаковок не выполняется — разброс массы упаковки превышает заданную норму.

17.7. Нулевая гипотеза H_0: $a = 12{,}0$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = |\bar{\xi} - 12{,}0| \Big/ \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}56$; $|t| = 0{,}56 < 2{,}160 = t_{0{,}025;13} = t_{\alpha;n-1}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется.

17.8. Пусть a_η — среднее содержание золота в образцах из шурфов, а a_ξ — в образцах из скважин, H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива односторонняя: $a_\xi < a_\eta$ (результат исследования образцов на содержание золота из скважин не выше, чем из шурфов). Мы не хотим пренебрегать возможным снижением расходов (за счет бурения скважин вместо закладки шурфов), поэтому назначаем не очень большой уровень значимости, скажем, $\alpha = 0{,}025$. Значение $t = (\bar{\eta} - \bar{\xi}) \Big/ \left(s\sqrt{\dfrac{n+m}{nm}}\right) = 1{,}82$; $t = 1{,}82 < 2{,}06 = t_{0{,}025;25} = t_{\alpha;n+m-2}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется. Так что можно считать, что результаты исследования образцов из скважин и из шурфов существенно не отличаются. Следовательно, для разведки рассыпного месторождения золота можно рекомендовать бурить скважины вместо закладки шурфов, что снижает затраты на разведку.

17.9. Пусть σ_ξ^2, σ_η^2 — дисперсии размера внешнего диаметра изделия соответственно после настройки станка и через определенное время после этого. Нулевая гипотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива односторонняя: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$, поскольку со временем точность работы станка может только уменьшиться (дисперсия критического размера изделия может только увеличиться). Значение отношения $s_\xi^2/s_\eta^2 = 0{,}77 > 0{,}44 = 1/F_{0{,}05;14;19}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется. Последнее обозначает, что приведенные данные не дают оснований говорить о снижении точности работы станка.

17.10. Нулевая гипотеза H_0: $a = 24$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = |\bar{\xi} - 24|\Big/\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 1{,}363 < 2{,}365 = t_{0{,}025;7} = t_{\alpha;n-1}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется (на 5 %-м уровне значимости). Следовательно, можно считать, что расчетная скорость полимеризации составляет 24 % за час.

17.11. Пусть a_ξ и a_η — средние предельного сопротивления на сжатие соответственно бетона, приготовленного без обработки, и бетона, приготовленного с обработкой. Относительно a_ξ и a_η выдвигается гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$ — гипотеза об отсутствии эффекта специального способа приготовления бетона (обидная для авторов нового способа). Альтернатива односторонняя: $a_\xi < a_\eta$ (специальный способ приготовления бетона ориентирован на повышение его прочности на сжатие). Вы — член доброжелательной комиссии по проверке эффекта специального способа приготовления бетона (не хотите несправедливо пренебрегать эффектом специального способа приготовления бетона, если он существует), поэтому назначаете не очень малый уровень значимости. Выберем, скажем, 5 %-й уровень. Значение

$$t = (\bar{\eta} - \bar{\xi})\Bigg/\left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}\right) = 2{,}29 >$$

$$> 2{,}13 = t_{0{,}05;4} = t_{\alpha;n+m-2}.$$

Поэтому нулевая гипотеза H_0 отклоняется. Последнее обозначает, что эксперимент дает основания утверждать, что специальный способ приготовления бетона повышает его сопротивление на сжатие.

17.12. Пусть σ_ξ^2, σ_η^2 — дисперсии выхода нежелательного продукта при использовании соответственно катализаторов A и B. Гипотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива двусторонняя: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ или $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$, поскольку априори ничего не известно о стабильности выхода нежелательного продукта как в случае использования одного катализатора, так и другого. Значение $s_\xi^2/s_\eta^2 = 0{,}335$; $1/F_{\alpha;(m-1);(n-1)} = 1/F_{0{,}01;8;8} = 0{,}166 < s_\xi^2/s_\eta^2 < 6{,}03 = F_{0{,}01;8;8} = F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется. Эксперимент не дает оснований считать, что разброс выхода нежелательного продукта при использовании катализаторов A и B различен.

17.13. Нулевая гипотеза H_0: $a = 2{,}5$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = |\bar{\xi} - 2{,}5| \Big/ \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}08 < 2{,}365 = t_{0{,}025;7} = t_{\alpha;n-1}$, поэтому гипотеза H_0 не отклоняется (на 5 %-м уровне значимости). Следовательно, можно считать, что выборка получена из нормального распределения со средним 2,5.

17.14. Пусть a_ξ и a_η — среднее увеличение массы детей, которым выдавали соответственно сок и молоко. Нулевая гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двусторонняя: $a_\xi < a_\eta$ или $a_\xi > a_\eta$. Значение $|t| = 1{,}30 < 2{,}01 = t_{0{,}025;18} = t_{\alpha;n+m-2}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется, что мы интерпретируем как несущественное отличие в увеличении средней массы детей в группах.

17.15. Нулевая гипотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива двусторонняя: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$ или $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ (если H_0 неверна, то априори неизвестно, точность какого микроскопа выше, а какого ниже). Значение $s_\xi^2/s_\eta^2 = 0{,}47$; $1/F_{\alpha;(m-1);(n-1)} = 1/F_{0{,}01;11;8} = 0{,}17 < s_\xi^2/s_\eta^2 < 4{,}74 = F_{0{,}01;8;11} = F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Поэтому гипотеза H_0 на 2 %-м уровне значимости не отклоняется. Эксперимент не дает оснований ставить под сомнение одинаковую точность измерений микроскопами I и II.

17.16. Нулевая гипотеза H_0: $a = 2000$, альтернатива двусторонняя (сопротивление резисторов может быть как меньшим, так и большим 2000). Значение $|t| = 1{,}02 < 2{,}20 = t_{0,025;11} = t_{\alpha;n-1}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется (на 5 %-м уровне значимости). Последнее обозначает, что такие отклонения значения сопротивления резисторов от номинала допустимы (они естественны и избежать их невозможно).

17.17. Нулевая гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = 8{,}566 > 2{,}10 = t_{0,025;18} = t_{\alpha;n+m-2}$. Поэтому гипотеза H_0 отклоняется (на 5 %-м уровне значимости).

17.18. Пусть σ_ξ^2, σ_η^2 — дисперсии отражательных способностей краски, изготовленной соответственно по технологиям A и B. Нулевая гипотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива односторонняя: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$ (изменения в технологии направлены на уменьшение дисперсии отражательных свойств краски). Отклонение в пользу этой альтернативы будет свидетельствовать об уменьшении дисперсии. Значение $s_\xi^2/s_\eta^2 = 4{,}74 < 6{,}39 = F_{0,05;4;4} = F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Поэтому гипотеза H_0 на 5 %-м уровне значимости не отклоняется. Эксперимент не дает оснований утверждать, что изменения в технологии, направленные на уменьшение дисперсии отражательных свойств краски, оказались эффективными.

17.19. Нулевая гипотеза H_0: $a = 220$, альтернатива двусторонняя: $a > 220$ или $a < 220$. Значение $|t| = |\bar{\xi} - 220| \Big/ \frac{s}{\sqrt{n}} = 1{,}48 < 2{,}07 = t_{0,025;23} = t_{\alpha;n-1}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется (на 5 %-м уровне значимости). Отклонения от стандарта можно считать допустимыми.

17.20. Пусть a_ξ и a_η — средние значения результатов прохождения дистанции в 15 км соответственно традиционным ходом и коньковым ходом. Нулевая гипотеза H_0: $a_\xi - 1 = a_\eta$, альтернатива односторонняя: $a_\xi - 1 > a_\eta$. Отклонение нулевой гипотезы в пользу альтернативной: $a_\xi - 1 > a_\eta$ будет свидетельствовать о наличии более чем одноминутного эффекта техники конькового хода, неотклонение гипотезы H_0 будет свидетельствовать об отсутствии такого эффекта. Значение

$$t = ((\bar{\xi} - 1) - \bar{\eta}) \Bigg/ \left(s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right)$$

сравниваем с $t_{\alpha;n+m-2}$, если $t > t_{\alpha;n+m-2}$, то гипотеза H_0 отклоняется, в противном случае — нет. Имеем: $t = 3{,}774 > 2{,}10 = t_{0{,}05;18} = t_{\alpha;n+m-2}$. Поэтому согласно критерию Стьюдента гипотеза H_0: $a_\xi - 1 = a_\eta$ на 5 %-м уровне значимости отклоняется, что интерпретируется как более чем одноминутный выигрыш во времени при использовании техники коньковых ходов по сравнению с традиционной техникой.

17.21. Нулевая гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двусторонняя: $a_\xi < a_\eta$ или $a_\xi > a_\eta$, поскольку нет априорной информации относительно диаметров изделий, изготовленных на станках A и B. Значение $|t| = 1{,}98$; $|t| = 1{,}98 < 2{,}07 = t_{0{,}025;23} = t_{\alpha;n-1}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется. Эксперимент не дает оснований утверждать, что диаметры изделий, изготовленных на разных станках, отличны.

17.22. Нулевая гипотеза H_0: $a = 18$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = 0{,}89 < 2{,}20 = t_{0{,}025;11} = t_{\alpha;n-1}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется (на 5 %-м уровне значимости). Последнее трактуется как выполнение требований стандарта относительно содержания хрома в стали 18Cr10Ni2Mo.

17.23. Нулевая гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = 3{,}63 > 2{,}10 = t_{0{,}025;18} = t_{\alpha;n+m-2}$. Поэтому гипотеза H_0 отклоняется (на 5 %-м уровне значимости). Эксперимент дает основания утверждать, что комфортная температура для женщин и мужчин различна.

17.24. Нулевая гипотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернативная гипотеза двусторонняя. Значение s_ξ^2/s_η^2 равно 1,71; $1/F_{\alpha;(m-1);(n-1)} = 1/F_{0{,}01;7;7} = 0{,}14 < s_\xi^2/s_\eta^2 < 6{,}99 = F_{0{,}01;7;7} = F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется (на 2 %-м уровне значимости). Эксперимент свидетельствует в пользу отсутствия различий между разбросом сопротивлений провода типа A и B.

17.25. Нулевая гипотеза H_0: $a = 11$, альтернатива односторонняя: $a < 11$ (прочность на изгиб меньше 11). Значение $t = (\bar{\xi} - 11)\Big/\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 3{,}8 > -1{,}75 = -t_{0,05;15} = -t_{\alpha;n-1}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется (на 5 %-м уровне значимости). Таким образом, можно считать, что прочность на изгиб не меньше чем 11.

17.26. Точность станка характеризуется дисперсией: меньше дисперсия — больше точность, больше дисперсия — меньше точность.

Проверяем гипотезу H_0: $\sigma_A^2/\sigma_B^2 = 1$, альтернатива двусторонняя: $\sigma_A^2/\sigma_B^2 > 1$ или $\sigma_A^2/\sigma_B^2 < 1$, поскольку неизвестно, точность какого станка больше, а какого меньше. Значение $s_A^2/s_B^2 = 1{,}27$; $1/F_{\alpha;(m-1);(n-1)} = 1/F_{0,01;9;14} = 0{,}25 < 1{,}27 = s_A^2/s_B^2 < 5{,}00 = F_{0,01;14;9} = F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется (на 2 %-м уровне значимости). Эксперимент не дает оснований утверждать, что станки принадлежат разным классам точности.

17.27. Разброс характеризуется дисперсией, больше дисперсия — больше разброс. Пусть σ_ξ^2 — дисперсия содержания марганца в случае его определения по традиционной методике, а σ_η^2 — по новой. Нулевая гипотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива односторонняя: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$ (ожидается, что новая методика определения содержания марганца дает меньший разброс результатов).Отклонение H_0 в пользу этой альтернативы будет свидетельствовать об уменьшении дисперсии. Значение $s_\xi^2/s_\eta^2 = 2{,}15$; $s_\xi^2/s_\eta^2 = 2{,}15 < 3{,}68 = F_{0,05;9;7} = F_{\alpha;(n-1);(m-1)}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется. Эксперимент не дает оснований говорить об уменьшении разброса.

17.29. Нулевая гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двусторонняя (нет априорной информации относительно характеристик футеровки предприятий A и B). Значение $|t| = 4{,}05 > 2{,}11 = t_{0,025;17} = t_{\alpha;n+m-2}$. Поэтому гипотеза H_0 отклоняется. Эксперимент дает основания утверждать, что футеровка, изготовленная на предприятиях A и B, отличается по своим характеристикам.

17.30. Пусть H_0: $\sigma^2/35{,}63 = 1$, альтернатива односторонняя: $\sigma^2/35{,}63 < 1$. Отклонение H_0 в пользу этой альтернативы будет свидетельствовать об уменьшении дисперсии, в противном случае — нет. Значение $s^2/35{,}63 = 0{,}842 > 0{,}47 = \chi^2_{0{,}95;14}/14 = \chi^2_{(1-\alpha);(n-1)}/(n-1)$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется. Эксперимент не дает оснований утверждать, что дисперсия за счет технологических изменений процесса уменьшилась (несмотря на ожидания их авторов).

17.31. Нулевая гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = 3{,}5 > 2{,}10 = t_{0{,}025;18} = t_{\alpha;n+m-2}$. Поэтому гипотеза H_0 отклоняется. Эксперимент дает основания утверждать, что в течение заданного интервала времени произошли изменения в уровне настройки станка.

17.32. Поскольку регистрируется температура правой и левой шин для одного и того же автобуса, то выборки не являются независимыми (а следовательно, нельзя пользоваться критерием для проверки гипотезы о равенстве средних), поэтому рассмотрим разность $\zeta = \eta - \xi$ температур, скажем правой и левой шин. Относительно среднего a разности ζ выдвигается гипотеза H_0: $a = 0$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = |\bar{\xi}|\Big/\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}26$. Так что $|t| = 2{,}26 > 2{,}20 = t_{0{,}025;11} = t_{\alpha;n+m-2}$. Поэтому гипотеза H_0 отклоняется (на 5 %-м уровне значимости), что свидетельствует в пользу существенной разницы температуры, до которой нагреваются правая и левая шины автобуса во время его движения.

17.34. Рассмотрим разность $\zeta = \eta - \xi$ между длиной образцов после отжига и до него. (Пользоваться критерием Стьюдента для проверки гипотезы о равенстве средних нельзя, поскольку выборки не являются независимыми — измеряется длина одного и того же образца до отжига и после него.) Относительно среднего a разности ζ выдвигается гипотеза H_0: $a = 0$, альтернатива двусторонняя: $a > 0$ или $a < 0$. Значение $|t| = 2{,}14 < 2{,}262 = t_{0{,}025;9}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется. Эксперимент не дает оснований говорить об изменении длины образцов изделий после их отжига.

17.35. Нулевая гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двусторонняя. Значение $|t| = 0{,}916 < 2{,}015 = t_{0{,}05;5} = t_{\alpha;n+m-2}$. Поэтому гипотеза H_0 не отклоняется. Предположение о том, что состав резины не влияет на ее прочность, не противоречит эксперименту.

17.36. Точность работы станка характеризуется дисперсией и со временем не возрастает (а дисперсия соответственно не уменьшается). В терминах проверки статистических гипотез предположение о неизменности точности работы станка формулируется как гипотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 = 1$, альтернатива односторонняя: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$. Значение $s_\xi^2/s_\eta^2 = 0,51 > 0{,}31 = 1/F_{0{,}05;9;9} = 1/F_{\alpha;(m-1);(n-1)}$. Поэтому нулевая гипотеза не отклоняется. Таким образом, можно считать, что точность работы станка не уменьшилась (хотя значение оценки дисперсии и возросло с $s_\xi^2 = 4{,}4\,\text{мкм}^2$ до $s_\eta^2 = 8{,}6\,\text{мкм}^2$, но это допустимое увеличение дисперсии).

17.37. Рассмотрим разность $\zeta = \eta - \xi$ между длительностью обезболивающего действия препаратов B и A. (В данном случае пользоваться критерием Стьюдента для проверки гипотезы H_0: $a_\xi = a_\eta$ нельзя, поскольку выборки не являются независимыми.) Относительно среднего a разности ζ выдвигается гипотеза H_0: $a = 0$, при этом в случае 1° (априорная информация об эффективности препаратов отсутствует) альтернатива двусторонняя: $a < 0$ или $a > 0$; а в случае 2°, когда известно, что B имеет не меньшую фармакологическую активность чем A, альтернатива односторонняя: $a > 0$. Далее, $t = \bar{\zeta}\Big/\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}43$; $|t| = 2{,}43 > 2{,}365 = t_{0{,}025;7} = t_{\alpha;n-1}$. Поэтому в случае 1° гипотеза H_0 отклоняется (на 5%-м уровне значимости), что мы трактуем как различную фармакологическую активность препаратов B и A.

Отклоняется гипотеза H_0 и при наличии априорной информации (фармакологическая активность B не меньше чем A), поскольку $t = 2{,}43 > 1{,}895 = t_{0{,}05;7}$. Это свидетельствует в пользу большей фармакологической активности препарата B по сравнению с препаратом A.

17.38. Нулевая гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$, альтернатива двусторонняя: $a_\xi < a_\eta$ или $a_\xi > a_\eta$. Значение $|t| = 1{,}14 < 2{,}179 = t_{0{,}025;12}$. Поэтому гипотеза не отклоняется. Эксперимент не дает оснований утверждать, что результаты операторов существенно различаются.

21.18 К главе 18

Примеры интерпретации неотклонения нулевой гипотезы, отклонения нулевой гипотезы в пользу той или другой альтернативы можно найти в решениях и указаниях к задачам гл. 17.

18.7. Чтобы обеспечить выполнение условия $\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}/n \geq 10$ для всех i, j, не исключено, что признаки D и E необходимо будет объединить в один признак S — недостаточно развитый или умственно отсталый.

18.19. Формально гипотеза о независимости глухонемоты от пола формулируется как гипотеза о независимости признаков: пол и глухонемота.

Сначала необходимо построить таблицу сопряженности признаков. Наблюдается 15 729 000+16 799 000 значений (по количеству жителей Англии и Уэльса) случайной величины (ξ, η), где ξ — "индикатор" пола (принимает значение 0 для женского пола и 1 — для мужского), η — "индикатор" глухонемоты (принимает значение 1, если человек глухонемой и 0 — в противном случае).

18.22. Чтобы обеспечить выполнение условия

$$\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}/n \geq 10$$

для всех i, j, не исключено, что два признака: F и G (или два признака: "сносное" и "очень плохое") необходимо будет объединить в один признак.

18.25. Гипотеза H_0: число появлений $(1, 1)$ на 100 пар имеет пуассоновское распределение.

18.27. Не исключено, что некоторые признаки необходимо будет объединить в один (см., например, указание к задаче 18.7).

18.35. Если телепат мысли не читает, то вероятность правильно прочитать задуманную цифру равна $1/10$.

Пусть ξ — случайная величина — число правильно прочитанных цифр в одном эксперименте, ξ принимает значения 1 и 0, распределение ξ имеет вид

$$\mathsf{P}_\xi(k) = \theta^k(1-\theta)^{1-k},\ k=0,1,\ \theta \in (0;1).$$

Относительно распределения P_ξ выдвигаем гипотезу

$$H_0 : \mathsf{P}_\xi(k) = (1/10)^k(9/10)^{1-k},\ k=0,1.$$

Альтернативная гипотеза

$$H_\theta : \mathsf{P}_\xi(k) = \theta^k(1-\theta)^{1-k},\ k=0,1,\ \theta > 1/10.$$

Отклонение нулевой гипотезы в пользу альтернативной свидетельствует о наличии способностей телепата читать мысли, неотклонение — об отсутствии таковых.

21.19 К главе 19

Примеры интерпретации неотклонения нулевой гипотезы, ее отклонения в пользу той или другой альтернативы можно найти в решениях и указаниях к задачам гл. 17.

19.7. Номинальный диаметр шейки рабочей части сверла составляет 9,8 мм, но в процессе производства получается то, что получается (см. выборку), по-другому в принципе не может быть — уж очень много случайных (неконтролируемых) факторов влияет на конечный результат. Поэтому измерения диаметров шеек 20 сверл, каждый из которых должен быть равен 9,8 мм, дают не одно число 9,8, а реализацию выборки некоторой случайной величины ζ, которую мы и называем диаметром шейки сверла.

Относительно распределения значений диаметра шейки сверла выдвигается вполне естественное предположение: ζ — нормально распределенная случайная величина (теоретическим обоснованием этого предположения, которое в большинстве ситуаций оправдывается, является центральная предельная теорема). Нормальное распределение $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$ определяется двумя параметрами: a и σ^2; его функция распределения

$$N_{a;\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dt.$$

Поскольку номинальный диаметр шейки сверла 9,8 мм, то $a = 9{,}8$. Требование "норма отхода при техническом допуске 0,05 мм должна составлять 1 %" обозначает, что

$$\mathsf{P}\{9{,}75 \leq \zeta \leq 9{,}85\} = 0{,}99.$$

Последнее равенство, с учетом предположения о нормальности распределения ζ, можно переписать так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{9{,}75}^{9{,}85} \exp\left\{-\frac{(t-9{,}8)^2}{2\sigma^2}\right\} dt = 0{,}99,$$

а после замены $(t-9{,}8)/\sigma = u$ так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-0{,}05/\sigma}^{0{,}05/\sigma} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = 0{,}99,$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{0{,}05/\sigma} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = 0{,}495.$$

По таблице 22.1.1 нормального распределения находим $0{,}05/\sigma = 2{,}575$, $\sigma = 0{,}02$. Таким образом, функция гипотетического распределения диаметра шейки сверла имеет вид

$$N_{a;\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du,$$

где $a = 9{,}8$, $\sigma^2 = 0{,}0004$.

Осталось, воспользовавшись критерием А. Н. Колмогорова, проверить гипотезу H_0: диаметр шейки сверла имеет распределение $\mathsf{N}_{a;\sigma^2}$; $a = 9{,}8$, $\sigma^2 = 0{,}0004$.

19.16. Показания записать в часах (1 мин равна $1/60$ час).

19.25. Случайную величину s_i можно представить в виде

$$s_i = \sum_{k=0}^{16} \varepsilon_k^{(i)},$$

где $\varepsilon_k^{(i)}, k = 0, 1, \ldots, 16,$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, распределением каждой из которых является

$$\mathsf{P}\{\varepsilon_k^{(i)} = j\} = 1/2,\ j = 0, 1.$$

Согласно центральной предельной теореме, нормированная сумма независимых одинаково распределенных случайных величин (с конечными дисперсиями) имеет распределение, близкое к $\mathsf{N}_{0;1}$-распределению. Заметим, что

$$\mathsf{M}s_i = \mathsf{M}\sum_{k=0}^{16} \varepsilon_k^{(i)} = 8,\ \mathsf{D}s_i = \mathsf{D}\sum_{k=0}^{16} \varepsilon_k^{(i)} = 4,$$

поэтому

$$\frac{s_i - \mathsf{M}s_i}{\sqrt{\mathsf{D}s_i}} = \frac{s_i - 8}{2}.$$

19.28. См. задачу 19.25.

21.20 К главе 20

20.1. Оценки $\hat{\alpha} = 13{,}11$, $\hat{\beta} = 0{,}74$, $\hat{\sigma^2} = 20{,}57$. Доверительными интервалами с коэффициентом надежности 0,90 являются: (12,01; 14,21) — для параметра α, для параметра β — (0,61; 0,87), (15,78; 31,08) — для параметра σ^2.

Уравнение регрессии

$$s = 13{,}11 + 0{,}74(v - 24{,}78).$$

Согласно (20.1.7) значение $|t| = 9{,}661$, что больше $1{,}677 = t_{0{,}05;48}$, поэтому гипотеза H_0: $\beta = 0$ отклоняется (на 5% уровне значимости). Регрессия значима.

Для проверки адекватности линейной регрессии вычислим

$$s_1^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j}(s_{j;\nu} - \bar{s_j})^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{k-2}\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{s_j} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}(v_j - \bar{v}))^2,$$

$$\bar{s_j} = \frac{1}{n_j}\sum_{\nu=1}^{n_j} s_{j;\nu},\ j = 1, 2, \ldots, k,\ n = \sum_{j=1}^{k} n_j,\ \bar{v} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Имеем $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1, \ldots, n_{19} = 1$, $n = 50$, $k = 19$, $s_1^2 = 20{,}31$, $s_2^2 = 23{,}55$, значение $1{,}16 = s_2^2/s_1^2 < F_{\gamma;k-2;n-k} = F_{0{,}05;17;31} = 1{,}96$, поэтому согласно (20.1.18) гипотеза об адекватности описания линейной моделью зависимости тормозного пути от скорости автомобиля не отклоняется.

20.2. Оценки $\hat{\alpha} = 73{,}98$, $\hat{\beta} = 3{,}85$, $\hat{\sigma^2} = 59{,}44$. Доверительными интервалами с коэффициентом надежности 0,90 являются: (71,15; 76,80) — для параметра α, для параметра β — (2,06; 5,64), (42,06; 115,6) — для параметра σ^2.

Уравнение эмпирической линии регрессии:

$$y = 73{,}98 + 3{,}85(x - 10{,}53).$$

Согласно (20.1.7) значение $|t| = 3{,}689$, что больше $t_{0,05;22} = 1{,}717$, поэтому гипотеза $H_0 : \beta = 0$ отклоняется (на 5% уровне значимости) — регрессия значима.

Проверка адекватности регрессии: имеем $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2, \ldots, n_{19} = 1$, $n = 24$, $k = 19$, $s_1^2 = 129{,}84$, $s_2^2 = 45{,}72$, значение $s_2^2/s_1^2 = 0{,}35 < F_{\gamma;k-2;n-k} = F_{0,05;17;5} = 4{,}59$, поэтому согласно (20.1.18) гипотеза об адекватности не отклоняется.

20.3. Оценки $\hat{\alpha} = 95{,}42$, $\hat{\beta} = 1{,}87$, $\hat{\sigma^2} = 97{,}36$. Доверительными интервалами с коэффициентом надежности 0,90 являются: (90,08; 100,76) — для параметра α, для параметра β — (0,92; 2,82), (64,31; 276,35) — для параметра σ^2.

Уравнение регрессии:

$$y = 95{,}42 + 1{,}87(x - 7{,}46).$$

Согласно (20.1.7) значение $|t| = 3{,}55$, что больше $t_{0,05;11} = 1{,}796$, поэтому гипотеза $H_0 : \beta = 0$ отклоняется (на 5% уровне значимости). Регрессия значима.

Проверка адекватности регрессии: имеем $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1, \ldots, n_7 = 1$, $n = 13$, $k = 7$, $s_1^2 = 101{,}17$, $s_2^2 = 131{,}7$, значение $s_2^2/s_1^2 = 1{,}3 < F_{\gamma;k-2;n-k} = F_{0,05;5;6} = 4{,}39$, поэтому согласно (20.1.18) гипотеза об адекватности не отклоняется.

20.6. Оценки $\hat{\alpha} = -1{,}10$, $\hat{\beta} = -0{,}59$, $\hat{\sigma^2} = 0{,}75$. Доверительными интервалами с коэффициентом надежности 0,90 являются: $(-1{,}31; -0{,}90)$ — для параметра α, $(-0{,}73; -0{,}45)$ — для параметра β, $(0{,}58; 1{,}12)$ — для параметра σ^2.

Уравнение регрессии:

$$T = -1{,}10 - 0{,}59(Ca - 4{,}09).$$

Согласно (20.1.7) значение $|t| = 7{,}19$, что больше $t_{0,05;50} = 1{,}676$, поэтому гипотеза H_0: $\beta = 0$ отклоняется (на 5% уровне значимости) — регрессия значима.

Проверка адекватности регрессии: имеем $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1, \ldots, n_{34} = 3$, $n = 52$, $k = 34$, $s_1^2 = 0{,}87$, $s_2^2 = 0{,}73$, значение $s_2^2/s_1^2 = 0{,}84 < F_{\gamma;k-2;n-k} = F_{0{,}05;32;18} = 2{,}19$, поэтому согласно (20.1.18) гипотеза об адекватности описания линейной моделью зависимости значения T денситометрического анализа от количества выводимого Ca не отклоняется.

В соответствии с уравнением регрессии значению $T = -2$ (границе между средней и тяжелой формой остеопении) соответствует значение 5,7 ммоль/л Ca. Поэтому если $Ca > 5{,}7$ (Ca выводится больше чем 5,7 единиц), то степень остеопении естественно классифицировать как тяжелую.

20.9. Оценки $\hat{\alpha} = 804$, $\hat{\beta} = 131{,}84$, $\hat{\sigma^2} = 70873{,}68$. Доверительными интервалами с коэффициентом надежности 0,90 являются: (683,47; 924,52) — для параметра α, (69,29; 194,14) — для параметра β, (48235,57; 166034,03) — для параметра σ^2.

Уравнение регрессии

$$y = 804 + 131{,}84(x - 3{,}65).$$

Согласно (20.1.7) значение $|t| = 3{,}69$, что больше $t_{0{,}05;15} = 1{,}753$, поэтому гипотеза $H_0 : \beta = 0$ отклоняется на уровне значимости 0,05. Регрессия значима.

Проверка адекватности регрессии: имеем $n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 3, \ldots, n_7 = 3$, $n = 17$, $k = 7$, $s_1^2 = 68475$, $s_2^2 = 104130$, значение $s_2^2/s_1^2 = 1{,}52 < F_{\gamma;k-2;n-k} = F_{0{,}05;5;10} = 3{,}33$, поэтому согласно (20.1.18) гипотеза об адекватности не отклоняется.

20.10. Оценки $\hat{\alpha} = 2125,28; \hat{\beta} = 0,97; \hat{\sigma^2} = 2826,22$. Доверительными интервалами с коэффициентом надежности 0,90 являются: $(2102,07; 2148,48)$ для параметра α; $(0,93; 1,02)$ для параметра β; $(1934,29; 6390,95)$ для параметра σ^2.

Уравнение регрессии

$$y = 2125,28 + 0,97(x - 2165).$$

Согласно (20.1.7) значение $|t| = 38{,}74$, что больше $t_{0{,}05;16} =$

$= 1{,}746$, поэтому гипотеза $H_0 : \beta = 0$ отклоняется (на 5% уровне значимости). Регрессия значима.

20.11. Оценки $\hat{\alpha} = 0{,}63$, $\hat{\beta} = 0{,}46$, $\hat{\sigma^2} = 0{,}02$. Доверительными интервалами с коэффициентом надежности 0,90 являются: для параметра α — $(0{,}606; 0{,}653)$, для параметра β — $(0{,}377; 0{,}543)$, $(0{,}017; 0{,}026)$ — для параметра σ^2.

Уравнение регрессии

$$y = 0{,}63 + 0{,}46(x - 0{,}81).$$

Согласно (20.1.7) значение $|t| = 9{,}184$, что больше $t_{0{,}05;101} = 1{,}660$, поэтому гипотеза H_0: $\beta = 0$ отклоняется (на 5% уровне значимости). Регрессия значима.

Проверка адекватности регрессии: имеем $n_1 = 1$, $n_2 = 5$, $n_3 = 7, \ldots, n_{25} = 1$, $n = 103$, $k = 25$, $s_1^2 = 0{,}017$, $s_2^2 = 0{,}033$, значение $s_2^2/s_1^2 = 1{,}92 < F_{\gamma;k-2;n-k} = F_{0{,}01;23;78} = 2{,}1$, поэтому согласно (20.1.18) гипотеза об адекватности регрессии на уровне значимости 0,01 не отклоняется.

20.12. Оценки для второй координаты $\hat{\alpha} = 0{,}311$; $\hat{\beta} = 1{,}154$; $\hat{\sigma^2} = 0{,}009$. Доверительным интервалами с коэффициентом надежности 0,90 являются: $(0{,}228;\ 0{,}395)$ для параметра α; $(0{,}96;\ 1{,}349)$ для параметра β; для параметра σ^2 $(0{,}005;\ 0{,}052)$.

Уравнение регрессии

$$x = 0{,}311 + 1{,}154(t - 0{,}261).$$

Согласно (20.1.7) значение $|t| = 11{,}959$, что больше $t_{0{,}05;5} = 2{,}015$, поэтому гипотеза $H_0 : \beta = 0$ об отсутствии связи между теорией и наблюдениями отклоняется на уровне значимости 0,05. Регрессия значима.

21.21 Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Стохастический эксперимент. Дискретное вероятностное пространство

Вариант	Задача					
1	1.10	2.26	2.11	3.14	3.36	4.2	4.17
2	1.14	2.14	2.12	3.13	3.37	4.3	4.18
3	1.15	2.13	2.15	3.12	3.36	4.26	4.19
4	1.19	2.25	2.14	3.11	3.40	4.5	4.30
5	1.20	2.10	2.21	3.9	3.32	4.6	4.21
6	1.22	2.9	2.22	3.8	3.28	4.7	4.22
7	1.24	2.8	2.21	3.7	3.27	4.8	4.23
8	1.25	2.7	2.20	3.6	3.25	4.9	4.24
9	1.23	2.5	2.19	3.5	3.21	4.10	4.28
10	1.33	2.4	2.18	3.3	3.20	4.12	4.19
11	1.21	2.3	2.17	3.2	3.16	4.13	4.23
12	1.21	2.2	2.16	3.1	3.38	4.26	4.12

Задание 2

Дискретная случайная величина, ее распределение и числовые характеристики

Вариант	Задача					
1	5.41	5.8(1а)	5.10	5.28	6.34	6.32
2	5.42	5.8(1б)	5.11(2а)	5.29	6.35	6.30
3	5.44	5.8(1в)	5.12	5.30	6.37	6.28(1)
4	5.6	5.8(2а)	5.13	5.31	6.39	6.27
5	5.45	5.8(2б)	5.14	5.32	6.5	6.21
6	5.19	5.8(2в)	5.15	5.34(а)	6.40	6.20
7	5.20	5.8(2г)	5.43	5.34(б)	6.41	6.18
8	5.21	5.8(2д)	5.18	5.38	6.45	6.17
9	5.22	5.8(2е)	5.48	5.39	6.46	6.16
10	5.23	5.8(3а)	5.8(2ё)	5.40(1)	6.49	6.30
11	5.24	5.8(3б)	5.8(2ж)	5.40(2)	6.50	6.28(2)
12	5.27	5.8(3в)	5.8(2з)	5.39	6.51	6.28(3)

Задание 3

Аксиоматика теории вероятностей

Вариант	Задача			
1	7.1	7.7	7.15(1)	7.18
2	7.2	7.8	7.17	7.19
3	7.3	7.9	7.15(3)	7.20
4	7.4	7.10	7.15(4)	7.29
5	7.5	7.7	7.15(5)	7.30
6	7.6	7.8	7.15(1)	7.20
7	7.1	7.9	7.15(2)	7.14
8	7.2	7.10	7.15(3)	7.21
9	7.3	7.7	7.15(4)	7.22
10	7.4	7.8	7.15(2)	7.30
11	7.5	7.9	7.16	7.16
12	7.6	7.10	7.17	7.14

Задание 4

Геометрические вероятности

Вариант	Задача				
1	8.3(1)	8.4(1)	8.6	8.18	8.33
2	8.3(2)	8.4(2)	8.7	8.17	8.15(3)
3	8.3(3)	8.4(3)	8.32	8.19	8.13(2)
4	8.3(4)	8.4(6)	8.40	8.20	8.18
5	8.3(5)	8.4(7)	8.9	8.23	8.19
6	8.3(6)	8.4(8)	8.10	8.25	8.20
7	8.3(7)	8.4(9)	8.33	8.26	8.23
8	8.3(8)	8.4(11)	8.36	8.28	8.25
9	8.3(10)	8.4(13)	8.36	8.24	8.28
10	8.3(11)	8.4(14)	8.29	8.30	8.16
11	8.3(12)	8.4(15)	8.15(1)	8.31	8.6
12	8.3(13)	8.4(16)	8.15(2)	8.34	8.7

Задание 5

Случайная величина и ее распределение

Вариант	Задача				
1	9.47	9.12	9.23	9.33	9.61
2	9.48	9.11	9.24	9.34	9.58
3	9.49	9.13	9.60	9.35(1)	9.57
4	9.50	9.14	9.25(1)	9.35(2)	9.54
5	9.51	9.15	9.25(2)	9.36	9.53
6	9.52	9.16	9.26(1)	9.37	9.49
7	9.53	9.17	9.26(2)	9.38	9.51
8	9.6	9.18	9.27	9.39	9.50
9	9.7	9.19	9.28	9.40	9.50
10	9.8	9.20	9.29	9.41	9.55(1)
11	9.9	9.21	9.30	9.42	9.55(2)
12	9.10	9.22	9.32	9.43	9.52

Задание 6

Математическое ожидание случайной величины

Вариант	Задача				
1	10.42	10.10	10.19(1а)	10.21	10.31
2	10.43	10.11	10.19(1б)	10.22(1)	10.32
3	10.38	10.12	10.19(2а)	10.23(1)	10.33
4	10.39	10.13	10.19(2б)	10.23(2)	10.34
5	10.40	10.14	10.19(3а)	10.24(1)	10.35
6	10.4	10.15	10.19(3б)	10.24(2)	10.21
7	10.5	10.16(1)	10.19(4а)	10.24(3)	10.23(1)
8	10.41	10.16(2)	10.19(4б)	10.25	10.23(2)
9	10.6(3,4)	10.16(3)	10.20(1а)	10.26	10.31
10	10.45	10.17(1)	10.20(2б)	10.27	10.32
11	10.8	10.17(2)	10.20(3а)	10.28	10.22(1)
12	10.46	10.17(3)	10.20(4б)	10.29	10.22(2)

Задание 7

Свертка

Вариант	Задача			
1	11.1	11.6(1)	11.17(1)	11.15
2	11.2	11.6(2)	11.18	11.27
3	11.3	11.6(3)	11.19	11.22(1)
4	11.8	11.6(4)	11.24	11.22(3)
5	11.7(1)	11.4(1,2)	11.25	11.22(5)
6	11.7(2)	11.4(3,4)	11.26	11.32
7	11.7(3)	11.5(1)	11.28	11.33
8	11.7(4)	11.5(2)	11.29	11.25
9	11.7(5)	11.12	11.30	11.30
10	11.7(6)	11.13	11.31	11.9
11	11.7(7)	11.14	11.35	11.35(1)
12	11.7(8)	11.23	11.19	11.22(6)

Задание 8

Сходимость распределений. Характеристическая функция

Вариант	Задача					
1	12.1	12.10	12.12	13.1	13.17	13.37
2	12.2	12.11	12.13	13.4	13.18	13.38
3	12.3	12.16	12.14	13.5	13.19	13.39
4	12.4	12.17	12.18	13.21	13.20	13.40
5	12.5	12.20	12.19	13.7	13.22	13.41
6	12.6	12.21	12.22	13.8	13.23	13.42
7	12.7	12.23	12.26	13.9	13.24	13.21
8	12.8	12.24	12.27	13.10	13.25	13.30
9	12.9	12.25	12.28	13.11	13.26	13.27
10	12.32	12.30	12.36	13.12	13.27	13.26
11	12.33	12.31	12.38	13.14	13.29	13.30
12	12.34	12.37	12.39	13.16	13.30	13.29

Задание 9

Оценивание параметров распределений.

Вари-ант	Задача				Вари-ант	Задача			
1	14.1	14.2	14.3	14.40	7	14.19	14.20	14.21	14.46
2	14.4	14.5	14.6	14.41	8	14.22	14.23	14.24	14.47
3	14.7	14.8	14.9	14.42	9	14.25	14.26	14.27	14.48
4	14.10	14.11	14.12	14.43	10	14.28	14.29	14.30	14.42
5	14.13	14.14	14.15	14.44	11	14.31	14.32	14.33	14.40
6	14.16	14.17	14.18	14.45	12	14.34	14.35	14.36	14.41

Задание 10

Методы построения оценок

Вари-ант	Задача				Вари-ант	Задача			
1	15.1	15.2	15.3	15.4	7	15.25	15.26	15.20	15.28
2	15.5	15.6	15.7	15.8	8	15.29	15.30	15.31	15.32
3	15.9	15.10	15.11	15.12	9	15.33	15.34	15.35	15.36
4	15.13	15.14	15.15	15.16	10	15.37	15.38	15.39	15.40
5	15.17	15.18	15.19	15.20	11	15.41	15.42	15.43	15.44
6	15.21	15.22	15.23	15.24	12	15.45	15.46	15.47	15.48

Задание 11

Задача проверки статистических гипотез. Критерий, функция мощности критерия

Вариант	Задача		Вариант	Задача	
1	16.1	16.7	7	16.10	16.15
2	16.2	16.9	8	16.12	16.20
3	16.3	16.11	9	16.14	16.20
4	16.5	16.15	10	16.18	16.19
5	16.6	16.7	11	16.5	16.11
6	16.11	16.12	12	16.5	16.19

Задание 12

Проверка гипотез о параметрах нормального распределения

Вариант	Задача			Вариант	Задача		
1	17.1	17.2	17.3	7	17.19	17.20	17.26
2	17.4	17.5	17.6	8	17.22	17.23	17.24
3	17.7	17.8	17.9	9	17.25	17.21	17.27
4	17.10	17.11	17.12	10	17.28	17.29	17.30
5	17.13	17.14	17.15	11	17.31	17.32	17.33
6	17.16	17.17	17.18	12	17.34	17.35	17.36

Задание 13

Критерий χ^2

Вари-ант	Задача				Вари-ант	Задача			
1	18.1	18.2	18.3	18.13	10	18.41	18.36	18.34	18.35
2	18.5	18.6	18.7	18.14	11	18.44	18.38	18.34	18.35
3	18.9	18.11	18.10	18.60	12	18.53	18.46	18.47	18.40
4	18.12	18.18	18.15	18.20	13	18.56	18.55	18.59	18.52
5	18.16	18.23	18.19	18.21	14	18.62	18.63	18.51	18.54
6	18.70	18.11	18.7	18.61	15	18.70	18.78	18.58	18.57
7	18.26	18.29	18.22	18.71	16	18.5	18.43	18.39	18.64
8	18.30	18.32	18.27	18.73	17	18.12	18.45	18.42	18.65
9	18.26	18.55	18.19	18.66	18	18.62	18.29	18.58	18.69

Задание 14

Непараметрические критерии: критерий А. Н. Колмогорова, критерий Вилкоксона, критерий знаков

Вариант	Задача			Вариант	Задача		
1	19.1	19.2	19.3	7	19.19	19.20	19.21
2	19.4	19.5	19.6	8	19.22	19.23	19.24
3	19.7	19.8	19.9	9	19.25	19.26	19.27
4	19.10	19.11	19.12	10	19.28	19.29	19.30
5	19.13	19.14	19.15	11	19.31	19.32	19.21
6	19.16	19.17	19.18	12	19.34	19.35	19.36

Задание 15
Линейная регрессия

Вариант	Задача		Вариант	Задача	
1	20.1	20.5	7	20.5	20.7
2	20.2	20.6	8	20.2	20.8
3	20.3	20.12	9	20.9	20.11
4	20.4	20.11	10	20.5	20.7
5	20.7	20.8	11	20.10	20.11
6	20.9	20.10	12	20.9	20.12

Глава 22

Таблицы математической статистики

В эту главу включены все необходимые для работы с учебником таблицы. В частности, приведены квантили, верхние пределы (критические значения) основных распределений математической статистики: стандартного нормального, Стьюдента, Фишера, χ^2-распределения.

Пусть F — абсолютно непрерывное распределение. Для каждого $\beta \in (0; 1)$ число x_β, являющееся решением уравнения

$$F(x_\beta) = \beta,$$

или, что то же, $\mathsf{F}((-\infty, x_\beta)) = \beta$, называется β-квантилью распределения F.

Для каждого $\alpha \in (0; 1)$ число z_α, являющееся решением уравнения

$$1 - F(z_\alpha) = \alpha,$$

или, что то же, уравнения $\mathsf{F}([z_\alpha, +\infty)) = \alpha$, будем называть верхним α-пределом (верхним 100α-процентным пределом, 100α-процентной точкой, 100α-критическим значением) распределения F.

22.1 Нормальное распределение

В таблице 22.1.1 приведены значения функции $\Phi(t)$ нормального распределения с параметрами (0;1) (квантили нормального распределения): для заданных t табулированы значения функции

$$N_{0;1}(t) = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\right\} ds.$$

Для каждого t значение $N_{0;1}(t)$ численно равно площади заштрихованной на рисунке 22.1.1 фигуры.

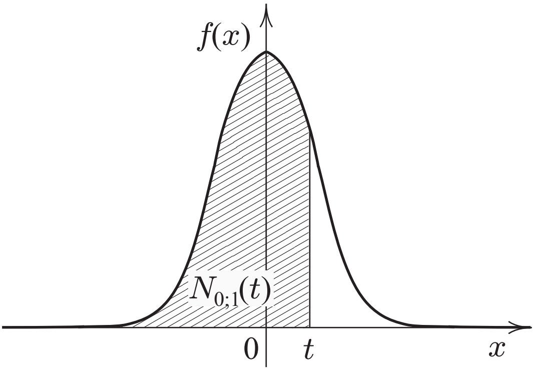


Рис. 22.1.1: К определению квантили нормального распределения; $f(x)$ — плотность распределения $N_{0;1}$

Значение $N_{a;\sigma^2}(x)$ — функции нормального распределения с параметрами $(a;\sigma^2)$ — вычисляется по значениям табулированной функции $N_{0;1}(x) = \Phi(x)$ нормального распределения с параметрами $(0;1)$ следующим образом:

$$N_{a;\sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Таблица 22.1.1 допускает линейную интерполяцию.

Таблица 22.1.1. Значения функции $\Phi(t)$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−0,0	,5000	,4960	,4920	,4880	,4840	,4801	,4761	,4721	,4681	,4641
−0,1	,4602	,4562	,4522	,4483	,4443	,4404	,4364	,4325	,4286	,4247
−0,2	,4207	,4168	,4129	,4090	,4052	,4013	,3974	,3936	,3897	,3859
−0,3	,3821	,3783	,3745	,3707	,3669	,3632	,3594	,3557	,3520	,3483
−0,4	,3446	,3409	,3372	,3336	,3300	,3264	,3228	,3192	,3156	,3121
−0,5	,3085	,3050	,3015	,2981	,2946	,2912	,2877	,2843	,2810	,2776
−0,6	,2743	,2709	,2676	,2643	,2611	,2578	,2546	,2514	,2483	,2451
−0,7	,2420	,2389	,2358	,2327	,2297	,2266	,2236	,2206	,2177	,2148
−0,8	,2119	,2090	,2061	,2033	,2005	,1977	,1949	,1922	,1894	,1867
−0,9	,1841	,1814	,1788	,1762	,1736	,1711	,1685	,1660	,1635	,1611
−1,0	,1587	,1562	,1539	,1515	,1492	,1469	,1446	,1423	,1401	,1379
−1,1	,1357	,1335	,1314	,1292	,1271	,1251	,1230	,1210	,1190	,1170
−1,2	,1151	,1131	,1112	,1093	,1075	,1056	,1038	,1020	,1003	,0985
−1,3	,0968	,0951	,0934	,0918	,0901	,0885	,0869	,0853	,0838	,0823
−1,4	,0808	,0793	,0778	,0764	,0749	,0735	,0721	,0708	,0694	,0681
−1,5	,0668	,0655	,0643	,0630	,0618	,0606	,0594	,0582	,0571	,0559
−1,6	,0548	,0537	,0526	,0516	,0505	,0495	,0485	,0475	,0465	,0455
−1,7	,0446	,0436	,0427	,0418	,0409	,0401	,0392	,0384	,0375	,0367
−1,8	,0359	,0351	,0344	,0336	,0339	,0322	,0314	,0307	,0301	,0294
−1,9	,0288	,0281	,0274	,0268	,0262	,0256	,0250	,0244	,0239	,0233
−2,0	,0228	,0222	,0217	,0212	,0207	,0202	,0197	,0192	,0188	,0183
−2,1	,0179	,0174	,0170	,0166	,0162	,0158	,0154	,0150	,0146	,0143
−2,2	,0139	,0136	,0132	,0129	,0125	,0122	,0119	,0116	,0113	,0110
−2,3	,0107	,0104	,0102	,0099	,0096	,0094	,0091	,0089	,0087	,0084
−2,4	,0082	,0080	,0078	,0075	,0073	,0071	,0069	,0068	,0066	,0064
−2,5	,0062	,0060	,0059	,0057	,0055	,0054	,0052	,0051	,0049	,0048
−2,6	,0047	,0045	,0044	,0043	,0041	,0040	,0039	,0038	,0037	,0036
−2,7	,0035	,0034	,0033	,0032	,0031	,0030	,0029	,0028	,0027	,0026
−2,8	,0026	,0025	,0024	,0023	,0023	,0022	,0021	,0021	,0020	,0019
−2,9	,0019	,0018	,0018	,0017	,0016	,0016	,0015	,0015	,0014	,0014

t	−3,0	−3,1	−3,2	−3,3	−3,4	−3,5	−3,6	−3,7	−3,8	−3,9
$\Phi(t)$	,0013	,0010	,0007	,0005	,0003	,0002	,0002	,0001	,0001	,0000

Окончание табл. 22.1.1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,1	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,2	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,3	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,4	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,5	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,6	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,7	,7580	,7611	,7642	,7673	,7703	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,8	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,9	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,3	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,4	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,1	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	,9893	,9896	,9898	,9900	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9923	,9934	,9936
2,5	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,6	,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,9	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\Phi(t)$	,9987	,9990	,9993	,9995	,9997	,9998	,9998	,9999	,9999	,1000

22.2 χ^2-распределение

χ^2-распределением с n степенями свободы (коротко *χ^2_n-распределением*) будем называть распределение случайной величины

$$\chi^2_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{22.2.1}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая с распределением $\mathsf{N}_{0;1}$.

Для данных α и n значение $\chi^2_{\alpha;n}$ определяется как решение уравнения $\int\limits_{\chi^2_{\alpha;n}}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$, где $f(x)$ — плотность χ^2_n-распределения (см. рис. 22.2.1).

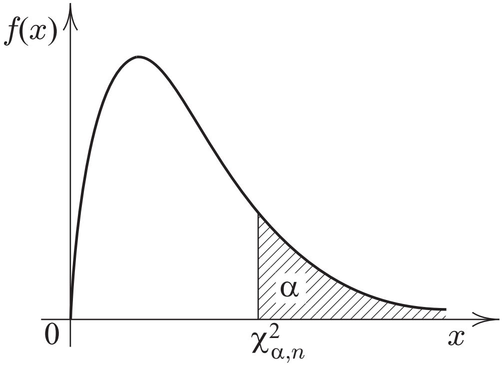


Рис. 22.2.1: К определению $\chi^2_{\alpha;n}$ — верхнего α-предела χ^2_n-распределения, $f(x)$ — плотность χ^2_n-распределения

В таблице 22.2.1 приведены значения $\chi^2_{\alpha;n}$, или, что то же, верхние α-пределы (100α-критические значения) χ^2-распределения.

Таблица 22.2.1. Значения $\chi^2_{\alpha;n}$

	Значения α							
n	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
1	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,64
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,23	7,82	9,35	11,34
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,48	11,14	13,28
5	0,55	0,83	1,14	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,90	2,70	3,32	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,25	3,94	4,86	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	3,82	4,58	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,02	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,92
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,26
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89

Окончание табл. 22.2.1

	Значения α							
n	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
40	22,16	24,43	26,51	29,05	51,80	55,76	59,34	63,69
50	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15
60	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38
70	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4
80	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3
90	61,75	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1
100	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8

22.3 Распределение Стьюдента

Распределением Стьюдента или *t-распределением с n степенями свободы* (коротко *t_n-распределением*) будем называть распределение случайной величины

$$t_n = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}}, \qquad (22.3.1)$$

где ξ и χ_n^2 — независимые случайные величины, ξ распределена $\mathsf{N}_{0;1}$, а χ_n^2 имеет χ^2-распределение с n степенями свободы.

В таблице 22.3.1 приведены значения $t_{\alpha;n}$, или, что то же, верхние α-пределы (100α-критические значения) распределения Стьюдента с n степенями свободы (t_n-распределения).

Для данных α и n значение $t_{\alpha;n}$ определяется как решение уравнения $\int\limits_{t_{\alpha;n}}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$, где $f(x)$ — плотность t_n-распределения, $t_{\alpha;n}$ — число, отсекающее правый "хвост" t_n-распределения, на который приходится "масса" α (см. рис. 22.3.1).

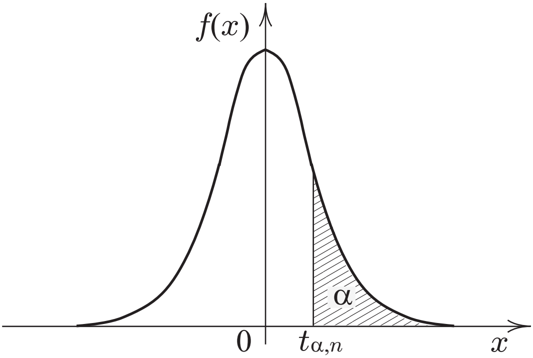


Рис. 22.3.1: К определению $t_{\alpha;n}$ — верхнего α-предела t_n-распределения, $f(x)$ — плотность t_n-распределения

Таблица 22.3.1. Значения $t_{\alpha;n}$

n	Значения α				n	Значения α			
	0,050	0,025	0,010	0,005		0,050	0,025	0,010	0,005
1	6,314	12,706	31,821	63,657	18	1,734	2,101	2,552	2,878
2	2,920	4,303	6,965	9,925	19	1,729	2,093	2,539	2,861
3	2,353	3,182	4,541	5,841	20	1,725	2,086	2,528	2,845
4	2,132	2,776	3,747	4,604	21	1,721	2,080	2,518	2,831
5	2,015	2,571	3,365	4,032	22	1,717	2,074	2,508	2,819
6	1,943	2,447	3,143	3,707	23	1,714	2,069	2,500	2,807
7	1,895	2,365	2,998	3,499	24	1,711	2,064	2,492	2,797
8	1,860	2,306	2,896	3,355	25	1,708	2,060	2,485	2,787
9	1,833	2,262	2,821	3,250	26	1,706	2,056	2,479	2,779
10	1,812	2,228	2,764	3,169	27	1,703	2,052	2,473	2,771
11	1,796	2,201	2,718	3,106	28	1,701	2,048	2,467	2,763
12	1,782	2,179	2,681	3,055	29	1,699	2,045	2,462	2,756
13	1,771	2,160	2,650	3,012	30	1,697	2,042	2,457	2,750
14	1,761	2,145	2,624	2,977	40	1,684	2,021	2,423	2,704
15	1,753	2,131	2,602	2,947	60	1,671	2,000	2,390	2,660
16	1,746	2,120	2,583	2,921	120	1,658	1,980	2,358	2,617
17	1,740	2,110	2,567	2,898	∞	1,645	1,960	2,326	2,576

22.4 Распределение Фишера

Распределением Фишера или F-*распределением с* n, m *степенями свободы* (коротко $\mathsf{F}_{n,m}$-*распределением*) будем называть распределение случайной величины

$$F_{n;m} = \frac{\chi_n^2/n}{\chi_m^2/m}, \tag{22.4.1}$$

где χ_n^2 и χ_m^2 — независимые случайные величины, χ_n^2 имеет распределение Пирсона с n степенями свободы, χ_m^2 — с m степенями свободы.

Для данных α, n, m значение $F_{\alpha;n;m}$ определяется как решение уравнения $\int\limits_{F_{\alpha;n;m}}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$, где $f(x)$ — плотность $\mathsf{F}_{n;m}$-распределения (см. рис. 22.4.1).

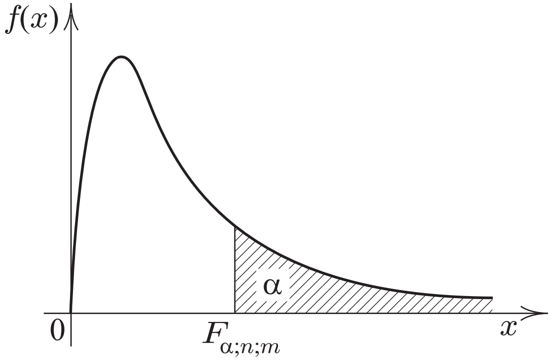


Рис. 22.4.1: К определению $F_{\alpha;n;m}$ — верхнего α-предела $\mathsf{F}_{n;m}$-распределения, $f(x)$ — плотность $\mathsf{F}_{n;m}$-распределения

В таблицах 22.4.1 и 22.4.2 приведены значения $F_{\alpha;n;m}$, или, что то же, верхние α-пределы (100α-критические значения) $\mathsf{F}_{n;m}$-распределения.

Таблица 22.4.1. Значения $F_{\alpha;n;m}$ для $\alpha = 0{,}05$

m	n (число степеней свободы числителя)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93

Таблица 22.4.1 (окончание)

m	n (число степеней свободы числителя)									
	12	14	16	18	20	30	40	50	60	100
3	8,74	8,71	8,69	8,67	8,66	8,62	8,59	8,58	8,57	8,55
4	5,91	5,87	5,84	5,82	5,80	5,75	5,72	5,70	5,69	5,66
5	4,68	4,64	4,60	4,58	4,56	4,50	4,46	4,44	4,43	4,41
6	4,00	3,96	3,92	3,90	3,87	3,81	3,77	3,75	3,74	3,71
7	3,57	3,53	3,49	3,47	3,44	3,38	3,34	3,32	3,30	3,27
8	3,28	3,24	3,20	3,17	3,15	3,08	3,04	3,02	3,01	2,97
9	3,07	3,03	2,99	2,96	2,94	2,86	2,83	2,80	2,79	2,76
10	2,91	2,86	2,83	2,80	2,77	2,70	2,66	2,64	2,62	2,59
11	2,79	2,74	2,70	2,67	2,65	2,57	2,53	2,51	2,49	2,46
12	2,69	2,64	2,60	2,57	2,54	2,47	2,43	2,40	2,38	2,35
13	2,60	2,55	2,51	2,48	2,46	2,38	2,34	2,31	2,30	2,26
14	2,53	2,48	2,44	2,41	2,39	2,31	2,27	2,24	2,22	2,19
15	2,48	2,42	2,38	2,35	2,33	2,25	2,20	2,18	2,16	2,12
16	2,42	2,37	2,33	2,30	2,28	2,19	2,15	2,12	2,11	2,07
17	2,38	2,33	2,29	2,26	2,23	2,15	2,10	2,08	2,06	2,02
18	2,34	2,29	2,25	2,22	2,19	2,11	2,06	2,04	2,02	1,98
19	2,31	2,26	2,21	2,18	2,16	2,07	2,03	2,00	1,98	1,94
20	2,28	2,22	2,18	2,15	2,12	2,04	1,99	1,97	1,95	1,91
22	2,23	2,17	2,13	2,10	2,07	1,98	1,94	1,91	1,89	1,85
24	2,18	2,13	2,09	2,05	2,03	1,94	1,89	1,86	1,84	1,80
26	2,15	2,09	2,05	2,02	1,99	1,90	1,85	1,82	1,80	1,76
28	2,12	2,06	2,02	1,99	1,96	1,87	1,82	1,79	1,77	1,73
30	2,09	2,04	1,99	1,96	1,93	1,84	1,79	1,76	1,74	1,70
40	2,00	1,95	1,90	1,87	1,84	1,74	1,69	1,66	1,64	1,59
50	1,95	1,89	1,85	1,81	1,78	1,69	1,63	1,60	1,58	1,52
60	1,92	1,86	1,82	1,78	1,75	1,65	1,59	1,56	1,53	1,48
100	1,85	1,79	1,75	1,71	1,68	1,57	1,52	1,48	1,45	1,39

Таблица 22.4.2. Значения $F_{\alpha;n;m}$ для $\alpha = 0{,}01$

m	n (число степеней свободы числителя)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,79	2,70
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50

Таблица 22.4.2 (окончание)

m	n (число степеней свободы числителя)									
	12	14	16	18	20	30	40	50	60	100
3	27,1	26,9	26,8	26,8	26,7	26,5	26,4	26,4	26,3	26,2
4	14,4	14,2	14,2	14,1	14,0	13,8	13,7	13,7	13,7	13,6
5	9,89	9,77	9,68	9,61	9,55	9,38	9,29	9,24	9,20	9,13
6	7,72	7,60	7,52	7,45	7,40	7,23	7,14	7,09	7,06	6,99
7	6,47	6,36	6,27	6,21	6,16	5,99	5,91	5,86	5,82	5,75
8	5,67	5,56	5,84	5,41	5,36	5,20	5,12	5,07	5,03	4,96
9	5,11	5,00	4,92	4,86	4,81	4,65	4,57	4,52	4,48	4,42
10	4,71	4,60	4,52	4,46	4,41	4,25	4,17	4,12	4,08	4,01
11	4,40	4,29	4,21	4,15	4,10	3,94	3,86	3,81	3,78	3,71
12	4,16	4,05	3,97	3,91	3,86	3,70	3,62	3,57	3,54	3,47
13	3,96	3,86	3,78	3,72	3,66	3,51	3,43	3,38	3,34	3,27
14	3,80	3,70	3,62	3,56	3,51	3,35	3,27	3,22	3,18	3,11
15	3,67	3,56	3,49	3,42	3,37	3,21	3,13	3,08	3,05	2,98
16	3,55	3,45	3,37	3,31	3,26	3,10	3,02	2,97	2,93	2,86
17	3,46	3,35	3,27	3,21	3,16	3,00	2,92	2,87	2,83	2,76
18	3,37	3,27	3,19	3,13	3,08	2,92	2,84	2,78	2,75	2,68
19	3,30	3,19	3,12	3,05	3,00	2,84	2,76	2,71	2,67	2,60
20	3,23	3,13	3,05	2,99	2,94	2,78	2,69	2,64	2,61	2,54
22	3,12	3,02	2,94	2,88	2,83	2,67	2,58	2,53	2,50	2,42
24	3,03	2,93	2,85	2,79	2,74	2,58	2,49	2,44	2,40	2,33
26	2,96	2,86	2,78	2,72	2,66	2,50	2,42	2,36	2,33	2,25
28	2,90	2,79	2,72	2,65	2,60	2,44	2,35	2,30	2,26	2,19
30	2,84	2,74	2,66	2,60	2,55	2,39	2,30	2,25	2,21	2,13
40	2,66	2,56	2,48	2,42	2,37	2,20	2,11	2,06	2,02	1,94
50	2,56	2,46	2,38	2,32	2,27	2,10	2,01	1,95	1,91	1,82
60	2,50	2,39	2,31	2,25	2,20	2,03	1,94	1,88	1,84	1,75
100	2,37	2,26	2,19	2,12	2,07	1,89	1,80	1,73	1,69	1,60

22.5 Биномиальное распределение

При получении значений $B_{n;p}(i)$ для $p \le 0{,}5$ с помощью табл. 22.5.1 не пользуются двумя крайними правыми столбцами и двумя последними (нижними) строками, а при получении значений $B_{n;p}(i)$ для $p \ge 0{,}5$ не пользуются двумя крайними левыми столбцами и двумя первыми (верхними) строками.

Таблица 22.5.1. Значения $B_{n;p}(i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$

n	i	p = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
	0	0,34868	0,10737	0,02825	0,00605	0,00098	10	
	1	,38742	,26844	,12106	,04031	,00977	9	
	2	,19371	,30199	,23347	,12093	,04395	8	
	3	,05740	,20133	,26683	,21499	,11719	7	
	4	,01116	,08808	,20012	,25082	,20508	6	
10	5	0,00149	0,02642	0,10292	0,20066	0,24609	5	10
	6	,00014	,00551	,03676	,11148	,20508	4	
	7	,00001	,00079	,00900	,04247	,11719	3	
	8		,00007	,00145	,01062	,04395	2	
	9			,00014	,00157	,00977	1	
	10			,00001	,00010	,00098	0	
	0	0,20589	0,03518	0,00475	0,00047	0,00003	15	
	1	,34315	,13194	,03052	,00470	,00046	14	
	2	,26690	,23090	,09156	,02194	,00320	13	
	3	,12851	,25014	,17004	,06339	,01389	12	
15	4	,04284	,18760	,21862	,12678	,04166	11	15
	5	0,01047	0,10318	0,20613	0,18594	0,09164	10	
	6	,00194	,04299	,14724	,20660	,15274	9	
	7	,00028	,01382	,08113	,17708	,19638	8	
	8	,00003	,00345	,03477	,11806	,19638	7	
	9		,00067	,01159	,06121	,15274	6	
		0,9	0,8	0,7	0,6	0,5 = p	i	n

Продолжение табл. 22.5.1

n	i	p = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
15	10		0,00010	0,00298	0,02449	0,09164	5	15
	11		,00001	,00058	,00742	,04166	4	
	12			,00008	,00165	,01389	3	
	13			,00001	,00025	,00320	2	
	14				,00002	,00046	1	
	15					,00003	0	
20	0	0,12158	0,01153	0,00080	0,00004		20	20
	1	,27017	,05765	,00684	,00049	,00002	19	
	2	,28518	,13691	,02785	,00309	,00018	18	
	3	,19012	,20536	,07160	,01235	,00109	17	
	4	,08978	,21820	,13042	,03499	,00462	16	
	5	0,03192	0,17456	0,17886	0,07465	0,01479	15	
	6	,00887	,10910	,19164	,12441	,03696	14	
	7	,00197	,05455	,16426	,16588	,07393	13	
	8	,00036	,02216	,11440	,17971	,12013	12	
	9	,00005	,00739	,06537	,15974	,16018	11	
	10	0,00001	0,00203	0,03082	0,11714	0,17620	10	
	11		,00046	,01201	,07099	,16018	9	
	12		,00009	,00386	,03550	,12013	8	
	13		,00001	,00102	,01456	,07393	7	
	14			,00022	,00485	,03696	6	
	15			0,00004	0,00129	0,01479	5	
	16			,00001	,00027	,00462	4	
	17				,00004	,00109	3	
	18					,00018	2	
	19					,00002	1	
	20						0	
		0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	i	n
		p						

Окончание табл. 22.5.1

n	i	p = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
25	0	0,07179	0,00378	0,00013			25	25
	1	,19942	,02361	,00144	,00005		24	
	2	,26589	,07084	,00739	,00038	,00001	23	
	3	,22650	,13577	,02428	,00194	,00007	22	
	4	,13842	,18668	,05723	,00710	,00038	21	
	5	0,06459	0,19602	0,10302	0,01989	0,00158	20	
	6	,02392	,16335	,14717	,04420	,00528	19	
	7	,00722	,11084	,17119	,07999	,01433	18	
	8	,00180	,06235	,16508	,11998	,03223	17	
	9	,00038	,02944	,13364	,15109	,06089	16	
	10	0,00007	0,01178	0,09164	0,16116	0,09742	15	
	11	,00001	,00401	,05355	,14651	,13284	14	
	12		,00117	,02678	,11395	,15498	13	
	13		,00029	,01148	,07597	,15498	12	
	14		,00006	,00422	,04341	,13284	11	
	15		0,00001	0,00132	0,02122	0,09742	10	
	16			,00035	,00884	,06089	9	
	17			,00008	,00312	,03223	8	
	18			,00002	,00092	,01433	7	
	19				,00023	,00528	6	
	20				0,00005	0,00158	5	
	21				,00001	,00038	4	
	22					,00007	3	
	23					,00001	2	
		p = 0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	i	n

22.6 Распределение Пуассона

Т а б л и ц а 22.6.1. Значения $\mathsf{P}_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

	Значения λ								
k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	,9048	,8187	,7408	,6703	,6065	,5488	,4966	,4493	,4066
1	,0905	,1637	,2222	,2681	,3033	,3293	,3476	,3595	,3659
2	,0045	,0164	,0333	,0536	,0758	,0988	,1217	,1438	,1647
3	,0002	,0011	,0033	,0072	,0126	,0198	,0284	,0383	,0494
4		,0001	,0003	,0007	,0016	,0030	,0050	,0077	,0111
5				,0001	,0002	,0004	,0007	,0012	,0020
6							,0001	,0002	,0003

	Значения λ								
k	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	,3679	,1353	,0498	,0183	, 0067	,0025	,0009	,0003	,0001
1	,3679	,2707	,1494	,0733	, 0337	,0149	,0064	,0027	,0011
2	,1839	,2707	,2240	,1465	, 0842	,0446	,0223	,0107	,0050
3	,0613	,1804	,2240	,1954	, 1404	,0892	,0521	,0286	,0150
4	,0153	,0902	,1680	,1954	, 1755	,1339	,0912	,0573	,0337
5	,0031	,0361	,1008	,1563	, 1755	,1606	,1277	,0916	,0607
6	,0005	,0120	,0504	,1042	, 1462	,1606	,1490	,1221	,0911
7	,0001	,0034	,0216	,0595	, 1044	,1377	,1490	,1396	,1171
8		,0009	,0081	,0298	, 0653	,1033	,1304	,1396	,1318
9		,0002	,0027	,0132	, 0363	,0688	,1014	,1241	,1318
10			,0008	,0053	, 0181	,0413	,0710	,0993	,1186
11			,0002	,0019	, 0082	,0225	,0452	,0722	,0970
12			,0001	,0006	, 0034	,0113	,0264	,0481	,0728
13				,0002	, 0013	,0052	,0142	,0296	,0504
14				,0001	, 0005	,0022	,0071	,0169	,0324
15					, 0002	,0009	,0033	,0090	,0194
16						,0003	,0014	,0045	,0109
17						,0001	,0006	,0021	,0058

22.7 Критерий А. Н. Колмогорова. Критические значения

В таблице 22.7.1 приведены критические значения $\varepsilon_{\alpha;n}$ супремума модуля разности истинной и эмпирической функций распределений.

Значение $\varepsilon_{\alpha;n}$ для данных α и n определяется как минимальное ε, для которого

$$\mathsf{P}\{\sup_x |F(x) - \hat{F}_n(x)| \geq \varepsilon\} \leq \alpha.$$

Таблица 22.7.1. Критические значения $\varepsilon_{\alpha;n}$ для супремума модуля разности истинной и эмпирической функций распределения

n	Значения α			n	Значения α		
	0,05	0,02	0,01		0,05	0,02	0,01
1	0,9750	0,9900	0,9950	25	0,2640	0,2952	0,3166
2	0,8419	0,9000	0,9293	30	0,2417	0,2702	0,2899
3	0,7076	0,7846	0,8290	35	0,2243	0,2507	0,2690
4	0,6239	0,6889	0,7342	40	0,2101	0,2349	0,2520
5	0,5633	0,6272	0,6685	45	0,1984	0,2218	0,2380
6	0,5193	0,5774	0,6166	50	0,1884	0,2107	0,2260
7	0,4834	0,5384	0,5758	55	0,1798	0,2011	0,2157
8	0,4543	0,5065	0,5418	60	0,1723	0,1927	0,2067
9	0,4300	0,4796	0,5133	65	0,1657	0,1853	0,1988
10	0,4093	0,4566	0,4889	70	0,1598	0,1786	0,1917
11	0,3912	0,4367	0,4677	75	0,1544	0,1727	0,1853
12	0,3754	0,4192	0,4491	80	0,1496	0,1673	0,1795
13	0,3614	0,4036	0,4325	85	0,1452	0,1624	0,1742
14	0,3489	0,3897	0,4176	90	0,1412	0,1579	0,1694
15	0,3376	0,3771	0,4042	95	0,1375	0,1537	0,1649
20	0,2941	0,3287	0,3524	100	0,1340	0,1499	0,1608

При $n > 100$ можно считать, что

$$\varepsilon_{0,05;n} = \frac{1,36}{\sqrt{n}}; \quad \varepsilon_{0,01;n} = \frac{1,63}{\sqrt{n}}.$$

22.8 Критерий Вилкоксона. Нижние критические значения

В таблице 22.8.1 приведены нижние критические значения $W_{\alpha;n;m}$ распределения W — суммы рангов выборки меньшего объема.

Значения $W_{\alpha;n;m}$ для данных α (уровня значимости), n и m — объемов выборок (n — объем меньшей выборки, m — большей) определяется как наибольшее целое t, для которого

$$\mathsf{P}\{W \le t\} \le \alpha.$$

При значениях n и m больших приведенных в таблице (а фактически при n и m, удовлетворяющих неравенствам $\min\{n, m\} \ge 6, m + n \ge 20$), можно считать, что $W_{\alpha;n;m}$ равно

$$\frac{1}{2}n(n+m+1) + z_\alpha \sqrt{\frac{1}{12}nm(n+m+1)},$$

где z_α — это α-квантиль нормального распределения с параметрами (0;1) (см. табл. 22.1.1).

Таблица 22.8.1. Нижние критические значения $W_{\alpha;n;m}$ распределения W

Объемы		Значения α				Объемы		Значения α			
n	m	0,005	0,01	0,025	0,05	n	m	0,005	0,01	0,025	0,05
6	6	23	24	26	28	6	18	37	40	45	49
	7	24	25	27	29		19	38	41	46	51
	8	25	27	29	31	7	7	32	34	36	39
	9	26	28	31	33		8	34	35	38	41
	10	27	29	32	35		9	35	37	40	43
	11	28	30	34	37		10	37	39	42	45
	12	30	32	35	38		11	38	40	44	47
	13	31	33	37	40		12	40	42	46	49
	14	32	34	38	42		13	41	44	48	52
	15	33	36	40	44		14	43	45	50	54
	16	34	37	42	46		15	44	47	52	56
	17	36	39	43	47		16	46	49	54	58

Таблица 22.8.1 (окончание)

Объемы n	m	Значения α 0,005	0,01	0,025	0,05	Объемы n	m	Значения α 0,005	0,01	0,025	0,05
7	17	47	51	56	61	9	13	65	68	73	78
	18	49	52	58	63		14	67	71	76	81
8	8	43	45	49	51		15	69	73	79	84
	9	45	47	51	54		16	72	76	82	87
	10	47	49	53	56	10	10	71	74	78	82
	11	49	51	55	59		11	73	77	81	86
	12	51	53	58	62		12	76	79	84	89
	13	53	56	60	64		13	79	82	88	92
	14	54	58	62	67		14	81	85	91	96
	15	56	60	65	69		15	84	88	94	99
	16	58	62	67	72	11	11	87	91	96	100
	17	60	64	70	75		12	90	94	99	104
9	9	56	59	62	66		13	93	97	103	108
	10	58	61	65	69		14	96	100	106	112
	11	61	63	68	72	12	12	105	109	115	120
	12	63	66	71	75		13	109	113	119	125

22.9 Критерий знаков. Границы критической области

В таблице 22.9.1 приведены левая $(n - m_{\alpha;n})$ (левый столбец) и правая $m_{\alpha;n}$ (правый столбец) границы критической области критерия знаков (области отклонения гипотезы H_0: $\theta = 0$).

Значения $m_{\alpha;n}$ для данных α (уровня значимости) и n (числа отличных от нуля разностей) определяется как минимальное целое m, для которого $\mathsf{P}\{\mu > m\} \le \alpha$, где μ — биномиально распределенная случайная величина с параметрами n и $1/2$.

Критические области критерия знаков:

$(m_{\alpha;n}; n]$ для односторонней альтернативы $\theta > 0$;

$[0; n - m_{\alpha;n})$ для односторонней альтернативы $\theta < 0$;

$[0; n - m_{\alpha;n}) \cup (m_{\alpha;n}; n]$ для двусторонней альтернативы $\theta < 0$ или $\theta > 0$;

Уровень значимости одностороннего критерия не превышает α, двустороннего — 2α.

Таблица 22.9.1. Границы критических областей критерия знаков

	Значения α							Значения α					
n	0,025		0,010		0,005		n	0,025		0,010		0,005	
5	0	5	0	5	0	5	25	8	17	7	18	6	19
6	1	5	0	6	0	6	26	8	18	7	19	7	19
7	1	6	1	6	0	7	27	8	19	8	19	7	20
8	1	7	1	7	1	7	28	9	19	8	20	7	21
9	2	7	1	8	1	8	29	9	20	8	21	8	21
10	2	8	1	9	1	9	30	10	20	9	21	8	22
11	2	9	2	9	1	10	31	10	21	9	22	8	23
12	3	9	2	10	2	10	32	10	22	9	23	9	23
13	3	10	2	11	2	11	33	11	22	10	23	9	24
14	3	11	3	11	2	12	34	11	23	10	24	10	24
15	4	11	3	12	3	12	35	12	23	11	24	10	25
16	4	12	3	13	3	13	36	12	24	11	25	10	26
17	5	12	4	13	3	14	37	13	24	11	26	11	26
18	5	13	4	14	4	14	38	13	25	12	26	11	27
19	5	14	5	14	4	15	39	13	26	12	27	12	27
20	6	14	5	15	4	16	40	14	26	13	27	12	28
21	6	15	5	16	5	16	41	14	27	13	28	12	29
22	6	16	6	16	5	17	42	15	27	14	28	13	29
23	7	16	6	17	5	18	43	15	28	14	29	13	30
24	7	17	6	18	6	18	44	16	28	14	30	14	30

Таблица 22.9.1 (окончание)

n	Значения α						n	Значения α					
	0,025		0,010		0,005			0,025		0,010		0,005	
45	16	29	15	30	14	31	73	28	45	27	46	26	47
46	16	30	15	31	14	32	74	29	45	27	47	26	48
47	17	30	16	32	15	32	75	29	46	27	48	26	49
48	17	31	16	32	15	33	76	29	47	28	48	27	49
49	18	31	16	33	16	33	77	30	47	28	49	27	50
50	18	32	17	33	16	34	78	30	48	29	49	28	50
51	19	32	17	34	16	35	79	31	48	29	50	28	51
52	19	33	18	34	17	35	80	31	49	30	50	29	51
53	19	34	18	35	17	36	81	32	49	30	51	29	52
54	20	34	19	35	18	36	82	32	50	31	51	29	53
55	20	35	19	36	18	37	83	33	50	31	52	30	53
56	21	35	19	37	18	38	84	33	51	31	53	30	54
57	21	36	20	37	19	38	85	33	52	32	53	31	54
58	22	36	20	38	19	39	86	34	52	32	54	31	55
59	22	37	21	38	20	39	87	34	53	33	54	32	55
60	22	38	21	39	20	40	88	35	53	33	55	32	56
61	23	38	21	40	21	40	89	35	54	34	55	32	57
62	23	39	22	40	21	41	90	36	54	34	56	33	57
63	24	39	22	41	21	42	91	36	55	34	57	33	58
64	24	40	23	41	22	42	92	37	55	35	57	34	58
65	25	40	23	42	22	43	93	37	56	35	58	34	59
66	25	41	24	42	23	43	94	38	56	36	58	35	59
67	26	41	24	43	23	44	95	38	57	36	59	35	60
68	26	42	24	44	23	45	96	38	58	37	59	35	61
69	26	43	25	44	24	45	97	39	58	37	60	36	61
70	27	43	25	45	24	46	98	39	59	38	60	36	62
71	27	44	26	45	25	46	99	40	59	38	61	37	62
72	28	44	26	46	25	47	100	40	60	38	62	37	63

22.10 Равномерно распределенные случайные числа

Приведенные в таблице 22.10.1 цифры можно рассматривать как реализации независимых и одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ с одной и той же вероятностью 0,1.

Табулированные цифры сгруппированы по две. Пары можно рассматривать как реализации независимых и одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения от 00 до 99 с одной и той же вероятностью 0,01.

Аналогичные утверждения можно сформулировать, если цифры группировать по три, четыре ...

Рассмотрим группы из k цифр как целые числа. Перемножим каждое из них на 10^{-k}. Полученные числа можно считать реализациями независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[0; 1]$.

Таблица 22.10.1. Равномерно распределенные случайные числа

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68

Таблица 22.10.1 (продолжение)

65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63
04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35
00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92
46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47
32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27

Т а б л и ц а 22.10.1 (продолжение)

74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15
09 18 82 00 97	32 82 53 95 27	04 22 08 63 04	83 38 98 73 74
90 04 58 54 97	51 98 15 06 54	94 93 88 19 97	91 87 07 61 50
73 18 95 02 07	47 67 72 62 69	62 29 06 44 64	27 12 46 70 18
75 76 87 64 90	20 97 18 17 49	90 42 91 22 72	95 37 50 58 71
54 01 64 40 56	66 28 13 10 03	00 68 22 73 98	20 71 45 32 95
08 35 86 99 10	78 54 24 27 85	13 66 15 88 73	04 61 89 75 53
28 30 60 32 64	81 33 31 05 91	40 51 00 78 93	32 60 46 04 75
53 84 08 62 33	81 59 41 36 28	51 21 59 02 90	28 46 66 87 95
91 75 75 37 41	61 61 36 22 69	50 26 39 02 12	55 78 17 65 14
89 41 59 26 94	00 39 75 83 91	12 60 71 76 46	48 94 97 23 06
77 51 30 38 20	86 83 42 99 01	68 41 48 27 74	51 90 81 39 80
19 50 23 71 74	69 97 92 02 88	55 21 02 97 73	74 28 77 52 51
21 81 85 93 13	93 27 88 17 57	05 68 67 31 56	07 08 28 50 46
51 47 46 64 99	68 10 72 36 21	94 04 99 13 45	42 83 60 91 91
99 55 96 83 31	62 53 52 41 70	69 77 71 28 30	74 81 97 81 42
33 71 34 80 07	93 58 47 28 69	51 92 66 47 21	58 30 32 98 22
85 27 48 68 93	11 30 32 92 70	28 83 43 41 37	73 51 59 04 00
84 13 38 96 40	44 03 55 21 66	73 85 27 00 91	61 22 26 05 61
56 73 21 62 34	17 39 59 61 31	10 12 39 16 22	85 49 65 75 60
65 13 85 68 06	87 64 88 52 61	34 31 36 58 61	45 87 52 10 69
38 00 10 21 76	81 71 91 17 11	71 60 29 29 37	74 21 96 40 49
37 40 29 63 97	01 30 47 75 86	56 27 11 00 86	47 32 46 26 05
97 12 54 03 48	87 08 33 14 17	21 81 53 92 50	75 23 76 20 47
21 82 64 11 34	47 14 33 40 72	64 63 88 59 02	49 13 90 64 41
73 13 54 27 42	95 71 90 90 35	85 79 47 42 96	08 78 98 81 56

Таблица 22.10.1 (окончание)

07 63 87 79 29	03 06 11 80 72	96 20 74 41 56	23 82 19 95 38
60 52 88 34 41	07 95 41 98 14	59 17 52 06 95	05 53 35 21 39
83 59 63 56 55	06 95 89 29 83	05 12 80 97 19	77 43 35 37 83
10 85 06 27 46	99 59 91 05 07	13 49 90 63 19	53 07 57 18 39
39 82 09 89 52	43 62 26 31 47	64 42 18 08 14	43 80 00 93 51
59 58 00 64 78	75 56 97 88 00	88 83 55 44 86	23 76 80 61 56
38 50 80 73 41	23 79 34 87 63	90 82 29 70 22	17 71 90 42 07
30 69 27 06 68	94 68 81 61 27	56 19 68 00 91	82 06 76 34 00
65 44 39 56 59	18 28 82 74 37	49 63 22 40 41	08 33 76 56 76
27 26 75 02 64	13 19 27 22 94	07 47 74 46 06	17 98 54 89 11
91 30 70 69 91	19 07 22 42 10	36 69 95 37 28	28 82 53 57 93
68 43 49 46 88	84 47 31 36 22	62 12 69 84 08	12 84 38 25 90
48 90 81 58 77	54 74 52 45 91	35 70 00 47 54	83 82 45 26 92
06 91 34 51 97	42 67 27 86 01	11 88 30 95 28	63 01 19 89 01
10 45 51 60 19	14 21 03 37 12	91 34 23 78 21	88 32 58 08 51
12 88 39 73 43	65 02 76 11 84	04 28 50 13 92	17 97 41 50 77
21 77 83 09 76	38 80 73 69 61	31 64 94 20 96	63 28 10 20 23
19 52 35 95 15	65 12 25 96 59	86 28 36 82 58	69 57 21 37 98
67 24 55 26 70	35 58 31 65 63	79 24 68 66 86	76 46 33 42 22
60 58 44 73 77	07 50 03 79 92	45 13 42 65 29	26 76 08 36 37
53 85 34 13 77	36 06 69 48 50	58 83 87 38 59	49 36 47 33 31
24 63 73 87 36	74 38 48 93 42	52 62 30 79 92	12 36 91 86 01
83 08 01 24 51	38 99 22 28 15	07 75 95 17 77	97 37 72 75 85
15 44 42 43 34	36 15 19 90 73	27 49 37 09 39	85 13 03 25 52
60 79 01 81 57	57 17 86 57 62	11 16 17 85 76	45 81 95 29 79
03 99 11 04 61	93 71 61 68 94	66 08 32 46 53	84 60 95 82 32
38 55 59 55 54	32 88 65 97 80	08 35 56 08 60	29 73 54 77 62
17 54 67 37 04	92 05 24 62 15	55 12 12 92 81	59 07 60 79 36
32 64 35 28 61	95 81 90 68 31	00 91 19 89 36	76 35 59 37 79
69 57 26 87 77	39 51 03 59 05	14 06 04 06 19	29 54 96 96 16

Литература

[1] *Большев Л. Н.* Таблицы математической статистики/ Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов — 3-е изд. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

[2] *Ван дер Варден Б. Л.* Математическая статистика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 434 с.

[3] *Гихман И. И.* Теория вероятностей и математическая статистика/ И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко — К.: Вища шк., 1979. — 320 с.

[4] *Джонсон Н.* Статистика и планирование эксперимента в науке и технике. Методы обработки данных/ Н. Джонсон, Ф. Лион — М.: Наука, 1980. — 600 с.

[5] *Емельянов Г. В.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике/ Г. В. Емельянов, В. П. Скитович — Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1967. — 332 с.

[6] *Зубков А. М.* Сборник задач по теории вероятностей/ А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. В. Чистяков — М.: Наука, 1989. — 320 с.

[7] *Крамер Г.* Математические методы статистики. — 2-е изд., перераб. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

[8] *Кендалл М. Дж.* Теория распределений/ М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт — М.: Наука, 1966. — 587 с.

[9] *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Изд-во Москов. ун-та, 1963. — 155 с.

[10] *Прохоров А. В.* Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы/ А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков — М.: Наука, 1986. — 328 с.

[11] *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей. — М.: Изд-во Москов. ун-та, 1972. — 230 с.

[12] *Турчин В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: — Днепр: Изд-во ЛИРА, 2018. — 752 с.

[13] *Турчин В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: — Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского ун-та, 2008. — 656 с.

[14] *Турчин В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: Основные понятия, примеры, задачи — Днепропетровск: Изд-во ИМА-ПРЕСС, 2012. — 576 с.

[15] *Турчин В. Н.* Марковские цепи: Основные понятия, примеры, задачи/ В. Н. Турчин, Е. В. Турчин, — Днепр: “ЛизуновПресс”, 2017. — 212 с.

[16] *Дороговцев А. Я.* Теорія ймовірностей. Зб. задач/ А. Я. Дороговцев, Д. С. Сільвестров, А. В. Скороход, М. Й. Ядренко — К.: Вища шк., 1976. — 384 с.

[17] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т.— М.: Мир, 1984. — Т. 1. — 527 с.; Т. 2. — 751 с.

[18] *Хальд А.* Математическая статистика с техническими приложениями. — М.: ИЛ, 1956. — 664 с.

[19] *Ядренко М. Й.* Дискретна математика. — К.: ВПЦ “Експрес”, 2003. — 244 с.

[20] *David F. N.* Elementary Statistical Exercises, David F. N., Pearson E. S. — Cambridge: University Press, 1961 — 241 p.

Оглавление

Навчальне видання

ВАЛЕРІЙ МИКОЛАЙОВИЧ ТУРЧИН

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Основні поняття, приклади і задачі

Підручник для студентів вищих навчальних закладів

(Російською мовою)

Редактор Козаченко Ю.В.
Художник Ткаченко К.Д.
Коректор Турчин Є.В.
Оригінал-макет Турчин В.М.

Підписано до друку 20.06.2019 р. Формат $84\times108\frac{1}{32}$.
Друк офсетний. Папір офсетний.
Гарнітура Computer modern.
Ум. др. арк. 34,02.
Наклад 500 прим. 1-й запуск — 35 прим.
Зам. 193

Видавництво ПП "Ліра ЛТД".
49107, м. Дніпро, вул. Наукова, 5.
Свідоцтво про внесення до Держреєстру
ДК № 6042 від 26.02.2018 р.

ТУРЧИН
Валерий Николаевич

Автор 125 научных и научно-методических работ, 17 учебников и учебных пособий по теории вероятностей и математической статистике. Заведующий кафедрой статистики и теории вероятностей Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара.