

Е. Н. АКСЕНОВА

# ОБЩАЯ ФИЗИКА. ОПТИКА (ГЛАВЫ КУРСА)

*Учебное пособие*

Издание второе, исправленное



ЛАНЬ®  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР  
2018

ББК 22.34я73

А 42

**А 42** Общая физика. Оптика (главы курса): Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 76 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-2911-0**

Этот курс лекций по общей физике является результатом многолетней преподавательской деятельности доцента, кандидата физико-математических наук Е. Н. Аксеновой при работе со студентами МИФИ. Он создан по просьбе и при технической поддержке самих студентов. Отличительной особенностью этого курса является его интерактивный характер, заключающийся в том, что материал каждой темы в процессе его изложения содержит четко сформулированные качественные вопросы. Они помогают понять физические нюансы изучаемого материала и выработать личное суждение по данному вопросу, а затем сравнить его с приведенным далее правильным ответом. Кроме того, курс ставит своей целью научить читателя пользоваться изложенным материалом применительно к решению задач, построив мостик между «узнал, понял» и «могу использовать, решать». Поэтому каждый раздел содержит параграф, посвященный методике решения задач с последовательным изложением программы практических действий.

Пособие предназначено для студентов вузов всех форм обучения и направлений подготовки, входящих в УГС: «Физика и астрономия», «Электроника, радиотехника и системы связи», «Электро- и теплотехника», «Физико-технические науки и технологии», «Машиностроение», «Технологии материалов», «Авиационная и ракетно-космическая техника» и др.

ББК 22.34я73

**Обложка**  
*Е. А. ВЛАСОВА*

© Издательство «Лань», 2018  
© Е. Н. Аксенова, текст,  
макет, иллюстрации, 2018  
© Издательство «Лань»,  
обложка, 2018

## Глава I. Фотометрия

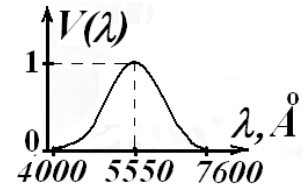
Фотометрия – физика видимого света ( $\lambda = 0,4 \div 0,76 \text{ мкм}$ ), изучаемого с точки зрения нашего человеческого восприятия.

1. Пусть  $\phi(\lambda) = \frac{d\Phi_\circ}{d\lambda}$  – функция распределения плотности потока энергии по длинам волн.

Чувствительность человеческого глаза к световой энергии (интенсивности излучения)  $V(\lambda)$  зависит от длины волны.

**Поток световой энергии** – лучистый поток, оцениваемый по зрительному ощущению,  $d\Phi = d\Phi_\circ \cdot V(\lambda)$ .

$V(\lambda)$  – относительная спектральная чувствительность глаза по длинам волн называется функцией видности. Она представлена на рисунке.



Функция видности  $V(\lambda)$  определяется как отношение зрительно воспринимаемой интенсивности  $d\Phi(\lambda)$  света с данной длиной волны  $\lambda$  к интенсивности

$d\Phi(\lambda = 5550 \text{ Å})$  при той же энергетической интенсивности:

$$V(\lambda) = \frac{d\Phi(\lambda)}{d\Phi(\lambda = 5550)}$$

$[\Phi] = \text{люмен (лм)}$  – световой поток измеряется в люменах, в то время как энергетический поток измеряется в ваттах  $[\Phi_\circ] = \text{Ватт (Вт)}$ ;

$$d\Phi(\text{лм}) = 625 \frac{\text{лм}}{\text{Вт}} \cdot d\Phi_\circ \cdot V(\lambda) = 625 \frac{\text{лм}}{\text{Вт}} \cdot V(\lambda) \cdot \phi(\lambda) \cdot d\lambda.$$

При  $\lambda = 5550 \text{ Å}$  поток световой энергии  $\Phi = 1 \text{ лм}$  соответствует энергетическому потоку  $\Phi_{\text{эн}} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} \Rightarrow 1 \text{ Вт} = 625 \text{ лм}$ .

Световой поток  $\Phi = 1 \text{ лм}$  соответствует  $\Phi_{\text{эн}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-3}}{V(\lambda)} \text{ Вт}$  для света длиной волны  $\lambda$ .

2. **Сила света**  $I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$  – поток излучения точечного источника в единицу телесного угла.

Если  $I = \text{const}(\theta)$ , то есть источник изотропный, то для него  $I = \frac{\Phi}{4\pi}$ .

$[I] = \text{кандела (кд)}$ ;

$1 \text{ лм} = 1 \text{ кд} \cdot 1 \text{ ср}$ .

$1 \text{ лм}$  – световой поток, излучаемый изотропным источником с силой света в  $1 \text{ кд}$  в телесный угол  $1 \text{ стерадиан (1 ср)}$ .

Для изотропного квазимонохроматического источника с  $\Delta\lambda \ll \lambda$   $\Phi = V(\lambda) \cdot \Phi_\circ \Rightarrow I_{\text{св}} = I_\circ \cdot r^2 V(\lambda)$ ,  $I_{\text{св}}$  – сила света,  $I_\circ$  – интенсивность.

Для протяженного источника говорят о силе света элемента поверхности  $dS$ :

$I = \frac{d\Phi}{d\Omega dS}$  – это характеристика источника.





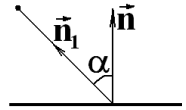
3. **Освещенность**  $E = \frac{d\Phi_{nao}}{dS}$  – характеристика поверхности.

$[E] = \text{люкс(лк)} \rightarrow 1 \text{ лк}$  – освещенность, создаваемая потоком в 1 лм, равномерно распределенным по площади  $S = 1 \text{ м}^2$ .

Нормальная освещенность – 50 лк (в белые ночи освещенность  $\sim 1 \text{ лк}$ ).

Освещенность от изотропного точечного источника:

$$E = \frac{d\Phi_{nao}}{dS} = \frac{Id\Omega}{dS} = \frac{I \cos \alpha}{r^2}$$



$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}; \alpha = \left( \vec{n} \wedge \vec{n}_1 \right), \text{ где } \vec{n} \text{ – нормаль к поверхности, } \vec{n}_1 \text{ –}$$

направление на источник,  $\alpha$  – угол, под которым свет падает на освещаемую поверхность.

4. **Светимость**  $M$  – световой поток, испускаемый единицей поверхности наружу во всех направлениях:  $M = \frac{d\Phi_{исп}}{dS}$ . Светимость – характеристика источника.

Единицей светимости является люмен на квадратный метр  $[M] = \frac{\text{лм}}{\text{м}^2}$ .

Существует светимость за счет отражения с коэффициентом отражения  $\rho$ :

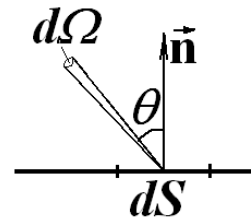
$$M = \frac{\rho d\Phi_{nao}}{dS} = \rho E.$$

5. **Яркость**  $L = \frac{d\Phi_{исп}}{d\Omega dS \cos \theta}$  – характеристика излучения в данном направлении.

Яркость измеряется в канделах на квадратный метр:

$$[L] = \frac{\text{кд}}{\text{м}^2} = \text{люкс(лк)} = \frac{\text{лм}}{\text{м}^2};$$

$$L = \frac{dM}{d\Omega \cos \theta} = \frac{I}{\Delta S \cos \theta}.$$



Если яркость излучения источника не зависит от направления излучения  $L = \text{const}(\theta, \phi)$ , то такой источник называется ламбертовским источником  $\Rightarrow$

Для ламбертовского ( $\equiv$  косинусного) источника  $I = L \cos \theta \cdot \Delta S$ .



Пример.

Найти полный поток и светимость для ламбертовского источника яркости  $L$ .

$$\Phi = \int L \cdot d\Omega \cdot \Delta S \cos \theta = \Delta S \cdot L \int \sin \theta \cos \theta \cdot d\theta \cdot d\phi = 2\pi \frac{1}{2} L \cdot \Delta S \Rightarrow$$

$$M = \frac{\Phi}{\Delta S} = \pi L \text{ – для ламбертовского источника.}$$

## Глава II. Геометрическая оптика

### 1. Принцип Ферма

*Геометрическая оптика (ГО) – раздел физики, в котором пренебрегают наличием колебаний в волне ( $\lambda \rightarrow 0$ ), формулируя законы на языке геометрии и считая, что свет распространяется вдоль некоторых линий, называемых лучами  $\Rightarrow$  отсюда название – геометрическая или лучевая оптика.*

Напомню общий порядок организации науки:

1. Наблюдаем явление.
2. Проводя измерения, получаем числа.
3. Выводим закон, связывающий эти числа.
4. Находим способ рассуждений (принцип), при котором закон становится очевидным.

В поисках и отыскании принципов и заключается истинное величие науки. Философский аспект изучаемых нами физических явлений — наличие поразительной гармонии мира, законы движения которого изучает физика, — является свидетельством того, что если наше мироустройство и возникло в результате большого взрыва, то за этим взрывом явно стоял Творец. Практика показывает, что взрыв – сила разрушительная, а созидательная она бывает только при глубоко продуманной его организации. Я обращаю ваше внимание на то, что явления нашего материального мира и физика как наука, их изучающая, скорее подтверждают, чем опровергают существование Творца. На волне атеистической пропаганды бытовало мнение, что занятие наукой не совместимо с верой в Бога. Более того, в 60-70-х годах XX века в результате покорения человеком космоса были популярны рассуждения о том, что космонавты не видели Бога и это доказывает Его отсутствие. Разумеется, подобное умозаключение относится к разряду утверждений вульгарного материализма, на него тогда же блестяще возразил великий советский нейрохирург В.Ф. Войно-Ясенецкий: «Я много раз делал операцию по трепанации черепа, но ни разу не находил ни в одной голове ума». («Трепанация черепа — хирургическая операция вскрытия полости черепа для обеспечения доступа к внутричерепным образованиям или с целью снижения внутричерепного давления». Мед. энциклопедия.) Интересно, что ряд замечательных открытий в физике был сделан великими учеными именно вследствие, а не вопреки их вере в Бога. Блестящим примером является закон всемирного тяготения Исаака Ньютона. Другим таким примером является общий принцип, наглядно объясняющий закон поведения света. Его сформулировал Пьер Ферма около 1650 г.

*Это принцип Ферма экстремального времени:*

*из всех возможных путей, соединяющих две точки, свет выбирает путь, прохождение которого требует экстремального (минимального, максимального или стационарного) времени.*

Ферма рассуждал примерно так: «Свет выбирает путь с минимальным временем из теологических соображений, так как совершенно созданная природа действует целенаправленно с минимальной затратой средств».

$$\tau = \int_1^2 \frac{dS}{v} = \int_1^2 \frac{dS \cdot n}{c} = \frac{1}{c} \int_1^2 n dS \quad - \text{ время прохождения луча от точки 1 до точки 2.}$$

$$L = \int_1^2 n dS \quad - \text{ оптическая длина пути.}$$

*Другая формулировка принципа Ферма:*

*свет распространяется по пути с экстремальной оптической длиной  $\delta \left( \int_1^2 n dS \right) = 0$ .*

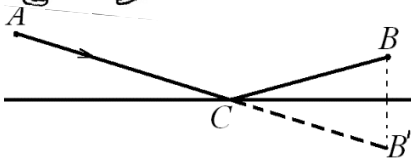


$$\delta \left( \int_1^2 n dS \right) = 0 \leftarrow \text{вариация (не путать с изменением фазы волны } \delta = \frac{2\pi L}{\lambda_0} = \frac{2\pi l}{\lambda},$$

где  $\lambda_0$  – длина волны в вакууме,  $L$  – оптическая длина пути,  $l$  – геометрическая длина пути,  $\lambda$  – длина волны в среде).

**Вопрос.** Как же удается свету выбрать свой экстремальный путь? Вынюхивает он, что ли, соседние пути и сравнивает их?

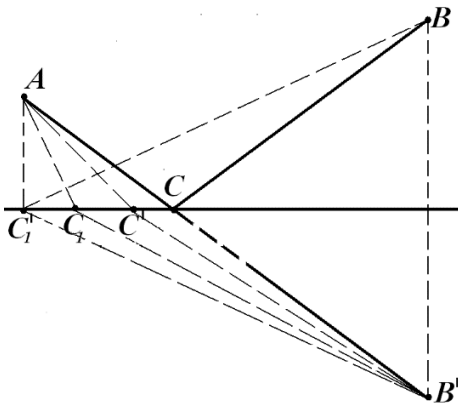
**Ответ.** В некотором смысле так и происходит, но в рамках ГО эту особенность света понять нельзя, так как в ГО  $\lambda \approx 0$ . В основе квантово-механической интерпретации идеи принципа Ферма лежит представление о свете как о потоке частиц – фотонов. Пусть нас интересует попадание света из точки  $A$  в точку  $B$ . Из геометрии ясно, что минимальный путь  $S_{\min} = ACB$ .



Вероятность попадания фотонов, летящих по различным путям из точки  $A$  в точку  $B \sim ae^{i\theta}$ , где  $\theta$  – угол поворота

векторов амплитуды волны  $\vec{E}, \vec{H}$  относительно начальной ориентации.

$\theta \sim \tau$  – времени прохождения пути. Если сложить все вероятности, то почти весь вклад в эту сумму вносят фотоны, летящие по пути, близкому к точке  $C$ , так как вблизи экстремума любая функция меняется медленно (экстремум — это и есть точка, где производная функции, то есть скорость её изменения, равна нулю). Остальные же фотоны, летящие по другим путям, будут компенсировать друг друга за счет быстрого изменения фазы  $\theta$ .



Ещё раз на языке электромагнитных волн: смысл экстремального пути в том, что равные смещения  $\Delta = CC' = C_1C'_1$  приводят в случае экстремального пути к меньшему изменению оптической длины пути света, чем в случае отражения от любой другой точки, что очевидно из рассмотрения  $\Delta AC'B'$  и  $\Delta AC_1B'$  и  $\Delta AC'_1B'$ . При этом все отражающиеся вблизи точки  $C$  фотоны имеют одну фазу колебаний, а отраженные вдали – разные.

*Принцип Ферма включает в себе три из четырех законов геометрической оптики. Законы геометрической оптики.*

1. **Закон прямолинейного распространения света:**  
в однородной среде свет распространяется прямолинейно.

2. **Закон независимости световых лучей:**

лучи при пересечении не взаимодействуют друг с другом (нарушается при высокой интенсивности).

3. **Закон отражения:**

$\theta_{\text{пад}} = \theta_{\text{отр}}$  – угол падения равен углу отражения.

4. **Закон преломления:**

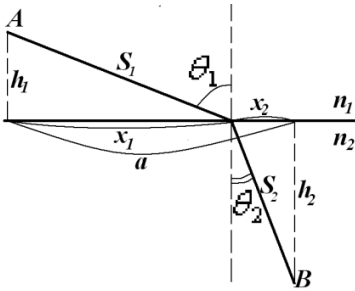
$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ .

Законы 1, 3, 4 следуют из принципа Ферма.

Законы прямолинейного распространения и отражения очевидны из геометрических соображений.



Докажем закон преломления из принципа Ферма.



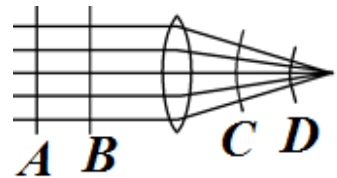
$$L = n_1 S_1 + n_2 S_2 = n_1 \sqrt{h_1^2 + x_1^2} + n_2 \sqrt{x_2^2 + h_2^2} \underset{x_1+x_2=a}{=} n_1 \sqrt{h_1^2 + x_1^2} + n_2 \sqrt{h_2^2 + (a-x_1)^2} ;$$

$$\frac{dL}{dx_1} = 0 = \frac{n_1}{2} \frac{2x_1}{\sqrt{h_1^2 + x_1^2}} + \frac{-2n_2(a-x_1)}{2\sqrt{h_2^2 + (a-x_1)^2}} \Rightarrow$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 .$$

**Опред.** Если оптические длины различных путей оказываются одинаковыми, то говорят о стационарных путях, а соответствующие лучи называются таухронными. Таухронными являются отрезки лучей, заключенные между волновыми поверхностями.

Пусть имеем линзу, изображенную на рисунке. *A, B, C, D* – волновые поверхности, между ними заключены таухронные отрезки лучей, так как эти пути требуют одинакового времени для прохождения.



## 2. Кардинальные точки и плоскости центрированной оптической системы

**Опред.** Совокупность лучей есть пучок. Если лучи пересекаются в одной точке, то пучок гомоцентрический. У него сферические волновые поверхности. Частный случай гомоцентрического пучка – пучок параллельных лучей. Его волновые поверхности – плоскости.

Оптическая система *ОС* — система, которая осуществляет преобразование световых пучков.

Если *ОС* не нарушает гомоцентричности пучка, то лучи, вышедшие из точки *P*, должны пересечься в одной точке *P'*. Эта точка *P'* называется изображением точки *P*.

*ОС* – системы, которые служат для преобразования световых пучков и получения изображения предметов.

Изображение действительное, если в точке *P'* пересекаются лучи.

Изображение мнимое, если в точке *P'* пересекаются продолжения лучей, проведенные в направлении, обратном направлению распространения.

Точки *P* и *P'* называются сопряженными.

Сопряженным к данному лучу является сам луч после прохождения оптической системы, если изображение действительное, или продолжение луча, вышедшее в обратную сторону, если изображение мнимое.

*ОС* – совокупность отражающих и преломляющих поверхностей, отделяющих друг от друга оптически однородные среды.

*ОС*, образованная сферическими (в частности – плоскими) поверхностями, является центрированной, если центры всех поверхностей лежат на одной прямой, называемой оптической осью системы.

То, что отображается, составляет пространство предметов.

То, во что отображается, составляет пространство изображений.

**Характеристики оптической системы:**

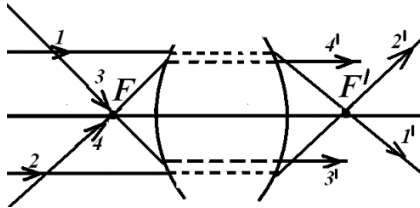


**1) Фокальные плоскости и фокусы.**

Плоскость в пространстве изображений, сопряженная с бесконечной плоскостью в пространстве предметов, называется задней фокальной плоскостью.

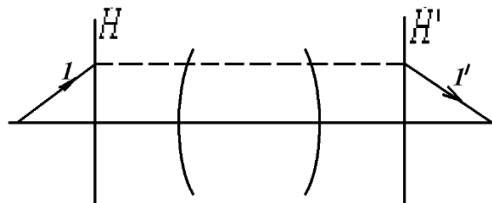
Плоскость в пространстве предметов, сопряженная с бесконечной плоскостью в пространстве изображений, называется передней фокальной плоскостью.

Точки пересечения фокальных плоскостей с осью  $OC$  называются фокусами.



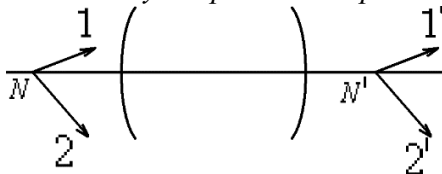
**2) Главные плоскости и точки.**

Плоскости, которые отображаются друг в друга с линейным увеличением  $\beta = 1$ , называются главными.



**3) Узловые точки (узлы).**

Узлами называются точки, лежащие на оптической оси и обладающие следующим свойством: сопряженные лучи проходят через них под одинаковыми углами.



Расстояние между узлами  $NN'$  равно расстоянию между главными плоскостями  $HH'$ :  $NN' = HH'$ .

Если показатель преломления  $n_1$  среды до  $OC$  равен показателю преломления  $n_2$  среды за  $OC$ , то  $N \equiv H$  и  $N' \equiv H'$ , то есть узлы совпадают с главными точками.

Для любой тонкой линзы обе ее главные плоскости совпадают с самой линзой, поэтому в случае равенства показателей преломления среды до и после линзы (и только в этом случае) луч, идущий через центр линзы, не преломляется. Это объясняется тем, что в этом случае узловые точки совпадают с центром линзы. Если показатели преломления среды до и после линзы различные, узловые точки, совпадая между собой в одной из точек оптической оси линзы, не совпадают с центром линзы.



### 3. Принципы построения изображений

1. Лучи следует пускать из пространства предметов в пространство изображений (то есть слева направо).

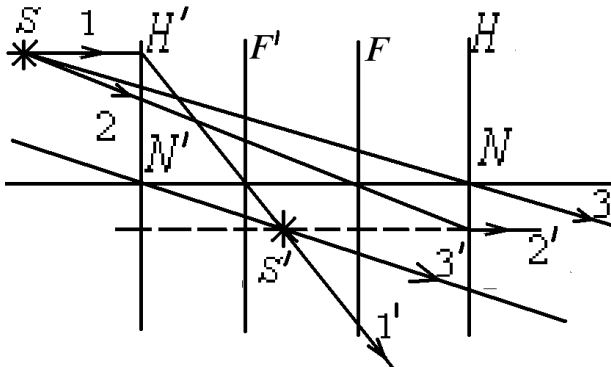
2. Лучи, параллельные оптической оси, преломляясь на плоскости  $H'$ , проходят через фокус  $F'$ .

3. Лучи, проходящие через фокус  $F$ , становятся параллельными оптической оси, преломляясь на главной плоскости  $H$ .

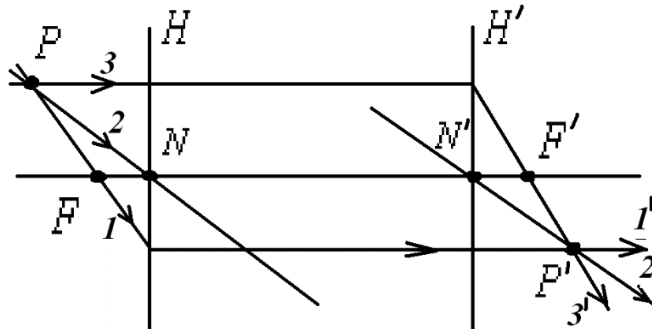
4. Лучи, проходящие через узловые точки, параллельны друг другу. Пуская лучи через узловые точки (независимо от их расположения!), первый луч следует пускать через предмет и узловую точку  $N$  и получать параллельный ему луч, идущий через узловую точку  $N'$ .

#### Примеры.

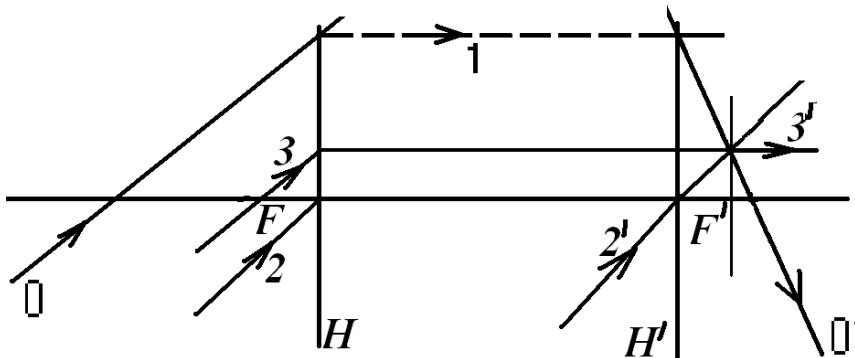
1) Построение изображения точки  $S$ , зная  $F, F', H, H'$  и  $n_1 = n_2$ .



2) Найти  $H', H, F'$ , зная  $P, P', F$  и  $n_1 = n_2$ .



3) Найти  $H', F', F$ , зная  $H$ , ход луча  $O$  и сопряженного ему луча  $O'$ .



## 4. Формулы центрированной оптической системы

### 1. Оптическая сила.

**Опред.** Расстояние от передней главной плоскости  $H$  до переднего фокуса  $F$  называется передним фокусным расстоянием системы  $f$ .

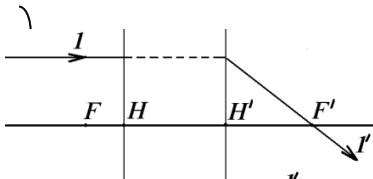
Расстояние от задней главной плоскости  $H'$  до заднего фокуса  $F'$  называется задним фокусным расстоянием  $f'$ .

$f, f'$  – алгебраические величины.

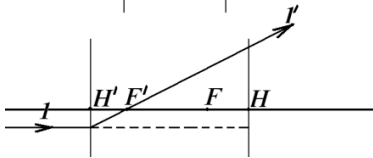
$f, f' > 0$ , если соответственные фокусы лежат справа от соответствующих им главных плоскостей.

$f, f' < 0$ , если соответственные фокусы лежат слева от соответствующих им главных плоскостей.

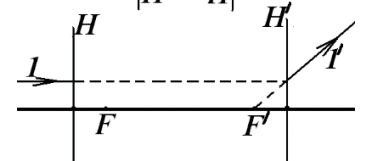
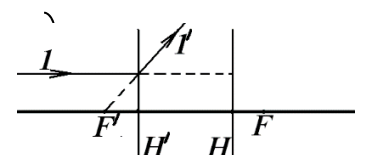
### Примеры.



$f < 0, f' > 0$ , собирающая система.



$f > 0, f' < 0$ , рассеивающая система.



$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}, \text{ где } n \text{ – коэффициент преломления среды перед оптической системой, } n' \text{ –}$$

коэффициент преломления за оптической системой.

Если  $n = n'$ , то  $f = -f'$ .

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \text{ – оптическая сила системы.}$$

$\Phi > 0$  при  $f' > 0$  – система собирающая.

$\Phi < 0$  при  $f' < 0$  – система рассеивающая.

Чем больше  $\Phi$ , тем сильнее преломляются лучи данной системой.

Оптическая сила системы измеряется в диоптриях  $[\Phi] = \text{дптр}$ .

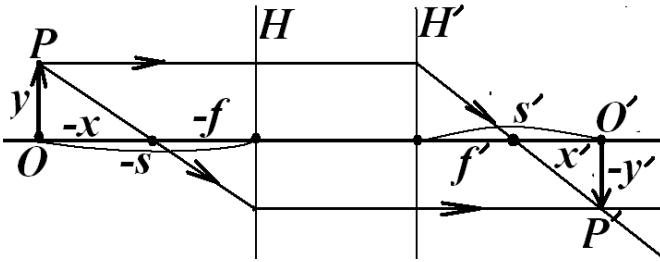
Диоптрия — это оптическая сила такой помещенной в воздух системы, фокусное расстояние которой  $|f'|$  равно 1 метру.

Чтобы получить оптическую силу в  $\text{дптр}$ , надо подставить фокусное расстояние  $f$  в метрах.

Оптическая сила человеческого глаза:  $\Phi \approx 58,5 \text{ дптр} \Rightarrow$

$f \approx -17,1 \text{ мм}; f' \approx 22,8 \text{ мм}$ , так как  $n' \approx 1,34$  стекловидного тела.

2. Формула Ньютона.



$$\begin{cases} \frac{O'P'}{x'} = \frac{OP}{f'} \Rightarrow \frac{O'P'}{OP} = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} \Rightarrow \\ \frac{OP}{-x} = \frac{O'P'}{-f} \end{cases}$$

$\Rightarrow xx' = ff'$  – формула Ньютона.

Если  $n = n' \Rightarrow f = -f' \Rightarrow xx' = -f^2$ .

$$\left. \begin{matrix} S' = f' + x' \\ -S = -x - f \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x' = -f' + S' \\ -x = f - S \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f' - S')(f - S) = ff';$$

$$1 = \frac{f}{S} + \frac{f'}{S'}.$$

При  $n = n' \Rightarrow f = -f' \Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{S'} - \frac{1}{S}$ .

Если считать все расстояния положительными, кроме переднего фокусного расстояния, то формулы будут иметь следующий вид:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} \text{ – формула увеличения.}$$

3. Тонкие линзы.

Точки пересечения поверхностей линзы с оптической осью называются вершинами преломляющих поверхностей.

Расстояние между вершинами называют толщиной линзы.

Если толщина линзы  $d \ll \min(R_1, R_2 - \text{радиусы кривизны поверхностей})$ , то линза называется тонкой.

Для тонких линз главные плоскости совпадают  $H \equiv H'$  и проходят через центр линзы, следовательно, узловые точки для тонких линз также совпадают  $N = N'$ .

Если показатели преломления до и после системы равны  $n_1 = n_2$ , то узловые точки  $N = N'$  находятся в центре линзы, но только в этом случае.

Если  $n_1 \neq n_2$ , то луч, проходящий через центр линзы, испытывает преломление; при этом  $f' \neq -f$ .

Формула тонкой линзы:  $f' = -f = \frac{n_0}{n - n_0} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ ,

где показатели преломления:  $n$  – линзы,  $n_0$  – среды до и после линзы (если  $n_1 = n_2 = n_0$ ).

Эта формула справедлива для любых тонких линз: двояковыпуклых, двояковогнутых, плосковыпуклых и т.д. Надо только придерживаться правила знаков: если  $n > n_0$ , для двояковыпуклых линз  $R_1 > 0, R_2 < 0 \Rightarrow f < 0$ ; для двояковогнутых линз  $R_1 < 0, R_2 > 0 \Rightarrow f > 0$ ; для выпукло-вогнутых линз  $R_1 > 0, R_2 > 0$ .

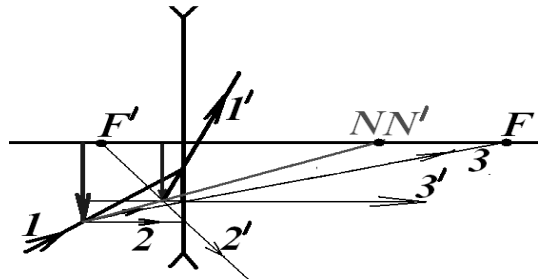
Вопрос. Как изобразить ход луча 1', сопряженного данному лучу 1, и найти местоположение точек  $NN'$ , не совпадающее с центром линзы?

Ответ. Действительно, так как  $|f'| < f$  и  $\frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \Rightarrow n' < n$ , то есть за

линзой среда менее плотная, точки  $NN'$  в данном случае не совпадают с центром линзы. Если у вас возникает проблема с построением луча, сопряженного



данному, то безотказным помощником может стать дополнительный предмет, изображенный на рисунке перпендикулярной к оси системы длинной стрелкой. Построив его изображение, легко провести искомый луч  $1'$  через конец изображения, обозначенного короткой вертикальной стрелкой, и точку пересечения исходного луча с линзой. Заметим, что луч  $1$ , рассеиваясь, более круто отходит от оси системы, что естественно, так как линза рассеивающая. Проведя через вершины предмета и изображения прямую до пересечения с оптической осью, получим точку  $NN'$ , через которую все лучи проходят, не преломляясь. Этот способ является универсальным, но не самым простым.



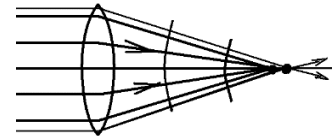
**Вопрос.** Как же сделать проще?

**Ответ.** Следует направить луч  $2$ , параллельный исходному лучу  $1$ , на фокус  $F$ , преломить его на главной плоскости  $H$ , совпадающей с линзой, сделать сопряженный ему луч  $2'$  параллельным оптической оси. Затем провести искомый луч  $1'$  через точку пересечения луча  $2'$  с задней фокальной плоскостью  $F'$  и точку пересечения исходного луча с линзой. Докажите самостоятельно правомерность этого способа.

#### 4. Замечания.

1) Все линзы вследствие конечной толщины обладают аберрацией (aberratio – греч. уклонение).

А) *Сферическая аберрация* возникает, так как в результате использования сферических поверхностей далекие от оси лучи проходят не точно через фокус, поэтому вместо точки имеем пятно. Таким образом, сферическая аберрация возникает вследствие конечной ширины световых пучков.



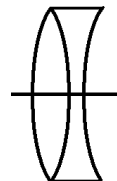
Способы устранения:

а) ограничение ширины пучка;

б) подбор парных линз с компенсирующими друг друга аберрациями, так как собирающая и рассеивающая линзы имеют противоположные аберрации.

Б) *Хроматическая аберрация* возникает, так как свет разного цвета имеет разную скорость, то есть различные показатели преломления  $n$ .  $\Rightarrow$  В результате для света различных цветов фокусные расстояния различны, поэтому возникает окраска изображения. Максимум, что можно требовать, чтобы для наиболее удаленных от оси лучей и центрального луча времена их прохождения системы отличались на величину порядка периода колебаний  $T$ .

Фокус красных лучей дальше от линзы, чем фокус фиолетовых.  $\Rightarrow$  В зависимости от расположения экрана изображение меняет окраску. У вогнутой и выпуклой линзы противоположный характер хроматической аберрации.  $\Rightarrow$  Обе аберрации устраняются следующим образом: берутся две линзы с подобранными показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  и одинаковыми радиусами и склеиваются в одну линзу, называемую ахроматической.



2) *Кома* – продолговатость изображения, возникающая при косом прохождении лучей через оптическую систему (дисторсия).

3) *Астигматизм* (stigmato – греч. точка) – деформация сферической волны, в результате чего изображение фокусируется в двух перпендикулярных отрезках. Если точка находится далеко от оптической оси, то четкого изображения точки не получается, но существует два положения экрана с изображением исходной точки в виде прямых черточек.



## Глава III. Интерференция

### 1. Интерференция плоских линейно поляризованных монохроматических волн

При сложении двух и более волн может происходить пространственное перераспределение потока энергии (то есть может возникать пространственная неоднородность потока энергии) – это и есть интерференция.

Интерференционные явления существуют как для электромагнитных (в том числе световых), так и для упругих волн.

Мы будем заниматься световыми волнами, следовательно, интерференционные картины должны будут состоять из темных и светлых полос.

Рассмотрим две плоские линейно поляризованные монохроматические волны в вакууме:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r} + \alpha_1) = \vec{E}_{01} \cos \varphi_1, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r} + \alpha_2) = \vec{E}_{02} \cos \varphi_2,$$

у которых  $\vec{E}_{01}, \vec{E}_{02}, \omega_1, \omega_2, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \alpha_1, \alpha_2 = const$ .

Обозначим  $\cos(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r} + \alpha_1) = \cos \varphi_1$ ,  $\cos(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r} + \alpha_2) = \cos \varphi_2$ .

$$\vec{S} = [\vec{E}_1, \vec{H}_1] + [\vec{E}_2, \vec{H}_2] + [\vec{E}_1, \vec{H}_2] + [\vec{E}_2, \vec{H}_1].$$

интерференционный член

$\vec{S} \neq \vec{S}_1 + \vec{S}_2$  – для потока энергии принцип суперпозиции не выполняется.

Люди общаются со световыми волнами, так же как и со звуковыми, воспринимая их интенсивности.

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = I_1 + I_2 + I_{интер} \leftarrow \text{для бегущих волн } \langle |\vec{S}| \rangle = \langle \vec{S} \rangle.$$

Найдем интенсивности каждой волны  $I_1, I_2$  и суммарную интенсивность  $I$  в вакууме:

$$I_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{01}^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{01}^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle E_1^2 \rangle;$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle E_2^2 \rangle;$$

$$I_{интер} = \left\langle \left[ \vec{E}_{01}, [\vec{n}_2, \vec{E}_{02}] \right] + \left[ \vec{E}_{02}, [\vec{n}_1, \vec{E}_{01}] \right] \left| \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right. \right\rangle \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}.$$

Считая, что волны распространяются в одном и том же направлении, то есть  $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$ , получим:

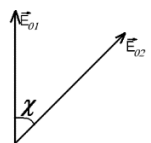
$$I_{интер} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \left\langle \left[ \vec{E}_{01}, [\vec{n}_2, \vec{E}_{02}] \right] + \left[ \vec{E}_{02}, [\vec{n}_1, \vec{E}_{01}] \right] \left| \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right. \right\rangle_{n_1=n_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot 2 \langle (\vec{E}_1, \vec{E}_2) \rangle =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{01} E_{02} \cos \chi \langle \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \rangle =$$

$$= 2 \sqrt{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot 2 \frac{E_{01}^2}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot 2 \frac{E_{02}^2}{2}} \cdot \cos \chi \langle \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \rangle = 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \chi \langle 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \rangle.$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \chi \langle 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \rangle,$$

здесь  $\chi$  – угол между направлениями поляризации волн 1 и 2.



Попробуем угадать до проведения усреднения, в каких пределах может меняться суммарная интенсивность  $I$  от двух источников с равными интенсивностями  $I_0$ , рассмотрим следующий пример.

Рассмотрим два диполя, колеблющиеся синфазно и находящиеся на расстоянии  $\frac{\lambda}{2}$  друг от друга:

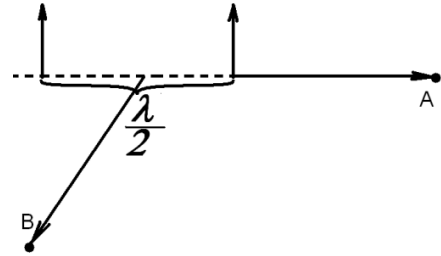
$$\frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi \cdot c}{\omega}$$

Тогда в точке А:  $I_A = 0$ , потому что  $E_A = 0$ , так как волны приходят в противофазе.

В точке В:  $E_B \approx 2E_0 \Rightarrow I_B = 4I_0$ .

Итак, имеем  $0 \leq I_{\Sigma} \leq 4I_0$ .

Теперь сделаем все точно и аккуратно в общем случае, для этого надо усреднить  $\langle 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \rangle$ .



**Вопрос.** По какому времени  $\Delta t$  надо усреднять?

**Ответ.** Частота видимого света  $\omega_1 \sim \omega_2 \sim 10^{15} \text{ c}^{-1} \Rightarrow T_{1,2} \sim 10^{-15} \text{ c}, T_{1,2} \ll \tau$ ,

где  $\tau$  (макроскопическое время) – характерное время существенного изменения характеристик источника излучения (температуры, давления, размеров, состояния);  $\tau \approx \tau_{\text{ког}}$  – время когерентности.



Для когерентного источника  $\tau_{\text{ког}} = \infty$  (стационарный источник обеспечивает стационарный волновой процесс).

Время усреднения  $\Delta t$  выбирается следующим образом:  $T \ll \Delta t \ll \tau_{\text{ког}}$ .

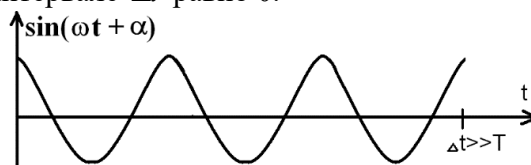
Если источник стационарный, то  $\Delta t$  может определяться временем срабатывания воспринимающего прибора, в частности, инерционность человеческого глаза чуть больше 10 мс, а скорость срабатывания глаза  $\Delta t_{\text{эл}} \sim 0,1 \text{ c}$ . Если в кино кадр меняют  $25 \frac{\text{раз}}{\text{с}}$  (при этом время смены кадров  $\tau_{\text{изм}} = 0,04 \text{ c}$ ), то мы видим слитное непрерывно движущееся изображение, а в старом любительском кино с частотой кадров 8–10 в секунду заметна прерывистость движения.

Проведем процедуру усреднения  $\langle (\dots) \rangle_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\dots) dt$ :

$$\langle 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \rangle = \langle \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = \langle \cos[(\omega_1 + \omega_2)t - (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)\bar{r} + \alpha] \rangle + \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t - (\bar{k}_1 - \bar{k}_2)\bar{r} + \tilde{\alpha}] \rangle, \text{ здесь } \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \tilde{\alpha} = \alpha_1 - \alpha_2.$$

$$\langle \cos[(\omega_1 + \omega_2)t - (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)\bar{r} + \alpha] \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t - (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)\bar{r} + \alpha] dt = \frac{1}{\Delta t} \frac{\sin[(\omega_1 + \omega_2)t - (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)\bar{r} + \alpha]}{(\omega_1 + \omega_2)} \Big|_t^{t+\Delta t}, \text{ здесь } \sin[(\omega_1 + \omega_2)t - (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)\bar{r} + \alpha] - \text{ много раз}$$

осциллирующая функция на интервале  $\Delta t$ , так как  $\Delta t \gg T$ , поэтому очевидно, что среднее значение этой функции на интервале  $\Delta t$  равно 0.



Это можно доказать и аналитически:

$$\frac{1}{\Delta t} \frac{\sin[(\omega_1 + \omega_2)t - (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)\bar{r} + \alpha]}{(\omega_1 + \omega_2)} \Big|_t^{t+\Delta t} \leq \frac{1}{\Delta t \cdot (\omega_1 + \omega_2)} = \frac{1}{\Delta t \cdot 2\omega} = \frac{T}{\Delta t \cdot 4\pi} \ll 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  первое слагаемое интерференционного члена  $\sim \langle \cos[(\omega_1 + \omega_2)t - (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)\bar{r} + \alpha] \rangle \approx 0$ .

Если  $|\omega_1 - \omega_2| \cdot \Delta t \gg 1$ , то и второе слагаемое  $\sim \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t - (\bar{k}_1 - \bar{k}_2)\bar{r} + \tilde{\alpha}] \rangle \approx 0$  дает нуль, и мы интерференции не видим. При этом чем меньше  $\Delta t$  – время усреднения, равное инерционности прибора, тем (с большей вероятностью) легче различить интерференцию, то есть разницу интенсивности  $I$  в различных точках пространства.

**Вопрос.** Почему мы редко видим интерференцию?

**Ответ.** Потому что за время срабатывания нашего глаза колебания волн, пришедших от разных источников, успевают стать несогласованными – некогерентными.

**Опред.** *Когерентность* – это согласованное протекание нескольких колебательных процессов. Волны когерентные, если их разность фаз остается постоянной или мало изменяется за период.

*Интерференция имеет место только при наложении когерентных волн.*

Если  $|\omega_1 - \omega_2| \cdot \Delta t = \Delta\omega\Delta t < 1$ , то

$$\begin{aligned} \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t - (\bar{k}_1 - \bar{k}_2)\bar{r} + \tilde{\alpha}] \rangle &= \frac{1}{\Delta\omega\Delta t} \{ \sin[\Delta\omega(t + \Delta t) - \Delta\bar{k}\bar{r} + \tilde{\alpha}] - \sin[\Delta\omega t - \Delta\bar{k}\bar{r} + \tilde{\alpha}] \} = \\ &= \frac{2}{\Delta\omega\Delta t} \cdot \sin \frac{\Delta\omega\Delta t}{2} \cdot \cos(\Delta\omega t - \Delta\bar{k}\bar{r} + \tilde{\alpha}). \\ I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \chi \langle \cos[\Delta\omega t - \Delta\bar{k}\bar{r} + \alpha] \rangle_{\Delta t}. \end{aligned}$$



## 2. Интерференция двух плоских линейно поляризованных волн с равными частотами.

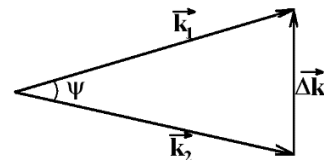
### Оценка ширины интерференционных полос

Рассмотрим наложение двух плоских линейно поляризованных когерентных волн с равными частотами  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , распространяющихся под небольшим углом  $\psi$  относительно друг друга.

Так как  $\omega_1 = \omega_2 = \omega \Rightarrow k_1 = k_2 = \frac{\omega}{c} = k$ .

Тогда  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \chi \cos(\Delta\bar{k}\bar{r} + \alpha)$ ;

$$\Delta\bar{k} = \bar{k}_1 - \bar{k}_2 \Rightarrow \Delta k = 2k \sin \frac{\psi}{2} \underset{\text{для малых углов}}{\approx} k\psi = \frac{2\pi}{\lambda} \psi.$$



В этом случае при  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  разность фаз колебаний, возбуждаемых в любой точке пространства, остается постоянной во времени  $(\varphi_1 - \varphi_2) = \text{const}(t)$ , то есть волны когерентны.

Но в различных точках пространства разность фаз  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  различна и, следовательно, интенсивности также будут отличаться.

Выберем начало отсчета так, чтобы избавиться от  $\alpha$ :  $\bar{r}_{\text{нов}} = \bar{r} + \bar{r}_0$ , где  $\bar{r}_0 \Delta\bar{k} + \alpha = 0$ . Это всегда можно сделать; затем опустим индекс «нов», тогда:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \chi \cos(\Delta\bar{k}\bar{r}).$$

Условия отсутствия интерференции:

1) Вспомним, что  $\chi$  – это угол между векторами поляризации волн 1 и 2.

Если  $\chi = \frac{\pi}{2}$ , то  $\cos \chi = 0$  и интерференции нет, что вполне естественно, так как имеем просто волну с эллиптической поляризацией.

2)  $\Delta \vec{k} \perp \vec{r} \Rightarrow \cos(\Delta \vec{k} \vec{r}) = 1$ , то есть экран  $\perp \Delta \vec{k}$  (то есть расположен вдоль направления распространения волн), тогда  $\Delta \vec{k} \vec{r} = \Delta k \cdot x \cdot \cos \beta = 0$  в этом направлении:

$$I = I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \chi.$$

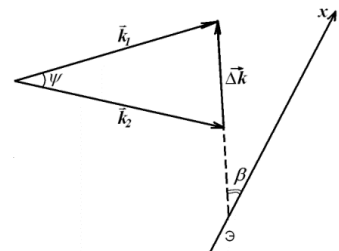
**Вопрос.** Если во всех точках выбранного направления интенсивность, как мы видим, максимальна, то откуда берется дополнительная энергия?

**Ответ.** Все дело в том, что мы отсчитываем наше направление от точки с радиусом-вектором  $\vec{r}_0$ , таким, что  $\vec{r}_0 \Delta \vec{k} + \alpha = 0$ . Если взять за начало отсчета точку с радиусом-вектором  $\vec{r}_0'$ , для которого выполняется условие  $\vec{r}_0' \Delta \vec{k} + \alpha = \pi$ , то в направлении  $\vec{r} \perp \Delta \vec{k}$



интерференцию также не удастся увидеть, но интенсивность будет минимальна

$I = I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \chi$ . Именно из этой области и перераспределится световая энергия в соседние области.



Чтобы наблюдать интерференцию, экран не должен быть перпендикулярен  $\Delta \vec{k}$ .

Очевидно, что интерференция будет максимальной (то есть максимально будут отличаться интенсивности в различных точках), если экран параллелен  $\Delta \vec{k}$  ( $\vec{r} \parallel \Delta \vec{k}$ ).

$$\Delta \vec{k} \vec{r} = \Delta k \cdot x \cdot \cos \beta;$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \chi \cos(\Delta \vec{k} \vec{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \chi \cos(\cos \beta \cdot \Delta k \cdot x).$$

Если экран  $\parallel \Delta \vec{k}$ , то  $\beta = 0$ ,  $\cos \beta = 1$  и на экране возникают max и min интенсивности  $I$ :

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \chi;$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \chi.$$

При косом расположении экрана max и min возникают в следующих местах:

$$2k \sin \frac{\psi}{2} \cos \beta \cdot x = \begin{cases} 2\pi n & \leftarrow \text{max} \\ \pi(2n+1) & \leftarrow \text{min} \end{cases}.$$

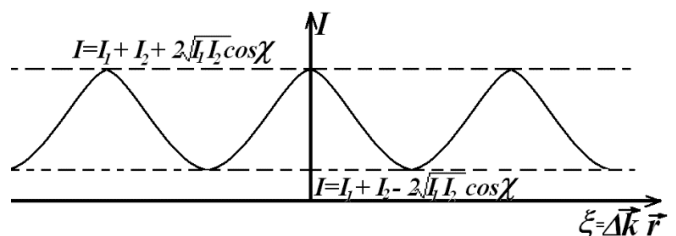
При этом ширина интерференционных полос:

$$\Delta x = x_{\max}^{n+1} - x_{\max}^n = x_{\min}^{n+1} - x_{\min}^n = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{\psi}{2} \cos \beta} = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \beta}.$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \beta} - \text{ширина интерференционных полос.}$$

При  $\beta = 0$  полосы – самые узкие. При

малых  $\psi$  ширина полосы  $\Delta x = \frac{\lambda}{\psi \cos \beta} \underset{\beta=0}{=} \frac{\lambda}{\psi}$ .





### 3. Интерференция двух линейных поляризованных волн с близкими частотами

Рассмотрим волны с однонаправленной линейной поляризацией  $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ , в этом случае  $\cos \chi = 1$ .

Пусть теперь  $\omega_2 \approx \omega_1$ , так что  $\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega$ , где  $\Delta\omega \ll \min(\omega_1, \omega_2)$ .

Тогда  $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\Delta\omega t - \Delta\vec{k}\vec{r} + \alpha) \rangle$ .

Интерференционный член отличен от нуля, только если  $\Delta t \Delta\omega \ll 1$ .

$$\begin{aligned} \langle \cos[\Delta\omega t - \Delta\vec{k}\vec{r} + \alpha] \rangle_{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta\omega \Delta t} \{ \sin[\Delta\omega(t + \Delta t) - \Delta\vec{k}\vec{r} + \alpha] - \sin[\Delta\omega t - \Delta\vec{k}\vec{r} + \alpha] \} = \\ &= \frac{2}{\Delta t \cdot \Delta\omega} \cdot \sin \frac{\Delta\omega \cdot \Delta t}{2} \cdot \cos(\Delta\omega t - \Delta\vec{k}\vec{r} + \alpha) \underset{\Delta\omega \cdot \Delta t \rightarrow 0}{\approx} \cos(\Delta\omega t - \Delta\vec{k}\vec{r} + \alpha). \end{aligned}$$

В результате возникает интерференционная картина, движущаяся по экрану со скоростью  $v$ :

$$\Delta\omega t - \Delta\vec{k}\vec{r} = \text{const} \Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = |\vec{v}| = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{c}{\psi}, \text{ так как } \Delta k = k\psi = \frac{\omega}{c} \psi.$$

#### Пример.

Рассмотрим наложение двух волн с близкими частотами, отличающимися друг от друга только на 1 в последнем разряде:

$$\omega_1 = 2,7\dots5 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_2 = 2, \underbrace{7\dots6}_{\substack{\text{всего} \\ 15 \\ \text{знаков}}} \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}.$$

Вопрос. Что увидим для угла  $\psi = 10^{-3}$  рад?

#### Решение.

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\psi} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,7 \text{ мм} - \text{ширина интерференционной полосы.}$$

$$\lambda = 0,7 \text{ мкм} = \frac{2\pi c}{\omega};$$

$$v = \frac{1 \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-3}} = 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 0,1 \frac{\text{мм}}{\text{с}} - \text{скорость движения картины по экрану.}$$

Эту интерференционную картину невооруженным глазом увидеть трудно.

Если  $\psi = 10^{-4}$  рад  $\rightarrow \Delta x = 7 \text{ мм}$  и  $v = 1 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$  – картина хорошо различима.



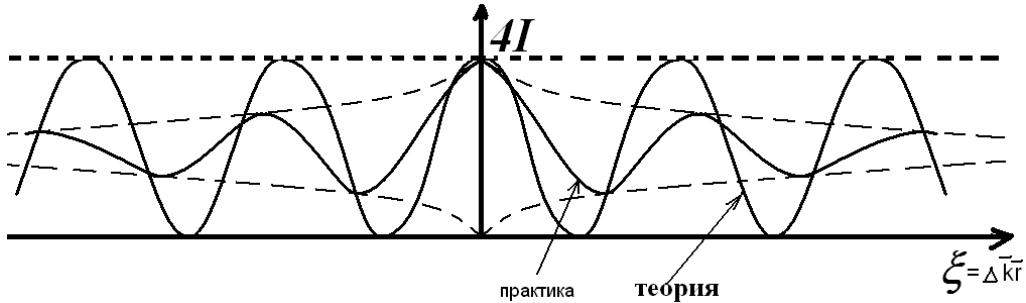
Вопрос. Что будет, если  $\psi = 0$  ?

Ответ. В этом случае  $\Delta\vec{k} \parallel \vec{k}$ , и во времени изменяется освещенность экрана, а интерференционной картины нет.

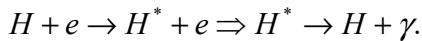


## 4. Интерференция двух плоских линейно поляризованных квазимонохроматических волн. Время когерентности. Длина когерентности

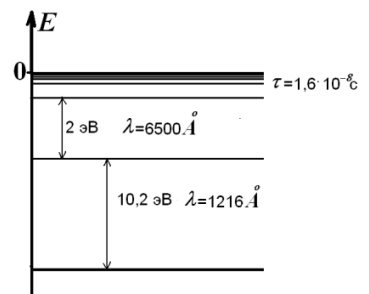
Рассмотрим волны с однонаправленной линейной поляризацией  $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ , в этом случае  $\cos \chi = 1$ , пусть обе волны монохроматические с равными интенсивностями  $I_1 = I_2 = I$ . При наложении таких волн, распространяющихся под малым углом друг к другу, теория дает следующую картину:



На практике число полос определяется размерами области интерференции. Это ограничение возникает из-за пространственной и временной некогерентности волн. Дело в том, что абсолютно монохроматический свет с  $\omega = const$  – это идеализация. Любая реальная световая волна образуется наложением колебаний с частотами, заключенными в конечном интервале частот  $(\omega, \omega + \Delta\omega)$  и, соответственно, с длинами волн  $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ . Электромагнитные волны ( $\gamma$ -кванты), в том числе и световые, испускаются атомами. Чтобы атом излучал, его надо перевести в возбужденное состояние из основного. Например, испускание  $\gamma$ -кванта может произойти после перехода атома в возбужденное состояние в результате столкновения с электроном:



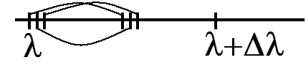
Так как возбужденные уровни атомов имеют естественное уширение, то испускаемые атомами спектральные линии имеют естественную ширину  $\Delta\omega \sim 10^8 c^{-1}$  или  $\Delta\lambda \sim 10^{-4} \text{ \AA}$ .



Посмотрим, к чему приведет отличие на небольшую величину  $\Delta\lambda \ll \lambda$  испускаемых источником  $S$  длин волн  $\lambda$ . Пусть в окрестности точки  $O$  имеются два близко расположенных когерентных источника  $S1$  и  $S2$ , испускающих волны с длинами  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$  соответственно. Если в произвольный момент времени фазы испускаемых источниками волн совпадают, то на расстоянии  $L$  от точки  $O$  в окрестность точки  $O_1$  волны от разных источников придут в противофазе вследствие разницы длин волн, испускаемых источниками. Относительно точки  $O$  в точку  $O_1$  волна от  $S2$  приходит, имея разность хода  $\Delta_2 = N(\lambda + \Delta\lambda)$ , а волна от  $S1$  имеет разность хода  $\Delta_1 = (N + \frac{1}{2})\lambda$ . В этом случае в окрестности т.  $O_1$  волны будут уничтожать друг друга, став некогерентными. Таким образом можно оценить число длин волн  $N_{max}$ , излученное источниками с близкими длинами волн, на котором теряется согласованность излучения:

$$OO_1 = \Delta_2 = N_{max}(\lambda + \Delta\lambda) = \Delta_1 = (N_{max} + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow N_{max} = \frac{\lambda}{2 \cdot \Delta\lambda}.$$

Если свет имеет длины волн в спектральном интервале  $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ , то можно разбить интервал на множество бесконечно узких пар длин волн, находящихся на расстоянии  $\frac{\Delta\lambda}{2}$  друг от друга, как показано на рисунке. Тогда



первое полное уничтожение произойдет при  $N_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ .

Следует иметь в виду, что на практике точно установить  $N_{\max}$  трудно, так как процесс «взаимного уничтожения» идет постепенно.

**Вывод.** Вдоль направления распространения волны существует длина, на которой волна когерентна самой себе – это длина когерентности  $l_{\text{ког}} = \lambda \cdot N_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ .

При малых давлениях атому испускать не мешают, поэтому время когерентного излучения атома равно времени жизни атома в возбужденном состоянии  $\tau_{\text{излуч}} = \tau_{\text{жизни}} \sim 10^{-8} \text{ с} \gg T \sim 10^{-15} \text{ с}$ .

Если  $\tau_{\text{излуч}} \sim 10^{-8} \text{ с} \Rightarrow l_{\text{ког}} \sim 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8} = 3 \text{ м}$  – длина когерентности в данном случае.

Интерференционный член, как мы помним, содержит  $\langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t - (\bar{k}_1 - \bar{k}_2)\bar{r} + \alpha] \rangle$ . Если имеют место столкновения атомов друг с другом с частотой  $\nu$ , то каждое столкновение сбивает фазу излучаемой волны  $\alpha(t)$ , при этом утрачивается когерентность. За время излучения атом может испытать  $10^2 \div 10^3$  столкновений, сбивающих фазу, в этих случаях время когерентного излучения  $\tau_{\text{излуч}}$  уменьшается в  $10^2 \div 10^3$  раз, то есть  $\tau_{\text{излуч}} = \tau_{\text{ког}} = 10^{-10} \div 10^{-11} \text{ с}$ ,  $l_{\text{пост. фазы}} \sim 3 \text{ мм}$  в данном случае  $\ll 3 \text{ м}$ .

*Длина когерентности – расстояние, на котором соблюдена предыстория излучения, в частности, не сбита фаза.*

**Вопрос.** Какое различие в фазах излучаемых волн допустимо, чтобы была видна интерференционная картина?

**Ответ.** Интерференционная картина видна, если  $\alpha(t)$  мало изменяется за время усреднения  $\Delta t$ , которое, в свою очередь, определяется инерционностью регистрирующего прибора  $\Delta t = t_{\text{приб}}$ .

Если  $\alpha(\Delta t) \cong 0$ , то волны можно считать когерентными; при  $\alpha(\Delta t) \geq \pi$  волны некогерентны; если  $0 < \alpha < \pi$ , то волны частично когерентны. Поэтому понятие когерентности для реальной волны является относительным и зависит от возможностей прибора. Чем меньше инерционность прибора, тем вероятней увидеть интерференционную картину.

Для объективизации понятия когерентности волн вводится понятие времени когерентности  $t_{\text{ког}}$ :

$t_{\text{ког}}$  – время, за которое случайные изменения фазы волны достигают значения  $\pi$ . За  $t_{\text{ког}}$  колебание «забывает» свою начальную фазу и становится некогерентным самому себе.

Расстояние, на которое распространяется волна за время когерентности  $t_{\text{ког}}$ , называется длиной цуга или длиной когерентности  $l_{\text{ког}} = t_{\text{ког}} \cdot c$ . Длина цуга – длина когерентности. Цуг – кусок волны, в пределах которого начальную фазу можно считать постоянной.

*Длина когерентности отсчитывается вдоль направления распространения волны.*



Таким образом, длина когерентности излучаемого света обусловлена сбоем фазы и некогерентностью излучения, то есть длиной спектрального интервала, к которому принадлежит  $\omega$ :

$$\omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega.$$

## 5. Интерференция света от протяженного источника. Пространственная когерентность. Радиус когерентности

Пространственная когерентность связана с разбросом направлений вектора  $\vec{k}$ . Возникновение в некоторых точках пространства колебаний, возбуждаемых волнами, исходящими от одного источника, но имеющими разные  $\vec{k}$ , обусловлено протяженностью источника.

Пусть  $a = \frac{D}{2}$  – радиус источника. От концов источника в точку  $O$  придут две волны:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}) + \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r} + \alpha) = 2\vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha}{2}\right).$$

Последний множитель этого выражения будет создавать осцилляции  $\vec{E}$  вдоль экрана. Определим, на каком расстоянии  $\rho$  вдоль экрана колебания еще не будут в противофазе:

$$\frac{\Delta k \rho}{2} \approx \pi.$$

$$\Delta k \approx k \cdot \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \varphi, \text{ где } \varphi - \text{угловой размер источника из точки наблюдения} - \text{угол, под}$$

которым виден источник с расстояния  $l$  от него  $\Rightarrow \varphi = \frac{D}{l}$ ;

$$\rho_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi\lambda}{2\pi\varphi} = \frac{\lambda l}{D} = \frac{\lambda}{\varphi}.$$

$$\rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\varphi} - \text{радиус когерентности или длина пространственной}$$

когерентности.

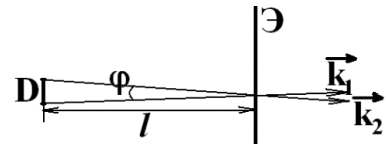
$\rho_{\text{ког}}$  определяет собой расстояние вдоль волнового фронта, на котором волны еще можно считать когерентными. Это характеристика системы наблюдения и размера источника.

Чем меньше угловой размер источника, тем больше  $\rho_{\text{ког}}$ . Колебания в двух точках, отстоящих друг от друга на фронте волны или волновой поверхности на расстояние  $r < \rho_{\text{ког}}$ , будут когерентными.

Оценим радиус когерентности  $\rho_{\text{ког}}$  солнечного излучения вблизи поверхности Земли. Угловой размер Солнца  $\sim 0,01 \text{ рад}$ ,  $\lambda = 0,5 \text{ мкм} \Rightarrow \rho_{\text{ког}} \approx 50 \text{ мкм}$ .  $\Rightarrow$  Чтобы увидеть интерференцию солнечного света, надо организовать два отверстия, которые будут когерентными источниками. При этом расстояние между центрами этих отверстий не должно превосходить  $50 \text{ мкм}$ .  $\Rightarrow$  Радиус каждого отверстия должен быть  $< 20 \text{ мкм}$ .  $\Rightarrow$  Ничего не увидим, так как не хватит светового потока.

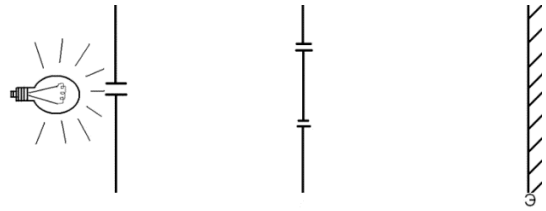
Во всех интерференционных схемах, предназначенных для наблюдения интерференционных картин, для получения двух когерентных источников происходит разделение исходного пучка на два новых.

При этом, для того чтобы пучки были когерентны, расстояние между ними должно быть меньше  $\rho_{\text{ког}}$ .



**Вывод.** *Необходимым условием получения интерференционной картины является следующее: расстояние между лучами в месте их разделения  $< \rho_{\text{ког}}$ .*

Именно соблюдение этого условия позволило Т. Юнгу в 1802 г. впервые наблюдать интерференционную картину и измерить длину волны. В дополнение к схемам предшественников он ввел дополнительную щель, увеличив тем самым  $\rho_{\text{ког}}$  в месте разделения пучка. (Разумеется, Юнг и его предшественники не могли использовать изображенную на рисунке лампу накаливания; в опытах Юнга на введенный им экран с малым отверстием падал яркий пучок солнечного света.)



Несколько слов о создателе волновой оптики английском ученом Томасе Юнге (13.IV. 1773 – 10.V. 1829), члене и секретаре Лондонского королевского общества (1794). Это был необыкновенно одаренный человек, обладавший феноменальной памятью. В 2 года он научился бегло читать, в 8-9 лет овладел токарным ремеслом и мастерил физические приборы, к 14 годам познакомился с дифференциальным исчислением, изучил много языков (греческий, латынь, французский, итальянский, арабский). Учился в трех университетах, изучая медицину и физику. Работал профессором Королевского института, врачом в больнице св. Георгия в Лондоне, секретарем Бюро долгов, руководил изданием «Морского календаря». В последние годы жизни занимался составлением египетского словаря. Его научные работы относятся к оптике, акустике, теплоте, механике, математике, астрономии, геофизике, филологии и зоологии. Вот перечень его достижений в области оптики:

- 1793 г. – объяснил явление аккомодации глаза изменением кривизны хрусталика;
- 1800 г. – в работе «Опыты и проблемы по звуку и свету» поддержал волновую теорию света, предложил принцип суперпозиции волн, указал на усиление и ослабление звука при наложении волн (интерференция);
- 1802 г. – выполнил первый демонстрационный опыт по наблюдению интерференции света, получив 2 когерентных источника интерференции;
- 1803 г. – первым объяснил явление интерференции, введя это понятие; измерил длины волн разных цветов; объяснил кольца Ньютона;
- 1807 г. – высказал идею о физической идентичности света и лучистой теплоты, отличающихся только длиной волны;
- 1817 г. – выдвинул идею о поперечности световых волн.

## 6. Интерференционные системы (схемы для наблюдения интерференции)

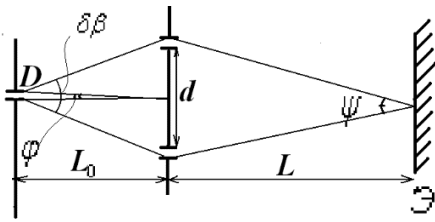
Общие принципы устройства интерференционных систем:

- 1) Существует источник с когерентным  $\Delta\lambda$  и геометрическим размером  $D$ .
- 2) Интерференционная схема разделяет первоначальный пучок на 2 когерентных.
- 3) Наложение волн от 2 когерентных источников на экране дает интерференционную картину.

Что надо знать и уметь делать:

- 1) Строить интерферирующие лучи в соответствии с устройством схемы.
- 2) Вычислять ширину интерференционных полос.
- 3) Оценивать размер интерференционной картины (из геометрии, пространственная и временная когерентность).
- 4) Оценивать радиус когерентности системы.





1. Опыт Юнга.

Геометрические параметры системы  $L, L_0, D, d$  представлены на рисунке. Длина волны света  $\lambda$ , степень монохроматичности источника  $\Delta\lambda$ .

Ширина интерференционной полосы  $\Delta x = \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\lambda L}{d}$ ,

так как  $\psi = \frac{d}{L}$  – угол между интерферирующими лучами на экране.

Здесь и в дальнейшем  $\lambda$  – длина волны света в вакууме.

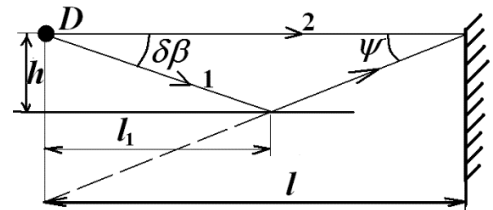
$\rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{\lambda L_0}{D}$ , так как  $\varphi = \frac{D}{L_0}$  – угловой размер источника из места разделения лучей.

В месте разделения лучей расстояние между ними должно быть меньше радиуса когерентности  $d < \rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda L_0}{D} \Rightarrow D < \frac{\lambda L_0}{d} = \frac{\lambda}{\delta\beta} \Rightarrow \delta\beta = \frac{d}{L_0}$  – угол между интерферирующими лучами при их выходе из источника.

Максимальное число полос на экране  $N_{\text{max}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  определяется из условия временной когерентности.

2. Зеркало Ллойда.

Геометрические параметры системы  $h, D, l$  представлены на рисунке. Длина волны света  $\lambda$ , степень монохроматичности источника  $\Delta\lambda$ .



Угол между интерферирующими на экране лучами

$\psi = \frac{2h}{l}$  определяет собой ширину интерференционной полосы  $\Delta x = \frac{\lambda l}{2h}$ .

Пусть  $\beta_1, \beta_2$  – углы между перпендикуляром  $h$  к зеркалу и интерферирующими лучами 1 и 2 при их выходе из источника. Тогда угол  $\delta\beta$  между интерферирующими лучами 1 и 2 при их выходе из источника  $\delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ . Определим ограничения на геометрические параметры системы, связанные с условием пространственной когерентности света, учитывая, что угловой размер источника из места разделения лучей  $\varphi = \frac{D}{l_1}$ .

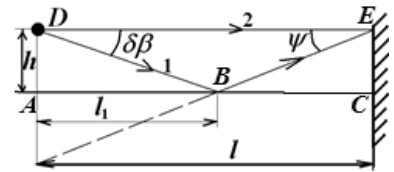
$$\left. \begin{aligned} \delta\beta &= \beta_2 - \beta_1 \\ \rho_{\text{ког}} &> l_1 \delta\beta \\ \rho_{\text{ког}} &= \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{\lambda l_1}{D} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\lambda l_1}{D} > l_1 \delta\beta \Rightarrow \delta\beta < \frac{\lambda}{D}.$$

Если угол  $\delta\beta$  заведомо задан устройством схемы, то возникает ограничение на размер источника  $D$ :  $D < \frac{\lambda}{\delta\beta}$ . Так, в опыте Юнга  $\delta\beta = \frac{d}{L_0}$  и  $D < \frac{\lambda L_0}{d}$ .

Считая  $\delta\beta_{\text{max}} = \frac{2h}{l}$ , получаем ограничение на размер источника  $\Rightarrow D \leq \frac{\lambda l}{2h}$ .



Определим максимально возможный размер интерференционной картины  $x_{\max}$  из условия пространственной когерентности света, считая  $\delta\beta_{\max} = \frac{\lambda}{D}$  и учитывая условие подобия треугольников  $DAB$  и  $BEC$ , образованных отраженным от зеркала лучом:



$$x_{\max} = h \frac{l - l_1}{l_1} = h \frac{\delta\beta}{\psi} = h \frac{l\lambda}{2Dh} = \frac{l\lambda}{2D}, \text{ тогда } \rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda l_1}{D} = \frac{2h}{1 + \frac{D \cdot 2h}{\lambda}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_{\text{ког}} \xrightarrow{D \rightarrow 0} 2h; \\ \rho_{\text{ког}} \xrightarrow{D \approx \frac{\lambda}{2h}} h \Rightarrow x_{\max} \approx h; l_1 \approx l/2. \end{cases}$$

Максимальное число полос  $N_{\max}$  определяется как минимум из условий временной и пространственной когерентности интерферирующих лучей:

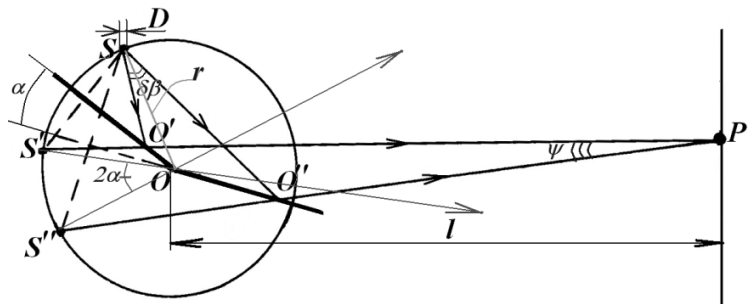
$$N_{\max} = \min \left\{ \frac{\lambda}{\Delta\lambda}; \frac{x_{\max}}{\Delta x} = \frac{h}{D} \right\}.$$

### 3. Бизеркала Френеля.

Геометрические параметры системы  $l, \alpha, D, r$  представлены на рисунке. Длина волны света  $\lambda$ , степень монохроматичности источника  $\Delta\lambda$ .

Порядок построения интерферирующих в этой системе лучей таков:

- 1) Источник  $S$ ;
- 2) Экран, точка  $P$ ;
- 3) Луч  $S'P$ ;
- 4) Зеркало  $I \perp SS' \equiv$  серединный перпендикуляр к отрезку  $SS'$ , точка  $O'$  – точка пересечения луча  $S'P$  и зеркала  $I$ ;
- 5) На зеркале  $I$  ниже точки  $O'$  выбирается точка  $O$  – центр  $O(R = OS = r)$ ;
- 6)  $O(R)$ ;
- 7) Луч  $PS''$  идет ниже зеркала  $I$  до пересечения с  $O(R)$ ;
- 8) Отрезок  $SS''$ , серединный перпендикуляр к  $SS''$  проходит через точку  $O$  – это зеркало  $II \perp SS''$ ;
- 9) Точка пересечения зеркала  $II$  и луча  $PS'' \equiv$  точке  $O''$ ;
- 10)  $SO''$  – второй интерферирующий луч.



$$\rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{\lambda r}{D} \text{ – радиус когерентности света, так как разделение лучей происходит вблизи}$$

точки  $O$  пересечения зеркал.

$\angle S'SS'' = \alpha$  – углу между зеркалами, они равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

$\angle S'OS'' = 2\alpha$  – так как он опирается на дугу  $\cup S'S''$  и является центральным  $\Rightarrow \cup S'S'' = 2\alpha r$ .

Угол между интерферирующими на экране лучами  $\psi = \frac{S'S''}{l+r} = \frac{2\alpha r}{l+r}$  определяет собой ширину интерференционной полосы  $\Delta x = \frac{\lambda(l+r)}{2\alpha r}$ .

Угол  $\delta\beta$  между интерферирующими лучами 1 и 2 при их выходе из источника  $\delta\beta = \frac{x}{r}$ , расстояние между лучами на зеркалах  $x \approx \psi \cdot l \Rightarrow \delta\beta = \frac{\psi \cdot l}{r} = \frac{2\alpha r l}{r(l+r)} = \frac{2\alpha l}{l+r} \Rightarrow$

$$D < \frac{\lambda}{\delta\beta} = \frac{\lambda(l+r)}{2\alpha l} \text{ – ограничение на размер источника } D.$$

**Вопрос.** Можно ли что-то сделать, чтобы увидеть интерференционную картину на экране, если размер источника немного превосходит величину, определенную из соотношения  $D = \frac{\lambda(l+r)}{2\alpha l}$  ?



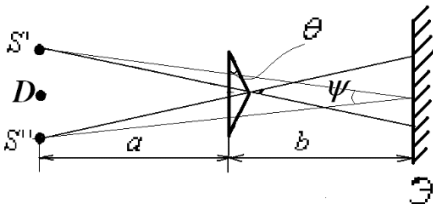
**Ответ.** Очевидно, надо постараться уменьшить угол между выходящими из источника  $S$  интерферирующими лучами, а для этого можно попробовать отодвинуть источник от зеркал, увеличив тем самым радиус  $r$ , также можно немного приблизить экран к зеркалам.

Определим максимально возможный размер интерференционной картины  $AB$  из геометрии системы:

$$AB = 2\alpha l \Rightarrow$$

$$N_{\max} = \min \left\{ \frac{\lambda}{\Delta\lambda}; \frac{AB}{\Delta x} = \frac{2\alpha l 2\alpha r}{\lambda(l+r)} \right\} = \min \left\{ \frac{\lambda}{\Delta\lambda}; \frac{4\alpha^2 r l}{\lambda(l+r)} \right\} \text{ – максимальное число полос } N_{\max}$$

определяется как минимум из условий временной когерентности интерферирующих лучей и геометрии системы.



#### 4. Бипризма Френеля.

Несложно показать (Савельев, задача 5.7), что для малых углов  $\theta$  при вершине призмы все лучи отклоняются призмой от первоначального направления на угол  $\varphi = (n-1)\theta$ .

$$\text{В данном случае это очевидно, } n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 \approx n_1 \varphi_1 \rightarrow \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_1(n-1).$$

Так как  $\varphi_1 \approx 0 \Rightarrow \varphi = (n-1)\theta$  – угол отклонения призмой каждого луча от его первоначального направления.

При этом образуются две когерентные цилиндрические волны, как бы выходящие из двух мнимых источников  $S'$  и  $S''$ , расстояние между которыми  $d \approx a \cdot 2\theta(n-1)$ .  $\Rightarrow$

$$\text{Угол между векторами } \vec{k}_1 \text{ и } \vec{k}_2 \text{ } \psi = \frac{d}{a+b} = \frac{2\theta(n-1)a}{a+b} \Rightarrow$$

$$\text{Ширина интерференционной полосы } \Delta x = \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\lambda(a+b)}{2\theta(n-1)a}.$$

$$\text{Радиус когерентности системы } \rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda a}{D}.$$

$$\text{Расстояние между лучами в месте их разделения равно } b\psi = \frac{2\theta(n-1)ab}{a+b} < \rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda a}{D} \Rightarrow \text{Ограничение на размер источника } D < \frac{\lambda(a+b)}{2\theta(n-1)b}.$$





Максимальное число полос  $N_{\max} = \min \left\{ \frac{\lambda}{\Delta\lambda}; \frac{2\theta(n-1)b}{\Delta x} = \frac{[2\theta(n-1)]^2 ba}{\lambda(a+b)} \right\}$ .



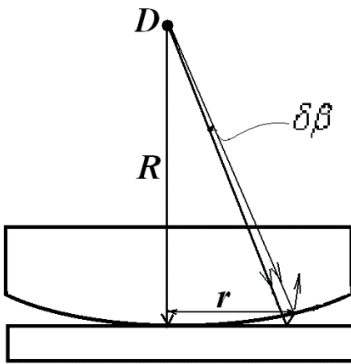
Второе выражение в скобке определяет собой область перекрытия (наложения) лучей от источников  $S'$  и  $S''$ , то есть носит чисто геометрический характер.

Вопрос. Куда надо поставить бипризму, чтобы число полос от когерентного источника было максимально, если расстояние от источника до экрана фиксировано и равно  $l$ ?

Ответ.  $a = l - b \Rightarrow N_{\max} = \xi \cdot b(l - b) \Rightarrow N'_b = 0$  при  $(l - b) - b = 0 \Rightarrow b = \frac{l}{2} \Rightarrow$

Бипризму надо поставить посередине между источником и экраном.

5. Кольца Ньютона.



Круговые полосы возникают на сферической поверхности в результате интерференции лучей 1 и 2, отраженных от сферической поверхности (2) и от нижней пластины (1), как показано на рисунке.

В воздушном зазоре волна 1 приобретает за счет отражения от оптически более плотной среды  $\frac{\lambda}{2}$ .

$\Delta \cong 2b + \frac{\lambda}{2} \leftarrow$  оптическая разность хода луча 1 и луча 2.

Здесь и в дальнейшем  $\lambda$  – длина волны в вакууме,  $b$  – расстояние между линзой и пластинкой для рассматриваемого

радиуса  $r$ .

Вычислим радиусы светлых колец  $r_{\max_m}$ :

$R^2 = r^2 + (R - b)^2 \approx R^2 + r^2 - 2Rb \Rightarrow b \approx \frac{r^2}{2R} \Rightarrow r \approx \sqrt{2Rb}$ .

$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} \lambda \cdot m \leftarrow \text{max} - \text{максимум интенсивности} \\ \lambda \cdot \left(m + \frac{1}{2}\right) \leftarrow \text{min} - \text{минимум интенсивности.} \end{cases}$

$r_{\max_m} = \sqrt{\lambda \left(m - \frac{1}{2}\right) R}$  – радиусы светлых колец.

Для больших  $m \gg 1$  ширина интерференционной полосы:

$(\Delta r)_m = r_{m+1} - r_m = \sqrt{\lambda R} \left( \sqrt{m + \frac{1}{2}} - \sqrt{m - \frac{1}{2}} \right) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda R}{m}}$ .

Радиус когерентности определяется из условия  $\rho_{\text{коз}} = \frac{\lambda R}{D}$ .

$2b + \frac{\lambda}{2} < \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \Rightarrow 2b = 2 \frac{r_{\max}^2}{2R} = \frac{R\lambda m_{\max}}{R} < \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \Rightarrow m_{\max_1} < \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  – ограничение числа

колец из условия временной когерентности.

Из условия пространственной когерентности найдем  $m_{\max_2}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{\max} = \frac{r_{\max}}{R} \\ 2b_{\max} \cdot \theta_{\max} < \rho_{\text{коз}} = \frac{\lambda R}{D} \Rightarrow \\ b_{\max} = \frac{r_{\max}^2}{2R} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow r_{\max} < R \cdot \left(\frac{\lambda}{D}\right)^{1/3} \Rightarrow m_{\max_2} < R \cdot \left(\frac{1}{\lambda D^2}\right)^{1/3}.$$

Это ограничение числа колец из условия пространственной когерентности.

Максимальное число колец  $N_{\max} = \min\left\{\frac{\lambda}{\Delta\lambda}; R \cdot \left(\frac{1}{\lambda D^2}\right)^{1/3}\right\}$ , при этом максимальный радиус

интерференционного кольца  $r_{\max} \leq \min\left\{\lambda\sqrt{\frac{R}{\Delta\lambda}}; R\left(\frac{\lambda}{D}\right)^{1/3}\right\}$ .



**Вопрос.** Что произойдет с интерференционной картиной, если всю систему для наблюдения колец Ньютона поместить в воду?

**Ответ.** Если систему погрузить в воду, то:

1) оптическая разность хода  $\Delta$  луча 1 и 2 увеличится  $\uparrow$ , и поэтому радиусы колец уменьшатся  $\downarrow$ ;

2) яркость картины тоже уменьшится, так как интенсивность света, прошедшего в зазор между линзой и пластинкой,  $I_{\text{прои}} = \frac{I(n_{H_2O} - n_{cm})^2}{(n_{H_2O} + n_{cm})^2} \Rightarrow$  чем

ближе показатели преломления граничащих сред, тем меньше  $I_{\text{прои}}$ .

**б. Тонкие плоскопараллельные пластинки. Полосы равного наклона.**

Пусть толщина плоскопараллельной пластинки  $b$  и ее показатель преломления  $n$ . Найдем оптическую разность хода  $\Delta$  лучей 1 и 2, падающих на пластинку под углом  $\theta_1$ , как показано на рисунке:

$$\Delta = \frac{2bn}{\cos\theta_2} - S_1 - \frac{\lambda}{2}.$$

Последнее слагаемое возникает за счет отражения луча 2 от оптически более плотной среды, здесь  $\lambda$  – длина волны в вакууме.

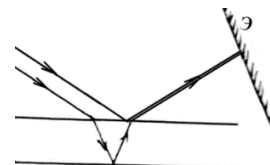
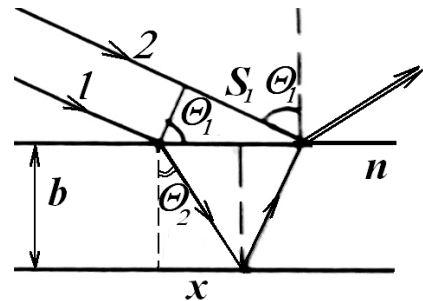
$$S_1 = 2b \cdot \text{tg}\theta_2 \sin\theta_1.$$

Из закона преломления света  $n \sin\theta_2 = \sin\theta_1 \Rightarrow$

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_2} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta_1}{n^2}} \Rightarrow$$

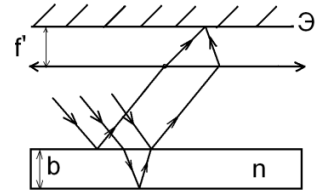
$$\Delta = \frac{2bn}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta_1}{n^2}}} - \frac{2b \cdot \sin^2\theta_1}{n\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta_1}{n^2}}} - \frac{\lambda}{2} = \frac{2bn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}} - \frac{2b \sin^2\theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}} - \frac{\lambda}{2} = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1} - \frac{\lambda}{2}.$$

Если имеем плоскую монохроматическую волну, которая падает на пластинку под углом  $\theta_1$ , то в отраженном свете не имеем никаких полос, хотя в зависимости от угла падения будем иметь различную освещенность экрана.



$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} \lambda m \leftarrow \text{max} \\ \lambda \left(m + \frac{1}{2}\right) \leftarrow \text{min} \end{cases}$$

Чтобы увидеть интерференционную картину, состоящую из светлых и темных полос, надо использовать рассеянный монохроматический свет + линзу. Поместив экран в задней фокальной плоскости, будем иметь круговые полосы разной ширины.



Ширина полос будет определяться фокусным расстоянием  $f'$  используемой линзы:

$$\Delta x_m = R_m - R_{m+1} = f'(tg \theta_{1_m} - tg \theta_{1_{m+1}});$$

$$R_m = f' \cdot tg \theta_{1_m};$$

$$tg \theta_{1_m} = \frac{\sin \theta_{1_m}}{\cos \theta_{1_m}};$$

$$\left. \begin{aligned} 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} + \frac{\lambda}{2} = \lambda(m + \frac{1}{2}) &\Rightarrow n^2 - \left(\frac{\lambda m}{2b}\right)^2 = \sin^2 \theta_{1_m} \\ \cos^2 \theta_{1_m} = 1 + \left(\frac{\lambda m}{2b}\right)^2 - n^2 & \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$tg \theta_{1_m} = \frac{\sqrt{n^2 - \left(\frac{\lambda m}{2b}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda m}{2b}\right)^2 - n^2}} = \sqrt{\frac{(2b)^2 n^2 - \lambda^2 m^2}{(2b)^2 (1-n)^2 + \lambda^2 m^2}}$$



**Вопрос.** Сколько видно колец?

**Ответ.** Количество колец соответствует разности

$$\Delta m = m_{\max}(\theta_1 = 0) - m_{\min}\left(\theta_1 = \frac{\pi}{2}\right), \text{ где } m_{\max}, m_{\min} \text{ соответствуют максимумам}$$

интенсивности для углов, близких к  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  соответственно.

$$\left. \begin{aligned} m = \left[-\frac{1}{2} + \frac{2b}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_{1_m}}\right] &\Rightarrow m_{\max}_{\theta_1=0} = \left[\frac{2bn}{\lambda} - \frac{1}{2}\right] \\ m_{\min} = \left[\frac{2b\sqrt{n^2 - 1}}{\lambda} - \frac{1}{2}\right] & \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_{\max} = \Delta m = \left[\frac{2b}{\lambda}(n - \sqrt{n^2 - 1})\right].$$

Но надо еще проверить, не исчезнут ли полосы из-за временной и пространственной некогерентности.

1) Временная когерентность.

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \frac{\lambda}{2} < l_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda};$$

$$\frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \gg \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} < \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}.$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} \sim 1 \text{ для любого } \theta_1 \text{ при } n = 1,5 \text{ (стекло)} \\ \text{для } \theta_1 = 0 \sqrt{n^2} = 1,5; \text{ для } \theta_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2 - 1} = \sqrt{1,25} = 1,1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

из временной когерентности следует ограничение на  $b < \frac{\lambda^2}{2n\Delta\lambda}$  для любого  $\theta$ .

2) Пространственная когерентность.

$\rho_{\text{коз}} = \frac{\lambda}{\varphi}$  и  $\varphi$  – это в данном случае внешние заданные параметры, так как обычно при

рассмотрении интерференции от тонких пленок источник находится вне поля зрения.

$$\rho_{\text{коз}} > 2b \cdot \text{tg} \theta_2 \cos \theta_1 = \frac{2b \cdot \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{b \cdot \sin 2\theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} \Rightarrow b \cdot \sin 2\theta_1 < \rho_{\text{коз}} \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}.$$

При  $b < \rho_{\text{коз}}$  условие пространственной когерентности соблюдено для любого  $\theta$ .

Если  $b > \rho_{\text{коз}}$ , то в области углов  $\theta \sim 45^\circ = \frac{\pi}{4}$  возможно исчезновение интерференционных полос, так как для этих углов условия пространственной когерентности особенно жесткие.

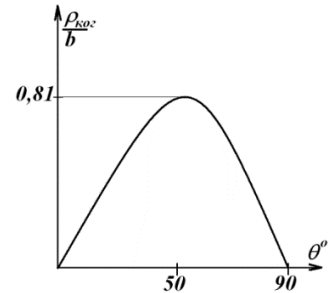
Для стекла с  $n = 1,5$

$\theta$	$10^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$50^\circ$	$55^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$
$\frac{\rho_{\text{коз}}}{b}$	0,23	0,61	0,806	0,81	0,79	0,71	0,39

Если соблюдены условия:  $b < \min \left\{ \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda n}; \frac{\lambda}{\varphi} \right\}$ ,

$$\text{то } N_{\text{max}} = \frac{2b}{\lambda} (n^2 - \sqrt{n^2 - 1}) \underset{n=1,5}{\cong} \frac{0,8b}{\lambda}.$$

$\theta_{\text{max}} = 50^\circ \uparrow$



7. Пластика переменной толщины – клин. Полосы равной толщины (ширины).



Кольца Ньютона – частный случай наблюдения интерференционной картины с помощью клина. Аналогично тому, как в случае колец Ньютона картина возникла на сферической поверхности линзы, здесь интерференционная картина возникает на поверхности клина.

Клин имеет параметры  $b_1$ ,  $b_2$  и угол  $\varphi$ .

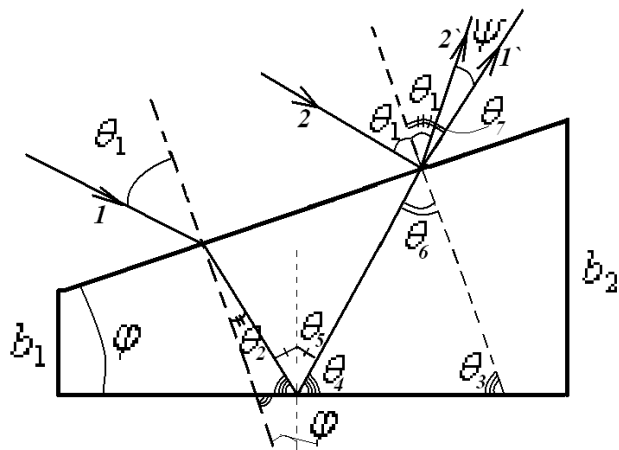
Рассмотрим, как интерферируют лучи.

Имеем параллельный пучок. В результате отражения от верхней и нижней поверхностей клина получаются 2 плоские волны с векторами  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$ , направленными под углом  $\psi$  друг относительно друга. Выразим  $\psi$  через параметры системы.

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2;$$

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} - \varphi = \theta_2 + \theta_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_4 = \theta_3 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi - \theta_2;$$



$$\theta_5 = \frac{\pi}{2} - \theta_4 = \theta_2 + \varphi;$$

$$\theta_6 + \theta_4 = \pi - \theta_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_6 = \pi - \theta_3 - \theta_4 = \pi - \frac{\pi}{2} + \varphi - \frac{\pi}{2} + \varphi + \theta_2 = \theta_2 + 2\varphi;$$

$$\sin \theta_7 = n \sin \theta_6 = n \sin(\theta_2 + 2\varphi) = n \cdot [\sin \theta_2 \cos 2\varphi + \cos \theta_2 \sin 2\varphi] = n \sin \theta_2 \cos 2\varphi + n \cos \theta_2 \sin 2\varphi;$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2\varphi \approx 1; \\ \sin 2\varphi \approx 2\varphi \\ n \sin \theta_2 = \sin \theta_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \theta_7 \approx n \sin \theta_2 + n \cdot 2\varphi \cos \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_7 - \sin \theta_1 \approx 2n\varphi \cos \theta_2;$$

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \theta_1} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}{n};$$

$$\sin \theta_7 - \sin \theta_1 \approx 2\varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1};$$

$$\sin \theta_7 - \sin \theta_1 = 2 \sin \frac{\theta_1 - \theta_7}{2} \cos \frac{\theta_1 + \theta_7}{2} \approx \psi \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1};$$

$$\psi \approx 2\varphi \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}} - \text{угол между векторами } \vec{k}_1 \text{ и } \vec{k}_2.$$

Так как  $\varphi$  – малый угол, то  $b_1 \approx b_2 \approx b$  и разность оптических длин пути луча 1 и 2 вычисляется, как для тонких плёнок  $\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \frac{\lambda}{2}$ , с той разницей, что « $b$ » в данном случае, вообще говоря, переменное.

На поверхности клина макс будут наблюдаться в точках, соответствующих значениям

$$b = b_m, \text{ для которых выполняется условие: } 2b_m \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} - \frac{\lambda}{2} = \lambda m \rightarrow b_m = \frac{\lambda \left(m + \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}.$$

$$\text{Ширина полос } \Delta x = \frac{b_{m+1} - b_m}{\sin \varphi} = x_{m+1} - x_m \approx \frac{\lambda}{2\varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}.$$

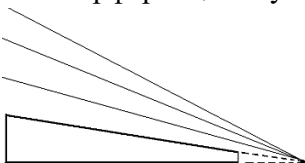
Вопрос. Можно ли использовать формулу  $\Delta x = \frac{\lambda}{\psi}$ ?

$$\text{Ответ. } \Delta x \approx \frac{\lambda}{\psi \cos \beta} = \frac{\lambda \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}}{2\varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}} = \frac{\lambda}{2\varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}, \text{ так как}$$

$$\beta = \theta_1 \Rightarrow \cos \beta = \cos \theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}.$$

Таким образом, получили другим способом то же самое выражение для расчета ширины интерференционных полос.

Интерференционную картину можно наблюдать на экране, расположив его радиально относительно вершины клина. Получаются полосы, параллельные вершине клина. В данном случае  $\rho_{\text{ког}}$  задан, так как лучи параллельны и волна плоская.  $\Rightarrow$  Ограничение на углы, под которыми можно наблюдать интерференционную картину, определяется из условий:



1) Пространственной когерентности интерферирующих волн

$$\frac{b \sin 2\theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} < \rho_{\text{ког}}.$$

При  $b < n\rho_{\text{ког}}$  это условие выполняется для любых углов падения света на клин, но при удалении экрана от поверхности клина расстояние между интерферирующими лучами увеличивается и перестает удовлетворять условию пространственной когерентности, поэтому:

1. Отчетливость интерференционной картины ближе к вершине клина, где меньше  $b$ .
2. Интерференционная картина локализована вблизи поверхности клина.

2) Из условия временной когерентности  $b < \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda n}$ .

В результате интерференционную картину можно наблюдать при толщине клина

$$b < \min\left\{\frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda n}; n\rho_{\text{ког}}\right\}.$$

**Основные результаты по интерференционным схемам сведены в одну таблицу.**

## 7. Просветление оптики



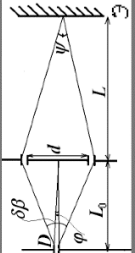
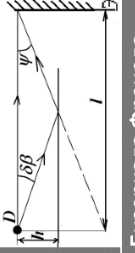

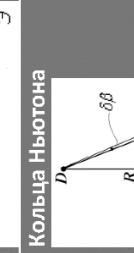

**Вопрос.** Что мы увидим, если повесим в воздухе плёнку толщиной  $b = 0,07 \text{ мкм}$  и будем освещать ее:

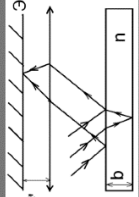
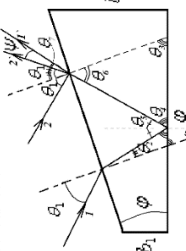
- а) лазером;
- б) обычной лампой?

**Ответ.** Как в отраженном свете, так и на просвет мы видим свет видимого диапазона, который имеет длины волн  $\lambda = 0,4 \div 0,7 \text{ мкм}$ . Пленка отражает обеими поверхностями, поэтому разность хода отраженных лучей  $\Delta_{\text{отраж. лучей}} = \frac{\lambda}{2}$ , так как

вследствие тонкости пленки в ней разность хода  $= 0$ , а на одной из поверхностей при отражении от оптически более плотной среды возникает дополнительная разность хода  $\frac{\lambda}{2}$ .

Складываясь, две отраженные волны дают 0, то есть коэффициент отражения тонкой пленки  $r = 0$ . Следовательно, мы ничего не увидим в отраженном свете, и в этом случае коэффициент пропускания  $\tau = 1$ . На этом основан принцип просветления оптики, когда на любую свободную поверхность линзы наносится тонкая (с толщиной  $b \ll \lambda$ ) пленка с  $n_{\text{пл}} \neq n_{\text{линзы}}$  (лучше всего, когда  $n_{\text{пл}} = \sqrt{n_{\text{линзы}}}$ ).

Интерференционная система	Угол между интерферирующими лучами на экране $\psi$	Ширина интерференционных полос $\Delta x = \frac{\lambda}{\psi \cdot \cos \beta}$	Угловой размер источника от места разделения лучей $\varphi$	Радиус когерентности $\rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\varphi}$	Максимальное число полос $N_{\text{max}}$	Угол между интерферирующими лучами на выходе из источника $\delta\beta$	Ограничения на геометрический размер источника $D < \frac{\lambda}{\delta\beta}$
	$\frac{d}{L}$	$\frac{\lambda L}{d}$	$\frac{D}{L_0}$	$\frac{\lambda L_0}{D}$	$\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$	$\frac{d}{L_0}$	$D < \frac{\lambda L_0}{d}$ или $d < \frac{\lambda L_0}{D}$
	$\frac{2h}{l}$	$\frac{\lambda l}{2h}$	$\frac{D(1 + \frac{\lambda l}{2hD})}{l}$	$\frac{\lambda l}{D(1 + \frac{\lambda l}{2hD})}$	$\min\left\{\frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \frac{h}{\Delta\lambda \cdot D}\right\}$	$\delta\beta_{\text{max}} = \frac{\lambda}{D}$	При $x_{\text{max}} \approx h$ $D < \frac{\lambda l}{2h}$
	$\frac{2\alpha \cdot r}{r+l}$	$\frac{\lambda(l+r)}{2\alpha \cdot r}$	$\frac{D}{r}$	$\frac{\lambda r}{D}$	$\min\left\{\frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \frac{4\alpha^2 r l}{\lambda(l+r)}\right\}$	$\frac{2\alpha \cdot l}{r+l}$	$D < \frac{\lambda(l+r)}{2\alpha \cdot l}$
	$\frac{2\theta(n-1)a}{a+b}$	$\frac{\lambda(a+b)}{2\theta \cdot a \cdot (n-1)}$	$\frac{D}{a}$	$\frac{\lambda a}{D}$	$\min\left\{\frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \frac{4\theta^2(n-1)^2 ab}{\lambda(a+b)}\right\}$	$\frac{2\theta(n-1)b}{a+b}$	$D < \frac{\lambda(a+b)}{2\theta(n-1)b}$
		$\sqrt{R\lambda} \cdot \left(\sqrt{m + \frac{1}{2}} - \sqrt{m - \frac{1}{2}}\right) \approx \sqrt{\frac{R\lambda}{m}} \cdot \frac{1}{2}$ for $m \gg 1$	$\frac{D}{R}$	$\frac{\lambda R}{D}$	$\min\left\{\frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \frac{R}{\sqrt[3]{\lambda D^2}}\right\}$	$\left(\frac{\lambda m}{R}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \delta\beta_{\text{max}} \approx \left(\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda \cdot R}\right)^{\frac{3}{2}}$	$D < \frac{\lambda R^3}{r_{\text{max}}^3}$

Интерференционная система	Угол между интерферирующими лучами на экране $\psi$	Ширина интерференционных полос $\Delta x = \frac{\lambda}{\psi \cdot \cos \beta}$	Угловой размер источника от места разделения лучей $\varphi$	Радиус когерентности $\rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\varphi}$	Максимальное число полос $N_{\text{max}}$	Угол между интерферирующими лучами на выходе из источника $\delta\beta$	Ограничения на геометрический размер источника $D < \frac{\lambda}{\delta\beta}$
Тонкие пленки – полосы равного наклона 	0	$f \left\{ \sqrt{\frac{4b^2 n^2 - m^2 \lambda^2}{4b^2 (1-n)^2 + \lambda^2 m^2}} - \sqrt{\frac{4b^2 n^2 - (m+1)^2 \lambda^2}{4b^2 (1-n)^2 + \lambda^2 (m+1)^2}} \right\}$	ЗАДАНЫ		$\frac{2b}{\lambda} (n - \sqrt{n^2 - 1})$	0	$b < \min \left\{ \frac{\lambda^2}{2n\Delta\lambda}; \rho_{\text{ког}} \right\}$
Клин – полосы равной толщины 	$\frac{2\varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}}$	$\frac{\lambda}{2\varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}$			на поверхности клина $\frac{2(b_2 - b_1) \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}{\lambda}$	0	$b < \min \left\{ \frac{\lambda^2}{2n\Delta\lambda}; \rho_{\text{ког}} \right\}$



# Глава IV. Дифракция

## 1. Принцип Гюйгенса-Френеля

1) Опред. Дифракция – совокупность явлений, сопровождающих распространение волн в среде с резкими неоднородностями и связанных с нарушением законов геометрической оптики.

«До сих пор никому не удалось удовлетворительным образом определить разницу между дифракцией и интерференцией». Эти слова принадлежат Р. Фейнману.

Отличие – условно-историческое:

- интерференция – перераспределение интенсивности в результате суперпозиции когерентных волн от двух или более (но конечного числа) источников;
- дифракция – перераспределение интенсивности в результате суперпозиции когерентных волн от непрерывного (протяженного) источника.

Но, вообще говоря, при рассмотрении интерференции мы тоже имели дело с протяженными источниками и даже были обязаны этой протяженности тем, что возникала пространственная некогерентность. Чтобы избежать пространственной некогерентности волн, мы старались уйти от источника как можно дальше, чтобы сделать его точечным. При рассмотрении дифракции мы первоначально, наоборот, не будем уходить очень далеко от источника.

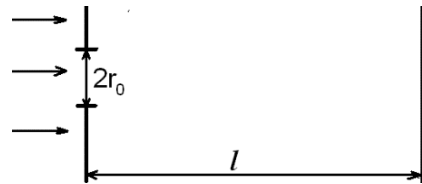
2) Пусть плоская волна падает на непрозрачный экран с отверстием  $2r_0$ .

В зависимости от положения экрана могут получаться различные картинки, в том числе и в центре экрана.

Вопрос. Что является параметром, определяющим вид картины?

Ответ. Соотношения  $\frac{\lambda}{r_0}$  и  $\frac{l}{r_0}$ .

$$\frac{\lambda}{r_0} \cdot \frac{l}{r_0} = \frac{\lambda l}{r_0^2} = \text{волновой параметр.}$$



$$\text{Если } \frac{\lambda l}{r_0^2} \begin{cases} \ll 1, \text{ т.е. } \lambda \rightarrow 0 \text{ геомтр. оптика} \\ \sim 1 \rightarrow \text{дифракция Френеля} \\ \gg 1, \text{ т.е. } \frac{l}{r_0} \gg 1 \rightarrow \text{дифракция Фраунгофера} \end{cases}$$

Дифракция Фраунгофера  $\equiv$  дифракция в параллельных лучах.

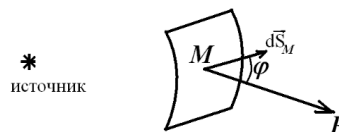
3) Понимание того, как получается интерференционная картина от одного отверстия, дает принцип Гюйгенса-Френеля:

Любой элемент  $dS_M$  волновой поверхности  $S$  служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине  $dS_M$ . При этом амплитуда сферической волны обратно пропорциональна расстоянию от элемента  $dS_M$  до точки наблюдения  $P$  ( $\sim \frac{1}{r_{MP}}$ ).



Следовательно, от любого элемента  $dS_M$  в точку  $P$  придет:

$$d\vec{E}_P(M) = k(\varphi) \cdot \vec{E}_0_{\text{перв}}(M) \frac{e^{i(\alpha\chi + \alpha_M - kr_{MP})}}{r_{MP}} \cdot dS_M.$$



Здесь  $\vec{E}_0_{\text{перв}}$  – амплитуда первичного поля в точке  $M$ ;

$k(\varphi)$  – коэффициент, который зависит только от угла между нормалью к волновому фронту и направлением излучения вторичной волны Гюйгенса,  $k(\varphi) = K_{\text{max}}$  при  $\varphi = 0$ .

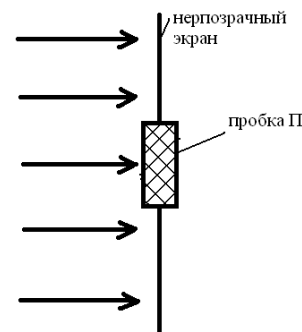
$$\vec{E}(P) = \int_S k(\varphi) \cdot \vec{E}_0_{\text{перв}}(M) \frac{e^{i(\alpha\chi + \alpha_M - kr_{MP})}}{r_{MP}} \cdot dS_M = \vec{E}_0_{\text{перв}} e^{i(\alpha\chi + \alpha_M)} \int_S k(\varphi) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot dS \quad - \text{ это}$$

$\alpha = \text{const}$  для  $\forall$  точки  $M$ , т.к.  $S$  волн. пов.

аналитическое выражение принципа Гюйгенса-Френеля.

#### 4) Обоснование принципа Гюйгенса-Френеля.

Любая точка экрана под действием  $\vec{E}_{\text{перв}}$  излучает  $\vec{E}_{\text{втор}}$  – вторичные сферические волны такие, что слева возникают стоячие волны, а справа  $\uparrow \vec{E}_{\text{перв}} + \downarrow \vec{E}_{\text{втор}} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{\text{перв}} = -\vec{E}_{\text{втор}}$ .



Выделим часть экрана, перекрыв ее пробкой П, тогда отсутствие волн справа дает следующее условие:

$$0 = \vec{E}_{\text{перв}} + \int_{\text{пробка}} d\vec{E}_{\text{втор}} + \int_{\text{экран}} d\vec{E}_{\text{втор}}.$$

Если вынуть пробку, то справа:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{перв}} + \int_{\text{экран}} d\vec{E}_{\text{втор}} = -\int_{\text{пробка}} d\vec{E}_{\text{втор}} = \int_{\text{пробка}} d\vec{E}_{\text{перв}}, \text{ так как } d\vec{E}_{\text{перв}} = -d\vec{E}_{\text{втор}}.$$

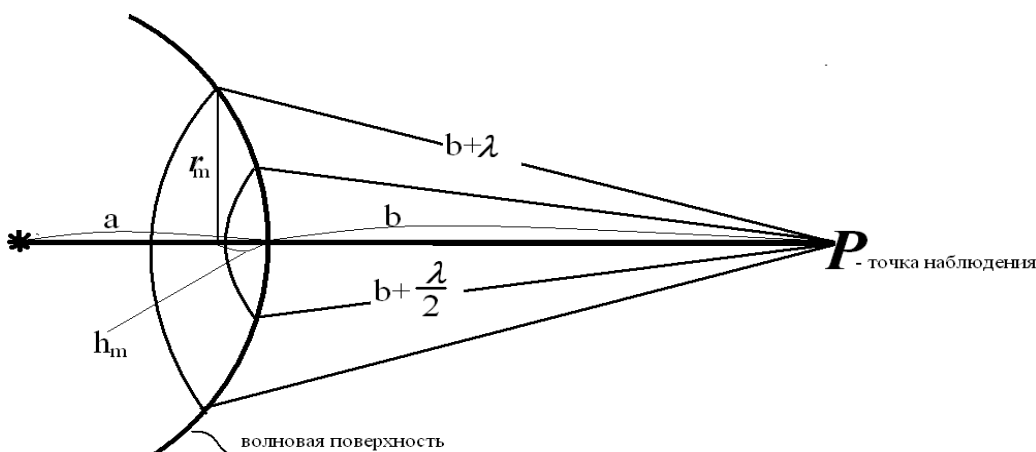
То есть любую точку открытой волновой поверхности можно рассматривать как суперпозицию источников вторичных волн. В этом суть принципа Гюйгенса-Френеля.



## 2. Дифракция сферической волны от круглого отверстия и круглого диска. Зоны Френеля

### 1) Радиусы зон Френеля.

Рассмотрим изотропную однородную среду и точечный источник  $S$ .



Пусть  $a$  – расстояние от источника  $S$  до рассматриваемой волновой поверхности,  $b$  – расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения  $P$ . Разобьем волновую поверхность на кольцевые зоны следующим образом: расстояние от краев каждой зоны до точки  $P$  отличается на  $\frac{\lambda}{2}$  от соответствующего расстояния для предыдущей и последующей зон. Тогда для геометрических размеров  $m$ -й зоны будем иметь следующее соотношение:

$$r_m^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2} m\right)^2 - (b + h_m)^2 = a^2 - (a - h_m)^2 \Rightarrow ;$$

$$b^2 + b\lambda m + \left(\frac{\lambda m}{2}\right)^2 - b^2 - 2bh_m - h_m^2 = a^2 - a^2 + 2ah_m - h_m^2 \Rightarrow$$

$$2h_m(a + b) = b\lambda m + \left(\frac{\lambda m}{2}\right)^2 \Rightarrow h_m = \frac{b\lambda m + \left(\frac{\lambda}{2} m\right)^2}{2(a + b)} \approx \frac{b\lambda m}{2(a + b)} ;$$

$$r_m \approx \sqrt{2ah_m} = \sqrt{\frac{ab}{a + b}} \cdot \lambda m.$$

Зоны, расстояния от границ которых на сферической волновой поверхности до точки наблюдения равны  $b + \frac{\lambda}{2} m$  ( $m = 1, \dots, N, \dots$ ), называются зонами Френеля.



Суть зон Френеля в том, что в пределах каждой из них фазы колебаний, приходящих от любой точки волновой поверхности, лежат в пределах  $\pi$  (то есть отличаются друг от друга не более чем на  $\pi$ ).

2) Площади зон Френеля.

Площадь сферического сегмента  $S_m = 2\pi R \cdot h_m = \frac{\pi ab \lambda m}{a + b} \Rightarrow$   
радиус сферы R=a

$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \frac{\pi ab \lambda}{a + b} \leftarrow$  не зависит от  $m$ .  $\Rightarrow$  Так как расстояние до точки наблюдения растет  $\uparrow$  с ростом  $\uparrow m$ , то амплитуда колебаний  $A_m \downarrow$  убывает  $\Rightarrow A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_m > \dots$

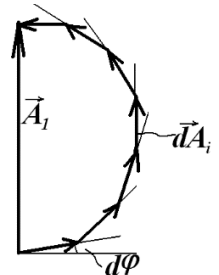
3) Суммарная амплитуда колебаний в точке P:

$$A_\Sigma = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots + A_m - \dots = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots + \left(\frac{A_m}{2} - A_{m+1} + \frac{A_{m+2}}{2}\right).$$

Так как с ростом  $\uparrow m$  амплитуда  $A_m \downarrow$  убывает очень медленно от зоны к зоне, то можно считать  $A_m \approx \frac{A_{m+1} + A_{m-1}}{2}$  для любого  $m$ . Тогда  $A_\Sigma = \frac{A_1}{2}$ , то есть амплитуда колебаний, создаваемая в точке  $P$  всеми зонами открытой волновой поверхности, равна половине амплитуды, создаваемой в этой точке первой зоной.

4) Метод графического сложения амплитуд.

Разобьем первую зону на  $m$  малых подзон равной площади. Любая из подзон будет давать амплитуду  $d\vec{A}_i$ , причем колебание от каждой последующей подзоны  $d\vec{A}_{i+1}$  будет иметь сдвиг фазы  $d\phi$  относительно колебания от предшествующей подзоны  $d\vec{A}_i$ .



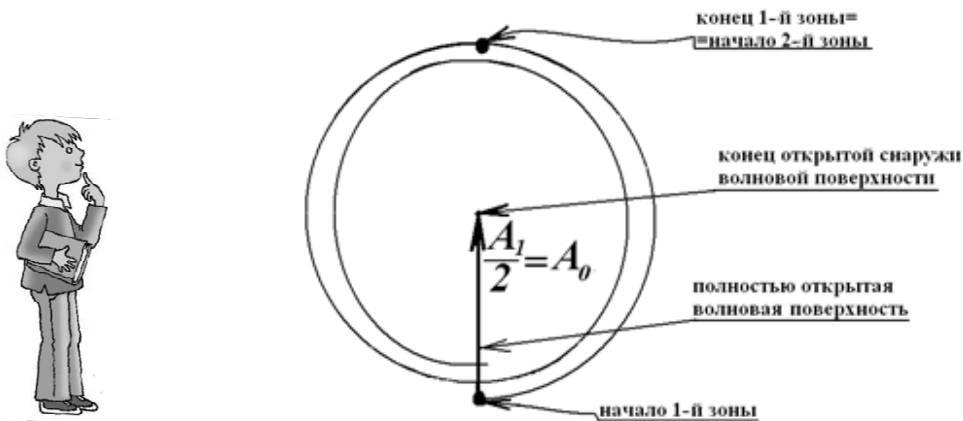
Так как, дойдя до границы первой зоны со второй, должны получить сдвиг фазы на  $\pi$ , то  $d\varphi = \frac{\pi}{m}$ . Соединив начало и конец всех векторов  $d\vec{A}_i$  ( $i=1, \dots, m$ ), пристроенных друг к другу, получим амплитуду колебаний  $\vec{A}_1$ , приходящих от первой зоны Френеля.

Аналогично для второй и всех последующих зон получим скручивающуюся спираль с центром в точке  $\frac{A_1}{2}$ . Так как конец спирали соответствует всем открытым зонам, то есть отсутствию преград между источником и точкой наблюдения, то, следовательно, амплитуда колебаний  $A_\Sigma$ , создаваемых всеми открытыми зонами, равна  $\frac{A_1}{2}$ . С другой стороны, амплитуда колебаний от всех открытых зон соответствует интенсивности света падающей волны

$$I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} A_0^2 \Rightarrow A_0 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0 = A_\Sigma = \frac{A_1}{2}.$$

Таким образом, интенсивность света, приходящего от первой зоны Френеля,  $I_1 = 4I_0$ .

**Вывод.** Спираль Френеля имеет следующий вид:



5) Относительность количества зон Френеля.

Необходимо иметь в виду, что количество открытых зон определяется исключительно расположением точки наблюдения относительно отверстия в преграде и его размером. Одно и то же отверстие может открывать сколько угодно зон Френеля в зависимости от расположения точки наблюдения. При этом, чем ближе к отверстию точка  $P$ , тем больше зон открыто.

Сформулируем критерии дифракции «на языке» зон Френеля:

$$m \approx \frac{r_0^2(a+b)}{ab\lambda} \underset{b=l}{=} \frac{r_0^2}{\lambda l} \cdot \frac{a+l}{a}.$$

Для  $a \gg b = l$   $m \approx \frac{r_0^2}{\lambda l}$ .

$m \gg 1 \Rightarrow \frac{\lambda l}{r_0^2} \ll 1$  – геометрическая оптика;

$m \sim 1$  – дифракция Френеля;

$m \ll 1 \Rightarrow \frac{\lambda l}{r_0^2} \gg 1$  – дифракция Фраунгофера, дифракция в параллельных лучах.



6) Принципы работы с диаграммой Френеля.

Амплитуда суммарных колебаний в точке  $P$  определяется по спирали Френеля следующим образом:

1. Изображается спираль с радиусом  $A_0 = \sqrt{2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0}$ , где  $I_0$  – интенсивность падающей

волны. (Вектор, проведенный из начала первой зоны Френеля в центр спирали, соответствует полностью открытой волновой поверхности.)

2. Если имеется одна или несколько подряд открытых зон, то проводится вектор  $\vec{A}_{\Sigma_1}$ , начало которого совпадает с началом открытой зоны с наименьшим номером, конец вектора  $\vec{A}_{\Sigma_1}$  совпадает с концом открытой зоны с максимальным номером.

3. Если открытые зоны чередуются с закрытыми, то, в соответствии с пунктом 2, последовательно строятся вектора  $\vec{A}_{\Sigma_i}$  для всех  $i$  открытых областей.

Вектор от внешних открытых областей заканчивается в центре спирали.

4. Результирующий вектор в точке наблюдения  $\vec{A}_P = \sum_i \vec{A}_{\Sigma_i}$  находится по правилу

сложения векторов, при этом, как правило, проще вычислять векторную сумму покомпонентно:

$$A_{Px} = \sum_i \vec{A}_{\Sigma_{ix}}; A_{Py} = \sum_i \vec{A}_{\Sigma_{iy}} \Rightarrow \vec{A}_P = A_{Px} \cdot \vec{e}_x + A_{Py} \cdot \vec{e}_y \Rightarrow A_P^2 = A_{Px}^2 + A_{Py}^2.$$

5. Интенсивность в точке наблюдения  $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} A_P^2$ .

7) Примеры.

1. Интенсивность падающей волны  $I_0$ . Можно ли получить в точке  $P$   $I_P > I_0$ ?

Ставим экран так, чтобы радиус отверстия для точки  $P$  соответствовал радиусу первой зоны Френеля  $r = r_1$ , и имеем  $A_{\Sigma} = A_1 \rightarrow I_P = 4I_0$ .



Вопрос. Откуда берется дополнительная энергия?

Ответ. Перераспределяется за счет темных областей.

2. Теперь хотим иметь в точке  $P$   $I_P = 0 \Rightarrow r = r_2$ , где  $r$  – радиус отверстия в экране.

$$A_{\Sigma} \approx 0 \Rightarrow I_P = 0.$$

3. Вопрос 1. Можно ли получить  $I_P > 4I_0$ ?

Ответ. Да, с помощью зонной пластинки, которая перекрывает, например, четные зоны (можно перекрывать вместо четных нечетные зоны).

Вопрос. Какую  $I_{\max}$  можно получить?

Решение.

Пусть  $I_0$  – интенсивность падающей волны;

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = \rho = 0,95 \text{ – коэффициент уменьшения амплитуды с ростом номера зоны } i.$$

Тогда для амплитуд открытых нечетных зон имеем:

$$A_m = A_1 \rho^{m-1} e^{i(\alpha x + (m-1)\pi)}, \text{ где } m = 2n + 1 \text{ (} n = 0, 1, \dots \text{)}.$$

$$A_P = A_1 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b_1 = 1 \\ q = \rho^2 \end{matrix} \right\} \leftarrow \text{геометрическая прогрессия.}$$

$$S_{\infty} = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\rho^2} \Rightarrow$$

$$A_p = \frac{A_1}{1-\rho^2}; \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{A_1^2}{8} = I_0 \Rightarrow A_1 = \frac{2\sqrt{2I_0}}{\sqrt[4]{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}} \Rightarrow$$

$$I_p = \frac{A_p^2}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{A_1^2}{2(1-\rho^2)^2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{4I_0}{(1-\rho^2)^2} \cong 421 \cdot I_0.$$

4. Диски.

а)  $r = r_1 \rightarrow I_p = I_0 \rightarrow$



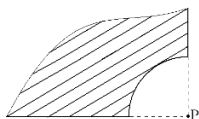
Парадокс заключается в том, что в области геометрической тени всегда существует

свет.

б)  $r = r_2 \rightarrow I_p = I_0 \rightarrow$

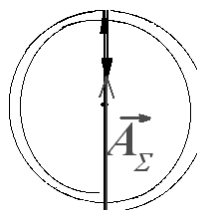


5. Открыты  $\frac{3}{4}$  каждой зоны + первая зона.



$$A_\Sigma = A_1 - \frac{3}{4} \left( \frac{A_1}{2} \right) = 2A_0 - \frac{3}{4} A_0 = \frac{5}{4} A_0$$

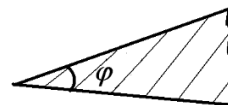
$$I_p = \frac{25}{16} I_0, \text{ где } A_0 - \text{ радиус спирали.}$$



6. Известна интенсивность падающей волны  $I_0$  и интенсивность  $I_p$  в точке наблюдения  $P$ , находящейся за экраном, представляющем собой сектор с углом  $\varphi$ . Найти  $\varphi$ .

Решение.

$$\varphi \Rightarrow A = A_0 \left( 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \Rightarrow I_p = I_0 \left( 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^2 \Rightarrow \varphi = 2\pi \left( 1 - \sqrt{\frac{I_p}{I_0}} \right)$$



$\frac{I_p}{I_0}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$
$\varphi$	$\pi$	$2\pi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

7. На пути плоской волны стоит стеклянный диск с показателем преломления  $n$  и радиусом  $R$ , перекрывающий для точки наблюдения  $P$  полторы первые зоны Френеля. При какой толщине диска  $d$  интенсивность в точке  $P$  будет максимальной  $I_p - \max$ ?

Решение.

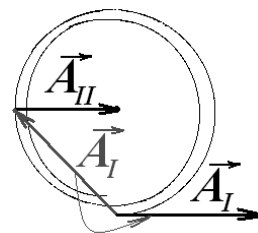
$\Delta = (n-1)d$  – оптическая разность хода, возникающая из-за

движения света в стекле, а не в воздухе. Запаздывание по фазе  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$

приводит к вращению против часовой стрелки вектора колебаний, приходящего от зон, перекрытых стеклянным диском.

От открытой части приходит вектор  $\vec{A}_{II}$ .

От 1,5 зон, перекрытых стеклянным диском, приходит вектор  $\vec{A}_I$ .



$I_p - \max$ , если  $\vec{A}_I \uparrow \uparrow \vec{A}_{II} \Rightarrow$  стекло должно повернуть  $\vec{A}_{II}$  на угол:

$$\delta = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m, \text{ где } m = 1, 2, \dots$$

(Стекло может вращать вектор амплитуды  $A_I$  только против часовой стрелки.)

$$2\pi \cdot m + \frac{5}{4}\pi = (n-1) \frac{2\pi}{\lambda} d \Rightarrow$$

$$d_{\max} = \frac{\lambda}{n-1} \left[ \frac{5}{8} + m \right] - \text{толщина, которая соответствует } I_{\max} \text{ в точке } P.$$

$$\text{При этом } I_{\max, p} = \frac{1}{2} A_{\Sigma}^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{2} (A_0 + A_0 \sqrt{2})^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = I_0 (3 + 2\sqrt{2}).$$

### 3. Дифракция Френеля от края полуплоскости и от щели. Спираль Корню

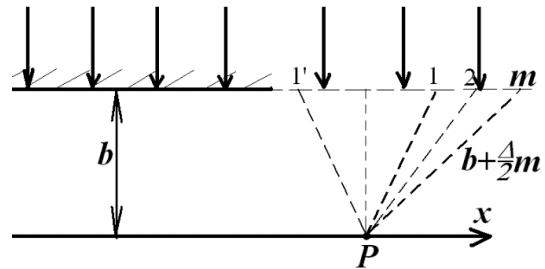
1) Рассмотрим плоскую волну, перекрытую экраном в виде полуплоскости.

Пусть т.  $P$  – точка наблюдения на экране, совпадающем с осью  $x$ .

В этом случае зоны не круглые, а линейные.

$$x_m^2 = \left( b + \frac{\Delta}{2} m \right)^2 - b^2 \approx b\Delta \cdot m;$$

$$S_{m+1} \sim x_{m+1} - x_m = \sqrt{b\Delta} \cdot (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}),$$

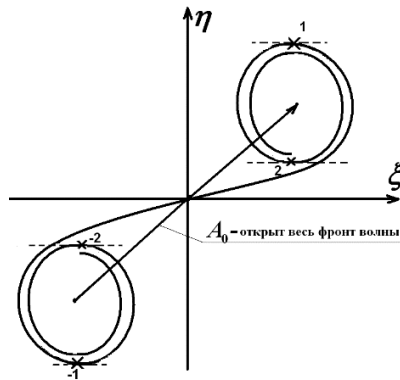


то есть в данном случае с ростом номера зоны  $m \uparrow$  площадь зоны уменьшается  $\downarrow S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 1 : 0,41 : 0,32 : 0,27 \Rightarrow$  Амплитуда от разных зон сначала убывает быстро, затем медленно, в отличие от кольцевых зон, для которых амплитуда убывает очень медленно с ростом номера зоны, так как все кольцевые зоны имеют одинаковые площади.

Если  $\Delta = \lambda$ , то это по сути своей зоны Френеля, которые в данном случае называются зонами Шустера.

2) Спираль Корню.

левые (штрихованные) зоны  $\rightarrow$



$\leftarrow$  правые (нештрихованные) зоны



Спираль Корню задается в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \xi = \int_0^v \cos \frac{\pi u^2}{2} du & d\xi = \cos \frac{\pi v^2}{2} dv \\ \eta = \int_0^v \sin \frac{\pi u^2}{2} du & d\eta = \sin \frac{\pi v^2}{2} dv \end{cases} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \frac{\pi v^2}{2} = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi v^2}{2}.$$



Границы зон соответствуют точкам спирали, в которых касательная к спирали параллельна оси  $\xi \Rightarrow \frac{d\eta}{d\xi} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi v^2}{2} = \pi \cdot m$ , то есть  $v^2 = 2m$ ,

где  $m$  – номер зоны Шустера.

Точки 1,2,-1,-2 – соответствуют границам зон.

Так как  $\begin{cases} x_m^2 = \lambda b m \\ v_m^2 = 2m \end{cases} \Rightarrow \frac{x_m^2}{v_m^2} = \frac{\lambda b}{2} \rightarrow v = x \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}$ , здесь  $x$  – расстояние до точки наблюдения  $P$

от границы геометрической тени.

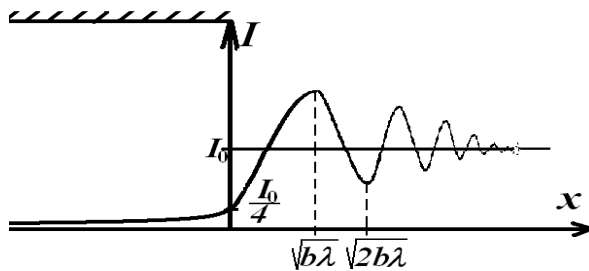
$|v|$  – длина спирали от начала координат до данной точки. Она определяет угол  $\theta$  наклона касательной  $\theta = \frac{\pi v^2}{2}$ .

3) Чем хороша спираль Корню:

она дает возможность найти интенсивность в любой точке  $x$  на экране.

← это движение соответствует тому, что точка  $P$  въезжает под полуплоскость.

→ это движение соответствует тому, что точка  $P$  движется вправо от края полуплоскости.

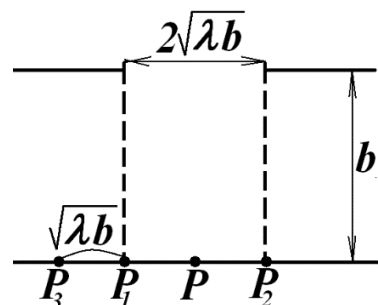


Интенсивность в точке  $P$  можно получить из спирали Френеля для преграды, закрывающей фронт волны с  $\varphi = \pi$ , то есть при этом все зоны наполовину закрыты, следовательно,

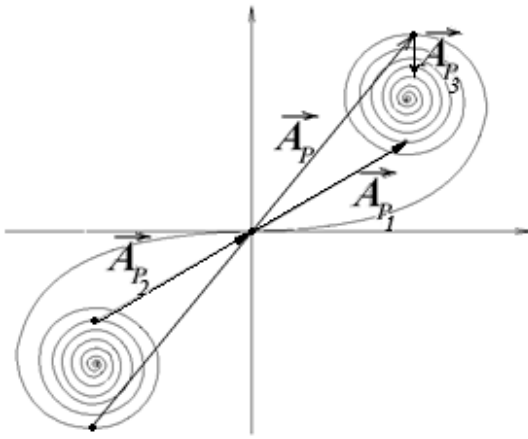
$A_p = \frac{A_0}{2} \rightarrow I = \frac{I_0}{4} \Rightarrow \frac{A_0}{2}$  – расстояние от начала координат на спирали Корню до центра верхней спирали.

4) Если имеем щель, то это две полуплоскости.

Для точки  $P$ , лежащей против середины щели, начало и конец результирующего вектора находятся симметрично на спирали Корню.



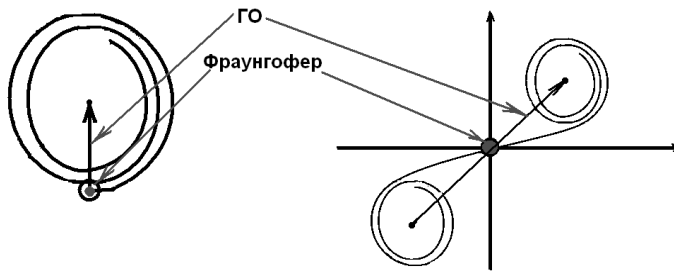




Если для точки  $P$  открыты две первых зоны, то для точки  $P_1$  и  $P_2$  открыто по 4, соответственно, правых и левых зоны. Если точка  $P_3$  «заползла» на ширину первой зоны под левую полуплоскость, то для нее начало вектора амплитуды соответствует началу второй правой зоны, а конец – концу девятой зоны  $\Rightarrow I_{P_3} \approx 0$ .



5) Совместим спираль Френеля и спираль Корню и посмотрим, где какая дифракция:



6) Вопрос 1. Можно ли наблюдать дифракцию Френеля от солнечного света на щели  $d = 0,5 \text{ мм}$  ?

Ответ. Нет, так как радиус когерентности солнечного света  $\rho_{\text{солн света}} = 0,05 \text{ мм}$ .

Вопрос 2. Можно ли наблюдать дифракцию от солнечного света на краю Луны (во время солнечного затмения)?

Ответ. Затруднительно, так как ширина полосы дифракционной картины

$$\Delta x \sim S_1 \sim \sqrt{b\lambda} = \sqrt{3,8 \cdot 10^8 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = \sqrt{1,9 \cdot 10^2} \approx 14 \text{ м}.$$



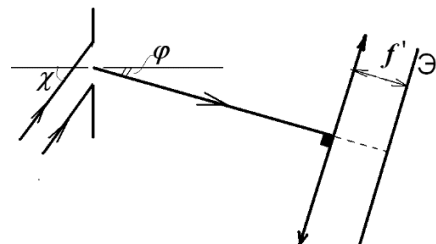
## 4. Дифракция Фраунгофера

1) Дифракция Фраунгофера – дифракция в параллельных лучах.

$$a = \infty, \quad m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{r_0^2}{\lambda b} = \frac{r_0^2}{\lambda l} \ll 1, \quad \text{то есть } \frac{\lambda l}{r_0^2} \gg 1,$$

где  $r_0$  – радиус отверстия.

Рассматривая дифракцию Фраунгофера, будем в дальнейшем обозначать буквой  $b$  ширину щели, а не расстояние от отверстия до точки наблюдения.





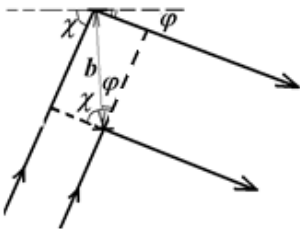
При френелевской дифракции разность хода возникала за счет непараллельности лучей.

Дифракция Фраунгофера обусловлена разностью фаз, связанной с углом  $\chi$  падения света на преграду и углом  $\varphi$  падения света на экран.

Из-за малой интенсивности дифракция Фраунгофера наблюдается с помощью собирающей линзы, в задней фокальной плоскости которой размещается экран.

2) Воспользуемся графическим методом нахождения суммарной амплитуды  $A_\Sigma$ .

Разобьем щель на  $N$  отрезков равной площади и будем рассматривать каждый отрезок как самостоятельный источник, который испускает волны по всем направлениям, в частности, в направлении  $\varphi$  (под углом  $\varphi$ ). Так как площади всех рассматриваемых источников одинаковы, то приходящие от каждого из них колебания должны иметь одинаковую амплитуду  $\delta A_1 = \frac{A_0}{N}$ , где  $A_0$  – амплитуда падающей волны. При этом волна  $\delta \vec{A}_i$ , приходящая от каждого последующего источника, будет поворачиваться относительно волны  $\delta \vec{A}_{i-1}$  от предыдущего источника на угол  $\delta\varphi_1$  за счет дополнительной разности хода  $\Delta_1$  указанных волн от источников к точке наблюдения.



От соседних источников разность хода лучей

$$\Delta_1 = \frac{b}{N} (\sin \chi - \sin \varphi) \Rightarrow$$

Разность фаз волн, приходящих от соседних источников,

$$\delta\varphi_1 = \frac{b}{N} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \chi - \sin \varphi).$$

(« $\leftarrow$ » так как угол  $\varphi < 0$  в данном случае.)

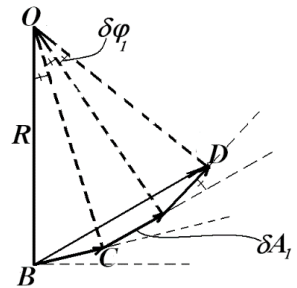
$$\text{Из } \triangle BOC \Rightarrow \delta A_1 = 2R \cdot \sin \frac{\delta\varphi_1}{2} = 2R \cdot \sin \left\{ \frac{\pi b}{\lambda N} (\sin \chi - \sin \varphi) \right\}.$$

Введем обозначение:

$$\frac{\delta\varphi_1}{2} N = \xi = \frac{\pi b}{\lambda} (\sin \chi - \sin \varphi) - \text{разность фаз волн, приходящих от}$$

границы щели и ее середины.

Теперь, рассмотрев  $\triangle BOD$ , получим амплитуду колебаний, приходящих в точку наблюдения, расположенную под углом наблюдения  $\varphi$ :



$$A_\Sigma = 2R \sin \frac{\delta\varphi_1 \cdot N}{2} = \frac{\delta A_1 \sin \xi}{\sin \frac{\xi}{N}} = A_0 \frac{1}{N} \frac{\sin \xi}{\sin \frac{\xi}{N}} = A_0 \cdot \frac{\frac{\xi}{N}}{\sin \frac{\xi}{N}} \cdot \frac{\sin \xi}{\xi} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} A_0 \cdot \frac{\sin \xi}{\xi} = A_\Sigma.$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} - \text{интенсивность в точке наблюдения, расположенной под углом наблюдения } \varphi.$$

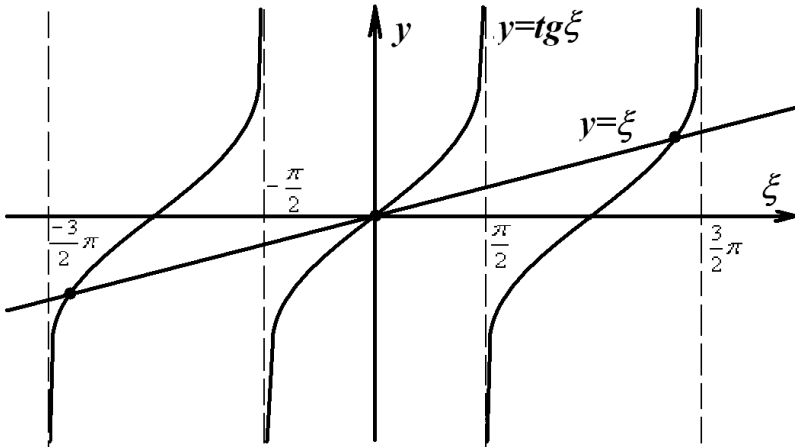
3) Найдем положения максимумов, дифференцируя  $A_\Sigma$  по  $\xi$ :

$$A'_\Sigma = 0 = \left( \frac{\sin \xi}{\xi} \right)' \Rightarrow \xi \cos \xi - \sin \xi = 0 \Rightarrow \text{tg } \xi = \xi - \text{условие максимумов.}$$

**Вопрос.** Сколько их?

**Ответ.** При  $b \sim 10^{-4} \text{ м}$ ,  $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} \Rightarrow \frac{b}{\lambda} \sim 10^3$ , то есть максимумов много,

так как много точек пересечения.



Условие максимума:  $\xi = 0 + \xi \approx \frac{\pi}{2} + \pi m = \frac{\pi}{2}(2m + 1)$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

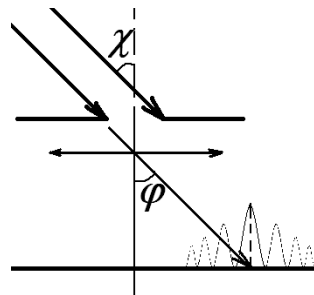
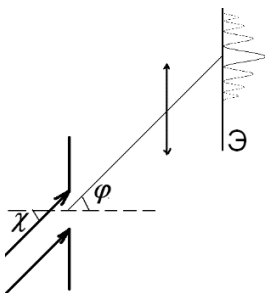
$$\frac{\pi \cdot b}{\lambda} (\sin \chi - \sin \varphi) = \frac{\pi}{2} (2m + 1) \Rightarrow$$

$\sin \varphi_{\max} = \sin \chi - \frac{\lambda}{2b} (2m + 1)$  – условие для всех максимумов, кроме центрального.

При  $\chi = 0$  общее число максимумов ограничено условием  $m < \frac{b}{\lambda}$ , так как  $\sin \varphi \leq 1$ .

4) **Вопрос.** Где располагается главный максимум, если свет падает на щель под углом  $\chi$ ?

**Ответ.** Изображенный на рисунке главный максимум находится под углом  $\varphi_{\max} = \chi$ .



5) **Вопрос.** Как соотносятся интенсивности в максимумах  $I_{\max}$  ?

**Ответ.**  $I_{\max_0} : I_{\max_1} = I_0 : \frac{I_0}{\xi_{\max_1}^2} = \frac{I_0}{I_0} \xi_{\max_1}^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 3^2 ;$

$$\xi_{\max_1} = -\frac{\pi \cdot b}{\lambda} [\sin \varphi_{\max_1} - \sin \chi] = -\frac{\pi \cdot b}{\lambda} \left( \sin \chi - \frac{\lambda \cdot 3}{2b} - \sin \chi \right) = \frac{\pi}{2} \cdot 3 ;$$

$I_{\max_0} : I_{\max_1} : I_{\max_2} : \dots = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008 : \dots$ , то есть интенсивность быстро убывает.



6) Угловая ширина полос определяется из рисунка  $tg\xi = \xi \Rightarrow$

Угловая ширина центрального максимума  $\Delta\varphi_{центр} \approx 2\frac{\lambda}{b}$  в два раза больше, чем остальных

$$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{b}.$$

Условие минимумов:  $\frac{\pi \cdot b}{\lambda} (\sin \chi - \sin \varphi_{\min}) = \pi \cdot m, m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Пусть  $\chi = 0 \Rightarrow \sin \varphi_{\min} = \frac{\lambda \cdot m}{b}$ .

Так как  $\varphi$  малы  $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{b}$ , а центральный максимум  $\Delta\varphi_0 = \frac{2\lambda}{b}$ .



7) Линейная ширина максимума:

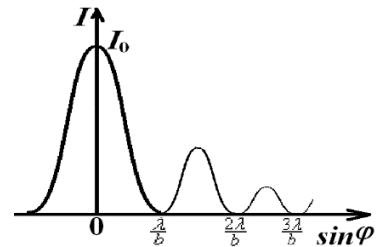
$\Delta x = l \cdot \Delta\varphi = \frac{\lambda \cdot l}{b}$ , для центрального максимума  $\Delta x_0 = \frac{2\lambda \cdot l}{b}$ , здесь  $l$  – фокусное расстояние

линзы, с помощью которой наблюдается дифракция.

$\frac{\Delta x_0}{b} = \frac{2\lambda l}{b^2} \gg 1$ , то есть ширина максимума  $\gg b$ .

Если наблюдаем дифракцию не на щели, а на тонком объекте радиуса  $r_0$  (например, на волосе), то линейная ширина центрального максимума

$\Delta x_0 = \frac{2\lambda \cdot l}{b} = \frac{\lambda l}{r_0} \Rightarrow r_0 = \frac{\lambda l}{\Delta x_0}$  – толщина объекта (волоса).



8) Изобразим картину дифракции Фраунгофера.

9) Суть дифракции Фраунгофера «на пальцах».

Количество максимумов  $N_{\max}$  определяется тем, сколько раз на ширине щели

укладывается длина волны  $\lambda$ :  $N_{\max} = (2m_{\max} + 1)$ , где  $m_{\max} \leq \frac{b}{\lambda}$ .

Если удалять экран от щели, увеличивая  $\uparrow l$ , или, не изменяя  $l$ , уменьшать ширину щели  $\downarrow b$ , будем иметь переход от геометрической оптики к дифракции Френеля, а затем к дифракции Фраунгофера, то есть критерием геометрической оптики является условие  $\frac{\lambda l}{r_0^2} \ll 1$  или  $m \gg 1$ , а не  $\lambda \ll b$ , так как если при этом имеем  $\frac{b}{l} \sim \frac{\lambda}{b}$ , то будет реализована

дифракция Френеля, а если  $\frac{b}{l} \ll \frac{\lambda}{b}$ , то реализуется дифракция Фраунгофера, а не геометрическая оптика.

## 5. Дифракционная решетка

1) Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на системе щелей (до  $5 \cdot 10^4$ ) и найдем интенсивность в произвольной точке экрана в зависимости от ее положения на экране и интенсивности падающей волны  $I_0$ .

Пусть  $b$  – размер щели,  $d$  – период дифракционной решетки.

В данном случае реализуется совокупность двух процессов:

1. Дифракция от одной щели

$$I_1 = I_0 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}; \quad A_1 = A_0 \frac{\sin \xi}{\xi}; \quad \xi = \frac{\pi \cdot b}{\lambda} (\sin \chi - \sin \varphi).$$

2. Интерференция от различных щелей дает сложение  $\vec{A}_i$ , повернутых друг относительно друга на угол  $\varphi$ , определяемый оптической разностью хода от соседних щелей  $\Delta = d(\sin \chi - \sin \varphi)$ .

Разность фаз волн, приходящих от соседних щелей,  
 $\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} (\sin \chi - \sin \varphi)$ .  $\Rightarrow$  Введем обозначение:

$\frac{\delta}{2} = \eta = \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \chi - \sin \varphi)$  – половина разности фаз волн, приходящих от соседних щелей.

Найдем суммарную амплитуду колебаний  $A_\Sigma$ , приходящих в произвольную точку экрана, от всех щелей, воспользовавшись уже знакомым нам методом графического сложения амплитуд:

$$2R = \frac{A_1}{\sin \frac{\delta}{2}} \Rightarrow$$

$$A_\Sigma = 2R \sin \frac{N\delta}{2} = \frac{A_1}{\sin \frac{\delta}{2}} \cdot \sin \frac{N\delta}{2} = \frac{A_1}{\sin \eta} \cdot \sin N\eta =$$

$$= A_0 \frac{\sin \xi}{\xi} \cdot \frac{\sin \eta N}{\sin \eta} = A_\Sigma \Rightarrow I = I_0 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} \cdot \frac{\sin^2 N\eta}{\sin^2 \eta}.$$

$\frac{\sin N\eta}{\sin \eta}$  – быстро осциллирующий множитель.

2) Найдем положение центрального главного максимума. Он реализуется для угла наблюдения  $\varphi = \chi$ . Вычислим интенсивность  $I(\varphi = \chi) = I_{\text{центр. макс}}$ .

$$\varphi = \chi \rightarrow \begin{cases} \xi = 0 & \sin \xi = 0 \\ \eta = 0 & \sin \eta = 0 & \sin N\eta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A_\Sigma = NA_1 \Rightarrow I_{\text{центр. макс}} = N^2 I_0, \text{ так как центральный главный}$$

максимум расположен в той точке, куда от всех щелей приходят колебания в одной фазе с нулевой разностью хода независимо от  $\lambda \Rightarrow$  цвет центрального максимума белый.

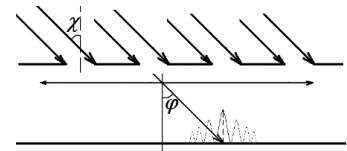
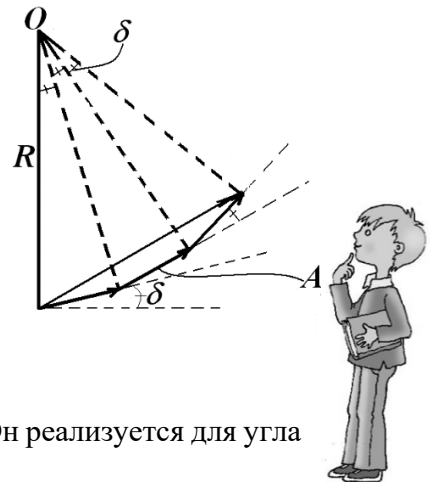
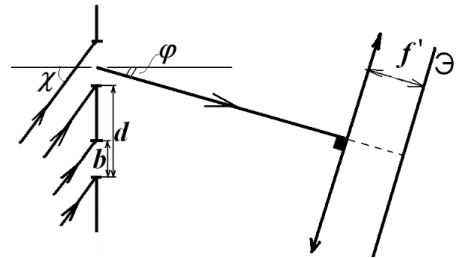
3) Главные однощелевые минимумы – это точки, в которые от каждой щели приходит колебание с нулевой амплитудой  $\sum O_i = 0$ .

$$b \cdot \left( \sin \chi - \sin \varphi_{\text{мин}} \right) = \frac{\lambda}{2} \cdot 2m \Rightarrow \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \left( \sin \chi - \sin \varphi_{\text{мин}} \right) = \pi \cdot m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\text{Для } \chi = 0 \quad \sin \varphi_{\text{мин}} = \frac{\lambda m}{b}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Главные минимумы расположены дальше всего друг от друга.

4) Главные максимумы – это точки, в которые колебания от всех щелей приходят в одной фазе, в них  $d(\sin \chi - \sin \varphi) = m\lambda$ .



Для  $\chi = 0$   $\sin \varphi_{\max} = \frac{\lambda m}{d} \leftarrow$  среди них могут быть запрещенные главными (однощелевыми)

минимумами. Это означает, что колебания от разных щелей в эти точки приходят в одной фазе, но в этих направлениях от каждой щели приходит 0. Таким образом, должны быть выброшены точки  $\tilde{m}$  такие, что:

$$\frac{\lambda \tilde{m}}{d} = \frac{\lambda m}{b} \rightarrow \tilde{m} = \frac{d}{b} m \leftarrow \text{это главные минимумы и они сильнее главных максимумов.}$$

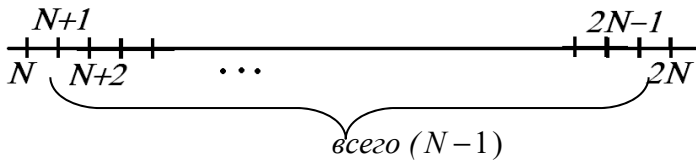
Кроме того, так как  $\sin \varphi_{\max} \leq 1 \Rightarrow m_{\max} \leq \frac{d}{\lambda}$  соответствует последнему максимуму.

5) Дополнительные минимумы – это точки, в которые сигналы от разных щелей приходят в противофазе.

$$\frac{\pi \cdot Nd}{\lambda} \cdot \left( \sin \chi - \sin \varphi_{\min} \right) = \pi \cdot m_1 \Rightarrow Nd \cdot \left( \sin \chi - \sin \varphi_{\min} \right) = \lambda \cdot m_1 .$$

Для  $\chi = 0$   $\sin \varphi_{\min} = \frac{\lambda m_1}{Nd}$ ,  $m_1 \neq N, 2N, 3N, \dots$ , где  $m_1$  – максимумы.

Сколько будет дополнительных минимумов между  $m_1 = N$  и  $m_1 = 2N$  :



6) Между дополнительными минимумами возникают маленькие дополнительные максимумы.

7) Порядок построения дифракционной картины от дифракционной решетки.

Пусть  $\chi = 0$ ,  $\frac{d}{b} = 2$ , 4 щели  $\Rightarrow N = 4$ .

1. Центральный максимум под углом  $\varphi = \chi$  с интенсивностью  $I_{\text{центр.}} = N^2 I_0$ .

2. Главные минимумы в точках  $\sin \varphi = \frac{\lambda}{b} m$  по обе стороны от центрального максимума.

Через эти точки строим пунктиром дифракционную картину для одной щели с учетом того, что  $I_{\text{центр.}} = N^2 I_0$ .

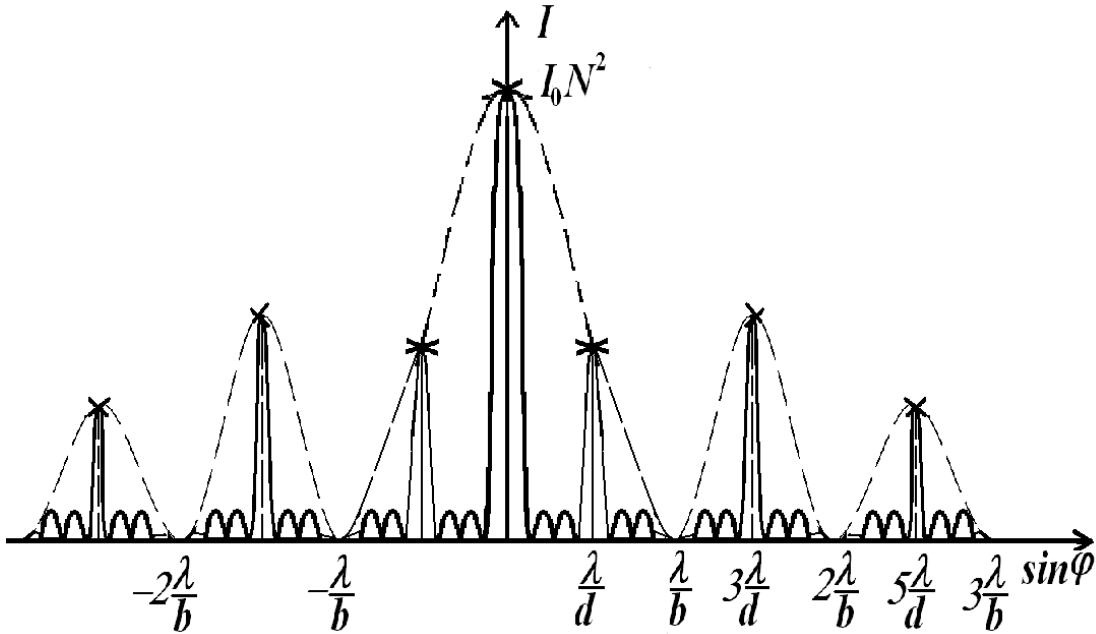
3. Главные максимумы в точках  $\sin \varphi = \frac{\lambda}{d} m$ . Их наносим на пунктирную линию дифракционной картины, построенной для одной щели.

4. Дополнительные минимумы отмечаем на горизонтальной оси на равном расстоянии друг от друга. Их  $(N-1)$  между каждыми соседними главными максимумами. В нашем примере  $(N-1) = 3$ .

5. Между дополнительными минимумами расположены маленькие дополнительные максимумы.

Все максимумы кроме центрального окрашены, так как их положение определяется длиной волны ( $\sim \lambda$ ), то есть фиолетовые максимумы ближе к центру, а красные – дальше  $\Rightarrow$  дифракционная решетка может использоваться как дисперсионный прибор.

При этом в то время как стеклянная призма сильнее всего отклоняет фиолетовые лучи, дифракционная решетка сильнее всего отклоняет красные лучи.



8) Качественные вопросы.

Если половину щелей решетки перекрыть с одного края непрозрачной преградой, как изменятся при этом:

- а) положения главных дифракционных максимумов?  
– никак, так как  $d = const$ ;
- б) высота центральных максимумов?  
– уменьшится  $\downarrow$  в 4 раза, так как в 4 раза уменьшится  $N^2 \downarrow$ ;
- в) ширина главных максимумов?  
– увеличится  $\uparrow$  в 2 раза, так как дополнительных минимумов станет в 2 раза меньше;
- г) площадь под кривой  $I$ ?  
– уменьшится  $\downarrow$  в 2 раза, так как в 2 раза уменьшится поток.



## 6. Дисперсия и разрешающая сила дифракционной решетки

Каждый реальный источник обладает определенной степенью монохроматичности  $\frac{\lambda}{\delta\lambda}$ ,

то есть  $\lambda \in [\lambda - \delta\lambda; \lambda + \delta\lambda]$ .

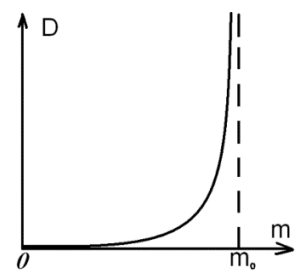
Изменение длины волны на  $\delta\lambda$  должно приводить к изменению направления на максимумы. Пусть имеет место следующее

соответствие:  $\left. \begin{matrix} \lambda \rightarrow \varphi_{\max} \\ \lambda + \delta\lambda \rightarrow \varphi_{\max} + \delta\varphi \end{matrix} \right\} \Rightarrow D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} - \text{угловая дисперсия};$

$\delta\varphi$  – угловое расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на  $\delta\lambda$ .

Продифференцируем соотношение, определяющее собой положение максимумов дифракционной картины:

$$\left[ \sin \chi - \sin \varphi = \frac{m\lambda}{d} \right]' \Rightarrow \cos \varphi \cdot \delta\varphi = \frac{m}{d} \delta\lambda \Rightarrow D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi} = \frac{m}{d \sqrt{1 - \left( \frac{m\lambda}{d} - \sin \chi \right)^2}}.$$



То есть существует целое число  $m_0$  такое, что для данной длины волны  $\lambda$  картина расплывается.

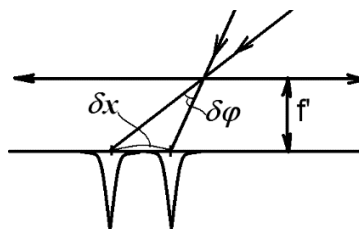
Для небольших углов  $\cos \varphi \approx 1 \Rightarrow D \approx \frac{m}{d}$ .

То есть чем больше  $m$ , тем на больший угол  $\delta\varphi$  расходятся максимумы  $m$ -го порядка интерференционных полос, отличающихся по длине волны на  $\delta\lambda$ .

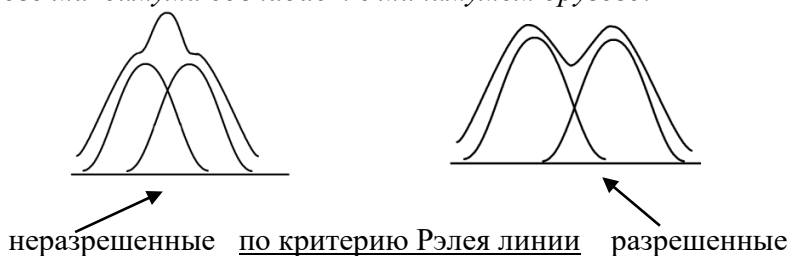
Если в спектре излучения присутствуют две волны, отличающиеся на  $\delta\lambda$ , то на экране в  $m$ -м порядке спектра эти линии будут отстоять друг от друга на  $\delta x = f\delta\varphi = f \cdot \frac{m}{d} \delta\lambda$ .

Величина  $\frac{\delta x}{\delta\lambda} = D_{\text{лин}}$  называется линейной дисперсией.

Разрешающей силой прибора называют безразмерную величину  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ , где  $\delta\lambda$  – минимальная разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются раздельно.



Два близких максимума воспринимаются глазом раздельно в том случае, если интенсивность в промежутке между ними не превосходит 80% максимальной интенсивности каждой линии. Согласно критерию Рэля, такое соотношение интенсивностей имеет место, когда середина одного максимума совпадает с минимумом другого.

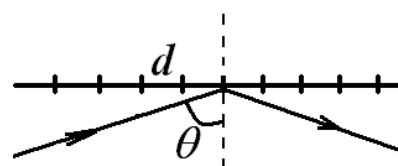


$$\left. \begin{aligned} &\text{Положение } m\text{-го максимума для } (\lambda + \delta\lambda) \\ &d \sin \varphi_{\max} = m \cdot (\lambda + \delta\lambda); \\ &\text{края } m\text{-го минимума для } \lambda: \\ &d \sin \varphi_{\min} = \left(m \pm \frac{1}{N}\right) \lambda. \end{aligned} \right\}$$



Из критерия Рэля  $\varphi_{\max} = \varphi_{\min} \Rightarrow m \cdot \delta\lambda = \frac{\lambda}{N} \Rightarrow R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$ , где  $N$  – число штрихов решетки.

Дифракционные решетки бывают прозрачными – из стекла (кварца) и отражательными – из металла. На отражательную решетку свет падает наклонно, а решетка действует так, как прозрачная с периодом  $d \cos \theta$ .





Лучшие решетки имеют  $\sim 1200 \frac{\text{штрихов}}{\text{мм}}$ , то есть  $d \approx 0,8 \text{ мкм}$ . Очевидно, что на таких решетках при нормальном падении света спектры второго порядка не наблюдаются, так как  $m \leq \frac{d}{\lambda}$ , зато спектры первого порядка имеют высокое разрешение при  $N = 2 \cdot 10^5$  и  $f' = 2 \text{ м}$  длина видимого спектра первого порядка  $> 700 \text{ мм}$ .

## 7. Разрешающая сила объектива

Пусть на непрозрачный экран с отверстием  $r_0$  падает плоская световая волна. Для произвольной точки  $P$ , лежащей против центра отверстия на расстоянии  $l$  от него, будет реализовано одно из следующих приближений:

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda l} \begin{cases} \gg 1 & \text{ГО}; \\ \sim 1 & \text{дифракция Френеля}; \\ \ll 1 & \text{дифракция Фраунгофера}. \end{cases}$$

Дифракция Фраунгофера на экране, расположенном в задней фокальной плоскости, имеет вид светлого пятна на  $\delta\varphi = \frac{2\lambda}{b}$ . Этот результат был получен для щели. Для круглого отверстия с диаметром  $d$  имеем  $\delta\varphi = \arcsin\left(1,22 \frac{\lambda}{d}\right) \approx 1,22 \frac{\lambda}{d}$ .

Коэффициент 1,22, обусловленный неодинаковостью вклада центральных и периферийных областей отверстия, представляется чрезмерным педантизмом, так как сам критерий Рэля приближенный.

Как видно из формулы  $\delta\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{d}$ , угловой размер изображения не зависит от расстояния между отверстием и линзой, следовательно, линза может быть помещена в само отверстие.

Так как любая точка преобразуется в пятно вследствие волновой природы света, то любая самая совершенная линза не может дать идеального оптического изображения. При этом угловой размер этого пятна убывает с ростом  $d$ . Две близкие точки будут различимы, если угловое расстояние  $\delta\psi$  между ними будет больше  $\delta\varphi$  ( $\delta\psi > \delta\varphi$ ).

$$R = \frac{1}{\delta\psi_{\min}} - \text{разрешающая сила прибора.}$$

$$R = \frac{d}{1,22 \cdot \lambda} - \text{разрешающая сила объектива для удаленных предметов.}$$

Диаметр зрачка при нормальном освещении  $\approx 2 \text{ мм}$ ,

$$R = \frac{2 \cdot 10^3}{1,22 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = 4 \cdot 10^8, \quad \delta\psi_{\min} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 1', \text{ то есть минимальное}$$

угловое расстояние между точками, при котором глаз воспринимает их отдельно  $\sim 1'$ . Расстояние между соседними светочувствительными элементами сетчатки глаза  $\sim 1'$ . Опять полная гармония!



## 8. Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа – Брэгга. Методы рентгеновского анализа

Будем рассматривать дифракцию на кристаллической решетке. В чем особенности этого процесса, требующие специального рассмотрения:

1. Кристалл – трехмерная структура.  $\Rightarrow$  Надо от ранее изученного нами одномерного случая перейти к трехмерному случаю.

2. Расстояние между атомами  $\sim 1 \text{ \AA}$ , а для возникновения дифракции  $\lambda < d$ .  $\Rightarrow$  Для видимого света кристалл не является дифракционной решеткой. Дифракция на кристалле наблюдается в рентгеновском диапазоне частот.

3. Для волн рентгеновского спектра обычные линзы утрачивают свою собирающую и рассеивающую способность.

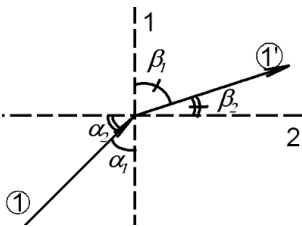
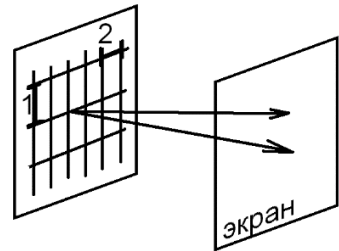


Вопрос. Почему?

Ответ. Для рентгеновского излучения показатель преломления всех веществ  $n \approx 1$ , так как вещества не успевают реагировать на электромагнитные поля рентгеновских волн вследствие их очень быстрого изменения с частотой  $\nu_{\text{рентген}} = (10^{16} - 10^{20}) \text{ Гц} \Rightarrow \epsilon = 1$ .

В связи с отсутствием линз для наблюдения дифракции рентгеновских лучей используют очень узкие пучки, которые и без линзы дают на экране пятна очень малых размеров, не требуя фокусировки.

Прежде чем заниматься дифракцией рентгеновских лучей на трехмерной дифракционной кристаллической решетке, сначала обсудим двумерный случай:



Замечание. Лучи 1 и 1' не принадлежат плоскости решетки (1,2), поэтому  $\alpha_1 + \alpha_2 \neq \frac{\pi}{2} \neq \beta_1 + \beta_2$ .

Решетка 1 дает макс в следующих направлениях под углами  $\beta_1$ :

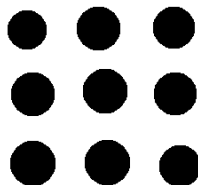
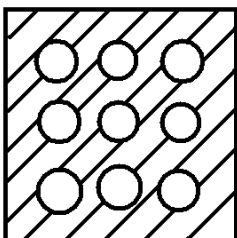
$$d_1(\cos \alpha_1 - \cos \beta_1) = m_1 \lambda.$$

Решетка 2 даст макс под углами  $\beta_2$ :

$$d_2(\cos \alpha_2 - \cos \beta_2) = m_2 \lambda.$$

Это точно те же самые формулы, которые были получены нами для нахождения главных максимумов для одномерной решетки, только  $\sin$  заменены на  $\cos$ , так как раньше углы отсчитывались от перпендикуляра к решетке, а теперь – от направления самих решеток.

При суперпозиции дифракционных картин решеток 1 и 2 на экране будет наблюдаться система пятен (светлых и темных), каждое из которых соответствует двум целочисленным индексам  $(m_1, m_2)$ .



Такая же картина будет, если вместо двух отдельных решеток взять прозрачную пластинку с нанесенными на ней двумя системами штрихов – такая система представляет собой двумерную периодическую структуру.

Аналогичная картина получается от любой периодической двумерной системы небольших отверстий или шариков.

Структуру кристалла можно представить как совокупность равноотстоящих линейных цепочек атомов, то есть трехмерную дифракционную решетку.

Дифракцию рентгеновских лучей на кристалле впервые увидели В. Фридрих и П. Книппинг, экспериментаторы-помощники М. Лауэ, в опыте, поставленном по его проекту. Это произошло в 1912 г.

Условия, которые мы записали для двумерного случая, в трехмерном случае имеют вид:

$$\begin{cases} d_1(\cos \alpha_1 - \cos \beta_1) = m_1 \lambda \\ d_2(\cos \alpha_2 - \cos \beta_2) = m_2 \lambda, \text{ где } m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ Это формулы Лауэ.} \\ d_3(\cos \alpha_3 - \cos \beta_3) = m_3 \lambda \end{cases}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – углы, которые падающая волна образует с осями кристалла (кристаллической решетки);  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  – углы, которые дифрагирующая волна образует с осями кристалла.

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1.$$

Для прямоугольной системы должно выполняться условие:

$$\cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3 = 1 \leftarrow \text{это четвертое уравнение в дополнение к трем формулам}$$

Лауэ  $\Rightarrow$  получается система из четырех уравнений с тремя неизвестными  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Эта система имеет решение только при некотором, вполне определенном значении  $\lambda$ . Зная  $\lambda$  и углы  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , можно определить периоды кристаллической решетки. В этом суть рентгеноструктурного анализа.

Уравнения Лауэ совместны только при условии:

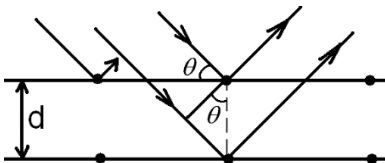
$$\lambda = \frac{2\left(\frac{m_1}{d_1} \cos \alpha_1 + \frac{m_2}{d_2} \cos \alpha_2 + \frac{m_3}{d_3} \cos \alpha_3\right)}{\left(\frac{m_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{m_3}{d_3}\right)^2} \leftarrow \text{это условие однозначно определяет длину волны}$$

$\lambda$ , при которой может получиться дифракционный максимум с целыми числами  $m_1, m_2, m_3$  и углами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Имея фиксированную длину волны  $\lambda$  (монохроматического излучения), варьируют  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , поворачивая кристалл относительно пучка и добиваясь получения максимума. Тогда по экспериментальным значениям  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  находят  $d_1, d_2, d_3$  из формул Лауэ.

Получим аналитически результат действия нескольких отражающих слоев кристаллической решетки.

Проведем через узлы кристаллической решетки параллельные равноотстоящие друг от друга на расстояние  $d$  плоскости



$$2d \sin \theta = m \lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2 \text{ – формула Брэгга – Вульфа.}$$

Формулы Лауэ и Брэгга – Вульфа дают одинаковый результат.



Дифракция рентгеновских лучей от кристаллов имеют два основных применения:

1. Исследования спектрального состава рентгеновского излучения – *рентгеновская спектроскопия*. Определяя направления на максимумы при дифракции исследуемого излучения на кристаллах с известной структурой, можно вычислять длины волн излучения  $\lambda$ .

2. Изучение структуры кристаллов – *рентгеноструктурный анализ*. Облучая монохроматическим излучением с известной длиной волны моно- или поликристалл, снимают рентгенограмму, по которой впоследствии вычисляют параметры кристаллической структуры.

## Глава V. Поляризация света

### 1. Естественный и поляризованный свет. Частично поляризованный свет. Степень поляризации. Закон Малюса

Поляризованной называется волна (свет), в которой поведение вектора  $\vec{E}$  как-то упорядочено.

Если две электромагнитные волны с напряженностями  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  распространяются в одном направлении вдоль оси  $z$  в изотропной и незаряженной среде, то  $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \in (x, y)$ :

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_{01} \cos(\omega t - kz + \alpha_1(t));$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_y E_{02} \cos(\omega t - kz + \alpha_2(t)).$$

Наличие зависимости от времени  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  означает немонохроматичность волн.

Если  $\alpha_1 = const$ ,  $\alpha_2 = const$ , то обе волны – монохроматические и линейно поляризованные.

Рассмотрим суперпозицию именно таких волн и определим вид поляризации результирующей волны  $\vec{E}_\Sigma$ .

а) Эллиптическая поляризация реализуется во всех случаях, кроме

$$1. \begin{cases} E_{01} = E_{02} \\ \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m - \text{целое} \end{cases};$$

$$2. \alpha_1 - \alpha_2 = \pi m.$$

б) Поляризация по кругу имеет место, если

$$\begin{cases} E_{01} = E_{02} \\ \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases}$$

в) Линейная поляризация имеет место, если

$$1. E_{01} = 0;$$

$$2. E_{02} = 0;$$

$$3. \alpha_1 - \alpha_2 = \pi m.$$

Если  $E_{01} = E_{02}$ , но  $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha(t)$ , тогда имеем случай с эллиптической поляризацией, изменяющейся во времени, так как фаза флуктуирует. Это естественный свет. Он изображается так



Если нет осевой симметрии, то  $E_{01} = E_{02} + \Delta E_{01}$ , тогда  $\ast + \mid = \ast$

$\vec{E}_\Sigma = E_{02}[\vec{e}_x \cos(\omega t - kz + \alpha_1(t)) + \vec{e}_y \cos(\omega t - kz + \alpha_2(t))] + \Delta E_{01} \vec{e}_x \cos(\omega t - kz + \alpha_1(t))$  – это сумма естественного света и линейно поляризованного света представляет собой частично поляризованный свет.

Общее определение степени поляризации:

$$P = \frac{I_{\text{поляриз}}}{I_{\text{поляриз}} + I_{\text{естеств}}}$$

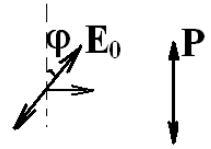
При этом, вообще говоря, поляризованный свет может иметь любую поляризацию: линейную, круговую или эллиптическую.



Если на пути такого света, включающего в себя естественный и линейно поляризованный свет, поставить поляризатор, то в зависимости от его ориентации будет получаться свет с интенсивностью  $I \in [I_{\min}, I_{\max}]$ .

Сначала выясним, что будет, если на поляризатор  $P$  падает линейно поляризованный свет с амплитудой  $E_0$ .  $\varphi$  – угол между направлениями поляризации в падающей волне и поляризатором. Поляризатор  $P$  пропускает свет с амплитудой  $E_0 \cos \varphi \Rightarrow$

$$I = I_0 \cos^2 \varphi \text{ – это закон Малюса.}$$



Если на поляризатор  $P$  падает естественный свет с интенсивностью  $I_0$ ,

$$\vec{E}_\Sigma = E_0 [\vec{e}_x \cos(\omega t - kz + \alpha_1(t)) + \vec{e}_y \cos(\omega t - kz + \alpha_2(t))], \text{ при этом } I_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left( \frac{E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2} \right).$$

На выходе после поляризатора  $P$  останется одна из компонент  $\vec{E}_\Sigma$ , допустим  $\vec{E}_y \Rightarrow \langle E_{\text{вых}}^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2} \Rightarrow I_{\text{вых}} = \frac{I_0}{2}$ , таким образом, на выходе поляризатора интенсивность естественного света в два раза меньше.

Теперь разберемся с частично поляризованным светом.

**Вопрос 1.** Чему равна  $I_{\min}$ , после того как частично поляризованный свет пройдет поляризатор  $P$ , и при какой ориентации  $P$  возникает этот минимум?

**Ответ.** Когда поляризатор перпендикулярен поляризованной компоненте

$$P \perp I_n, \text{ то } I_{\min} = \frac{I_e}{2}.$$

**Вопрос 2.** Когда возникает максимум?

$$\text{Ответ. Когда } P \parallel I_n \Rightarrow I_{\max} = I_n + \frac{I_e}{2}.$$



$$\begin{cases} I_{\min} = \frac{I_e}{2} \\ I_{\max} = I_n + \frac{I_e}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_e = 2I_{\min} \\ I_n = I_{\max} - I_{\min} \end{cases}.$$

То есть, зная  $I_{\max}, I_{\min}$ , можно узнать, какова была степень поляризации света до поляризатора  $P. \Rightarrow$

Степень поляризации для суммы естественного и линейно поляризованного света имеет

$$\text{вид: } P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \leftarrow \text{только для естественного + линейно поляризованного света.}$$

## 2. Двойное лучепреломление в одноосных кристаллах.

### Плоские монохроматические волны в одноосных кристаллах

1. К чему приводит анизотропия диэлектрических свойств (уравнения Максвелла для анизотропной среды)?

В изотропных средах, которые мы рассматривали до сих пор,  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \parallel \vec{E}$ .

Если среда анизотропная, то  $D_\alpha = \epsilon_0 \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta$ , где  $\epsilon_{\alpha\beta}$  – симметричный тензор второго ранга.

Для прозрачного кристалла  $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\alpha}$  (это следует из закона сохранения энергии или II начала термодинамики).

Оптически прозрачная среда  $\equiv$  непроводящая среда.

Симметричный тензор может быть приведен при соответствующем выборе осей к виду:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \text{ если } \epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3, \text{ то это двуосный кристалл.}$$

Если  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_{\perp} \neq \epsilon_3 = \epsilon_{\parallel}$ , то это одноосный кристалл.

Выясним взаимную ориентацию векторов  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}$  в плоской волне, распространяющейся в прозрачной, но анизотропной среде.

Если среда прозрачная (непроводящая) и однородная, то в ней может распространяться плоская монохроматическая волна, имеющая следующие компоненты поля:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\alpha x - \vec{k}\vec{r})}; \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{i(\alpha x - \vec{k}\vec{r})}; \\ \vec{D} &= \vec{D}_0 e^{i(\alpha x - \vec{k}\vec{r})}. \end{aligned}$$

Наложим условия на рассматриваемую среду, получив соответствующие материальные уравнения.

- Среда: 1) непроводящая  $\sigma = 0 \Rightarrow j = 0$ ;  
 2) незаряженная  $\rho = 0$ ;  
 3) немагнитная  $\mu = 1$ ;  
 4) однородная;  
 5) существует анизотропия диэлектрической проницаемости.

Для такой среды система уравнений Максвелла имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1) \\ \text{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2) \\ \text{div} \vec{H} &= 0 \quad (3) \\ \text{div} \vec{D} &= 0 \quad (4) \end{aligned} \right\} \text{— отрицающие условия (нет точечных источников полей } \vec{D} \text{ и } \vec{B} \text{).}$$

2. Анализ взаимной ориентации векторов  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{k}$  в плоской волне, распространяющейся в одноосном кристалле.

1) Так как среда немагнитная  $\mu = 1$ ,  $\text{div} \vec{H} = 0 = -i(\vec{k}\vec{H})$ , то из (3)  $\Rightarrow \vec{H} \parallel \vec{B} \perp \vec{k}$ .

Так как  $\text{div} \vec{D} = 0 = -i(\vec{k}\vec{D})$ , то из (4)  $\Rightarrow \vec{D} \perp \vec{k}$ .

$$\begin{cases} -i[\vec{k}\vec{E}] = -i\mu_0 \omega \vec{H} \Rightarrow [\vec{k}\vec{E}] = \mu_0 \omega \vec{H} \quad (1) \\ -i[\vec{k}\vec{H}] = i\omega \vec{D} \Rightarrow [\vec{k}\vec{H}] = -\omega \vec{D} \quad (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2)  $\Rightarrow \vec{D} \perp \vec{H} \Rightarrow$  то есть в анизотропном кристалле плоская волна поперечна относительно  $\vec{D}, \vec{k}, \vec{H}$ :  $\vec{D} \perp \vec{k} \perp \vec{H}, \vec{B}$ .

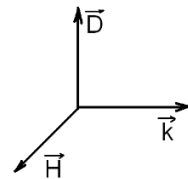
Из уравнения (1)  $\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{H}$ ,  $\vec{E} \in$  плоскости  $(\vec{D}, \vec{k})$ , но, вообще говоря, из (1) не следует, что  $\vec{E} \perp \vec{k}$ .

2) Выясним, как направлен  $\vec{E}$  относительно  $\vec{D}$ .

Как мы установили,  $\vec{E} \in$  плоскости  $(\vec{D}, \vec{k})$ .

Из уравнений (1) + (2) следует:

$$\omega \vec{D} = -[\vec{k}\vec{H}] = -[\vec{k} \begin{bmatrix} \vec{k} & \vec{E} \\ a & b & c \end{bmatrix}] \frac{1}{\mu_0 \omega} = -\frac{1}{\mu_0 \omega} \{ \vec{k}(\vec{k}\vec{E}) - \vec{E} \cdot k^2 \} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \{ \vec{E} \cdot k^2 - \vec{k}(\vec{k}\vec{E}) \} \Rightarrow$$

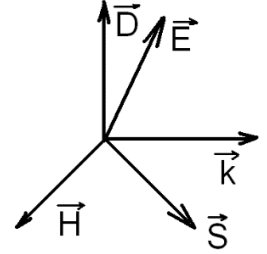


$$\vec{D} = \frac{1}{\mu_0 \omega^2} \{ \vec{E} \cdot k^2 - \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) \} \Rightarrow \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{c^2}{\omega^2} \{ \vec{E} \cdot k^2 - \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) \}.$$

То есть вектор  $\vec{E}$ , вообще говоря, не параллелен  $\vec{D}$ .

### 3. Следствие из непараллельности $\vec{E}$ и $\vec{D}$ .

$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$  не параллелен волновому вектору  $\vec{k} \Rightarrow$  таким образом, направление распространения энергии и, соответственно, *направление лучей в анизотропных кристаллах может не совпадать с перпендикуляром к волновым поверхностям и, соответственно, с направлением движения волнового фронта.*



То есть в анизотропном кристалле электромагнитные волны, вообще говоря, не поперечные, а косые.

### 4. Определение $n(\theta)$ .

Попробуем разобраться в том, как и почему так получается. В дальнейшем будем рассматривать только *одноосные кристаллы с анизотропной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \neq \varepsilon_3 = \varepsilon_{\parallel}$ .*

Одноосные кристаллы обладают простейшими оптическими свойствами анизотропных сред и имеют большое практическое значение.

Направим ось  $z$  нашей системы вдоль выделенного направления, имеющего диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_{\parallel}$ . Пусть в однородной с  $\varepsilon_{\perp} = const$ ,  $\varepsilon_{\parallel} = const$ , незаряженной  $\rho_0 = 0$ , прозрачной  $j = 0$ , немагнитной  $\mu = 1$  среде распространяется плоская волна с волновым вектором  $\vec{k}$ . Развернем оси  $x$  и  $y$  относительно оси  $z$  так, чтобы в нашей системе координат волновой вектор имел следующие компоненты  $\vec{k} (k_x, 0, k_z)$ .

Тогда  $\vec{D} = \vec{D}_{\parallel} + \vec{D}_{\perp} = \vec{D}_{\perp} + \vec{D}_z$ , причем  $D_{\perp} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} E_{\perp}$  и  $D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} E_z$ ,

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} = \vec{E}_z + \vec{E}_{\perp}.$$

Используем полученное выше уравнение для  $\vec{D}$ :

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{D} = \frac{c^2}{\omega^2} \{ \vec{E} \cdot k^2 - \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) \}.$$

Приведем это векторное уравнение к покомпонентному виду:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} D_z = \frac{c^2}{\omega^2} \{ (k_x^2 + k_z^2) E_z - k_z (k_x E_x + k_z E_z) \} = \varepsilon_{\parallel} E_z \Rightarrow$$

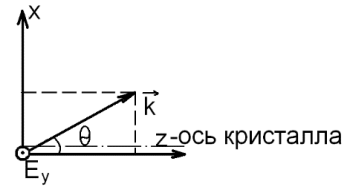
$$\varepsilon_{\parallel} E_z = \frac{c^2}{\omega^2} \{ k_x^2 E_z + k_z^2 E_z - k_x k_z E_x - k_z^2 E_z \} = \frac{c^2}{\omega^2} (k_x^2 E_z - k_x k_z E_x) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{\parallel} E_z = \frac{c^2}{\omega^2} (k_x^2 E_z - k_x k_z E_x) \quad (1')$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} D_x = \frac{c^2}{\omega^2} \{ (k_x^2 + k_z^2) E_x - k_x (k_x E_x + k_z E_z) \} = \varepsilon_{\perp} E_x \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{\perp} E_x = \frac{c^2}{\omega^2} (k_z^2 E_x - k_x k_z E_z) \quad (2')$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} D_y = \frac{c^2}{\omega^2} k^2 E_y = \varepsilon_{\perp} E_y \quad (3')$$



Перепишем теперь полученную систему уравнений для компонент напряженности электрического поля.

$$\begin{cases} \varepsilon_{\perp} E_y = \frac{c^2}{\omega^2} k^2 E_y & (3) \\ \varepsilon_{\perp} E_x = \frac{c^2}{\omega^2} (k_z^2 E_x - k_x k_z E_z) & (2) \\ \varepsilon_{\parallel} E_z = \frac{c^2}{\omega^2} (k_x^2 E_z - k_x k_z E_x) & (1) \end{cases} .$$

Определим показатель преломления  $n = \frac{c}{v}$ .

$$\text{Из (3)} \Rightarrow \varepsilon_{\perp} = \frac{c^2}{\omega^2} k^2 \rightarrow n_0 = \sqrt{\varepsilon_{\perp}} .$$

$E_y$  представляет собой поляризацию, перпендикулярную оси кристалла и направлению распространения волны. Луч с такой поляризацией называется обыкновенным. Его показатель преломления  $n_0 = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$  не зависит от соотношения  $k_x$  и  $k_z$ , а фазовая скорость не зависит от направления распространения  $v_0 = v_{\perp} = \frac{c}{n_0} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} = \text{const}(\theta)$ .

Ось  $z$  – ось кристалла.

$\theta$  – угол между осью кристалла и волновым вектором.

Рассмотрим теперь два других уравнения (1) + (2):

$$\begin{cases} \left( -\varepsilon_{\perp} + \frac{c^2}{\omega^2} k_z^2 \right) E_x = \frac{c^2}{\omega^2} k_x k_z E_z \\ \left( \frac{c^2}{\omega^2} k_x^2 - \varepsilon_{\parallel} \right) E_z = \frac{c^2}{\omega^2} k_x k_z E_x \end{cases} \quad \leftarrow \text{перемножим эти уравнения и введем обозначения:}$$

$$k_z = k \cdot \cos \theta, \quad k_x = k \cdot \sin \theta \Rightarrow$$

$$\left( \frac{c^2}{\omega^2} k^2 \cos^2 \theta - \varepsilon_{\perp} \right) \left( \frac{c^2}{\omega^2} k^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_{\parallel} \right) E_x E_z = k^4 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot E_x E_z \frac{c^4}{\omega^4} .$$

Подставим  $\omega = k v_e = \frac{c}{n_e} k$ , то есть  $v_e = \frac{c}{n_e}$  (или, другими словами, обозначим  $\frac{c^2}{\omega^2} k^2 = n_e^2$ ),

$$(n_e^2 \cos^2 \theta - \varepsilon_{\perp})(n_e^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_{\parallel}) = n_e^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \Rightarrow$$

$$n_e^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - n_e^2 \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta - \varepsilon_{\perp} n_e^2 \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} = n_e^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta .$$

$$n_e = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta + \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta}} \quad - \quad \text{это показатель преломления}$$

необыкновенной волны, он зависит от направления распространения необыкновенной волны и, следовательно, её фазовая скорость  $v_e$  тоже зависит от направления распространения.

Вектор поляризации необыкновенной волны лежит в плоскости  $(\vec{k}, z)$ .

Здесь  $\theta$  – угол между осью кристалла и волновым вектором  $\vec{k}_e$ .





5. Рассмотрим частные случаи распространения волн в одноосных кристаллах и общие определения.

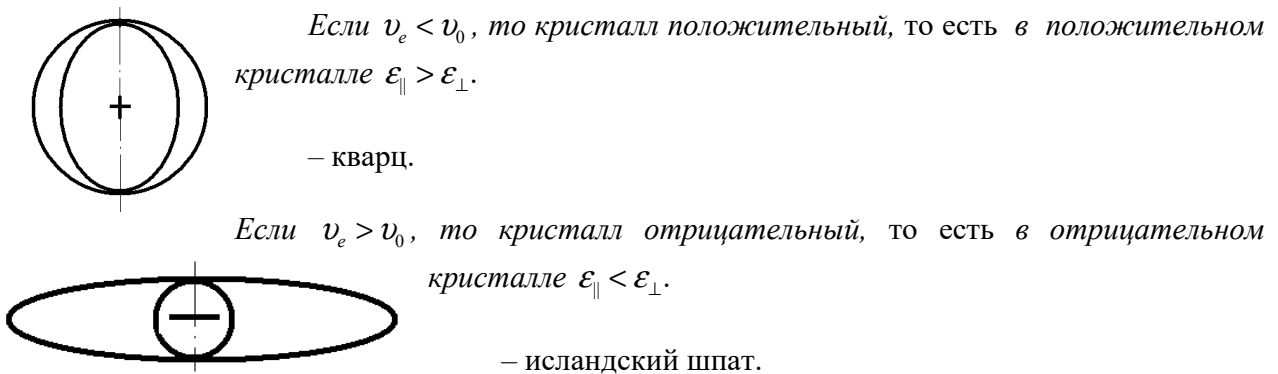
1) Пусть волна распространяется вдоль оси кристалла  $\theta = 0 \Rightarrow n_e = \sqrt{\epsilon_{\perp}} = n_0$ ,  
 $v_e = v_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}$ .

Таким образом, если волна распространяется вдоль оси одноосного кристалла, то обыкновенный и необыкновенный лучи имеют одинаковую скорость и идут не разделяясь. Поэтому ось кристалла, определенная нами как направление максимальной анизотропии диэлектрических свойств, называется оптической осью кристалла.

Итак: оптической осью кристалла называется направление, вдоль которого обыкновенные и необыкновенные лучи распространяются с одинаковой скоростью.

2) Пусть угол  $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow n_e = \sqrt{\epsilon_{\parallel}} = n_{\parallel} \Rightarrow v_{\parallel} = v_e = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\parallel}}}$ .

В этом случае скорости обыкновенного и необыкновенного лучей различаются.



Плоскость, проходящая через оптическую ось кристалла и нормаль  $\vec{k}$  к фронту волны, называется главным сечением кристалла.

Главное сечение  $\equiv$  семейство параллельных плоскостей.

Тогда можно определить обыкновенные и необыкновенные лучи следующим образом.

Обыкновенным является луч, у которого вектор поляризации перпендикулярен главному сечению кристалла.

Необыкновенным называется луч, у которого вектор поляризации параллелен главному сечению кристалла.

В общем случае волна, проникающая в анизотропный кристалл из изотропной среды, разделяется внутри кристалла на две линейно поляризованных волны, распространяющиеся в общем случае в различных направлениях и с разными скоростями  $v_0 = \frac{c}{n_0}$  и  $v_e = \frac{c}{n_e}$ .

6. Закон преломления.

Закон преломления применим как к обыкновенным, так и к необыкновенным волнам, но относится к волновым нормальям  $\vec{k}_0$  и  $\vec{k}_e$ , а не к лучам.

$\sin \theta_1 = n_0 \sin \theta_{2_0}$ , где  $\theta_1$  – угол падения,  $\theta_{2_0}, \theta_{2_e}$  – углы между нормалью к поверхности и

волновыми векторами  $\vec{k}_0$  и  $\vec{k}_e$  соответственно.

$$n_e = \sqrt{\frac{\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta + \epsilon_{\perp} \sin^2 \theta}}$$

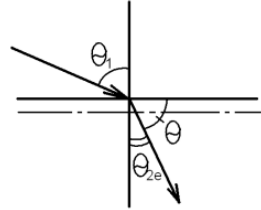
здесь  $\theta$  – угол между осью кристалла и волновым вектором  $\vec{k}_e$ .

Получим закон преломления необыкновенного луча для частного случая параллельности оси кристалла его поверхности.

Теперь рассмотрим пластинку, вырезанную параллельно оптической оси.

В этом случае  $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_{2e} \Rightarrow$

$$\sin \theta_1 = \frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{2e} \right) + \varepsilon_{\perp} \cos^2 \theta_{2e}}} \sin \theta_{2e} = \frac{\sin \theta_{2e} \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}}}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \theta_{2e}}}$$



Возведем в квадрат полученное уравнение и найдем  $\sin \theta_{2e}$ :

$$\sin^2 \theta_1 [\varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \theta_{2e}] = \sin^2 \theta_{2e} \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \Rightarrow$$

$$\sin^2 \theta_{2e} [\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} + (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin^2 \theta_1] = \sin^2 \theta_1 \varepsilon_{\perp} \Rightarrow$$

$$\sin \theta_{2e} = \sin \theta_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin^2 \theta_1}} \quad \text{— закон преломления волнового$$

вектора  $\vec{k}_e$  необыкновенной волны на поверхности одноосного кристалла, параллельной оптической оси.

Проверим полученный результат для частного случая отсутствия анизотропии диэлектрических свойств. При  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\parallel} \Rightarrow \varepsilon \sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{\varepsilon}}$ , то есть

имеем закон преломления лучей на границе изотропных сред.

Теперь знаем достаточно, чтобы строить ход обыкновенных и необыкновенных лучей в одноосных кристаллах.

### 7. Способы построения хода обыкновенных и необыкновенных лучей.

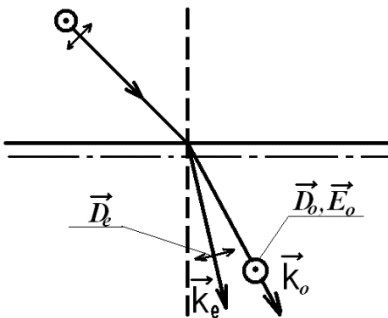
I способ: из закона преломления.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть оптическая ось параллельна поверхности кристалла,  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\varepsilon_{\perp} = 2$ ,  $\varepsilon_{\parallel} = 4$ , то есть кристалл – положительный  $\oplus$ .

$$\text{Для обыкновенного луча } \sin \theta_{2o} = \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{2o} = \frac{\pi}{6}$$

Рассчитаем угол преломления необыкновенного луча:

$$\sin \theta_{2e} = \frac{\sin \theta_1 \sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}) \sin^2 \theta_1}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 4 + (2 - 4) \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$



то есть в данном случае волновой вектор необыкновенной волны  $\vec{k}_e$  преломляется сильнее, а вектор плотности потока энергии необыкновенной волны  $\vec{S}_e$  должен в данном случае отклониться от обыкновенного луча в другую сторону. Это объясняется тем, что в этом направлении у необыкновенного

луча скорость больше, чем в направлении, определяемом законом преломления геометрической оптики.

II способ: из анализа граничных условий.

$E_{1\tau} = E_{2\tau}, D_{1n} = D_{2n} \leftarrow$  так как нет стороннего заряда на границе раздела сред.

Обыкновенный луч не интересен, так как его поведение подчиняется законам ГО и не вызывает сомнений:  $\vec{E}_0 \uparrow \uparrow \vec{D}_0 \perp \vec{k}_0; \sin \theta_1 = n_0 \sin \theta_2$ .

Для необыкновенного луча, используя граничные условия для  $\vec{D}$  и для  $\vec{E}$ , получим  $\vec{k}_e$  и  $\vec{S}_e$ .  
Рекомендуется действовать следующим образом.

1. Зная  $\vec{D}_{nad}$ ;  $\vec{E}_{nad}$  и используя граничные условия, находим  $\vec{D}_e$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_{nad_e})_n = (D_e)_n; \\ \left( \frac{\vec{D}_{nad_e}}{\epsilon_0} \right)_\tau = (\vec{E}_{nad_e})_\tau = (\vec{E}_e)_\tau = \left( \frac{\vec{D}_e}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{\parallel}} \right)_\tau \Rightarrow \epsilon_{\parallel} (\vec{D}_{nad_e})_\tau = (\vec{D}_e)_\tau. \end{array} \right.$$

2. Зная направление  $\vec{D}_e$ , легко получить направление волнового вектора  $\vec{k}_e \perp \vec{D}_e$ .

3. Аналогично, зная  $\vec{D}_{nad}$ ,  $\vec{E}_{nad}$  и используя граничные условия, находим  $\vec{E}_e$ .

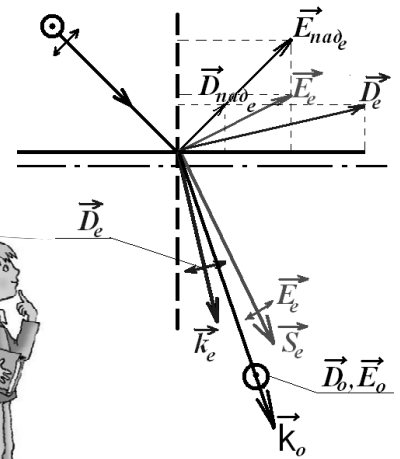
$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}_{nad_e})_n = \left( \frac{\vec{D}_{nad_e}}{\epsilon_0} \right)_n = \left( \frac{\vec{D}_e}{\epsilon_0} \right)_n = (\epsilon_{\perp} \vec{E}_e)_n \Rightarrow (\vec{E}_{nad_e})_n = (\epsilon_{\perp} \vec{E}_e)_n; \\ (\vec{E}_{nad_e})_\tau = (\vec{E}_e)_\tau. \end{array} \right.$$

4. Зная направление  $\vec{E}_e$ , можно получить направление луча, совпадающее с направлением  $\vec{S}_e, \vec{S}_e \perp \vec{E}_e$ .

Наиболее простым и естественным является использование этого способа построения необыкновенного луча и волнового вектора необыкновенной волны именно в случае параллельности оси кристалла его поверхности.

а). Используем этот способ построения для уже рассмотренного нами примера.

Пусть оптическая ось параллельна поверхности положительного  $\oplus$  кристалла с  $\epsilon_{\perp} = 2, \epsilon_{\parallel} = 4$ . Угол падения плоской световой волны  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ , как показано на рисунке.



$$\frac{D_{e\tau}}{\epsilon_0} = E_{e\tau} \cdot \epsilon_{\parallel} = 4 \cdot (\vec{E}_{nad_e})_\tau \Rightarrow$$

$$\frac{\vec{D}_e}{\epsilon_0} = \left( \frac{\vec{D}_{nad_e}}{\epsilon_0} \right)_n \cdot \vec{e}_{\perp} + \left( \frac{\vec{D}_{nad_e}}{\epsilon_0} \right)_\tau \cdot \epsilon_{\parallel} \cdot \vec{e}_{\tau} \Rightarrow \vec{k}_e \perp \vec{D}_e.$$

$$E_{e_n} \cdot \epsilon_{\perp} = \frac{(D_{nad_e})_n}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E_{e_n} = \frac{(D_{nad_e})_n}{\epsilon_0 \epsilon_{\perp}} = \frac{(D_{nad_e})_n}{2 \epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_e = \frac{(D_{nad_e})_n}{\epsilon_0 \epsilon_{\perp}} \cdot \vec{e}_{\perp} + (E_{nad_e})_{\tau} \cdot \vec{e}_{\tau} \Rightarrow \vec{S}_e \perp \vec{E}_e.$$

Действительно, как и предполагалось, необыкновенный луч отклонился от обыкновенного, «прижимаясь» к оптической оси, чтобы иметь выигрыш в скорости движения в кристалле.

б). Другим частным случаем, представляющим большой практический интерес, является перпендикулярное падение света на плоскую поверхность кристалла, оптическая ось которого составляет угол  $\theta$  с нормалью к его поверхности. В этом случае граничные условия дают следующую систему уравнений:

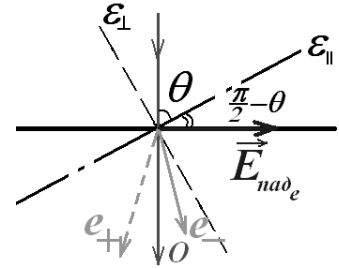
$$\begin{cases} E_{nad_e} = (E_e)_\tau = E_\parallel \sin \theta - E_\perp \cos \theta \\ 0 = \frac{D_{e_n}}{\epsilon_0} = \epsilon_\parallel E_\parallel \cos \theta + \epsilon_\perp E_\perp \sin \theta \end{cases}$$

Находя компоненты  $E_\parallel, E_\perp$  напряженности электрического поля необыкновенной волны  $\vec{E}_e$  (причем  $E_\parallel$  представляет собой проекцию  $\vec{E}_e$  на ось кристалла, а  $E_\perp$  – проекцию на перпендикулярное к оси направление), определяем нормальную составляющую  $\vec{E}_e$ :

$$E_{e_n} = E_\parallel \cos \theta + E_\perp \sin \theta = E_{nad_e} \frac{\cos \theta \sin \theta (\epsilon_\perp - \epsilon_\parallel)}{\epsilon_\parallel \cos^2 \theta + \epsilon_\perp \sin^2 \theta}$$

Следует обратить внимание на появление перпендикулярной к поверхности кристалла составляющей напряженности электрического поля необыкновенной волны, что указывает на отклонение необыкновенного луча от нормали к поверхности.

Если кристалл отрицательный, то  $\epsilon_\perp > \epsilon_\parallel$  и в данный изображенный на рисунке момент времени компонента  $E_{e_n}$  направлена вверх, то есть сонаправлена с нормалью к поверхности кристалла. В этом случае необыкновенный луч пойдет так, как показано на рисунке сплошной линией  $e_-$ .



Если кристалл положительный, то  $\epsilon_\perp < \epsilon_\parallel$  и в изображенный на рисунке момент времени компонента  $E_{e_n}$  направлена вниз, то есть противоположно нормали к поверхности кристалла. В этом случае необыкновенный луч отклонится в противоположную сторону от обыкновенного луча, как показано на рисунке пунктирной линией  $e_+$ .

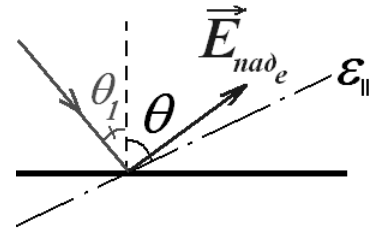
Следует обратить внимание на то, что независимо от знака кристалла необыкновенный луч отклоняется от обыкновенного так, что его скорость при этом увеличивается. Возникновение  $E_{e_n}$  свидетельствует о появлении связанных зарядов на поверхности кристалла.

в). В наиболее общем случае, когда свет падает под углом  $\theta_1$  на плоскую поверхность кристалла, оптическая ось которого составляет угол  $\theta$  с нормалью к его поверхности, как показано на рисунке, граничные условия дают следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} E_{nad_e} \cos \theta_1 = (E_e)_\tau = E_\parallel \sin \theta - E_\perp \cos \theta \\ E_{nad_e} \sin \theta_1 = \frac{D_{e_n}}{\epsilon_0} = \epsilon_\parallel E_\parallel \cos \theta + \epsilon_\perp E_\perp \sin \theta \end{cases}$$

Решение системы дает компоненты  $E_\parallel, E_\perp$ :

$$\begin{cases} E_\parallel = E_{nad_e} \frac{\cos \theta_1 \sin \theta \cdot \epsilon_\perp + \cos \theta \sin \theta_1}{\epsilon_\parallel \cos^2 \theta + \epsilon_\perp \sin^2 \theta} \\ E_\perp = E_{nad_e} \frac{\sin \theta_1 \sin \theta - \epsilon_\parallel \cdot \cos \theta \cos \theta_1}{\epsilon_\parallel \cos^2 \theta + \epsilon_\perp \sin^2 \theta} \end{cases}$$



Отсюда определяем нормальную составляющую  $\vec{E}_e$ :

$$\begin{aligned} E_{e_n} &= E_\parallel \cos \theta + E_\perp \sin \theta = E_{nad_e} \frac{\sin \theta_1 \sin^2 \theta - \epsilon_\parallel \cdot \cos \theta_1 \cos \theta \sin \theta + \epsilon_\perp \cdot \cos \theta_1 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta_1 \cos^2 \theta}{\epsilon_\parallel \cos^2 \theta + \epsilon_\perp \sin^2 \theta} = \\ &= E_{nad_e} \frac{\sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cos \theta \sin \theta (\epsilon_\perp - \epsilon_\parallel)}{\epsilon_\parallel \cos^2 \theta + \epsilon_\perp \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

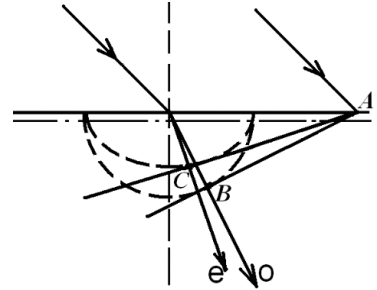


III способ: через скорость распространения обыкновенного и необыкновенного лучей.

1. Закон преломления обыкновенных лучей.

Этот луч по всем направлениям распространяется с одинаковой скоростью.  $\Rightarrow$  Рисуем окружность  $O(R)$  радиусом  $R = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}$ . До этих точек по закону Гюйгенса дошла бы за единицу времени вторичная сферическая волна.

2. Наша падающая волна плоская и распространяется в однородной среде, поэтому она останется плоской и после проникновения в одноосный кристалл. Пусть точка  $B$  – точка пересечения преломленного луча с  $O(R)$ . Через т.  $B$  проходит плоский фронт преломленной обыкновенной волны  $\Rightarrow$  проводим касательную к  $O(R)$  через точку  $B$ . Касательная пересекает поверхность кристалла в точке  $A$ .



3. Необыкновенная волна имеет различную скорость по различным направлениям, то есть через единицу времени ее волнового фронта дойдет до точек, лежащих на эллипсе с полуосями  $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}$  и  $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\parallel}}}$   $\Rightarrow$  изображаем эллипс, как показано на рисунке.

4. Из точки  $A$  проводим касательную к эллипсу, так как и у необыкновенной волны фронт плоский, так же как у обыкновенной, получая точку касания  $C$ .

5. Через точку касания  $C$  проходит искомый необыкновенный луч.

Вопрос. Что мы получили для необыкновенного луча:  $\vec{k}_e$  или  $\vec{S}_e$ ?

Ответ. В действительности, скорость распространения энергии  $\vec{u}$  имеет мало общего с фазовой скоростью  $v = \frac{\omega}{k}$ . Пример движения фазы: представьте себе цепочку неподвижно стоящих гимнастов, последовательно поднимающих руки.



Опред. Скорость распространения энергии  $\vec{u} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_x}; \frac{\partial \omega}{\partial k_y}; \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right)$  –

групповая или лучевая скорость.

Именно  $\vec{u}$  отвечает за распространение энергии и является скоростью лучей.

$$\omega_{\substack{\text{в однор. среде} \\ \vec{k} \parallel \vec{v}}} = kv = k \frac{c}{n} \Rightarrow \vec{u} = \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \left( k \frac{c}{n} \right) = \begin{cases} \frac{\vec{k}_o}{k_o} v_0 & \text{обыкновенн. луча} \\ \frac{\vec{k}_e}{k_e} v_e + k_e \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \left( \frac{c}{n_e} \right) & \text{необыкновенн. луча} \end{cases}$$



$$\frac{\partial k}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial \left( \sqrt{k_x^2 + k_z^2} \right)}{\partial \vec{k}} = \frac{1}{2} \frac{2k_x \vec{e}_x + 2k_z \vec{e}_z}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} = \frac{\vec{k}}{k} \Rightarrow \vec{u}_o = \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \left( k_o \frac{c}{n_o} \right)_{n_o = \text{const}} = \frac{\vec{k}_o}{k_o} \cdot \frac{c}{n_o} = \frac{\vec{k}_o}{k_o} v_0.$$

Вычислим лучевую скорость необыкновенного луча  $\vec{u}_e = \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \left( k_e \frac{c}{n_e} \right)$ , учитывая, что

$$\sin^2 \theta = \frac{k_x^2}{k^2}; \cos^2 \theta = \frac{k_z^2}{k^2}.$$

$$n_e = \sqrt{\frac{\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}} \stackrel{\substack{\sin^2 \theta = \frac{k_x^2}{k^2}; \cos^2 \theta = \frac{k_z^2}{k^2}}}{=} \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}}}{\sqrt{\epsilon_{\perp} k_x^2 + \epsilon_{\parallel} k_z^2}} \cdot k_e \Rightarrow$$

$$\bar{u}_e = \frac{\partial}{\partial \bar{k}} \left( k_e \frac{c \sqrt{\varepsilon_{\perp} k_x^2 + \varepsilon_{\parallel} k_z^2}}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} k_e}} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{k}} \left( \frac{c \sqrt{\varepsilon_{\perp} k_x^2 + \varepsilon_{\parallel} k_z^2}}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}} \right) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}} \frac{\partial}{\partial \bar{k}} \left[ \sqrt{\varepsilon_{\perp} k_x^2 + \varepsilon_{\parallel} k_z^2} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}} \sqrt{\varepsilon_{\perp} k_x^2 + \varepsilon_{\parallel} k_z^2} = \frac{1}{2} \frac{2\varepsilon_{\perp} k_x \bar{e}_x + 2\varepsilon_{\parallel} k_z \bar{e}_z}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} k_x^2 + \varepsilon_{\parallel} k_z^2}} = \frac{\varepsilon_{\perp} k \sin \theta \cdot \bar{e}_x + \varepsilon_{\parallel} k \cos \theta \cdot \bar{e}_z}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} k^2 \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} k^2 \cos^2 \theta}} = \frac{\varepsilon_{\perp} \sin \theta \cdot \bar{e}_x + \varepsilon_{\parallel} \cos \theta \cdot \bar{e}_z}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}}.$$

$$\bar{u}_e = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}} \cdot \frac{\varepsilon_{\perp} \sin \theta \cdot \bar{e}_x + \varepsilon_{\parallel} \cos \theta \cdot \bar{e}_z}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}} - \text{лучевая скорость необыкновенного луча.}$$

$$\frac{u_{e_x}^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{u_{e_z}^2}{\varepsilon_{\parallel}} = \frac{c^2}{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} \Rightarrow$$

$$\frac{u_x^2}{c^2} + \frac{u_z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \text{лучевые поверхности необыкновенной волны представляют собой}$$

$$\frac{c^2}{\varepsilon_{\parallel}} \quad \frac{c^2}{\varepsilon_{\perp}}$$

эллиптические поверхности с полуосями: вдоль  $x$   $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} - \perp$  оптической оси,

вдоль  $z$   $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} - \parallel$  оптической оси.

Скалярное произведение лучевой скорости на единичный вектор в направлении волнового вектора равно модулю фазовой скорости  $\left( \bar{u} \frac{\bar{k}}{k} \right) = v$ . Следовательно, III способ дает истинный ход лучей, а построенные нами круг и эллипс являются сечениями лучевых поверхностей  $\Rightarrow$  вектор, перпендикулярный к необыкновенному лучу – это  $\vec{E}$ .

Этот способ построения называется построением с помощью принципа Гюйгенса.

Гюйгенс – замечательная личность. Это он в XVII веке высказал предположение о разделении лучей в двусосных кристаллах на две волны: эллиптическую и сферическую. В 1669 г. Бартолинус открыл двойное лучепреломление на кристалле исландского шпата  $CaCO_3$ , и Гюйгенс тут же объяснил это явление.

О Гюйгенсе (1629–1695) (лирическое отступление):

в 22 года – определил длины дуг: окружностей эллипсов, гипербол;

в 25 лет – вычислил число  $\pi$ ;

в 26 лет – открыл спутник Сатурна Титан и определил существование кольца астероидов вокруг Сатурна;

в 28 лет – трактат «О расчетах при игре в кости» – первые исследования в области теории вероятности + изобрел первые маятниковые часы;

в 40 лет – теория цепных и непрерывных дробей + объяснил двойное лучепреломление.

в 61 год – предложил волновую теорию света в «Трактате о свете» + «О причинах тяжести» + «Теория множественности миров и их обитаемости», о которой стало известно только после его смерти.

Какая удивительная разносторонность!



Учтем, что фазовая скорость необыкновенного луча равна  $v_e = \frac{c\sqrt{\epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}}{\sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}}}$ ,

и установим связь фазовой и групповой скоростей необыкновенной волны.

$$\begin{aligned} \vec{u}_e &= \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}}} \cdot \frac{\epsilon_{\perp} \sin \theta \cdot \vec{e}_x + \epsilon_{\parallel} \cos \theta \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{\epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}}{\sqrt{\epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}} = \\ &= \frac{c\sqrt{\epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}}{\sqrt{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}}} \cdot \frac{\epsilon_{\perp} \sin \theta \cdot \vec{e}_x + \epsilon_{\parallel} \cos \theta \cdot \vec{e}_z}{(\sqrt{\epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta})^2} = v_e \frac{\epsilon_{\perp} \sin \theta \cdot \vec{e}_x + \epsilon_{\parallel} \cos \theta \cdot \vec{e}_z}{\epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta} \Rightarrow \\ \vec{u}_e &= v_e \frac{\epsilon_{\perp} \sin \theta \cdot \vec{e}_x + \epsilon_{\parallel} \cos \theta \cdot \vec{e}_z}{\epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

} – связь фазовой и групповой скоростей необыкновенной волны.

$$\left( \frac{\vec{u}}{k} \right) = v$$



**Вопрос.** Почему так получается, что  $v_{\perp e} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\parallel}}}$ ,  $v_{\parallel e} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}$ ?

**Ответ.** Скорость распространения лучей определяется взаимодействием электрического поля  $\vec{E}$  волны с решеткой кристалла, за которое отвечает  $\epsilon$  в направлении  $\vec{E}$ . Так как вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен направлению распространения волны, то за скорость распространения «отвечают» поперечные к этому направлению  $\epsilon$ .

**Итак, еще раз:**

I способ построения использует законы преломления, дает  $\vec{S}_0 \parallel \vec{k}_0$  и  $\vec{k}_e$ . В рассмотренном виде он верен только для поверхности, параллельной оптической оси кристалла.

II способ построения также рекомендуется использовать, если оптическая ось параллельна поверхности кристалла. Он дает  $\vec{S}_0 \parallel \vec{k}_0$ ,  $\vec{k}_e \perp \vec{D}_e$ ,  $\vec{S}_e \perp \vec{E}_e$ .

III способ построения по принципу Гюйгенса дает  $\vec{S}_e \perp \vec{E}_e$  и  $\vec{S}_0 \parallel \vec{k}_0$ .

**Пример.**

Построим ход необыкновенного луча в одноосном кристалле для случая произвольной ориентации поверхности кристалла относительно оптической оси кристалла. Для построения используем принцип Гюйгенса (III способ). Пусть имеем положительный одноосный кристалл с диэлектрическими проницаемостями

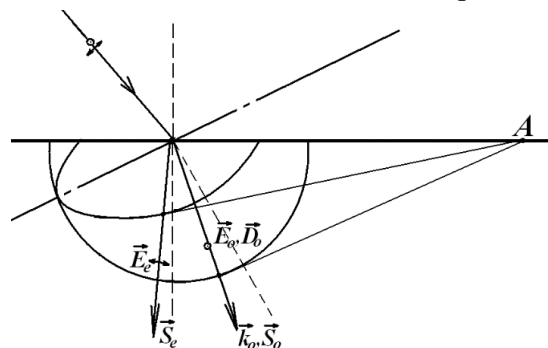
$\epsilon_{\perp} = 2$ ;  $\epsilon_{\parallel} = 8$ ;  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$  – угол падения луча

относительно нормали к поверхности.

Порядок построения хода лучей:

1. Обыкновенный луч по закону преломления пойдет в данном случае под углом  $\frac{\pi}{6}$  к нормали.

2. Строим лучевую поверхность обыкновенного луча – окружность.



3. Лучевая поверхность необыкновенного луча – эллипс, большая ось которого совпадает с диаметром проведенной окружности, а малая в 2 раза меньше, так как  $\frac{v_{\perp e}}{v_{\parallel e}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}{\sqrt{\epsilon_{\parallel}}} = \frac{1}{2}$ .

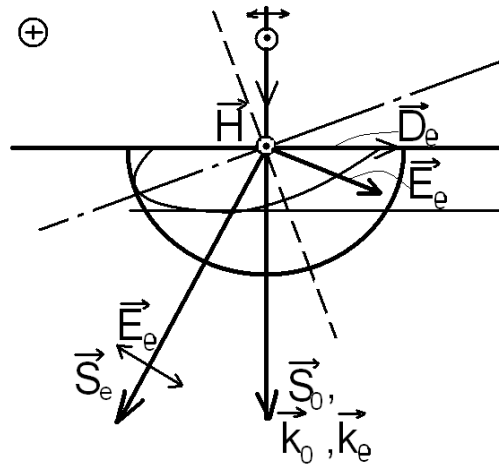
4. Проводится касательная к окружности, перпендикулярная обыкновенному лучу, до ее пересечения с границей раздела кристалла в точке  $A$ .

5. Из точки  $A$  проводится касательная к эллипсу.

6. Из точки преломления в точку касания с эллипсом проводится необыкновенный луч.

### 3. Поляризация при двойном лучепреломлении

1. Рассмотрим случай нормального (перпендикулярного к поверхности) падения света на поверхность кристалла. Из закона преломления для любого  $n_e \neq 0$ :  $n_e \sin \theta_{2e} = \sin \theta_1 \Rightarrow \sin \theta_{2e} = 0$ , то есть  $\vec{k}_0 \parallel \vec{k}_e$  перпендикулярны поверхности кристалла. Вектор  $\vec{D}_e$  параллелен поверхности кристалла, так как  $\vec{D}_e \perp \vec{k}_e$ . Построим ход необыкновенного луча из принципа Гюйгенса.



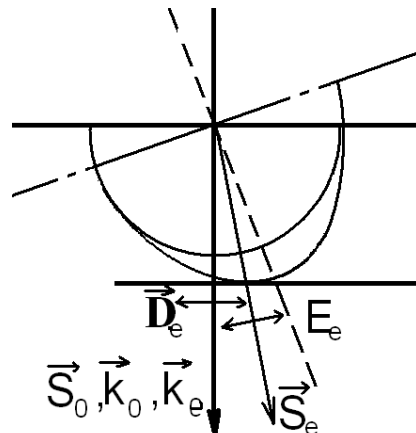
Пусть кристалл по-прежнему положительный,  $\epsilon_{\perp} = 2, \epsilon_{\parallel} = 4 \Rightarrow \vec{E}_e$  поворачивается так, чтобы быть ближе к направлению, перпендикулярному оптической оси, и «меньше» взаимодействовать с решеткой кристалла с  $\epsilon_{\perp} < \epsilon_{\parallel}$ , то есть быстрее распространяться.

При этом необыкновенный луч преломляется (то есть идет под углом к поверхности). В результате на выходе из кристалла видим два луча. То же будет для отрицательного кристалла.

$$\text{Пусть } \epsilon_{\parallel} = 2, \epsilon_{\perp} = 3 \Rightarrow \vec{E}_e = \vec{E}_{e\parallel} + \vec{E}_{e\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{D}_{e\perp}}{\epsilon_{\perp}} + \frac{\vec{D}_{e\parallel}}{\epsilon_{\parallel}} \right\}.$$

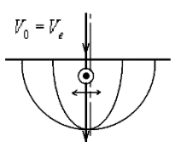
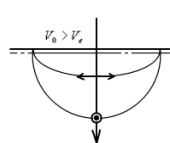
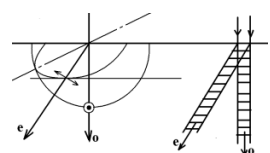
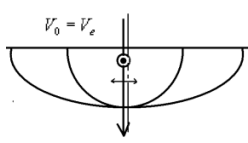
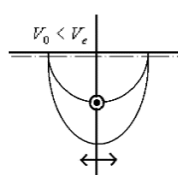
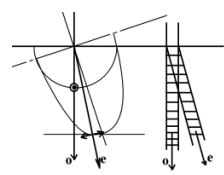
Следует обратить внимание на то, что возникает компонента  $\vec{E}$ , перпендикулярная к поверхности, и на поверхности возникает связанный заряд  $\rho'$ .

На рисунке представлено построение хода лучей в отрицательном кристалле. Необыкновенный луч опять отклоняется так, чтобы поменьше взаимодействовать своим полем с кристаллической решеткой и быстрее проходить.





2. В случае различной ориентации оптической оси кристаллические картины хода лучей различные.

Вид кристалла	Ось $\perp$ поверхности	Ось $\parallel$ поверхности	Ось под углом
«+»	Не разделяясь, $v_0 = v_e$ 	Не разделяясь, но $v_0 > v_e$ 	Разделяясь, $v_0 \neq v_e$ 
«-»	Не разделяясь, $v_0 = v_e$ 	Не разделяясь, но $v_0 < v_e$ 	Разделяясь, $v_0 \neq v_e$ 

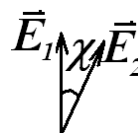
С точки зрения интерференции наиболее интересна вторая колонка.

$$\Delta = (n_e - n_o)d, \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d$$

– разность фаз одного луча относительно другого, где  $d$  –

толщина кристаллической пластинки.

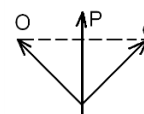
Но колебания  $\vec{E}$  в обыкновенной и необыкновенной волнах происходят во взаимно перпендикулярных направлениях, а такие лучи, как известно, не интерферируют:



$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \chi \cos \delta$$

Чтобы они интерферировали, надо, чтобы колебания  $\vec{E}$  были вдоль одного направления. Для этого надо поставить поляризатор.

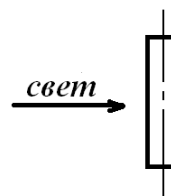
Интерференция будет существовать, если обыкновенные и необыкновенные лучи когерентны, а это так только для поляризованного света, падающего на пластинку.



Для естественного света обыкновенные и необыкновенные лучи принадлежат разным атомам, плоскости испускания которых взаимно перпендикулярны, и, следовательно, они принадлежат разным пугам  $\Rightarrow$  для естественного света таким образом интерференцию получить нельзя.

#### 4. Прохождение плоскополяризованного света через кристаллическую пластинку. Пластинка в четверть и в полдлины волны

Пластинка вырезана параллельно оптической оси  $\Rightarrow$  лучи не разделяются, но возникает сдвиг фаз  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d$ .



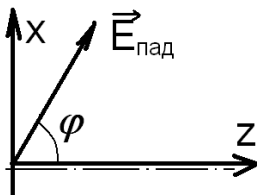
1. Если  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2} + \pi m$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , или  $\Delta = (n_e - n_o)d = \frac{\lambda_0}{4} + \frac{\lambda_0}{2}m$ , то это пластинка в четверть длины волны  $\frac{\lambda}{4}$ . На выходе из нее имеем свет, поляризованный по кругу, если на входе был линейно поляризованный свет и  $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi m_1$  – угол между оптической осью и направлением поляризации ( $m_1 = 0, 1$ ).

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi m_1 \Rightarrow \text{свет, поляризованный по кругу.}$$

$$\varphi \neq \frac{\pi}{4} + \pi m_1 \Rightarrow \text{свет с эллиптической поляризацией.}$$

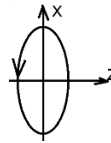
Рассмотрим подробнее, как это происходит.

а). Пусть линейно поляризованный свет падает на положительный кристалл  $\Rightarrow$  при  $n_e > n_o \rightarrow$  необыкновенный луч идет медленнее и на выходе имеет дополнительный сдвиг фазы относительно обыкновенного луча на  $\frac{\pi}{2}$ .



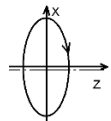
То есть, если на входе в кристалл колебания поля  $\vec{E}$  имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{E}_e = E_0 \cos \varphi \cdot \vec{e}_z \cdot e^{i\omega t} \\ \vec{E}_o = E_0 \sin \varphi \cdot \vec{e}_x \cdot e^{i\omega t} \end{cases}$$



то на выходе:

$$\begin{cases} \vec{E}_e = E_0 \cos \varphi \cdot \vec{e}_z \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \\ \vec{E}_o = E_0 \sin \varphi \cdot \vec{e}_x \cdot e^{i\omega t} \\ \vec{E}_\Sigma = E_0 \{-\sin \omega t \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_z + \cos \omega t \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_x\} \Rightarrow \end{cases}$$



б). Если линейно поляризованный свет падает на отрицательный кристалл  $\Rightarrow$  при  $n_e < n_o$

$$\vec{E}_\Sigma = E_0 [-\sin \varphi \sin \omega t \cdot \vec{e}_x + \cos \varphi \cos \omega t \cdot \vec{e}_z] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Линейно поляризованный свет пластинка в  $\frac{\lambda}{4}$  превращает в эллиптически поляризованный (или поляризованный по кругу).

в) Если падает эллиптически поляризованный свет, то пластинка  $\frac{\lambda}{4}$  превращает его в линейно поляризованный свет.

Проверим это. Пусть падает свет, поляризованный по кругу:

$$\vec{E} = E_0 [\vec{e}_x \cos(\omega t - ky) + \vec{e}_z \sin(\omega t - ky)] = E_0 \left\{ \begin{matrix} \vec{e}_x & \text{обыкн.} \\ \vec{e}_z e^{-i\frac{\pi}{2}} & \text{необыкн.} \end{matrix} \right\} \cdot e^{i(\omega t - ky)}$$

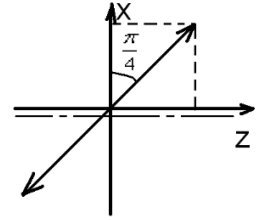
Лучи распространяются вдоль оси  $y$ , то есть на нас. Оси  $x$  и  $z$  ориентируем так, что ось  $z$  параллельна оси кристалла, тогда  $\vec{E}_o = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - ky)$ ,  $\vec{E}_e = E_0 \vec{e}_z \sin(\omega t - ky)$  – поляризация по кругу против часовой стрелки.

Пусть кристалл положительный («+»), тогда  $n_e > n_o$ , и необыкновенный луч имеет дополнительный сдвиг фаз  $\delta = \frac{\pi}{2}$  относительно обыкновенного.

На выходе:  $\vec{E}_o = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - ky) = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - ky)}$ ,  
 $\vec{E}_e = E_0 \vec{e}_z e^{i(\omega t - ky)} = E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t - ky) \Rightarrow$

$\vec{E}_\Sigma = E_0 \cos(\omega t - ky) \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_z)$  – линейно поляризованный свет.

Если бы падающий свет был эллиптически поляризован, то появились бы  $E_o \sim E_0 \sin \varphi$  и  $E_e \sim E_0 \cos \varphi$ , то есть на выходе был бы свет, линейно поляризованный под углом  $\varphi$  к оси  $z$ , если одна из главных осей эллипса совпадала бы с осью кристалла.



$\vec{E}_\Sigma = E_0 \cos(\omega t - ky) \cdot (\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_z \cos \varphi)$ .

При произвольной ориентации эллипса относительно оси выкладки чуть длиннее, но результат тот же.

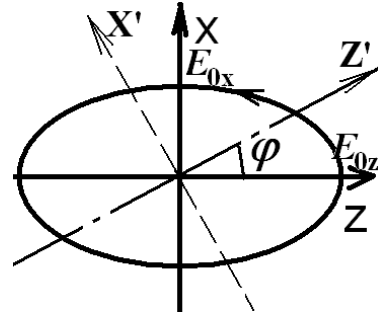
Для случая произвольной эллиптической поляризации:

$\vec{E}_{над} = E_{0x} \cos(\omega t - ky) \vec{e}_x + E_{0z} \sin(\omega t - ky) \vec{e}_z$

$$\begin{cases} \vec{e}_{z'} = \vec{e}_\parallel = \vec{e}_z \cos \varphi + \vec{e}_x \sin \varphi \\ \vec{e}_{x'} = \vec{e}_\perp = \vec{e}_x \cos \varphi - \vec{e}_z \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_x = \vec{e}_\parallel \sin \varphi + \vec{e}_\perp \cos \varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_\parallel \cos \varphi - \vec{e}_\perp \sin \varphi \end{cases};$$

$\vec{E}_o = [E_{0x} \cos(\omega t - ky) \cos \varphi - E_{0z} \sin(\omega t - ky) \sin \varphi] \cdot \vec{e}_{x'}$ ;

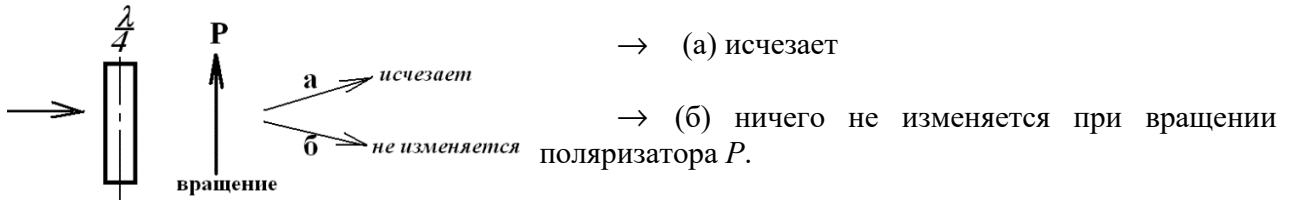
$\vec{E}_e = [E_{0z} \sin(\omega t - ky) \cos \varphi + E_{0x} \cos(\omega t - ky) \sin \varphi] \cdot \vec{e}_{z'}$ .



$n_e > n_o \rightarrow +\frac{\pi}{2}$  к фазе необыкновенного луча  $\Rightarrow$  на выходе получаем линейно поляризованный свет:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\Sigma &= E_{0x} \cos(\omega t - ky) \cos \varphi \cdot \vec{e}_{x'} - E_{0z} \sin(\omega t - ky) \sin \varphi \cdot \vec{e}_{z'} + \\ &+ E_{0z} \cos(\omega t - ky) \cos \varphi \cdot \vec{e}_{z'} - E_{0x} \sin(\omega t - ky) \sin \varphi \cdot \vec{e}_{x'} = \\ &= [E_{0x} \cdot \vec{e}_{x'} + E_{0z} \cdot \vec{e}_{z'}] \cos(\omega t - ky) \cos \varphi - [E_{0z} \vec{e}_{x'} + E_{0x} \vec{e}_{z'}] \sin(\omega t - ky) \sin \varphi. \end{aligned}$$

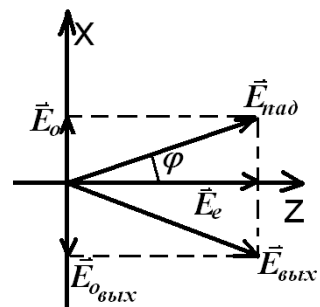
**Следствие.** Как отличить свет, поляризованный по кругу (а), от естественного света (б):



2. Если  $\Delta = d|n_e - n_o| = \frac{\lambda_0}{2} + \lambda_0 m$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то это пластинка в полдлины волны  $\frac{\lambda}{2}$ .

Она изменяет фазу одного луча относительно другого на  $\pi$ .

Пусть падает линейно поляризованный свет  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - ky)$ , и  $\vec{E}_0$  составляет угол  $\varphi$  с оптической осью пластинки.



Пусть кристалл отрицательный «-»  $\Rightarrow$  к фазе обыкновенного луча добавляется  $\pi$ .

$\vec{E}_{над} = E_0 \sin \varphi \cos(\omega t - ky) \cdot \vec{e}_o + E_0 \cos \varphi \cos(\omega t - ky) \cdot \vec{e}_e$ ;

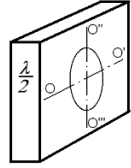
$\vec{E}_{вых} = -E_0 \sin \varphi \cos(\omega t - ky) \cdot \vec{e}_o + E_0 \cos \varphi \cos(\omega t - ky) \cdot \vec{e}_e \Rightarrow$

пластинка в  $\frac{\lambda}{2}$  поворачивает направление поляризации линейно поляризованного света на угол  $2\varphi$ , где  $\varphi$  – угол между направлением первоначальной поляризации и оптической осью кристалла.

### 5. Задача

На пластинку  $\frac{\lambda}{2}$  падает монохроматическая волна интенсивности  $I_0$  :

- а) естественного света;
- б) поляризованного по кругу света;
- в) линейно поляризованного света, причем  $\vec{E}_{над}$  направлен под углом  $\varphi$  к оси кристалла  $OO'$ .



Из пластинки вырезали круг  $O(R = 1,5 \cdot r_1)$ , где  $r_1$  – радиус первой зоны Френеля для точки наблюдения, и повернули круг на  $\frac{\pi}{2}$ . Найти интенсивность в точке наблюдения  $P$ .

Решение.

а) Для естественного света ничего не меняется  $I_P = I_0$ , так как нет интерференции и нет поглощения.

б) Если свет поляризован по кругу, то  $\vec{E}_{над} = E_0(\cos \varphi \cdot \vec{e}_z + \sin \varphi \cdot \vec{e}_x)$ .

В соответствии со спиралью Френеля, в отсутствии пластинки от внешних зон пришла бы волна с напряженностью

$$\vec{E}_{внешн} = E_0 \left( \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \vec{e}_{z_e} + \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \vec{e}_{x_0} \right),$$

а волна, пришедшая от полутора внутренних зон, имела бы напряженность

$$\vec{E}_{внутр} = \sqrt{2} E_0 \left[ \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \vec{e}_{z_0} + \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \vec{e}_{x_e} \right].$$

После пластинки (пусть пластинка вырезана из положительного кристалла) необыкновенный луч приобретает дополнительную фазу  $\pi$ . Будем считать, что ось кристалла параллельна оси  $z$ , а ось вырезанного круга параллельна оси  $x$ . Тогда дополнительную фазу получает внутренняя волна с поляризацией по  $x$  и внешняя волна

с поляризацией по  $z$ .

После пластинки:

$$\vec{E}_{внутр} = \vec{E}_{внутр} = \sqrt{2} E_0 \left[ \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \vec{e}_{z_0} + \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} + \pi \right) \cdot \vec{e}_{x_e} \right] =$$

$$= E_0 [(\cos \varphi - \sin \varphi) \cdot \vec{e}_z - (\sin \varphi + \cos \varphi) \cdot \vec{e}_x];$$

$$\vec{E}_{внешн} = E_0 \left( \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{2} + \pi \right) \cdot \vec{e}_{z_e} + \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \vec{e}_{x_0} \right) =$$

$$= E_0 [-\sin \varphi \cdot \vec{e}_z - \cos \varphi \cdot \vec{e}_x];$$

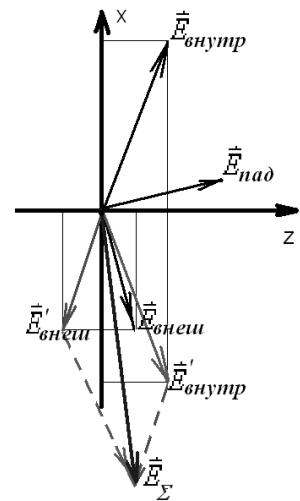
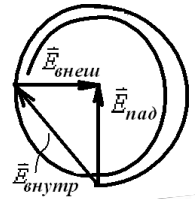
$$\vec{E}_{\Sigma} = E_0 [-(\sin \varphi + 2 \cos \varphi) \cdot \vec{e}_x + (\cos \varphi - 2 \sin \varphi) \cdot \vec{e}_z].$$

в т.Р

Для пластинки, вырезанной из отрицательного кристалла, получилось бы то же самое, но знаки были бы противоположные.

$$I_p = \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot [\sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi - 4 \sin \varphi \cos \varphi] = 5 I_0.$$

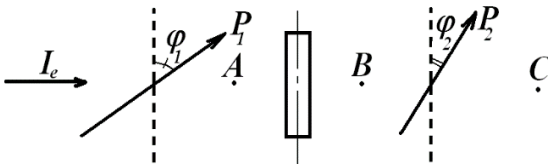
в) Для линейно поляризованного света также получается пятикратное увеличение интенсивности в точке наблюдения  $I_p = 5 I_0$ . При этом интенсивность в точке  $P$  не зависит от ориентации поляризации падающего света относительно оси кристалла. Выкладки, приводящие к этому результату, предлагается проделать самостоятельно, а на рисунке представлено графическое решение этой задачи.



## 6. Кристаллическая пластинка между двумя поляризаторами

Волны с разной поляризацией в основном принадлежат разным пугам, входящим в состав естественного света. Поэтому при падении естественного света на одноосный кристалл обыкновенная и необыкновенная волны на выходе из кристалла некогерентны. Если на пути естественного света перед кристаллической пластинкой поставить поляризатор, так, чтобы плоскость его пропускания составляла угол  $\varphi \neq 0, \frac{\pi}{2}$  с осью кристалла, то при вступлении в кристалл колебания каждого пуга разделятся на обыкновенную и необыкновенную волны, которые в этом случае будут когерентны.

Пусть естественный свет падает на систему, состоящую из кристаллической пластинки, находящейся между двумя поляризаторами. Для того чтобы понять, что будет наблюдаться на выходе из системы, надо последовательно рассмотреть поляризацию и интенсивность света в точках *A*, *B* и *C* системы.



### Точка А:



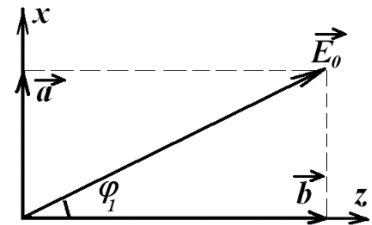
Имеем линейно поляризованный свет с  $I_A = \frac{I_e}{2}$ ;  $\vec{E}_A = \vec{E}_0 \cos \omega t$ .

Пусть кристалл положительный – кварц, тогда

$$n_e > n_o \Rightarrow v_e < v_o \Rightarrow \delta_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_e - n_o) d.$$

Пусть  $\vec{E}_A = E_0 (\cos \varphi_1 \cdot \vec{e}_z + \sin \varphi_1 \cdot \vec{e}_x) \cos \omega t$ ,

где  $\varphi_1$  – угол между направлением поляризации (направлением поляризатора  $P_1$ ) и осью кристалла  $z$ .



### Точка В:

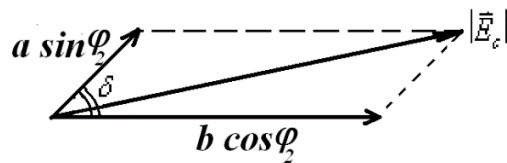
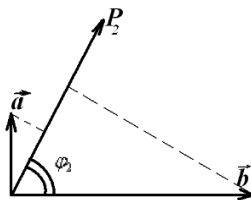
$$\vec{E}_B = E_0 \{ \cos \varphi_1 \cos(\omega t + \delta) \cdot \vec{e}_z + \sin \varphi_1 \cos \omega t \cdot \vec{e}_x \}.$$

Пусть  $\vec{a} = E_0 \sin \varphi_1 \cdot \vec{e}_x$ ,  $\vec{b} = E_0 \cos \varphi_1 \cdot \vec{e}_z$ , тогда  $\vec{E}_B = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \cos(\omega t + \delta)$ .

### Точка С:

$\vec{a}$  и  $\vec{b}$  проецируются на направление поляризатора  $\vec{P}_2$ , но они сдвинуты по фазе друг относительно друга на  $\delta$ :

$a \sin \varphi_2$  и  $b \cos \varphi_2$  – это стороны треугольника с углом  $\delta$  между ними:



$$\begin{aligned}
 E_C^2 &= (a \sin \phi_2)^2 + (b \cos \phi_2)^2 + 2ab \sin \phi_2 \cos \phi_2 \cos \delta = E_0^2 \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 + E_0^2 \cos^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2 + \\
 &+ 2E_0^2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cdot \cos \delta = E_0^2 \left\{ \sin^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2 + \cos^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2 + \right. \\
 &\left. + 2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin 2\phi_1 \sin 2\phi_2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\} = \\
 &= E_0^2 \left\{ [\sin \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2]^2 - \sin 2\phi_1 \sin 2\phi_2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\} = \\
 &= E_0^2 [\cos^2(\phi_1 - \phi_2) - \sin 2\phi_1 \sin 2\phi_2 \sin^2 \frac{\delta}{2}] \Rightarrow \\
 I_C &= \frac{I_e}{2} \left\{ \cos^2(\phi_1 - \phi_2) - \sin 2\phi_1 \sin 2\phi_2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Частные случаи:

1.  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ , то есть параллельные поляризаторы  $P_1 \parallel P_2 \Rightarrow I_C = \frac{I_e}{2} \{1 - \sin^2 2\phi \sin^2 \frac{\delta}{2}\}$ .

При  $P_1 \parallel P_2$ ,  $\phi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I_{C\parallel} = \frac{I_e}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2}$ .

2.  $\phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2}$ , то есть скрещенные поляризаторы  $P_1 \perp P_2 \Rightarrow I_C = \frac{I_e}{2} |\sin 2\phi_1 \sin 2\phi_2| \sin^2 \frac{\delta}{2}$ .

При  $P_1 \perp P_2$ ,  $\phi_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I_{C\perp} = \frac{I_e}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2}$ .

Разность фаз лучей $\delta$	$2\pi \cdot m$	$\pi \cdot (2m + 1)$
Оптическая разность хода лучей $\Delta$	$\lambda m$	$\frac{\lambda}{2} + \lambda m$
Название пластинки	Пластинка в длину волны	Полуволновая пластинка
$I_{\parallel}$	$\max = \frac{I_e}{2}$	$\min = 0$
$I_{\perp}$	$\min = 0$	$\max = \frac{I_e}{2}$

Как мы знаем, показатели преломления зависят от длины волны, поэтому  $(n_e - n_o) = f(\lambda)$ .

Если  $\lambda_1$  такое, что  $\Delta_1 = m_1 \lambda_1$  и для  $\lambda_2$  выполняется условие  $\Delta_2 = \lambda_2 \left( m_2 + \frac{1}{2} \right)$ , то, имея свет  $(\lambda_1 + \lambda_2)$ , при соответствующих положениях поляризаторов получаются картинки с разной окраской. Такие длины волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  называются дополнительными, а соответствующие им цвета – дополнительными цветами.



## 7. Искусственное двойное лучепреломление

В прозрачных аморфных телах (*a* – греч. отрицание, *морфе* – форма) и в кубически симметричных кристаллах может возникнуть эффект двойного лучепреломления в результате внешнего воздействия:

- 1) механическая деформация приводит к пьезооптическому эффекту (Брюстер, Максвелл). Эффект наблюдается в изотропных, аморфных, жидких средах.
- 2) электрическое поле создает эффект Керра;
- 3) магнитное поле создает эффект Коттона-Мутона.

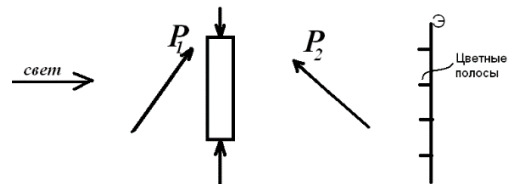
**Механизм:** в отсутствие внешнего воздействия всё изотропно, так как нет выделенного направления, которое появляется при внешнем воздействии.

1а) Для изотропных кристаллических твердых тел в 1815 г. Брюстер наблюдал эффект искусственного двойного лучепреломления, осуществляя однонаправленное растяжение–сжатие изотропной кубической решетки.

Изотропная кубическая решетка + однонаправленное растяжение-сжатие  $\Rightarrow |n_o - n_e| = k\sigma \leftarrow$  приложенное напряжение,  $k = f(\lambda)$ . В результате наблюдают цветные полосы.

Если  $P_1 \perp P_2$ , одинаковые полосы соответствуют местам одинаковой деформации  $\Rightarrow$  оптический метод исследования напряжений – метод фотоупругости.

1б) Для аморфных твердых тел и жидкостей с анизотропными молекулами при течении жидкости наблюдается аналогичный эффект – так называемый эффект Максвелла.



2) Электрическое поле обеспечивает возникновение эффекта Керра.

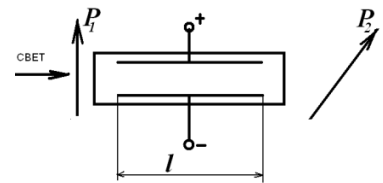
Он был обнаружен в 1875 г. для жидкостей и аморфных тел; в 1930 г. – для газов.

$$P_1 \perp P_2;$$

$$n_o - n_e = kE^2;$$

$$\Delta = kE^2 l;$$

$$\delta = \frac{2\pi \cdot k}{\lambda} E^2 l = 2\pi \cdot VE^2 l, \text{ где } V = \frac{k}{\lambda} \text{ – постоянная Керра.}$$



При повышении температуры постоянная Керра уменьшается:  $\uparrow T \rightarrow \downarrow V$ , то есть  $V \sim \frac{1}{T}$ .

$V_{\max}$  для нитробензола  $C_6H_5NO_2$ .

При расстоянии между пластинками 1 мм,  $U = 1,5 \text{ кВ} \Rightarrow E = 1,5 \cdot 10^6 \frac{В}{м}$  при  $l = 5 \text{ см} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}, \text{ то есть, получается пластинка } \frac{\lambda}{4}.$$

**Механизм:** в отсутствие  $\vec{E}$  молекулы ориентированы хаотично. Во внешнем электрическом поле  $\vec{E}$  дипольный электрический момент ориентирован по полю у полярных молекул, а у неполярных поляризован вдоль направления тах поляризации. *Время установления*

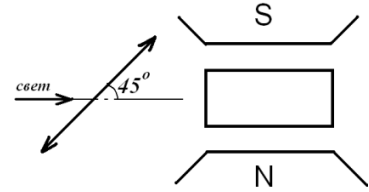
*анизотропии среды*  $\sim 10^{-10} \text{ с} \Rightarrow$  *безынерционный световой затвор*

$E = 0$  – затвор закрыт  
 $E \neq 0$  – затвор открыт

3) *Эффект Коттона – Мутона* обусловлен возникновением анизотропии под действием магнитного поля. Обнаружен Керром и независимо Майораном в 1901 г.

**Механизм.** Молекулы среды анизотропны + имеют постоянный магнитный момент (парамагнетик).

В сильных магнитных полях имеет место преимущественная ориентация магнитных моментов молекул  $\Rightarrow$  среда ведет себя как одноосный кристалл с осью  $\parallel \vec{B}$ .



$$\delta = 2\pi \cdot c \cdot e \cdot B^2, \text{ где } c = \text{const} = f(\text{свойства среды}, \lambda), c \sim \frac{1}{T}.$$

В нитробензоле, помещенном в магнитное поле с индукцией  $B=2 \text{ Тл}$ , на длине  $l=10 \text{ см}$  возникает оптическая разность хода  $\delta \sim 3^\circ$ .

## 8. Вращение плоскости поляризации

### 1. Естественное вращение плоскости поляризации.

Если линейно поляризованный свет, пройдя через вещество в отсутствие внешнего магнитного поля, имеет повернутую относительно первоначального положения плоскость поляризации, то говорят о естественном вращении плоскости поляризации. Такие вещества называются оптически активными.

Оптически активные вещества:

- а) кристаллические: кварц, киноварь;
- б) чистые жидкости: скипидар, никотин;
- в) растворы оптически активных веществ в неактивных растворителях:
  - водные растворы сахара;
  - водные растворы винной кислоты.

Плоскость поляризации – плоскость, перпендикулярная направлению поляризации.

(Это историческое определение плоскости поляризации, которого мы будем придерживаться. В настоящее время во многих учебниках ( И.Е. Иродова, Д.В. Сивухина) плоскостью поляризации называют плоскость, проходящую через нормаль к волновому фронту и вектор напряженности электрического поля.



а) В кристаллических веществах.

Кварц – одноосный кристалл, как он вращает плоскость поляризации, мы уже знаем.

**Вопрос.** Что же в этом удивительного?

**Ответ.** Знаем, но не всё. В данном случае речь идет о вращении плоскости поляризации, когда свет распространяется вдоль оптической оси кристалла (при этом ведь фактически оба луча – обыкновенные).

Открыто естественное вращение плоскости поляризации в 1811 г. Д. Араго на кварце.

Существуют право- и левовращающие оптически активные вещества.

$\varphi = \alpha \cdot l$ , где  $l$  – путь в кристалле.

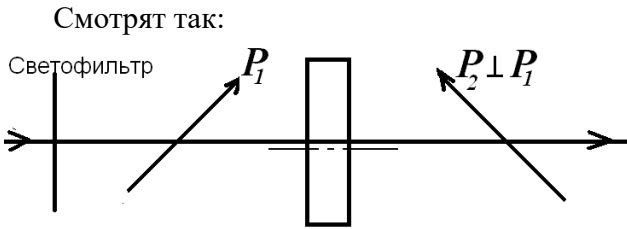
$\alpha = f(\lambda)$  – постоянная вращения, существует дисперсия вращающей способности.

б) В растворах.

$\varphi = [\alpha] \cdot c \cdot l$ , где  $c$  – концентрация,  $[\alpha]$  – удельная постоянная вращения.

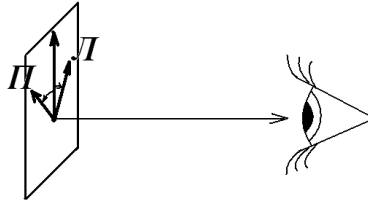
Обнаружено Ж.-Б. Био в 1815 г. на растворах сахара. К концу прошлого века знали больше 700 таких веществ.



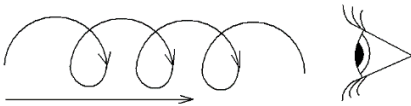


Свет проходит, так как существует  $\varphi = f(\lambda)$ .

Право- и левовращение отсчитывают от наблюдателя, к которому идет свет.  
 $\Pi$  – положительный,  $\Lambda$  – отрицательный угол поворота.

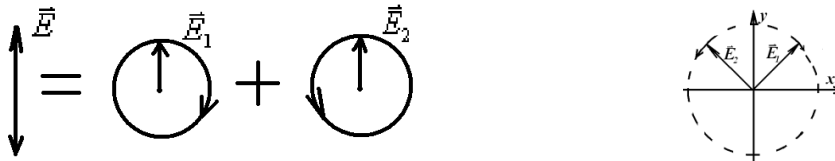


**Механизм.** Естественные активные оптически вещества – дисимметричные среды: в них вращения по часовой стрелке и против часовой стрелки не эквивалентны.



– вращение против часовой стрелки.

Любой линейно поляризованный свет можно представить в виде суммы двух волн с круговой поляризацией по и против часовой стрелке.



$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \cos \omega \cdot t = E_1 (\vec{e}_x \sin \omega \cdot t + \vec{e}_y \cos \omega \cdot t) + E_2 (-\vec{e}_x \sin \omega \cdot t + \vec{e}_y \cos \omega \cdot t),$$

здесь  $E_1 = E_2 = \frac{E_0}{2}$ .

Пусть вследствие винтовой анизотропии среды легче идти волне  $\vec{E}_2$ , так как  $v_{E_2} > v_{E_1} \Rightarrow$

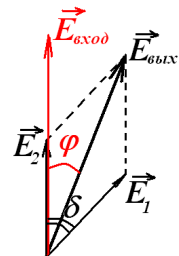
на выходе возникает разность хода  $\delta = \alpha \cdot l = (n_1 - n_2) \frac{l \cdot 2\pi}{\lambda} \Rightarrow$

$\alpha = (n_1 - n_2) \frac{2\pi}{\lambda}$  – сдвиг фаз между  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  на единицу длины оптически активной среды (в данном случае это дополнительная фаза волны  $E_1$ ).

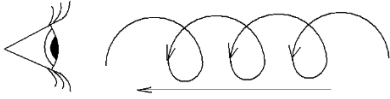
Запишем это аналитически. На выходе:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{2} \{ \vec{e}_x \sin(\omega t + \delta) + \vec{e}_y \cos(\omega t + \delta) - \vec{e}_x \sin \omega t + \vec{e}_y \cos \omega t \}.$$

$$\vec{E}_{\text{вых}} = \vec{E}_2 + \vec{E}_1, \text{ то есть } \varphi = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi(n_1 - n_2)l}{\lambda}.$$



Пусть теперь свет, отразившись от зеркала, идет обратно. На выходе после обратного прохода луча через оптически активную среду у луча будет первоначальная поляризация, так как при прохождении света в противоположном направлении плоскость поляризации будет вращаться в противоположную сторону.



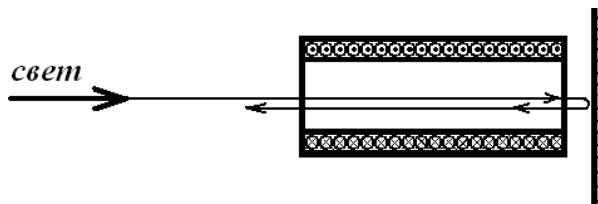
Следовательно, среда является право- или левовращающей независимо от направления распространения света.

2. Магнитное вращение плоскости поляризации – вращение плоскости поляризации в присутствии магнитного поля – эффект Фарадея.

Он наблюдается только при распространении света вдоль направления намагничивания из-за прецессии электронных орбит.

Угол поворота  $\varphi = V \cdot l \cdot H$  зависит от направления магнитного поля и не зависит от направления распространения света.

При прохождении света сквозь магнитное поле в прямом и обратном направлении суммарный угол поворота  $\varphi = 2 \cdot V \cdot l \cdot H$ , здесь  $V$  – постоянная Верде.



В заключение хочется пожелать всем изучавшим этот курс, чтобы слова Рене Декарта «*Cogito, ergo sum* – я мыслю, следовательно, я существую» и лаконичное латинское изречение «*Debes, ergo potes* – должен, значит, можешь» стали бы вашими интеллектуальными жизненными принципами, а основанием к уверенности в своих возможностях могут служить те физические явления, в которых вы разобрались, изучая курс Общей физики.

Желаю дальнейших успехов!



# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Глава I. Фотометрия.....3

## Глава II. Геометрическая оптика.....5

1. Принцип Ферма
2. Кардинальные точки и плоскости центрированной оптической системы
3. Принципы построения изображений
4. Формулы центрированной оптической системы



## Глава III. Интерференция.....13

1. Интерференция плоских линейно поляризованных монохроматических волн
2. Интерференция двух плоских линейно поляризованных волн с равными частотами. Оценка ширины интерференционных полос
3. Интерференция двух линейно поляризованных волн с близкими частотами
4. Интерференция двух плоских линейно поляризованных квазимонохроматических волн. Время когерентности. Длина когерентности
5. Интерференция света от протяженного источника  
Пространственная когерентность. Радиус когерентности
6. Интерференционные системы (схемы для наблюдения интерференции)
7. Просветление оптики

## Глава IV. Дифракция.....33

1. Принцип Гюйгенса-Френеля
2. Дифракция сферической волны от круглого отверстия и круглого диска  
Зоны Френеля
3. Дифракция Френеля от края полуплоскости и от щели. Спираль Корню
4. Дифракция Фраунгофера
5. Дифракционная решетка
6. Дисперсия и разрешающая сила дифракционной решетки
7. Разрешающая сила объектива
8. Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа – Брэгга  
Методы рентгеновского анализа



## Глава V. Поляризация света.....52

1. Естественный и поляризованный свет. Частично поляризованный свет  
Степень поляризации. Закон Малюса
2. Двойное лучепреломление в одноосных кристаллах  
Плоские монохроматические волны в одноосных кристаллах
3. Поляризация при двойном лучепреломлении
4. Прохождение плоскополяризованного света через кристаллическую пластинку. Пластинка в четверть и в полдлины волны
5. Задача
6. Кристаллическая пластинка между двумя поляризаторами
7. Искусственное двойное лучепреломление
8. Вращение плоскости поляризации



*Елена Николаевна АКСЕНОВА*  
**ОБЩАЯ ФИЗИКА. ОПТИКА (ГЛАВЫ КУРСА)**

Учебное пособие

Издание второе, исправленное

Зав. редакцией  
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*  
Ответственный редактор *С. В. Макаров*  
Автор художественных образов *Е. А. Румянцева*  
Корректор *А. О. Брезман*  
Выпускающий *С. Ю. Гаганов*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.10.07.953.П.1028  
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**  
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com  
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.  
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

**ГДЕ КУПИТЬ**

**ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:**

*Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться  
в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

**по России и зарубежью**  
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, 1, лит. А  
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93  
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967

**www.lanbook.com**  
пункт меню «Где купить»  
раздел «Прайс-листы, каталоги»

**в Москве и в Московской области**  
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19  
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

**в Краснодаре и в Краснодарском крае**  
«ЛАНЬ-ЮГ». 350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1  
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

**ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:**

*интернет-магазин*  
**Издательство «Лань»: <http://www.lanbook.com>**  
*магазин электронных книг*  
**Global F5: <http://globalf5.com/>**

Подписано в печать 01.02.18.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 9,50. Тираж 100 экз.

Заказ № 093-18.

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленного оригинал-макета  
в АО «Т8 Издательские Технологии».  
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.