

Е. Н. АКСЕНОВА

ОБЩАЯ ФИЗИКА. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ (ГЛАВЫ КУРСА)

Учебное пособие

Издание второе, исправленное



ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2018

ББК 22.33я73

А 42

Аксенова Е. Н.

А 42 Общая физика. Электричество и магнетизм (главы курса): Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 112 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-2909-7

Этот курс лекций по общей физике является результатом многолетней преподавательской деятельности доцента, кандидата физико-математических наук Е. Н. Аксеновой при работе со студентами МИФИ. Он создан по просьбе и при технической поддержке самих студентов. Отличительной особенностью этого курса является его интерактивный характер, заключающийся в том, что материал каждой темы в процессе его изложения содержит четко сформулированные качественные вопросы. Они помогают понять физические нюансы изучаемого материала и выработать личное суждение по данному вопросу, а затем сравнить его с приведенным далее правильным ответом. Кроме того, курс ставит своей целью научить читателя пользоваться изложенным материалом применительно к решению задач, построив мостик между «узнал, понял» и «могу использовать, решать». Поэтому каждый раздел содержит параграф, посвященный методике решения задач с последовательным изложением программы практических действий.

Пособие предназначено для студентов вузов всех форм обучения и направлений подготовки, входящих в УГС: «Физика и астрономия», «Электроника, радиотехника и системы связи», «Электро- и теплотехника», «Физико-технические науки и технологии», «Машиностроение», «Технологии материалов», «Авиационная и ракетно-космическая техника», и других физико-математических и инженерно-технических направлений. Книга также будет полезна учителям общеобразовательных школ и учащимся физико-математических классов.

ББК 22.33я73

Обложка

Е. А. ВЛАСОВА

© Издательство «Лань», 2018

© Е. Н. Аксенова, текст,
макет, иллюстрации, 2018

© Издательство «Лань»,
обложка, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Структура курса и его особенности.....5

Глава I. Электростатика.....7

1. Заряд. Закон сохранения электрического заряда
2. Закон Кулона
3. Системы единиц
4. Принцип суперпозиции
5. Напряженность электростатического поля
6. Потенциал электростатического поля
7. Работа сил электростатического поля
8. Задачи на вычисление напряженности \vec{E} и потенциала φ электростатического поля
9. Энергия взаимодействия зарядов
10. Элементы векторного анализа. I часть
11. Теорема Гаусса для напряженности электрического поля в вакууме
12. Вычисление электростатических полей в вакууме с помощью теоремы Гаусса
13. Поле системы зарядов на больших расстояниях от нее
14. Электрический диполь. Поле точечного диполя
15. Диполь во внешнем электростатическом поле
16. Качественные вопросы
17. Диэлектрики в электростатическом поле. Отклик диэлектриков на внешнее поле
18. Поляризация
19. Поле в диэлектриках
20. Связь плотности свободных ρ_0 и связанных ρ' зарядов в изотропном диэлектрике
21. Условия на границе раздела двух диэлектриков
22. Замечания
23. Задачи и качественные вопросы
24. Специальные виды твердых диэлектриков
25. Проводники в электростатическом поле
26. Основная задача электростатики проводников. Метод изображений
27. Емкость уединенного проводника
28. Конденсаторы
29. Энергия электростатического поля



Глава II. Постоянный ток.....55

1. Сила и плотность тока
2. Постоянный ток. Электродвижущая сила
3. Закон Ома. Сопротивление проводников
4. Заряд внутри однородного проводника с постоянным током
5. Электрическое поле проводника с током
6. Закон Ома для неоднородного участка цепи
7. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа
8. Закон Джоуля – Ленца



Глава III. Магнитостатика.....62

1. Принцип построения главы «Магнитостатика»
2. Сила взаимодействия элементов тока – закон Ампера
3. Принцип суперпозиции
4. Индукция магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа
5. Принципы вычисления магнитных полей по закону Био – Савара – Лапласа
6. Единицы измерения
7. Сила, действующая на заряд, движущийся в электромагнитном поле
8. Элементы векторного анализа. II часть
9. Уравнения Максвелла для электро- и магнитостатики
10. Примеры расчета распределения магнитной индукции в пространстве, не содержащем магнетиков, по теореме Стокса
11. Поле соленоида
12. Поле тороида
13. Замкнутый контур с током. Поле контура с током на больших расстояниях от него
14. Контур с током во внешнем магнитном поле
15. Примеры
16. Магнитное поле в веществе: отклик магнетиков на внешнее магнитное поле. Намагниченность
17. Напряженность магнитного поля
18. Связь \vec{B} , \vec{H} , \vec{J} в изотропной среде в линейном приближении
19. Условия отсутствия макроскопических молекулярных токов ($\vec{j}' = 0$) внутри изотропного магнетика
20. Граничные условия
21. Примеры
22. Механизмы намагничивания



Глава IV. Электродинамика. Уравнения Максвелла.....92

1. Электромагнитная индукция
2. Самоиндукция. Индуктивность контура
3. Взаимная индукция. Теорема взаимности
4. Токи при замыкании и размыкании цепи, содержащей индуктивность
5. Токи при замыкании и размыкании цепи, содержащей емкость
6. Энергия магнитного поля
7. Способы вычисления индуктивности
8. Колебательный RLC -контур. Резонанс токов и напряжений. Добротность
9. Ток смещения
10. Различные формы записи уравнений Максвелла
11. Свойства уравнений Максвелла
12. Следствия из системы уравнений Максвелла



Введение. Структура курса и его особенности

Что предстоит усвоить.

а) На уровне понимания.

1. **Электростатика** – вычисление полей от неподвижных зарядов:

электрические заряды взаимодействуют посредством поля \Rightarrow каждый заряд создает силовое электрическое поле \Rightarrow его силовая характеристика называется напряженностью \vec{E} , а энергетическая – потенциалом $\varphi \Rightarrow$ вещества (даже незаряженные) «отзываются» на существование электрического поля – поляризуются $\vec{P} \Rightarrow$ расчет электрических полей в веществе.



2–3. **Постоянный ток** создает статическое магнитное поле \Rightarrow его силовая характеристика называется индукцией $\vec{B} \Rightarrow$ вещества реагируют на магнитное поле – намагничиваются $\vec{J} \Rightarrow$ расчет магнитных полей в веществе \Rightarrow **магнитостатика**.

4. **Электродинамика – уравнения Максвелла:** 1) + 2) \Rightarrow источником электрического поля являются электрические заряды и переменное магнитное поле, причем источником потенциального электрического поля являются электрические заряды, а переменное во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. 3) + 4) \Rightarrow не обнаружено магнитных зарядов + источником вихревого магнитного поля является переменное во времени электрическое поле и токи свободных и связанных зарядов.

б) На уровне знания.

Электродинамика основана на следующих экспериментальных (эмпирических) законах:

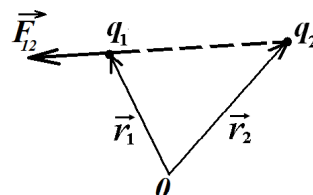
1. **Принцип суперпозиции** – силы складываются как векторы:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

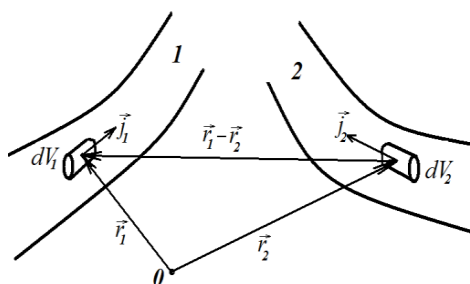
2. **Закон Кулона** – устанавливает силу взаимодействия покоящихся точечных зарядов:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

на со стороны



3а. **Закон Ампера** – устанавливает силу взаимодействия элементарных токов:

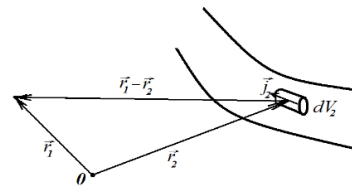


$$d^2 \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}_1 dV_1 [\vec{j}_2 dV_2; (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$



36. Закон Био – Савара – Лапласа определяет магнитное поле, которое создает элемент тока:

$$d\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}_2(\vec{r}_2)dV_2; (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$



3в. Сила электромагнитного взаимодействия = сила Лоренца – сила, действующая на заряд, движущийся в электромагнитном поле:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}].$$

4. Закон Фарадея = закон электромагнитной индукции:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}$$

– изменение магнитного потока через площадь контура порождает электродвижущую силу в контуре.

5. Закон сохранения заряда: заряд изолированной системы сохраняется.

6. Магнитных зарядов не обнаружено.

Что дают эти законы:

1 + 2 = электростатика (консервативность электростатического поля с силовой характеристикой \vec{E} и энергетической φ);

1 + 3в } = **магнитостатика** (заряды, движущиеся с постоянными скоростями, порождают постоянное магнитное поле с силовой характеристикой \vec{B}).

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = уравнения Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \mathbf{2 + 4 \text{ (Кулон + Фарадей);}} \\ \text{div}\vec{D} = \rho & \mathbf{1 + 2 \text{ (Кулон + принцип суперпозиции);}} \\ \text{div}\vec{B} = 0 & \mathbf{6 \text{ или } 1 + 3 \text{ (Ампер + принцип суперпозиции);}} \\ \text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & \mathbf{1 + 3 + 5 \text{ (Пр. суперпоз. + Ампер + закон сохр. зар.).}} \end{array} \right.$$

Система уравнений Максвелла в совокупности с материальными уравнениями, определяющими собой способность вещества реагировать на электромагнитное поле с учетом неоднородности сред в виде существующих границ раздела, дает возможность находить распределение электромагнитного поля в пространстве. Более подробно эти вопросы изучаются в курсе «Макроскопическая электродинамика (электродинамика сплошных сред)». В нашем курсе общей физики мы только сформулируем подход к решению динамических задач и рассмотрим самые простые случаи.

Полезно запомнить с самого начала, что всего уравнений Максвелла 8, а неизвестных 12.



I. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1. Заряд. Закон сохранения электрического заряда

Как фундаментальное понятие заряд трудно определить.

Электрический заряд – неотъемлемое свойство ряда элементарных частиц, количественная характеристика способности элементарных частиц вступать в электромагнитные взаимодействия.

Попросту, отрицательный заряд – это то, что возникает на эбонитовой палочке, если натереть ее мехом или почесать пластмассовой ручкой голову.

Положительный заряд возникает на стекле, потертом о шелк.

Если поднести потертые предметы к кусочкам бумаги, то бумажки притянутся в результате электростатического взаимодействия – происходит электрострикция через влияние.

Свойства зарядов:

1. Заряд частицы – релятивистский *invar*.

$q = \text{const}$, то есть не зависит от скорости частицы и одинаков во всех системах отсчета.

2. Электрический заряд квантован.

В свободном состоянии существуют элементарные частицы с зарядом $q = (0; +1; -1) \cdot e$. То есть любой объект всегда будет иметь дискретный спектр значений заряда $Q = Ne$, где N – любое целое число.

Заряд протона $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл > 0 (так договорились считать).

Заряд электрона $q = -e$.

В том, что заряд электрона и протона в точности равны, убеждает существование позитрония – атома с одним электроном и позитроном вместо ядра, который ведет себя как электронейтральная частица:

$-e + e = \gamma$ с временем жизни парапозитрония ($\uparrow\uparrow$) 10^{-10} с и ортопозитрония ($\uparrow\downarrow$) 10^{-7} с.

Виртуальные частицы кварки, из которых состоят все элементарные частицы адроны, не существуют в свободном состоянии и имеют заряды $(+\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; +\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}) \cdot e$.

1 Кл = $3 \cdot 10^9$ СГСЭ ед. заряда = $6 \cdot 10^{18} e$.

Закон сохранения заряда:

заряд электрически изолированной системы сохраняется.

Система называется электрически изолированной, если через ее поверхность не могут проникать заряженные частицы.

Не нарушается и в атомной физике.



2. Закон Кулона

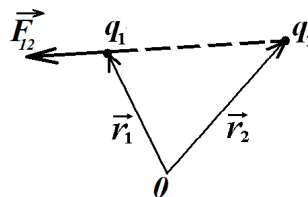
Открыт Кулоном в 1785 г., за 11 лет до Кулона в 1774 г. был открыт Кавендишем. Открытие Кавендиша было опубликовано в 1879 г. Максвеллом, который нашел в архивах рукопись Кавендиша.

Точечный заряд – заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием между зарядами.

Верен закон Кулона на расстояниях от классического радиуса электрона 10^{-15} м до нескольких км с точностью 10^{-6} .

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

на со стороны

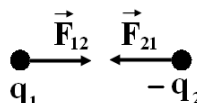


Анализ кулоновской силы.

1) а) Одноименные заряды отталкиваются.



б) Разноименные заряды притягиваются.



2) Сила действует по прямой, соединяющей заряды, в силу изотропии пространства.

3) $F \sim \frac{1}{r_{12}^2}$ убывает, как и гравитационная сила, но по величине кулоновская сила

взаимодействия единичных объектов гораздо больше гравитационной:

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{H \cdot M^2}{Kг^2} \ll k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{H \cdot M^2}{Кл^2}.$$

Силы: трения, упругости, натяжения, давления, химические – все имеют электромагнитную природу.



Вопросы.

1) Как быть с атомами – почему электроны не слипаются с ядрами?

Ответ. Виноват принцип неопределенности $\Delta p_x \Delta x \geq h$, то есть чем меньше ограничивающий движение электрона объем, тем быстрее он движется, и это движение мешает ему еще больше сблизиться с ядром.

2) А почему же сами ядра, состоящие из одноименных зарядов, не разлетаются?

Ответ. Так как существуют ядерные силы, они больше электрических, но убывают резко, поэтому действуют в основном между соседями (протонами p и нейтронами n) \Rightarrow неустойчивость больших ядер: достаточно стукнуть медленным n по ядру урана ^{235}U , чтобы оно развалилось. При этом выделяется энергия, называемая ядерной, которая по своей природе является электрической.

3) А как же с электронами? Если бы каждый электрон e представлял собой однородно заряженный шарик, то должны были бы существовать силы, которые удерживают все его части вместе. Может быть, электрон – просто точка и сам на себя не действует?

Ответ. Ни классическая теория, ни квантовая не могут объяснить стабильность элементарных частиц. Современный взгляд на этот вопрос содержит в себе теория кварков, но пока мы ее не изучили, можем позволить себе недоумевать вместе с поэтом В. Брюсовым:

Быть может, эти электроны –
Миры, где пять материков.

3. Системы единиц

1. СИ – общепринятая система единиц, мы будем работать в ней.

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\Phi};$$

$$1 \text{ Кл} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} e \approx 6 \cdot 10^{18} e;$$

$$\text{скорость света в СИ: } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}.$$



2. СГСЭ – абсолютная электростатическая система единиц.

В ее основе лежит:

абсолютная электростатическая единица заряда – заряд, который взаимодействует с силой в 1 дин с таким же зарядом, находящимся на расстоянии 1 см.

$$e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. зар. СГСЭ.}$$

$$k = 1, \text{ таким образом, закон Кулона в СГСЭ системе имеет вид } \vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12}.$$

3. Гауссова система.

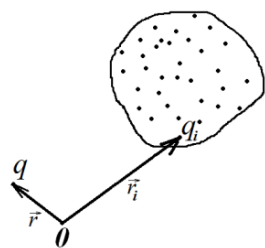
В Гауссовой системе единицы измерения:

электрических величин – такие же, как в СГСЭ;

магнитных величин – как в СГСМ, в основе которой лежит закон взаимодействия между проводниками с током.

4. Принцип суперпозиции

1. Для дискретной системы зарядов:



$$\vec{F}_{q \leftarrow \sum q_i} = \sum_i \vec{F}_{q \leftarrow q_i} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}; \quad \sum q_i = Q.$$

2. Для непрерывно распределенного заряда

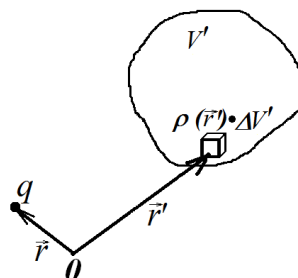
1) с объемной плотностью заряда $\rho(\vec{r}')$:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \text{ – сила, действующая на заряд } q \text{ со стороны объемно}$$

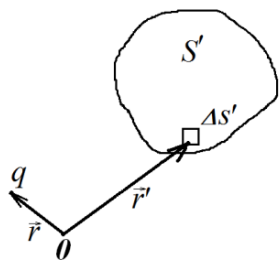
заряженного тела.

$$\text{Здесь плотность заряда тела } \rho(\vec{r}') = \lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V'} = \frac{dQ}{dV'},$$

$$\text{суммарный заряд тела } Q = \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV'.$$



2) Для непрерывно распределенного заряда с поверхностной плотностью заряда:



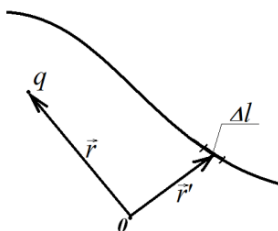
$$\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{dQ}{ds};$$

$$\delta \vec{F}_{q \leftarrow dQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\sigma(\vec{r}') \cdot ds' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Rightarrow$$

$$\text{Суммарная сила } \vec{F}_{q \leftarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') \cdot ds' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

3) Для непрерывно распределенного заряда с линейной плотностью заряда:

$$\lambda(\vec{r}') = \frac{dQ}{dl}; \vec{F}_{q \leftarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}') dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3};$$



$$\vec{F}_{q \leftarrow Q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \text{ где } dq' = \begin{cases} \rho(\vec{r}')dV' \\ \sigma(\vec{r}')ds' \\ \lambda(\vec{r}')dl' \end{cases}.$$



5. Напряженность электрического поля

Все взаимодействия осуществляются через поля. Вспомним, каким может быть поле с точки зрения классификации:

- 1) однородное $\vec{F} = const$;
- 2) центральное $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{e}_r$;
- 3) стационарное $\vec{F} = const(t)$;
- 4) потенциальное поле: $\vec{F}(\vec{r}', t)$;
- 5) консервативное \equiv потенциальное + стационарное $\equiv \exists U : -\nabla U = \vec{F}(\vec{r})$.

$\vec{E} \stackrel{def}{=} \frac{\vec{F}}{q}$ – сила, действующая на единичный точечный положительный заряд.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \sum_i \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \text{дискретное распределение зарядов;} \\ \int_Q \frac{dq'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \text{непрерывное распределение зарядов, где } dq' = \begin{cases} \rho(\vec{r}')dV' \\ \sigma(\vec{r}')ds' \\ \lambda(\vec{r}')dl' \end{cases} \end{cases}.$$

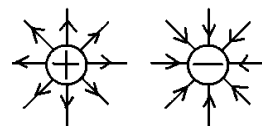
Электрическое поле можно описать, указав в любой точке пространства величину и направление \vec{E} . Совокупность этих векторов образует силовые линии поля.

Силовыми линиями являются линии, в каждой точке которых вектор \vec{E} является касательным к ним.

Густота силовых линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярной к линиям, было равно числовому значению \vec{E} .

Для точечного заряда:

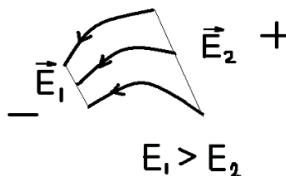
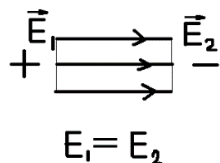
$$N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} - \text{число силовых линий, исходящих из}$$



точечного заряда q .

Силовые линии электрического поля начинаются и кончаются на зарядах.

Если поле однородно, то линии поля эквидистантные.



6. Потенциал электростатического поля

Для точечного заряда:

поле центральное + стационарное => поле консервативное.

В консервативном поле для любого объекта существует функция U , не зависящая от времени такая, что $-\nabla U = \vec{F}$ силе, действующей на этот объект, U при этом представляет собой потенциальную энергию этого объекта в данном консервативном поле.

Если взять в качестве объекта единичный точечный положительный заряд, то его потенциальная энергия W_{p1} будет представлять собой энергетическую характеристику данного электрического поля $W_{p1} = \varphi$.

Потенциальную энергию единичного точечного положительного заряда W_{p1} называют потенциалом φ . Это скалярная величина $-\nabla\varphi = \vec{E}$.

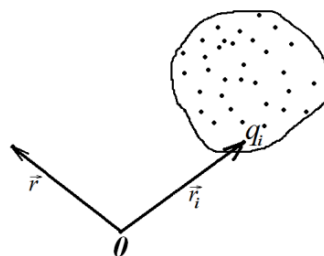
Посмотрим, как определяется потенциал для системы с дискретным и непрерывным распределением заряда.

Для системы дискретных зарядов:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i).$$

По аналогии с одним зарядом для системы зарядов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

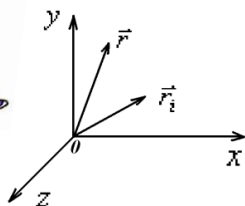


Если функция f зависит только от модуля r , то $\nabla f(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr}$.

Найдем $\nabla\varphi$, сравнив полученный результат с формулой напряженности.

Вопрос. По какой переменной надо дифференцировать?

Ответ. По $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$, так как \vec{r}_i — постоянные векторы, определяющие собой положение каждого i -го заряда.



$$-\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}};$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \Rightarrow$$

$$-\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\dots}} \right) \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{\dots}} \right) \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{\dots}} \right) \vec{e}_z \right\} =$$

$$= +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \frac{1}{2} [2(x - x_i)\vec{e}_x + 2(y - y_i)\vec{e}_y + 2(z - z_i)\vec{e}_z]}{[(x - x_i)^2 + \dots]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \vec{E},$$

что и требовалось доказать.

То есть потенциал поля, создаваемого в данной точке системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Таким образом, потенциал электростатического поля системы зарядов является аддитивной величиной, так же как напряженность поля.

Если заряды распределены непрерывно по объему V , то:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Потенциал определяется с точностью до const, поэтому его всегда можно нормировать удобным образом, задав $\varphi(\vec{r}_0)$.

Если конечный заряд распределен по конечной области пространства, то φ нормируют так: $\varphi(\infty) = 0$.

Поверхности, на которых $\varphi = \text{const}$, называют эквипотенциальными. Вектор напряженности \vec{E} перпендикулярен эквипотенциальной поверхности в каждой ее точке, так как производная φ по любому направлению вдоль эквипотенциальной поверхности равна 0, следовательно, и соответствующая этой производной компонента напряженности поля $\vec{E}_\tau = 0 \Rightarrow$ вектор \vec{E} перпендикулярен эквипотенциальной поверхности в каждой ее точке.



7. Работа сил электростатического поля

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 q \vec{E} d\vec{r} = \int_1^2 -q \nabla \varphi d\vec{r} = -q \int_1^2 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right] (dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z) =$$

$$= -q \int_1^2 \underbrace{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right]}_{d\varphi} = -q \varphi \Big|_1^2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) = W_p(\vec{r}_1) - W_p(\vec{r}_2)$$

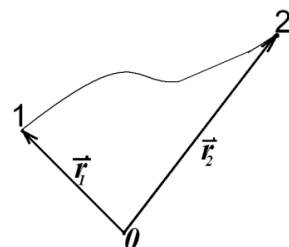
– убыль потенциальной энергии.

Если поле создается конечным зарядом, распределенным по конечной области пространства, то $\varphi(\infty) = 0$.

Тогда работа по перемещению заряда q из точки с радиусом-вектором \vec{r} на бесконечность $A_{\text{из } \vec{r} \text{ на } \infty} = W_p(\vec{r}) - 0 = q\varphi(\vec{r}) - 0$, то есть в этом случае:

$\varphi(\vec{r})$ потенциал в любой точке поля, создаваемого конечным зарядом, распределенным по конечной области пространства, равен работе сил электростатического поля по удалению единичного положительного точечного заряда из данной точки на ∞ .

За единицу потенциала, называемую 1 Вольт (В), принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из ∞ точечного заряда в 1 Кл надо совершить работу в 1 Дж.

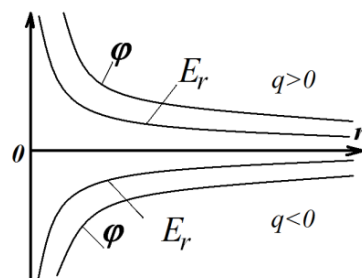


8. Задачи на вычисление \vec{E} и φ .

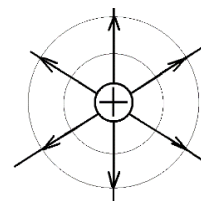
1) Поле точечного заряда q .

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2};$$

$$-\nabla\varphi = \vec{E} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \varphi.$$



Потенциал и напряженность поля отрицательного заряда $q < 0$ отрицательные, так как сила и перемещение противоположно направлены $\vec{F} \uparrow \downarrow d\vec{r}$ при движении к ∞ .



Эквипотенциальными поверхностями точечного заряда являются сферы.

2) Поле заряженного стержня длиной $2a$.

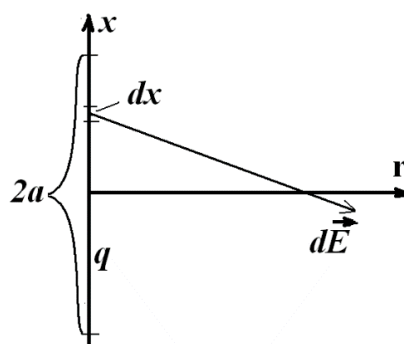
$$\lambda = \frac{q}{2a};$$

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dx}{2a(x^2 + r^2)} \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q2r}{2a} \int_0^a \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r\sqrt{a^2 + r^2}} \cdot \vec{e}_r.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{x}{r^2 \sqrt{r^2 + x^2}}.$$

$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r\sqrt{a^2 + r^2}}$ – величина напряженности поля заряженного стержня на прямой, перпендикулярной к нему и проходящей через его середину.



Вопрос. Что же получается, при $a \rightarrow \infty$ $E \rightarrow 0$?

Ответ. Надо правильно осуществлять предельный переход. Разумеется, если размазать конечный заряд q по бесконечному стержню, то получим 0, а надо сделать

так: $\lambda = \frac{q}{2a} = \text{const} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q2a}{2ar\sqrt{a^2 + r^2}} \Rightarrow$

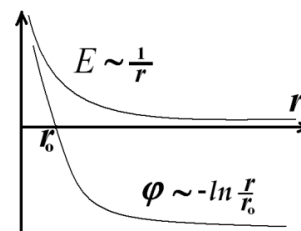
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda 2a}{ra} \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r, \text{ – поле бесконечной заряженной нити.}$$



Поле перпендикулярно цилиндрической поверхности, осью которой является заряженная нить.

$$\varphi = -\int \vec{E} d\vec{r} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}.$$

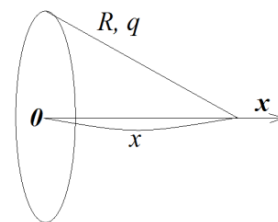
Эквипотенциальными поверхностями бесконечной заряженной нити являются коаксиальные цилиндрические поверхности, осью которых является заряженная нить.



3) Поле на оси кольца радиуса R с зарядом q .

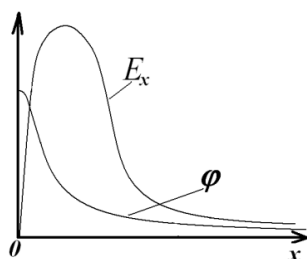
$$\lambda = q / (2\pi R);$$

$$\varphi(x) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{R d\psi}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}};$$



$$\vec{E} = -\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qx\vec{e}_x}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qx\vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \text{напряженность поля заряженного кольца}$$

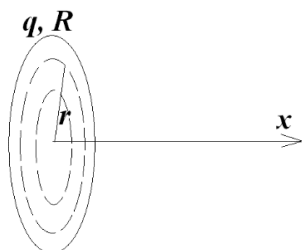
на его оси.



Максимум $E(x)$ полезно исследовать самостоятельно.



4) Поле диска радиуса R с зарядом q .



Поверхностная плотность заряда $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$.

Рассмотрим кольцо $(r, r+dr)$, его заряд $\sigma 2\pi r dr = \frac{q}{R^2} 2r dr$.

Поле, создаваемое этим кольцом на его оси на расстоянии x от центра кольца:

$$\delta\vec{E}_{\text{кольца}} = \frac{q}{R^2} \frac{2r dr}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{e}_x;$$

$$\delta\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \cdot 2r dr \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \sqrt{x^2 + r^2} \Big|_0^R = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\sqrt{R^2 + x^2} - \sqrt{x^2} \right] \Rightarrow$$

$$E_x = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}} \right\} \approx \frac{-q \operatorname{sgn}(x)}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2}} - 1 \right\} \cong \frac{q \operatorname{sgn}(x)}{4\pi\epsilon_0 x^2} \text{ при } x \gg R.$$

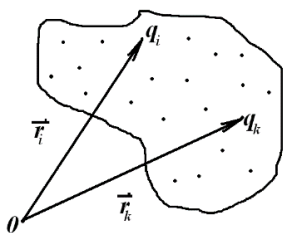
При $R \rightarrow \infty$, $\frac{q}{\pi R^2} = \sigma$, имеем

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn}(x) - \text{это поле бесконечной заряженной плоскости.}$$



Эквипотенциальными поверхностями бесконечной заряженной плоскости являются плоскости, параллельные данной заряженной плоскости.

9. Энергия взаимодействия зарядов



Всего N зарядов.

$$W_{pi} = q_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} - \text{энергия заряда } i \text{ в поле остальных зарядов.}$$

$$\text{Энергия всех зарядов } W_p = \sum_{i=1}^N W_{pi} \cdot \frac{1}{2}.$$

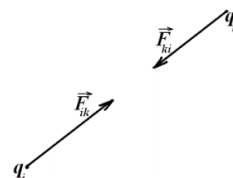
Коэффициент $\frac{1}{2}$ возникает, так как каждый акт взаимодействия был учтен дважды.

$$W_p = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_i - \text{энергия взаимодействия зарядов.}$$

Полученный результат можно объяснить иначе. Энергия взаимодействия $W_{вз}$ получается при суммировании пар слагаемых:

$$\vec{f}_{ik} d\vec{r}_i + \vec{f}_{ki} d\vec{r}_k = \vec{f}_{ik} (d\vec{r}_i - d\vec{r}_k) \Rightarrow \text{по третьему закону Ньютона} \Rightarrow$$

$$\text{в общей } \Sigma \text{ при этом будет } \frac{N}{2} \text{ слагаемых, а не } N \Rightarrow W_{вз} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N W_{pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_i.$$



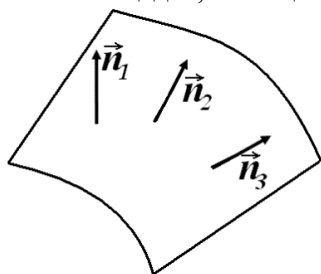
10. Элементы векторного анализа. I часть

1. Поток векторного поля.

Математический аппарат для описания свойств векторных полей называется векторным анализом. Векторные поля, в том числе электростатические и магнитные, обладают рядом свойств, которые облегчают их вычисление. С одним из этих свойств мы сейчас познакомимся. Введем понятие *поток вектора*.

Пусть есть векторное поле \vec{a} , и в каждой точке пространства $\vec{a}(x, y, z)$ задан.

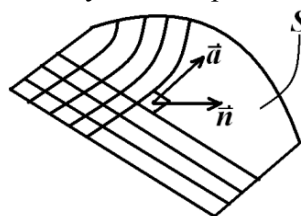
Возьмем площадку ΔS , ориентация которой в пространстве будет определяться нормалью к этой площадке, вообще говоря, в каждой ее точке.



\vec{n} – вектор, перпендикулярный к поверхности в данной точке.

Если уменьшать $\Delta S \rightarrow ds$, то разнонаправленные \vec{n} сольются в один вектор единичной длины $\Rightarrow d\vec{s} = ds \cdot \vec{n}$, так как малый элемент поверхности (стянутый в точку) будет характеризоваться единым \vec{n} . Тогда потоком \vec{a} через $d\vec{s}$ называют $d\Phi = \vec{a} \cdot d\vec{s} = a \cdot ds \cdot \cos \alpha$. $d\Phi$ – это алгебраическая скалярная величина, которая зависит от выбора направления нормали. В случае замкнутых поверхностей принято выбирать внешнюю нормаль, то есть направленную наружу области, охватываемой данной замкнутой поверхностью.

выбирать внешнюю нормаль, то есть направленную наружу области, охватываемой данной замкнутой поверхностью.



Чтобы лучше представить себе, что такое поток, достаточно рассмотреть следующие примеры.

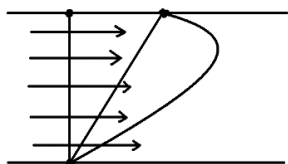
1) Поле скоростей в потоке жидкости.

Пусть $\vec{a} \equiv \vec{v}$ – скорость струи жидкости.

Тогда Φ будет определять собой объем жидкости, протекающий через площадь S в единицу времени.

Скалярное произведение $\vec{v} \cdot d\vec{s}$ означает, что, как бы вы ни поставили невод, перегораживая реку, объем воды, протекающий через невод в единицу времени, не изменяется.





$\vec{v} \cdot \Delta t \cdot d\vec{s} = dV$ – объем воды, протекающий через площадку $d\vec{s}$ за время Δt .

$$\Phi_S = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\Delta t} \int_S \Delta t \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Поток численно равен числу линий поля, пересекающих данную поверхность.

Поток вектора \vec{a} через замкнутую поверхность:

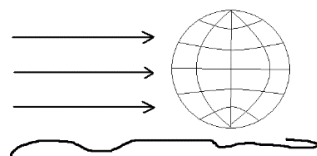
= 0, если внутри нет источников поля \vec{a} ;

$\neq 0$, если внутри поверхности есть источники поля \vec{a} .

Представим себе проволочный шар, а лучше куб, который лежит на дне реки, поток через его поверхность:

а) $\Phi \neq 0$, если внутри бьет родник;

б) $\Phi=0$, если родника внутри нет.



2) Поле скоростей потока зарядов.

Пусть ρ – плотность зарядов в пучке, \vec{v} – скорость зарядов, тогда $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ – плотность тока.

$$\Phi = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = I \text{ – ток через поверхность } S.$$

2. Дивергенция.

$\text{div } \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V}$ – удельная мощность источников векторного поля \vec{a} в данной точке.

Свойства $\text{div } \vec{a}$:

1) скалярная функция векторного аргумента;

2) локальная характеристика поля;

3) аддитивная функция $\text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div} \vec{a} + \text{div} \vec{b}$;

4) $\text{div}(f\vec{a}) = \nabla f \cdot \vec{a} + f \cdot \text{div} \vec{a}$.

Дивергенция – это оператор, который действует на векторную величину следующим образом:

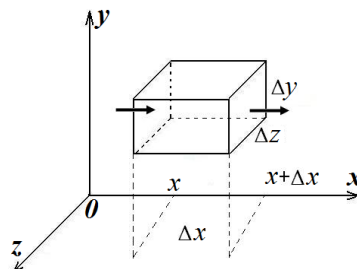
$$\text{div } \vec{a} = \begin{cases} \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} & \text{– в декартовой системе координат;} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} & \text{– в цилиндрической системе координат;} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\psi}{\partial \psi} & \text{– в} \end{cases}$$

сферической системе координат.

Докажем это для простейших случаев:

1) $\vec{a} = f(x)\vec{e}_x$;

$$\text{div } \vec{a} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{f(x + \Delta x) \cdot \Delta y \cdot \Delta z - f(x) \cdot \Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$



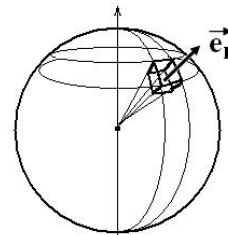
$$2) \vec{a} = f(r)\vec{e}_r;$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0 \\ \Delta \psi \rightarrow 0}} \frac{f(r + \Delta r) \cdot (r + \Delta r) \Delta \theta (r + \Delta r) \sin \theta \cdot \Delta \psi - f(r) \cdot r^2 \Delta \theta \sin \theta \cdot \Delta \psi}{\Delta r \cdot r^2 \sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \psi} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0 \\ \Delta \psi \rightarrow 0}} \frac{f(r + \Delta r)(r^2 + 2r\Delta r) \sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \psi - f(r)r^2 \sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \psi}{r^2 \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \psi \cdot \sin \theta} =$$

$$= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{[f(r + \Delta r) - f(r)]r^2 + f(r + \Delta r)2r\Delta r}{r^2 \Delta r} \Rightarrow$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r^2} [f'r^2 + 2fr] = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (fr^2) \quad - \text{ что и требовалось доказать.}$$



3) Теорема Остроградского.

$$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} \cdot dV;$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{d\Phi}{dV}.$$

Поток вектора \vec{a} через любую замкнутую поверхность S равняется суммарной мощности источников поля \vec{a} , содержащихся в объеме V , ограниченном данной поверхностью S .

Пример.

$\vec{a} \equiv$ однородное поле $= \text{const.}$

$$\operatorname{div} \vec{a} = ? \quad \Phi_0 = ?$$

$$\operatorname{div} \vec{a} \equiv 0 \quad \Phi_0 = \oint_S \vec{a} d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{a} \cdot dV \equiv 0.$$

Вопрос. Что будет, если поверхность S' не замкнута? Ведь для однородного поля $\operatorname{div} \vec{a} \equiv 0 \Rightarrow$ Будет ли $\Phi_{S'} = 0$?

Ответ. Нет, так как теорема Остроградского верна только для замкнутых поверхностей.



11. Теорема Гаусса для напряженности электрического поля в вакууме

1. Теорема Гаусса – это теорема Остроградского применительно к напряженности электрического поля \vec{E} :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV.$$

Поток вектора напряженности электрического поля \vec{E} через любую замкнутую поверхность S равен суммарной мощности источников поля \vec{E} , находящихся в объеме V , ограниченном поверхностью S .

Теорема верна всегда.

Остается выяснить, что же является источником напряженности электростатического поля \vec{E} в вакууме.

$$1) \text{ Рассмотрим поле } \vec{E} \text{ точечного заряда } q: \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{e}_r.$$

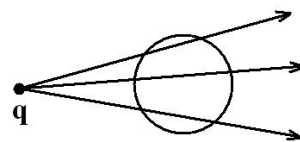
Так как поверхность S можно брать любую, возьмем сферу радиуса r и вычислим поток вектора \vec{E} через ее поверхность по теореме Остроградского – Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\psi\theta} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{e}_r \cdot r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\psi \cdot d\theta \cdot \vec{e}_r = \frac{q}{\epsilon_0} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV.$$



Вопрос 1. Что получится, если взять замкнутую поверхность, не содержащую внутри себя заряд q ?

Ответ. В этом случае поток $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV = 0$,



так как $\operatorname{div} \vec{E} \equiv 0$ в каждой точке выбранного объема.

Вопрос 2. Но ведь и в предыдущем случае $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}) = 0$.

Что-то не сходится! Что не так?

Ответ. $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}) = 0$ в тех точках, где нет заряда q , а в центре сферы, где находится заряд, $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$.

2) Теперь рассмотрим систему зарядов $q_i, i = 1, \dots, N$ и найдем поток поля \vec{E} через поверхность S , воспользовавшись принципом суперпозиции для напряженности электрического поля и результатом, полученным для одного заряда:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^N \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0}.$$

Интегральная форма теоремы Гаусса для напряженности электрического поля в вакууме:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0}; \\ \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \end{cases}$$

Поток напряженности электрического поля \vec{E} через любую замкнутую поверхность в вакууме равняется заряду, заключенному внутри этой поверхности, деленному на ϵ_0 .

2. Получим дифференциальную форму теоремы Гаусса.

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV \Rightarrow \text{так как объем } V, \text{ по которому проводится}$$

интегрирование, один и тот же для правого и левого интеграла, то:

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) \cdot dV = 0, \text{ и так как объем } V - \text{любой, то равенство } 0 \text{ может быть выполнено}$$

только при условии: $\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad - \quad \text{дифференциальная форма теоремы Гаусса для напряженности}$$

электрического поля в вакууме (одно из уравнений Максвелла для вакуума).

Оно содержит в себе закон Кулона и принцип суперпозиции.

Физический смысл уравнения $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$:

источниками напряженности электростатического поля в вакууме являются электрические заряды, причем удельная мощность источников поля \vec{E} в каждой точке пространства равняется плотности заряда в этой точке, деленной на ϵ_0 .



3. Иногда удобнее решать задачу для потенциала φ :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} (-\nabla\varphi) = \frac{\rho}{\epsilon_0} ;$$

$$\operatorname{div} (\vec{\nabla}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ – оператор Лапласа (лапласиан).}$$

Там, где нет заряда, распределение потенциала подчиняется уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ и находится в результате решения этого уравнения.

$\Delta\varphi = 0$ – уравнение Лапласа.

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ – уравнение Пуассона.}$$

Оно описывает распределение потенциала электростатического поля в заряженных областях.

4. Из теоремы Остроградского – Гаусса легко получить аналитический вид закона сохранения (точнее, изменения) заряда.

Пусть из некоторой области с объемом V происходит утечка заряда $-\frac{\partial Q}{\partial t} = I$ – ток через поверхность S объема V .

$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\frac{\partial Q}{\partial t} = I = \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} (\rho \vec{v}) \cdot dV \Rightarrow$ так как объем, по которому производится интегрирование, в левой и правой части равенства один и тот же, то

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0 \text{ – закон сохранения заряда.}$$

12. Вычисление электростатических полей в вакууме с помощью теоремы Гаусса

Необходимо усвоить 2 основополагающих момента, относящихся к интегральной форме теоремы Гаусса.

1. Теорема Гаусса $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ в вакууме верна всегда.

2. Интегральная форма теоремы Гаусса $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ для вычисления \vec{E} полезна

не всегда, а только тогда, когда из симметрии задачи удастся найти и описать простые эквипотенциальные поверхности.

Вопрос. Почему интересуемся эквипотенциальными поверхностями?

Ответ. Так как в каждой их точке \vec{E} перпендикулярно $d\vec{s}$, а это превращает $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ в произведение $|\vec{E}| \cdot ds$; если при этом из симметрии задачи очевидно, что $|\vec{E}| = const$ в



пределах каждой эквипотенциальной поверхности, то $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \pm |\vec{E}| \cdot S$. Именно в этих случаях использование интегральной формы теоремы Гаусса существенно облегчает расчет распределения \vec{E} в пространстве.

Вспомним, в каких решенных нами задачах и для каких заряженных объектов существовали простые по форме эквипотенциальные поверхности:

точечный заряд, заряженный шар, шаровой слой – концентрические сферы;

заряженная нить, цилиндр; цилиндрический слой – коаксиальные цилиндрические поверхности;

бесконечная заряженная плоскость, набор параллельных заряженных плоскостей, бесконечный заряженный слой – параллельные плоскости.

Практически это все задачи, в решении которых нам будет помогать теорема Гаусса.

1) Поле бесконечной однородно заряженной плоскости.

Пусть бесконечная по осям y и z плоскость заряжена равномерно с поверхностной плотностью $-\sigma$.

Найдем распределение напряженности электрического поля и потенциала в пространстве.

Изобразим силовые линии напряженности поля \vec{E} вблизи пластины. В силу симметрии задачи можем воспользоваться теоремой Гаусса для расчета \vec{E} , для этого выберем цилиндрическую поверхность, как показано на рисунке. При этом основания цилиндра должны быть расположены на

одинаковом расстоянии от заряженной плоскости. Тогда поток поля \vec{E} будет пронизывать только основания цилиндра, причем в силу симметрии задачи потоки через левое и правое основания будут одинаковы, так как $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$.

По теореме Гаусса: поток напряженности поля через поверхность нашего цилиндра $(\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2) \cdot s = -\frac{\sigma \cdot s}{\epsilon_0}$ равен заряду, находящемуся внутри цилиндра, деленному на ϵ_0 .

Здесь s – площадь основания цилиндра.

Так как линии поля втекают в цилиндр, то $\vec{E}_1 \uparrow \downarrow \vec{n}_1$, $\vec{E}_2 \downarrow \uparrow \vec{n}_2$ – внешние нормали антипараллельны линиям поля, поэтому имеем

$$(\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2) \cdot s = -2E \cdot s = -\frac{\sigma \cdot s}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ – поле бесконечной заряженной плоскости однородно.}$$

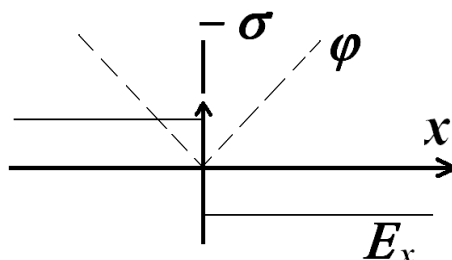
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \text{sgn } x \cdot (-\vec{e}_x).$$

Найдем распределение потенциала:

$$\varphi = -\int E_x \cdot dx = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \cdot \text{sgn } x.$$

Вопрос. В данном случае работа сил поля по удалению единичного точечного положительного заряда из любой точки на бесконечность отрицательна, так как

$\vec{E} \uparrow \downarrow d\vec{x}$, а полученный нами потенциал положительный. В чем дело?

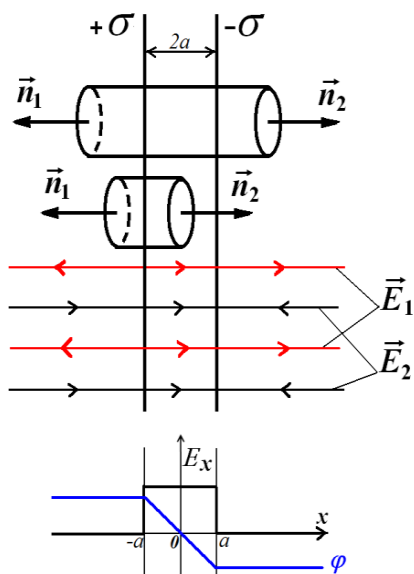


Ответ. Потенциал имеет указанный смысл работы по удалению единичного точечного положительного заряда из любой точки на бесконечность только в том случае, если потенциал нормирован на бесконечности $\varphi(\infty) = 0$, а это возможно только для конечной системы зарядов, в нашем случае на плоскости сосредоточен бесконечный заряд, поэтому и потенциал занулить на бесконечности невозможно.

2) Поле двух заряженных плоскостей.

Изобразим силовые линии напряженности каждой плоскости и воспользуемся принципом суперпозиции. Из рисунка \Rightarrow снаружи $E_e = 0$, внутри $E_i = 2E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Этот результат можно получить с помощью теоремы Гаусса, вычисляя поток \vec{E} через поверхности изображенных на рисунке цилиндров.



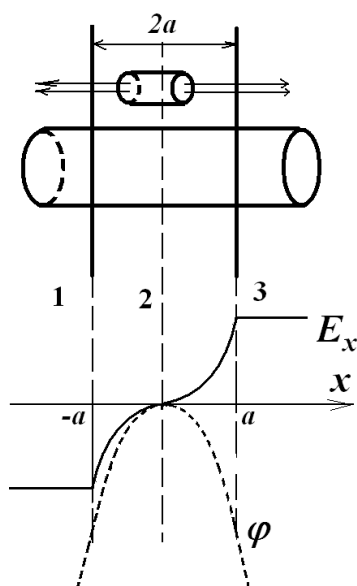
Снаружи: $2\pi r^2 E_e = \frac{\sigma - \sigma}{\epsilon_0} \cdot \pi r^2 = \frac{0}{\epsilon_0} \cdot \pi r^2 \Rightarrow E_e = 0$.

Внутри: $(E_e + E_i) \cdot \pi r^2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \pi r^2 \Rightarrow E_i = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Потенциал: $\varphi_i = -\int \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x dx \vec{e}_x + C = -\frac{\sigma \cdot x}{\epsilon_0}$, если положить $C=0$.

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\sigma \cdot a}{\epsilon_0}, & x \leq -a \\ -\frac{\sigma \cdot x}{\epsilon_0}, & -a < x < a \\ -\frac{\sigma \cdot a}{\epsilon_0}, & x \geq a \end{cases}$$

3) Поле бесконечного заряженного слоя (неравномерно заряженный слой).



$$\rho = \rho_0 \frac{x^2}{a^2}$$

Внутри слоя:

$$E \cdot 2\pi r^2 = \pi r^2 \cdot 2 \int_0^x \rho_0 \frac{x'^2}{a^2} \frac{dx'}{\epsilon_0} = \frac{2}{3} \frac{\rho_0 x^3}{\epsilon_0 a^2} \pi r^2;$$

$$\vec{E}_i = \frac{\rho_0 x^3}{3\epsilon_0 a^2} \vec{e}_x \text{ при } |x| \leq a.$$

Снаружи слоя:

$$2\pi r^2 E_e = \frac{2}{3} \pi r^2 \frac{\rho_0 a^3}{\epsilon_0 a^2};$$

$$\vec{E}_e = \frac{\rho_0 a}{3\epsilon_0} \text{sgn}(x) \vec{e}_x \text{ при } |x| \geq a.$$



$$\text{Потенциал: } \varphi = -\int E_x dx = \begin{cases} -\frac{\rho_0 x^4}{12\varepsilon_0 a^2}, & |x| \leq a \\ -\frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0} x \operatorname{sgn}(x) + C, & |x| \geq a \end{cases}.$$

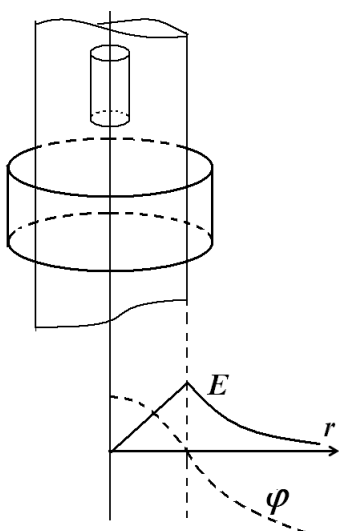
Постоянная интегрирования C находится из условия сшивки потенциала в точках $x = \begin{cases} -a \\ a \end{cases}$:

$$+\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0} + C = -\frac{\rho_0 a^4}{12\varepsilon_0 a^2} \Rightarrow C = \frac{-5\rho_0 a^2}{12\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\rho_0 x^4}{12\varepsilon_0 a^2}, & |x| \leq a; \\ -\frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0} x \cdot \operatorname{sgn}(x) - \frac{5\rho_0 a^2}{12\varepsilon_0}, & |x| \geq a. \end{cases}$$

В случае объемного распределения заряда в отсутствие диэлектриков потенциал является не только непрерывной, но и гладкой функцией, не имеющей изломов.

4) Поле бесконечного цилиндра (однородно заряженного).



$$\text{Внутри: } E_i 2\pi r h = \int_0^r \frac{\rho}{\varepsilon_0} 2\pi r' dr' h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_i = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}.$$

$$\text{Снаружи: } E_e h 2\pi r = \frac{\rho \pi R^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_e = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}.$$

$$\text{Потенциал: } \varphi_i = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + C_1 = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} (R^2 - r^2); \quad \varphi_e = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R}.$$

При $R \rightarrow 0$, но так, чтобы $\rho \pi R^2 = \lambda$, имеем поле бесконечной заряженной нити:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}; \quad \varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}.$$

5) Поле шара.

а) Однородно заряженный шар с плотностью заряда ρ .



$$\text{Внутри шара: } -E_i \cdot 4\pi r^2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \vec{E}_i = -\frac{\rho \cdot r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r.$$

$$\text{Вне шара: } -E_e 4\pi r^2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \vec{E}_e = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

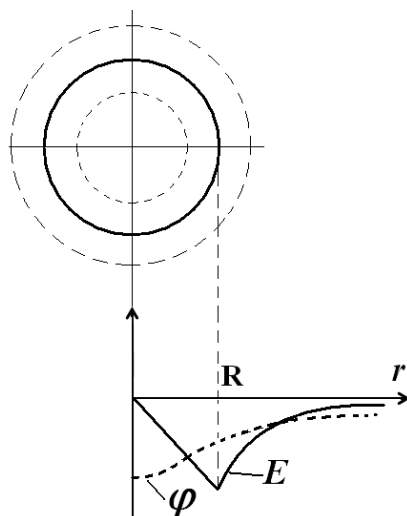
$$\text{Потенциал: } \varphi_e = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}; \quad \varphi_i = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C.$$

C находится из условия сшивки потенциала вне и внутри шара на границе областей:

$$C = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}.$$

При $R \rightarrow 0$, но так, что $\rho \frac{4}{3}\pi R^3 = q$, имеем поле точечного заряда:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$



б) Заряд распределен неравномерно с плотностью $\rho = kr$, R – радиус шара.

Внутри шара:

$$E_i 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r kr \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{k\pi}{\epsilon_0} r^4 \Rightarrow \vec{E}_i = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \vec{e}_r.$$

Вне шара: $\vec{E}_e = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$

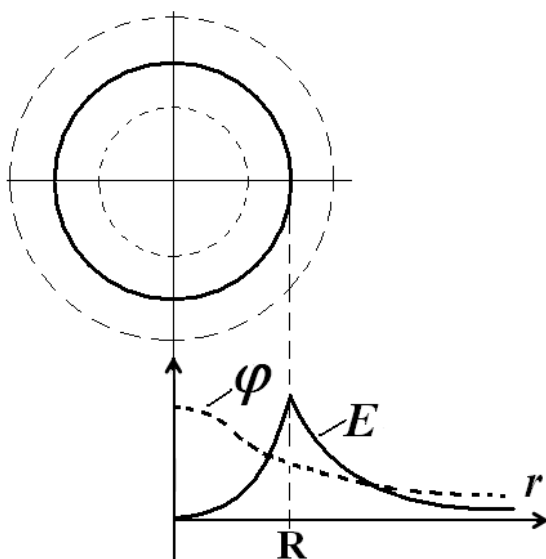
Потенциал вне шара: $\varphi_e = + \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r};$

потенциал внутри шара: $\varphi_i = - \frac{kr^3}{12\epsilon_0} + C_1.$

Из условия непрерывности потенциала на границе раздела областей:

$$\frac{kR^3}{4\epsilon_0} = - \frac{kR^3}{12\epsilon_0} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{R^3 k}{12\epsilon_0} + \frac{kR^3}{4\epsilon_0} = \frac{kR^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow$$

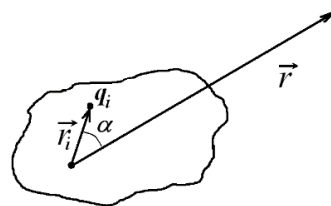
$$\varphi_i = - \frac{kr^3}{12\epsilon_0} + \frac{kR^3}{3\epsilon_0}.$$



13. Поле системы зарядов на больших расстояниях от нее

Рассмотрим потенциал электростатического поля, создаваемого системой зарядов q_i , $i = 1, \dots, N$, на большом расстоянии \vec{r} от нее (для любого i -го заряда выполняется условие $|\vec{r}|$ много больше $|\vec{r}_i|$):

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$



Учтем условие $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_i|$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_i^2 - 2r r_i \cdot \cos \alpha}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r}\vec{r}_i}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\vec{e}_r \cdot \vec{r}_i}{r}}}$$

$$\approx \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{e}_r}{r}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{r}_i}{r} \right) \Rightarrow$$

$$\varphi(\vec{r}) \underset{r \gg r_i}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_i q_i \cdot \vec{r}_i \cdot \vec{e}_r,$$

где $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \cdot \frac{1}{r}$ – потенциальное поле точечного заряда $Q = \sum_i q_i$.

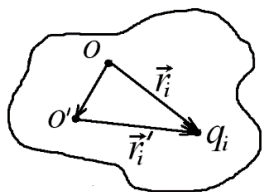


Опред. $\sum_i q_i \cdot \vec{r}_i = \vec{p}$ – дипольный электрический момент системы зарядов.

Итак, $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sum_i q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)}{r^2}$ – потенциал системы зарядов на больших расстояниях

в дипольном приближении.

Если суммарный заряд системы $\sum_i q_i = 0 = Q$, то значение дипольного момента \vec{p} не зависит от выбора начала координат или дипольный момент электронейтральной системы не зависит от выбора начала отсчета.



Доказательство.

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = \sum_i q_i (\vec{r}'_i + \vec{r}_{oo'}) = \sum_i q_i \vec{r}'_i + \vec{r}_{oo'} \sum_i q_i = \vec{p}' + 0 = \vec{p}' \text{ при } \sum_i q_i = 0.$$

Найдем напряженность поля в удаленной от системы точке, зная потенциал:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\nabla \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left\{ \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} \right\};$$

$$\nabla \left\{ \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} \right\} = \frac{\nabla(\vec{p}\vec{r})}{r^3} - 3 \frac{1}{r^5} (\vec{p}\vec{r}) \cdot \vec{r}, \text{ так как } \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = -3 \frac{1}{r^4} \vec{e}_r = -\frac{3\vec{r}}{r^5}.$$

$$\text{Вычислим } \nabla(\vec{p}\vec{r}) = \nabla(p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z) = p_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y + p_z \vec{e}_z = \vec{p}.$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{Q\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{r}(\vec{p}\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$
 – напряженность поля системы зарядов на больших расстояниях в дипольном приближении.

Эта формула нужна для исследования поля атомов и молекул на расстояниях значительно больших их размеров.

Если система электронеутральна, то на больших расстояниях напряжённость поля и потенциал определяются её дипольным моментом.

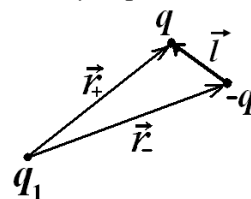
14. Электрический диполь. Поле точечного диполя

Опред. Диполь – система двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов.

$$Q = 0 = q + (-q) \Rightarrow$$

$$\vec{p} = q\vec{r}_+ - q\vec{r}_- = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q\vec{l}$$

\vec{l} направлен против вектора напряжённости \vec{E} между зарядами, то есть от “-” к “+”.



В соответствии с выражениями потенциала и напряженности поля системы зарядов, полученными в параграфе 13, имеем для диполя:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{l}\vec{r}}{r^3} = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2};$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{r}(\vec{p}\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta \cdot \vec{e}_r + p \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta}{r^3}.$$

Напряженность \vec{E} поля диполя можно получить непосредственно из потенциала диполя, работая в сферической системе координат, где $\vec{p} \uparrow \uparrow z$, следующим образом:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\nabla_{сфер} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2p \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta \right\},$$

так как $\nabla_{сфер} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\psi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi}$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pr \cos \theta \cdot \vec{r} - r^2(p \cos \theta \cdot \vec{e}_r - p \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)}{r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta \cdot \vec{e}_r + p \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta}{r^3}.$$

Таким образом:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}; \quad E_\psi = 0; \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}.$$

$$|\vec{E}| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \text{ – поле диполя на больших расстояниях от него.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{При } \theta = 0 \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \vec{e}_r \\ \text{При } \theta = \pi \quad \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \vec{e}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E} \uparrow \uparrow \vec{p}.$$

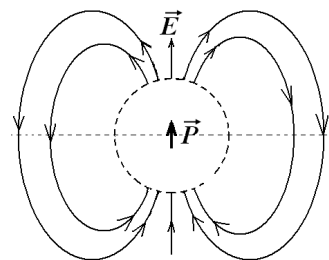
$$\left. \begin{array}{l} \text{При } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{E} \uparrow \downarrow \vec{p}. \end{array} \right\}$$

$$\text{При } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{E} \uparrow \downarrow \vec{p}.$$



$$E_{\max} = \frac{P}{2\pi\epsilon_0 r^3} \text{ при } \theta = 0, \pi.$$

$$E_{\min} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ при } \theta = \frac{\pi}{2}.$$



Плоскость, перпендикулярная к дипольному моменту \vec{p} и проходящая через середину диполя, является эквипотенциальной поверхностью.

15. Диполь во внешнем электростатическом поле

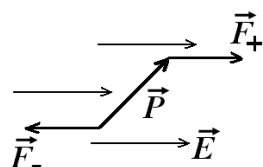


Вопрос. Зачем надо рассматривать диполи во внешнем поле? Что в этом интересного?

Ответ. Вследствие поляризации молекулы превращаются в диполи с размерами $l \sim 1 \text{ \AA}$. Длина волны видимого света $\lambda = (4000 \div 7500) \text{ \AA}$, то есть с точки зрения полярных молекул электромагнитная световая волна является для них слабо-неоднородным электромагнитным полем (так как $\lambda \gg l$, $\frac{\lambda}{2}$ – длина, на которой изменяется электромагнитное поле).

Опред. Поле, мало изменяющееся на расстоянии, равном характерному размеру системы, называется слабо-неоднородным.

1. Сначала рассмотрим силу, момент сил и энергию диполя в однородном поле.



Пусть \vec{E} – внешнее однородное поле.

а) Момент сил, действующих на диполь.

$$\begin{aligned} |\vec{F}_+| &= |\vec{F}_-|; \\ \left\{ \begin{aligned} \vec{N}_{\otimes} &= 2 \left[\frac{l}{2} \vec{F}_+ \right] \Rightarrow \\ \vec{F}_+ &= q\vec{E} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$\vec{N}_{\otimes} = q[l\vec{E}] = [\vec{p}\vec{E}]$ – момент сил, действующих на диполь \vec{p} в однородном поле.

б) Энергия диполя во внешнем однородном поле.

$$W_p = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-);$$

$$\varphi_+ = \int_{\vec{r}_+}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}; \quad \varphi_- = \int_{\vec{r}_-}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \varphi_+ - \varphi_- = - \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{E} \cdot d\vec{r} \approx -\vec{E} \cdot \vec{l} \Rightarrow$$

$$W_p = -(\vec{p}\vec{E}) = -qEl \cos \alpha \text{ – энергия диполя во внешнем однородном электростатическом поле.}$$

Здесь α – угол между направлением диполя \vec{p} и поля \vec{E} в месте нахождения диполя.

в) Во внешнем однородном поле \vec{E} сила, действующая на диполь, $\vec{F}_{\Sigma} = 0$.

2. Пусть теперь поле – слабо-неоднородное.

Как несложно показать, выражения, полученные для момента и энергии диполя в однородном поле, верны для точечного диполя, находящегося и в слабо-неоднородном электрическом поле:

$$\vec{N}_{\otimes} = [\vec{p}\vec{E}]; \quad W_p = -(\vec{p}\vec{E}).$$

Опред. Диполь – точечный, если его размер $l \ll$ расстояния до точки наблюдения или в данном случае, если на длине диполя поле мало изменяется, то есть слабо-неоднородное.

а) Момент сил:

$$\vec{N} = [\vec{r}_+ \vec{F}_+] + [\vec{r}_- \vec{F}_-] = q[\vec{r}_+ \vec{E}_+] - q[\vec{r}_- \vec{E}_-] \approx q[(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \vec{E}] = q[\vec{l}, \vec{E}] = [\vec{p}, \vec{E}].$$

б) Энергия диполя: $W_p = q_- \varphi_- + q_+ \varphi_+ = q\{\varphi(\vec{r}_+) - \varphi(\vec{r}_-)\};$

$$\varphi(\vec{r}_+) = \int_{\vec{r}_+}^{\infty} \vec{E} d\vec{r}; \quad \varphi(\vec{r}_-) = \int_{\vec{r}_-}^{\infty} \vec{E} d\vec{r} \Rightarrow \varphi(\vec{r}_+) - \varphi(\vec{r}_-) = \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{E} d\vec{r} \approx -\vec{E} \cdot \vec{l}.$$

в) Сила, действующая на диполь в слабонеоднородном поле, $\vec{F}_\Sigma \neq 0.$

$$\vec{F} = -\nabla W_p = \nabla(\vec{p} \vec{E}) = (\vec{p} \nabla) \vec{E},$$

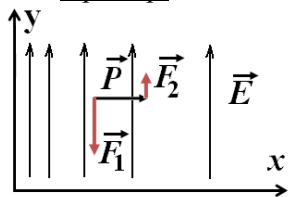
так как $\nabla(\vec{p} \vec{E}) = (\vec{p} \nabla) \vec{E} + (\vec{E} \nabla) \vec{p} + [\vec{p} [\nabla \vec{E}]] + [\vec{E} [\nabla \vec{p}]].$

В этой сумме все слагаемые кроме первого равны нулю, так как $[\vec{p} [\nabla \vec{E}]] = -[\vec{p}, \dot{\vec{B}}] = 0$ в электростатическом поле, $[\nabla \vec{p}] = 0, (\vec{E} \nabla) \vec{p} = 0.$

Смысл $(\vec{p} \nabla) \vec{E}$ становится ясным, если направить ось x по направлению \vec{p} . Тогда $\vec{p} = p_x \vec{e}_x$

$\rightarrow \vec{F} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$ – сила, действующая на точечный диполь в слабонеоднородном электростатическом поле, равна произведению дипольного момента на производную поля \vec{E} по направлению диполя (то есть пропорциональна изменению поля на длине диполя).

Пример.



$$\vec{p} \parallel x \quad \vec{E} = \frac{a}{x} \vec{e}_y \Rightarrow \vec{F} = -\frac{ap}{x^2} \vec{e}_y, \text{ так как}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}_+ - q\vec{E}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q \frac{\partial \vec{E}}{\partial l} \cdot \vec{l} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l},$$

где $\vec{E}_+ - \vec{E}_-$ – приращение вектора $\vec{E} = \Delta \vec{E}$ на длине

диполя.

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial l}$ – производная \vec{E} по направлению диполя.



3. Для любой системы зарядов, находящейся в окрестности точки с радиусом-вектором \vec{r}_0 , в слабонеоднородном поле:

а) $\vec{N} = Q[\vec{r}_0 \vec{E}] + [\vec{p} \vec{E}];$

б) $W_p = Q \cdot \varphi(\vec{r}_0) - (\vec{p} \cdot \vec{E});$

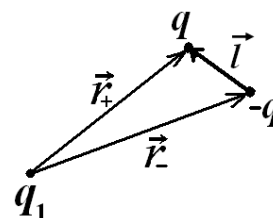
в) $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}(\vec{r}_0) + (\vec{p} \nabla) \vec{E}.$

Замечание. Все выражения даны в дипольном приближении. Для электронейтральной системы первые слагаемые отсутствуют.

16. Качественные вопросы

1. Сила, действующая на диполь в поле точечного заряда q_1 .

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qq_1}{r_+^3} \vec{r}_+ - \frac{qq_1}{r_-^3} \vec{r}_- \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q \cdot \vec{l}}{r^3}, \text{ так как } r_+ \approx r_- = r.$$



Таким образом, мы получили, что сила направлена по диполлю. Проверим это.

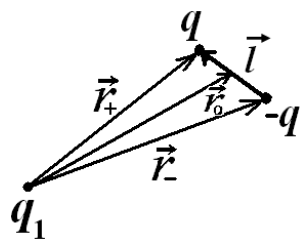
Полученная нами сила должна выталкивать диполь из поля заряда q_1 , но здравый смысл подсказывает, что на самом деле всё будет наоборот. Следовательно, нами получен софизм – неправильный результат, кажущийся правильным (в отличие от парадокса – неочевидного правильного результата. Неслучайно А. С. Пушкин писал, что «гений – парадоксов друг»).

Вопрос. Где мы ошиблись?

Ответ. Мы посчитали, что $r_+ \approx r_-$ и при этом отбросили члены такого же порядка малости, как

$\frac{\bar{l}}{r^3}$. Это можно показать:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\bar{r}_0 + \frac{\bar{l}}{2}}{\left(r_0^2 + 2\bar{r}_0 \frac{\bar{l}}{2}\right)^{3/2}} - \frac{\bar{r}_0 - \frac{\bar{l}}{2}}{\left(r_0^2 - 2\bar{r}_0 \frac{\bar{l}}{2}\right)^{3/2}} \right\} = \\ &= \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_0^3} \left\{ \frac{\bar{r}_0 + \frac{\bar{l}}{2}}{1 + \frac{3\bar{r}_0 \bar{l}}{2r_0^2}} - \frac{\bar{r}_0 - \frac{\bar{l}}{2}}{1 - \frac{3\bar{r}_0 \bar{l}}{2r_0^2}} \right\} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_0^3} \left\{ \left(\bar{r}_0 + \frac{\bar{l}}{2}\right) \left(1 - \frac{3\bar{r}_0 \bar{l}}{2r_0^2}\right) - \left(\bar{r}_0 - \frac{\bar{l}}{2}\right) \left(1 + \frac{3\bar{r}_0 \bar{l}}{2r_0^2}\right) \right\} = \\ &= \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_0^3} \left\{ \bar{r}_0 + \frac{\bar{l}}{2} - \frac{3\bar{r}_0(\bar{r}_0 \bar{l})}{2r_0^2} - \frac{3\bar{l}\bar{r}_0 \bar{l}}{2 \cdot 2r_0^2} - \bar{r}_0 + \frac{\bar{l}}{2} - \frac{3\bar{r}_0(\bar{r}_0 \bar{l})}{2r_0^2} - \frac{3\bar{l}(\bar{r}_0 \bar{l})}{2 \cdot 2r_0^2} \right\} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_0^3} \left\{ \bar{l} - 3\frac{\bar{r}_0(\bar{r}_0 \bar{l})}{r_0^2} \right\}. \\ \vec{F} &= \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \left(\bar{l} - 3\frac{\bar{r}_0(\bar{r}_0 \bar{l})}{r_0^2} \right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \left(\vec{p} - \frac{3\bar{r}_0(\vec{p}\vec{r}_0)}{r_0^2} \right) - \text{сила, действующая на диполь } \vec{p} \text{ в поле} \end{aligned}$$



точечного заряда q_1 .

Этот результат можно было получить из III закона Ньютона, вычислив силу \vec{F}_1 , с которой диполь действует на точечный заряд q_1 .

$\vec{F}_1 = q_1 \vec{E}_1$ – поле диполя в месте расположения заряда q_1 .

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\bar{r}_0'(\vec{p}\vec{r}_0') - \vec{p}r_0'^2}{r_0'^5} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_0'^3} \left[\vec{p} - \frac{3\bar{r}_0'(\vec{p}\vec{r}_0')}{r_0'^2} \right] = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \left[\vec{p} - \frac{3\bar{r}_0(\vec{p}\vec{r}_0)}{r_0^2} \right], \text{ так как } \bar{r}_0 = -\vec{r}_0'.$$

Таким образом, $\vec{F} = -\vec{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \left[\vec{p} - \frac{3\bar{r}_0(\vec{p}\vec{r}_0)}{r_0^2} \right]$.



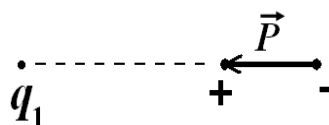
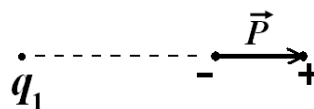
Исследуем полученный результат.

а) Если $\vec{p} \parallel \vec{E} \parallel \vec{r}$, то $\vec{F} = -\frac{q_1 q \cdot 2\bar{l}}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} = -\frac{2\vec{p}q_1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \Rightarrow$

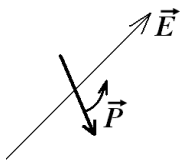
диполь втягивается в область сильного поля.

б) Если $\vec{p} \uparrow \downarrow \vec{E} \parallel \vec{r}$, то $\vec{F} = -\frac{2\vec{p}q_1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \Rightarrow$

диполь выталкивается из поля с такой же силой.



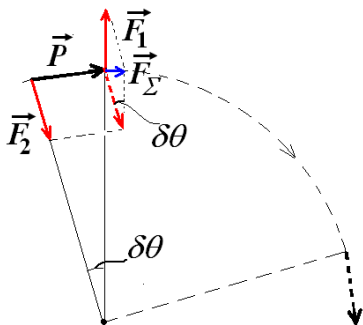
- в) Если \vec{E} не параллельно \vec{p} , то $\vec{N} = [\vec{p}\vec{E}]$ будет поворачивать диполь по полю, а затем втягивать в область более сильного поля.



2. То же самое происходит в веществе.

а) Если у молекул есть $\vec{p} \neq 0$ (полярные молекулы), то внешнее поле ориентирует их по полю \vec{E} и каждый элемент объема приобретает дипольный момент.

б) Если первоначально молекулы не поляризованы $\vec{p} = 0$, то внешнее поле $\vec{E}_{внеш}$ деформирует электронные оболочки молекул, создавая наведенный дипольный момент, \Rightarrow появляется наведенная поляризация.



3. Работа по перемещению диполя.

Пусть $\delta\theta = \frac{l}{r}$ – угловой размер диполя.

В данном случае диполь находится не в однородном, а в центральном поле, поэтому если он имеет конечную длину l , то на него действует сила

$$\vec{F} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{l}{r} \vec{e}_r.$$



$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{l}{r} \vec{e}_r \cdot r d\psi \vec{e}_r = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} l \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{q_1 q l}{8\epsilon_0 r^2}.$$

Если бы диполь был ориентирован в противоположную сторону, то $A_{12} = -\frac{q_1 q l}{8\epsilon_0 r^2}$, хотя с

точки зрения здравого смысла ясно: перемещение осуществляется по эквипотенциальной поверхности и, следовательно, ориентация диполя не важна, так как $A_{12} \equiv 0$ в каждом из этих случаев. Этот вывод согласуется с результатом расчета работы как убыли потенциальной энергии диполя:

$$A = W_{p1} - W_{p2} = 0 - 0.$$

Однако сила на наш диполь действует, мы ее нашли, и она готова вращать диполь по окружности, да еще и с ускорением!!!

Вопрос. Уж не изобрели ли мы вечный двигатель или хотя бы альтернативный всем ныне известным источник энергии?!?

Опять **софизм**. Что не так?

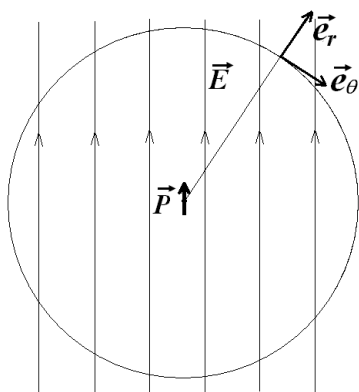
Ответ. При расчете работы силы, действующей на диполь, мы не учли поворот диполя вокруг собственной оси и соответственно того, что на диполь действует момент сил, стремящийся развернуть диполь по полю. Рассчитаем работу при повороте диполя:

$$A_{нов} = \int_0^{\pi/2} \vec{N} \cdot d\vec{\psi} = \int_0^{\pi/2} \vec{e}_\otimes \cdot d\psi \cdot \frac{q_1 q l}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_\bullet = -\frac{q_1 q l}{8\epsilon_0 r^2} \Rightarrow A_{нов} + A_{12} = 0.$$

Для того чтобы диполь сохранял первоначальную ориентацию на эквипотенциальной поверхности, необходимо удерживать его внешней силой.

4. Если диполь находится в однородном поле $\vec{p} \parallel \vec{E}_0$, то одной из эквипотенциальных поверхностей является сфера радиуса r_0 . Найти r_0 .





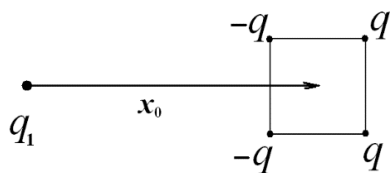
$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} + E_0 \cos \theta;$$

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta - E_0 \sin \theta.$$

Действительно, существует сфера с радиусом $r_0 = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}}$,

на поверхности которой $E_\theta = 0$, то есть вектор напряженности поля \vec{E} перпендикулярен поверхности сферы в каждой ее точке \Rightarrow эта сфера – эквипотенциальная поверхность.

5. Система четырех зарядов в поле точечного заряда.



$$x_0 \gg a. W_p - ?$$

$$W_p = -(\vec{p}\vec{E});$$

$\vec{p} = 2qa\vec{e}_x$ (относительно любой точки, так как система электронейтральна).

$$W_p = -\frac{q_1 qa}{2\pi\epsilon_0 x_0^2} \text{ – при такой ориентации системы в поле точечного заряда } q_1$$

полю этого заряда трудно (не хочется) выталкивать на бесконечность данную систему зарядов.



17. Диэлектрики в электростатическом поле.

Отклик диэлектриков на внешнее поле

1. Диэлектрики – вещества, неспособные проводить электрический ток (*dia – греч. через, electric – электрический*).

В них нет свободных носителей, точнее их в $10^{15} \div 10^{20}$ раз меньше, чем в проводниках \Rightarrow *диэлектрик* \equiv *совокупность связанных в атомы и молекулы положительных и отрицательных зарядов, то есть совокупность электронейтральных систем*, которые с электростатической точки зрения имеют суммарный заряд $Q = 0$ и, следовательно, характеризуются дипольным моментом: $\vec{p} = \sum_i q_i \langle \vec{r}_i \rangle$ \leftarrow суммирование проводится по всем заряженным частицам молекулы.



2. Микро- и макрополя.

Размер атомов $\sim 1 \text{ \AA}$.

Размер электронов и ядер в 10^5 раз меньше, следовательно, на долю заряженных частиц приходится ничтожная $\sim 10^{-15}$ доля объема \Rightarrow между ядрами и электронами – вакуум, в котором поле очень резко изменяется. Это поле называется микроскопическим.

Микрополя $\vec{E}_{\text{микро}}$ очень сложно изменяются во времени и пространстве.

$$\text{Мы будем заниматься макрополями } \vec{E}_{\text{макро}} = \vec{E} = \frac{1}{V} \int_V \vec{E}_{\text{микро}} dV.$$

V – физически бесконечно малый объем вокруг точки \vec{r} , по порядку величины соответствующий атомно-молекулярному объему. Микроскопически – это большой объем, так как в нем много заряженных частиц.

Именно с этой точки зрения создаваемые молекулами и атомами поля определяются их дипольными моментами.

3. Все диэлектрики делятся на два вида: полярные и неполярные.

1) В неполярных диэлектриках в отсутствие внешнего электрического поля \vec{E} дипольный момент молекул $\vec{p}_{\text{собств}} = 0$. В этих диэлектриках центры положительных и отрицательных зарядов каждой молекулы совпадают.

Таковыми диэлектриками являются газы He , Ne , Ar , CH_4 .

Масштаб электрических полей, соответствующий взаимодействиям в атоме:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r_{1B}^2} \approx 6 \cdot 10^{11} \frac{B}{m},$$

где $r_{1B} = 0,5 \text{ \AA}$ – первый боровский радиус.

Во внешнем электрическом поле у молекул неполярного диэлектрика вследствие деформации их электронных оболочек возникает наведенный дипольный момент

$$|\vec{p}_{\text{навед}}| = p \left(\frac{E}{E_{am}} \right) = p(0) + \alpha \frac{E}{E_{am}} + O \left(\frac{E}{E_{am}} \right) \sim |\vec{E}|.$$

2) Полярные диэлектрики – это жесткие диполи, у которых существуют $\vec{p}_{\text{собств}} \neq 0$ при $\vec{E} = 0$, $\vec{p}_{\text{собств}} = \vec{p}_0$. В этих диэлектриках центры положительных и отрицательных зарядов каждой молекулы не совпадают.

К полярным диэлектрикам относятся $NaCl$, H_2O .

В отсутствие внешнего поля $\vec{E} = 0$ так же, как в неполярном диэлектрике, дипольный момент

единицы объема полярного диэлектрика $\langle \vec{p} \rangle = 0 = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$ (← усреднение проводится по физически бесконечно малому объему ΔV).

На молекулы неполярного диэлектрика в поле \vec{E} действует вращательный момент $\vec{N} = [\vec{p}\vec{E}]$. При этом количество молекул, которым удастся развернуться по полю, определяется энергетическими соображениями:

а) энергией дипольной молекулы во внешнем электрическом поле $W = -\vec{p}\vec{E}$;

б) тепловым движением $\sim kT$, которое разбрасывает диполи равномерно по всем

направлениям (именно поэтому при $\vec{E} = 0$ $\langle \vec{p} \rangle = 0 = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$).

$E_{эфф} = \frac{kT}{p_0} \cong \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{0,5 \cdot 10^{-10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \sim 3 \cdot 10^8 \frac{B}{m}$ – эффективное поле атома, соответствующее температуре 300 К.

Выясним, как будут вести себя молекулы полярного диэлектрика, имеющие собственный дипольный момент \vec{p}_0 , если на диэлектрик наложили внешнее поле \vec{E} .

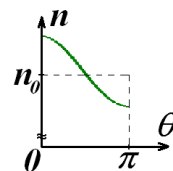
Имеем статистический ансамбль молекул с энергиями $W_p = -(\vec{p}_0\vec{E})$.

В соответствии с распределением Больцмана для потенциального поля $n = n_0 e^{-\frac{W_p}{kT}} = n_0 e^{-\frac{E \cos \theta}{E_{эфф}}}$, где n – распределение концентрации диполей по углам θ . θ – угол между \vec{p}_0 и \vec{E} .

Для $E \ll E_{эфф} \rightarrow n \approx n_0 \left(1 + \frac{E \cos \theta}{E_{эфф}} \right) \Rightarrow n_{\max}$ при $\theta = 0$, n_{\min} при $\theta = \pi$.

Вычислим средний дипольный момент единицы объема:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_{ед.об.} \rangle &= p_0 \vec{e}_z \cdot \frac{n_0}{2} \int_0^\pi \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot \left(1 + \frac{E}{E_{эфф}} \cos \theta \right) = \\ &= p_0 \vec{e}_z \cdot \frac{N}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos^2 \theta \Big|_0^\pi - \frac{1}{3} \frac{E}{E_{эфф}} \cos^3 \theta \Big|_0^\pi \right] = p_0 \vec{e}_z \frac{n_0}{3} \frac{E}{E_{эфф}} = \frac{p_0 n_0}{3} \frac{\vec{E}}{E_{эфф}} = n_0 \cdot \langle \vec{p}_1 \rangle. \end{aligned}$$



То есть в линейном приближении средний дипольный момент одной молекулы $\langle \vec{p}_1 \rangle = \frac{p_0}{3} \frac{\vec{E}}{E_{эфф}} \Rightarrow |\vec{p}_{навед}| \sim |\vec{E}|$ так же, как и для неполярных молекул.

Заменяв $E_{эфф} = \frac{kT}{p_0}$, получим средний дипольный момент одной молекулы $\langle \vec{p}_1 \rangle \Rightarrow$ дипольный

момент единицы объема $\vec{P} = \frac{p_0^2 n_0}{3kT} \vec{E}$, таким образом получили «на кончике пера» в линейном

приближении дипольный момент единицы объема $\vec{P} = \epsilon_0 \aleph \vec{E}$, где $\aleph = \frac{p_0^2 n_0}{\epsilon_0 3kT}$.

$E_{эфф} \sim 3 \cdot 10^8 \frac{B}{M} \ll 6 \cdot 10^{11} \frac{B}{M} \sim E_{ам} \Rightarrow$ развернуть легче, чем деформировать электронную оболочку, но при $E \ll E_{эфф} < E_{ам}$ в любом диэлектрике, как полярном, так и неполярном, $\vec{P} \sim \vec{E}$.

18. Поляризация

1. Мы выяснили, что диэлектрик, помещенный во внешнее поле поляризуется.

Опред. $\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{P}_i}{\Delta V}$ – вектор поляризации численно равен дипольному моменту единицы объема вещества.

$\vec{P} = \frac{\sum \vec{P}_i}{\Delta V} = n \langle \vec{p}_1 \rangle$, где n – концентрация молекул, $\langle \vec{p}_1 \rangle$ – средний дипольный момент, приходящийся на одну молекулу.

Экспериментальный факт $\vec{P} = \epsilon_0 \aleph \vec{E}$, где \aleph – диэлектрическая восприимчивость.

Для изотропного диэлектрика \aleph – число и $\vec{P} \parallel \vec{E}$, для анизотропного $\vec{P}_\alpha = \epsilon_0 \aleph_{\alpha\beta} \vec{E}_\beta$

$$\aleph = \begin{pmatrix} \aleph_{xx} & \aleph_{xy} & \aleph_{xz} \\ \aleph_{yx} & \aleph_{yy} & \aleph_{yz} \\ \aleph_{zx} & \aleph_{zy} & \aleph_{zz} \end{pmatrix} \text{ – симметричный тензор второго ранга.}$$

В анизотропном диэлектрике \vec{P} может быть не параллельно \vec{E} .

Вопрос. Чем определяется \vec{E} в присутствии диэлектрика?

Ответ. \vec{E} – это поле, которое возникает в результате наложения внешнего поля и поля диэлектрика. Поляризованный диэлектрик, являясь источником электрического поля, изменяет породившее его поле, в результате возникает следующая цепочка:

$$\vec{E}_0 \rightarrow \vec{P} \rightarrow \vec{E}' \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' (\vec{P}(\vec{E})).$$



2. Хотим понять, какое поле создает диэлектрик. Для этого вычислим $\varphi'(\vec{r})$ – потенциал связанных зарядов ρ' , считая известным $\vec{P}(\vec{r}')$.

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV'} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r}')dV';$$

$$d\varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV';$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = +\nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|};$$

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left(\vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{V'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}') dV' + \int_{V'} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \right] \Rightarrow$$

Учтем соотношение $(\vec{a}\nabla f) + f \cdot \operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div}(\vec{a}f) \Rightarrow (\vec{a}\nabla f) = -f \cdot \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div}(\vec{a}f)$.

$$\Rightarrow \varphi' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}') dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'.$$

Зададимся вопросом, каков физический смысл первого и второго слагаемых, определяющих собой потенциал поля связанных зарядов.

1) Сформулируем теорему Гаусса для поляризации $\vec{P}(\vec{r}')$.

Дифференциальная форма теоремы Гаусса для векторного поля поляризации \vec{P} :

$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'$ – удельная мощность источников поляризации в любой точке определяется взятой с противоположным знаком плотностью связанного заряда в этой точке.

Линии поля поляризации \vec{P} начинаются и кончаются на связанных зарядах.

Интегральная форма теоремы Гаусса для векторного поля поляризации \vec{P} :

$$\oint_s \vec{P} \cdot d\vec{s} = -\int_V \rho' \cdot dV \quad \text{– поток поляризации } \vec{P} \text{ через любую замкнутую}$$

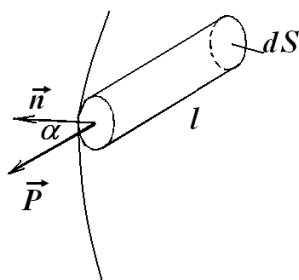
поверхность равен взятому с противоположным знаком связанному заряду, заключенному внутри этой поверхности.

Теперь ясно, что первое слагаемое в выражении для φ' «отвечает» за поле, которое создается связанными зарядами с объемной плотностью $\rho'(\vec{r}')$:

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV'.$$

2) Выясним, каков смысл произведения $(\vec{P} \cdot d\vec{s})$.

Рассмотрим дипольный момент объема dV : $P \cdot dV = P \cdot ds \cdot \cos \alpha \cdot l = P_n \cdot ds \cdot l = \sigma' \cdot ds \cdot l$, так как $\sigma' \cdot ds$ – заряд на торцах рассматриваемого цилиндра, умноженный на длину образующей цилиндра l , дает как раз дипольный момент объема dV .



Следовательно, $P_n = \sigma'$ – нормальная компонента вектора поляризации \vec{P} на границе диэлектрика равна поверхностной плотности связанного заряда в этой точке.

Тогда $\oint_s \vec{P} \cdot d\vec{s} = \oint_s \sigma' \cdot ds = -\int_V \rho' \cdot dV$, и мы получаем условие

электронейтральности диэлектрика:

$$\oint_s \sigma' \cdot ds + \int_V \rho' \cdot dV = 0 \quad \text{– суммарный связанный заряд диэлектрика равен 0.}$$

Теперь можем выразить потенциал $\phi'(\vec{r})$, который создает поляризованный диэлектрик в окружающем пространстве, в физически ясной форме:

$$\phi'(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{s'} \frac{\sigma'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot ds' + \int_{V'} \frac{\rho'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV' \right].$$

Вывод. Связанные заряды создают вокруг себя электростатическое поле точно так же, как и свободные заряды, полями которых мы занимались до сих пор.

В дальнейшем будем обозначать:

q_0, ρ_0 – свободные заряды и их плотность;

q', ρ' – связанные заряды и их плотность;

q, ρ – суммарный заряд и его плотность.

19. Поле в диэлектриках

Удельная мощность источников напряженности электрического поля в каждой точке равна суммарной плотности заряда в этой точке, деленной на ϵ_0 :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho' + \rho_0}{\epsilon_0} \text{ – дифференциальная форма теоремы Гаусса для } \vec{E}.$$

Проблема при вычислении напряженности поля \vec{E} в присутствии диэлектриков заключается в том, что плотность связанных зарядов в любой точке определяется напряженностью поля \vec{E} в этой точке, то есть возникает следующая цепочка:

$$\vec{E}_0 \rightarrow \vec{P}_0 \rightarrow \Delta \vec{E}_0 + \vec{E}_0 = \vec{E}_1 \rightarrow \vec{P}_1 \rightarrow \Delta \vec{E}_1 + \vec{E}_1 = \vec{E}_2 \rightarrow \vec{P}_2 \rightarrow \text{и т. д.}$$

Хотелось бы иметь такое поле, удельная мощность источников которого в каждой точке определялась бы плотностью только стороннего (свободного) заряда. Попробуем ввести такое поле:

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} + \operatorname{div} \vec{P} = \rho_0 \Rightarrow \operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_0 \Rightarrow$$

Опред. $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ – электрическое смещение или электрическая индукция – вспомогательная векторная величина, не имеющая физического смысла, введенная для удобства расчета поля в веществе.



Дифференциальная форма теоремы Гаусса для \vec{D} :

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_0$ – удельная мощность источников поля \vec{D} в любой точке равна плотности свободных зарядов (сторонних зарядов) в этой точке.

Интегральная форма теоремы Гаусса для \vec{D} :

$\oint_s \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho_0 dV = q_0$ – поток \vec{D} через любую замкнутую поверхность равен свободному заряду внутри этой поверхности.

При этом напряженность электрического поля \vec{E} по-прежнему является силовой характеристикой электрического поля.

Дифференциальная форма теоремы Гаусса для \vec{E} уже была сформулирована в начале этого параграфа, интегральная форма теоремы Гаусса для напряженности электрического поля \vec{E} имеет следующий вид:

$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$ – поток вектора напряженности электрического поля \vec{E} через любую замкнутую поверхность равен суммарному заряду (свободному + связанному), заключенному внутри этой поверхности, деленному на ϵ_0 .

Только в изотропном диэлектрике вектор поляризации параллелен напряженности поля:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}.$$

Опред. $\epsilon = \chi + 1$ – диэлектрическая проницаемость вещества.

Для всех без исключения веществ $\epsilon \geq 1$.

В таблице представлены диэлектрические проницаемости некоторых веществ.

	NaCl	С Алмаз	SiO ₂ Кварц	H ₂ O Лёд, вода	BaTiO ₃
ϵ	6,3	5,7	4,3	43 81	4000

Только в изотропном диэлектрике $\vec{E} \parallel \vec{P} \parallel \vec{D}$ и связаны следующими соотношениями:

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \vec{D}; \quad \epsilon_0 \epsilon \cdot \vec{E} = \vec{D}.$$

Замечание.

Для изотропных диэлектриков:

$$\text{div}(\epsilon_0 \epsilon \vec{E}) = \rho_0 \Rightarrow \text{возникает соблазн использовать уравнение } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \epsilon}$$



для расчета напряженности электростатического поля в веществе, но этим уравнением лучше не пользоваться, так как оно неверно не только для анизотропного диэлектрика, но и для неоднородного, в котором диэлектрическая проницаемость изменяется от точки к точке, то есть является функцией координат $\epsilon = f(\vec{r})$. \Rightarrow

Правильный порядок действий при расчете поля в веществе нижеследующий.

1. Все пространство разбивают на области однородности, нумеруя их $i = 1, 2, \dots$

2. Для каждой i -й области, зная заданное распределение стороннего заряда ρ_0 , если позволяет симметрия задачи, вычисляют \vec{D}_i по интегральной теореме Гаусса, выбирая соответствующие поверхности и заменяя $\oint_{s_i} \vec{D}_i d\vec{s} = \int_{V_i} \rho_0 dV = q_{0i}$ на произведение $\vec{D}_i \vec{s}_i = \int_{V_i} \rho_0 dV = q_{0i}$

так, как это делалось при вычислении напряженности поля \vec{E} от симметрично заряженных тел в отсутствие диэлектриков.

3. Зная распределение \vec{D}_i , находят распределение $\vec{E}_i = \frac{\vec{D}_i}{\epsilon_0 \epsilon_i}$ (если диэлектрик изотропный) в

каждой области с учетом ее диэлектрической проницаемости ϵ_i .

4. Зная \vec{D}_i , находят поляризацию $\vec{P}_i = \frac{\epsilon_i - 1}{\epsilon_i} \vec{D}_i$ в каждой области.

5. Зная \vec{P}_i , находят $P_n \equiv \sigma'$ – поверхностную плотность связанного заряда на каждой границе раздела $i, (i+1)$ областей.

6. Зная распределение \vec{E}_i , находят распределение потенциала $\varphi_i(\vec{r})$ в каждой области с последующей сшивкой на границах раздела полученных $\varphi_i(\vec{r}_{0i}) = \varphi_{i+1}(\vec{r}_{0i})$.

20. Связь плотности свободных ρ_0 и связанных ρ' зарядов в изотропном диэлектрике

Хотим выяснить, от чего зависит величина плотности связанных зарядов, возникающих в диэлектриках, в частности, когда $\rho' = 0$.

$$\begin{aligned} \rho' &= -\operatorname{div} \vec{P} = -\operatorname{div} \left[\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \vec{D} \right] = - \left\{ \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \underbrace{\operatorname{div} \vec{D}}_{\rho_0} + \nabla \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right) \cdot \vec{D} \right\} = - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho_0 - \nabla \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \vec{D} = \\ &= - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho_0 - \frac{\vec{D}}{\varepsilon^2} \nabla \varepsilon = - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{E} \nabla \varepsilon - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho_0. \end{aligned}$$

Вывод. $\rho' = 0$, если выполняются одновременно следующие условия:

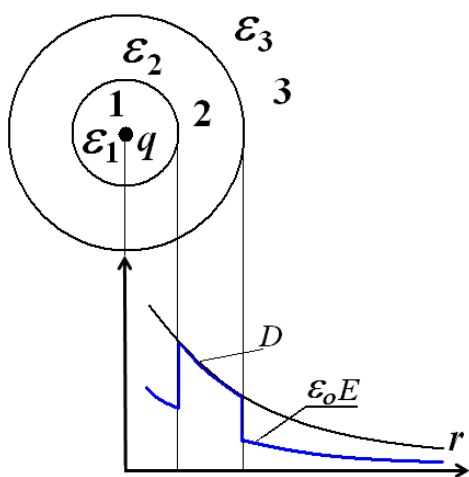
- 1) $\nabla \varepsilon = 0$, то есть диэлектрик – однородный;
- 2) $\rho_0 = 0$, то есть нет сторонних зарядов.



Пример.

Точечный заряд q окружен сферическими диэлектрическими слоями с проницаемостями: $\varepsilon_1 = 2$; $\varepsilon_2 = 1$; $\varepsilon_3 = 3$, как показано на рисунке.

Найти: $\sigma'_{12} - ?$ $\sigma'_{23} - ?$ $\rho' - ?$



1) Ищем распределение \vec{D} во всем пространстве по теореме Гаусса, учитывая, что эквипотенциальными поверхностями являются концентрические сферы:

$$4\pi r^2 D = q \rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

2) Находим распределение \vec{E}_i в каждой области:

$$E_i = \frac{D_i}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_i r^2}.$$

3) Найдем распределение поляризации в каждой области:

$$P_i = \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i} D = \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i} \cdot \frac{q}{4\pi r^2}.$$

4) Теперь, зная распределение \vec{P} , можно найти распределение связанного заряда из уравнения $\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'$:

$$\rho' = - \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i} \cdot \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0.$$

Таким образом, плотность связанного заряда во всех областях равна 0. Этот результат очевиден, так как все рассматриваемые области являются однородными изотропными диэлектриками и не содержат сторонних зарядов, следовательно, $\rho'_i = 0$.

5) Роль неоднородности в этой задаче играют границы раздела диэлектриков, то есть границы раздела областей. На них-то и возникает связанный заряд с поверхностной плотностью σ'_{12} и σ'_{23} соответственно.

$$\vec{P}_1(R_1) = \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{4\pi R_1^2} \vec{e}_r; \quad \vec{P}_2(R_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma'_{12} = P_{1n}(R_1) - P_{2n}(R_1) = \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{4\pi R_1^2} > 0 \Rightarrow$$

связанный заряд на границе раздела 1-й и 2-й области $Q'(R_1) = \frac{q}{2} > 0$.

Аналогично можно получить, что на границе раздела 2-й и 3-й областей возникает связанный заряд $0 > Q'(R_2) = -\frac{2q}{3}$ с поверхностной плотностью $0 > \sigma'_{23} = P_{2n}(R_2) - P_{3n}(R_2) = -\frac{2q}{3} \cdot \frac{1}{4\pi R_2^2}$.

Вопрос. А как же электронейтральность диэлектриков?

Ответ. Вычисленный нами связанный заряд компенсируется возникающим связанным зарядом в окрестности 0 и на бесконечности.



21. Условия на границе раздела двух диэлектриков

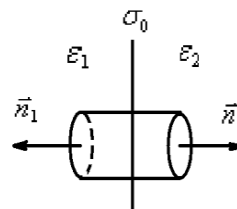
$$1. \oint_S \vec{D} d\vec{S} = (\vec{D}_1 \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \vec{n}_2) S = (D_{2n} - D_{1n}) \pi r^2 = \sigma_0 \pi r^2 \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0 \Rightarrow$$

Если $\sigma_0 = 0$, то $D_{1n} = D_{2n}$, то есть на не заряженной стороним зарядом поверхности нормальная составляющая \vec{D} не терпит разрыва.

Следствия.

1) Для изотропных диэлектриков $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$, следовательно, $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \Rightarrow$ нормальная составляющая \vec{E} терпит разрыв на границе раздела диэлектриков, так как на ней есть связанные заряды.

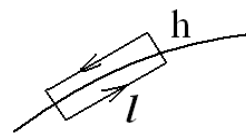
2) $\vec{E} = -\nabla \varphi \Rightarrow \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$, то есть потенциал на границе раздела ломается.



2. Циркуляция $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$, так как работа консервативной силы по замкнутому контуру равна 0.

замкнутому контуру равна 0.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \vec{E}_1 \vec{\tau}_1 l + \vec{E}_2 \vec{\tau}_2 l + o(h) = l(E_{\tau 2} - E_{\tau 1}) = 0 \Rightarrow E_{1\tau} = E_{2\tau}$$



– касательная составляющая напряженности электрического поля \vec{E} сохраняется на границе раздела.

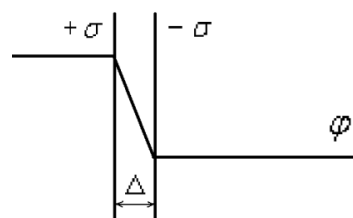
Это условие выполняется и для переменного поля.

Следствие.

$\frac{D_{1\tau}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_2}$ – касательная составляющая \vec{D} терпит разрыв на границе раздела диэлектриков.

3. На границах раздела потенциал всегда является непрерывной функцией $\varphi_1 = \varphi_2$, кроме двойного заряженного слоя.

При $\Delta \rightarrow 0$ потенциал совершает скачок.



22. Замечания

1. Определение $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ годится, если правомерно линейное приближение, то есть $E \ll E_{эфф} = 10^8 \frac{B}{M} \ll E_{ам} \approx 10^{11} \frac{B}{M}$.

2. $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$, если:

а) работает линейное приближение $E \ll E_{эфф} \approx 10^8 \frac{B}{M} \ll E_{ам} \approx 10^{11} \frac{B}{M}$;

б) диэлектрик изотропный;

в) $\vec{P} \uparrow \uparrow \vec{E}$.

Пример.

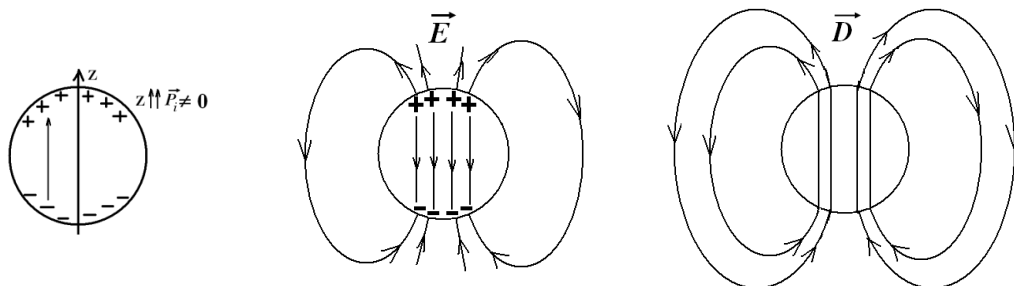
Рассмотрим шар из электрета.

Электреты – диэлектрики, сохраняющие поляризацию длительное время после снятия внешнего электрического поля. Электретами являются: пчелиный воск, парафин, стекло, фарфор.

Электризация электретов производится следующим образом: расплав электрета помещают в электрическое поле, затем проводят затвердевание электрета в поле, после чего поле снимают.

Внутри шара напряженность поля $\vec{E}_i \downarrow \uparrow \vec{P}_i$, так как \vec{E}_i обусловлено в данном случае только связанными зарядами, линии \vec{E} начинаются и кончаются на них.

Линии \vec{D} в этом случае замкнуты, так как сторонних зарядов нет, то есть нет точечных источников поля \vec{D} . Поэтому снаружи $\vec{D}_e = \epsilon_0 \vec{E}_e \Rightarrow \vec{D}_e \uparrow \uparrow \vec{E}_e \Rightarrow \vec{D}_i \downarrow \uparrow \vec{E}_i$, т. е. внутри шара \vec{D}_i и \vec{E}_i антипараллельны.

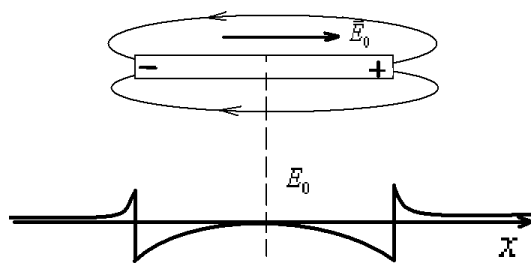


3. Диэлектрик ослабляет внешнее поле в ϵ раз только тогда, когда граница раздела является эквипотенциальной поверхностью, так как в этом случае $\vec{E} \perp$ поверхности и

$$E_i = E_n = \frac{D_{ni}}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{D_{ne}}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{E_e}{\epsilon}, \text{ так как } D_{in} = D_{en}.$$

В этом случае возникающая в диэлектрике поляризация не вносит искажений во внешнее поле. В других случаях поляризация диэлектрика может исказить внешнее поле.

Диэлектрик может не только уменьшать, но и увеличивать внешнее поле.



4. Линии \vec{P} начинаются и кончаются на связанных зарядах q' .

Линии \vec{D} начинаются и кончаются на свободных зарядах q_0 .

Линии \vec{E} начинаются и кончаются на любых зарядах $q' + q_0$.

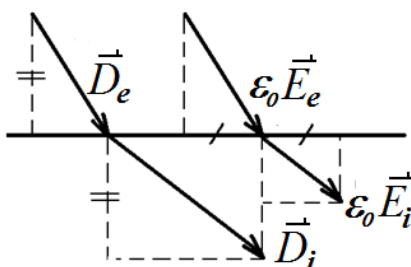
Соответственно связанный заряд определяет поток \vec{P} , свободный заряд определяет поток \vec{D} и все заряды определяют поток \vec{E} .

Сами поля \vec{P} , \vec{D} , \vec{E} определяются всеми зарядами.

23. Задачи и качественные вопросы

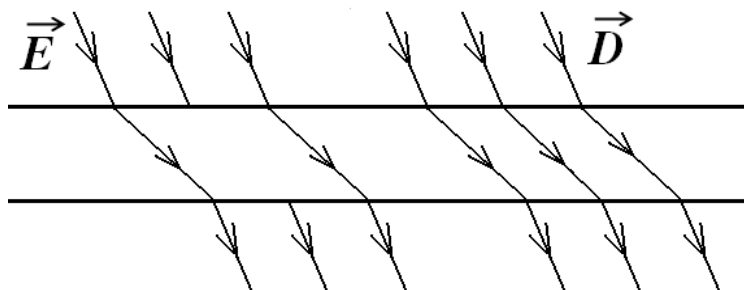
1. Рассмотрим диэлектрическую пластину с $\varepsilon = 2$, находящуюся в однородном поле \vec{E}_0 , направленном под углом $\varphi = 30^\circ$ относительно нормали к поверхности пластины. Требуется найти \vec{D} , \vec{E} в пластине и изобразить ход силовых линий внутри пластины.

1) Будем искать \vec{E} из граничных условий: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$; $E_{1n} = \varepsilon \cdot E_{2n}$.



Так как $\varepsilon = 2$ $|E_i| < |E_e| \Rightarrow$ линии $E_i = E_2$ внутри пластины идут реже, чем снаружи $E_e = E_1$.

$$\text{При } \varphi = 30^\circ \quad E_i^2 = \left(E_0 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{E_0 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2}\right)^2 = E_0^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16}\right) \Rightarrow |E_i| = E_0 \frac{\sqrt{7}}{4}.$$



Уменьшение линий \vec{E} внутри связано с наличием отрицательных связанных зарядов на поверхности. Часть линий \vec{E} “съели” связанные заряды.

2) $\vec{D}_i \uparrow \vec{E}_i$ и так как на поверхности нет сторонних зарядов, то линии \vec{D} не исчезают и не появляются, а только ломаются на границе раздела. Хотя новых линий \vec{D} не появилось, их плотность возросла из-за излома (это видно, если провести плоскости $\perp \vec{D}_e$ и \vec{D}_i).

Можно было начинать с построения \vec{D} , учитывая граничные условия для \vec{D} .

2. Заряженный сферический слой:

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{r}{R_2} \text{ при } R_2 \geq r \geq R_1; \quad \varepsilon_1 = 2, \quad \varepsilon_2 = 3, \quad \varepsilon_3 = 1.$$

Найти распределение \vec{P} , \vec{D} , \vec{E} во всем пространстве.

1) Находим \vec{D} по теореме Гаусса в каждой области:

$$\vec{D}_1 = 0;$$

$$D_2 \cdot 4\pi r^2 = \int_{R_1}^r \rho_0 \cdot \frac{r'}{R_2} \cdot 4\pi r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_0}{R_2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (r^4 - R_1^4) \Rightarrow$$

$$\vec{D}_2 = \frac{\rho_0}{4R_2} \left(r^2 - \frac{R_1^4}{r^2} \right) \cdot \vec{e}_r;$$

$$\vec{D}_3 = \frac{\rho_0(R_2^4 - R_1^4)}{4R_2 r^2} \cdot \vec{e}_r.$$

2) Находим напряженность $\vec{E}_i = \frac{\vec{D}_i}{\varepsilon_0 \varepsilon_i}$ в каждой области.

3) Находим поляризацию $\vec{P}_i = \frac{\varepsilon_i - 1}{\varepsilon_i} \cdot \vec{D}_i$ в каждой области.

4) Найдем плотность связанных зарядов:

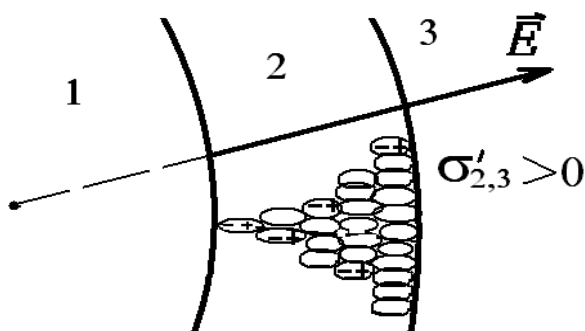
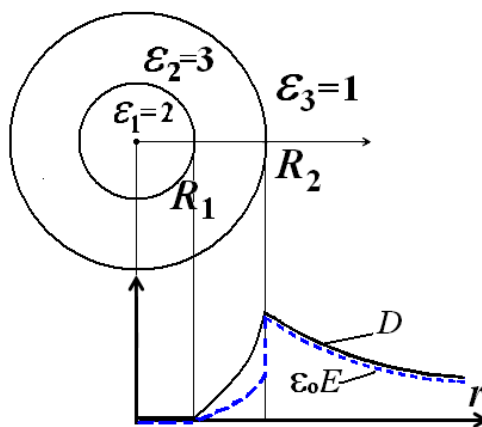
$$\rho' = -\text{div}\vec{P} = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R_1; \\ -(\varepsilon_2 - 1) \frac{\rho_0}{\varepsilon_2} \frac{1}{4R_2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 - R_1^4) = -\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \frac{\rho_0}{4R_2} \frac{1}{r^2} 4r^3 = -\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \frac{\rho_0}{R_2} r & \text{при } R_2 \geq r \geq R_1. \end{cases}$$

5) $\sigma'_{12} = 0$, так как $P_n(R_1) = 0$.

$$\sigma'_{23} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{(R_2^4 - R_1^4)}{4R_2^3} > 0 \Rightarrow$$

$$Q'_{нов} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{(R_2^4 - R_1^4)}{4R_2^3} 4\pi R_2^2 \Rightarrow$$

$Q'_{нов} + Q'_{об} = 0$, что и требовалось доказать.



24. Специальные виды твердых диэлектриков



Сегнетоэлектрики, пироэлектрики, пьезоэлектрики, электреты – всё это твердотельные диэлектрики, которые при определенных условиях могут иметь поляризацию $\vec{P} \neq 0$ и работать, создавая электрические поля подобно постоянным магнитам, создающим магнитное поле. Всего 32 класса.

Пьезоэлектрики – кристаллы, в которых механические напряжения приводят к возникновению \vec{P} и \vec{E} – это пьезоэлектрический эффект. Он может существовать только в тех кристаллах, где элементарная ячейка не имеет центра симметрии. Из 32 классов → 20 классов.

Пироэлектрики – кристаллы, в которых существует поляризация без внешнего поля. В кристаллах пироэлектриков имеется выделенное анизотропное направление. Всего 10 классов.

Сегнетоэлектрики имеют следующие свойства.

1) В некотором диапазоне температур $\varepsilon \approx 10^4$.

Например, сегнетова соль $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ проявляет сегнетоэлектрические свойства в интервале температур $-18^\circ C < T < 24^\circ C$.

2) $\vec{P} \neq k\vec{E}$; $\varepsilon = f(\vec{E})$.

3) Поляризация зависит от предыстории $\vec{P} = f(\text{предыстория})$.

Существуют области спонтанной поляризации – домены.

Титанат бария $BaTiO_3 \rightarrow \varepsilon \cong (6 \div 7)10^3$; $T_k = 120^\circ C$.

Электреты – диэлектрики, сохраняющие поляризацию длительное время. Имеют стабильный поверхностный заряд $\approx 10^{-8} \frac{Кл}{см^2} \cong 6 \cdot 10^{10} \frac{e}{см^2}$.

Смола, воск, полимеры ← остывание и отвердевание в сильном поле \vec{E}_0 .

По способу поляризации электреты делятся на:

- а) термо- (расплав в поле); б) фото- (освещение); в) радио- (радиоактивное облучение);
- г) электро-; д) магнито-; е) механо- (пьезоэлектрики); ж) трибо- (трение);
- з) крио- (охлаждение в поле).

25. Проводники в электростатическом поле

1. Опред. Проводники – материалы, в которых есть свободные носители тока, то есть заряды, которые способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы.

Условия равновесия заряда в проводнике:

1) $\vec{E}_i = 0$, то есть потенциал внутри проводника $\varphi_i = const \equiv$ внутри нет электрических сил, действующих на заряд;

2) $\vec{E}_{нов} = \vec{E}_n = E \cdot \vec{n} \Rightarrow$ вдоль поверхности $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0$, то есть поверхность проводника эквипотенциальна.

Из 1) \rightarrow плотность заряда в любой внутренней точке проводника $\rho_i = 0$, так как $\frac{\rho_i}{\epsilon_0} = \text{div} \vec{E}$.

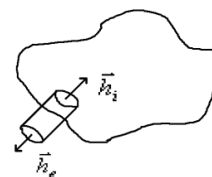
Из 2) $\rightarrow \varphi_{нов} = const$ – поверхность проводника является эквипотенциальной.



2. Выясним, чему равна нормальная составляющая вектора напряженности E_n на поверхности проводника:

$$D_i = 0 \Rightarrow D_n \Delta S = \sigma \Delta S \Rightarrow$$

$$D_n = \sigma \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$$



Здесь ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, окружающей металл.

2а. Обсудим электрическое поле Земли.

$$E \approx 130 \text{ В/м} \Rightarrow \sigma_{нов} = -\epsilon_0 \epsilon E \approx \frac{-10^2}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cong -10^{-9} \text{ Кл/м}^2 = -6 \cdot 10^9 \frac{e}{\text{м}^2} \Rightarrow$$

$$Q_{нов. \text{ Земли}} \approx -6 \cdot 10^5 \text{ Кл} = -4 \cdot 10^{24} e - \text{полный отрицательный заряд Земли.}$$

Напомним, что $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

Если это так, то напряженность электрического поля в околоземном пространстве:

$$E = \frac{Q_{нов}}{4\pi \epsilon_0 (R_3 + h)^2} = \frac{5,4 \cdot 10^{15} \text{ В/м}}{(R_3 + h)^2} = 1,3 \cdot 10^2 \frac{\text{В}}{\text{м}} \Rightarrow \Delta U(1,7 \text{ м}) \cong \frac{5,4 \cdot 10^{15}}{R_3^2} \cdot h \approx 220 \text{ В.}$$

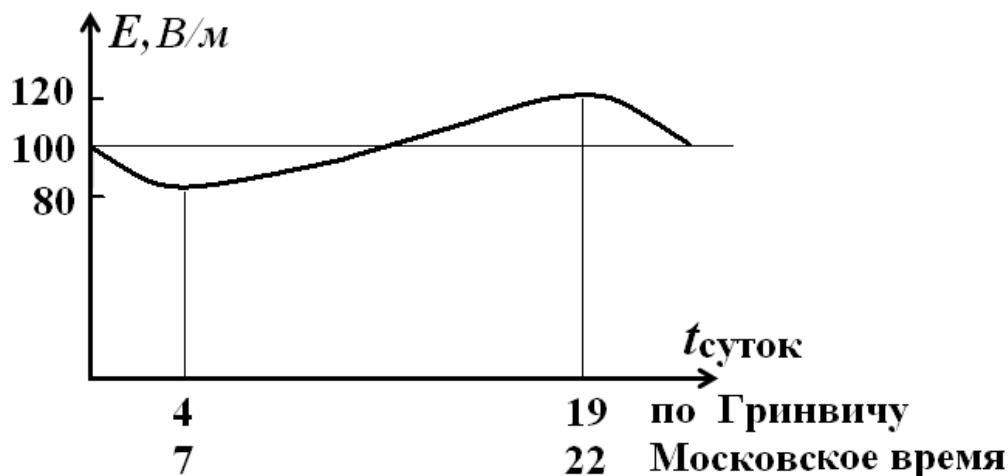
Вопрос. Почему мы не ощущаем напряжения между пятками и макушкой или кончиком носа?

Ответ. Человек – хороший проводник, следовательно, человек представляет собой эквипотенциальную поверхность и сам вносит искажения в электростатическое поле.



Между «небом» (верхними слоями атмосферы) и Землей в ясный день разность потенциалов $U = 4 \cdot 10^5 \text{ В}$ и течет постоянный ток, обусловленный потоком отрицательных ионов от Земли к небу, с плотностью $\vec{j} \approx -10^{-6} \vec{e}_r \frac{\text{мкА}}{\text{м}^2}$. Интеграл по всей поверхности Земли дает ток 1800 А от Земли к небу. Чтобы заряд сохранялся, нужен механизм обратного тока отрицательного заряда к Земле. По-видимому, можно считать установленным, что эту функцию выполняют грозы.

Напряжение поля Земли в течение суток меняется следующим образом.



Получается, что 22 часа по московскому времени – наиболее вероятное время гроз на Земле, то есть над Тихим океаном наиболее вероятны грозы утром, а над Атлантическим – вечером.

Разность потенциалов «Земля – небо» во время грозы много больше, чем в ясную погоду $U_{зп} = (20 - 100) \cdot 10^6 \text{ В} \gg 4 \cdot 10^5 \text{ В}$.

Каждый удар молнии приносит на Землю заряд (20 – 30) Кл, при этом изменяется дипольный момент тучи. Время восстановления дипольного момента тучи ~ 5 с. В «грозовой машине» течет ток $\sim 4 \text{ А}$. Таким образом, атмосфера является непрерывно действующей электрической машиной.

Если природа обычной молнии описана в многочисленных научных работах и даже учебниках (например, Д.В. Сивухин «Электричество»), то природа шаровой молнии не известна. Существует ряд гипотез. Например, гипотеза Родионова основана на существовании магнитных монополей, которые представляют собой кончики вихрей кварков. Кварковый вихрь, как шланг пылесоса, подсасывает своим магнитным полем атомы, которые, приближаясь к монополю, распадаются сначала на элементарные частицы, а потом на кварки, которые достраивают монополь.

Таким образом, получается следующая цепочка:

кварк. вихрь \rightarrow *магнит. поле* \rightarrow *атом* \rightarrow *ядро* $+$ *e* $+$ *фотоны* \rightarrow *ядро* \rightarrow

\rightarrow *p* $+$ *n* $+$ *нейтрино* $+$ *фотоны* \rightarrow *кварки* \rightarrow *достраивают монополь*.

При этом возникает ионизация воздуха с появлением светящегося плазменного шара диаметром ~ 10 см. С помощью этой гипотезы автор сделал попытку объяснить загадку Тунгусского метеорита, полагая, что тунгусское сияние было вызвано ядерным взрывом, спровоцированным шаровой молнией. Эта гипотеза, разумеется, оставляет ряд вопросов.

1) Она противоречит уравнению Максвелла $\text{div } \vec{B} = 0$ (магнитных зарядов не обнаружено), так как монополи, лежащие в основе гипотезы, и есть пока не обнаруженные магнитные заряды.

2) Если Тунгусский метеорит являлся ядерным взрывом, почему никто не пострадал от γ -излучения?

Впрочем, Максвеллу в свое время тоже мало кто поверил. Этот пример демонстрирует, тот факт, что и наше время богато головокружительными гипотезами и нерешенными физическими проблемами.

Вернемся к изучению свойств проводников в электростатическом поле.

3. Как распределен заряд по поверхности металла?

На больших расстояниях от заряженной поверхности проводника эквипотенциальные поверхности – сферы, на малых расстояниях – у острия линии сгущаются, то есть у острия больше напряженность поля $\vec{E} \Rightarrow$ на острие заряды сгущаются.

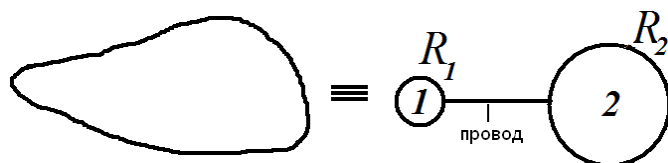


Вопрос. Почему так?

Ответ. Заряды на поверхности проводника стремятся как можно дальше расположиться друг от друга, а так как острие отстоит дальше от остальной поверхности, то туда и убегают заряды.

В результате: $\frac{\partial E}{\partial n} = -E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, где $\begin{cases} R_i > 0 \text{ для выпуклой поверхности;} \\ R_i < 0 \text{ для вогнутой поверхности.} \end{cases}$

Эквивалентная схема вытянутого тела:



$$\varphi_1 = \varphi_2;$$

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1};$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \varphi_1 \Rightarrow$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1^2}; \quad \sigma_2 = \frac{q}{4\pi R_2^2} \Rightarrow$$

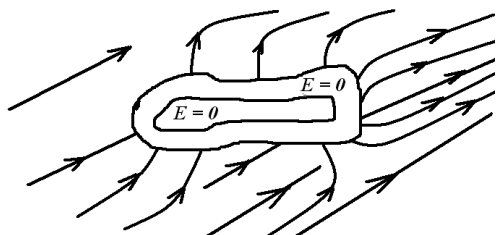
$$\sigma_1 \cdot R_1 = \sigma_2 R_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{E_1}{E_2} \Rightarrow$$

Вывод. На поверхности заряженного проводника плотность заряда велика на выступающих частях и мала во впадинах. \Rightarrow

Если надо зарядить тело до высокого потенциала, то надо убедиться, что поверхность его гладкая и на ней нет мест, где E будет очень велико, так как с этих мест может происходить истечение зарядов.

Если поместить вблизи тела с острием, находящимся под высоким напряжением, другой изолированный от первого проводник, то последний будет заряжаться зарядом того же знака, что и острие, вследствие ионизации воздуха вблизи острия. При этом одноименные заряды с таким же знаком заряда, как у острия, движутся от него, а разноименные к нему. Возникает ионный ветер, увлекающий за собой и нейтральные молекулы.

4. Свойства замкнутой проводящей оболочки:



(1) Внешние заряды, в частности заряды на наружной поверхности проводника, не создают в полости внутри проводника никакого электрического поля \Rightarrow электростатическая защита.

5. Заряды внутри проводящего слоя.

Что происходит?



$$\oint_s \vec{E} d\vec{S} = \oint_s \vec{O} d\vec{S} = 0 = \frac{q + q'}{\epsilon_0}, \text{ так как } \vec{E}_i = \vec{O} \Rightarrow$$

$q' = -q$ – суммарный заряд, индуцированный на

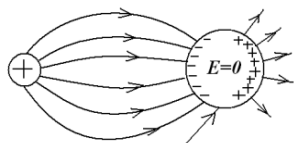
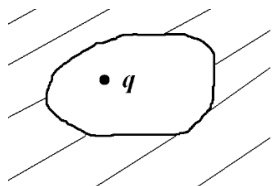
внутренней поверхности замкнутой проводящей оболочки, равен и противоположен по знаку суммарному заряду, окруженному этой оболочкой.



(2) Кулоновское поле зарядов, окруженных проводящей оболочкой, и зарядов, индуцированных на ее поверхности, равно 0 во всем внешнем пространстве.

(1)+(2) ⇒ Теорема Фарадея:

замкнутая проводящая оболочка разделяет все пространство на внутреннюю и внешнюю части, в электрическом отношении независимые друг от друга.



Например, перемещение малого шарика не влияет на поле внутри большого шара или сферического слоя.

6. Примеры.

1) Заряд внутри электронейтрального проводящего сферического слоя.

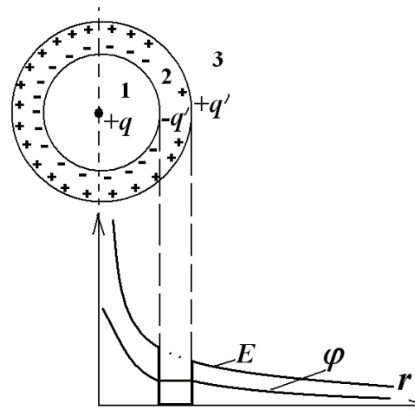
$$|-q'| = q = |+q'|;$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}; \quad \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C;$$

$$E_2 = 0; \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_2};$$

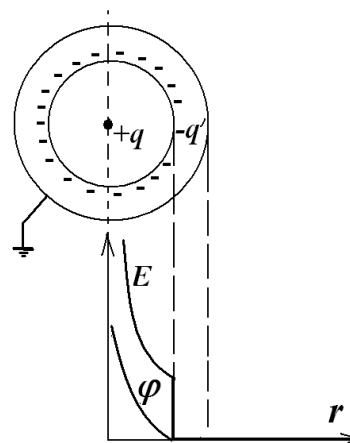
$$E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}; \quad \varphi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Если q находится не в центре сферы, то это отразится на неравномерности распределения заряда только на внутренней поверхности, снаружи все будет так же.



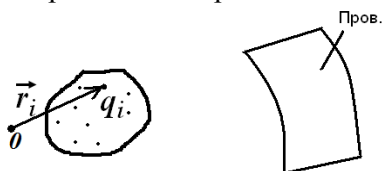
2) Если проводящий слой заземлен, то распределение поля и потенциала во внешнем пространстве будет другим.

В этом случае Земля является источником недостающего отрицательного заряда, проводник заряжается отрицательно зарядом $-q$ и полностью экранирует поле центрального заряда, поэтому напряженность поля и потенциал равны 0 во всем пространстве при $r \geq R_1$.



26. Основная задача электростатики проводников. Метод изображений

Рассмотрим уравнения, описывающие поведение проводников в электростатическом поле. В любом электростатическом поле поверхность металла эквипотенциальна, то есть $\varphi = const \Rightarrow$ можно искать φ из уравнения Пуассона: $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}$ – для любой точки пространства, если пространство изотропно и однородно.



Вне проводника:

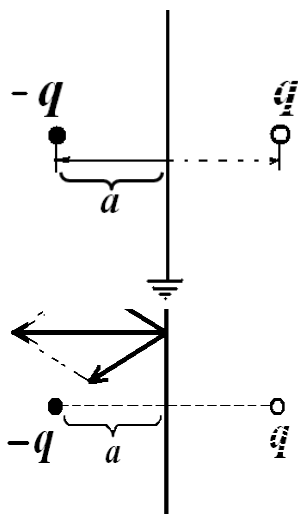
$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 - \text{уравнение Лапласа} \\ \varphi(\infty) = 0 \\ \varphi_{нов} = const \end{cases}$$

В теории дифференциальных уравнений доказано, что такая задача имеет единственное решение.

В ряде простых симметричных задач используют *метод изображений*: находят систему зарядов такую, что поле этой системы и внешней заданной системы зарядов делают поверхность металла эквипотенциальной поверхностью.

Пример.

Точечный отрицательный заряд $-q$ находится на расстоянии a перед бесконечной проводящей заземленной плоскостью. Найти поверхностную плотность σ' заряда, индуцированного на плоскости.



Эта плоскость была бы эквипотенциальной, если бы она была перпендикулярна оси диполя и проходила через его середину \Rightarrow не хватает заряда $+q$ с другой стороны плоскости.

Поле диполя на плоскости, проходящей через его середину:

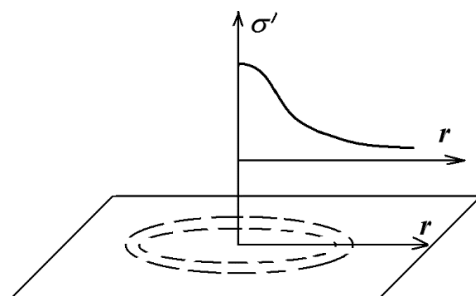
$$E = E_0 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q \cdot 2a}{4\pi\epsilon_0 r^3} = E_n = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\sigma' = \frac{qa}{2\pi r^3} \leftarrow \text{это на больших расстояниях.}$$

А на малых расстояниях:

$$\vec{E} = \frac{2qa\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}} \Rightarrow \sigma' = \frac{\epsilon_0 qa}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + a^2)^{3/2}}$$

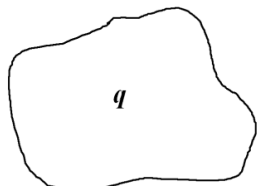
При этом $\frac{d\sigma'(0)}{dr} = 0$, что важно при построении графика $\sigma'(r)$.



27. Электроемкость уединенного проводника

Рассмотрим уединенный проводник, не бесконечный и заряженный зарядом q .

Из принципа суперпозиции



$$E \sim q \Rightarrow$$

$$\varphi_{\text{пров}} = \int_{\text{пров}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \varphi_{\text{пров}} \sim q.$$

Это согласуется с практическим опытом.

Коэффициент пропорциональности C между потенциалом и зарядом называется емкостью: $q = C \cdot \varphi$ (формула «ку-ку»).

За единицу емкости в системе СИ принимается емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении проводнику заряда в 1 Кл.

Эта единица называется фарадой и обозначается Ф: $[C] = \text{Ф}$.

1 Ф соответствует очень большой емкости:

$$C_{\text{Земли}} \cong 1 \text{ мФ};$$

$$C_{\text{Солнца}} \cong 0,1 \text{ Ф};$$

$$C_{\text{обыч.конт.}} \cong 1 \text{ мкФ}.$$

C зависит от: 1) размеров проводника;

2) формы;

3) диэлектрической проницаемости среды.

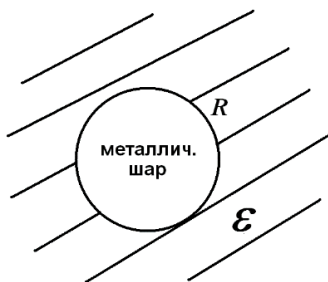
Вопрос. Почему понятие емкости вводится именно для проводников?

Ответ. Потому что все точки проводника имеют одинаковый потенциал.



Пример.

Дано: заряженный металлический шар радиуса R , с зарядом q , ε – диэлектрическая проницаемость окружающей среды.



Найти: E, φ, C .

Решение.

$$E_i \equiv 0; \varphi_i = \text{const}; C = \frac{q}{\varphi_i}.$$

Определим потенциал шара, для этого найдем напряженность электрического поля вне шара по теореме Гаусса. Так как среда вне шара изотропна и однородна, то можно сразу найти напряженность электрического поля:

$$E_e \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} \Rightarrow \varphi_e = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r} \Rightarrow \varphi_i = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R} \Rightarrow$$

$$C_{\text{шара}} = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R - \text{емкость уединенного проводящего шара}.$$

28. Конденсаторы

Опред. Конденсаторы – система двух близко расположенных, обычно симметричных, тел с зарядами q и $-q$.

1) Плоский конденсатор – система двух параллельных заряженных плоскостей.

а) Найдем емкость плоского конденсатора с расстоянием между пластинами d , площадью пластины S , заполненного диэлектриком с проницаемостью ϵ .

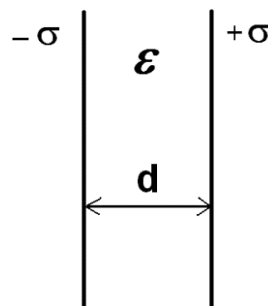
$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}.$$

Для вычисления распределения потенциала воспользуемся выражениями, полученными в § 13 для двух заряженных плоскостей. Занулим потенциал в центре между плоскостями и учтем наличие диэлектрика между ними:

$$\varphi_1 = \frac{\sigma \cdot d}{2\epsilon_0 \epsilon}; \varphi_2 = \frac{-\sigma \cdot d}{2\epsilon_0 \epsilon} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\sigma \cdot d}{\epsilon_0 \epsilon} \\ q &= \sigma \cdot S \end{aligned} \right\}$$

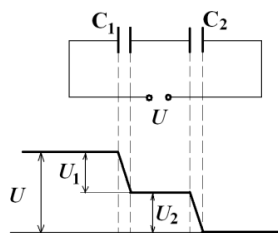
$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} - \text{емкость плоского конденсатора.}$$



б) Последовательное соединение конденсаторов.

$$\left\{ \begin{aligned} U &= U_1 + U_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = \frac{q}{C}; \\ q_1 &= q_2 = q; \end{aligned} \right.$$

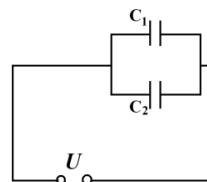
$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} - \text{емкость при последовательном соединении конденсаторов.}$$



в) Параллельное соединение конденсаторов.

$$\left\{ \begin{aligned} U_1 &= U_2 = \frac{q}{C} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}; \\ q &= q_1 + q_2; \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow C = C_1 + C_2 - \text{емкость при параллельном соединении конденсаторов.}$$

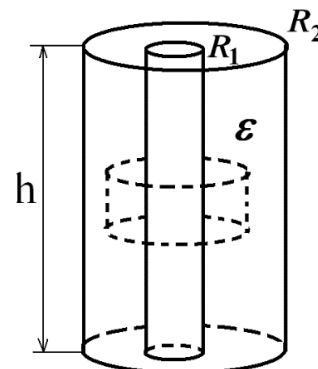


2) Цилиндрический конденсатор – система двух коаксиальных цилиндрических слоев с зарядами q и $-q$.

Найдем емкость цилиндрического конденсатора. Для этого сообщим обкладкам заряд $+q$ и $-q$ и вычислим по теореме Гаусса поле \vec{D} между обкладками, считая, что $h \gg R_2 > R_1$:

$$\sigma_1 = \frac{q}{2\pi R_1 h};$$

$$D_i \cdot 2\pi r \cdot h_1 = \frac{q}{2\pi R_1 h} \cdot 2\pi R_1 h_1;$$



$$D = \frac{q}{2\pi r \cdot h} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon \cdot r \cdot h} \Rightarrow U = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon \cdot h} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow$$

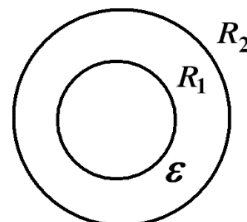
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon \cdot h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} - \text{емкость цилиндрического конденсатора.}$$

3) Сферический конденсатор – система двух концентрических сферических слоев с зарядами $+q$ и $-q$.

По теореме Гаусса находим поле \vec{D} :

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot r^2} \Rightarrow U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} \Rightarrow -$$

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1} - \text{емкость сферического конденсатора.}$$



29. Энергия электростатического поля

1. Энергия системы зарядов.

$$W = \begin{cases} \sum_{i=1}^n q_i \cdot \varphi_i \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{i=1, i \neq k}^n \frac{q_i \cdot q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \\ \frac{1}{2} \int_Q \varphi \cdot dq = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}) \cdot dV = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \cdot \text{div} \vec{D} \cdot dV = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\text{div}(\varphi \vec{D}) - \vec{D} \nabla \varphi] dV \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{i=1, i \neq k}^n \frac{q_i \cdot q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \\ \frac{1}{2} \oint_{s, r \rightarrow \infty} \varphi \cdot \vec{D} \cdot d\vec{s} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV \end{cases}, \text{ так как } \rho = \text{div} \vec{D}, \varphi \cdot \text{div} \vec{D} = \text{div}(\varphi \cdot \vec{D}) - \vec{D} \cdot \nabla \varphi.$$

$$\frac{1}{2} \oint_{s, r \rightarrow \infty} \varphi \cdot \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0, \text{ так как } D \sim \frac{1}{r^2}, \varphi \sim \frac{1}{r}, ds \sim r \cdot dr \Rightarrow \varphi \cdot \vec{D} \cdot d\vec{s} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{V, \text{ где } \exists \rho} \rho \varphi \cdot dV = \int_{-\infty, \text{ по всему пр-ву}}^{+\infty} \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \cdot dV = \int_{-\infty}^{+\infty} w \cdot dV - \text{энергия системы зарядов.}$$

Опред. $w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}$ – плотность энергии электростатического поля.



Вопрос. $D \sim \frac{1}{r^2}, E \sim \frac{1}{r^2}, dV \sim r^2 \cdot dr \Rightarrow$ казалось бы, зависимость от r

подынтегральной функции $\vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV$ точно такая же, как $\varphi \cdot \vec{D} \cdot d\vec{s}$. Почему же, занулив первый интеграл, мы не зануляем второй?

Ответ. Первый интеграл берется по бесконечно удаленной от системы зарядов поверхности, где и поле, и потенциал равны 0, а второй – по всему пространству от $-\infty$ до $+\infty$, в том числе и по областям, где поле данной системы отлично от 0.

$w = \frac{\vec{E}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{P}}{2}$, здесь первое слагаемое – энергия электростатического поля в вакууме, а второе – энергия поляризованного диэлектрика.



Вопрос. Что является носителем энергии: заряды или поле?

Ответ. В рамках электростатики ответить нельзя, из электродинамики следует, что носителем энергии является поле.

2. Энергия заряженного проводника.

$W_{np} = \frac{1}{2} \oint_S \varphi \cdot \sigma \cdot dS = \frac{\varphi \cdot q}{2}$, так как заряды находятся только на поверхности и $\varphi = const$.

$$W_{np} = \frac{\varphi \cdot q}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

а) Энергия заряженного металлического шара:

$$W = \int_0^\infty \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \cdot 4\pi r^2 \cdot dr = \int_R^\infty \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2 \cdot 4\pi r^2}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon \cdot r^4 \cdot 4\pi} \cdot dr = - \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \frac{1}{r} \Big|_R^\infty = \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon R};$$

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2}; \quad D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Другой способ расчета энергии:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R} \Rightarrow W = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon R} \quad \text{или} \quad W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2 \cdot 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R} = \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon R}.$$

$$W_{земли} = \frac{(6 \cdot 10^5)^2 \cdot 9 \cdot 10^9}{6,4 \cdot 10^6 \cdot 2} \cong 3 \cdot 10^{14} \text{ Дж} - \text{энергия электростатического поля Земли.}$$

б) Энергия шара, заряд которого равномерно распределен по его объему:

$$W_i = \frac{1}{5} \cdot \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0 R} \quad W_e = \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0 R} \quad W_\Sigma = \frac{6}{5} W_i \leftarrow \text{это может быть косвенным свидетельством того,}$$

что носителем энергии является поле, а не заряд, так как в 2а) и 2б) случаях заряд один и тот же.

3. Энергия заряженного конденсатора.

1) Энергия различных видов конденсаторов.

а) Плоский конденсатор.

Плотность энергии плоского конденсатора:

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}, \text{ так как} & D = \sigma; \\ & E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}; \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0^2 \varepsilon^2 U^2}{\varepsilon\varepsilon_0 d^2}, \text{ так как} & U = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0\varepsilon}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$W = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U^2 S}{d} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2 d}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \end{cases} - \text{энергия плоского конденсатора.}$$

б) Цилиндрический конденсатор.

Плотность энергии цилиндрического конденсатора:

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1^2 \sigma_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r^2} \quad (\leftarrow \text{зависит от } r);$$

$$D = \frac{2\pi R_1 h \sigma_1}{2\pi r h} = \frac{R_1 \sigma_1}{r} \Rightarrow E = \frac{R_1 \sigma_1}{r \varepsilon \varepsilon_0};$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1^2 \sigma_1^2 h}{\varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi R_1^2 \sigma_1^2 h}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{2\pi \cdot h}{2\pi \cdot h} = \frac{q^2}{4\pi h \varepsilon_0 \varepsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{q^2}{2C}.$$

$$W = \frac{q^2}{4\pi h \varepsilon_0 \varepsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{q^2}{2C} - \text{энергия цилиндрического конденсатора.}$$



в) Сферический конденсатор.

Плотность энергии сферического конденсатора:

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2 R_1^4}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r^4}.$$

$$D = \frac{4\pi \sigma_1 R_1^2}{4\pi r^2}; E = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r^2};$$

$$W = \int w dV = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \cdot 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr \cdot \frac{4\pi}{4\pi} = \frac{1}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \frac{q^2 (R_2 - R_1)}{R_1 R_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}.$$

$$W = \frac{1}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \frac{q^2 (R_2 - R_1)}{R_1 R_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} - \text{энергия сферического конденсатора.}$$

2) Влияние диэлектрика на плотность энергии заряженного конденсатора.

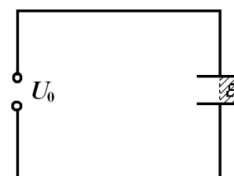
Рассмотрим 4 различных варианта половинного заполнения плоского конденсатора диэлектриком.

а) Напряжение на пластинах конденсатора $U_0 = const$.

$$\text{Из граничных условий: } E_{1r} = E_{2r} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon} = E_1 = E_2 = E_0 = \frac{U_0}{d}.$$

То есть при заполнении половины конденсатора диэлектриком на пластины должен натечь дополнительный заряд.

$$D_1 = \frac{\varepsilon_0 U_0}{d}; D_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U_0}{d}.$$



Интересно сравнить средние плотности энергии конденсатора до и после его заполнения диэлектриком:

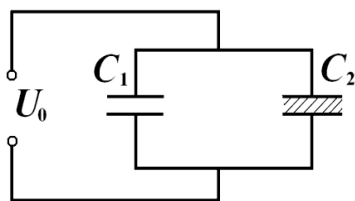
$$\frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2d^2} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U_0^2}{2d^2} \right] = \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2d^2} \cdot \frac{1 + \varepsilon}{2} = w_0 \cdot \frac{1 + \varepsilon}{2},$$

где $\frac{1 + \varepsilon}{2} > 1$, то есть средняя плотность энергии в конденсаторе возрастает за счет работы источника по сообщению дополнительного заряда пластинам конденсатора.

$$q_1 = \varepsilon_0 E \cdot \frac{S}{2}; q_2 = \varepsilon_0 \varepsilon E \cdot \frac{S}{2} \Rightarrow q_1 + q_2 = \varepsilon_0 E \frac{S}{2} \cdot 2 \frac{\varepsilon + 1}{2}, \text{ где } \varepsilon_0 E \frac{S}{2} \cdot 2 = q_0.$$

Из полученного соотношения следует, что емкость заполненного таким образом конденсатора так же, как и энергия, возрастает в $\frac{\varepsilon + 1}{2}$ раз.

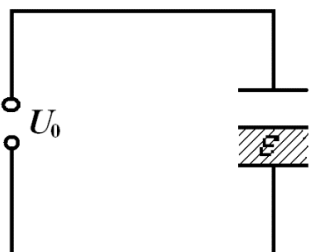
Эквивалентная схема соответствует параллельному соединению конденсаторов с половинной площадью пластин:



$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0}{d} \cdot \frac{S}{2} (\epsilon + 1) = C_0 \cdot \frac{\epsilon + 1}{2}, \quad \text{то есть емкость}$$

действительно возрастает в $\frac{\epsilon + 1}{2}$ раз.

б) Напряжение на пластинах конденсатора $U_0 = const$.



В данном случае из граничных условий:

$$D_1 = D_2 = \epsilon_0 \epsilon E_2 = \epsilon_0 E_1 \Rightarrow E_1 = \epsilon E_2;$$

$$U_0 = U_1 + U_2 = \frac{E_1 d}{2} + \frac{E_2 d}{2} = \frac{E_2 (1 + \epsilon) d}{2} \Rightarrow$$

$$E_2 = \frac{2U_0}{(\epsilon + 1)d}; \quad E_1 = \frac{2\epsilon}{\epsilon + 1} \cdot \frac{U_0}{d}.$$

Сравним среднюю плотность энергии до и после заполнения половины конденсатора диэлектриком:

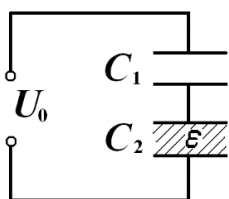
$$\frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{2U_0}{(\epsilon + 1)d} \right]^2 \cdot \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} + \left[\frac{2\epsilon}{(\epsilon + 1)d} U_0 \right]^2 \cdot \frac{\epsilon_0}{2} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 U_0^2}{d^2} \cdot \left\{ \frac{4\epsilon}{2(\epsilon + 1)^2} + \frac{4\epsilon^2}{2(\epsilon + 1)^2} \right\} =$$

$$= w_0 \cdot \frac{2\epsilon(\epsilon + 1)}{(\epsilon + 1)^2} = w_0 \cdot \frac{2\epsilon}{\epsilon + 1}, \quad \text{где } \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 U_0^2}{d^2} = w_0.$$

$$\frac{2\epsilon}{\epsilon + 1} > 1, \quad \text{поэтому } \frac{w_1 + w_2}{2} > w_0, \quad \text{то есть и в этом случае энергия возрастает за счет работы}$$

источника по переносу дополнительного заряда на обкладки.

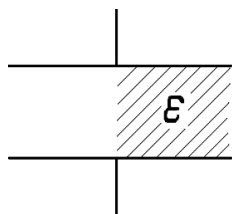
Эквивалентная схема:



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{2\epsilon_0 S} + \frac{d}{2\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{d}{\epsilon_0 S} \cdot \frac{\epsilon + 1}{2\epsilon} \Rightarrow$$

$$C = C_0 \frac{2\epsilon}{\epsilon + 1}, \quad \text{то есть емкость возрастает в } \frac{2\epsilon}{\epsilon + 1} \text{ раз.}$$

в) Заряд на пластинах конденсатора $q_0 = const$.



Так как C зависит только от геометрии и ϵ и не зависит от $U, q \Rightarrow C = C_0 \frac{\epsilon + 1}{2}$, как и в случае а).

$W = \frac{q^2}{2C}$, так как C возрастает, а $q_0 = const$, то W убывает,

и, следовательно, $\frac{w_1 + w_2}{2} < w_0$.

Проверим это.

$$\begin{cases} E_1 = E_2 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0 \epsilon} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\sigma_2}{\epsilon} = \frac{2\sigma_0}{1 + \epsilon}; \\ \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_0 \end{cases}$$



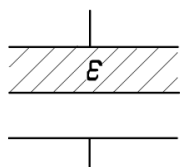
$$U = \frac{2\sigma_0 d}{\varepsilon_0(\varepsilon+1)} = \frac{2}{\varepsilon+1} U_0, \text{ то есть напряжение на конденсаторе уменьшается.}$$

$$E_1 = \frac{2\sigma_0}{\varepsilon_0(\varepsilon+1)} = E_2 \Rightarrow D_1 = \frac{2\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_0(\varepsilon+1)} = \frac{2\sigma_0}{(\varepsilon+1)}; D_2 = \frac{2\varepsilon\sigma_0}{\varepsilon+1}.$$

$$\frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+\varepsilon} \cdot \frac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0} = \frac{2}{\varepsilon+1} \cdot w_0, \text{ то есть энергия уменьшается за счет работы по поляризации}$$

диэлектрика, а в случаях а) и б) эту работу брал на себя источник. При этом в данном случае заряд q_0 перераспределяется по пластинам неравномерно, но так, чтобы $E_1 = E_2$, при этом в присутствии диэлектрика плотность заряда больше.

г) Заряд на пластинах конденсатора $q_0 = const$.



$$C = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1} C_0; E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}; E_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon}; D_1 = D_2 = \sigma_0 \Rightarrow$$

$$\frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \right] = w_0 \cdot \frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon},$$

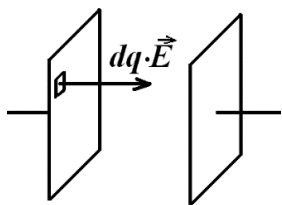
где $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0} = w_0$, $\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon} < 1$ и, следовательно, средняя плотность энергии убывает вследствие поляризации диэлектрика.

3) Силы притяжения между обкладками плоского конденсатора.

Выясним, чему равны силы притяжения между обкладками плоского конденсатора, заполненного диэлектриком.

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} \text{ – поле от одной обкладки.}$$

$$\vec{F} = \int_q dq \vec{E} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} \vec{e}_x \text{ – сила, действующая на вторую обкладку со стороны первой.}$$

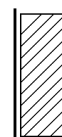


Если между пластинами конденсатора находится жидкий диэлектрик, то появляются силы электрострикции – механические силы внутри диэлектрика и на поверхности раздела диэлектрика и пластин, связанные с деформацией диэлектрика в электрическом поле. Жидкий диэлектрик стремится втянуться в поле и раздвинуть пластины \Rightarrow возникает дополнительное давление внутри конденсатора, которое ослабляет силу электростатического притяжения в ε раз.

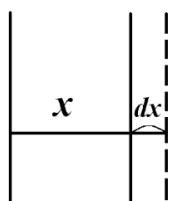
Если между пластинами помещен твердый диэлектрик, то сила взаимодействия

между пластинами соответствует $F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$, так как в этом случае дополнительного

внутреннего давления со стороны диэлектрика пластины конденсатора не испытывают.



Этот же вывод получается из энергетических соображений. Найдем работу по перемещению одной из пластин вдоль оси x :



$$A = \int \vec{F} d\vec{x} = W_1 - W_2, \text{ так как } \vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x} \vec{e}_x.$$

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}; C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{x}.$$

Рассмотрим случай $q = const$ (так как при $U = const$ возникает дополнительная работа источника). В этом случае следует пользоваться выражением для энергии:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 \cdot x}{2\varepsilon_0 \varepsilon S};$$

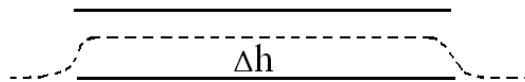
$$-\frac{\partial W}{\partial x} \bar{e}_x = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon \cdot S} \bar{e}_x = -\frac{\sigma^2 S \cdot \bar{e}_x}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \bar{F}.$$

Тогда каждая пластина испытывает в присутствии диэлектрика дополнительное давление:

$$\Delta p = \frac{\Delta F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

Если горизонтально расположенный заряженный конденсатор опустить в жидкий диэлектрик, то диэлектрик будет втягиваться в конденсатор. С микроскопической точки зрения диэлектрик втягивается в заряженный конденсатор, так как у краев пластин поле меньше, чем внутри. \Rightarrow Дипольный момент диэлектрика втягивается в область сильного поля, и это происходит до тех пор, пока электростатические силы не уравновешиваются весом дополнительного столба жидкости у края пластин, а энергетически – пока выигрыш в электростатической энергии не будет скомпенсирован увеличением потенциальной энергии. При горизонтальном расположении конденсатора электростатические силы уравновешиваются весом столба диэлектрика высотой Δh :

$$\Delta h \cdot \rho \cdot g = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \Rightarrow \Delta h = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 \rho \cdot g} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

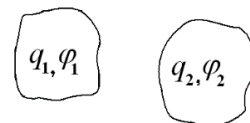


4. Энергия системы заряженных проводников.

1) Рассмотрим 2 заряженных проводника и их влияние друг на друга. В отсутствие второго проводника заряд по первому проводнику распределяется иначе, чем в его присутствии.

$$q_1 = C_1 \varphi_1 + C_{12} \varphi_2;$$

$$q_2 = C_2 \varphi_2 + C_{21} \varphi_1.$$



Коэффициенты C_{12} , C_{21} связывают заряд на первом проводнике с потенциалом второго проводника и соответственно заряд на втором проводнике с потенциалом первого. В силу равноправия проводников $C_{12} = C_{21}$.

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum q_i \cdot \varphi_i = \frac{1}{2} \cdot C_{11} \varphi_1^2 + C_{12} \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{2} C_{22} \varphi_2^2,$$

где первое слагаемое – энергия первого проводника, второе – энергия взаимодействия первого проводника со вторым, третье – энергия второго проводника.



2) Если проводников три, то:

$$q_1 = C_{11} \varphi_1 + C_{12} \varphi_2 + C_{13} \varphi_3;$$

$$q_2 = C_{21} \varphi_1 + \dots;$$

$$W = C_{11} \varphi_1^2 + C_{22} \varphi_2^2 + C_{33} \varphi_3^2 + C_{12} \varphi_1 \varphi_2 + C_{13} \varphi_1 \varphi_3 + C_{23} \varphi_2 \varphi_3.$$

3) Если проводников n , то:

$$q_i = \sum_{k=1}^n C_{ik} \varphi_k;$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_{ik} \varphi_i \varphi_k \Rightarrow \text{принцип суперпозиции для энергии не работает, так как энергия}$$

заклучена в поле.

II. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

1. Сила и плотность тока

Опред. Ток – направленное движение зарядов (заряженных частиц). Заряженные частицы, которые могут свободно перемещаться, называются носителями тока. За направление тока условились принимать направление движения положительных частиц.

Если напряженность электрического поля $\vec{E} = 0$, то в металле носители тока принимают участие в хаотическом тепловом движении со скоростью:

$$\langle \vec{v} \rangle_{\text{тепл.дв.}} = 0; \langle |\vec{v}| \rangle_{\text{тепл.дв.}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m}} \cong 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В действительности эта скорость на порядок больше, так как для электронов надо пользоваться не классическим распределением Максвелла, а квантовой статистикой Ферми – Дирака.

При $\vec{E} \neq 0$ возникает направленное движение электронов со скоростью:

$\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \langle \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} \rangle$ – скорость упорядоченного движения электрических зарядов.

Плотность тока $\vec{j} = \rho \vec{u}$, где ρ – плотность свободных зарядов.

Медь Cu – металл, хороший проводник с $\mu_{\text{Cu}} = 63 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$. Если предположить, что на каждый атом приходится 1 свободный электрон, то число свободных электронов в 1 г меди $n'_{\text{Cu}} = \frac{N_A}{\mu_{\text{Cu}}} \cong 10^{22} \frac{1}{\text{г}}$. 8,9 г меди занимают 1 см³ $\Rightarrow n_{\text{Cu,мет}} = 10^{29} \frac{1}{\text{м}^3}$ – концентрация электронов в

металле, а плотность свободного заряда $\rho = ne = 10^{10} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$.

Опред. Количественной характеристикой электрического тока, называемой силой тока, является величина заряда, переносимого через (сквозь) рассматриваемую поверхность в единицу времени:



$$I = \frac{dq}{dt} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad (\text{поток плотности тока через поверхность } S).$$



В максимуме молнии сила тока $\sim 10^4 \text{ А}$, учитывая, что за одну вспышку молнии на Землю переносится заряд $\sim (20 \div 30) \text{ Кл}$, можно оценить время сбегания заряда по проводящему шнуру $\tau_{\text{молнии}} = (2 \div 3) \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Вычислим убыль заряда в произвольном объеме V :

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot dV = -\frac{dq}{dt} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \int_V \text{div } \vec{j} \cdot dV \Rightarrow \int_V (\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) \cdot dV = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Уравнение непрерывности: } \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

линии плотности тока \vec{j} начинаются и кончаются в местах изменения плотности заряда во времени.

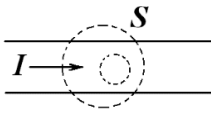
$$\text{Закон сохранения заряда: } \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = I_0 = -\frac{dq}{dt} \quad \text{– ток через замкнутую поверхность равен}$$

убыли заряда внутри неё.

Эти 2 уравнения входят в неявном виде в систему уравнений Максвелла.

2. Постоянный ток. Электродвижущая сила

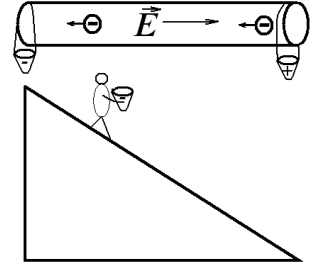
Если ток стационарный, то есть не зависит от времени, то суммарный ток, протекающий через любую замкнутую поверхность, охватывающую или пересекающую проводник, равен 0.



$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0 = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow -\frac{d}{dt} \int \rho \cdot dV = \int \operatorname{div} \vec{j} \cdot dV \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow$$

Линии стационарного (постоянного) тока замкнуты. Плотность заряда проводника, несущего постоянный ток, постоянна во времени.

Если поместить проводник в однородное электрическое поле \vec{E} , как показано на рисунке, то электроны придут в движение и соберутся на левом конце провода в таком количестве, чтобы создать в проводнике $\vec{E}_\Sigma = 0$, после чего ток прекратится. Если хотим поддерживать ток, то надо «собирать» избыточные электроны и переносить их на другой конец, так как в силу нулевого поля внутри провода сами электроны на положительно заряженный конец не побегут. Таким образом, для поддержания тока должна существовать сторонняя неэлектрическая сила \vec{F}^* .



Сторонние силы – силы неэлектрического происхождения, обеспечивающие движение положительных носителей на участках увеличения потенциала.

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{q} \text{ – напряженность поля сторонних сил.}$$

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}^* \cdot d\vec{l} \text{ – работа сторонних сил над единичным положительным зарядом называется}$$

электродвижущей силой ЭДС.

$$[\varepsilon] = \frac{B}{m} \cdot m = B.$$

ЭДС, действующая в замкнутой цепи, есть циркуляция вектора напряженности поля сторонней силы:

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}^* \cdot d\vec{l}.$$

В произвольной точке цепи на заряд q действует суммарная сила:

$$\vec{F}_\Sigma = q \cdot (\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Работа этой силы на участке 12:

$$A_{12} = \int_1^2 d\vec{l} \cdot q \cdot (\vec{E} + \vec{E}^*) = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}).$$

Опред. $\varepsilon_{12} + \varphi_1 - \varphi_2 = U_{12}$ – падение напряжения или напряжение на участке 1–2.

Если $\varepsilon_{12} = 0$, то участок цепи однородный (участок цепи, на котором не действует ЭДС, называется однородным).

Для однородного участка цепи напряжение равно разности потенциалов на его концах:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2.$$



3. Закон Ома. Сопротивление проводников

1. Закон Ома

В 1826 году школьный учитель Г.С. Ом опубликовал свои экспериментальные результаты по пропусканию тока через проволоки разной толщины и длины при разных температурах. Будучи сыном слесаря и талантливым исследователем, Ом самостоятельно изготавливал нужные ему проволоки и поочередно варьировал каждый фактор. В результате им были сделаны следующие выводы:

1) Сила тока, текущего по однородному участку металлического проводника, пропорциональна падению напряжения на этом участке:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} \text{ – для однородного участка.}$$

2) Коэффициент пропорциональности между током и напряжением ($U = RI$) называется сопротивлением проводника R .

Сопротивление проводника зависит от его формы, размеров и материала $R = f(\text{форма, размеры, материал})$.

Сопротивление однородного цилиндрического проводника прямо пропорционально его длине и обратно пропорционально площади его поперечного сечения $R = \rho \frac{l}{S}$.

ρ – удельное сопротивление проводника – характеристика материала, из которого изготовлен проводник.

За единицу измерения сопротивления в системе СИ принят 1 Ом – сопротивление проводника, по которому при напряжении 1 В течет ток 1 А.

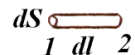
Но это было потом, а когда Ом опубликовал свои результаты, они были встречены насмешками соотечественников. Вердикт министра просвещения Германии был таков: «Физик, проповедующий подобную ересь, не достоин преподавать естественные науки». Ом вынужден был уйти с работы и жил в нищете. Лишь спустя 22 года после того, как его работа была высоко оценена Французской академией наук, Ом получил должность профессора в Мюнхенском университете. Впоследствии открытому им закону и единице измерения сопротивления было присвоено его имя.

2. Дифференциальная форма закона Ома для однородного участка цепи.

$$dU_{12} = Edl;$$

$$j \cdot dS \text{ – ток через сечение } dS;$$

$$jdS \cdot \rho \frac{dl}{dS} = Edl \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{E} = \rho \cdot \bar{j} \\ \bar{j} = \sigma \cdot \bar{E} \end{array} \right\} \text{ – дифференциальная форма}$$



закона Ома для однородного участка цепи.

Здесь ρ – удельное сопротивление, σ – удельная проводимость проводника.

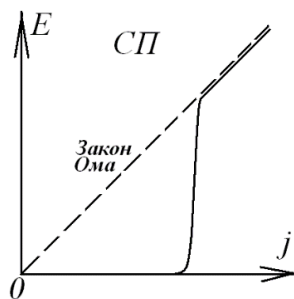


3. Удельное сопротивление различных материалов.

По проводящим свойствам (σ) твердые материалы делятся следующим образом:

$$\text{Изоляторы} \xrightarrow{10^{-8}} \text{полупроводники} \xrightarrow{10^6} \text{металлы} \xrightarrow{10^8} \text{гиперпроводники} \xrightarrow{10^{10}} \text{сверхпроводники} \xrightarrow{\sigma; \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}}$$

Не следует думать, что открытый для проводников закон Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ представляет собой универсальную для всех материалов и единственно возможную связь \vec{j} и \vec{E} .



На рисунке представлена вольт-амперная характеристика (ВАХ) сверхпроводника (СП). Закон Ома начинает работать после перехода проводника из СП в нормальное (проводящее) состояние.

Можно оценить скорость направленного движения носителей тока:

$$\langle u \rangle = \begin{cases} 1 \frac{M}{c} & \text{в СП} \\ 1 \frac{mM}{c} & \text{в мет.} \end{cases}, \text{ то есть } \langle u \rangle \ll \langle v \rangle, \text{ где } \langle u \rangle - \text{средний модуль скорости направленного}$$

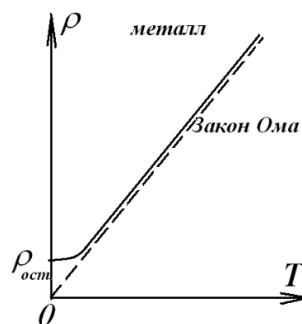
движения носителей тока в металлах и в сверхпроводниках.

В металлах сопротивление обусловлено рассеиванием электронов e на:

- фононах – колебаниях решетки;
- примесях;
- атомах (ионах решетки).

При возрастании температуры удельное сопротивление металлов увеличивается, соответственно их проводимость уменьшается.

В СП носителями тока являются электронные пары, которые возникают в результате электрон-фононного взаимодействия, и реализуется принципиально другой (чем в проводниках) механизм протекания тока. Его основной принцип: «Кто нам мешает, тот нам поможет». Этот «кто» – фононы или колебания решетки: пролетая сквозь решетку положительных ионов, электрон заставляет ионы смещаться во след, а смещенный ион увлекает за собой следующий электрон, связывая таким образом электроны в пару. Очевидно, что подобная модель проводимости может быть реализована при минимальном уровне хаотического теплового движения, поэтому низкотемпературная СП наблюдается при температурах T порядка нескольких К (температурах жидкого гелия 4,2 К).



Вот какой токонесящей способностью (плотностью тока j_{\max}) обладают различные материалы:

СП в поле $E = 1 \frac{mKB}{M} = 10^{-6} \frac{B}{M}$ имеет критическую (максимальную) $j_c = 10^9 \div 10^{10} \frac{A}{M^2}$;

гиперпроводник ГП $j_{\max} = 10^8 \div 10^9 \frac{A}{M^2}$;

хороший проводник Си $j_{\max} \cong 10^6 \div 10^7 \frac{A}{M^2}$.

Вопрос. Со СП понятно: ограничение возникает потому, что слишком большая плотность тока может разрушить СП состояние. Но откуда берутся j_{\max} для ГП и меди, ведь их ВАХ в соответствии с законом Ома линейные и не имеют экстремумов?

Ответ. Все дело в том, что кроме закона Ома есть закон Джоуля – Ленца.



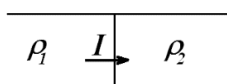
4. Заряд внутри однородного проводника с постоянным током

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 = \oint_S \sigma \vec{E} d\vec{S} \quad \text{для однородног проводника} = \sigma \oint_S \vec{E} d\vec{S} \Rightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \rho dV = 0, \text{ то есть избыток заряда}$$

внутри однородного проводника с постоянным током равен нулю.

Следовательно, избыток заряда может появиться только на поверхности однородного проводника в местах его соприкосновения с другими проводниками или в местах, где проводник имеет неоднородности.

Пример.



$$\rho_2 > \rho_1 \quad \frac{E_1}{\rho_1} = j_1 = j_2 = \frac{E_2}{\rho_2} \Rightarrow E_2 > E_1 \Rightarrow \text{на границе раздела}$$

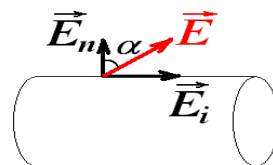
должен быть положительный заряд. На микроскопическом языке это можно понять так: e бегут справа налево, в среде с меньшим удельным сопротивлением ρ_1 им бежать легче и они убегают, а положительный заряд остается на границе раздела. Если ток потечет справа налево, то граница будет заряжена отрицательно.

5. Электрическое поле проводника с током

Если токи стационарные, то распределение электрического заряда не изменяется во времени, хотя и происходит движение заряда: в любой точке на место уходящих зарядов “прибегают” новые. Эти движущиеся заряды создают такое же кулоновское поле, как и неподвижные заряды той же конфигурации \Rightarrow электрическое поле стационарных токов – потенциальное. Разница в том, что в электростатике \vec{E}_i неподвижных зарядов внутри проводников равно нулю, а у стационарных токов $\vec{E}_i \neq 0 \Rightarrow$ у поверхности проводника с постоянным током поле направлено под углом к поверхности, а не перпендикулярно к ней, как в электростатике.

$$\begin{cases} E_n = \frac{\sigma_{пов}}{\epsilon_0 \epsilon} - \text{избыточный поверхностный заряд} \\ E_\tau = E_i \end{cases}$$

При $j = 0 \quad \alpha = 0, \vec{E} \perp$ поверхности проводника.



6. Закон Ома для неоднородного участка цепи

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*) - \text{дифференциальная форма закона Ома для неоднородного участка.}$$

Пусть ток течет вдоль тонких проводов или трубки тока.

Трубка тока удовлетворяет следующим условиям.

- В любом сечении, перпендикулярном трубке, $\vec{j}, \sigma, \vec{E}, \vec{E}^* = const$.
- $\vec{j}, \vec{E}, \vec{E}^*$ – направлены по касательной к трубке тока.
- Заряды не пересекают боковую поверхность трубки.

При этом поперечное сечение трубки тока может меняться.

Получим интегральную форму закона Ома для неоднородного участка цепи

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{E}^* \Big| d\vec{l}$$

Проинтегрируем это равенство по длине участка цепи от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\sigma} = \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}^*) d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} = \int_1^2 \frac{\rho \cdot \vec{j}}{S} \cdot S d\vec{l} = I \int_1^2 \frac{\rho dl}{S} = IR_{12} \Rightarrow$$

$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$ – интегральная форма закона Ома для неоднородного участка цепи.

I и ε – алгебраические величины:

$I > 0$ если течет от 1 к 2;

$I < 0$ если течет от 2 к 1;

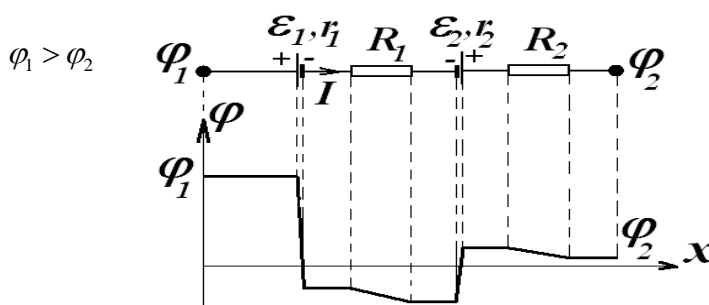
$\varepsilon_{12} > 0$, если она перемещает положительные носители в выбранном направлении;

$\varepsilon_{12} < 0$, если она препятствует движению положительных носителей в выбранном направлении.

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R}$$

При $\varphi_1 = \varphi_2$ имеем $I = \frac{\varepsilon}{R}$ – закон Ома для замкнутой цепи.

Пример.

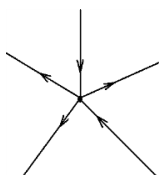


7. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа

1. Правила Кирхгофа.

Правило I: для любого узла алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$



$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 = \sum_{k=1}^n I_k.$$

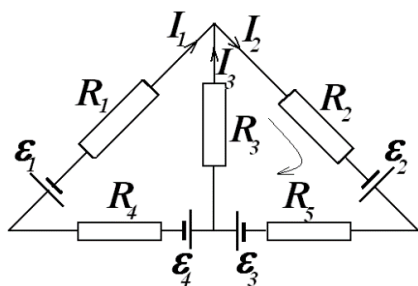
для пост. тока

Если узлов N , то имеем $(N - 1)$ уравнений.



Правило II: $\sum I_k R_k = \sum \varepsilon_n$ для любого замкнутого контура.

2. Порядок реальных действий:



1) Обозначаются токи на всех участках цепи и для $(N - 1)$

узла записывается I правило Кирхгофа: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$.

2) задается направление обхода контуров.

3) Для каждого выбранного контура записывается II правило Кирхгофа:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_2 R_5 + I_1 R_4 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4;$$

$$I_2 R_2 + I_2 R_5 + I_3 R_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

ε приписывают знак "+", если направление обхода контура совпадает с движением от "-" к "+" в пределах источника.

4) Значения токов находятся при решении полученной системы уравнений.

8. Закон Джоуля – Ленца

Рассмотрим произвольный участок цепи постоянного тока, на концах которого напряжение U .

За время t через любое сечение протекает заряд $I \cdot t = q$, то есть такой заряд переносится с одного конца на другой.

Вопрос. Кем переносится?

Ответ. Силой $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{E}^*)$.

Вопрос. Какую работу совершает при этом данная сила?

Ответ. $A = q \int_1^2 (\vec{E} + \vec{E}^*) d\vec{l} = I \cdot t \cdot U \Rightarrow$

\Rightarrow мощность $P = \frac{A}{t} = IU \Rightarrow$

$P = I \cdot U = I(\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12})$ – мощность тока на неоднородном участке цепи.

Она расходуется на нагрев участка, химические реакции, возможно, на перемещение участка в пространстве.

Удельная мощность – отношение мощности, выделившейся в объеме ΔV , к этому объему:

$$P_{уд} = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Если проводник неподвижный и участок цепи однородный, то мощность является тепловой, при этом за время t в проводнике выделяется теплота

$$Q = t \cdot P = I \cdot U \cdot t = I^2 R t.$$

Для переменного тока

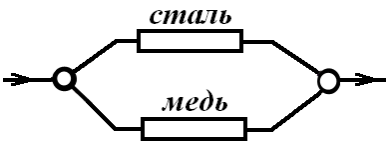
$$Q = \int_0^t R I^2 dt.$$

$$dQ = R I^2 dt = \frac{\rho \cdot dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho \cdot j^2 dV dt;$$

$P_{уд. тепл.} = \rho \cdot j^2$ – удельная тепловая мощность тока.

$P_{уд.} = \rho \cdot j^2 = \sigma \cdot E^2$ – закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

Пример.

а)  $\rho_{Cu} < \rho_{cm} \Rightarrow R_{Cu} < R_{cm} \Rightarrow P_{Cu} = \frac{U^2}{R_{Cu}} > P_{cm} = \frac{U^2}{R_{cm}}.$

$$P_{уд. Cu} = \frac{E^2}{\rho_{Cu}} > P_{уд. cm} = \frac{E^2}{\rho_{cm}}.$$

б)  $P_{уд. Cu} = j^2 \cdot \rho_{Cu} < P_{уд. cm} = j^2 \cdot \rho_{cm}.$



III. МАГНИТОСТАТИКА

1. Принцип построения главы «Магнитостатика»

Принцип построения главы «Магнитостатика» идентичен принципу построения электростатики.

Сравнительная таблица

	Электростатика	Магнитостатика
1	Закон Кулона – сила взаимодействия двух точечных зарядов	Закон Ампера – сила взаимодействия элементов тока
2	Принцип суперпозиции	
3	Силовая характеристика поля	
	электрического \vec{E}	магнитного \vec{B}
4	Потенциал	
	скалярный $\varphi \rightarrow -\nabla\varphi = \vec{E}$	векторный $\vec{A} \rightarrow \text{rot}\vec{A} = \vec{B}$
5	Использование свойств векторных полей	
	поток, div	циркуляция, rot
	для расчета полей при наличии симметрии используются теоремы	
	Гаусса	Стокса
6	Диполь	
	электрический	магнитный
	эл. поле диполя диполь во внешнем эл. поле	магн. поле магн. диполя магн. диполь во внешн. магн. поле
7	Диэлектрики изотропные	Магнетики
8	Энергия	
	электрического поля	магнитного поля

Можно строить курс магнитостатики, взяв за основу силу Лоренца, а не закон Ампера взаимодействия токов: сила Лоренца + принцип суперпозиции.

Сила Лоренца – сила, действующая на заряд, движущийся в электромагнитном поле:

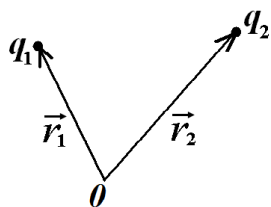
$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Мы будем исходить из закона Ампера, однако оба указанных подхода основаны на экспериментальном опыте и приводят к одному и тому же определению магнитного поля.

Магнитное поле – поле, которое возникает при движении зарядов.

Это современное определение, а древние тоже знали о магнитах, хотя суждения их были весьма своеобразными. Вот что писал в 77 г. н.э. Плиний Старший в «Естественной истории»: «Отличительная особенность магнитов – их пол... Тот сорт магнита, что был найден в Трое, имеет черный цвет и женский пол и, следовательно, лишен притягивающей силы». Следует заметить, что «Естественная история» представляла собой энциклопедию естественных знаний Античности, которая до XVII в. использовалась как источник знаний о природе. Этот пример демонстрирует блестящее продвижение человечества в научном познании материального мира за последние 4 столетия.

2. Сила взаимодействия элементов тока – закон Ампера



Сила взаимодействия элементов тока по форме очень похожа на силу электростатического взаимодействия зарядов, определяемую законом Кулона:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

Различие в форме записи законов Кулона и Ампера связано с тем, что взаимодействующие заряды являются скалярными величинами, а взаимодействующие элементарные токи – величинами векторными.

Пусть 1 и 2 – проводники, несущие ток с плотностями \vec{j}_1 и \vec{j}_2 .

$\vec{j}_1 dV_1$ – элемент трубки тока проводника 1.

$\vec{j}_2 dV_2$ – элемент трубки тока проводника 2.

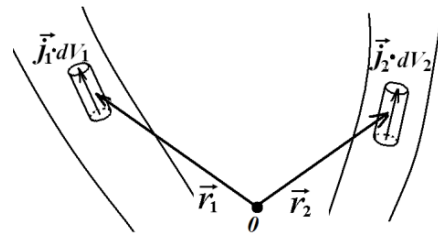
$dV_1 = dS_1 dl_1$, $dV_2 = dS_2 dl_2$.

Опред. Трубка тока:

- трубка, состоящая из линий поля тока \vec{j} ;

- заряды не пересекают боковую поверхность трубки.

Сила, действующая на первый элемент трубки тока со стороны второго:



$$d^2 \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{j}_1 dV_1 [\vec{j}_2 dV_2; (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \text{ – закон Ампера.}$$

Для тонких проводов:

$$dV = S dl \Rightarrow \vec{j} \cdot dV = \vec{j} \cdot S \cdot dl = I \cdot d\vec{l},$$

$$d^2 \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[I_1 \cdot d\vec{l}_1 [I_2 \cdot d\vec{l}_2; (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \text{ – сила, действующая на участок тонкого проводника}$$

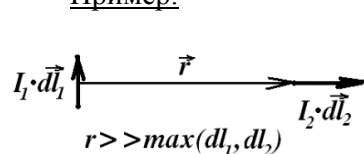
$d\vec{l}_1$ со стороны участка проводника $d\vec{l}_2$.

$$d^2 \vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[I_2 \cdot d\vec{l}_2 [I_1 \cdot d\vec{l}_1; (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \text{ – сила, действующая на участок тонкого проводника}$$

$d\vec{l}_2$ со стороны участка проводника $d\vec{l}_1$.

Замечание. $d^2 \vec{F}_{12} \neq -d^2 \vec{F}_{21}$ – дифференциальная форма не удовлетворяет III закону Ньютона.

Пример.



$$d^2 \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[I_1 \cdot d\vec{l}_1 [I_2 \cdot d\vec{l}_2; -\vec{r}]]}{r^3} = 0;$$

$$d^2 \vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[I_2 \cdot d\vec{l}_2 [I_1 \cdot d\vec{l}_1; r \cdot \vec{e}_r]]}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r^2} d\vec{l}_1 \cdot dl_2 \neq -d^2 \vec{F}_{12}.$$

Закон Ампера удовлетворяет III закону Ньютона после интегрирования по замкнутым контурам 1 и 2, то есть $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ для замкнутых контуров.



3. Принцип суперпозиции

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{[\vec{j}_1 dV_1 [\vec{j}_2 dV_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3},$$

чтобы найти силу, действующую на проводник 1, несущий ток плотности \vec{j}_1 , со стороны проводника с плотностью тока \vec{j}_2 , надо просуммировать все элементарные силы, действующие на каждый элемент проводника 1, то есть провести интегрирование по объему первого и второго проводников или по их длинам в случае тонких проводников:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \cdot \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{[d\vec{l}_1 [d\vec{l}_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

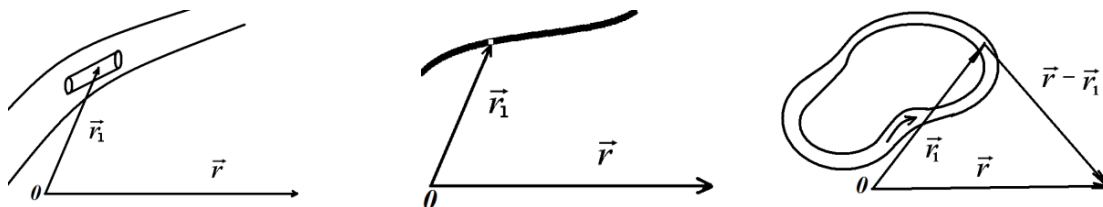
4. Индукция магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа

Взаимодействие токов осуществляется через магнитное поле. Силовой характеристикой магнитного поля в каждой точке является магнитная индукция $\vec{B}(\vec{r})$.

Закон Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{j} dV_1; (\vec{r} - \vec{r}_1)]}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad \text{для тонкого проводника} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[Id\vec{l}_1; (\vec{r} - \vec{r}_1)]}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad \text{– индукция магнитного поля,}$$

создаваемая в данной точке \vec{r} пространства элементом тока $\vec{j} dV_1$ (или в случае тонкого проводника $Id\vec{l}_1$), находящимся в точке \vec{r}_1 .



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{V_1} \frac{[\vec{j} dV_1; (\vec{r} - \vec{r}_1)]}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad \text{для тонк. проводн с пост. током} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{[d\vec{l}_1; (\vec{r} - \vec{r}_1)]}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3},$$

здесь $\vec{B}(\vec{r})$ – индукция магнитного поля, создаваемого в точке \vec{r} проводником с током I и длиной L . Причем направление обхода контура при интегрировании по длине провода должно совпадать с направлением тока в контуре.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_L \frac{I [d\vec{l}; (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{– индукция магнитного поля, создаваемая}$$

замкнутым контуром с постоянным током.



5. Принципы вычисления магнитных полей по закону Био – Савара – Лапласа

1) Бесконечный провод, несущий ток I .

Симметрия задачи – цилиндрическая, поэтому будем использовать в решении цилиндрическую систему координат.

Магнитная индукция, создаваемая элементом тока $Idz \cdot \vec{e}_z$, в произвольной точке с радиусом-вектором $r \cdot \vec{e}_r$:

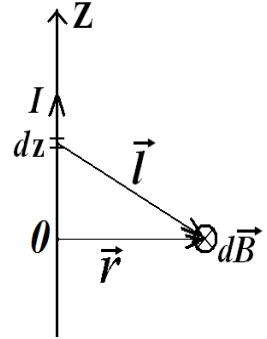
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [dz \cdot \vec{e}_z; \vec{l}]}{l^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{r \cdot dz \cdot \vec{e}_\psi}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Подставим $\vec{l} = -z \cdot \vec{e}_z + r \cdot \vec{e}_r$ и проведем интегрирование по длине провода:

$$\vec{B} = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{r \cdot dz \cdot \vec{e}_\psi}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{r^2} \Big|_0^\infty \vec{e}_\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\psi;$$

$$\int \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}};$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\psi - \text{поле в вакууме от бесконечного прямого тока.}$$



2) Поле отрезка с током.

Воспользуемся выражениями, полученными в пункте 1) этого параграфа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [dz \cdot \vec{e}_z; \vec{l}]}{l^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{r \cdot dz \cdot \vec{e}_\psi}{(z^2 + r^2)^{3/2}};$$

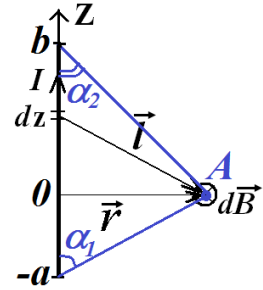
$$\vec{l} = -z \cdot \vec{e}_z + r \cdot \vec{e}_r.$$

Чтобы вычислить поле в произвольной точке A , необходимо проинтегрировать полученное выражение для $d\vec{B}$ по длине отрезка от $-a = -r \cdot \text{ctg} \alpha_1$ до $b = r \cdot \text{ctg} \alpha_2$:

$$\vec{B}_A = \int_{-a}^b \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{r \cdot dz \cdot \vec{e}_\psi}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \cdot \frac{1}{r^2} \Big|_{-a}^b \vec{e}_\psi = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\psi (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

Если устремить $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0$, вернувшись, таким образом, к случаю бесконечного прямого проводника с током, получим, как и следовало ожидать:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\psi.$$

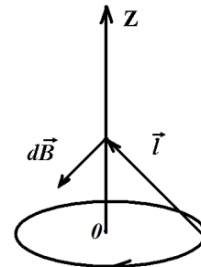


3) Поле на оси кругового тока.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{[-R d\psi \cdot \vec{e}_\psi; \vec{l}]}{l^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\{-R d\psi z \cdot \vec{e}_r - R^2 d\psi \cdot \vec{e}_z\}^*}{l^3}$$

$$\vec{l} = z \cdot \vec{e}_z - R \cdot \vec{e}_r;$$

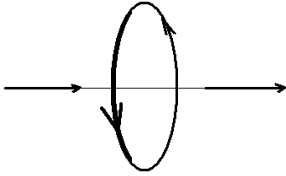
$$^* = -\frac{\mu_0 I}{2 \cdot 2\pi} \cdot \frac{R^2 \cdot d\psi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R \cdot z \cdot d\psi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_r.$$



Заметим, что слагаемое $\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R \cdot z \cdot d\psi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_r$ в результате его интегрирования по углу от 0 до

2π дает 0, так как $\int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\psi = 0$.

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2 \cdot 2\pi} \cdot \frac{2\pi \cdot R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z - \text{поле в вакууме на оси кругового тока.}$$

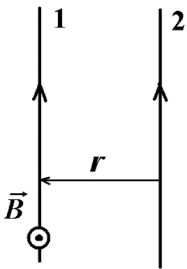


При $z = 0$ $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ – поле в центре кольца с током.

Замечание. Поле на оси витка с током по обе стороны от витка имеет одно и то же направление, определяемое только направлением тока в кольце по правилу правого винта.

6. Единицы измерения

1) Вычислим силу взаимодействия двух бесконечных параллельных проводников с током, приходящуюся на единицу их длины.



Проводник 2 создает в любой точке проводника 1 поле $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} \vec{e}_\psi \Rightarrow$ сила, действующая на единицу длины 1 проводника:

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{L} \int_0^L I \left[dz \cdot \vec{e}_z; \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} \vec{e}_\psi \right] = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot r} \vec{e}_r,$$

то есть *текущие в одном направлении токи притягиваются.*

$$\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot r} \vec{e}_r - \text{сила взаимодействия параллельных токов, приходящаяся}$$

на единицу длины провода.

Если по любому из проводов течет ток 1 А и они находятся на расстоянии 1 м друг от друга, то они будут взаимодействовать с силой: $2 \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} = \frac{\mu_0 (1A)^2}{2\pi \cdot 1m} \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{H \cdot m}{m \cdot A^2} = 10^{-7} \frac{H}{A^2}$.

Единица измерения тока 1 А определяется в системе СИ именно через взаимодействие токов.

В системах СИ и СГСМ 1 А – это сила неизменяющегося тока, который, протекая по каждому из двух параллельных прямолинейных проводников бесконечной длины и ничтожно малого круглого сечения, расположенных на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызывает между ними силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7} H$ на каждый метр длины. \Rightarrow 1 Кл – заряд, который переносится током в 1 А за 1 с.

$$\mu_0 - \text{магнитная постоянная. } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{A^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}.$$

Магнитная индукция \vec{B} в системе СИ измеряется в Теслах (Тл).

$$[B] = \text{Тл};$$

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ Тл}.$$

На 1 м длины прямого провода с током 1 А в однородном магнитном поле, перпендикулярном проводнику, с индукцией $\vec{B} = 1 \text{ Тл}$, действует сила 1 Н.



Установим связь между единицами измерения различных электрических и магнитных величин: $1 \frac{B}{M^2} = 1 \frac{Tл}{c} \Leftarrow rot \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow 1 Tл = 1 \frac{B \cdot c}{M^2} = 1 \frac{H}{A \cdot M}$.

2) Гауссова система единиц – абсолютная симметричная система электрических и магнитных единиц.

Принципы её построения отражены в работах Гаусса и Вебера.

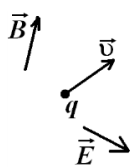
Все электростатические величины q , \vec{E} , φ , \vec{D} , C , R измеряются в единицах СГСЭ $\Rightarrow \epsilon$ – безразмерная величина, $\epsilon_{вакуума} = 1$.

Все магнитные величины (\vec{B} , \vec{H} , Φ , L , \vec{p}_m) измеряются в единицах СГСМ $\Rightarrow \mu$ – безразмерная величина, $\mu_{вакуума} = 1$, но сила тока должна измеряться в магнитных единицах \Rightarrow в гауссовой системе единиц во всех законах магнитного поля появляется размерная постоянная c : $[c] = \frac{M}{c}$.

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{\epsilon \cdot r^3} \vec{r}; \quad d\vec{F}_{\text{магн}} = \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}].$$

Единицей измерения магнитной индукции в системе СГСМ является 1 Гаусс: $[B] = Gc$.

7. Сила, действующая на заряд, движущийся в электромагнитном поле



Рассмотрим заряд q , двигающийся со скоростью \vec{v} в электромагнитном поле с напряженностью \vec{E} и магнитной индукцией \vec{B} .

$$\text{Сила, действующая на элемент тока } \Delta \vec{F} = [\vec{j} \cdot \Delta V; \vec{B}];$$

$$\vec{j} \Delta V = \frac{q}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{l} = q \vec{v}.$$

Магнитная сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле, $\vec{F}_m = q[\vec{v}, \vec{B}]$

Электрическая сила, действующая на заряд, определяется напряженностью электрического поля $\vec{F}_{эл} = q\vec{E}$. \Rightarrow

Сила, действующая на заряд, движущийся в электромагнитном поле:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}] \text{ – сила Лоренца.}$$

Пример.

Рассмотрим два одинаковых по величине заряда q , двигающихся параллельно друг другу одинаковыми скоростями \vec{v} . Найдем силу взаимодействия зарядов \vec{F}_{12} . Сила электростатического взаимодействия:



$$\vec{F}_{эл} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot \vec{e}_r.$$

Магнитная индукция, создаваемая зарядом 2 в месте нахождения заряда 1, то есть на перпендикуляре, проведенном к траектории движения заряда 2 из точки, в которой он в данный момент находится:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qv[\vec{e}_z; a \cdot \vec{e}_r]}{a^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qv}{a^2} \vec{e}_\psi, \text{ так как } \vec{j} dV = \frac{q\Delta S}{\Delta t \Delta S} \cdot \Delta \vec{l} = q\vec{v} = qv \cdot \vec{e}_z.$$

Найденное магнитное поле $\vec{\delta B}$ является полем движущегося заряда, оно и действует на заряд, летящий параллельно первому, с магнитной силой:

$$\vec{F}_{12\text{магн}} = [\vec{j}\Delta V; \vec{\delta B}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q^2 v^2}{a^2} [\vec{e}_z, \vec{e}_\psi] = -\frac{\mu_0 q^2 v^2}{4\pi \cdot a^2} \vec{e}_r \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = -\frac{q^2 v^2}{a^2 4\pi \varepsilon_0} \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \vec{e}_r;$$

$$\vec{F}_{12\text{эл}} + \vec{F}_{12\text{магн}} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} [1 - v^2 \mu_0 \varepsilon_0] \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{e}_r.$$

Опред. $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c.$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{qv}{r^2} \cdot \vec{e}_\psi = \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}] - \text{магнитное поле движущегося заряда.}$$

Полученное соотношение $\frac{F_{\text{м}}}{F_{\text{эл}}} = \frac{v^2}{c^2}$ справедливо и при релятивистских скоростях.

Если перейти в систему отсчета зарядов, то в ней магнитных сил не будет и заряды будут взаимодействовать с электрической силой $\vec{F}_{\text{эл}} = \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 a^2} \vec{e}_r.$

Вопрос. Что же получается: в зависимости от того, из какой системы смотреть, изменяется сила? Ну а заряды как на это посмотрят? Они-то какую силу чувствуют? Может быть, мы сделали что-то не так?

Ответ. Действительно, мы совершенно безосновательно считали, что электрическое поле движущегося заряда $E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}.$ В нерелятивистском



приближении полная сила \vec{F} , действующая на заряд в любой системе, должна быть одна и та же, но в системе, связанной с зарядом, она чисто электрическая, а в лабораторной системе она разделяется на электрическую и магнитную, следовательно, электрическое и магнитное поля переходят друг в друга, а так как заряды могут двигаться с высокими скоростями, то полная теория электромагнетизма должна быть релятивистской.

Электрические и магнитные поля при переходе из одной инерциальной системы в другую преобразуются в соответствии с преобразованиями Лоренца (именно для этого Лоренц и написал свои преобразования, являющиеся краеугольным камнем теории относительности).

Пусть K' движется относительно K со скоростью $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, тогда при переходе в систему K' компоненты электромагнитного поля преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x; & E'_x &= E_x; \\ B'_y &= \frac{B_y + v_0 \frac{E_z}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & E'_y &= \frac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \\ B'_z &= \frac{B_z - v_0 \frac{E_y}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}; & E'_z &= \frac{E_z + v_0 B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

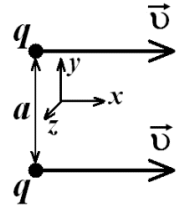
Здесь $\beta = \frac{v_0}{c}.$

Или, разложив $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$, где $\begin{cases} \vec{E}_{\parallel} = E_x \vec{e}_x \\ \vec{E}_{\perp} = E_z \vec{e}_z + E_y \vec{e}_y \end{cases}$, имеем:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} ; \quad \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{v}_0, \vec{B}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}} ;$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} ; \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} [\vec{v}_0, \vec{E}_{\perp}]}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

В случае движущихся параллельно зарядов наша лабораторная система координат движется относительно собственной системы зарядов со скоростью $\vec{v} = -v_0 \cdot \vec{e}_x$. При этом собственное электрическое поле заряда $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \vec{e}_y$ преобразуется в нашей системе координат следующим образом:



$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \vec{e}_y ; \quad \vec{B}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{c^2} \vec{e}_z .$$

Тогда сила, действующая на первый заряд со стороны второго, в лабораторной системе будет иметь следующий вид:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \vec{e}_y + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \cdot \frac{v_0^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{1}{c^2} [\vec{e}_x, \vec{e}_z] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \cdot \sqrt{1-\beta^2} \cdot \vec{e}_y .$$

Полученный результат соответствует выводу релятивистской динамики о том, что сила не является релятивистским инвариантом и ее компонента, поперечная к направлению движения,

преобразуется следующим образом: $F'_y = F_y \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$.

Следовательно, в собственной системе заряды “чувствуют” меньшее, чем в лабораторной, электрическое поле, которое определяет собой силу их взаимодействия в собственной системе. Эта сила включает в себя нашу «лабораторную» электрическую силу и противодействующую ей «лабораторную» магнитную силу.

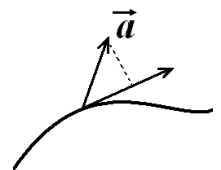


Выводы:

- $\frac{F'_m}{F'_{эл}} = \frac{v^2}{c^2}$ ← справедливо и при релятивистских скоростях.
- Разделение сил на электрическую и магнитную условно и зависит от выбора системы отсчета.

8. Элементы векторного анализа. II часть

Продолжаем изучать свойства векторных полей. На очереди понятия: циркуляция C и ротор rot .



1) Циркуляция

Пусть в любой точке пространства существует поле с напряженностью $\vec{a} \Rightarrow$ сила, действующая на единичный объект, равна \vec{a} . Тогда $\vec{a} \cdot d\vec{r} = dA$ – работа сил поля по перемещению единичного объекта на $d\vec{r}$.

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{a} d\vec{r} \text{ – работа поля по перемещению единичного объекта из точки 1 в точку 2.}$$

Если $1 \equiv 2$, то есть контур замкнутый, то $\oint_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = C$ – циркуляция \vec{a} по контуру Γ .

Физический смысл циркуляции: *циркуляция – это работа сил поля по перемещению единичного объекта по замкнутому контуру при условии, что вектор \vec{a} представляет собой силу, действующую на единичный точечный объект.*

Свойства циркуляции.

1. C – алгебраическая скалярная величина.
2. C зависит от направления обхода.
3. Для консервативного поля сил $C = 0$.

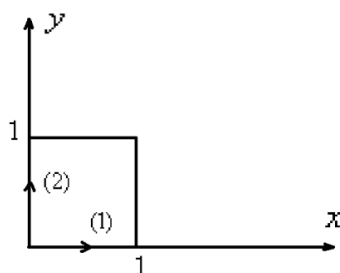
Условие консервативности векторного поля $\vec{a} = f_1\vec{e}_x + f_2\vec{e}_y + f_3\vec{e}_z$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{array} \right.$$



Именно потому, что электростатические поля консервативны, мы до сих пор не использовали понятие циркуляции для нахождения распределения таких полей. Полезно иметь в виду, что условия равенства нулю являются, как правило, отрицающими или запрещающими, а не созидающими, так как по ним можно сказать только, чего нет и не может быть (мы вернемся к этому вопросу, когда будем обсуждать смысл уравнений Максвелла).

Пример.



Векторное поле $\vec{a} = y \cdot \vec{e}_x$.

Так как $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$, то \vec{a} – неконсервативное поле.

Найдем циркуляцию \vec{a} по контуру, представленному на рисунке, обходя его в одном случае против часовой стрелки (1), а в другом – по часовой стрелке (2).

$$C_{(1)} = 0 + \int_0^1 y\vec{e}_x dy\vec{e}_y + \int_1^0 1\vec{e}_x (+dx\vec{e}_x) + 0 = -1;$$

$$C_{(2)} = \int_0^1 y\vec{e}_x dy\vec{e}_y + \int_0^1 1\vec{e}_x \vec{e}_x dx + 0 + 0 = 1.$$



Получили, что циркуляция неконсервативного поля зависит от направления обхода контура.

4. Аддитивность.

$$C = C_1 + C_2;$$

$$C = \sum_i C_i.$$



Циркуляция скорости – кинематическая характеристика течений жидкости или газа, которая служит мерой завихренности течения.

Если циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, проведенному внутри жидкости, равна нулю, то течение – безвихревое или потенциальное.

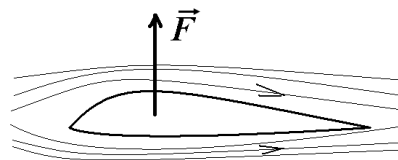
(Потенциальные скорости – однозначные функции координат.)

Если $C_{\vec{v}} \neq 0$, то существуют вихри, которые, обтекая тело, приводят к существованию силы. Таково происхождение подъемной силы, в частности крыла самолета, перпендикулярной к скорости \vec{v} : $F = \rho v C_{\vec{v}}$, где ρ – плотность жидкости или газа. Если $v_{\text{сверху}} > v_{\text{снизу}}$, то давление сверху меньше, чем снизу, $P_{\text{сверху}} < P_{\text{снизу}}$, и возникает подъемная сила.

2) Ротор = $rot = curl =$ вихрь.

$$\oint \vec{a} d\vec{l}$$

Определение ротора: $\lim_{\substack{r_i \rightarrow 0 \\ S_i \rightarrow 0}} \frac{\oint \vec{a} d\vec{l}}{S_i} = (\vec{n}, rot \vec{a})$.



Вихревое движение – это движение непрерывной среды, при котором перемещение её малых элементов состоит не только из поступательного движения, но и вращения около некоторой мгновенной оси.

Пример: смерчи, водовороты.

Если \vec{v} – поле скоростей частиц, то вихревая линия (линия, касательная к ротору) есть мгновенная ось вращения этих частиц.

Таким образом, *ротор определяет собой направление мгновенной оси вращения частицы, находящейся в данной точке.*

Вихревые линии не могут начинаться и кончаться внутри однородной среды:

они или замкнуты, или кончатся на границе раздела сред (поверхность Земли, жидкости, чашки, реки, ванны).

rot a – такой вектор от данного, компоненты которого определяются циркуляцией данного вектора по трем ортогональным контурам.

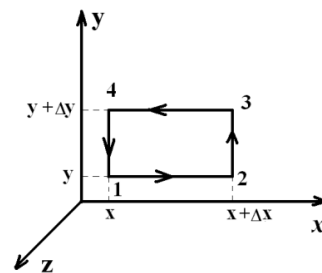
$$rot \vec{a} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) - \vec{e}_y \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) & \text{в декарт. сист. коорд.} \\ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \psi} - \frac{\partial a_\psi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\psi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\psi) - \frac{\partial a_r}{\partial \psi} \right] \vec{e}_z & \text{в цилиндрической сист. коорд.} \end{cases}$$

$rot \vec{a} = [\nabla \times \vec{a}]$ – одно из обозначений.

Найдем $(rot \vec{a})_z$ для декартовых координат из определения. В этом случае $\vec{n} = \vec{e}_z$:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{a_x(y) \cdot \Delta x - a_x(y + \Delta y) \Delta x}{\Delta x \Delta y} + \frac{a_y(x + \Delta x) \Delta y - a_y(x) \Delta y}{\Delta x \Delta y} \right) =$$

$$= -\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x} = (rot \vec{a})_z,$$



что и требовалось доказать.

Аналогично: $(rot \vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$; $(rot \vec{a})_y = -\frac{\partial a_z}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z} \Rightarrow$

Потенциальные (консервативные) поля являются безвихревыми, так как для них все компоненты ротора равны 0 ($\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}$; $\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}$; $\frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}$).

Свойства rot a:

1. $rot \vec{a} = [\nabla \vec{a}]$ – векторная функция векторного аргумента.

2. Аддитивность: $rot(\vec{a} + \vec{b}) = rot \vec{a} + rot \vec{b}$.

3. $rot(\nabla f) = 0$ – нет завихрений в потенциальном поле.

Вопрос. А как же смерчи на Земле?

Ответ. Смерчи – следствие трения, так же как воронки в ванне – следствие вязкости, в сверхтекучей жидкости турбулентности нет.

4. $div(rot \vec{a}) = 0$, у вихрей нет точечных источников.

5. $rot(f \vec{a}) = [\nabla f \cdot \vec{a}] + f[\nabla \vec{a}] = [grad f, \vec{a}] + f rot \vec{a}$.



3) Теорема Стокса.

Циркуляция \vec{a} по произвольному контуру Γ равна потоку $\text{rot}\vec{a}$ через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром:

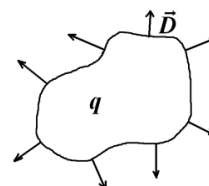
$$\int_S \text{rot}\vec{a} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \vec{a} d\vec{l}.$$

9. Уравнения Максвелла для электро- и магнитостатики

1) Электростатика

а) Дифференциальная форма

$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}\vec{D} = \rho - \text{удельная мощность источников поля } \vec{D} \text{ в любой точке равна локальной} \\ \text{плотности сторонних зарядов в этой точке;} \\ \text{rot}\vec{E} = 0 - \text{в электростатическом поле нет вихрей.} \end{array} \right.$



б) Интегральная форма

$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} d\vec{s} = q = \int_V \rho dV - \text{поток } \vec{D} \text{ через любую замкнутую поверхность} \\ \text{равен стороннему заряду, заключенному внутри} \\ \text{этой поверхности;} \\ \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = 0 - \text{работа сил электростатического поля по любому замкнутому контуру} \\ \text{равна нулю, или электростатическое поле консервативно.} \end{array} \right.$

2) Магнитостатика

$\text{div}\vec{B} = 0$ – магнитных зарядов не обнаружено,

(однако их присутствие в мире ничему не противоречит);

Это уравнение, как отрицающее, мало полезно для нахождения магнитного поля от реальных токов. Оно лишь требует замкнутости линий магнитной индукции.

$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0$ – линии магнитной индукции замкнуты.

\vec{B} – не потенциальное поле, хотя работа магнитных сил равна 0.

Вопрос. Почему?

Ответ. Так как магнитная сила является гироскопической $\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}]$, то есть $\vec{F} \perp \vec{v}$, и её мощность $P = \vec{F} \cdot \vec{v} \equiv 0$.



Вопрос. Может быть, из этого следует, что $\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = 0 = \int_S \text{rot}\vec{B} d\vec{s} \Rightarrow \text{rot}\vec{B} = 0$?

Это и будет вторым уравнением магнитостатики?

Но тогда в совокупности уравнения $\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}\vec{B} = 0 \\ \text{div}\vec{B} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$ неизбежно дают $\vec{B} \equiv 0$, так как

точечных источников нет и вихрей нет \Rightarrow ничего нет. Где же мы промахнулись?

Ответ. Для магнитного поля $\vec{B} d\vec{l} \neq \delta A$ – работе, так как в магнитном поле потенциал – векторная функция, $d\vec{F} = [\vec{j}dV, \vec{B}]$; $\delta A = [\vec{j}dV; \vec{B}]d\vec{l} \neq \vec{B}d\vec{l}$.

Магнитных зарядов на самом деле не обнаружено, но $\text{rot}\vec{B} \neq 0$.

Вопрос. Чему же он равен?

Ответ. Для прямого тока: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} \vec{e}_\psi \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\psi \vec{e}_\psi \vec{e}_\psi = \mu_0 I$. Это верно для

любого тока и для любого охватывающего его замкнутого контура.

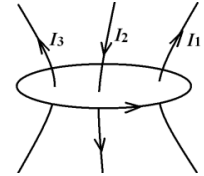
Применив принцип суперпозиции, получим:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \left(\sum_{k=1}^K \vec{B}_k \right) d\vec{l} = \sum_{k=1}^K \oint_{\Gamma} \vec{B}_k d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^K I_k, \text{ где } \vec{B}_k - \text{поля отдельных токов.}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \sum_{k=1}^K I_k, \text{ где } \sum_{k=1}^K I_k - \text{алгебраическая сумма токов.}$$

Циркуляция \vec{B} равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром или пересекающих поверхность, ограниченную данным контуром.

Токи являются алгебраическими величинами, и их знак определяется правилом правого винта: $I > 0$, если ток сонаправлен с нормалью \vec{n} , проведенной к поверхности в соответствии с правилом правого винта относительно направления обхода контура Γ .



В нашем примере $I_1, I_3 > 0$, $I_2 < 0$.

По теореме Стокса:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S} \Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Уравнения магнитостатики в отсутствие магнетиков:

а) Дифференциальная форма:

$$\begin{cases} \text{div} \vec{B} = 0 & - \text{магнитных зарядов не обнаружено;} \\ \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} & - \text{в отсутствие магнетиков вихрь поля } \vec{B} \text{ в данной точке} \\ & \text{определяется плотностью транспортного тока в этой точке.} \end{cases}$$



б) Интегральная форма:

$$\begin{cases} \oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0 & - \text{линии поля } \vec{B} \text{ замкнуты;} \\ \oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I & - \text{циркуляция } \vec{B} \text{ по любому контуру равна умноженной на } \mu_0 \text{ алгебраической} \\ & \text{сумме токов, охватываемых этим контуром.} \end{cases}$$

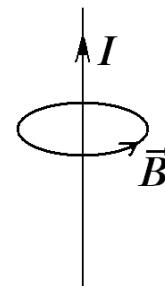
Эти уравнения магнитостатики верны всегда в отсутствие магнетиков, но интегральная форма, облегчающая решение задач, может быть использована только при наличии симметрии задачи и очевидности ориентации \vec{B} на выбранном контуре.

10. Примеры расчета распределения магнитной индукции в пространстве, не содержащем магнетиков, по теореме Стокса

1. Бесконечный цилиндрический проводник с током.

1) Поле бесконечного прямого тока получается мгновенно:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



2) Цилиндр с током (толстый провод) $j = const$.

$$\text{Внутри: } 2\pi r \cdot B_{\psi_i} = \mu_0 j \pi r^2 \Rightarrow B_{\psi_i} = \frac{\mu_0 j r}{2}.$$

$$\text{Снаружи: } 2\pi r \cdot B_{\psi_e} = \mu_0 j \pi R^2 \Rightarrow B_{\psi_e} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}.$$

Если $j = f(r)$, то при вычислении поля внутри, в правой части равенства надо интегрировать плотность тока по площади сечения

$$\text{проводника: } 2\pi r \cdot B_{\psi_i} = \mu_0 \int_0^r j \cdot 2\pi r' dr'.$$

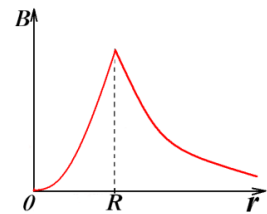
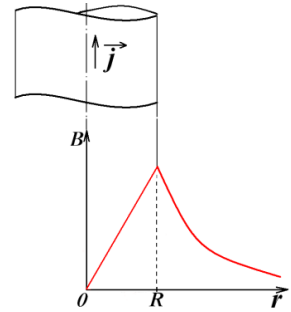
3) Рассчитаем распределение магнитной индукции \vec{B} для случая линейного распределения плотности тока по сечению

$$\text{проводника } \vec{j} = j_0 \frac{r}{R} \cdot \vec{e}_z:$$

$$2\pi r \cdot B_{\psi_i} = \mu_0 \int_0^r j_0 \frac{r'}{R} 2\pi r' dr' = \mu_0 2\pi \frac{j_0}{R} \frac{1}{3} r^3;$$

$$B_{\psi_i} = \mu_0 j_0 \frac{r^2}{3R};$$

$$B_{\psi_e} = \mu_0 j_0 \frac{R^2}{3r}.$$



4) Пусть толстый цилиндрический проводник несет ток I , распределенный по сечению

$$\text{по экспоненциальному закону } j = j_0 \left(1 - e^{-\frac{r^2}{\delta^2}} \right).$$

Проинтегрировав плотность тока по площади сечения проводника, определим

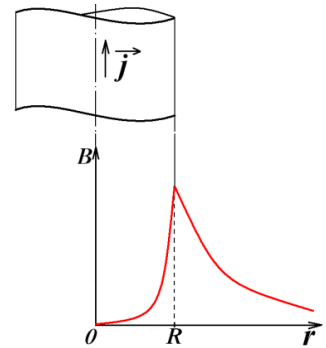
$$j_0 = \frac{I}{\pi \left[R^2 - \delta^2 \left(1 - e^{-\frac{R^2}{\delta^2}} \right) \right]}.$$

Затем по теореме Стокса определим поле внутри проводника:

$$B_{\psi_i} = \frac{\mu_0 j_0}{2} \left[r - \frac{\delta^2}{r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{\delta^2}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$B_{\psi_i} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{\mu_0 j_0}{2} \left(r - \frac{\delta^2}{r} \cdot \left(1 - 1 + \frac{r^2}{\delta^2} - \frac{r^4}{2\delta^4} \right) \right) = \frac{\mu_0 j_0}{2} \cdot \frac{r^3}{2\delta^2}.$$

$$\text{Поле снаружи } B_{\psi_e} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$



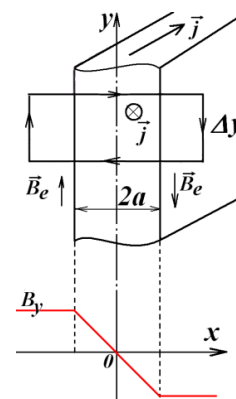
2. Бесконечная пластина с током

I – линейная плотность тока, приходящаяся на единицу длины пластины в направлении y .

$$\vec{j} = -\frac{I}{2a} \cdot \vec{e}_z - \text{плотность тока.}$$

$$2B_{y_i} \cdot \Delta y = \mu_0 j \cdot \Delta y \cdot 2x \Rightarrow \vec{B}_i = -\mu_0 j x \cdot \vec{e}_y;$$

$$2B_{y_e} \Delta y = \mu_0 j \cdot 2a \cdot \Delta y \Rightarrow \vec{B}_e = -\frac{\mu_0 I}{2} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \vec{e}_y.$$



3. Существует круг задач, в которых надо, зная \vec{B} , определить \vec{j} :

1. Необходимо проверить, может ли быть \vec{B} таким, как задано. Для этого надо выяснить удовлетворяется ли уравнение $\text{div} \vec{B} = 0$.

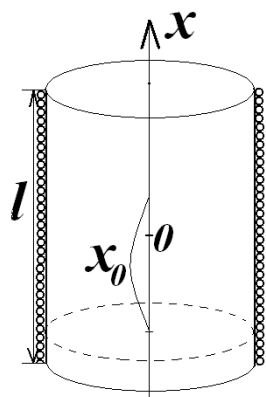
2. Если удовлетворяется, то из уравнения $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ находят \vec{j} .

1) $\vec{B} = \mu_0 a(x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y + 3z\vec{e}_z) \Rightarrow \text{div} \vec{B} = \mu_0 a(1 + 2 + 3) \neq 0 \Rightarrow$ такого поля \vec{B} быть не может.

2) $\vec{B} = \kappa(x^2\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z) \Rightarrow \text{div} \vec{B} \neq 0 \Rightarrow$ такого поля \vec{B} быть не может.

11. Поле соленоида

1. Поле на оси соленоида конечной длины.



Поле одного витка на его оси на расстоянии x_0 от его центра

$$B_1 = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x_0^2)^{3/2}}.$$

Если плотность намотки n , то есть на единицу длины соленоида приходится n витков, тогда ndx_0 – количество витков на длине $dx_0 \Rightarrow$

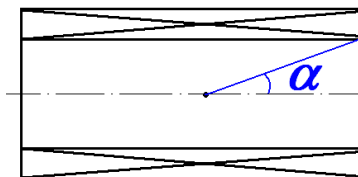
их поле $\delta B(x_0) = \frac{\mu_0 I R^2 n dx_0}{2(R^2 + x_0^2)^{3/2}}$ в точке, отстоящей от центра витка на

расстоянии x_0 .

Если хотим определить поле $\vec{B}(x)$ в точке x , отстоящей на x от центра соленоида, то следует по принципу суперпозиции просуммировать поля от всех витков соленоида, расположенных вверх и вниз от данной точки x :

$$\vec{B}(x) = \left\{ \int_0^{\frac{l}{2}+x} \frac{\mu_0 I n dx_0 R^2}{2(x_0^2 + R^2)^{3/2}} + \int_0^{\frac{l}{2}-x} \frac{\mu_0 I n dx_0 R^2}{2(x_0^2 + R^2)^{3/2}} \right\} \vec{e}_x = \frac{\mu_0 I n}{2} \left\{ \left[\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + R^2}} \right]_0^{\frac{l}{2}+x} + \left[\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + R^2}} \right]_0^{\frac{l}{2}-x} \right\} \vec{e}_x =$$

$$= \frac{\mu_0 I n}{2} \left\{ \frac{\frac{l}{2}+x}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}+x\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{l}{2}-x}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 + R^2}} \right\} \vec{e}_x.$$



Оба конца создают однонаправленное поле и оба конца равноправны для точки $x = 0$.

Положив $x = 0$, получим поле в центре соленоида на его оси:

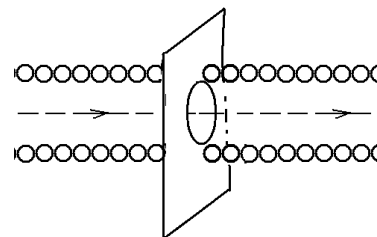
$$B(0) = \frac{\mu_0 I n \cdot \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + R^2}} = \mu_0 I n \cos \alpha, \text{ так как } \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + R^2}} = \cos \alpha.$$

$$\text{При } l \rightarrow \infty \begin{cases} \cos \alpha \rightarrow 1 \\ \alpha \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow B = \mu_0 I n - \text{ поле на оси}$$

бесконечного соленоида.

2. Поле бесконечного соленоида.

1) В силу симметрии и бесконечности любая плоскость разбивает соленоид на две эквивалентные части, поэтому для любого витка существует другой виток, симметрично расположенный относительно выбранной плоскости. Сложив поля двух симметричных витков, получим, что поле в любой точке пространства параллельно оси бесконечного соленоида.



2) Поле на оси бесконечного соленоида $B = \mu_0 I n$.

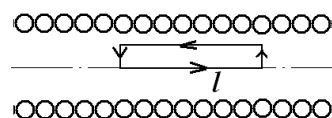
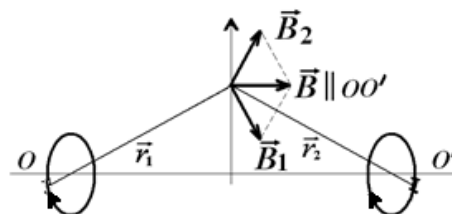
Возьмем $\oint_L \vec{B} d\vec{l}$ по контуру внутри соленоида и

воспользуемся теоремой Стокса:

$$B(0) \cdot l - B(r) \cdot l = 0 \Rightarrow B(r) = B(0).$$

Таким образом, поле \vec{B} внутри бесконечного соленоида однородно и направлено по оси соленоида:

$$B_i = \mu_0 I n.$$

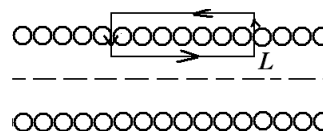


3) Возьмем $\oint_L \vec{B} d\vec{l}$ по контуру, пересекающему обмотку соленоида, как показано на рисунке.

По теореме Стокса:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I n \cdot l = -B_e l + \mu_0 I n l \Rightarrow B_e = 0, \text{ то есть}$$

вне бесконечного соленоида поле отсутствует $\vec{B}_e = 0$.

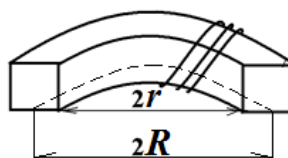
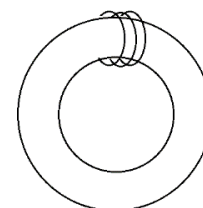


12. Поле тороида

$2\pi R \cdot B = \mu_0 I N$, где N – полное число витков тороида, $N = 2\pi r \cdot n$.

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi R} = \mu_0 I n \frac{r}{R} - \text{ поле тороида.}$$

Здесь r – внутренний радиус тора, R – средний радиус тора.



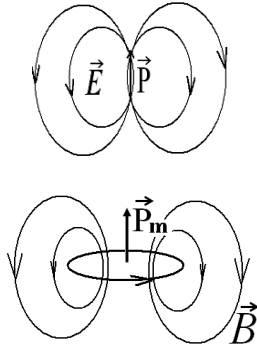
13. Замкнутый контур с током. Поле контура с током на больших расстояниях от него

Электростатический аналог – электрический диполь.

Поле диполя на больших расстояниях от него:

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5},$$

где $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ – электрический дипольный момент определяется зарядами системы и их геометрическим расположением.



Определим магнитный момент контура с током следующим образом:

$$\vec{p}_m = I \int_S d\vec{s} - \text{магнитный момент контура с током определяется силой}$$

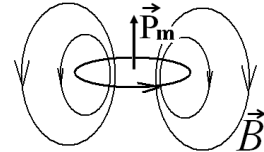
тока I в нем и его геометрией.

Магнитный момент плоского контура с током $\vec{p}_m = I \cdot \vec{n} \cdot S$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\vec{p}_m \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}_m}{r^5} - \text{магнитное поле контура с током на большом расстоянии от него}$$

в отсутствие магнетиков.

\vec{p}_m – псевдовектор.



14. Контур с током во внешнем магнитном поле

1. Однородное магнитное поле $\vec{B} = const$.

1) Сила.

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}] \Rightarrow \vec{F} = I \left[\oint_L d\vec{l}, \vec{B} \right] - \text{сила, действующая на контур с током } I.$$



Так как $\oint_L d\vec{l} = 0$, то $\vec{F} = 0$, то есть

в однородном поле \vec{B} на контур с током сила не действует (как и в электростатике на диполь в однородном поле).

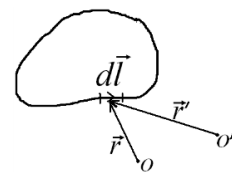
2) Момент сил.

$$\delta \vec{N}_0 = [\vec{r}, d\vec{F}] = [\vec{r}, I d\vec{l}, \vec{B}] \Rightarrow$$

$$\vec{N}_0 = \oint_L [\vec{r}, d\vec{F}] = \vec{N}_{O'} = \oint_L [\vec{r}' + \vec{r}_{OO'}, d\vec{F}] = \oint_L [\vec{r}', d\vec{F}] + \oint_L [\vec{r}_{OO'}, d\vec{F}] =$$

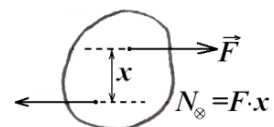
$$= \oint_L [\vec{r}', d\vec{F}] + \left[\vec{r}_{OO'}, \oint_L d\vec{F} \right] = \oint_L [\vec{r}', d\vec{F}], \text{ то есть момент сил, действующий на контур с током в}$$

однородном магнитном поле, инвариантен относительно точки рассмотрения.



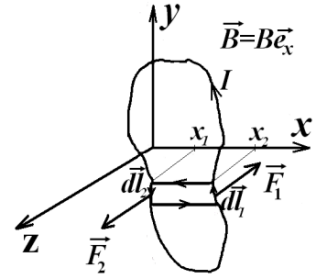
Вопрос. Что может служить механической аналогией?

Ответ. Момент пары сил.



Вычислим момент сил $\vec{N} = \oint_L [\vec{r} d\vec{F}]$, действующий на контур в магнитном поле \vec{B} .

Рассмотрим контур с током I . Пусть однородное магнитное поле $\vec{B} \perp \vec{n}$ – нормали к плоскости контура. Введем систему координат, показанную на рисунке, и разобьем контур на элементарные контуры, имеющие две стороны, параллельные оси x , как показано на рисунке.



$$d\vec{F}_1 = I [d\vec{l}_1, \vec{B}] = -IBdl_1 \sin \alpha_1 \vec{e}_z = -IBdy_1 \vec{e}_z;$$

$$d\vec{F}_2 = I [d\vec{l}_2, \vec{B}] = IBdl_2 \sin \alpha_2 \vec{e}_z = IBdy_2 \vec{e}_z;$$

$dy_1 = dy_2 \Rightarrow$ на любой участок контура действует момент пары сил

$$\delta\vec{N} = IBdy \cdot \Delta x \vec{e}_y, \text{ так как}$$

$$\delta\vec{N} = -[x_1 \vec{e}_x + y \vec{e}_y, IBdy \vec{e}_z] + [x_2 \vec{e}_x + y \vec{e}_y, IBdy \vec{e}_z] = -(x_1 - x_2) \vec{e}_x, IBdy \vec{e}_z = IBdy \cdot \Delta x \vec{e}_y.$$

Направление этого момента $\delta\vec{N}$ соответствует $[\vec{n}, \vec{B}]$, то есть $\delta\vec{N} = I [d\vec{s}, \vec{B}]$.

Тогда суммарный момент сил, действующих на контур с током в однородном магнитном поле, $\vec{N} = I \int_s [d\vec{s}, \vec{B}] = \left[I \int_s d\vec{s}, \vec{B} \right] \Rightarrow \vec{N} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$.

В данном случае $\vec{N} = N \vec{e}_y$, и контур будет разворачиваться перпендикулярно \vec{B} в направлении против часовой стрелки, так чтобы нормаль к площади контура \vec{n} была направлена по \vec{B} ($\vec{n} \uparrow \uparrow \vec{B}$).

Полученная формула верна не только для плоского контура, но для любого контура и произвольной ориентации \vec{B} .

В электростатическом поле диполь тоже разворачивается по полю в результате действия момента сил $\vec{N} = [\vec{p}, \vec{E}]$.

3) Энергия контура с током в однородном магнитном поле.

Работа сил поля по повороту контура с током:

$\delta A = -N \cdot d\alpha = -p_m B \sin \alpha \cdot d\alpha$ (знак «минус» возникает, так как силы поля стремятся уменьшить угол α).

Работа сил поля равна убыли энергии контура $\delta A = -dW \Rightarrow$

$$A = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_m B \sin \alpha \cdot d\alpha = p_m B \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = W_1 - W_2 \Rightarrow$$

$W = -(\vec{p}_m \vec{B})$ – энергия контура с током во внешнем однородном магнитном поле.

Энергия диполя в электростатическом поле $W = -(\vec{p} \vec{E})$.



2. Слабонеоднородное магнитное поле \vec{B} .

Формулы, полученные для \vec{N} и W в однородном магнитном поле, не изменяются, а сила, действующая на виток с током в неоднородном магнитном поле, пропорциональна быстрой изменению магнитной индукции в направлении магнитного момента контура и магнитному моменту контура, аналогично тому, как в электростатике сила \vec{F} , действующая на диполь, пропорциональна величине дипольного момента и изменению напряженности электростатического поля на длине диполя.

$$\vec{F}_{эл} = (\vec{p} \nabla) \vec{E},$$

$$\vec{F}_{маг} = (\vec{p}_m \nabla) \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha \cdot \vec{e}_x, \text{ если } \alpha \text{ – угол между } \vec{B} \text{ и } \vec{p}_m = p_m \vec{e}_x.$$

Сравнительная таблица

Электрическое	Магнитное
$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$	$\vec{p}_m = I \int d\vec{s}$
$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p} \cdot r^2}{r^5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$\vec{B} = \frac{3(\vec{p}_m\vec{r})\vec{r} - \vec{p}_m r^2}{r^5} \frac{\mu_0}{4\pi}$
$\vec{F} = (\vec{p}\nabla)\vec{E} = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}$	$\vec{F} = (\vec{p}_m\nabla)\vec{B} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}$
$\vec{N} = [\vec{p}\vec{E}]$	$\vec{N} = [\vec{p}_m\vec{B}]$
$W = -(\vec{p}\vec{E})$	$W = -(\vec{p}_m\vec{B})$

Всё это нужно знать, чтобы рассматривать поле в веществе или вещество в поле.

15. Примеры

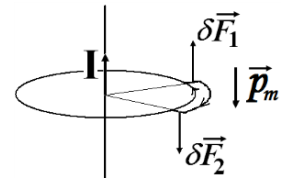
Виток в поле прямого тока при различных его ориентациях.

1. Пусть $\vec{p}_m = -p_m \cdot \vec{e}_z$.

1) Определим поле бесконечного тока, в котором находится контур:

$$2\pi r \cdot B_\psi = \mu_0 I \Rightarrow$$

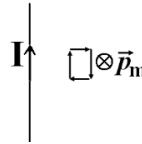
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\psi - \text{поле прямого тока.}$$



2) $W = -(\vec{p}_m\vec{B})=0$, так как $\vec{B} \perp \vec{p}_m$.

3) $\vec{F} = 0$.

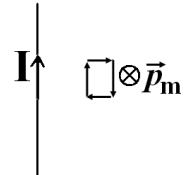
4) $\vec{N} = [\vec{p}_m\vec{B}]$ стремится развернуть \vec{p}_m по $\vec{B} \Rightarrow$



то есть контуру хочется ориентироваться так

2. После поворота $\vec{p}_m = p_m \cdot \vec{e}_\psi \Rightarrow \vec{p}_m \parallel \vec{B}$, и, так как поле неоднородное,

на \vec{p}_m будет действовать сила $F_r = p_m \frac{\partial B}{\partial r} \cos \alpha$, где α – угол между \vec{B} и $\vec{p}_m \Rightarrow$



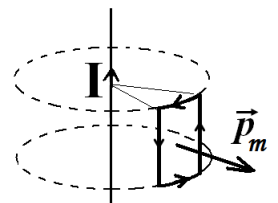
$$\vec{F} = -\frac{p_m I \mu_0}{2\pi r^2} \vec{e}_r, \text{ то есть контур притягивается к проводу.}$$

При этом $W = -(\vec{p}_m\vec{B}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot p_m$; $\vec{N} = 0$.

3. $\vec{p}_m = p_m \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \vec{p}_m \perp \vec{B} \Rightarrow W = 0$;

$$\vec{N} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot p_m \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{F} = -\frac{p_m I \mu_0}{2\pi r^2} \vec{e}_\psi$$



Вопрос. Уж не изобрели ли мы вечный двигатель? Пусть контур крутится в поле прямого тока, при этом его энергия $W = 0$ не изменяется, а кинетическая энергия даже будет расти.

Ответ. Момент сил \vec{N} не даст нам реализовать этот блестящий проект вечного двигателя.

4. Если $\vec{p}_m = -p_m \cdot \vec{e}_\psi \Rightarrow \vec{F} = \frac{p_m I \mu_0}{2\pi r^2} \vec{e}_r$ – контур выталкивается из магнитного поля.



16. Магнитное поле в веществе: отклик магнетиков на внешнее магнитное поле. Намагниченность

Если в магнитное поле, созданное токами, текущими по проводам, внести некоторое вещество, то поле в пространстве, вообще говоря, изменится. Это объясняется тем, что любое вещество является магнетиком, то есть способно под действием магнитного поля намагничиваться – приобретать магнитный момент.

В электростатическом поле аналогично ведут себя диэлектрики, которые поляризуются, приобретая поляризацию:

$$\bar{P} = \frac{d\bar{p}}{dV} \text{ – плотность дипольного момента – поляризация.}$$

Соответственно характеристикой магнетиков является намагниченность:

$$\bar{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{p}_m}{\Delta V} = \frac{d\bar{p}_m}{dV} \text{ – плотность магнитного момента – намагниченность.}$$

$$\Delta \bar{p}_m = \sum_{k=1}^K \bar{p}_{m_k} \text{ – магнитный момент всех молекул, содержащихся в объеме } \Delta V.$$

$$\bar{J} = \frac{\Delta \bar{p}_m}{\Delta V} \cdot \frac{N}{N} = \langle \bar{p}_m \rangle \cdot n, \text{ где } n \text{ – концентрация молекул в веществе.}$$

Что же такое магнитный момент молекул?

В соответствии с полуклассической теорией Бора электроны вращаются вокруг ядер по замкнутой траектории, а также вокруг собственной оси. \vec{L} – момент импульса орбитального вращения, \vec{S} – момент импульса собственного вращения – спин. Все эти представления условны. На самом деле и траектории-то у электронов нет, а спин – это свойство, которое проявляется в особом рода взаимодействиях (в частности, обменных). Однако для рассмотрения магнитных свойств материалов эти представления удобны, так как наглядны и не противоречат экспериментальным фактам. По современным представлениям магнитные свойства вещества обусловлены тремя причинами:

- орбитальным движением электронов вокруг ядер;
- спином электрона;
- спином ядер.

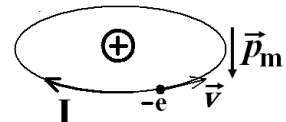
Так как тяжелые атомные ядра движутся значительно медленнее легких электронов, то их моменты импульса гораздо меньше \vec{L} и \vec{S} электронов.

Ядерный магнетизм становится существенным только вблизи абсолютного нуля $T = 0$, да и то если орбитальные и спиновые моменты скомпенсированы.

Магнитное поле, как и электрическое, можно рассматривать как микроскопическое и макроскопическое. Истинным, возбуждаемым движущимися зарядами, является микроскопическое поле $\vec{B}_{\text{микро}}$. Оно резко меняется на расстояниях атомных масштабов. Макроскопическое поле $\vec{B}_{\text{макро}}$ – сглаженное поле, полученное усреднением $\vec{B}_{\text{микро}}$ по физически бесконечно малому объему.

Орбитальное плюс спиновое движение электронов можно идентифицировать с токами, циркулирующими в атомном веществе, – это *молекулярные токи*. Они-то и создают $\vec{B}_{\text{микро}}$. Для вычисления $\vec{B}_{\text{макро}} = \langle \vec{B}_{\text{микро}} \rangle = \vec{B}_{\text{молекул}}$ токи отдельных молекул можно также складывать, заменив сумму макротоками молекул – это токи намагничивания $\vec{j}' = \vec{j}_{\text{молек}}$.

Токи, связанные с перемещением в веществе носителей тока: электронов проводимости или ионов, называются *токами проводимости* = *транспортными токами* = *токами свободных зарядов*. До сих пор мы говорили только о таких токах.



Все вещества можно разделить на следующие классы с точки зрения их магнитных свойств:

1) *Диамагнетики – вещества, в которых при $\vec{B}_e = 0$ $\vec{p}_{m_k} = 0$ для любой k -й молекулы, то есть в отсутствие внешнего поля у молекул нет магнитного момента \Rightarrow при $\vec{B}_e = 0$ $\vec{J} = 0$.*

Аналог – неполярный диэлектрик.

2) *Парамагнетики – вещества, в которых $\vec{p}_{m_k} \neq 0$ для любого k , даже при $\vec{B}_e = 0$, то есть любая молекула парамагнетика имеет магнитный момент \vec{p}_{m_k} даже в $\vec{B}_e = 0$. Однако в результате беспорядочного движения атомов \vec{p}_{m_k} ориентированы хаотично, и в силу изотропности пространства намагниченность $\vec{J} = 0$ при $\vec{B}_e = 0$.*

Аналог – полярный диэлектрик.

При наложении внешнего поля \vec{B} возникает $\vec{J} \neq 0$ из-за:

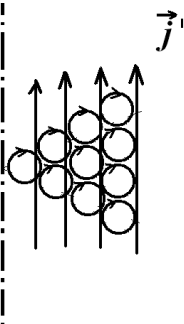

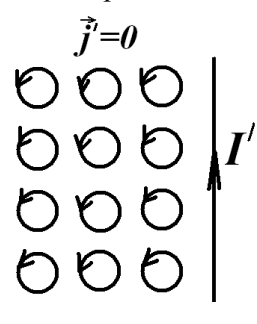
- перестройки атомных оболочек;
- ориентации \vec{p}_{m_k} в соответствии с направлением поля.

При этом поле молекулярных токов \vec{B}' , как и поле \vec{B}_0 токов проводимости, не имеет точечных источников (магнитных зарядов), то есть для $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ справедливо:

$$\text{div} \vec{B} = 0 \text{ и } \oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0 - \text{линии } \vec{B} \text{ и в присутствии вещества остаются замкнутыми.}$$

17. Напряженность магнитного поля

Сравнительная таблица

<p><u>Диэлектрик</u> $\text{div} \vec{P} = -\rho'$ $P_n = \sigma'$</p>	<p><u>Магнетики</u> $\text{rot} \vec{J} = \vec{j}' \equiv \vec{j}_{\text{связ}} \equiv \vec{j}_{\text{молек}}$</p>
<p>1. Что такое плотность тока намагниченности \vec{j}' и как ее себе представить? 2. Что такое поверхностный ток намагничивания и откуда он берется?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;">    </div> <p>Внутри магнетика \vec{j}' может быть равен нулю, но по поверхности течет ток намагничивания $I'_{\text{нов}} = -\oint_L \vec{J} d\vec{l}$.</p>	
<p>$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_0 + \rho')$ $\text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_0$, где $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D} \Rightarrow$ $\text{div} \vec{D} = \rho_0$</p>	<p>$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_0 + \vec{j}')$, $\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) = \vec{j}_0$, где $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ – напряженность магнитного поля, $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_0$ – плотность тока проводимости</p>

\vec{H} – напряженность магнитного поля, вспомогательная величина.

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{H} = \vec{j}_0 \\ \text{div}\vec{B} = 0 \end{cases} - \text{дифференциальная форма уравнений Максвелла в среде для магнитостатики.}$$

Эта система содержит 4 уравнения и 6 неизвестных. Чтобы найти неизвестные поля, надо добавить материальные уравнения среды, учитывающие способность вещества откликаться на внешнее магнитное поле.

$$\begin{cases} \oint \vec{H} d\vec{l} = I_0 \\ \oint \vec{B} d\vec{s} = 0 \end{cases} - \text{интегральная форма уравнений Максвелла в среде для магнитостатики.}$$

18. Связь \vec{B} , \vec{H} , \vec{J} в изотропной среде в линейном приближении

В линейном приближении $\vec{J} \sim \vec{H}$.

$$[\vec{J}] = [\vec{H}] = \frac{A}{M}.$$

$\vec{J} = \chi_m \vec{H}$, где χ_m – магнитная восприимчивость вещества.

Если вещество изотропно, то χ_m – скаляр $\Rightarrow \vec{J} \parallel \vec{H} \parallel \vec{B}$.

Для анизотропного вещества $J_\alpha = \chi_{m\alpha\beta} H_\beta$, где $\chi_{m\alpha\beta}$ – тензор.

Вернемся к изотропному магнетику:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = (\chi_m + 1)\mu_0 \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Опред. $\mu = \chi_m + 1$ – магнитная проницаемость вещества.

$$\mu \geq 0 \leftarrow \text{всегда} \rightarrow \epsilon \geq 1$$

Для парамагнетиков $\mu > 1$, для диамагнетиков $\mu < 1$.

Итак, в линейном приближении для изотропного магнетика $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ – материальное уравнение, дополняющее систему уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{div}\vec{B} = 0 \\ \text{rot}\vec{H} = \vec{j}_0 \end{cases}.$$

Вопрос. Что означает $\mu \leq 1$?

Ответ. а) Диамагнетики $0 < \mu < 1$

$$\mu = 1 + \chi_m \Rightarrow -1 < \chi_m < 0, \text{ то есть } \chi_m - \text{отриц.} \Rightarrow \vec{B} \uparrow \downarrow \vec{J}, \text{ так как } \vec{B} = \mu_0 \frac{1 + \chi_m}{\chi_m} \vec{J} \Rightarrow$$

в диамагнетике магнитное поле ослабляется, так как намагниченность \vec{J} направлена против \vec{B} (аналогично было в диэлектрике, когда дипольные моменты ориентировались по полю, что приводило к $\downarrow \vec{E}$). Диамагнетик является полным аналогом диэлектрика.

Вопрос. Почему же тогда $\epsilon > 1$, а $\mu_{\text{диамагн}} < 1$, если эффекты однонаправленные?

Ответ. Так как ϵ стоит в знаменателе формулы $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \vec{D}$, а μ – в числителе $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$.

б) Парамагнетики похожи на полярные диэлектрики, но $\mu > 1 \Rightarrow \vec{B} \uparrow \uparrow \vec{J}$, то есть собственное поле вещества (поле макроскопических молекулярных токов) усиливает внешнее поле (или поле токов проводимости). Такого в диэлектриках не было и быть не могло.



19. Условия отсутствия макроскопических молекулярных токов ($\vec{j}' = 0$) внутри изотропного магнетика

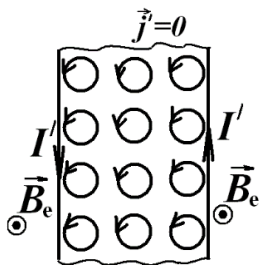
$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{B} &= \text{rot}(\mu_0 \mu \vec{H}) = \mu_0 \text{rot}(\mu \vec{H}) = \mu_0 \{ [\nabla \mu, \vec{H}] + \mu \cdot \text{rot} \vec{H} \}, \\ \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{j}_0 + \vec{j}') \Rightarrow [\nabla \mu, \vec{H}] + \mu \vec{j}_0 = \vec{j}_0 + \vec{j}' \Rightarrow \vec{j}' = (\mu - 1) \vec{j}_0 + [\nabla \mu, \vec{H}] \Rightarrow \\ \vec{j}' &= \chi_m \vec{j}_0 + [\nabla \mu, \vec{H}], \end{aligned}$$

то есть плотность макроскопических молекулярных токов \vec{j}' внутри изотропного магнетика равна нулю, если:

- магнетик изотропен и однороден $\nabla \mu = 0$;
- в магнетике нет токов проводимости.

Таким образом, если внести однородный магнетик во внешнее поле \vec{B}_e , он намагнитится, но в нем $\vec{j}' = 0$.

Вид сверху



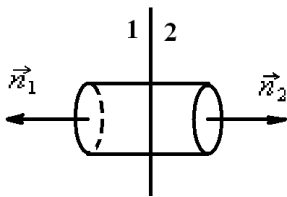
$\vec{j}'_i = 0$ и существует только ток I' по поверхности пластины.

Вопрос. Какой тип магнетика изображен: диа- или пара-?

Ответ. Парамагнетик.



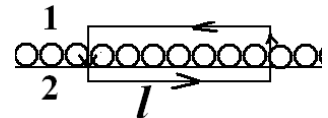
20. Граничные условия



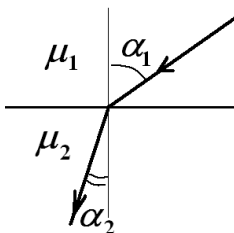
1) $B_{1n} - B_{2n} = 0 \Rightarrow B_{1n} = B_{2n}$ — нормальная составляющая магнитной индукции на границе раздела не совершает скачков, то есть сохраняется.

2) $(-H_{1r} + H_{2r})l = I \Rightarrow H_{2r} - H_{1r} = \frac{I}{l}$ — линейная плотность тока проводимости вдоль поверхности.

Если на границе раздела нет токов проводимости, то $H_{1r} = H_{2r}$, то есть касательная составляющая \vec{H} не претерпевает разрыва на границе раздела магнетиков.



3) Угол преломления силовых линий:



$$\begin{aligned} \mu_1 &> \mu_2; \\ B_1 \cos \alpha_1 &= B_2 \cos \alpha_2 = B_{1n} = B_{2n}; \\ H_1 \sin \alpha_1 &= H_2 \sin \alpha_2 = H_{1r} = H_{2r} \\ \frac{\mu_1}{\text{tg} \alpha_1} &= \frac{\mu_2}{\text{tg} \alpha_2} \rightarrow \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2}. \end{aligned}$$

То есть чем больше μ , тем ближе линии поля «прижимаются» к поверхности магнетика.



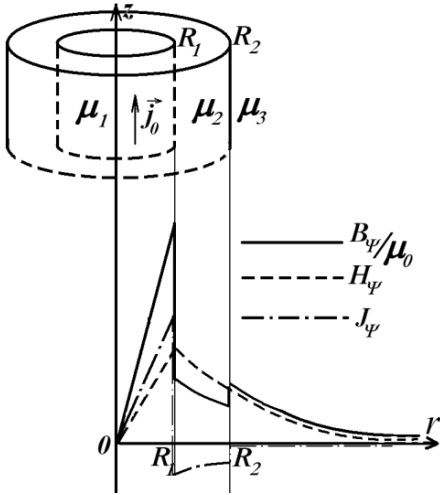
21. Примеры

1. Бесконечный парамагнитный цилиндр радиусом R_1 несет ток плотности $\vec{j} = j_0 \cdot \vec{e}_z$ и окружен коаксиальным с ним диамагнитным слоем с внешним радиусом R_2 , а затем вакуумом:

$$\mu_1 > 1, \mu_2 < 1, \mu_3 = 1.$$

1) В силу цилиндрической симметрии задачи можем воспользоваться интегральной формой теоремы Стокса для нахождения напряженности магнитного поля во всех областях:

$$H_{\psi_1} \cdot 2\pi r = j_0 \pi r^2 \rightarrow H_{\psi_1} = \frac{j_0 r}{2}.$$



Наличие магнетика в области 2 не повлияет на вид функциональной зависимости $H_{\psi}(r)$, поэтому можно сразу найти распределение $H_{\psi_{2,3}}$:

$$H_{\psi_{2,3}} \cdot 2\pi r = j_0 \pi R_1^2 \Rightarrow \vec{H}_{2,3} = \frac{j_0 R_1^2}{2r} \vec{e}_{\psi}.$$

2) Теперь определим распределение $B_{\psi}(r)$ в каждой i -й области:

$$B_{\psi_i} = \mu_0 \mu_i H_{\psi_i}.$$

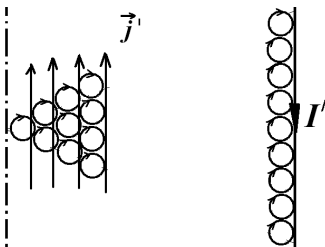
3) Определим намагниченность J_{ψ_i} в каждой области:

$$J_{\psi_i} = (\mu_i - 1) H_{\psi_i}.$$

4) Изобразим на графиках зависимости $H_{\psi}(r)$, $B_{\psi}(r)$, $J_{\psi}(r)$ для всех областей.

5) Выясним, как текут молекулярные токи и чему они равны.

Разрез цилиндра



а) При $r < R_1$ $\vec{j}' \uparrow \uparrow \vec{j}_0$.

\vec{j}' в парамагнетиках обусловлены изменением по разрезу количества ориентированных молекулярных токов и соответственно \vec{p}_m , приходящихся на единицу длины цилиндра.

I'_{nos} текут в обратном направлении по поверхности так, что суммарный ток связанных зарядов равен нулю, то есть

$$I'_{nos} = - \int_0^{\pi R^2} \vec{j}' d\vec{s}.$$

Проверим это.

С одной стороны,

$$\begin{cases} \vec{J}(r) = (\mu_1 - 1) \frac{j_0 r}{2} \vec{e}_{\psi} \\ rot \vec{J} = \vec{j}' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{j}' = rot \vec{J} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rJ) \vec{e}_z = \vec{e}_z \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[(\mu_1 - 1) \frac{j_0 r^2}{2} \right] = (\mu_1 - 1) j_0 \vec{e}_z.$$

$$\vec{j}' = (\mu_1 - 1) j_0 \vec{e}_z \Rightarrow \int_0^{R_1} \vec{j}' d\vec{s} = (\mu_1 - 1) j_0 \pi R_1^2 = I' - \text{ток связанных зарядов, текущий по сечению}$$

проводника \uparrow вверх.



С другой стороны,

$$I'_{нов} = -\oint_L \vec{J}(R_1) \cdot R_1 d\psi \cdot \vec{e}_\psi \Big|_{\vec{J}(R_1) = (\mu_1 - 1) \frac{j_0 R_1}{2}} = -2\pi R_1 \cdot (\mu_1 - 1) \frac{j_0 R_1}{2} \Rightarrow I'_{нов} = -(\mu_1 - 1) j_0 \pi R_1^2 \quad - \quad \text{что и}$$

требовалось доказать.

$$I'_{нов} = -\int_s \vec{j}' d\vec{s}.$$

б) В области 2:

$\vec{H}_2 = \frac{j_0 R_1^2}{2r} \vec{e}_\psi \Rightarrow \vec{J}_2 = (\mu_2 - 1) \frac{j_0 R_1^2}{2r} \vec{e}_\psi$, то есть намагниченность \vec{J}_2 направлена по часовой стрелке $J_{\psi_2} < 0$.

Вопрос. В области 2 $\vec{j}'_2 = 0$?

Ответ. $rot \vec{J}_2 = (\mu_2 - 1) j_0 R_1^2 \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{r} \right) \cdot \vec{e}_z = 0 = \vec{j}'_2$.

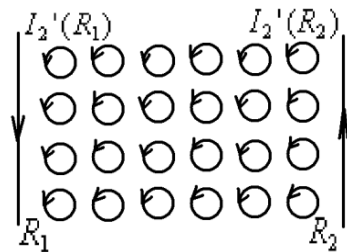
Это так, потому что:

- { магнетик изотропный и однородный;
- { нет токов проводимости.

Вопрос. В этой области вообще нет молекулярных токов?

Ответ. Микроскопические молекулярные токи есть, а макроскопические (усредненные) токи равны 0 (см. рисунок).

Цилиндр в разрезе в области 2



1) молекулярные токи текут так, что создают:

$$\vec{J} \downarrow \uparrow \vec{H} \uparrow \uparrow \vec{B} ;$$

$$-\vec{e}_\psi \quad \vec{e}_\psi \quad \vec{e}_\psi$$

2) число микроскопических молекулярных токов не изменяется с изменением $r \Rightarrow \vec{j}'_2 = 0$.

Вопрос. Существует ли поверхностный молекулярный ток?

Ответ. Да, конечно. На поверхности радиусом R_1 он течет вниз

так, что в итоге поверхность R_1 имеет $I'_{\Sigma_1} = I'_1 + I'_2$;

$$I'_1 = -(\mu_1 - 1) j_0 \pi R_1^2 ; \quad I'_2 = -\oint_L \vec{J}_2(R_1) d\vec{l} = \frac{2\pi R_1 \cdot (\mu_2 - 1) j_0 R_1^2}{2R_1} = (\mu_2 - 1) \pi R_1^2 j_0 ;$$

$$I'_{\Sigma_1}(R_1) = -(\mu_1 - \mu_2) j_0 \pi R_1^2 .$$

По наружной поверхности области 2 R_2 ток намагничивания $I'_2(R_2)$ течет вверх

$$I'_2(R_2) = -\oint_L \vec{J}_2(R_2) d\vec{l} = \frac{2\pi R_2 \cdot (1 - \mu_2) R_1^2 j_0}{2R_2} ,$$

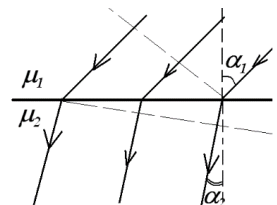
где $\vec{J}_2(R_2) = -\vec{e}_\psi (1 - \mu_2) \frac{R_1^2 j_0}{2R_2} \Rightarrow I'_2(R_2) = \pi R_1^2 j_0 (1 - \mu_2)$.

Общий ток намагничивания

$I' = \int \vec{j}' d\vec{s} + I'_{\Sigma_1} + I'_{\Sigma_2} = (\mu_1 - 1) j_0 \pi R_1^2 - (\mu_1 - \mu_2) j_0 \pi R_1^2 + \pi R_1^2 j_0 (1 - \mu_2) \equiv 0$ - что и требовалось доказать: суммарный ток намагничивания $\equiv 0$.

2. Какие линии $-\vec{B}$ или \vec{H} - представляют собой силовые линии поля \vec{a} ?

Для электрического поля линии \vec{E} частично исчезали или появлялись на границе раздела диэлектриков из-за существования поверхностных



связанных зарядов. Для магнетиков, по границам раздела которых не текут токи проводимости, можно предположить, что и линии \vec{B} , и линии \vec{H} не рвутся. Посмотрим, так ли это.

Проведем поверхности, перпендикулярные к линиям поля, \Rightarrow по рисунку видно, что плотность линий поля в среде 2 меньше приблизительно в два раза, то есть величина вектора \vec{a} в среде 1 приблизительно в 2 раза больше, чем в среде 2 \Rightarrow из этого рисунка очевидно, что составляющая a_τ изменилась:

Но $H_\tau = const \Rightarrow$ это линии поля \vec{B} и $\vec{a} = \vec{B}$.

Вопрос. Как соотносятся μ_1 и μ_2 ?

Ответ. $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} \Rightarrow \mu_1 \geq \mu_2$.

Вопрос. Как же тогда должны идти линии \vec{H} в этом случае?

$$B_1 = \mu_0 \mu_1 H_1;$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau};$$

$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow$ то есть $|\vec{H}|$ возрастает. Как это изобразить?

Ответ. Линии \vec{H}_2 идут чаще, чем в веществе 1.

Вопрос. Что же является источником поля \vec{H} , ведь магнитных зарядов нет и даже тока проводимости на поверхности нет?

Ответ. Поле \vec{H} не имеет физического смысла, а

$$\operatorname{div} \vec{H} = \operatorname{div} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} \right) = \frac{\operatorname{div} \vec{B}}{\mu_0 \mu} + \left(\frac{\vec{B} \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right)}{\mu_0} \right) = \frac{\vec{B} \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right)}{\mu_0},$$

то есть линии поля \vec{H} могут появляться и исчезать на границе раздела магнетиков. В данном случае $\mu_1 > \mu_2 \Rightarrow \frac{1}{\mu_1} < \frac{1}{\mu_2} \Rightarrow \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right)$ направлен вниз, то есть туда же, куда \vec{B} , и их произведение рождает новые линии \vec{H}_2 , но это не противоречит отсутствию магнитных зарядов.

3. Бесконечная пластина во внешнем магнитном поле. Изобразить токи намагничивания и поверхностный ток.

1) $\mu < 1$ – диамагнетик;

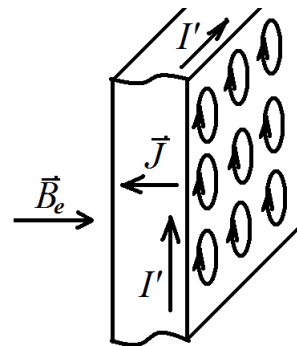
$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow B_i = B_e;$$

$$\vec{J} \downarrow \uparrow \vec{B} \uparrow \uparrow \vec{H};$$

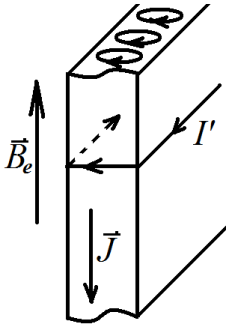
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} \rightarrow H_i > H_e.$$

$\vec{j}'_i = 0 \rightarrow$ существует только поверхностный ток I' .

$$\frac{I'}{a} = (\mu - 1) \frac{B}{\mu_0 \mu} - \text{ток единицы толщины пластины.}$$



2)



$\mu < 1$ – диамагнетик;

$$B_i < B_e; \quad H_i = H_e = H_\tau = \frac{B_e}{\mu_0}.$$

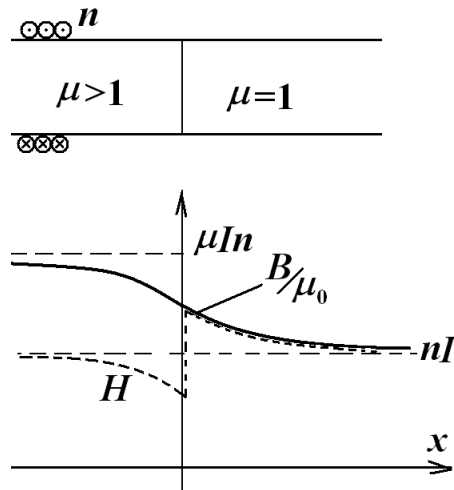
4. Бесконечный соленоид: n, I .

Изобразить \vec{B}, \vec{H} на оси соленоида.

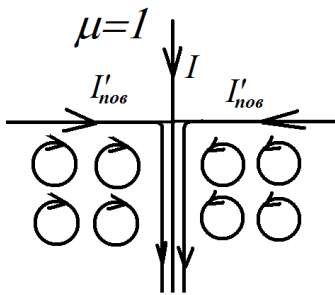
1) Что знаем:
$$\begin{cases} B_{1n}(0) = B_{2n}(0) \\ H(-\infty) = H(+\infty) = nI \\ B(-\infty) = \mu_0 \mu nI \\ B(+\infty) = \mu_0 nI \end{cases}$$

2) Строим $B(x)$.

3) Строим $H = \frac{B}{\mu_0 \mu}$.



5. Ток I течет по тонкому проводу, расположенному, как показано на рисунке, в вакууме и парамагнетике. Найти линейную плотность тока, текущего по поверхности магнетика.



$$\vec{H} = -\frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\psi;$$

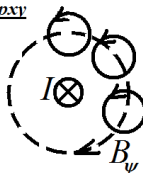
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r} \vec{e}_\psi.$$

Молекулярные токи – колечки, наннзанные на кольцо силовой линии $\vec{J} \parallel \vec{B}$, так как это парамагнетик \Rightarrow

по поверхности текут токи намагниченности с линейной плотностью

$$i' = \frac{I'}{2\pi r} = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi r} \text{ в направлении } (-\vec{e}_r).$$

Вид сверху



22. Механизмы намагничивания

1. Предыстория.

В последовательной классической теории магнетизм должен отсутствовать.

Бор в 1911 г. доказал из представлений классической статистики теорему:

В состоянии термодинамического равновесия система электрически заряженных частиц, помещенных в постоянное магнитное поле, не могла бы обладать магнитным моментом, если бы строго подчинялась законам классической физики.

Причина в том, что $\vec{F}_{\text{магн}} \perp \vec{v}$ и, следовательно, магнитная сила не может изменить кинетическую энергию системы.

Но ещё в 1905 г. Ланжевен успешно объяснил пара- и диамагнетизм без использования квантовых представлений. Причина в том, что Ланжевен по умолчанию использовал сугубо квантовые представления, а именно что из электрически заряженных частиц можно построить устойчивые образования – атомы и молекулы.

Несмотря на свою непоследовательность и недостаточность, полуклассическая теория Ланжевена позволяет в основном уяснить природу магнетизма.

2. Магнитные свойства атомов.

Электроны вращаются вокруг ядра по окружности радиуса R .

Это вращение адекватно току
$$\begin{cases} I = \frac{-e}{T} \\ T = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow I = -\frac{ev}{2\pi R} \end{cases}$$

При этом электрон имеет орбитальный момент импульса $L = mvR$ и магнитный момент

$$p_m = \pi R^2 \cdot I = -\frac{ev\pi R^2}{2\pi R} = -\frac{evR}{2}.$$

Отношение этих моментов $\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}$ – гиромагнитное отношение.

Оно верно и для эллиптической орбиты:

Согласно теории Бора, орбитальный момент атома L квантуется:

$$L = n\hbar,$$

где $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$ Дж·с = постоянная Планка = квант действия.

$$p_m = -\frac{e\hbar}{2m} \cdot n \text{ также квантуется} \Rightarrow p_m = \mu_B \cdot n,$$

где $\mu_B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e\hbar}{2m}$ – магнетон Бора.



На самом деле в квантовой механике:

1) Орбит нет, но места нахождения электронов описываются плотностью вероятности их положения в пространстве. Наиболее вероятные состояния составляют спектр так называемых дискретных состояний, в которых плотность вероятности распределения заряда и массы не изменяется во времени. Это стационарные состояния.

2) Формула $L = n\hbar$ определяет не полный момент импульса электрона, а его проекцию на направление магнитного поля, в то время как две другие проекции момента импульса не имеют определенного значения.

3) Помимо орбитального, электрон обладает ещё и собственным моментом импульса или спином \vec{S} . Причём в стационарном состоянии

$$S = \pm \frac{1}{2} \hbar - \text{проекция спина на выбранное направление} \Rightarrow p_s = -\frac{e}{m} \cdot S.$$

3. Объяснение диамагнетизма.

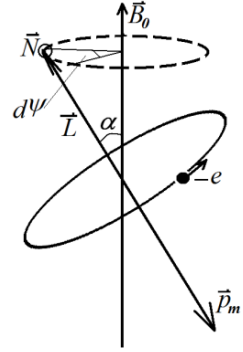
Пусть для рассматриваемого атома $\sum_{k=1}^Z \vec{p}_{mk} = 0 = \vec{p}_{\text{мсобств}}$, где Z – атомный номер, который равен числу протонов в ядре и, соответственно, электронов в оболочке.

Для любого электрона

$$[\vec{p}_m \vec{B}_0] = \vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \left[-\frac{e}{2m} \vec{L}, \vec{B}_0 \right] = \frac{e}{2m} LB_0 \sin \alpha \cdot \vec{e}_\psi \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{e}{2m} LB_0 \sin \alpha \cdot \vec{e}_\psi = L \sin \alpha \cdot \frac{eB_0}{2m} \vec{e}_\psi, \text{ то есть } \vec{L} \text{ будет прецессировать}$$

вокруг направления поля.



Вспоминаем теорию гироскопов:

$$\frac{d\vec{M}_0}{dt} = [\vec{\omega}', \vec{M}_0], \text{ где } \vec{\omega}' \text{ – угловая скорость прецессии.}$$

$$|d\vec{L}| = L \sin \alpha \cdot d\psi;$$

$$\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = L \sin \alpha \cdot \frac{d\psi}{dt} = L \sin \alpha \cdot \frac{eB_0}{2m} \Rightarrow$$

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\psi}}{dt} = \frac{e\vec{B}_0}{2m} \text{ – угловая скорость прецессии.}$$

При этом не важно, в какую сторону вращается электрон на своей орбите, прецессировать он будет всё равно с $\vec{\Omega} \uparrow \vec{B}_0$.

Таким образом, электрон на орбите под действием внешнего магнитного поля \vec{B}_0 будет совершать прецессионное движение с $\vec{\Omega} = \frac{e\vec{B}_0}{2m}$.

Это теорема Лармора:

Действие магнитного поля на движущийся электрон заключается в наложении на первоначальное движение равномерного вращения вокруг направления магнитного поля \Rightarrow

возникает наведенный момент импульса у всех электронов: $\vec{L}_{\text{нав}} \sim \vec{\Omega} = \frac{e\vec{B}_0}{2m} \Rightarrow$

\Rightarrow так как заряд электрона меньше нуля, то $\vec{p}_{\text{т навед}} \uparrow \downarrow \vec{L}_{\text{навед}}$, то есть возникает $\vec{p}_{\text{т навед}} \uparrow \downarrow \vec{B}_0$
 $\Rightarrow \vec{p}_{mk} \neq 0 \uparrow \downarrow \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{J} \uparrow \downarrow \vec{B}_0$. Это диамагнетизм.

Ограничение на B_0 :

$$B_0 \ll \frac{2m\omega_e}{e} = \frac{2 \cdot 10^{-30} \cdot 10^{15}}{1,7 \cdot 10^{-19}} \approx 10^4 \text{ Тл} \text{ – это фантастически большое поле. Рекордные поля,}$$

полученные до настоящего времени, не превосходят сотен Тл (и то только в динамическом режиме).

Вопрос. С ларморовой прецессией связана дополнительная энергия атома. Кто эту энергию сообщает атому?

Ответ. Взаимодействие с постоянным магнитным полем дополнительной энергии дать не может, так как работа магнитной силы равна 0. Постоянное магнитное поле может только поддерживать, но не создавать ларморово вращение.

Ларморово вращение возникает в момент включения магнитного поля, причем $\frac{d\Omega}{dt}$

пропорциональна изменению потока \vec{B} через электронный контур \Rightarrow ларморова прецессия – одно из проявлений электромагнитной индукции.



Диамagnetизм присущ всем без исключения веществам.

Идеальный диамagnetик – сверхпроводник, но механизм диамagnetизма сверхпроводника другой: электронные пары движутся без сопротивления под действием ЭДС индукции, пропорциональной скорости изменения магнитной индукции $\sim \dot{B} \Rightarrow B_{\text{внутр}} = 0$.

4. Объяснение парамагнетизма.

Теория парамагнетизма была создана Ланжевеном (до теории Дебая поляризации полярных диэлектриков), но практически эти теории ничем не отличаются.

Вспомним, что для диэлектриков мы получили $\aleph = \frac{p_0^2 n}{3kT}$, $\vec{P}_{\text{ед.об.}} = \aleph \vec{E}$.

Для магнетиков $\vec{J}_{\text{ед.об.}} = \frac{p_{m\text{ат}}^2 n}{3kT} \vec{H}$, $\chi_m = \frac{n p_{m\text{ат}}^2}{3kT}$.

Здесь $p_{m\text{ат}}$ – магнитный момент атома, n – концентрация атомов, имеющих $p_{m\text{ат}} \neq 0$.

kT стремится разбросать $\vec{p}_{m\text{ат}}$ изотропно, а поле \vec{B}_0 – выстроить $\vec{p}_{m\text{ат}} \uparrow \vec{B}_0$.

χ_m получается в линейном приближении при условии $\frac{B_0 p_m}{kT} \ll 1 \Rightarrow$

$$B \ll \frac{kT}{p_m} \sim 450 \text{ Тл при } p_m = \mu_B = 0,9 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}.$$

В этом случае магнитное поле тоже только поддерживает, а не создает намагничивание. В парамагнетиках намагничивание создается и устанавливается в результате столкновений атомов между собой, так как все атомы прецессируют, а толчки против прецессионного вращения сильнее, чем толчки противоположного направления, подобно тому, что сила сопротивления, испытываемая человеком, бегущим против ветра, больше силы сопротивления при движении по ветру.

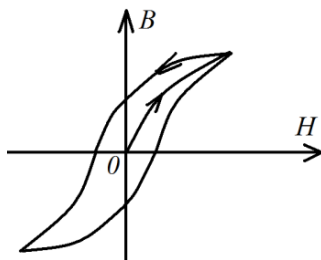
5. Ферромагнетизм.

Ферромагнетики – твердые вещества, которые могут обладать спонтанной намагниченностью, то есть имеют $\vec{J} \neq 0$ в отсутствие внешнего поля, то есть при $\vec{B} = 0$.

Ферромагнетиками являются: железо, кобальт, никель и их сплавы (аналог – сегнетоэлектрики).

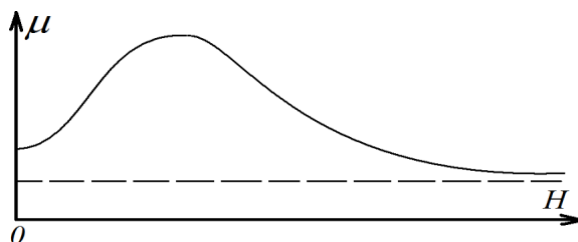
А.Г. Столетов (1839–1896) исследовал свойства ферромагнетиков:

1) Нелинейность B и H :



$B \neq H$, неоднозначность $B(H)$;
гистерезис – запаздывание.

2) Зависимость магнитной проницаемости от H имеет максимум $\mu_{\text{max}} \sim 10^4$.



3) Для любого ферромагнетика существует температура Кюри T_k такая, что:

при $T > T_k$ вещество теряет ферромагнитные свойства в результате фазового перехода II рода и становится парамагнетиком.

Для никеля (Ni) $T_{k_{Ni}} = 360^\circ \text{C}$.

Причина ферромагнетизма заключается в существовании доменов – областей, имеющих $|\vec{p}_m| \gg |\vec{p}_{m \text{ ат}}|$. Формально ферромагнетизм описывается теорией Вейсса.

Формальная теория Вейсса:

Силы взаимодействия между атомами сводятся к некоторому эффективному магнитному полю, которое стремится установить магнитные моменты отдельных атомов \vec{p}_m параллельно друг другу.

$$\vec{B}_{\text{эфф}} = \vec{H} + b\vec{J}.$$

$$\text{Для ферромагнетика при } T < T_k \quad \mu = \frac{dB}{dH}; \quad \chi = \frac{dJ}{dH}.$$

Эти внутренние поля гораздо больше, чем магнитное поле атома. Но на вопрос, откуда берутся эти поля, теория Вейсса ответа не дает.

Френкель и Гейзенберг объяснили природу молекулярного поля Вейсса:

причина заключается в обменном взаимодействии.

Обменные силы стремятся установить спины электронов соседних атомов параллельно. Это короткодействующие силы, которые существуют на расстояниях порядка размера атома $\sim 1 \text{ \AA}$. Обменное взаимодействие следует из тождественности частиц и приводит к согласованности движения электронов соседних атомов, что приводит к возникновению доменов – ферромагнетики делятся на малые макроскопические области намагничивания при $T < T_k$.

В классической механике аналога обменного взаимодействия нет.

Существуют *антиферромагнетики*, у которых $\vec{S} \uparrow \downarrow$ друг друга.

Вопрос. Как ведут себя эти вещества в магнитном поле?

Ответ. Это очень слабые парамагнетики с $\mu \approx 1$. Температура Кюри для них называется *точкой Нееля* (*хром, марганец*). Ландау предсказал их существование в 1933 г.



IV. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

1. Электромагнитная индукция

1. ЭДС.

Поток магнитной индукции $\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{s}$.

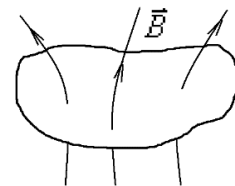
М. Фарадей в 1831 г. открыл закон электромагнитной индукции.

Закон Фарадея:

При изменении потока магнитной индукции через площадь контура в нем возникает электродвижущая сила ЭДС ε индукции:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s}.$$

ЭДС возникает при любом изменении магнитного потока в контуре и может быть обусловлена изменением \vec{B} , площади контура или ориентации контура в магнитном поле.

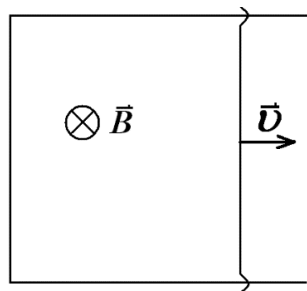


При этом в контуре возникает индукционный ток, такой, который своим магнитным полем препятствует изменению магнитного потока через контур.

Правило Ленца:

индукционный ток имеет такое направление, чтобы противодействовать причине, его вызывающей, то есть чтобы противодействовать изменению потока.

2. Принципиальная схема динамо-машины (генератора).

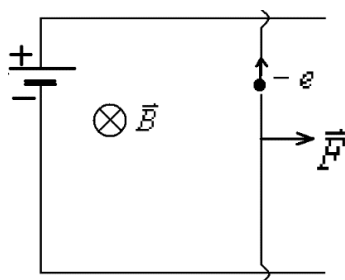


$\vec{F}_{-e} = -e[\vec{v}, \vec{B}]$ – магнитная сила, действующая на каждый электрон, находящийся на движущейся перемычке.

$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{-e}}{-e} = [\vec{v}, \vec{B}]$ – поле сторонних сил магнитного происхождения, которое существует только на движущейся перемычке.

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -Bvl = -Bl \frac{dx}{dt} = -B \frac{ds}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ – ЭДС в контуре.}$$

3. Модель электромотора.



$$\delta \vec{F}_{\delta q} = \delta q [\vec{v}, \vec{B}] = \delta q \left[\frac{d\vec{l}}{dt}, \vec{B} \right] = I [d\vec{l}, \vec{B}],$$

где δq – движущийся по перемычке заряд.

$\vec{F} = I [\vec{l}, \vec{B}]$ – сила, действующая на перемычку \Rightarrow перемычка отъезжает.

4. Максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции.

$$\int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Всякое изменение магнитной индукции во времени порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле.

Вопрос. Какая формулировка, Максвелла или Фарадея, является более общей?

Ответ. а) Согласно Фарадею, электромагнитная индукция заключается в возбуждении электрического тока, для её наблюдения необходимо существование замкнутого контура.



б) Согласно Максвеллу, возникает напряженность электрического поля \vec{E} , а не ток; ток потечет, если в том месте, где появилось $\vec{E} \neq 0$, окажется проводящая среда, и это лишь одно из проявлений \vec{E} . Оно может производить и другое действие: например, поляризовать диэлектрик, ускорять или тормозить заряженные частицы.

Вывод: формулировка Максвелла $rot\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ является более общей, чем закон электромагнитной индукции Фарадея. Однако при наличии замкнутого контура формулировка Фарадея имеет то преимущество, что учитывает изменение площади и ориентации контура как причин возникновения электродвижущей силы. При наличии проводящего замкнутого контура L неизменной формы и ориентации закон электромагнитной индукции Фарадея представляет собой интегральную форму уравнения Максвелла:

$$\varepsilon_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_s \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{s} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

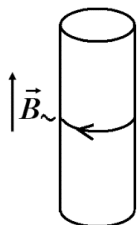
$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ – дифференциальная форма закона электромагнитной индукции.}$$

Это уравнение в электростатике имело вид $rot\vec{E} = 0$ и свидетельствовало о потенциальности электростатического поля. В более общем случае, динамики, *электрическое поле содержит в себе две компоненты – потенциальную, обусловленную электрическими зарядами, и вихревую, связанную с изменением магнитной индукции в данной точке.*



5. Токи Фуко.

В массивных проводниках, движущихся в магнитном поле или помещенных в переменное магнитное поле \vec{B} , возбуждаются вихревые индукционные токи – токи Фуко.



В соответствии с правилом Ленца, токи Фуко текут так, чтобы препятствовать своим полем изменению внешнего поля. Если на проводник наложить B , то оно будет “выталкиваться” из проводника к поверхности в результате экранировки токами Фуко. Этот эффект максимален в сверхпроводниках. Возникает скин-эффект.

2. Самоиндукция. Индуктивность контура

1. Индуктивность контура.

Ток, текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот контур поток Φ_B .

Изменение тока I в контуре \Rightarrow изменение $\Phi_B \Rightarrow \varepsilon$ – ЭДС. Это явление называется самоиндукцией.

Из закона Био – Савара – Лапласа следует, что $B \sim I \Rightarrow \Phi \sim I \Rightarrow \Phi = LI$,

где L – индуктивность контура – коэффициент пропорциональности между током в контуре и магнитным потоком, пронизывающим контур и порожденным этим током.

$\Phi \sim I$ только тогда, когда μ среды, окружающей контур, не зависит от H , то есть $\mu = const$. Для ферромагнетиков это не так \Rightarrow в присутствии ферромагнетика $L = f(I)$, что неудобно.

$$\varepsilon_s = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt} - \frac{dL}{dt}I \text{ – ЭДС самоиндукции.}$$

L – функция геометрии контура (формы и размера) и магнитных свойств окружающей среды.

Физический смысл индуктивности – мера инертности по отношению к электромагнитным явлениям (аналог массы и момента инерции в механике).

2. Индуктивность соленоида.

Рассмотрим очень длинный соленоид и вычислим полный магнитный поток, пронизывающий все его витки, по которым течет ток I .

$$\Phi = BS = \mu_0 \mu n I S_1 n l = \mu_0 \mu n^2 I V \Rightarrow L_{\text{соленоида}} = \mu_0 \mu n^2 V - \text{индуктивность соленоида.}$$

3. Индуктивность тороида.

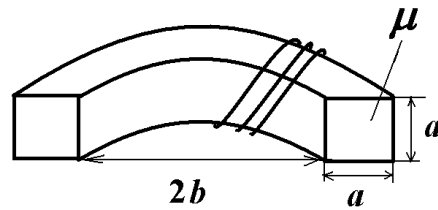
N – всего витков, намотанных на тор.

$$H \cdot 2\pi r = NI \rightarrow B = \frac{NI}{2\pi r} \mu_0 \mu;$$

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 \mu NI}{2\pi r} \cdot a \cdot N dr;$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mu N^2 a I}{2\pi} \int_b^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu N^2 a I}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b} \Rightarrow$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu a N^2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b} - \text{индуктивность тороида.}$$



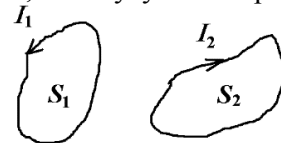
3. **Взаимная индукция. Теорема взаимности**

Полный поток через площадь первого контура (поверхность, натянутую на первый контур):

$$\Phi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2.$$

Полный поток через площадь второго контура:

$$\Phi_2 = L_{22} I_2 + L_{21} I_1.$$



Полный поток называется потокоцеплением.

Для соленоида из N витков $\Phi = \sum_k L_{ik} I_k = N\Phi_1$ – сумма по всем контурам.

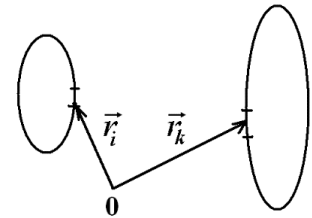
L_{ii} – коэффициент самоиндукции или индуктивность i -го контура.

В отсутствие ферромагнетиков выполняется теорема взаимности:

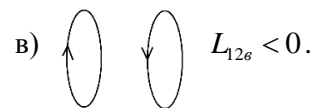
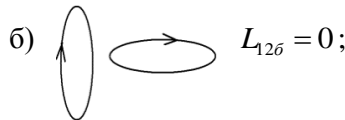
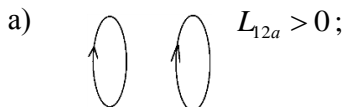
$$L_{ik} = L_{ki} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_i} \oint_{\Gamma_k} \frac{d\vec{r}_i d\vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}, \text{ где } L_{ik} - \text{коэффициент взаимной индукции}$$

i -го и k -го контуров.

L_{ik} определяется геометрией контуров, их взаимным расположением и магнитной проницаемостью окружающего пространства.



Пример.



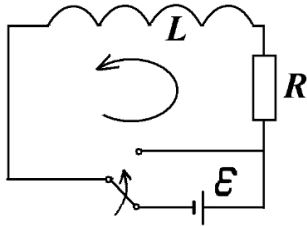
Когда токи в контурах текут в одном направлении, $L_{12} > 0$,
когда токи в контурах текут в разных направлениях, $L_{12} < 0$.

При последовательном включении двух катушек $L = L_1 + L_2 + 2L_{12}$, при этом может быть $L_{12} \geq 0$.

4. Токи при замыкании и размыкании цепи, содержащей индуктивность

1. Размыкание цепи.

Пусть сопротивление источника и катушки равно нулю.

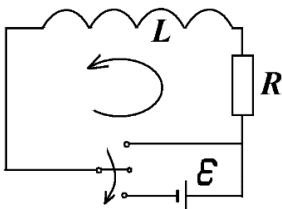


При размыкании $\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} = IR$; при $t = 0$ $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$.

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \Rightarrow \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t \Rightarrow I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L} t};$$

$\tau = \frac{L}{R}$ – время, за которое ток в цепи убывает в e раз.

2. Замыкание цепи.



$$R \cdot I + L \frac{dI}{dt} = \varepsilon \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon - IR}{L} = \frac{R}{L} \left(\frac{\varepsilon}{R} - I \right) \Rightarrow$$

$$\frac{dI}{-\frac{\varepsilon}{R} + I} = -\frac{R}{L} dt \Rightarrow$$

$$\ln \left(I - \frac{\varepsilon}{R} \right) = -\frac{R}{L} t + const \Rightarrow I = C e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{\varepsilon}{R}.$$

Из начальных условий $I(0) = 0$ находим $C \Rightarrow C = -\frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$.

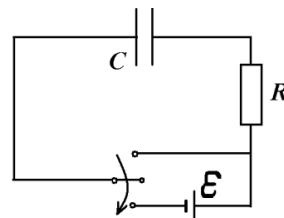
5. Токи при замыкании и размыкании цепи, содержащей емкость

1. Замыкание цепи.

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = I \\ IR + U_c = \varepsilon \Rightarrow \frac{dq}{dt} RC = -(q - C\varepsilon) \Rightarrow \\ U_c = \frac{q}{C} \end{cases}$$

$$\frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln(q - C\varepsilon) + const = \frac{t}{RC} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} q = C\varepsilon + A_1 e^{-\frac{t}{RC}} \\ q(0) = 0 \Rightarrow A_1 = -C\varepsilon \Rightarrow q = C\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \end{cases}$$

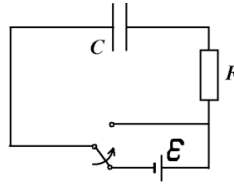


Напряжение на обкладках конденсатора изменяется по закону $U = \frac{q}{C} = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \Rightarrow$

ток в цепи уменьшается по закону $I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon C}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$.

2. Размыкание цепи.

$$\begin{cases} U = RI = \frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt} \Rightarrow \\ I = -\frac{dq}{dt} \end{cases}$$



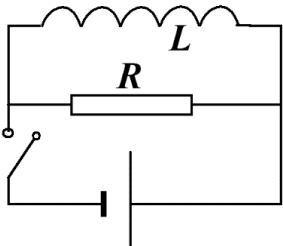
Заряд на обкладках конденсатора уменьшается по закону $q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$.

Ток в цепи изменяется по закону $I = \frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$.

6. Энергия магнитного поля

Пусть существует соленоид с током I . Он создает магнитное поле, сцепленное с витками соленоида. Если разомкнуть ключ, то через сопротивление R будет некоторое время течь ток:

$$I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$$



Работа, совершаемая этим током за время dt :

$$\left. \begin{aligned} \delta A &= \epsilon_s \cdot I \cdot dt = -I d\Phi \\ d\Phi &= -\epsilon_s dt = L dI \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta A = -L I dI \Rightarrow A = L \frac{I^2}{2} - \text{эта работа идет на}$$

приращение внутренней энергии сопротивления R и соединительных проводов.

При этом исчезает магнитное поле и, так как больше никаких изменений не происходит, следовательно, магнитное поле является источником этой энергии:

$$W = L \frac{I^2}{2} - \text{энергия соленоида с током} - \text{работа, которую надо совершить против ЭДС}$$

самоиндукции в процессе нарастания тока от 0 до I (или убыли от I до 0).

Учтем, что индуктивность соленоида

$$L = n^2 \mu_0 \mu V \Rightarrow W = \frac{n^2 \mu_0 \mu V I^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu n I \cdot n I}{2} V = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} V = w \cdot V \Rightarrow$$

$$w = \frac{\vec{B} \vec{H}}{2} - \text{плотность энергии магнитного поля.}$$

В случае связанных контуров:

$$W = L_{11} \frac{I_1^2}{2} + L_{12} I_1 I_2 + L_{22} \frac{I_2^2}{2}.$$

Для N контуров:

$$W = \sum_{i,k=1}^N \frac{1}{2} L_{ik} I_i I_k,$$

где L_{ik} – взаимная индуктивность, L_{ii} – индуктивность i -го контура.



7. Способы вычисления индуктивности

Существуют два способа вычисления индуктивности:

1-й способ: из определения $L = \frac{\Phi}{I}$.

Сложность заключается в том, что не всегда понятно, как надо провести в теле проводника геометрический контур, необходимый для вычисления L .

Если надо вычислить взаимную индуктивность, то можно использовать выражение

$$L_{12} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\Phi_1}{I_2}.$$

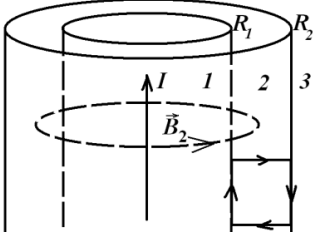
2-й способ: из энергии $L = \frac{2W}{I^2}$.

Преимущество этого способа заключается в том, что не надо думать о выборе контура. В случае очевидных простых геометрий первый способ может быть проще.

Примеры.

1. Коаксиальный кабель, состоящий из двух тонкостенных цилиндров.

Пусть внутренний цилиндр несет ток I вверх, а по внешнему цилиндру ток I течет вниз.



Найдем магнитную индукцию в каждой области:

$$B_1 = 0; \quad B_3 = 0; \quad B_2 = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}.$$

1) 1-й способ.

Вычислим поток поля $B_2 = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}$ через показанный на рисунке

прямоугольный контур, имеющий единичную длину:

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} B_2 dr = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} I \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

2) 2-й способ.

Плотность энергии во второй области:

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu I^2}{2(2\pi r)^2}.$$

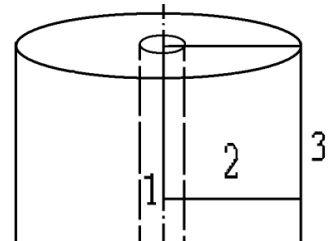
Энергия магнитного поля, приходящаяся на единицу длины кабеля:

$$W = \int w dV = \frac{\mu_0 \mu}{2(2\pi)^2} I^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} 2\pi r dr = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} I^2 \ln \frac{R_2}{R_1} = L \frac{I^2}{2} \Rightarrow$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

1а. Обычно коаксиальный кабель состоит из внутреннего сплошного проводника радиуса R_1 и наружной коаксиальной с проводником тонкостенной трубки радиуса R_2 .

1) В этом случае при расчете первым способом необходимо провести прямоугольный контур через ось цилиндра, как показано на рисунке, и, вычислив поле $B_i = \frac{\mu_0 \mu I r}{2\pi R_1^2}$ внутри сплошного проводника, определить полный поток, пронизывающий выбранный контур:



$$\Phi = \int_0^R \frac{\mu_0 \mu I r}{2\pi R^2} dr + \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} I \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 \mu I R^2}{\pi R^2} + \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} I \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} I \left(\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \left(\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2} \right).$$

2) Индуктивность единицы длины коаксиального кабеля, рассчитанная вторым способом из энергии с учетом поля $B_i = \frac{\mu_0 \mu I r}{2\pi R_1^2}$ внутри сплошного проводника, $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$.

В данном случае разные способы расчета дают добавки к логарифму, отличающиеся в 2 раза, однако надо иметь в виду, что $\frac{\mu_0}{4\pi} \cong 10^{-7} \text{ Гн} = 0,1 \text{ мкГн}$, представляет собой очень малую индуктивность, а полученное отличие связано со сложностью выбора контура. Полученный результат несет в себе информацию о том, что индуктивность единицы длины прямого провода много меньше индуктивности единицы длины коаксиального кабеля.

2. Индуктивность единицы длины двухпроводной линии.

1-й способ.

$$B_1 = \frac{\mu_0 I \mu}{2\pi \left(\frac{b}{2} - x \right)}; B_2 = \frac{\mu_0 I \mu}{\left(\frac{b}{2} + x \right) 2\pi} \Rightarrow$$

$$B_{\Sigma} = \frac{\mu_0 \mu I b}{2\pi \left(\frac{b^2}{2} - x^2 \right)} \Rightarrow$$

$$\Phi = 2 \int_0^{\frac{b}{2}-r} B dx = 2 \mu_0 \mu I \int_0^{\frac{b}{2}-r} \frac{b \cdot dx}{2\pi \left(\frac{b^2}{4} - x^2 \right)} = \frac{\mu_0 \mu I}{\pi} \left[\ln \left(\frac{b}{2} + x \right) \Big|_0^{\frac{b}{2}-r} - \ln \left(\frac{b}{2} - x \right) \Big|_0^{\frac{b}{2}-r} \right] \cong \frac{\mu_0 \mu}{\pi} I \ln \frac{b}{r}.$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} \ln \eta = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} \ln \frac{b}{r} - \text{индуктивность единицы длины двухпроводной линии.}$$

2-й способ.

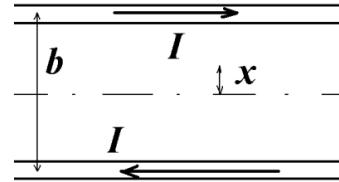
$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} w dV;$$

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu};$$

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2\vec{B}_1 \vec{B}_2;$$

$$W = \frac{L_1 I^2}{2} + \frac{L_2 I^2}{2} + L_{12} I^2 = \frac{L I^2}{2} \Rightarrow L = L_1 + L_2 + 2L_{12};$$

$$L_1 = L_2 = \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \text{ или } \frac{\mu_0}{8\pi} \text{ из энергии} \right\}.$$

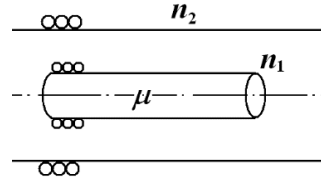


$L_{12} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \eta$, так как $\Phi_2 = \int_r^{r+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \eta$, где Φ_2 – поток, который создает один из проводников (в данном случае второй) в пространстве между проводами и в другом (первом) проводе $L = \frac{\mu_0}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \ln \eta \right\}$ или $L = \frac{\mu_0}{\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \ln \eta \right\}$.

3. Взаимная индуктивность двух соленоидов, вставленных один в другой.

Дано: n_1, S, μ, n_2

Найти: $L_{12} - ?$

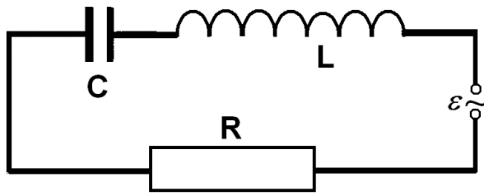


Решение.

$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$, где Φ_{12} – поток через витки соленоида 1, если во втором течет ток I_2 .

$\Phi_{12} = S\mu n_1\mu_0 n_2 I \Rightarrow L_{12} = \mu_0\mu n_1 n_2 S$ – взаимная индуктивность соленоидов на единицу длины.

8. Колебательный RLC-контур. Резонанс токов и напряжений. Добротность



Рассмотрим процессы, происходящие в колебательном RLC-контуре, в котором действует ЭДС $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$.

$$R \cdot I + U_c = \varepsilon - L \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

$U_c = \frac{q}{C}$ – падение напряжения на емкости.

Учтем связь тока I с зарядом на обкладках конденсатора: $I = \frac{dq}{dt}$.

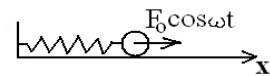
Преобразуем уравнение (1) в дифференциальное уравнение относительно заряда q :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon_0 \cos \omega t \quad (2)$$

Разделив все члены уравнения на L , получим для заряда q неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \cdot \dot{q} + \frac{q}{CL} = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos \omega t \quad (3)$$

Решение подобного дифференциального уравнения подробно изучалось нами при рассмотрении вынужденных колебаний механической системы:



$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (4)$$

Введем уже привычные обозначения $\beta = \frac{r}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, тогда уравнение примет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \text{ где } f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Для колебательного контура $\beta = \frac{R}{2L}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$; $f_0 = \frac{\varepsilon_0}{L}$.

Полезно обратить внимание на то, что в соответствии с механической аналогией индуктивность контура играет роль меры инерции, подобно массе, а величина, обратная емкости, олицетворяет коэффициент упругости системы.

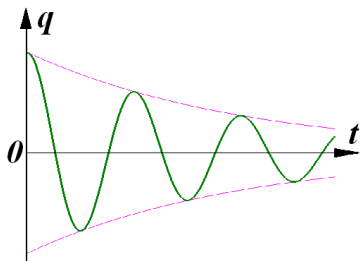
Общее решение такого дифференциального уравнения ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения x_1 и частного решения неоднородного уравнения x_2 .

$$x = x_1 \text{ общ. однород} + x_2 \text{ частн. неоднород};$$

$$x = x_1 \text{ общ. однород} = x_{\text{затух. колеб.}} = A_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \alpha_1);$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \text{ — частота свободных колебаний системы в отсутствие}$$

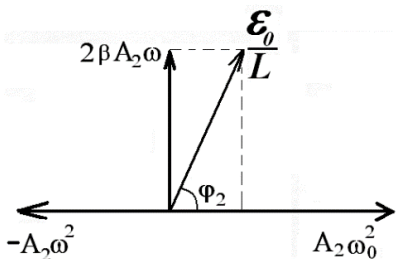
вынуждающей силы, а в случае RLC -контура — в отсутствие переменной ЭДС.



← Этот график иллюстрирует изменение заряда на обкладках конденсатора во времени в отсутствие переменной ЭДС в контуре (свободные затухающие колебания).

Решение x_2 частн. неоднород. определяет собой в механике характер движения системы, совершающей установившиеся вынужденные колебания, а для колебательного контура x_2 частн. неоднород. описывает закон изменения заряда на обкладках конденсатора при условии действия в колебательном контуре ЭДС $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$.

Для нахождения x_2 частн. неоднород. $= A_2 \cos(\omega t - \varphi_2)$ используем векторную диаграмму так, как это делалось при изучении механических колебаний.



$$\Rightarrow A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + 4\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \omega^2}}.$$

Здесь ω — частота ЭДС.

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{R\omega}{L\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} \leftarrow \text{знак } \operatorname{tg} \varphi_2 \text{ может}$$

быть отрицательным, если $\omega_0 < \omega$ и, следовательно, в этом случае сдвиг фаз между вынуждающей силой и смещением $\varphi_2 > \frac{\pi}{2}$.

$$x_2 = \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_2) = q(t).$$

Это решение соответствует закону изменения заряда на обкладках конденсатора и напряжения на его обкладках:

$$U_C = \frac{\varepsilon_0/LC}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_2).$$

Исследуем полученное решение.

1) Если активное сопротивление контура R стремится к 0, то коэффициент затухания системы

$$\beta \rightarrow 0 \Rightarrow q = A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha_1) + \frac{\varepsilon_0/L}{\frac{1}{LC} - \omega^2} \cos \omega t.$$

В этом случае первое слагаемое не затухает, A_1 и α_1 определяются из начальных условий. При $\beta \rightarrow 0$ $A_2 \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} \infty$.

2) Найдем ток в контуре $I = \frac{dq}{dt} = -\frac{\omega \varepsilon_0 / L}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R}{L})^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi_2)$.

Ток в контуре, а значит, и напряжение на активном сопротивлении сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$ относительно напряжения на емкости и, как будет показано ниже, на $(-\frac{\pi}{2})$ относительно напряжения на индуктивности.

Заметим, что сдвиг фазы тока относительно фазы ЭДС определяется углом $\varphi = \varphi_2 - \frac{\pi}{2}$:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\omega \varepsilon_0 / L}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R}{L})^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_2 + \frac{\pi}{2}) = \frac{\omega \varepsilon_0 / L}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R}{L})^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

При этом $tg \varphi = \frac{1}{R}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$.

3) Резонанс в колебательном контуре. Найдем максимум $A_2(\omega)$:

$$A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}};$$

A_{2max} , когда минимален знаменатель $\zeta = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \leftarrow \min$.

$$(\zeta^2)' = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\beta^2 \omega = -4\omega_0^2 \omega + 4\omega^3 + 8\beta^2 \omega = 0;$$

$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \leftarrow$ резонансная частота – частота, при которой ЭДС с амплитудой ε_0 может возбудить колебания напряжения и заряда на обкладках конденсатора с максимальной амплитудой.

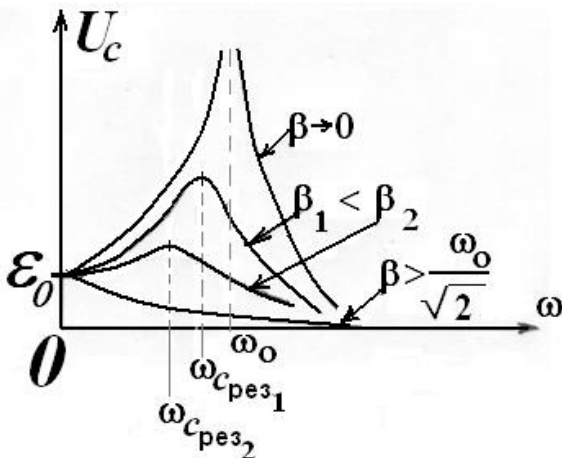
Резонансная амплитуда $q_{max} = q_{рез} = \frac{\varepsilon_0 / L}{2\beta \sqrt{-\beta^2 + \omega_0^2}} \approx \frac{\varepsilon_0}{R \omega_0}$ при $\beta \ll \omega_0 \Rightarrow R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$, так

как $\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} = \sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2 \omega^2} = 2\beta \sqrt{\beta^2 + \omega^2} = 2\beta \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2 - 2\beta^2} = 2\beta \omega_{своб} \approx 2\beta \omega_0$.

При $\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \rightarrow R > \sqrt{\frac{2L}{C}}$ резонанс в контуре

отсутствует.

Если $\omega = 0$, то в контуре действует не переменная во времени, а постоянная ЭДС, и заряд на обкладках конденсатора $q = A_2 = \varepsilon_0 \cdot C$.



Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: чем ближе частота ЭДС к резонансной частоте контура, тем больший максимальный заряд возникает на обкладках конденсатора.



Проводя параллель между механическим резонансом и резонансом в колебательном контуре RLC , заметим, что в колебательном контуре различают:

а) резонанс напряжений на емкости – соответствует резонансу амплитуды механических колебаний, так как напряжение на емкости пропорционально заряду и соответственно

$$\omega_{C \text{ рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \text{ Этот вопрос мы уже разобрали.}$$

б) Резонанс токов – соответствует резонансу напряжений на сопротивлении и по аналогии резонансу скоростей механической системы $\Rightarrow \omega_{I \text{ рез}} = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Проверим это, определив частоту ЭДС, соответствующую резонансу тока $I(t)$ в контуре:

$$I = \frac{\omega \varepsilon_0 / L}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{\omega \varepsilon_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi).$$

Чтобы найти I_{\max} , продифференцируем квадрат амплитуды тока I по частоте ω :

$$(I_{\max}^2)'_{\omega} = \left[\frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \right]' = \frac{2\omega[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2] - \omega^2[2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\beta^2 \omega]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\omega[\omega_0^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \omega^4 + 4\beta^2 \omega^2 + 2\omega_0^2 \omega^2 - 2\omega^4 - 4\beta^2 \omega^2] = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_0^4 - \omega^4 = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0, \text{ то есть при } \omega = \omega_0 \text{ наблюдается резонанс тока в контуре.}$$

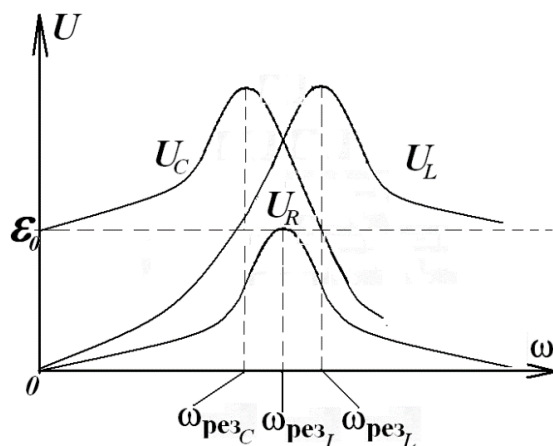
При этом $I_{\max} = \frac{\varepsilon_0}{R}$.

в) Резонанс напряжений на индуктивности – соответствует резонансу ускорений механической системы, так как напряжение на индуктивности пропорционально второй производной заряда по времени $\Rightarrow \omega_{L \text{ рез}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{R^2 C^2}{2}}}$.

Выражение $\omega_{L \text{ рез}}$ предлагается проверить самостоятельно, предварительно найдя резонансную частоту $\dot{i}(t) = \frac{\omega^2 \varepsilon_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_2 + \pi)$ аналогично тому, как это было

сделано при определении резонанса тока.

Заметим, что $\omega_{C \text{ рез}} < \omega_{I \text{ рез}} < \omega_{L \text{ рез}}$.



4) Добротность системы, выраженная через резонансные характеристики.

Пусть собственная частота $\omega_0 \approx \omega_{св}$ – частоте свободных затухающих колебаний.

Вспомним, что в механике:

$$Q = \frac{\omega_{св}}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{A_{рез}\omega_0^2}{f_0}, \text{ так как } A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0} \rightarrow \frac{1}{2\beta} = \frac{A_{рез}\omega_0}{f_0}.$$

Но $\frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0 m}{mk} = x_0$ – смещение под действием постоянной силы $F_0 \Rightarrow$

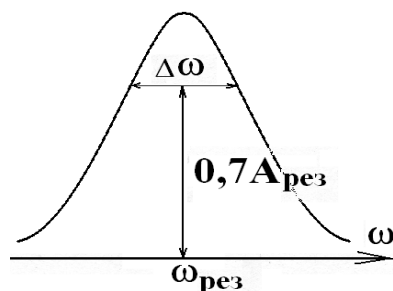
$Q \approx \frac{A_{рез}}{x_0} \Rightarrow$ Добротность системы показывает, во сколько раз амплитуда резонансного

колебания больше смещения системы под действием постоянной силы той же величины.

$$\text{Для колебательного контура } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{R}{2}\right)^2} \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U_{Lрез}}{\varepsilon_0} = \frac{U_{Cрез}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

Для $Q \gg 1$, так же как и в механике, верна следующая формула для определения добротности Q по экспериментальным резонансным кривым:

$Q = \frac{\omega_{рез}}{\Delta\omega}$, здесь $\Delta\omega$ – ширина резонансной линии, взятая на $0,7A_{рез}$, как показано на рисунке.



9. Ток смещения

Для статики система уравнений Максвелла, описывающих поле в веществе, имеет вид:

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{E} = 0 & (1) \\ \text{div}\vec{D} = \rho & (2) \\ \text{div}\vec{B} = 0 & (3) \\ \text{rot}\vec{H} = \vec{j} & (4) \end{cases}.$$

При переходе к переменным электромагнитным полям уравнение (1) уже исправлено по рекомендации М. Фарадея: $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Одна из основных идей Максвелла заключалась в следующем: так как изменение индукции магнитного поля $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ создает электрическое поле, то изменение электрического поля должно

создавать магнитное поле \Rightarrow статические уравнения для магнитного поля $\begin{cases} \text{div}\vec{B} = 0 \\ \text{rot}\vec{H} = \vec{j} \end{cases}$ тоже должны

быть подкорректированы.

Уравнение $\text{div}\vec{B} = 0$ выражает факт отсутствия магнитных зарядов, а они пока в самом деле не обнаружены. Следовательно, можно позволить себе поправить только уравнение (4) $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$.

Проверим его истинность при наличии переменных токов:

$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{H}) \equiv 0 = \operatorname{div}\vec{j}$, так как у ротора нет точечных источников (вихревые линии начинаются и кончаются на границе раздела сред).

Но уравнение $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ противоречит закону сохранения заряда $\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ будем искать поправку в следующем виде: $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \vec{aэп}$.

Вопрос. Что такое $\vec{aэп}$?

Ответ. $\vec{aэп}$ означает агент электрического поля.

Этот агент – такая векторная функция, что $\operatorname{div}(\vec{aэп}) = \frac{\partial\rho}{\partial t}$.

Из уравнения (2) $\rho = \operatorname{div}\vec{D}$ следует $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \operatorname{div}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \operatorname{div}(\vec{aэп}) \Rightarrow \vec{aэп} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$.

Таким образом, «исправленное» уравнение (4) имеет вид

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

В таком виде уравнение (4):

- 1) удовлетворяет закону сохранения заряда;
- 2) приводит все уравнения в соответствие;

- 3) не противоречит системе уравнений для статики, так как для постоянного тока $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$.

Система уравнений Максвелла в среде в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{D} = \rho \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}.$$

Всё, что было сказано, отнюдь не является доказательством четвертого уравнения Максвелла или его выводом. Уравнения Максвелла, так же как и законы Ньютона, не выводятся, но являются аналитическим обобщением опытных фактов и основой макроскопической электродинамики и классической механики соответственно. То, что мы проделали, – лишь цепочка умозаключений, построенная для того, чтобы устранить противоречие между законом сохранения заряда и вихревым уравнением для напряженности магнитного поля \vec{H} .

Сам Максвелл свой трактат об электричестве начал с главы, в которой определялись размерности всех физических величин и их взаимосвязь. Затем шла глава о свойствах векторных полей с четким определением физического смысла каждого математического оператора. И только потом – изложение уравнений с четким определением физического смысла каждой величины и математических операций над ней.

Максвелл назвал величину $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{см}$ током смещения потому, что она складывается с током проводимости.



Ток смещения суть изменяющееся во времени электрическое поле:

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \text{ где } \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{изменение напряженности электрического поля,}$$

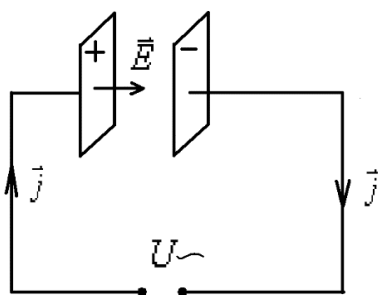
$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \text{поляризационный ток.}$$

$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ обусловлен движением связанных зарядов. То, что он создает вихревое магнитное поле, вполне закономерно.

$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ – аналог закона электромагнитной индукции: переменное электрическое поле является источником вихревого магнитного поля.

Это чисто теоретическое гениальное открытие Максвелла, которое было встречено коллегами-современниками довольно холодно.

Вывод. Ток смещения эквивалентен току проводимости только в том смысле, что он, как и ток проводимости, способен создавать магнитное поле. Ток смещения по сути своей является суммой токов связанных зарядов и изменения электрического поля.



Пример.

Если мы имеем цепь, разомкнутую конденсатором, на обкладки которого подается переменное напряжение U_{\sim} , то, согласно уравнению Максвелла, переменное во времени \vec{E} вызывает возникновение переменного вихревого магнитного поля \vec{H} .



Пусть показанное на рисунке электрическое поле увеличивается $\vec{E} \uparrow \rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{см}$, и таким образом линии тока смещения замыкают линии тока проводимости.

Опред. $\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \vec{j}_{см}$ – плотность полного тока.

Линии полного тока непрерывны.

$$\oint_S \vec{j}_{полн} d\vec{s} = \oint_S (\vec{j} + \vec{j}_{см}) d\vec{s} = \oint_S \text{rot} \vec{H} d\vec{s} = \int_V \text{div}(\text{rot} \vec{H}) dV = 0, \text{ так как } \text{div}(\text{rot} \vec{H}) \equiv 0.$$

Магнитное поле создается суммой токов проводимости и смещения.

В зависимости от электрической проводимости среды и частоты переменного тока (быстроты его изменения) \vec{j} и $\vec{j}_{см}$ играют разную роль:

- 1) в хорошо проводящей среде при низких частотах $|\vec{j}| \gg \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right|$;
- 2) в диэлектриках (изоляторах) при высоких частотах $\left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \gg |\vec{j}|$.

Если имеем разомкнутый контур, то на концах проводника обрывается лишь ток проводимости, полный ток всегда замкнут (антенна излучает электромагнитные волны \equiv суть ток смещения).

10. Различные формы записи уравнений Максвелла



1. Дифференциальная форма:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{— источником вихревого электрического поля является переменная} \\ \quad \quad \quad \text{во времени индукция магнитного поля в данной точке.} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{— удельная мощность источников поля } \vec{D} \text{ в каждой точке равна} \\ \quad \quad \quad \text{плотности сторонних зарядов в данной точке.} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{— не обнаружено магнитных зарядов.} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{— источниками вихревого магнитного поля } \vec{H} \text{ являются переменное} \\ \quad \quad \quad \text{электрическое поле } \vec{E} \text{ и токи свободных и связанных зарядов в} \\ \quad \quad \quad \text{данной точке.} \end{array} \right.$$

(1) + (2) – источниками электрического поля в любой точке являются:

1) переменное во времени магнитное поле \vec{B} , порождающее вихревое электрическое поле;

и

2) суммарная плотность сторонних и связанных зарядов в данной точке, порождающих потенциальное электрическое поле.

(3) + (4) – источниками вихревого магнитного поля являются:

1) переменное во времени электрическое поле \vec{E}

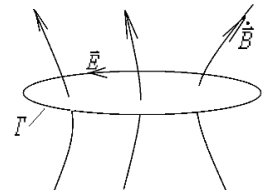
и

2) плотность тока свободных и связанных зарядов в данной точке.

2. Интегральная форма:

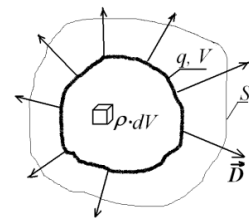
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} \quad \text{— работа электрического поля по любому}$$

замкнутому контуру равна убыли потока магнитной индукции через площадь, ограниченную данным контуром.

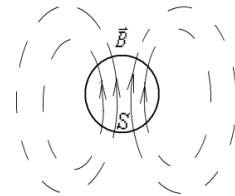


$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dV \quad \text{— поток поля } \vec{D} \text{ через любую замкнутую}$$

поверхность равен стороннему заряду внутри этой поверхности.

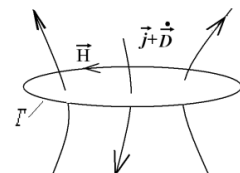


$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad \text{— линии магнитной индукции } \vec{B} \text{ замкнуты.}$$



$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s} \quad \text{— циркуляция напряженности магнитного}$$

поля \vec{H} по любому контуру равна полному току (проводимости и смещения) через площадь, ограниченную данным контуром.



11. Свойства уравнений Максвелла

1. Уравнений – 8, неизвестных – 12 \Rightarrow чтобы решить эту систему и найти распределение электромагнитного поля в пространстве, надо знать свойства среды:

ϵ, μ, σ + граничные условия (здесь σ – проводимость).

Общий вид граничных условий:

$$B_{1n} = B_{2n};$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau};$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{нов} - \text{поверхностная плотность сторонних зарядов.}$$

$[\vec{n}\vec{H}_2] - [\vec{n}\vec{H}_1] = \vec{i}$ – линейная плотность тока проводимости на рассматриваемой границе раздела.

Если нет сторонних зарядов на границе раздела и поверхностных токов проводимости, то верны граничные условия для стационарных полей:

$$D_{1n} = D_{2n}; \quad B_{1n} = B_{2n};$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

Посмотрим, какой вид будет иметь система уравнений Максвелла в изотропных средах с материальными уравнениями:

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \\ \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \epsilon} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases} \quad (\text{надо использовать именно эту дифференциальную форму закона Ома, а не } \vec{E} = \rho \cdot \vec{j}, \text{ так как для диэлектрика } \rho = \infty, \text{ но } \vec{E} \text{ может быть и } \neq 0, \text{ и } \neq \infty).$$

Если эти материальные уравнения подставить в уравнения Максвелла, то получим

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \epsilon \vec{E}) \\ \text{div} (\epsilon_0 \epsilon \vec{E}) = \rho \\ \text{div} (\mu_0 \mu \vec{H}) = 0 \\ \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \mu \vec{H}) \end{cases}.$$

Теперь имеем 8 уравнений и 6 неизвестных. Оказывается, что всем уравнениям можно удовлетворить и ни одно из них нельзя выбросить!

2. Система уравнений Максвелла – линейна, то есть содержит только первые производные. Это следствие принципа суперпозиции.

3. Система уравнений Максвелла включает в себе в обобщенной форме все законы электромагнетизма.

$$\left. \begin{cases} \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{закон Фарадея} \\ \text{div} \vec{D} = \rho - \text{закон Кулона} \\ \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{закон сохранения заряда} \\ \text{закон Био –} \\ \text{Савара – Лапласа} \end{array}$$

4. Уравнения Максвелла не вполне симметричны относительно \vec{E} и \vec{B} . Это связано с тем, что в природе не обнаружено магнитных зарядов, но существуют электрические.

5. Система уравнений Максвелла выполняется во всех инерциальных системах отсчета. Поля преобразуются в соответствии с преобразованиями Лоренца.

12. Следствия из системы уравнений Максвелла

1. Закон сохранения заряда.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{D} = \rho \end{array} \right\} \leftarrow \text{div} \Rightarrow 0 = \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

2. Максвелл предсказал существование электромагнитных волн в вакууме, то есть существование электромагнитного поля в непроводящей и незаряженной среде.

Качество любой теории определяется по следующим критериям:

1. Объясняет ли экспериментальные факты.
2. Самосогласованность и красота теории.
3. Предсказания.

Теория электромагнетизма является собой блестящий пример теории наивысшего качества.

Посмотрим, что дают уравнения Максвелла в вакууме, где:

$\epsilon = 1, \mu = 1, \vec{j} = 0, \rho = 0 \Rightarrow$ система становится абсолютно симметричной:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\vec{E}\epsilon_0) = 0 \\ \text{div}(\mu_0\vec{H}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{нет источников}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \text{rot} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \\ \text{rot}(\text{rot} \vec{H}) = \left[\nabla \left[\nabla \cdot \vec{E} \right] - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - (\nabla \nabla) \vec{E} \right] = -\Delta \vec{E}, \text{ так как } \nabla \cdot \vec{E} = 0. \end{array}$$



$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} .$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \left. \vphantom{\Delta \vec{E}} \right\} \text{— волновые уравнения,}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \left. \vphantom{\Delta \vec{H}} \right\}$$

где c — скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

3. Закон сохранения энергии в электромагнитной волне.

Рассмотрим уравнения (1) и (4) для непроводящей среды, умножив каждое уравнение на \vec{H} и \vec{E} соответственно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right\} \left. \vphantom{\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right\}} \right\} \begin{array}{l} \cdot \vec{H} \\ \cdot \vec{E} \end{array}$$

Вычтем из первого уравнения (1) второе уравнение (4):

$$\vec{H}[\nabla\vec{E}] - \vec{E}[\nabla\vec{H}] = -\frac{\vec{H}\partial\vec{B}}{\partial t} - \frac{\vec{E}\partial\vec{D}}{\partial t} = -\mu_0\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \epsilon_0\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_0\frac{\vec{H}^2}{2} + \epsilon_0\frac{\vec{E}^2}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\text{div}[\vec{E}\vec{H}] = [\nabla\vec{E}]\vec{H} - [\nabla\vec{H}]\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mu_0\vec{H}^2}{2} + \frac{\epsilon_0\vec{E}^2}{2}\right],$$

где $\left[\frac{\mu_0\vec{H}^2}{2} + \frac{\epsilon_0\vec{E}^2}{2}\right] = w$ – плотность энергии электромагнитного поля.

Опред. $\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$ – вектор Пойнтинга \equiv вектор плотности потока электромагнитной энергии.

$\text{div}\vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ – закон сохранения энергии в электромагнитной волне:

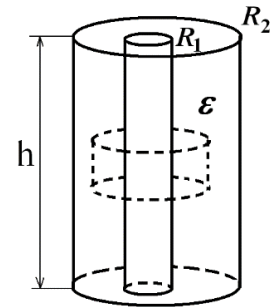
удельная мощность источника потока электромагнитной энергии в произвольной точке равна убыли плотности энергии электромагнитного поля в данной точке.

4. Примеры.

1) Дано:

Длинный цилиндрический конденсатор R_1, R_2 ;
 ϵ, σ – малая проводимость среды между пластинами;
 заряд на внутренней обкладке q_0 ; $\mu = 1$.

Найти: \vec{H}_i –? \vec{E}_i –?



1-й способ:

По теореме Гаусса: $h_1 \cdot 2\pi r \cdot \epsilon_0 \epsilon E = \frac{q}{2\pi R_1 h} \cdot 2\pi R_1 \cdot h_1 \Rightarrow \vec{E} = \frac{q(t)}{2\pi h \epsilon_0 \epsilon} \vec{e}_r$.

$0 = \text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \mu \vec{H}) \Rightarrow \vec{H} = \text{const}(t)$, но так как при $t \rightarrow \infty$ $H = 0 \Rightarrow \vec{H} = 0$, то есть нет

магнитного поля, так как ток проводимости компенсируется током смещения так, что $\vec{j}_{\text{полн}} = 0$.

$$\frac{\partial(\epsilon_0 \epsilon \vec{E})}{\partial t} = -\vec{j} = -\sigma \vec{E} \Rightarrow \frac{dE}{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} dt \rightarrow \ln \frac{E}{E_0} = -\frac{\sigma \cdot t}{\epsilon_0 \epsilon} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon_0 \epsilon}};$$

$$\vec{E}_0 = \frac{q_0 \vec{e}_r}{2\pi \epsilon_0 \epsilon \cdot h \cdot r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q_0 e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon_0 \epsilon}}}{2\pi \epsilon_0 \epsilon \cdot h \cdot r} \vec{e}_r.$$

2-й способ:

$\text{div}(\mu_0 \vec{H}) = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{H} d\vec{s} = 0 \Rightarrow$ линии \vec{H} замкнуты, и, следовательно, \vec{H} может иметь только

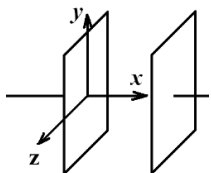
компоненты H_ψ и $H_z \Rightarrow$

$$\text{rot}\vec{H} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \psi} - \frac{\partial H_\psi}{\partial z}\right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) \vec{e}_\psi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r H_\psi) - \frac{\partial H_r}{\partial \psi}\right] \vec{e}_z =$$

$$= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \psi} - \frac{\partial H_\psi}{\partial z}\right) \vec{e}_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} \vec{e}_\psi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r H_\psi) \cdot \vec{e}_z.$$



Но так как ток смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ направлен по $(-\vec{e}_r)$ и, из симметрии задачи (пренебрегая краевыми эффектами), от ψ и z ничего не зависит, то $rot \vec{H} \approx 0 \Rightarrow \vec{H} = 0$.



2) Плоский конденсатор разряжается за счет объемных токов проводимости. Найти \vec{H} , пренебрегая краевыми эффектами.

Аналогичный случай:

$rot \vec{E} = 0$, так как $\vec{E} \parallel x$ и ни по z , ни по y нет неоднородности, потому что всё симметрично $\Rightarrow \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{H} = 0$.

Или иначе:

$$\vec{D} = \frac{q}{S} \vec{e}_x \Rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{\partial q}{\partial t} \vec{e}_x \Rightarrow \vec{j} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \frac{q}{S} \vec{e}_x \Rightarrow$$

$rot \vec{H}$ может иметь только x -компоненту, она равна 0:

$$(rot \vec{H})_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0, \text{ так как от } y \text{ и от } z \text{ ничего не зависит} \Rightarrow \vec{H} = 0.$$

Может сложиться впечатление, что \vec{H} всегда равно нулю. Это не так.

3) Рассмотрим конденсатор с круглыми пластинами, подключенный к источнику переменного напряжения $U = U_0 \sin \omega t$.

$R \gg d \Rightarrow$ можно пренебречь краевыми эффектами. $\mu = 1$.

Найдем $\vec{H}(r)$.

$$E_z \approx \frac{U_0}{d} \sin \omega t;$$

$$j_z = \sigma E_z = \frac{\sigma U_0}{d} \sin \omega t \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow rot \vec{H} = \left(\frac{\sigma U_0}{d} \sin \omega t + \frac{\epsilon_0 \epsilon}{d} U_0 \omega \cos \omega t \right) \cdot \vec{e}_z \Rightarrow \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{U_0}{d} \cdot \omega \cos \omega t \cdot \vec{e}_z \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\psi) = \frac{U_0}{d} [\sigma \sin \omega t + \epsilon_0 \epsilon \omega \cos \omega t] \Rightarrow$$

$$r H_\psi = \frac{1}{2} r^2 \frac{U_0}{d} [\sigma \sin \omega t + \epsilon_0 \epsilon \omega \cos \omega t] \Rightarrow$$

$$H_\psi = \frac{1}{2} \frac{U_0 r}{d} (\sigma \sin \omega t + \epsilon_0 \epsilon \omega \cos \omega t) = \frac{U_0 r}{2d} \sqrt{\sigma^2 + (\epsilon_0 \epsilon \omega)^2} \cos(\omega t - \xi), \text{ где } \xi = \arctg\left(\frac{\epsilon_0 \epsilon \omega}{\sigma}\right).$$

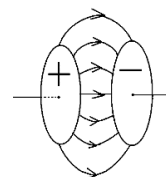
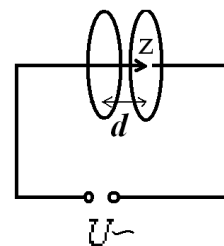
$\mu_0 \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{U_0 r \mu_0}{2d} (\sigma \omega \cos \omega t - \epsilon_0 \epsilon \omega^2 \sin \omega t) = \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}$, то есть возникает зависимость $E_z(r)$ и ещё компонента E_r , что вполне естественно. В нашем решении мы этим пренебрегали.

Вопрос. Когда это правомерно?

Ответ. $rot \vec{E} \sim -\frac{E_z}{R} + \frac{E_r}{d} = -\mu_0 \dot{H} \approx 0 \Rightarrow$

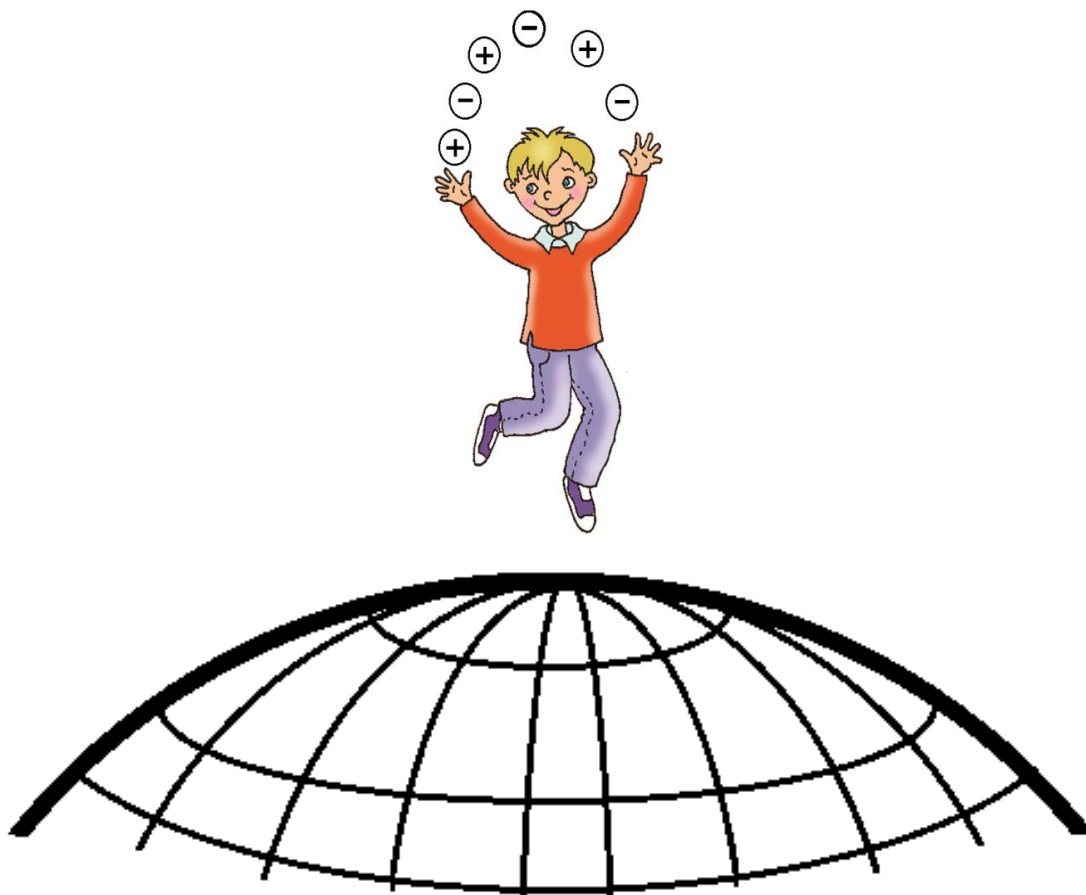
Условие квазистатичности:

$$\lambda \gg d \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi \cdot c}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon \mu_0}} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega \ll \frac{1}{d \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0}}.$$



Закончить курс электромагнетизма я хочу словами великого Джеймса Клерка Максвелла:
«При обучении большая часть утомления возникает не от умственных усилий, с помощью которых мы овладеваем предметом, но от тех, которые мы тратим, собирая наши блуждающие мысли, и эти усилия были бы гораздо менее утомительны, если бы можно было устранить рассеянность, нарушающую умственную сосредоточенность».

«Если наш курс физики поможет кому-либо из вас увидеть пользу математики, это не только обеспечит успех вашего дальнейшего обучения, но и сделает менее вероятным его вред для вашего здоровья».



Елена Николаевна АКСЕНОВА
**ОБЩАЯ ФИЗИКА. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО
И МАГНЕТИЗМ (ГЛАВЫ КУРСА)**

Учебное пособие

Издание второе, исправленное

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*
Ответственный редактор *С. В. Макаров*
Автор художественных образов *Е. А. Румянцева*
Корректор *Т. А. Кошелева*
Выпускающий *Н. А. Крылова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.10.07.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

*Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться
в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

по России и зарубежью
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, 1, лит. А
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967

www.lanbook.com
пункт меню «Где купить»
раздел «Прайс-листы, каталоги»

в Москве и в Московской области
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае
«ЛАНЬ-ЮГ». 350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазин
Издательство «Лань»: <http://www.lanbook.com>
магазин электронных книг
Global F5: <http://globalf5.com/>

Подписано в печать 31.01.18.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 60×90¹/₈.
Печать офсетная. Усл. п. л. 14,00. Тираж 100 экз.

Заказ № 092-18.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.