

**С. А. АШМАНОВ, А. В. ТИМОХОВ**

# ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

в задачах и упражнениях

---

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание второе, стереотипное



ЛАНЬ®  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР  
2012

ББК 22.18я73

А 98

**Ашманов С. А., Тимохов А. В.**

**А 98** Теория оптимизации в задачах и упражнениях: Учебное пособие. 2-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2012. — 448 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1366-9**

Учебное пособие содержит более 90 упражнений и 780 задач для самостоятельной работы в процессе изучения классических разделов теории оптимизации, линейного программирования и теории выпуклых множеств. Каждое упражнение представлено 20 вариантами, с тем чтобы обеспечить студентов одной группы индивидуальными заданиями. Практически все задачи снабжены ответами, указаниями или решениями. Каждый параграф начинается со сводки основных фактов, доказательства которых также приведены в книге.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов и преподавателей, специализирующихся по теории оптимизации и выпуклому анализу.

**ББК 22.18я73**

Обложка  
*Е. А. ВЛАСОВА*

*Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.  
Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2012  
© Коллектив авторов, 2012  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2012

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Ответы,  
указания,  
решения

|  |     |     |
|--|-----|-----|
| Предисловие . . . . .  | 5   |     |
| <br>   |     |     |
| <i>Глава 1. Классические разделы теории оптимизации</i> . . . . .                    | 9   |     |
| § 1. Существование решения. Геометрическая интерпретация задач оптимизации . . . . . | 9   |     |
| Сводка основных фактов . . . . .   | 9   |     |
| Упражнения . . . . .   | 13  |     |
| Задачи . . . . .   | 16  | 236 |
| § 2. Задача безусловной оптимизации . . . . .  | 22  |     |
| Сводка основных фактов . . . . .   | 22  |     |
| Упражнения . . . . .   | 25  |     |
| Задачи . . . . .   | 28  | 249 |
| § 3. Классическая задача на условный экстремум . . . . .                             | 35  |     |
| Сводка основных фактов . . . . .   | 35  |     |
| Упражнения . . . . .   | 38  |     |
| Задачи . . . . .   | 41  | 258 |
| <br>   |     |     |
| <i>Глава 2. Линейное программирование</i> . . . . .                                  | 51  |     |
| § 4. Элементы теории линейных неравенств . . . . .                                   | 51  |     |
| Сводка основных фактов . . . . .   | 51  |     |
| Упражнения . . . . .   | 57  |     |
| Задачи . . . . .   | 59  | 288 |
| § 5. Теория линейного программирования . . . . .                                     | 86  |     |
| Сводка основных фактов . . . . .   | 86  |     |
| Упражнения . . . . .   | 98  |     |
| Задачи . . . . .   | 110 | 314 |
| § 6. Симплекс-метод решения задач линейного программирования . . . . .               | 145 |     |
| Сводка основных фактов . . . . .   | 145 |     |
| Упражнения . . . . .   | 154 |     |
| Задачи . . . . .   | 161 | 370 |

|  | Ответы,<br>указания,<br>решения |
|--|---------------------------------|
| <i>Глава 3. Выпуклые множества . . . . .</i>       | 169                             |
| § 7. Начальные сведения о выпуклых множествах      | 169                             |
| Сводка основных фактов . . . . .                   | 169                             |
| Упражнения . . . . .                               | 176                             |
| Задачи . . . . .                                   | 181                             |
| § 8. Теоремы отделимости и их приложения . . . . . | 197                             |
| Сводка основных фактов . . . . .                   | 197                             |
| Упражнения . . . . .                               | 203                             |
| Задачи . . . . .                                   | 210                             |
| <b>Ответы, указания, решения . . . . .</b>         | <b>236</b>                      |
| Список литературы . . . . .                        | 441                             |
| Список обозначений . . . . .                       | 443                             |
| Предметный указатель . . . . .                     | 444                             |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

К настоящему времени теория оптимизации, если и не достигла столь совершенной и законченной формы, как классический математический анализ, то по крайней мере приближается к такому состоянию. Теория оптимизации находит многочисленные приложения в других разделах прикладной математики, существенно используется при построении численных методов решения экстремальных задач и качественном исследовании математических моделей. Здесь достаточно упомянуть линейное программирование, ставшее мощным инструментом исследования в руках математиков-прикладников.

Авторы считают, что настало время обучать теории оптимизации столь же основательно, как математическому анализу, линейной алгебре и другим дисциплинам, преподавание которых ведется на первых курсах математических факультетов вузов. В первую очередь это предполагает сопровождение лекций обязательными упражнениями, позволяющими закрепить теоретический материал и привить минимальные практические навыки. Кроме того, студентам необходимо дать возможность для более глубокого изучения теории путем самостоятельного решения систематически расположенных задач. Последнее особенно актуально в настоящий момент, когда одним из важнейших направлений совершенствования высшего образования справедливо признана активизация самостоятельной работы студентов. Для этого, однако, необходимы учебные пособия соответствующего типа. Достаточно вспомнить известные задачки Б. П. Демидовича, И. В. Проскурякова и другие, чтобы понять, какую огромную роль играет подобная методическая литература в обучении студентов, становлении их общей математической культуры. В настоящее время трудно назвать задачник по оптимизации (как, впрочем, и по ряду других

разделов прикладной математики), который мог бы сравниться с упомянутыми книгами по методической разработанности, систематичности, широте охвата материала и, наконец, просто по количеству задач.

Идея написания учебного пособия по теории конечномерной оптимизации, соответствующего современному уровню этой дисциплины и ориентированного на самостоятельную работу студентов, появилась в результате опыта преподавания соответствующего курса на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова. Согласно новому учебному плану факультета, этот курс является базовым для специализации кафедры исследования операций. На него существенно опираются читаемые затем курсы по численным методам оптимизации, исследованию операций и математическому моделированию. Подобная последовательность курсов отражает современное положение теории оптимизации в ряду прикладных математических дисциплин.

Упомянутый курс по теории конечномерной оптимизации имеет следующую особенность. После каждой лекции студенты получают по три-четыре индивидуальных упражнения, которые они должны выполнить и сдать проверяющим (аспирантам) до следующей лекции. Такая проверка проходит в форме беседы со студентом, в ходе которой выясняется, насколько он усвоил текущий материал. В случае необходимости ему дается консультация. Кроме того, на лекциях формулируется значительное количество задач, решение которых выборочно спрашивается на экзамене. Эти задачи носят относительно элементарный характер и не уходят далеко от лекционного материала. Естественно, если речь идет о пособии, то список задач должен быть существенно расширен, с тем чтобы дать более полное представление о теории и ее приложениях.

В первоначальные планы авторов входило написать учебное пособие, охватывающее и дополняющее материал всего курса. Однако в процессе работы над рукописью выяснилось, что воплотить этот замысел в пределах отведенного объема не удастся. Предлагаемое пособие содержит материал, связанный с программой первого семестра этого годового курса. Сюда входят классические разделы теории оптимизации, линейное программирование и теория выпуклых множеств как часть тесно связанной с теорией оптимизации математической дисциплины — выпуклого анализа. В недалеком будущем авторы

надеются подготовить к изданию непосредственное продолжение настоящей книги, в котором будет отражена программа второго семестра — теория выпуклых функций и нелинейное программирование.

Структура книги такова.

В начале каждого параграфа приводится краткая сводка основных понятий и результатов рассматриваемого раздела теории. Следует подчеркнуть, что доказательства практически всех сформулированных здесь теорем приводятся в виде решений соответствующих задач. Такой подход позволяет при сохранении «задачного» стиля книги сделать ее полностью автономной от других учебных пособий по теории оптимизации. Вместе с тем отметим, что во всех параграфах, за исключением § 4 и 5, теоретические введения (сводки) в основном следуют работе [39]. По существу, набор введений (вместе с доказательствами) образует конспект первой части читаемого авторами курса.

После введения идет серия упражнений, каждое из которых представлено 20 вариантами. Это позволяет выдавать студентам одной группы индивидуальные, но равноценные задания. Для выполнения упражнений достаточно лишь твердого знания вводного материала. Они выражают, по мнению авторов, необходимый для студентов минимум навыков в данной области. Ответы к упражнениям в книге не приводятся, так как иначе их выполнение было бы существенно облегчено. Вместе с тем и решения упражнений, и ответы к каждому их варианту у авторов имеются, и они готовы предоставить их в личном порядке всем преподавателям, которые пожелают использовать книгу в учебном процессе.

Следом за упражнениями в каждом параграфе идут задачи. Практически все они снабжены ответами, указаниями или решениями. Характер и назначение задач весьма разнообразны. Некоторые из них служат простыми дополнениями к сводке основных фактов. Имеются задачи, в каком-то смысле аналогичные упражнениям. Это позволяет студенту, испытывающему затруднения при выполнении того или иного упражнения, разобрать решение соответствующей задачи и в результате найти подход к своему индивидуальному заданию. Значительная часть задач посвящена развитию и углублению материала теоретического введения. Изложение доводится здесь до весьма тонких результатов, которые можно найти лишь в специальных монографиях. Трудным задачам

предшествуют задачи подготовительного характера, так что при известной настойчивости читатель может осилить их и самостоятельно. В форме задач представлены и некоторые новые результаты. Это позволяет надеяться, что даже специалисты найдут здесь нечто для себя полезное.

Таким образом, предлагаемая книга позволяет читателю самостоятельно пройти путь от азов до довольно глубоких фактов соответствующих разделов теории оптимизации и выпуклого анализа. Одновременно она различными способами может использоваться преподавателями при чтении обязательных и специальных курсов, проведении семинарских занятий, зачетов и экзаменов по данным дисциплинам. Некоторые задачи или определенные их подборки могут стать темой доклада на семинаре или курсовой работы. Наконец, книга может служить справочным пособием для всех, интересующихся затронутой здесь тематикой.

В конце книги приведен список литературы, использованный авторами при работе. Определенная часть задач взята из этих изданий.

Авторы приносят глубокую благодарность всем, кто в разной форме и степени помог им в работе над книгой. Прежде всего здесь хотелось бы упомянуть сотрудников факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова Ф. П. Васильева, А. А. Васина, Э. Г. Давыдова, Д. В. Денисова, С. К. Завриева, В. Г. Карманова, П. С. Краснощекова, В. В. Морозова, В. С. Панферова, Вик. В. Подиновского, А. Г. Сухарева, В. В. Федорова, а также Н. А. Бобылева, М. А. Красносельского и Н. С. Кукушкина. Мы благодарим аспирантов О. Л. Колесова, М. Р. Пахомкину, Н. Р. Стронгину и М. В. Удалкину, которые осуществляли проверку выполнения упражнений и помогли устранить ряд ошибок.

Большую благодарность авторы приносят В. В. Шестопаловой за ее самоотверженный труд по перепечатке рукописи.

## КЛАССИЧЕСКИЕ РАЗДЕЛЫ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ

Современная теория оптимизации берет свое начало в классическом математическом анализе и имеет тесные связи с линейной алгеброй, аналитической геометрией, другими математическими дисциплинами. Цель данной главы — дать развернутое изложение тех разделов конечномерной теории оптимизации, с которыми студенты знакомятся (порой весьма бегло) на младших курсах. Таким образом, эта глава может рассматриваться как дополнение к курсу математического анализа и как введение в курс теории оптимизации.

### § 1. Существование решения. Геометрическая интерпретация задач оптимизации

#### СВОДКА ОСНОВНЫХ ФАКТОВ

**1. Исходные понятия.** *Задачами оптимизации* называют задачи отыскания точек минимумов или максимумов функций на заданных множествах. Условимся записывать задачу минимизации функции  $f(x)$  на множестве  $X$  в виде

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (1.1)$$

При этом  $f$  будем называть *целевой функцией*,  $X$  — *допустимым множеством*, любой элемент  $x \in X$  — *допустимой точкой* задачи (1.1).

Всюду в книге рассматриваются лишь *конечномерные* задачи оптимизации, т. е. задачи, допустимые множества которых лежат в евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^n$ .

Точка  $x^* \in X \subset \mathbf{R}^n$  называется

1) *точкой глобального минимума* функции  $f$  на множестве  $X$  или *глобальным решением* задачи (1.1), если

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всех } x \in X; \quad (1.2)$$

2) точкой *локального минимума*  $f$  на  $X$  или *локальным решением* задачи (1.1), если существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ при всех } x \in X \cap U_\varepsilon(x^*), \quad (1.3)$$

где  $U_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$  — шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в  $x^*$ .

Если неравенство в (1.2) или (1.3) выполняется как строгое при  $x \neq x^*$ , то говорят, что  $x^*$  — точка *строгого минимума* (*строгое решение*) в глобальном или локальном смысле соответственно.

Задачу максимизации функции  $f$  на  $X$  будем записывать в виде

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in X. \quad (1.4)$$

Введенные выше понятия переформулируются применительно к задаче (1.4) очевидным образом. Ясно, что задача (1.4) эквивалентна задаче

$$-f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

в том смысле, что множества глобальных или локальных, строгих или нестрогих решений этих задач соответственно совпадают. Это позволяет без труда переносить утверждения для задачи минимизации на задачу максимизации и наоборот.

Точки минимума и максимума функции  $f$  на  $X$  объединяются общим названием *точки экстремума*. При этом сами задачи оптимизации (1.1) и (1.4) называют также *экстремальными*.

**2. Существование глобального решения.** Точная нижняя грань функции  $f$  на  $X$ , т. е. величина

$$f^* = \inf_{x \in X} f(x) = \inf_X f(x),$$

называется *значением задачи* (1.1). Возможны три случая:

1)  $f^* > -\infty$  и  $f(x^*) = f^*$  при некотором  $x^* \in X$ , т. е. значение задачи конечно и достигается; при этом  $f^* = \min_X f(x)$ ;

2)  $f^* > -\infty$  и  $f(x) > f^*$  при всех  $x \in X$ , т. е. значение конечно, но не достигается;

3)  $f^* = -\infty$ , т. е. значение бесконечно.

В случае 1) задача (1.1) имеет глобальное решение, в случаях 2) и 3) — не имеет.

**Теорема 1.1 (Вейерштрасса).** Пусть  $X$  — компакт (замкнутое и ограниченное множество) в  $\mathbf{R}^n$ ,  $f$  — непре-

ривная функция на  $X$ . Тогда глобальное решение задачи (1.1) существует.

Функция  $f$ , определенная на множестве  $X \subset \mathbf{R}^n$ , называется *бесконечно растущей* (убывающей) на  $X$ , если  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = \infty$  ( $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = -\infty$ ) для любой такой последовательности  $\{x^k\} \subset X$ , что либо  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x \in \bar{X} \setminus X$ , либо  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\| = \infty$ .

**Теорема 1.2.** Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$ ,  $f$  — бесконечно растущая непрерывная функция на  $X$ . Тогда глобальное решение задачи (1.1) существует.

**3. Квадратичные функции.** Функция вида

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n b_j x_j + c, \quad (1.5)$$

где  $A = (a_{ij})$  — симметрическая матрица размера  $n \times n$ ,  $b = (b_j) \in \mathbf{R}^n$ ,  $c \in \mathbf{R}$ , называется *квадратичной*.

**Теорема 1.3.** Квадратичная функция (1.5) либо не ограничена снизу на  $\mathbf{R}^n$ , либо имеет на  $\mathbf{R}^n$  точку глобального минимума. Если выполняется второе, то матрица  $A$  неотрицательно определена, т. е.  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  при всех  $x \in \mathbf{R}^n$ .

**Теорема 1.4.** Если матрица  $A$  положительно определена, т. е.  $\langle Ax, x \rangle > 0$  при всех  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , то квадратичная функция (1.5) является бесконечно растущей на  $\mathbf{R}^n$  и, значит, имеет точку глобального минимума на любом замкнутом множестве  $X \subset \mathbf{R}^n$ .

При использовании теорем 1.3, 1.4 и ряда других приводимых далее утверждений оказывается полезным следующий факт линейной алгебры.

**Теорема 1.5** (критерий Сильвестра). Пусть  $A$  — симметрическая матрица размера  $n \times n$ . Тогда

1) матрица  $A$  неотрицательно определена в том и только том случае, если все ее главные миноры неотрицательны;

2) матрица  $A$  положительно определена в том и только том случае, если все ее угловые миноры положительны.

При этом *главным минором* матрицы  $A$  называется определитель матрицы, получаемой путем удаления из  $A$  строк и столбцов с одинаковыми номерами. Если удаля-

ются строки и столбцы с номерами от некоторого  $k$  до  $n$ , то главный минор называется *угловым*.

*Проекцией* точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  на множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется точка из  $X$ , ближайшая к  $x^0$  среди всех точек

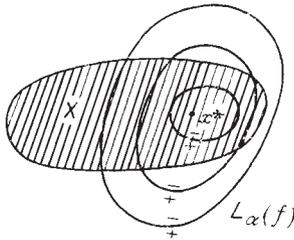


Рис. 1

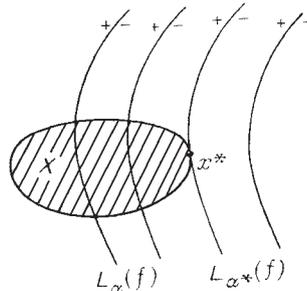


Рис. 2

этого множества. Иными словами, проекция является глобальным решением задачи

$$f(x) = \|x - x^0\|^2 \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

где, заметим,  $f$  есть квадратичная функция с единичной матрицей:

$$f(x) = \langle x - x^0, x - x^0 \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x^0, x \rangle + \langle x^0, x^0 \rangle.$$

**Теорема 1.6.** *Проекция любой точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  на замкнутое множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  существует.*

**4. Геометрическая интерпретация задач оптимизации.** Геометрические построения играют важную роль в теории оптимизации. Они, с одной стороны, позволяют наглядно иллюстрировать ряд утверждений данной теоремы, а с другой — могут быть полезными при отыскании решений простейших конкретных задач оптимизации. Для геометрической интерпретации задачи (1.1), где  $X \subset \mathbb{R}^2$ , необходимо изобразить на плоскости множество  $X$  и несколько типичных *линий уровня* функции  $f$ , т. е. множеств вида

$$L_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(рис. 1, 2). Чтобы отразить характер изменения функции  $f$ , у данной линии уровня полезно ставить знак плюс с той стороны, где  $f$  принимает значения, большие  $\alpha$ , и знак минус с другой. Поиск глобального решения задачи сводится к нахождению минимального числа  $\alpha^*$  среди всех таких  $\alpha$ , что линия уровня  $L_\alpha(f)$  имеет непустое пересечение с  $X$ . При этом любая точка  $x^* \in L_{\alpha^*}(f) \cap X$

является глобальным решением задачи, а число  $\alpha^* = f^* = f(x^*)$  — ее значением. Решение  $x^*$  может лежать как внутри (рис. 1), так и на границе (рис. 2) множества  $X$ .

**З а м е ч а н и е.** Во всех упражнениях и задачах данного параграфа, где требуется найти точки экстремума, достаточно дать геометрическое обоснование ответа. Следует, однако, подчеркнуть, что, строго говоря, геометрические соображения являются лишь средством выдвижения гипотезы, которая затем должна быть обоснована аналитически. Такое обоснование проводится, как правило, на основе необходимых и достаточных условий экстремума, о которых речь пойдет в следующих параграфах.

### УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Найти все значения параметра  $k$ , при которых функция

$$f(x) = (k - a)x + e^{(k-b)(k-c)x}$$

имеет точку глобального минимума на числовой оси  $\mathbb{R}$ , а также все значения  $k$ , при которых величина  $f^* = \inf_{\mathbb{R}} f(x)$  конечна, но не достигается:

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 4   | 2   | 7   | 6  | 7   | 5   | 9   | 11 | 8   | 6   | 9   | 16 | 8   | 5   | 7   |
| 2 | 1   | 3   | 5   | 7  | 3   | 5   | 6   | 12 | 4   | 7   | 8   | 17 | 6   | 8   | 9   |
| 3 | 9   | 1   | 3   | 8  | 8   | 2   | 7   | 13 | 3   | 1   | 9   | 18 | 7   | 5   | 8   |
| 4 | 5   | 3   | 8   | 9  | 5   | 4   | 6   | 14 | 9   | 4   | 7   | 19 | 9   | 6   | 7   |
| 5 | 2   | 3   | 4   | 10 | 7   | 3   | 5   | 15 | 5   | 6   | 7   | 20 | 6   | 2   | 5   |

1.2. Найти все значения параметров  $k$  и  $m$ , при которых квадратичная функция

$$f(x, y) = kx^2 + 2axy + b^2y^2 + cx + my$$

имеет точку глобального минимума на  $\mathbb{R}^2$ :

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 2   | 3   | 6   | 6  | 1   | 4   | -2  | 11 | 5   | 2   | 15  | 16 | 4   | 3   | 16  |
| 2 | 1   | 8   | -1  | 7  | 3   | 2   | 9   | 12 | 1   | 4   | -3  | 17 | 5   | 6   | -10 |
| 3 | 3   | 4   | 6   | 8  | 5   | 3   | 5   | 13 | 4   | 5   | -4  | 18 | 3   | 4   | -15 |
| 4 | 4   | 5   | -8  | 9  | 2   | 5   | -4  | 14 | 2   | 3   | 8   | 19 | 1   | 3   | 4   |
| 5 | 5   | 2   | 10  | 10 | 4   | 3   | -12 | 15 | 3   | 7   | 6   | 20 | 2   | 5   | -2  |

1.3. Изобразить на плоскости  $\mathbf{R}^2$  линии уровня

$$L_\alpha = \{(x, y) \mid f(x, y) = \alpha\},$$

где  $\alpha = 0, 1, 2$ , следующих функций  $f(x, y)$ :

а)  $ax + by$ ;      д)  $a|x| + b|y|$ ;

б)  $ax^2 + by^2$ ;    е)  $a|x| - b|y|$ ;

в)  $ax^2 - by^2$ ;    ж)  $ax^3 + by^3$ ;

г)  $ax^2 + by$ ;      з)  $axy - bx^3$ .

| a b |      | a b |     | a b |     | a b |     |
|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2 3  | 6   | 4 5 | 11  | 3 6 | 16  | 4 2 |
| 2   | 3 4  | 7   | 5 3 | 12  | 6 4 | 17  | 8 7 |
| 3   | 5 6  | 8   | 3 1 | 13  | 7 5 | 18  | 5 2 |
| 4   | 7 3  | 9   | 4 2 | 14  | 1 4 | 19  | 6 9 |
| 5   | 9 10 | 10  | 8 6 | 15  | 8 9 | 20  | 5 8 |

1.4. Найти проекцию начала координат в  $\mathbf{R}^2$  на полуплоскость

$$X = \{(x, y) \mid ax + by \geq c\}:$$

| a | b  | c    | a  | b  | c    | a  | b  | c    | a  | b  | c    |
|---|----|------|----|----|------|----|----|------|----|----|------|
| 1 | 2  | 1 3  | 6  | 1  | -5 4 | 11 | 1  | -2 1 | 16 | 5  | -2 5 |
| 2 | 1  | -3 1 | 7  | 4  | 1 5  | 12 | 2  | 4 2  | 17 | -3 | 5 3  |
| 3 | 3  | 2 4  | 8  | -2 | 3 1  | 13 | -3 | 1 5  | 18 | -5 | 4 2  |
| 4 | -5 | 1 3  | 9  | -4 | 2 2  | 14 | 1  | 4 3  | 19 | 5  | 3 4  |
| 5 | 4  | -5 2 | 10 | 2  | 5 3  | 15 | 4  | 3 4  | 20 | -3 | 4 1  |

1.5. Найти проекцию точки  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  на круг

$$X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq c^2\}:$$

| a | b | c    | a  | b  | c    | a  | b  | c    | a  | b  | c    |
|---|---|------|----|----|------|----|----|------|----|----|------|
| 1 | 3 | 5 3  | 6  | -1 | 3 2  | 11 | 1  | -4 3 | 16 | -1 | 5 4  |
| 2 | 4 | -1 4 | 7  | 6  | -1 5 | 12 | 1  | 3 1  | 17 | -2 | 5 2  |
| 3 | 5 | 1 5  | 8  | -4 | 1 4  | 13 | -5 | 4 5  | 18 | -3 | 2 1  |
| 4 | 1 | 2 1  | 9  | 2  | 7 1  | 14 | 1  | -2 2 | 19 | 7  | -3 2 |
| 5 | 2 | -3 2 | 10 | 5  | 2 3  | 15 | 3  | -2 3 | 20 | 1  | 4 4  |

1.6. Найти точки глобального максимума функции

$$f(x, y) = x^2 + ay^2$$

на множестве

$$X = \{(x, y) \mid |x| + b|y| \leq c\}$$

|   | a | b | c |    | a  | b | c |    | a   | b | c |    | a  | b | c  |
|---|---|---|---|----|----|---|---|----|-----|---|---|----|----|---|----|
| 1 | 3 | 2 | 4 | 6  | 5  | 3 | 2 | 11 | 2   | 1 | 3 | 16 | 6  | 2 | 9  |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 7  | 10 | 3 | 4 | 12 | 1/2 | 1 | 2 | 17 | 1  | 2 | 4  |
| 3 | 5 | 2 | 2 | 8  | 1  | 4 | 1 | 13 | 4/5 | 1 | 1 | 18 | 5  | 2 | 5  |
| 4 | 2 | 3 | 4 | 9  | 3  | 4 | 2 | 14 | 12  | 3 | 6 | 19 | 20 | 5 | 10 |
| 5 | 1 | 3 | 3 | 10 | 20 | 4 | 3 | 15 | 8   | 3 | 4 | 20 | 30 | 5 | 20 |

1.7. Найти точки глобальных экстремумов функции

$$f(x, y) = ax^2 - by^2$$

на множестве

$$X = \{(x, y) \mid |x + 1| + |y - c| \leq 1\}$$

|   | a  | b | c   |    | a  | b | c   |    | a  | b | c   |    | a | b | c   |
|---|----|---|-----|----|----|---|-----|----|----|---|-----|----|---|---|-----|
| 1 | 5  | 2 | 3/4 | 6  | 5  | 3 | 1/3 | 11 | 6  | 1 | 5/2 | 16 | 7 | 3 | 2/3 |
| 2 | 3  | 1 | 1   | 7  | 2  | 1 | 1/2 | 12 | 7  | 1 | 3   | 17 | 3 | 2 | 1/4 |
| 3 | 10 | 3 | 7/6 | 8  | 7  | 5 | 1/5 | 13 | 13 | 5 | 4/5 | 18 | 5 | 4 | 1/8 |
| 4 | 5  | 1 | 2   | 9  | 8  | 3 | 5/6 | 14 | 9  | 2 | 7/4 | 19 | 7 | 2 | 5/4 |
| 5 | 4  | 1 | 3/2 | 10 | 11 | 3 | 4/3 | 15 | 9  | 7 | 1/7 | 20 | 8 | 1 | 7/2 |

1.8. Определить все значения параметра  $k$ , при которых функция

$$f(x, y) = ax - y$$

имеет точку глобального минимума на множестве

$$X = \{(x, y) \mid -x \leq y \leq kx + b|x| + c\},$$

и найти эту точку:

|   | a | b | c |    | a  | b | c |    | a  | b | c |    | a  | b | c |
|---|---|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|
| 1 | 6 | 3 | 5 | 6  | 4  | 2 | 2 | 11 | 8  | 2 | 4 | 16 | 6  | 1 | 3 |
| 2 | 7 | 2 | 2 | 7  | 7  | 3 | 3 | 12 | 10 | 4 | 1 | 17 | 9  | 2 | 1 |
| 3 | 8 | 4 | 3 | 8  | 9  | 4 | 5 | 13 | 4  | 1 | 5 | 18 | 5  | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 1 | 1 | 9  | 10 | 3 | 4 | 14 | 6  | 2 | 3 | 19 | 9  | 3 | 5 |
| 5 | 5 | 2 | 4 | 10 | 2  | 1 | 1 | 15 | 8  | 3 | 2 | 20 | 10 | 2 | 4 |

## ЗАДАЧИ

**1.1.** Пусть  $X$  — произвольное множество,  $f$  — любая числовая функция на  $X$ ,  $\varphi$  — возрастающая функция на  $U \subset \mathbf{R}$ , причем  $f(x) \in U$  при любом  $x \in X^*$ ). Доказать, что задача (1.1) эквивалентна задаче

$$\varphi(f(x)) \rightarrow \min, \quad x \in X$$

в том смысле, что множества глобальных или локальных, строгих или нестрогих решений этих задач соответственно совпадают, и, кроме того,

$$\inf_X \varphi(f(x)) = \varphi\left(\inf_X f(x)\right).$$

**1.2.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Для любой функции  $f$ , определенной на  $X$ , положим  $f^* = \inf_X f(x)$ .

Доказать, что

а)  $(\alpha f + \beta)^* = \alpha f^* + \beta$  при всех  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \alpha > 0$ ;

б)  $(f + g)^* \geq f^* + g^*$ ;

в) если  $f^* \geq 0, g^* \geq 0$ , то  $(f \cdot g)^* \geq f^* \cdot g^*$ ;

г)  $(\min\{f, g\})^* = \min\{f^*, g^*\}$ ;

д)  $(\max\{f, g\})^* \geq \max\{f^*, g^*\}$ ;

е) если  $f^* > -\infty, g^* > -\infty$ , то

$$f(x)g(x) + f^* \cdot g^* \geq f(x)g^* + g(x)f^*$$

при всех  $x \in X$ .

**1.3.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена на декартовом произведении  $X \times Y$ . Доказать, что

а)  $\inf_{X \times Y} f(x, y) = \inf_X \inf_Y f(x, y) = \inf_Y \inf_X f(x, y)$ ;

б)  $\sup_X \inf_Y f(x, y) \leq \inf_Y \sup_X f(x, y)$ .

**1.4.** Функция  $f$ , определенная на множестве  $X \subset \mathbf{R}^n$ , называется *полу непрерывной снизу (сверху)* в точке  $x \in X$ , если из условий  $\{x^k\} \subset X, \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x$  следует, что  $f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^k)$  ( $f(x) \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^k)$ ). Доопределить в нуле

---

\*) Функция  $\varphi$  называется *возрастающей (убывающей)* на  $U$ , если из условий  $u > v, u, v \in U$  следует, что  $\varphi(u) > \varphi(v)$  (соответственно  $\varphi(u) \geq \varphi(v)$ ).

функцию числового аргумента

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

так, чтобы она стала полунепрерывной снизу (сверху).

1.5. Доказать, что функция  $f$  непрерывна в точке  $x$  в том и только том случае, если она полунепрерывна снизу и сверху в этой точке.

1.6. Доказать, что функция  $f$  полунепрерывна снизу в том и только том случае, если функция  $-f$  полунепрерывна сверху.

1.7. Доказать, что сумма двух полунепрерывных снизу функций и произведение полунепрерывной снизу функции на неотрицательное число полунепрерывны снизу.

1.8\* \*). Пусть  $X \subset \mathbf{R}^n$  и  $Y \subset \mathbf{R}^m$  — произвольные множества,  $\varphi(x, y)$  — функция на  $X \times Y$ , полунепрерывная снизу на  $X$  при каждом фиксированном  $y \in Y$  и ограниченная сверху на  $Y$  при каждом фиксированном  $x \in X$ . Доказать, что функция  $f(x) = \sup_Y \varphi(x, y)$  полунепрерывна снизу на  $X$ .

Указанную функцию  $f(x)$  называют *поточечным супремумом* или *верхней огибающей* семейства функций  $\{\varphi(\cdot, y) \mid y \in Y\}$ . Важный частный случай этого понятия — поточечный максимум конечного семейства функций:  $f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$ .

1.9\*. Доказать следующее *обобщение теоремы Вейерштрасса*.

Пусть  $X$  — компакт в  $\mathbf{R}^n$ ,  $f$  — полунепрерывная снизу функция на  $X$ . Тогда точка глобального минимума  $f$  на  $X$  существует.

1.10\*. Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$ ,  $Y$  — компакт в  $\mathbf{R}^m$ ,  $\varphi(x, y)$  — непрерывная (полунепрерывная снизу) функция на  $X \times Y$ . Доказать, что функция  $f(x) = \min_Y \varphi(x, y)$  непрерывна (соответственно полунепрерывна снизу) на  $X$ .

1.11. Привести примеры, показывающие, что в задаче 1.10 условия компактности  $Y$  и непрерывности (полунепрерывности снизу) функции  $\varphi(x, y)$  по совокупности аргументов существенны.

---

\*) Звездочкой помечены наиболее важные из утверждений, дополняющих материал теоретического введения.

**1.12\*.** Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $Y$  — компакт в  $\mathbb{R}^m$ ,  $\varphi(x, y)$  — непрерывная функция на  $X \times Y$ . Предположим, что при любом фиксированном  $x \in X$  функция  $\varphi(x, y)$  достигает глобального минимума на  $Y$  лишь в единственной точке  $y(x)$ . Доказать, что функция  $y(x)$  непрерывна на  $X$ .

**1.13.** Привести пример, показывающий, что в задаче 1.12 условие компактности  $Y$  существенно.

**1.14.** Пусть числовая последовательность  $\{a_k\}$  не убывает, т. е.  $a_k \leq a_{k+1}$  при всех  $k$ . Доказать, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \sup_k a_k$  (здесь и ниже допускаются бесконечные значения предела).

**1.15\*.** Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) — такие функции на  $X$ , что при любом  $x \in X$  последовательность  $\{f_k(x)\}$  не убывает. Доказать, что

$$a) \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_X f_k(x) = \sup_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x);$$

б) если функции  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) полунепрерывны снизу на  $X$  и при любом  $x \in X$  последовательность  $\{f_k(x)\}$  ограничена сверху, то функция  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  также полунепрерывна снизу на  $X$ .

Привести примеры, показывающие, что в утверждениях а) и б) условие неубывания  $\{f_k(x)\}$  существенно.

**1.16\*.** Пусть  $X$  — компакт в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) — такие полунепрерывные снизу функции на  $X$ , что при любом  $x \in X$  последовательность  $\{f_k(x)\}$  не убывает и ограничена сверху. Пусть, далее,  $\bar{x}$  — любая предельная точка последовательности  $\{x^k\}$ , где  $x^k$  — точка глобального минимума функции  $f_k(x)$  на  $X$ . Доказать, что

$$a) \lim_{k \rightarrow \infty} \min_X f_k(x) = \min_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x);$$

б)  $\bar{x}$  есть точка глобального минимума функции  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  на  $X$ .

Привести примеры, показывающие, что в утверждениях а) и б) условия полунепрерывности снизу функций  $f_k$  и неубывания  $\{f_k(x)\}$  существенны.

**1.17\*.** Множествами Лебега функции  $f$  на  $X \subset \mathbb{R}^n$  называются множества вида

$$X_\beta = \{x \in X \mid f(x) \leq \beta\}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Доказать следующие утверждения:

а) если  $X$  замкнуто и  $f$  полунепрерывна снизу на  $X$  то все множества  $X_\beta$  замкнуты \*);

б) если все множества  $X_\beta$  замкнуты, то  $f$  полунепрерывна снизу на  $X$ .

Привести пример, показывающий, что в утверждении а) условие замкнутости  $X$  существенно.

**1.18\*.** Доказать обобщение теоремы Вейерштрасса.

Пусть  $X$  — замкнутое множество в  $\mathbf{R}^n$ ,  $f$  — полунепрерывная снизу функция на  $X$ , причем ее некоторое множество Лебега  $X_\beta$  непусто и ограничено. Тогда точка глобального минимума функции  $f$  на  $X$  существует.

**1.19.** Доказать, что все множества Лебега бесконечно растущей функции ограничены.

**1.20\*.** Доказать следующее обобщение теоремы 1.2.

Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$ ,  $f$  — бесконечно растущая полунепрерывная снизу функция на  $X$ . Тогда точка глобального минимума функции  $f$  на  $X$  существует.

**1.21.** Доказать теорему 1.3.

**1.22.** Доказать теорему 1.4.

**1.23.** В связи с утверждением а) теоремы 1.5 привести пример симметрической матрицы, у которой все угловые миноры неотрицательны, но которая не является неотрицательно определенной.

**1.24.** Пусть  $X$  — ограниченное множество в  $\mathbf{R}^n$ , функция  $f$  непрерывна на замыкании  $\bar{X}$  и дифференцируема на  $X$ . Предположим, что для любой точки  $x \in \bar{X} \setminus X$  существует такой вектор  $h \in \mathbf{R}^n$ , что  $x + \alpha h \in X$  при всех достаточно малых  $\alpha > 0$  и  $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \langle f'(x + \alpha h), h \rangle < 0$  ( $f'$  обозначает вектор частных производных). Доказать, что точка глобального минимума функции  $f$  на  $X$  существует.

**1.25.** Пусть  $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$  — функции числового аргумента, непрерывные при  $\alpha \geq 0$  и непрерывно дифференцируемые при  $\alpha > 0$ , причем  $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} f'_j(\alpha) = -\infty$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Доказать, что точка глобального минимума

функции  $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$  на множестве

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \left| \sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j > 0, j = 1, \dots, n \right. \right\}$$

существует.

---

\*) Пустое множество считается замкнутым по определению.

1.26. Пусть непрерывная функция  $f$  имеет точку глобального минимума на  $\mathbf{R}^n$ . Следует ли отсюда, что  $f$  достигает глобального минимума на любом замкнутом множестве  $X \subset \mathbf{R}^n$ ?

1.27. Пусть непрерывные функции  $f$  и  $g$  имеют точки глобального минимума на замкнутом множестве  $X \subset \mathbf{R}^n$ . Следует ли отсюда, что их сумма  $f + g$  также достигает глобального минимума на  $X$ ?

1.28. Найти все значения параметра  $a$ , при которых функция

$$f(x) = (a + 1)x + a \ln x - 2 \sin x$$

имеет точку глобального минимума на множестве положительных чисел.

1.29. Найти все значения параметра  $a$ , при которых функция

$$f(x, y) = (a - 2)(a - 3)e^x + \frac{|y + 10|}{y^2 + 1}$$

имеет точку глобального минимума на множестве

$$X = \{(x, y) \mid (a - 4)x^2 + y^2 \leq 1\},$$

а также все значения  $a$ , при которых величина  $f^* = \inf_x f(x, y)$  конечна, но не достигается.

1.30. Найти все значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых функция  $f(x, y) = x + ay$  имеет точку глобального минимума на множестве

$$X = \{(x, y) \mid bx^2 - 2xy + y^2 \leq 1\}.$$

1.31. Решить предыдущую задачу при  $f(x, y) = axy$ , где  $a = \pm 1$ .

1.32. Найти все значения параметра  $a$ , при которых функция

$$f(x, y) = 4x^2 + (a - 4)xy^2$$

имеет точку глобального минимума на множестве

$$X = \{(x, y) \mid (a - 1)x + y^2 \leq 1\}.$$

1.33. Найти проекцию точки  $(1, 3, 8)$  на параллелепипед

$$X = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 4 \leq y \leq 5, 6 \leq z \leq 7\}.$$

1.34. Найти проекцию точки  $(x_0, y_0)$  на множество

$$X = \{(x, y) \mid ax + by = 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

где  $a > 0, b > 0$ .

1.35. Найти все проекции точки  $(x_0, y_0)$  на множество

$$X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0\}.$$

Найти глобальные решения следующих задач (указанные равенства и неравенства описывают допустимые множества):

1.36.  $f(x, y) = xy \rightarrow \max, ax + by = 1$ , где  $a > 0, b > 0$ .

1.37.  $f(x, y) = -\ln x + y \rightarrow \min, x - y \leq 2, x + y^2 \leq 4, x > 0$ .

1.38.  $f(x, y) = 2x - y \rightarrow \max, x^2 + y^2 \leq 1, x - y \leq 0, x + y \leq 1$ .

1.39.  $f(x, y) = x + \sqrt{y} \rightarrow \min, x + y \geq 1, x^2 + y^2 = 1$ .

1.40.  $f(x, y) = \max\{|x - 2|, |y|\} \rightarrow \min, 2|x| - |y| \leq 2$ .

1.41.  $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 \rightarrow \min, x^2 + y^2 = 2axy$ , где  $a \in \mathbf{R}$ .

1.42.  $f(x, y) = 4x^2 + y^2 \rightarrow \max(\min), |x - 3| + |y - a| \leq 1$ , где  $a \geq 0$ .

1.43. Найти локальные решения задачи

$$x^3 + y^3 \rightarrow \max, x^2 + 4y^2 \leq 4.$$

1.44. При каких значениях параметра  $a$  задача

$$x + ay \rightarrow \max, x^3 + y^3 = 3xy$$

имеет глобальное решение, а при каких только локальное?

1.45. Найти все значения параметра  $a$ , при которых задача

$$2x + y \rightarrow \max, x^2 - y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq ax + 1$$

имеет глобальное решение.

Последние три задачи параграфа посвящены теореме Кукушкина об аксиоматическом определении максимума.

1.46. Пусть  $X$  — компакт в  $\mathbf{R}^n$ ,  $C(X)$  — пространство всех непрерывных функций на  $X$ ,  $\Phi$  — функционал, ставящий в соответствие каждой функции  $f \in C(X)$  число  $\Phi(f)$ . Предположим, что  $\Phi$  удовлетворяет следующим двум аксиомам:

1)  $\Phi(\alpha f + \beta) = \alpha \Phi(f) + \beta$  при всех  $f \in C(X)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha > 0$  \*);

---

\*) Слева в указанном равенстве символ  $\beta$  следует понимать как функцию на  $X$ , принимающую постоянное значение  $\beta$ .

2)  $\Phi(\max\{f, g\}) = \max\{\Phi(f), \Phi(g)\}$  при всех  $f, g \in C(X)$ .

Доказать, что

а)  $\Phi(\beta) = \beta$  при всех  $\beta \in \mathbf{R}$ ;

б) функционал  $\Phi$  не убывает, т. е. если  $f(x) \leq g(x)$  при всех  $x \in X$ , то  $\Phi(f) \leq \Phi(g)$ ;

в)  $\min_x f(x) \leq \Phi(f) \leq \max_x f(x)$  при всех  $f \in C(X)$ .

**1.47.** В предположениях предыдущей задачи поставим в соответствие функционалу  $\Phi$  следующие множества:

$$E_f = \{x \in X \mid f(x) \leq \Phi(f)\}, \quad f \in C(X),$$

$$E = \bigcap_{f \in C(X)} E_f.$$

Доказать, что

а) для любого такого замкнутого множества  $Y \subset X$ , что  $Y \cap E = \emptyset$ , существует функция  $f \in C(X)$ , удовлетворяющая неравенству  $\min_Y f(x) > \Phi(f)$ ;

б)  $E$  — непустое замкнутое множество;

в)  $\max_E f(x) \leq \Phi(f)$  при всех  $f \in C(X)$ .

**1.48\*.** Доказать теорему Кукушкина.

В предположениях задачи **1.46** существует такое замкнутое множество  $E \subset X$ , что  $\Phi(f) = \max_E f(x)$  при всех  $f \in C(X)$ .

Заметим, что верно и обратное: любой функционал данного вида удовлетворяет аксиомам 1) и 2) из **1.46** (см. утверждения а) и г) из **1.2**).

## § 2. Задача безусловной оптимизации

### СВОДКА ОСНОВНЫХ ФАКТОВ

**1. Условия экстремума.** Пусть дана задача безусловной минимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (2.1)$$

Введем обозначения:

$$f'(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

— вектор первых частных производных (градиент) функ-

ции  $f$  в точке  $x \in \mathbf{R}^n$ ;

$$f''(x) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

— матрица вторых частных производных (гессиан) функции  $f$  в точке  $x \in \mathbf{R}^n$ .

**Теорема 2.1** (необходимое условие минимума первого порядка). Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x^* \in \mathbf{R}^n$ . Тогда если  $x^*$  — локальное решение задачи (2.1), то

$$f'(x^*) = 0. \quad (2.2)$$

Точка  $x^* \in \mathbf{R}^n$ , удовлетворяющая (2.2), называется стационарной точкой задачи (2.1) и самой функции  $f$ .

**Теорема 2.2** (необходимое условие минимума второго порядка). Пусть  $f$  дважды дифференцируема в точке  $x^* \in \mathbf{R}^n$ . Тогда если  $x^*$  — локальное решение задачи (2.1), то матрица  $f''(x^*)$  неотрицательно определена, т. е.

$$\langle f''(x^*)h, h \rangle \geq 0 \text{ при всех } h \in \mathbf{R}^n. \quad (2.3)$$

**Теорема 2.3** (достаточное условие минимума второго порядка). Пусть  $f$  дважды дифференцируема в точке  $x^* \in \mathbf{R}^n$ . Тогда если  $f'(x^*) = 0$  и матрица  $f''(x^*)$  положительно определена, т. е.

$$\langle f''(x^*)h, h \rangle > 0 \text{ при всех } h \in \mathbf{R}^n, \quad h \neq 0, \quad (2.4)$$

то  $x^*$  — строгое локальное решение задачи (2.1).

**Замечание 2.1.** Если в задаче (2.1) вместо  $\min$  поставить  $\max$ , то теорема 2.1 остается справедливой в буквальной ее формулировке, а в теоремах 2.2, 2.3 следует поменять на противоположные знаки неравенств в (2.3), (2.4).

**Замечание 2.2.** Теоремы 2.1—2.3 сохраняют свою силу для задачи минимизации функции  $f$  на множестве  $X \subset \mathbf{R}^n$  при условии, что  $x^*$  есть внутренняя точка этого множества ( $x^* \in \text{int } X$ ).

**Замечание 2.3.** Полезно иметь в виду следующее простое правило отбора глобального решения среди стационарных точек задачи (2.1). Если известно, что глобальное решение существует, причем функция  $f$  дифференцируема всюду на  $\mathbf{R}^n$ , то этим решением является, очевидно, та стационарная точка, в которой функция  $f$  принимает наименьшее значение. В частности, если ста-

ционарная точка единственна, то она и служит глобальным решением. Таким образом, при отыскании глобальных экстремумов фактически нет необходимости использовать теоремы 2.2 и 2.3. Однако при анализе локального поведения функций эти утверждения являются весьма полезными.

**2. Дифференцируемые отображения.** Если имеется отображение (вектор-функция)  $F = (F_i): X \rightarrow \mathbf{R}^m$ , где  $X \subset \mathbf{R}^n$ , то под  $F'(x)$  будем понимать матрицу частных производных  $F'$  в точке  $x \in X$ :

$$F'(x) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

где  $i$  — индекс строки,  $j$  — индекс столбца. Эта матрица называется *матрицей Якоби* отображения  $F$  в точке  $x$ .

Отображение  $F = (F_i): X \rightarrow \mathbf{R}^m$  называется *дифференцируемым (непрерывно дифференцируемым)*, если каждая из функций  $F_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) дифференцируема (непрерывно дифференцируема) на  $X$ . Таким образом, непрерывная дифференцируемость  $F$  равносильна тому, что матрица  $F(x)$  существует и непрерывна всюду на  $X$ .

Для отображения  $F: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}^k$ , где  $X \subset \mathbf{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbf{R}^m$ , под  $F'_x(x^*, y^*)$  понимается его матрица Якоби по координатам вектора  $x$  в точке  $(x^*, y^*) \in X \times Y$ :

$$F'_x(x^*, y^*) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^*, y^*) \right)_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n}}$$

Следующая фундаментальная теорема математического анализа потребуется для решения некоторых задач из этого и следующего параграфов.

**Теорема 2.4 (о неявной функции).** Пусть  $X \subset \mathbf{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbf{R}^m$  — открытые множества,  $F: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}^n$  — непрерывно дифференцируемое отображение,  $x^* \in X$ ,  $y^* \in Y$ . Предположим, что  $F(x^*, y^*) = 0$ , причем матрица  $F'_x(x^*, y^*)$  невырождена. Тогда найдутся окрестность  $U$  точки  $x^*$  и окрестность  $V$  точки  $y^*$ , обладающие следующим свойством: для любой точки  $y \in V$  существует единственная точка  $x(y) \in U$ , удовлетворяющая условию  $F(x(y), y) = 0$ . При этом  $x(y^*) = x^*$ , вектор-функция  $x(y)$  непрерывно дифференцируема на  $V$  и

$$x'(y^*) = -[F'_x(x^*, y^*)]^{-1}F'_y(x^*, y^*).$$

Напомним также *цепное правило* дифференцирования сложных функций: если отображения  $F: X \rightarrow Y$  и  $G: Y \rightarrow \mathbf{R}^k$ , где  $X \subset \mathbf{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbf{R}^m$ , дифференцируемы, то отображение  $H: X \rightarrow \mathbf{R}^k$ , определенное формулой  $H(x) = G(F(x))$ , также дифференцируемо и

$$H'(x) = G'(y)F'(x), \quad y = F(x), \quad (2.5)$$

где, подчеркнем, матрицы Якоби  $H'(x)$ ,  $G'(y)$  и  $F'(x)$  имеют размеры  $k \times n$ ,  $k \times m$  и  $m \times n$  соответственно.

## УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Найти точку глобального минимума функции

$$f(x, y) = ax^2 + 2xy + by^2 - 2x - 3y$$

на плоскости  $\mathbf{R}^2$ :

|   | a b |   | a b |   | a b |    |   | a b |    |   |   |
|---|-----|---|-----|---|-----|----|---|-----|----|---|---|
| 1 | 1   | 2 | 6   | 2 | 1   | 11 | 3 | 1   | 16 | 4 | 1 |
| 2 | 1   | 3 | 7   | 2 | 2   | 12 | 3 | 2   | 17 | 4 | 2 |
| 3 | 1   | 4 | 8   | 2 | 3   | 13 | 3 | 3   | 18 | 4 | 3 |
| 4 | 1   | 5 | 9   | 2 | 4   | 14 | 3 | 4   | 19 | 4 | 4 |
| 5 | 1   | 6 | 10  | 2 | 5   | 15 | 3 | 5   | 20 | 4 | 5 |

2.2. Найти глобальное решение и значение задачи

$$f(x, y) = axy + \frac{b}{x} + \frac{c}{y} \rightarrow \min, \quad x > 0, \quad y > 0:$$

|   | a b c |   |   | a b c |   |   | a b c |    |   | a b c |   |    |   |   |   |
|---|-------|---|---|-------|---|---|-------|----|---|-------|---|----|---|---|---|
| 1 | 2     | 1 | 3 | 6     | 3 | 4 | 1     | 11 | 4 | 1     | 1 | 16 | 2 | 3 | 3 |
| 2 | 3     | 2 | 4 | 7     | 2 | 1 | 4     | 12 | 1 | 4     | 1 | 17 | 1 | 1 | 4 |
| 3 | 1     | 2 | 3 | 8     | 4 | 1 | 2     | 13 | 2 | 4     | 3 | 18 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 3     | 1 | 2 | 9     | 4 | 1 | 3     | 14 | 3 | 4     | 2 | 19 | 3 | 1 | 3 |
| 5 | 2     | 3 | 1 | 10    | 4 | 2 | 3     | 15 | 1 | 3     | 4 | 20 | 3 | 1 | 4 |

2.3. Найти глобальное решение задачи

$$f(x, y) = x^2 + xy + ay^2 - b \ln x - c \ln y \rightarrow \min, \\ x > 0, \quad y > 0:$$

|   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|---|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1 | 3/2      | 2        | 1        | 6  | 7/3      | 3        | 2        | 11 | 1/8      | 8        | 6        | 16 | 7/4      | 4        | 1        |
| 2 | 1/2      | 3        | 2        | 7  | 2/3      | 3        | 1        | 12 | 4        | 3        | 1        | 17 | 5/2      | 4        | 1        |
| 3 | 5/2      | 2        | 1        | 8  | 2        | 3        | 1        | 13 | 3/2      | 4        | 2        | 18 | 1        | 5        | 2        |
| 4 | 1/6      | 6        | 5        | 9  | 3/4      | 4        | 2        | 14 | 4/5      | 5        | 3        | 19 | 3/5      | 5        | 1        |
| 5 | 7        | 2        | 1        | 10 | 2/5      | 5        | 3        | 15 | 1/2      | 6        | 4        | 20 | 2/3      | 6        | 2        |

2.4. Найти точки экстремумов функции

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(ax^2 + by^2)$$

на плоскости  $\mathbf{R}^2$  \*):

|   | <i>a</i> | <i>b</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> |
|---|----------|----------|----|----------|----------|----|----------|----------|----|----------|----------|
| 1 | 1        | 2        | 6  | 8        | 3        | 11 | 9        | 1        | 16 | 4        | 1        |
| 2 | 7        | 3        | 7  | 2        | 4        | 12 | 3        | 5        | 17 | 6        | 7        |
| 3 | 1        | 4        | 8  | 2        | 5        | 13 | 3        | 1        | 18 | 4        | 3        |
| 4 | 8        | 5        | 9  | 7        | 6        | 14 | 7        | 2        | 19 | 1        | 5        |
| 5 | 1        | 6        | 10 | 2        | 7        | 15 | 3        | 6        | 20 | 5        | 6        |

2.5. Найти точки экстремумов функции

$$f(x, y) = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

на плоскости  $\mathbf{R}^2$ :

|   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|---|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1 | 4        | -1       | 2        | 6  | 1        | 3        | -4       | 11 | -2       | 4        | 1        | 16 | 2        | 3        | 3        |
| 2 | 4        | 2        | -1       | 7  | -1       | 3        | 4        | 12 | 4        | -2       | -1       | 17 | 3        | 1        | 4        |
| 3 | 1        | 2        | 4        | 8  | 2        | 5        | 2        | 13 | 6        | 1        | 6        | 18 | 6        | -1       | -2       |
| 4 | 3        | 1        | 2        | 9  | 1        | 3        | -3       | 14 | 6        | 1        | -6       | 19 | 1        | 5        | 4        |
| 5 | 3        | -1       | -2       | 10 | 2        | 1        | 3        | 15 | 4        | 6        | -1       | 20 | 1        | -1       | -4       |

2.6. Найти точки экстремумов функции

$$f(x, y) = ax^3 + ax^2y + bx + \frac{1}{3}y^3 + cy$$

на плоскости  $\mathbf{R}^2$ :

\*) В подобных заданиях требуется исследовать характер каждой экстремальной точки, т. е. выяснить, является ли она точкой глобального или локального, строгого или нестрогого минимума (максимума).

|    | $a$  | $b$   | $c$   |    | $a$ | $b$ | $c$   |
|----|------|-------|-------|----|-----|-----|-------|
| 1  | -5/4 | -5/2  | -11/2 | 11 | -2  | -2  | -17/8 |
| 2  | -5/4 | 5/2   | 1/2   | 12 | -2  | 2   | 7/8   |
| 3  | -5/4 | -10   | -22   | 13 | -2  | -8  | -17/2 |
| 4  | -5/4 | 10    | 2     | 14 | -2  | 8   | 7/2   |
| 5  | -5/4 | -5    | -11   | 15 | -2  | -4  | -17/4 |
| 6  | -5/4 | 5     | 1     | 16 | -2  | 4   | 7/4   |
| 7  | -5/4 | -5/2  | -19/3 | 17 | -2  | -2  | -7/3  |
| 8  | -5/4 | 5/2   | -1/3  | 18 | -2  | 2   | 2/3   |
| 9  | -5/4 | -15/2 | -19   | 19 | -2  | -6  | -7    |
| 10 | -5/4 | 15/2  | -1    | 20 | -2  | 6   | 2     |

2.7. Найти точки экстремумов функции  $f(x, y) = x^3y^2(ax + by + c)$  на плоскости  $\mathbf{R}^2$ :

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    |    |    |   |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|----|----|---|
| 1 | -4  | -1  | 1   | 6  | -2  | -1  | 3   | 11 | -5  | -1  | 5   | 16 | -3 | -1 | 7 |
| 2 | -3  | -1  | 9   | 7  | -4  | 1   | 2   | 12 | -1  | 1   | 2   | 17 | -2 | -1 | 2 |
| 3 | -1  | 1   | 3   | 8  | -2  | -1  | 8   | 13 | -1  | -1  | 9   | 18 | -9 | 1  | 3 |
| 4 | -5  | -1  | 4   | 9  | -4  | -1  | 4   | 14 | -3  | 1   | 8   | 19 | -2 | -1 | 1 |
| 5 | -1  | -1  | 7   | 10 | -2  | 1   | 6   | 15 | -4  | 1   | 5   | 20 | -2 | 1  | 9 |

2.8. Найти все значения параметра  $k$ , при которых точка  $(1, 0)$  является экстремальной для функции

$$f(x, y) = k^3xe^y - k^2a \ln\left(x + \frac{a-3}{a}y\right) + ((a+b-1)k - b)x + kcy + 2bxy,$$

и выяснить характер экстремума:

|    | $a$  | $b$  | $c$  |    | $a$  | $b$  | $c$   |
|----|------|------|------|----|------|------|-------|
| 1  | 5/2  | 1/2  | -5/2 | 11 | 2    | -2   | -4    |
| 2  | 3/2  | -1/2 | -3/2 | 12 | 3/2  | -3   | -4    |
| 3  | -1/2 | 1/2  | 7/2  | 13 | 1    | -4   | -4    |
| 4  | -2   | 2    | 8    | 14 | -7/2 | 5    | 14    |
| 5  | -5/2 | 5/2  | 19/2 | 15 | -4   | 6    | 16    |
| 6  | -3   | 3    | 11   | 16 | 7/2  | -3/2 | -13/2 |
| 7  | -4   | 4    | 14   | 17 | 3    | -3   | -7    |
| 8  | -5   | 5    | 17   | 18 | 2    | -6   | -8    |
| 9  | -6   | 6    | 20   | 19 | 5/2  | -9/2 | -15/2 |
| 10 | 5/2  | -1   | -4   | 20 | 1    | -9   | -9    |

## ЗАДАЧИ

2.1. Доказать теоремы 2.1—2.3.

2.2. а) Пусть функция  $f$  числового аргумента непрерывна в точке  $x^*$  и дифференцируема при остальных  $x$  из интервала  $U = (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$ . Предположим, что  $f'(x) \leq 0$  ( $< 0$ ), если  $x^* - \varepsilon < x < x^*$ , и  $f'(x) \geq 0$  ( $> 0$ ), если  $x^* < x < x^* + \varepsilon$ . Доказать, что  $x^*$  — точка минимума (строгого минимума) функции  $f$  на  $U$ .

б) Пусть  $x^*$  — точка строгого локального минимума дифференцируемой функции  $f$  на числовой оси  $\mathbf{R}$ . Следует ли отсюда, что для всех  $x$ , достаточно близких к  $x^*$ , выполняется  $f'(x) \leq 0$ , если  $x < x^*$ , и  $f'(x) \geq 0$ , если  $x > x^*$ ?

2.3. Пусть функция  $f$  непрерывна в точке  $x^* \in \mathbf{R}^n$  и дифференцируема при остальных  $x$  из шара  $U_\varepsilon(x^*)$ , где  $\varepsilon > 0$ . Предположим, что  $\langle f'(x), x - x^* \rangle \geq 0$  ( $> 0$ ) при всех  $x \in U_\varepsilon(x^*)$ ,  $x \neq x^*$ . Доказать, что  $x^*$  — точка минимума (строгого минимума) функции  $f$  на  $U_\varepsilon(x^*)$ .

2.4. Пусть функция  $f$  числового аргумента имеет производную порядка  $k - 1$  в некоторой окрестности  $U$  точки  $x^*$  и производную порядка  $k$  в самой точке  $x^*$ , причем

$$f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0.$$

Доказать следующие утверждения:

а) если  $x^*$  — точка локального минимума  $f$  (на  $U$ ) и  $k = 2m + 1$ , то  $f^{(k)}(x^*) = 0$ ;

б) если  $x^*$  — точка локального минимума  $f$  и  $k = 2m$ , то  $f^{(k)}(x^*) \geq 0$ ;

в) если  $k = 2m$  и  $f^{(k)}(x^*) > 0$ , то  $x^*$  — точка строгого локального минимума  $f$ .

2.5. Пусть  $x^*$  — точка строгого локального минимума бесконечно дифференцируемой функции  $f$  на  $\mathbf{R}$ . Следует ли отсюда, что  $f^{(k)}(x^*) \neq 0$  хотя бы при одном  $k$ ?

2.6. Пусть  $A = (a_{ij})$  — симметрическая матрица размера  $n \times n$ . Предположим, что  $\langle Ah, h \rangle = 0$  при всех  $h \in \mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $a_{ij} = 0$  для любых  $i, j = 1, \dots, n$ , т. е.  $A = 0$ .

2.7. Пусть  $A = (a_{ijk})$  — кубическая симметрическая матрица размера  $n \times n \times n$ , т. е. индексы  $i, j, k$  пробегают значения от 1 до  $n$ , и для любых  $i, j, k$  следует  $a_{ijk} = a_{i_1 j_1 k_1}$ , где  $\{i, j, k\}$  — произвольная перестановка набора  $\{i, j, k\}$  (таких перестановок шесть, если индексы  $i, j, k$  попарно различны, и три, если два из индексов

совпадают). Для любого  $h \in \mathbb{R}^n$  примем обозначение

$$A[h] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} h_i h_j h_k^*.$$

Предположим, что  $A[h] = 0$  при всех  $h \in \mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $A = 0$ .

2.8. Функция  $f$ , определенная в некоторой окрестности  $U$  точки  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , называется *трижды непрерывно дифференцируемой в  $x^*$* , если кубическая матрица

$$f'''(x) = \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (x) \right)_{i,j,k=1,\dots,n}$$

существует в любой точке  $x \in U$  и непрерывна в  $x^*$ . При этом, как известно, матрица  $f'''(x)$  является симметрической [22, с. 581].

Пусть функция  $f$  трижды непрерывно дифференцируема в точке  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , являющейся точкой ее локального минимума. Доказать, что  $f'''(x^*)[h] = 0$  при всех таких  $h \in \mathbb{R}^n$ , которые удовлетворяют условию  $f''(x^*)[h] = 0$ ; в частности, если  $f''(x^*) = 0$ , то  $f'''(x^*) = 0$ .

Найти точки локальных и глобальных экстремумов следующих функций на всей области их определения:

2.9.  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 2z.$

2.10.  $f(x, y) = ae^{-x} + be^{-y} + \ln(e^x + e^y)$ , где  $a > 0, b > 0.$

2.11.  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$

2.12.  $f(x, y) = (x + y)(x - a)(y - b).$

2.13.  $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5.$

2.14.  $f(x, y) = x + y + 4 \sin x \sin y.$

2.15.  $f(x, y) = xe^x - (1 + e^x) \cos y.$

2.16.  $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$

2.17.  $f(x, y, z) = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z).$

Найти глобальные решения следующих задач:

2.18.  $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \rightarrow \min, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$

2.19.  $f(x, y) = x^2 + y + \frac{1}{x+y} \rightarrow \min, \quad x + y > 0.$

\*) По аналогии с этим для обычной квадратной матрицы  $A = (a_{ij})$  можно писать

$$A[h] = \langle Ah, h \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j.$$

Для унификации записи мы используем такое обозначение в 2.8.

**2.20.** Пусть  $C$  — симметрическая матрица размера  $n \times n$ ,  $A$  — матрица размера  $m \times n$ . Доказать следующие утверждения:

а) если  $C$  положительно определена, то обратная матрица  $C^{-1}$  существует и положительно определена;

б) если  $C$  неотрицательно определена, то симметрическая матрица  $ACA^T$  (размера  $m \times m$ ) неотрицательно определена;

в) если  $C$  положительно определена, а  $\text{rang } A = m$ , то  $ACA^T$  положительно определена.

Найти глобальные решения следующих задач:

**2.21.**  $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle \rightarrow \min, \quad x \in \mathbf{R}^n,$  где  $A$  — положительно определенная матрица размера  $n \times n$ ,  $b \in \mathbf{R}^n$ .

**2.22.**  $f(x) = \|Ax - b\|^2 \rightarrow \min, \quad x \in \mathbf{R}^n,$  где  $A$  — матрица размера  $m \times n$ ,  $\text{rang } A = n$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ .

Данная задача тесно связана с одним из методов обработки данных. Прежде чем его описать, приведем общую постановку проблемы *анализа данных*. Рассмотрим некоторый объект, на «вход» которого подается параметр  $x \in \mathbf{R}^n$ , а на «выходе» наблюдается параметр  $y \in \mathbf{R}$ . Точная зависимость между  $x$  и  $y$  неизвестна, но есть основания предполагать, что приближенно она описывается функцией вида  $y = \varphi(x, a)$ , где  $a$  — некоторый параметр. Предположим, что в результате  $m$  опытов (или наблюдений) над объектом получены следующие данные:

$$x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i), \quad y_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

т. е. в  $i$ -м опыте значению  $x^i$  входного параметра соответствовало значение  $y_i$  выходного. Тогда естественно попытаться так подобрать параметр  $a$ , чтобы зависимость указанного вида наилучшим образом аппроксимировала опытные данные. В качестве меры точности приближения обычно берут одну из следующих функций:

$$f_1(a) = \sum_{i=1}^m (y_i - \varphi(x^i, a))^2,$$

$$f_2(a) = \sum_{i=1}^m |y_i - \varphi(x^i, a)|, \quad f_3(a) = \max_{1 \leq i \leq m} |y_i - \varphi(x^i, a)|.$$

Наилучшим считается такое значение параметра  $a$ , при котором выбранная функция принимает наименьшее значение. Обработка данных на основе минимизации функции  $f_1$  называется *методом наименьших квадратов*, или методом наилучшего среднеквадратичного приближения. При минимизации  $f_2$  и  $f_3$  соответственно говорят о *наилучшем в норме  $l_1$  и наилучшем равномерном (или чебышевском) приближении*.

Часто в качестве  $\varphi(x, a)$  фигурирует линейная функция

$$y = \langle a, x \rangle = a_1x_1 + \dots + a_nx_n. \quad (2.6)$$

Здесь, следовательно,  $a$  есть  $n$ -мерный вектор. Пусть  $C$  есть матрица входных данных, т. е. матрица размера  $m \times n$ , строками которой служат векторы  $x^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), а  $d = (y_1, \dots, y_m)$  — вектор выходных данных. Тогда метод наименьших квадратов с функцией (2.6) приводит к задаче

$$f_1(a) = \|Ca - d\|^2 \rightarrow \min, \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad (2.7)$$

которая отличается от 2.22 лишь обозначениями. Отметим, что эта задача всегда имеет глобальное решение в силу теоремы 1.3. Условие  $\text{rang } A = n$  в 2.22 (соответственно  $\text{rang } C = n$  в (2.7)) обеспечивает единственность решения.

Отметим, что линейные зависимости возникают чаще, чем это может показаться на первый взгляд. Пусть, например, постулируется полиномиальная зависимость  $y$  от числового параметра  $t$ :

$$y = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n.$$

Если рассматривать в качестве «входного» вектор  $x = (1, t, \dots, t^n)$ , то получаем зависимость вида (2.6).

Рассмотрим другой пример. Многие экономико-математические модели базируются на понятии производственной функции, т. е. зависимости вида  $y = \varphi(x, a)$ , где  $y$  — объем производства, а  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — вектор используемых ресурсов. Наиболее известным примером производственной функции служит функция Кобба — Дугласа

$$y = a_0x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}.$$

При построении такой функции для конкретного экономического объекта (предприятия, отрасли, сферы производства в целом) параметры  $a_0, a_1, \dots, a_n$  оценивают по статистическим данным об  $y$  и  $x = (x_1, \dots, x_n)$  за прошлые годы. Для этого обычно переходят к логарифмам:

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + \dots + a_n \ln x_n.$$

В результате возникает линейная зависимость между «входом»  $u = (1, \ln x_1, \dots, \ln x_n)$  и «выходом»  $v = \ln y$ . Затем решается задача типа (2.7).

**2.23.** Методом наименьших квадратов найти наилучшую зависимость вида  $y = a_1x_1 + a_2x_2$  для опытных данных из следующей таблицы:

| Номер опыта | $x_1$ | $x_2$ | $y$  |
|-------------|-------|-------|------|
| 1           | -1    | 1     | -4,5 |
| 2           | 1     | 1     | 1,5  |
| 3           | 0,5   | 2     | -2   |
| 4           | 0,5   | 0     | 4    |

**2.24.** Пусть  $A$  — неотрицательно определенная симметрическая матрица размера  $n \times n$ ,  $b \in \mathbf{R}^n$ . Доказать, что любая стационарная точка квадратичной функции

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$$

является точкой ее глобального минимума на  $\mathbf{R}^n$ .

**2.25.** Найти все значения параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ , при которых в точке  $(1, -4)$  достигается глобальный минимум функции

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + y^2 + 6x + cy.$$

**2.26.** Найти все значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых точка  $(0, 1)$  является экстремальной для функции

$$f(x, y) = 2x^2 + a^3e^x + bxy + \frac{1}{2}b^3y^2 + ay,$$

и выяснить характер экстремума.

**2.27.** Привести пример дифференцируемой функции  $f$  на плоскости  $\mathbf{R}^2$ , сужение которой на любую прямую, проходящую через точку  $(0, 0)$ , достигает строгого локального минимума в этой точке, но  $(0, 0)$  не является точкой локального минимума  $f$  на  $\mathbf{R}^2$ .

**2.28.** Пусть  $f$  — непрерывная функция на  $\mathbf{R}$ . Доказать, что между любыми двумя ее точками локального минимума лежит по крайней мере одна точка локального максимума.

**2.29.** Привести пример дифференцируемой функции  $f$  на  $\mathbf{R}^2$ , у которой имеется бесконечно много точек локального минимума и нет ни одной точки локального максимума.

**2.30.** Отображение  $F: X \rightarrow Y$ , где  $X$  и  $Y$  — открытые множества в  $\mathbf{R}^n$ , называется *диффеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно, причем  $F$  и обратное отображение  $F^{-1}: Y \rightarrow X$  непрерывно дифференцируемы.

Доказать, что матрица Якоби диффеоморфизма  $F: X \rightarrow Y$  в любой точке  $x \in X$  невырождена, причем обратной к ней является матрица Якоби отображения  $F^{-1}: Y \rightarrow X$  в точке  $y = F(x)$ , т. е.

$$[F'(x)]^{-1} = (F^{-1})'(y).$$

**2.31\*.** Пусть  $F: X \rightarrow Y$  — диффеоморфизм,  $f(y)$  — дифференцируемая (числовая) функция на  $Y$ ,  $y^* \in Y$ . Рассмотрим функцию  $\varphi(x) = f(F(x))$  на  $X$  и точку  $x^* = F^{-1}(y^*)$ . Доказать следующие утверждения:

а)  $y^*$  — стационарная точка функции  $f$  в том и только том случае, если  $x^*$  — стационарная точка функции  $\varphi$ ;  
 б)  $y^*$  — точка локального (глобального) минимума  $f$  в том и только том случае, если  $x^*$  — точка локального (глобального) минимума  $\varphi$ ;

в) если  $f$  дважды дифференцируема в  $y^*$  и  $y^*$  — стационарная точка  $f$ , то матрица  $f''(y^*)$  положительно определена в том и только том случае, если матрица  $\varphi''(x^*)$  положительно определена.

**2.32.** Пусть  $x^*$  — единственная стационарная точка дифференцируемой функции  $f$  на  $\mathbf{R}$ , служащая точкой ее локального минимума. Доказать, что этот минимум является и глобальным.

**2.33\*.** Построить пример дифференцируемой функции на  $\mathbf{R}^2$ , имеющей ровно одну стационарную точку, которая служит точкой локального, но не глобального минимума.

**2.34\*.** Построить пример дифференцируемой функции на  $\mathbf{R}^2$ , у которой имеется ровно  $m$  стационарных точек и все они служат точками локального минимума.

**2.35.** Построить пример дифференцируемой функции на  $\mathbf{R}^2$ , у которой имеется счетное число стационарных точек и все они служат точками локального минимума.

**2.36\*.** Пусть  $f$  и  $\varphi$  — дважды непрерывно дифференцируемые функции в некоторой окрестности точки  $x^* \in \mathbf{R}^n$ , причем  $f'(x^*) = 0$ , матрица  $f''(x^*)$  положительно определена и, значит,  $x^*$  является точкой строгого локального минимума  $f$ . Рассмотрим функцию  $\psi(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ , где  $\varepsilon \in \mathbf{R}$ . Доказать, что существует непрерывно дифференцируемая вектор-функция  $x(\varepsilon)$ , переводящая некоторую окрестность  $V$  точки  $0 \in \mathbf{R}$  в окрестность  $U$  точки  $x^*$  и обладающая следующими свойствами: при любом  $\varepsilon \in V$

а)  $x(\varepsilon)$  — единственная в  $U$  стационарная точка функции  $\psi(x, \varepsilon)$ ;

б)  $x(\varepsilon)$  — точка строгого локального минимума функции  $\psi(x, \varepsilon)$ ;

в)  $x(0) = x^*$ ,  $x'(0) = -[f''(x^*)]^{-1}\varphi'(x^*)$  и, значит,

$$x(\varepsilon) = x^* - \varepsilon [f''(x^*)]^{-1}\varphi'(x^*) + o(\varepsilon).$$

**2.37.** Привести пример, показывающий, что утверждения задачи **2.36** не сохраняются, если  $x^*$  есть точка строгого локального минимума  $f$ , но матрица  $f''(x^*)$  не является положительно определенной.

**2.38.** В дополнение к условиям задачи **2.36** предположим, что  $x^*$  — точка глобального минимума функции  $f$

на  $\mathbf{R}^n$ . Верно ли тогда, что  $x(\varepsilon)$  — точка глобального минимума функции  $\psi$  на  $\mathbf{R}^n$ ?

Найти с точностью до  $o(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  какие-нибудь точки локального минимума следующих функций:

2.39.  $\psi_\varepsilon(x) = x^2 + \varepsilon e^x$ .

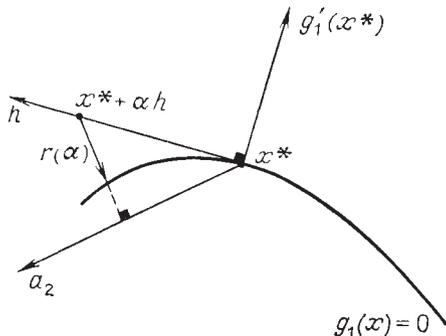


Рис. 3

2.40.  $\psi_\varepsilon(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + \varepsilon(\sin \pi x + 2 \sin \pi y)$ .

2.41\*. Доказать теорему Люстерника.

Пусть  $g_1, \dots, g_m$  — непрерывно дифференцируемые функции в некоторой окрестности точки  $x^* \in \mathbf{R}^n$ , причем

$$g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

а градиенты  $g'_1(x^*), \dots, g'_m(x^*)$  линейно независимы. Рассмотрим произвольные векторы  $a_{m+1}, \dots, a_n$ , дополняющие векторы  $g'_1(x^*), \dots, g'_m(x^*)$  до базиса в  $\mathbf{R}^n$ . Предположим, что вектор  $h \in \mathbf{R}^n$  удовлетворяет условию

$$\langle g'_i(x^*), h \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда существует такая  $n$ -мерная вектор-функция  $r(\alpha)$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ ), что для всех достаточно малых по модулю  $\alpha$  выполнены равенства

$$\begin{aligned} g_i(x^* + \alpha h + r(\alpha)) &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \langle a_i, r(\alpha) \rangle &= 0, \quad i = m + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(\alpha)}{\alpha} = 0.$$

Иллюстрацией к теореме Люстерника в случае  $m = 1$  служит рис. 3. Данная теорема находит важные применения при выводе условия экстремума в задачах с ограничениями (см. 3.8, 3.10).

### § 3. Классическая задача на условный экстремум

#### СВОДКА ОСНОВНЫХ ФАКТОВ

*Классической задачей на условный экстремум* принято называть задачу минимизации (или максимизации) функции  $f$  на множестве  $X$ , заданном системой из конечного числа уравнений («связей»):

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

Запишем эту задачу в виде

$$f(x) \rightarrow \min, \quad g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

**1. Отыскание решения методом исключения переменных.** В некоторых случаях возможен следующий подход к отысканию решения задачи (3.1). Допустимое множество задачи представляет собой систему из  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными; при этом, как правило,  $m < n$ . Предположим, что  $x = (u, v) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}$  и для любого  $v \in \mathbf{R}^{n-m}$  система

$$g_i(u, v) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

из  $m$  уравнений с  $m$  неизвестными имеет единственное решение  $u = u(v)$ . Тогда задача (3.1) сводится к задаче безусловной минимизации

$$F(v) = f(u(v), v) \rightarrow \min, \quad v \in \mathbf{R}^{n-m}. \quad (3.2)$$

Если  $v^*$  — локальное (глобальное) решение данной задачи, то, очевидно,  $(u(v^*), v^*)$  — локальное (глобальное) решение задачи (3.1), и наоборот.

Описанный *метод исключения переменных* имеет ограниченную область применения, поскольку указанная выше однозначная функция  $u(v)$  существует далеко не всегда. Кроме того, при выписывании условий экстремума в задаче (3.2) часто возникают довольно громоздкие выражения. Более универсальным является *метод Лагранжа*, основанный на использовании условий экстремума непосредственно для задач вида (3.1).

**2. Условия экстремума.** Введем *функцию Лагранжа* задачи (3.1):

$$L(x, y_0, y) = y_0 f(x) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x),$$

где  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $y_0 \in \mathbf{R}$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m$ . Пусть

$$L'_x(x, y_0, y) = y_0 f'(x) + \sum_{i=1}^m y_i g'_i(x) \quad (3.3)$$

— градиент функции Лагранжа по  $x$ ;

$$L''_x(x, y_0, y) = y_0 f''(x) + \sum_{i=1}^m y_i g''_i(x)$$

— гессиан функции Лагранжа по  $x$ .

Следующая теорема, лежащая в основе метода Лагранжа, является центральным фактом классической теории условного экстремума.

**Теорема 3.1** (необходимое условие минимума первого порядка, или принцип Лагранжа). Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $x^* \in \mathbf{R}^n$ , функции  $g_1, \dots, g_m$  непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности этой точки. Тогда если  $x^*$  — локальное решение задачи (3.1), то существуют число  $y_0^*$  и вектор  $y^* \in \mathbf{R}^m$ , не равные нулю одновременно и такие, что

$$L'_x(x^*, y_0^*, y^*) = 0. \quad (3.4)$$

Условие (3.4) имеет ясный геометрический смысл: с учетом (3.3) оно означает, что градиенты  $f'(x^*)$ ,  $g'_1(x^*)$ ,  $\dots$ ,  $g'_m(x^*)$  являются линейно зависимыми. В частности, если  $m = 1$ , то  $f'(x^*)$  и  $g'_1(x^*)$  должны быть коллинеарными. Напомним, что эти градиенты, если они от-

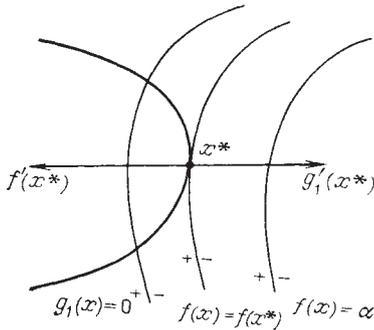


Рис. 4

личны от нуля, направлены ортогонально к поверхностям (линиям) уровня  $f(x) = f(x^*)$  и  $g_1(x) = g_1(x^*) = 0$  соответственно, причем их коллинеарность говорит о том, что решение  $x^*$  должно быть точкой касания данных поверхностей (рис. 4). Фактически это необходимое условие экстремума уже использовалось при решении некоторых задач из § 1.

Точка  $x^* \in X$  называется *стационарной точкой* задачи (3.1), если она удовлетворяет (3.4) при некоторых  $y_0^* \geq 0$  и  $y^* \in \mathbf{R}^m$ , не равных нулю одновременно. При

этом числа  $y_0^*, y_1^*, \dots, y_m^*$  называются *множителями Лагранжа*, соответствующими  $x^*$ .

Равенство (3.4) вместе с условием  $x^* \in X$  образует систему из  $n + m$  уравнений с  $n + m + 1$  неизвестными. При этом всегда можно перейти к  $n + m$  неизвестным, рассматривая два случая:  $y_0^* = 0$  и  $y_0^* = 1$ .

Любое дополнительное предположение о задаче (3.1), обеспечивающее в теореме 3.1 случай  $y_0^* \neq 0$ , принято называть *условием регулярности*. При наличии такого условия и саму задачу (3.1) называют *регулярной*. Для нее достаточно рассматривать лишь *регулярную функцию Лагранжа*

$$L(x, y) = L(x, 1, y) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x).$$

Основными примерами условия регулярности служат условия линейной независимости градиентов  $g'_1(x^*), \dots, g'_m(x^*)$  и условие линейности функций  $g_1(x), \dots, g_m(x)$ , т. е.  $g_i(x) = \langle a^i, x \rangle + b_i$ , где  $a^i \in \mathbf{R}^n$ ,  $b_i \in \mathbf{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

**Теорема 3.2** (необходимое условие минимума второго порядка). Пусть функции  $f, g_1, \dots, g_m$  дважды дифференцируемы в точке  $x^* \in \mathbf{R}^n$ . Пусть, кроме того, функции  $g_1, \dots, g_m$  непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности  $x^*$ , а их градиенты  $g'_1(x^*), \dots, g'_m(x^*)$  линейно независимы. Тогда если  $x^*$  — локальное решение задачи (3.1), то

$$\langle L''_x(x^*, y_0^*, y^*) h, h \rangle \geq 0 \quad (3.5)$$

при любых  $y_0^* > 0, y^* \in \mathbf{R}^m$ , удовлетворяющих (3.4), и всех таких  $h \in \mathbf{R}^n$ , что

$$\langle g'_i(x^*), h \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.6)$$

**Теорема 3.3** (достаточное условие минимума второго порядка). Пусть функции  $f, g_1, \dots, g_m$  дважды дифференцируемы в точке  $x^* \in X$ . Тогда если существуют такие  $y_0^* \geq 0$  и  $y^* \in \mathbf{R}^m$ , что выполняется (3.4) и, кроме того,

$$\langle L''_x(x^*, y_0^*, y^*) h, h \rangle > 0 \quad (3.7)$$

при всех  $h \neq 0$ , удовлетворяющих (3.6), то  $x^*$  — строгое локальное решение задачи (3.1).

Условие (3.6) означает, что вектор  $h$  ортогонален к линейному подпространству, натянутому на градиенты  $g'_1(x^*), \dots, g'_m(x^*)$ . Поэтому его называют *условием ортогональности*.

В отношении теорем 3.1—3.3 можно высказать замечания, аналогичные замечаниям 2.1—2.3. В частности, эти утверждения сохраняют свою силу, если в ограничения задачи (3.1) добавлено условие  $x \in P$ , но  $x^* \in \text{int } P$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Найти глобальное решение задачи

$$xy^3 \rightarrow \max, \quad ax + by = c$$

сначала методом исключения переменных, а затем методом Лагранжа:

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 2   | 3   | 7   | 6  | 2   | 5   | 6   | 11 | 3   | 1   | 10  | 16 | 6   | 2   | 4   |
| 2 | 1   | 5   | 8   | 7  | 1   | 4   | 8   | 12 | 1   | 5   | 10  | 17 | 6   | 2   | 8   |
| 3 | 3   | 1   | 6   | 8  | 3   | 5   | 7   | 13 | 2   | 7   | 10  | 18 | 8   | 2   | 5   |
| 4 | 2   | 4   | 9   | 9  | 4   | 3   | 6   | 14 | 4   | 4   | 8   | 19 | 8   | 2   | 10  |
| 5 | 4   | 1   | 6   | 10 | 1   | 6   | 9   | 15 | 4   | 2   | 12  | 20 | 8   | 3   | 11  |

3.2. Найти точки экстремумов функции

$$f(x, y) = ax + by$$

при условии  $x^2 + y^2 = c^2$  \*):

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 2   | -3  | 5   | 6  | 7   | 2   | 4   | 11 | -2  | -5  | 5   | 16 | 5   | 1   | 3   |
| 2 | 4   | 1   | 3   | 7  | -2  | 6   | 2   | 12 | 5   | -3  | 1   | 17 | -1  | 5   | 1   |
| 3 | -3  | 4   | 2   | 8  | -1  | 7   | 5   | 13 | -5  | -1  | 2   | 18 | 2   | 5   | 2   |
| 4 | -2  | 1   | 1   | 9  | -4  | -1  | 3   | 14 | -7  | -1  | 4   | 19 | -5  | 3   | 5   |
| 5 | 2   | 3   | 4   | 10 | -2  | -3  | 1   | 15 | 1   | -7  | 3   | 20 | 1   | 7   | 4   |

\*) См. подстрочное примечание к упражнению 2.4.

3.3. Найти точки экстремумов функции

$$f(x, y) = ax^2 + 2xy + by^2$$

при условии  $4x^2 + cy^2 = 9$ :

|   | a | b | c | a  | b | c | a | b  | c | a | b | c  |    |    |   |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|----|----|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 | 6  | 3 | 2 | 2 | 11 | 5 | 8 | 6 | 16 | 7  | 4  | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 7  | 5 | 4 | 3 | 12 | 5 | 3 | 2 | 17 | 13 | 4  | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 8  | 3 | 5 | 6 | 13 | 9 | 3 | 1 | 18 | 7  | 11 | 6 |
| 4 | 1 | 2 | 6 | 9  | 7 | 9 | 5 | 14 | 9 | 7 | 3 | 19 | 9  | 5  | 2 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 10 | 5 | 2 | 1 | 15 | 3 | 6 | 7 | 20 | 7  | 13 | 7 |

3.4. Найти точки экстремумов функции

$$f(x, y) = ax^3 + by^3$$

при условии  $x^2 + y^2 = c^2$ :

|   | a | b | c | a  | b | c | a | b  | c | a | b | c  |   |   |   |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 2 | 6  | 3 | 1 | 3 | 11 | 1 | 8 | 1 | 16 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 7 | 3 | 3 | 7  | 4 | 3 | 4 | 12 | 4 | 1 | 5 | 17 | 2 | 7 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 5 | 8  | 1 | 4 | 5 | 13 | 5 | 3 | 4 | 18 | 8 | 1 | 2 |
| 4 | 7 | 2 | 1 | 9  | 5 | 2 | 2 | 14 | 2 | 5 | 3 | 19 | 1 | 3 | 5 |
| 5 | 3 | 4 | 2 | 10 | 3 | 5 | 1 | 15 | 2 | 1 | 2 | 20 | 3 | 7 | 3 |

3.5. Найти точки экстремумов функции

$$f(x, y) = y^2$$

при условии  $ax^3 + by^3 - 3cxy = d$ :

|   | a   | b | c | d   | a  | b  | c | d | a   | b  | c   | d  | a | b   | c  | d  |    |   |    |
|---|-----|---|---|-----|----|----|---|---|-----|----|-----|----|---|-----|----|----|----|---|----|
| 1 | 9   | 2 | 9 | -16 | 6  | 12 | 1 | 6 | -16 | 11 | -1  | 2  | 1 | -4  | 16 | -7 | 16 | 7 | -2 |
| 2 | -36 | 1 | 9 | 8   | 7  | 1  | 2 | 1 | 4   | 12 | -4  | 1  | 2 | -16 | 17 | 28 | 1  | 7 | 8  |
| 3 | -9  | 2 | 9 | 16  | 8  | 4  | 1 | 2 | 16  | 13 | -18 | 4  | 9 | 4   | 18 | 1  | 2  | 1 | 12 |
| 4 | 7   | 2 | 7 | 16  | 9  | -7 | 2 | 7 | -16 | 14 | 9   | 16 | 9 | -2  | 19 | 1  | 16 | 2 | 12 |
| 5 | 3   | 2 | 3 | -4  | 10 | 36 | 1 | 9 | -8  | 15 | 14  | 4  | 7 | 4   | 20 | 1  | 1  | 1 | 3  |

3.6. Найти точки экстремумов функции

$$f(x, y, z) = a^2x^2 + b^2y^2 + cz + 2(abxy + bcyz + acxz)$$

при условии  $ax + by + c^2z^2 = 3/2$ :

|   | a  | b  | c  |    | a  | b  | c  |    | a  | b  | c  |    | a  | b | c  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----|
| 1 | -5 | 1  | -2 | 6  | 6  | -1 | 1  | 11 | 5  | -4 | 1  | 16 | 6  | 3 | -5 |
| 2 | 1  | -4 | 5  | 7  | 1  | 5  | -2 | 12 | -4 | 2  | 3  | 17 | -1 | 7 | 1  |
| 3 | -6 | 5  | 4  | 8  | -3 | 2  | 4  | 13 | 1  | 6  | -3 | 18 | 5  | 2 | -4 |
| 4 | 1  | 2  | -3 | 9  | -5 | 2  | -5 | 14 | -3 | -5 | 4  | 19 | -3 | 7 | 5  |
| 5 | 3  | -4 | 2  | 10 | 3  | -6 | 3  | 15 | 6  | 4  | -5 | 20 | 5  | 3 | -2 |

Указание: добавить к функции  $f$  выражение  $ax + by + c^2z^2$  и выделить полный квадрат.

3.7. Найти проекцию начала координат в пространстве  $\mathbf{R}^4$  на множество

$$X = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + ax_2 - x_4 = b, x_1 + ax_3 + x_4 = c\}:$$

|   | a | b  | c  |    | a | b  | c   |    | a | b  | c  |    | a | b  | c   |
|---|---|----|----|----|---|----|-----|----|---|----|----|----|---|----|-----|
| 1 | 2 | 9  | 6  | 6  | 2 | 9  | -9  | 11 | 1 | 6  | 6  | 16 | 1 | 6  | -9  |
| 2 | 2 | 9  | -6 | 7  | 2 | -9 | 9   | 12 | 1 | 6  | -6 | 17 | 1 | -6 | 9   |
| 3 | 2 | -9 | 6  | 8  | 2 | -9 | -9  | 13 | 1 | -6 | 6  | 18 | 1 | -6 | -9  |
| 4 | 2 | -9 | -6 | 9  | 2 | 9  | 18  | 14 | 1 | -6 | -6 | 19 | 1 | 6  | 12  |
| 5 | 2 | 9  | 9  | 10 | 2 | 9  | -18 | 15 | 1 | 6  | 9  | 20 | 1 | 6  | -12 |

3.8. Найти все значения параметра  $k$ , при которых точка  $(0, 1)$  является экстремальной для функции

$$f(x, y) = \ln(ax + 2k^2y) - kbxy + \frac{b}{k}x + cy$$

при условии  $x^4e^y + y^2e^x = 1$ , и выяснить характер экстремума:

|   | a | b    | c |    | a | b    | c |    | a | b    | c |    | a | b    | c |
|---|---|------|---|----|---|------|---|----|---|------|---|----|---|------|---|
| 1 | 4 | 4    | 3 | 6  | 3 | 3    | 2 | 11 | 2 | 2    | 1 | 16 | 1 | 1    | 0 |
| 2 | 4 | -4   | 3 | 7  | 3 | -3   | 2 | 12 | 2 | -2   | 1 | 17 | 1 | -1   | 0 |
| 3 | 4 | -1   | 3 | 8  | 3 | -3/4 | 2 | 13 | 2 | -1/2 | 1 | 18 | 1 | -1/3 | 0 |
| 4 | 4 | 1    | 3 | 9  | 3 | 3/4  | 2 | 14 | 2 | 1/2  | 1 | 19 | 1 | 1/3  | 0 |
| 5 | 4 | -2/3 | 3 | 10 | 3 | -1/2 | 2 | 15 | 2 | -1/3 | 1 | 20 | 1 | -1/6 | 0 |

## ЗАДАЧИ

Найти точки экстремумов следующих функций при указанных ограничениях \*):

3.1.  $f(x, y) = y, \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

3.2.  $f(x, y) = x^3 + y^3, \quad ax + by = 1,$  где  $a > 0, b > 0.$

3.3.  $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y, \quad x^2 + y^2 = a,$  где  $a > 0.$

3.4.  $f(x, y) = x \sin y, \quad 3x^2 - 4 \cos y - 1 = 0.$

3.5.  $f(x, y, z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 1.$

3.6.  $f(x, y, z) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2,$   
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$  где  $a > b > c > 0.$

3.7.  $f(x, y, z) = x + y + z^2 + 2(xy + yz + zx), \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

3.8. Доказать теорему 3.1.

3.9. Пусть в условиях теоремы 3.1 градиенты  $g'_1(x^*), \dots, g'_m(x^*)$  линейно зависимы. Следует ли отсюда, что обязательно  $y_0^* = 0$ ?

3.10. Доказать теорему 3.2.

3.11. Привести пример, показывающий существование условия линейной независимости градиентов  $g'_1(x^*), \dots, g'_m(x^*)$  в теореме 3.2.

3.12. Доказать теорему 3.3.

3.13. Пусть выполняются условия теоремы 3.3 при  $y_0^* = 0.$  Доказать, что  $x^*$  — изолированная точка допустимого множества задачи (3.1). Привести пример, когда условия теоремы 3.3 выполнены именно при  $y_0^* = 0.$

Найти глобальные решения следующих задач:

3.14.  $\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j^{\beta_j} = b, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$  где  $\alpha_j > 0, \beta_j > 0, a_j > 0, b > 0.$

3.15.  $\sum_{j=1}^n c_j x_j^{\alpha_j} \rightarrow \min, \quad \prod_{j=1}^n x_j^{\beta_j} = b, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$  где  $c_j > 0, \alpha_j > 0, \beta_j > 0, b > 0.$

3.16.  $\sum_{j=1}^n \frac{c_j}{x_j^{\alpha_j}} \rightarrow \min, \quad \prod_{j=1}^n x_j^{\beta_j} = b, \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n,$  где  $c_j > 0, \alpha_j > 0, \beta_j > 0, b > 0.$

3.17.  $\sum_{j=1}^n \frac{c_j}{x_j^{\alpha_j}} \rightarrow \min, \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j = b, \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n,$  где  $c_j > 0, \alpha_j > 0, a_j > 0, b > 0.$

\*) См. подстрочное примечание к упражнению 2.4.

3.18.  $\sum_{j=1}^n c_j x_j^\alpha \rightarrow \max$ ,  $\sum_{j=1}^n a_j x_j = b$ ,  $x_j > 0$ ,  $j = 1, \dots$   
 $\dots, n$ , где  $c_j > 0$ ,  $a_j > 0$ ,  $b > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

3.19.  $\sum_{j=1}^n c_j x_j^\alpha \rightarrow \min$ ,  $\sum_{j=1}^n a_j x_j = b$ , где  $c_j > 0$ ,  $\alpha$  — чет-  
ное натуральное число,  $a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0$  (ср. с задачей  
3.2).

3.20.  $\sum_{j=1}^n c_j |x_j|^\alpha \rightarrow \min$ ,  $\sum_{j=1}^n a_j x_j = b$ , где  $c_j > 0$ ,  $\alpha >$   
 $> 1$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0$ ,  $b > 0$ .

3.21.  $\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$ ,  $\sum_{j=1}^n a_j x_j^\alpha = b$ , где  $c = (c_1, \dots$   
 $\dots, c_n) \neq 0$ ,  $a_j > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\alpha$  — четное натуральное  
число.

3.22.  $\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$ ,  $\sum_{j=1}^n a_j |x_j|^\alpha = b$ , где  $c = (c_1, \dots$   
 $\dots, c_n) \neq 0$ ,  $a_j > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\alpha > 1$ .

3.23.  $\sum_{j=1}^n |x_j + c_j|^\alpha \rightarrow \max(\min)$ ,  $\sum_{j=1}^n |x_j|^\alpha = b$ , где  $c =$   
 $= (c_1, \dots, c_n) \neq 0$ ,  $\alpha > 1$ ,  $b > 0$ .

3.24.  $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2 \rightarrow \min$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $a_{ij}$ ,  
 $b_i$  — заданные числа, причем векторы  $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{ij}, \dots$   
 $\dots, a_{in})$  ( $i = 1, 2$ ) линейно независимы.

3.25.  $\frac{1}{2} \langle Cx, x \rangle + \langle d, x \rangle \rightarrow \min$ ,  $Ax = b$ , где  $C$  — по-  
ложительно определенная матрица размера  $n \times n$ ,  $A$  —  
матрица размера  $m \times n$ ,  $\text{rang } A = m$ ,  $d \in \mathbf{R}^m$ ,  $b \in \mathbf{R}^n$ .

3.26.  $\frac{1}{2} \|\bar{A}x - \bar{b}\|^2 \rightarrow \min$ ,  $Ax = b$ , где  $\bar{A}$  — матрица  
размера  $k \times n$ ,  $\text{rang } \bar{A} = n$ ,  $\bar{b} \in \mathbf{R}^k$ , а  $A$  и  $b$  те же, что и в  
3.25.

Напомним, что если  $\bar{A} = E$  — единичная матрица размера  
 $n \times n$ , то решение данной задачи называется проекцией точки  $\bar{b}$  на  
множество  $X = \{x \mid Ax = b\}$ .

3.27. Пусть  $A$  — симметрическая матрица размера  
 $n \times n$ . Тогда, как известно (см., например, [39, с. 15]),  
стационарными точками задачи минимизации функции  
 $f(x) = \langle Ax, x \rangle$  при ограничении  $\|x\| = 1$  являются собст-  
венные векторы  $x^1, \dots, x^n$  матрицы  $A$ . Если при этом  
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — соответствующие им собственные значения  
и  $\lambda_1 < \lambda_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ), то  $x^1$  — глобальное решение за-

дачи. Выяснить, являются ли остальные собственные векторы локальными решениями этой задачи.

3.28. Найти все значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых точка  $(0, 0)$  является экстремальной для функции

$$f(x, y) = (a + 2)x - 2y$$

при условии  $a(x + e^x) + b(y + e^y) = 1$ , и выяснить характер экстремума.

3.29. Найти все значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых точка  $(0, 1)$  является экстремальной для функции

$$f(x, y) = x^2 + ax + by^2$$

при условии  $x^2 - xy + y^2 = 1$ , и выяснить характер экстремума.

3.30. Доказать теорему Финслера.

Пусть  $A$  и  $C$  — матрицы размера  $n \times n$ , причем  $C$  неотрицательно определена. Предположим, что  $\langle Ax, x \rangle > 0$  для всех таких  $x \neq 0$ , что  $\langle Cx, x \rangle = 0$ . Тогда матрица  $A + \lambda C$  положительно определена при любом достаточно большом  $\lambda$ .

3.31. Пусть  $A$  и  $B$  — матрицы размера  $n \times n$  и  $m \times n$  соответственно. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

- а)  $\langle Ax, x \rangle > 0$  для всех таких  $x \neq 0$ , что  $Bx = 0$ ;
- б) матрица  $A + \lambda B^T B$  положительно определена при любом достаточно большом  $\lambda$ .

Пусть, кроме того,  $\text{rang } B = m$ . Доказать, что из а) или б) следует в) матрица

$$C = \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

размера  $(n + m) \times (n + m)$  невырождена.

3.32. Пусть  $A = (a_{ij})$  — симметрическая матрица размера  $n \times n$ ,  $B = (b_{ij})$  — матрица размера  $m \times n$ . Для любого  $k = 1, \dots, n$  положим

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_k = (-1)^m \det \begin{bmatrix} A_k & B_k^T \\ B_k & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим три условия:

а)  $\langle Ax, x \rangle > 0$  для всех таких  $x \neq 0$ , что  $Bx = 0$ ;

б)  $\Delta_k \geq 0$  для всех  $k = 1, \dots, n$ ;

в)  $\Delta_k > 0$  для всех  $k = 1, \dots, n$ .

Доказать, что из а) следует б), а из в) следует а).

**3.33.** Пусть  $A$  — симметрическая матрица размера  $n \times n$ ,  $b$  — вектор-строка из  $\mathbf{R}^n$ . Для любого  $k = 1, \dots, n$  положим

$$\delta_k = \det \begin{bmatrix} A_k & b_k^T \\ b_k & 0 \end{bmatrix},$$

где обозначение  $A_k$  взято из **3.32**, а  $b_k$  — вектор из первых  $k$  координат вектора  $b$ . Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а)  $\langle Ax, x \rangle > 0$  для всех таких  $x \neq 0$ , что  $\langle b, x \rangle = 0$ ;

б) либо  $\delta_k < 0$ , либо  $\delta_k = 0$ ,  $\det A_k > 0$  для всех  $k = 1, \dots, n$ .

**3.34\*.** Рассмотрим задачу (3.1), где функции  $f, g_1, \dots, g_m$  дважды дифференцируемы. Пусть  $x^*$  — стационарная точка задачи, удовлетворяющая (3.4) вместе с некоторыми  $y_0^* \geq 0$  и  $y^* \in \mathbf{R}^m$ . Пусть, далее,  $A = L''_x(x^*, y_0^*, y^*)$ ,  $B$  — матрица со строками  $g'_i(x^*)$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Предположим, что (в обозначениях из **3.32**)  $\Delta_k > 0$  при всех  $k = 1, \dots, n$ . Доказать, что  $x^*$  — строгое локальное решение задачи (3.1).

**3.35.** Рассмотрим задачу минимизации при линейных ограничениях-равенствах

$$f(x) \rightarrow \min, \quad Bx = d, \quad (3.8)$$

где  $f$  — дважды дифференцируемая функция,  $B$  — матрица размера  $m \times n$ ,  $\text{rang } B = m$ ,  $d \in \mathbf{R}^m$ . Пусть  $x^*$  — стационарная точка задачи (3.8) и  $A = f''(x^*)$ . Предположим, что (в обозначениях из **3.32**)  $\Delta_k > 0$  для всех  $k = 1, \dots, n$ . Доказать, что  $x^*$  — строгое локальное решение задачи (3.8).

**3.36\*.** Пусть числовая функция  $f(x, \varepsilon)$  и  $m$ -мерная вектор-функция  $G(x, \varepsilon)$  дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $(x^*, 0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ , причем ранг матрицы Якоби  $G'_x(x^*, 0)$  (размера  $m \times n$ ) равен  $m$ . Рассмотрим при данном  $\varepsilon \in \mathbf{R}^k$  задачу

$$f(x, \varepsilon) \rightarrow \min, \quad G(x, \varepsilon) = 0 \quad (3.9)$$

и ее регулярную функцию Лагранжа

$$L(x, y, \varepsilon) = f(x, \varepsilon) + \langle y, G(x, \varepsilon) \rangle,$$

где  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $y \in \mathbf{R}^m$ . Предположим, что точка  $x^*$  вместе с некоторым  $y^*$  удовлетворяет условиям:

$$L'_x(x^*, y^*, 0) = 0, \quad G(x^*, 0) = 0, \quad \langle L''_x(x^*, y^*, 0)h, h \rangle > 0$$

при всех таких  $h \neq 0$ , что  $G'_x(x^*, 0)h = 0$ . Тогда, заметим,  $x^*$  есть строгое локальное решение задачи (3.9) при  $\varepsilon = 0$  (см. теорему 3.3), а  $y^*$  — соответствующий вектор множителей Лагранжа. Доказать, что существуют непрерывно дифференцируемые функции  $x(\varepsilon)$  и  $y(\varepsilon)$ , переводящие некоторую окрестность  $V$  точки  $0 \in \mathbf{R}^s$  в окрестности  $U$  и  $W$  точек  $x^*$  и  $y^*$  соответственно и обладающие следующими свойствами: при любом  $\varepsilon \in V$

а)  $x(\varepsilon)$  — единственная в  $U$  стационарная точка задачи (3.9), а  $y(\varepsilon)$  — единственный соответствующий ей вектор множителей Лагранжа;

б)  $x(\varepsilon)$  — строгое локальное решение задачи (3.9);

в)  $x(0) = x^*$ ,  $y(0) = y^*$ .

**3.37\***. Пусть в рамках предыдущей задачи  $f(x, \varepsilon) = f(x)$ ,  $G(x, \varepsilon) = G(x) - \varepsilon$  (и, значит,  $k = m$ ). Положим  $\varphi(\varepsilon) = f(x(\varepsilon))$ . Доказать, что  $\varphi'(\varepsilon) = -y(\varepsilon)$  при любом  $\varepsilon \in V$ .

Оставшаяся часть параграфа посвящена разнообразным примерам использования классической теории экстремума. В отличие от предыдущего, где требовалось решать явно сформулированные экстремальные задачи, здесь всякий раз необходимо сначала формализовать поставленную проблему в виде задачи оптимизации.

**3.38.** На плоскости даны точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от прямой  $l$ . Пусть  $C$  — такая точка на  $l$ , что сумма расстояний от  $A$  до  $C$  и от  $C$  до  $B$  является наименьшей. Доказать, что углы между прямой  $l$  и отрезками  $AC$  и  $BC$  равны (*задача Герона*).

**3.39.** Согласно принципу Ферма, свет, исходящий из точки  $A$  и попадающий в точку  $B$ , распространяется по той траектории, для прохождения которой требуется минимум времени. Пусть точки  $A$  и  $B$  расположены в различных оптических средах, разделенных плоскостью, причем скорость распространения света в первой среде равна  $v_1$ , а во второй она составляет  $v_2$ . Вывести закон преломления света, т. е. охарактеризовать траекторию его движения из  $A$  в  $B$  (*задача Снеллиуса*).

**3.40.** В данный треугольник  $ABC$  вписать параллелограмм  $ADEF$  ( $DE \parallel AC$ ,  $FE \parallel AB$ ) наибольшей площади (*задача Евклида*).

3.41. Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, площадь которого наибольшая.

3.42. Среди всех треугольников, описанных около данной окружности, найти тот, площадь которого наименьшая.

3.43. Среди всех треугольников данного периметра  $2p$  найти тот, площадь которого наибольшая.

3.44. Доказать, что для треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и площадью  $S$  имеет место соотношение  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$ .

3.45. Даны угол  $A$  и точка  $M$  внутри него. Требуется провести через  $M$  прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

3.46. Доказать, что объем  $V$  и боковая поверхность  $S$  прямого кругового конуса удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leq \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3.$$

3.47. Среди всех шаровых сегментов с заданной площадью сферической поверхности найти тот, объем которого наибольший (*задача Архимеда*).

3.48. Среди всех параллелепипедов, вписанных в данный эллипсоид

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1,$$

найти тот, который имеет наибольший объем.

3.49. На плоскости задан треугольник  $ABC$ . Среди всех пирамид с основанием  $ABC$  и высотой данной длины найти ту, которая имеет наименьшую боковую поверхность.

3.50. Непустое множество  $S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid g(x) = 0\}$  называется *гладкой поверхностью*, если (числовая) функция  $g$  непрерывно дифференцируема на  $\mathbf{R}^n$  и ее градиент  $g'(x)$  отличен от нуля в любой точке  $x \in S$ . При этом  $g'(x)$  называют *нормалью* к  $S$  в  $x$ .

Доказать, что если  $x$  — проекция на гладкую поверхность  $S$  точки  $a \notin S$  (см. п. 3 § 1), то вектор  $x - a$  ортогонален к  $S$  в  $x$ , т. е. коллинеарен нормали  $g'(x)$ .

3.51. Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — две непересекающиеся гладкие поверхности в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что если точки  $x \in S_1$  и  $y \in S_2$  находятся на ближайшем расстоянии друг от друга среди всех пар точек, одна из которых лежит в  $S_1$ , а другая в  $S_2$ , то вектор  $x - y$  ортогонален к  $S_1$  в  $x$  и к  $S_2$  в  $y$ .

**3.52.** Пусть  $S = \{x \mid g(x) = 0\}$  — гладкая поверхность в  $\mathbf{R}^n$ , а  $a$  и  $b$  — такие точки из  $\mathbf{R}^n$ , что соединяющий их отрезок

$$[a, b] = \{x \mid x = \lambda a + (1 - \lambda)b, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

не пересекается с  $S$ ,  $x$  — такая точка из  $S$ , что сумма расстояний от  $a$  до  $x$  и от  $x$  до  $b$  минимальна. Доказать, что нормаль  $g'(x)$  является линейной комбинацией векторов  $a - x$  и  $b - x$ , причем  $g'(x)$  (или  $-g'(x)$ ) делит угол между этими векторами пополам.

Таким образом, здесь обобщается утверждение задачи 3.38 на случай произвольной гладкой поверхности.

**3.53.** В пространстве  $\mathbf{R}^n$  найти точку  $x$ , сумма квадратов расстояний которой от  $m$  данных точек  $x^1, \dots, x^m$  минимальна.

**3.54.** На единичной сфере в  $\mathbf{R}^n$  найти точку  $x$ , сумма квадратов расстояний которой от  $m$  данных точек  $x^1, \dots, x^m$  минимальна.

**3.55.** Данное положительное число  $b$  разложить на  $n$  слагаемых так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.

**3.56.** Данное положительное число  $b$  разложить на  $n$  слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

**3.57.** Найти наименьшее значение суммы  $a^2 + b^2$ , где  $a, b$  — числа, при которых уравнение

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

имеет хотя бы один (действительный) корень.

**3.58\*.** Доказать неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим: если  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ), то

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Убедиться, что равенство имеет место лишь в случае  $x_1 = \dots = x_n$ .

Это и приводимые ниже классические неравенства можно доказывать различными способами. Здесь предлагается их вывести путем рассмотрения соответствующих задач на условный экстремум.

Найти глобальные решения следующих задач:

$$\begin{aligned} 3.59. \quad f(x) &= x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n} \rightarrow \min, \\ x &= (x_1, \dots, x_n) > 0. \end{aligned}$$

3.60.  $f(x) = x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4 \rightarrow \max$ ,  $2x_1 + x_1 x_2 + x_3 + x_2 x_3 x_4 = 1$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0$ .

3.61. Доказать следующее обобщение неравенства из 3.58: если  $x_j \geq 0$ ,  $\alpha_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ , то  $\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ . Убедиться, что при положительных  $\alpha_j$  равенство имеет место лишь в случае  $x_1 = \dots = x_n$ .

3.62. Доказать неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Убедиться, что равенство имеет место лишь в случае  $x_1 = \dots = x_n$ .

3.63. Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n) > 0$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n) > 0$ ,  $\sum_{j=1}^n c_j = 1$ ,  $p$  — произвольное число из расширенной действительной оси  $\overline{\mathbf{R}}$ . Положим

$$S_p(x, c) = \begin{cases} \left( \sum_{j=1}^n c_j x_j^p \right)^{1/p}, & \text{если } p \in \mathbf{R}, \quad p \neq 0, \\ \prod_{j=1}^n x_j^{c_j}, & \text{если } p = 0, \\ \max \{x_1, \dots, x_n\}, & \text{если } p = \infty, \\ \min \{x_1, \dots, x_n\}, & \text{если } p = -\infty. \end{cases}$$

Эта величина при  $p \in \mathbf{R}$  называется *взвешенным средним порядка  $p$*  чисел  $x_1, \dots, x_n$  с коэффициентами  $c_1, \dots, c_n$ . Если все  $c_j$  равны  $1/n$ , то говорят просто о *среднем порядка  $p$* .

Доказать следующие утверждения:

а) при любом ненулевом  $q \in \mathbf{R}$  справедливо равенство

$$S_p(x, c) = [S_{p/q}(x^q, c)]^{1/q},$$

где  $x^q = (x_1^q, \dots, x_n^q)$ ;

б) величина  $S_p(x, c)$  как функция от  $p$  непрерывна на  $\overline{\mathbf{R}}$ ; в частности,

$$\lim_{p \rightarrow 0} S_p(x, c) = S_0(x, c), \quad \lim_{p \rightarrow \pm\infty} S_p(x, c) = S_{\pm\infty}(x, c).$$

3.64\*. Доказать *неравенство между взвешенными средними*: если  $x = (x_1, \dots, x_n) > 0$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n) > 0$ ,  $\sum_{j=1}^n c_j = 1$ ,  $p, q \in \bar{\mathbf{R}}$  и  $p < q$ , то

$$S_p(x, c) \leq S_q(x, c).$$

Убедиться, что равенство имеет место лишь в случае  $x_1 = \dots = x_n$ .

Таким образом, неравенства из 3.58, 3.61, 3.62 являются частными проявлениями факта неубывания взвешенных средних по их порядку.

3.65\*. Доказать *неравенство Коши — Буняковского*

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2 \sum_{j=1}^n y_j^2}.$$

Убедиться, что при  $y = (y_1, \dots, y_n) \neq 0$  равенство имеет место лишь в том случае, если  $x_j = \lambda y_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), где  $\lambda \in \mathbf{R}$ ; точнее говоря, левая часть без модуля равна правой, если  $\lambda \geq 0$ , и правой со знаком минус, если  $\lambda \leq 0$ .

3.66. Найти точную нижнюю и точную верхнюю грани функции

$$f(x, y) = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

на  $\mathbf{R}^2$  и выяснить, какая из граней достигается (ср. с упражнением 2.5).

3.67\*. Доказать *неравенство Гёльдера*: если  $p > 1$ ,  $q > 1$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , то

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{1/q}.$$

Убедиться, что при  $y = (y_1, \dots, y_n) \neq 0$  равенство имеет место лишь в том случае, если  $|x_j|^p = \lambda |y_j|^q$  ( $j = 1, \dots, n$ ), где  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

3.68\*. Доказать *неравенство Минковского*: если  $p > 1$ , то

$$\left( \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{1/p}.$$

Убедиться, что при  $y = (y_1, \dots, y_n) \neq 0$  равенство имеет место лишь в том случае, если  $x_j = \lambda y_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), где  $\lambda \geq 0$ .

**3.69.** Доказать *неравенство Адамара*: если  $A = (a_{ij})$  — матрица размера  $n \times n$  и  $\Delta = \det A$  — ее определитель, то

$$\Delta^2 \leq \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

Убедиться, что равенство имеет место

лишь в том случае, если  $AA^T$  есть диагональная матрица, т. е.  $\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{kj} = 0$  при всех  $i, k = 1, \dots, n, i \neq k$ .

**3.70.** Доказать, что при всех  $a > 1$  система

$$a \cos x \sin y + xe^{x^2+y^2} = 0,$$

$$a \sin x \cos y + ye^{x^2+y^2} = 0$$

имеет решение, отличное от  $(0, 0)$ .

**3.71.** Доказать, что при всех  $a > 0$  система

$$\frac{ax}{ye^x + e^y} = \frac{y}{xe^y + e^x}, \quad xe^y + ye^x = 1$$

имеет решение.

**3.72.** Капитан Грант, стоящий на прибрежной скале высотой  $h$  м, бросает в море с начальной скоростью  $v$  м/с бутылку с письмом о помощи. Под каким углом к плоскости земной поверхности должен быть совершен бросок, чтобы бутылка улетела в море как можно дальше? Сопротивлением воздуха и ростом капитана пренебречь.

**3.73.** В колонне-смесителе происходит химическая реакция превращения сырья в ценный продукт. Режимом работы смесителя назовем пару  $(T, \theta)$ , где  $T$  — общее время реакции,  $\theta$  — температура в смесителе, которая поддерживается постоянной и не должна быть меньше заданной величины  $\theta_0$ . Ход реакции при данном режиме  $(T, \theta)$  описывается задачей Коши:

$$K(t) = \gamma(\theta - \theta_0)(\bar{K} - K(t)), \quad K(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $K(t)$  — концентрация продукта в смесителе в момент времени  $t$  после начала реакции, а  $\gamma$  и  $\bar{K}$  — заданные параметры,  $\gamma > 0$ ,  $0 < \bar{K} \leq 1$  ( $\bar{K}$  имеет смысл максимально достижимого в данной реакции значения концентрации). Финансовые расходы при работе смесителя в режиме  $(T, \theta)$  описываются формулой  $D = p_1 T^2 + p_2(\theta - \theta_0)^3$ , где  $p_1, p_2$  — известные положительные параметры. Требуется определить режим работы смесителя, обеспечивающий наивысшую концентрацию продукта по окончании реакции при заданном объеме затрат  $D_0$ .

## ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Первой из «неклассических» задач оптимизации была подробно исследована задача отыскания экстремума линейной функции на множестве, заданном линейными неравенствами и равенствами. Раздел теории оптимизации, изучающий такие задачи, получил название *линейное программирование*.

В данной главе приводятся основные положения линейного программирования, включая теорию двойственности и симплекс-метод. Но начнем мы с теории линейных неравенств, составляющей математический аппарат линейного программирования.

На протяжении всей главы используются следующие обозначения.

Под  $\mathcal{A}(m, n)$  понимается совокупность всех матриц размера  $m \times n$  с вещественными элементами. Если дана матрица  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{A}(m, n)$ , то ее строки обозначаются через  $a_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), столбцы — через  $a^j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Если при этом  $I$  и  $J$  — непустые подмножества множеств  $\{1, \dots, m\}$  и  $\{1, \dots, n\}$  соответственно, то  $A_I$  есть матрица со строками  $a_i$  ( $i \in I$ ),  $A^J$  — матрица со столбцами  $a^j$  ( $j \in J$ ). Аналогично при данных векторе  $b = (b_i) \in \mathbf{R}^m$  и непустом множестве  $I \subset \{1, \dots, m\}$  под  $b_I$  понимается вектор с координатами  $b_i$  ( $i \in I$ ). Символ  $|I|$  обозначает число элементов конечного множества  $I$ .

## § 4. Элементы теории линейных неравенств

## СВОДКА ОСНОВНЫХ ФАКТОВ

1. Полиэдры и их вершины. Как известно, множество

$$H_{ab} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle = b\},$$

где  $a \in \mathbf{R}^n$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \in \mathbf{R}$ , называется *гиперплоскостью*, а множества

$$H_{ab}^+ = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq b\}, \quad H_{ab}^- = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq b\}$$

— *полупространствами*, порождаемыми этой гиперплоскостью. Вектор  $a$ , называемый *нормалью* к гиперплоскости  $H_{ab}$ , к ней ортогонален и направлен в сторону полупространства  $H_{ab}^+$  (рис. 5).

Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *полиэдром*, если его можно представить как множество решений системы из

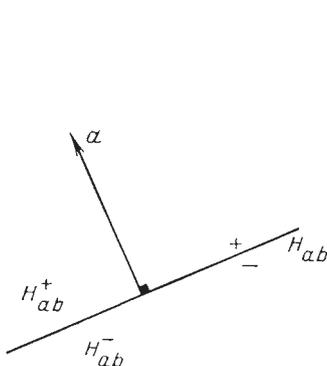


Рис. 5

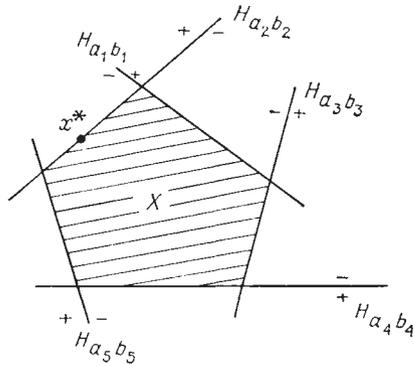


Рис. 6

конечного числа линейных неравенств, или (что то же самое) как пересечение конечного числа полупространств, т. е. если

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x \rangle \leq b_i, i = 1, \dots, m\}, \quad (4.1)$$

где  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  (рис. 6).

Для любой точки  $x \in X$  обозначим через  $I(x)$  множество номеров тех неравенств из (4.1), которые в данной точке выполняются как равенства:

$$I(x) = \{i, 1 \leq i \leq m \mid \langle a_i, x \rangle = b_i\}. \quad (4.2)$$

Ограничения с номерами из  $I(x)$  называются *активными* в точке  $x$ . Так, для точки  $x^*$  на рис. 6 активным является только второе ограничение ( $I(x^*) = \{2\}$ ).

Точка  $x^*$  называется *вершиной* полиэдра  $X$  из (4.1), если  $x^* \in X$  и среди векторов  $a_i$  ( $i \in I(x^*)$ ) имеется  $n$  линейно независимых, т. е.  $\text{rang } A_{I(x^*)} = n$ . Другими словами, точка  $x^* \in X$  является вершиной  $X$ , если она служит единственным решением системы уравнений

$$A_{I(x^*)}x = b_{I(x^*)}.$$

Таким образом, для вершины  $x^*$  по необходимости  $|I(x^*)| \geq n$ . Вершину  $x^*$  называют невырожденной, если  $|I(x^*)| = n$  (рис. 7), и вырожденной в противном случае (рис. 8).

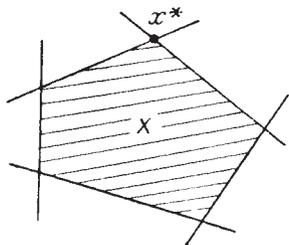


Рис. 7

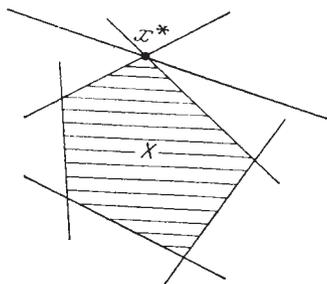


Рис. 8

**Теорема 4.1.** *Любой полиэдр имеет не более конечного числа вершин.*

Полиэдр может и не иметь вершин, как показывает пример полупространства.

**Теорема 4.2.** *Непустой полиэдр  $X$  вида (4.1) имеет по крайней мере одну вершину в том и только том случае, если  $\text{rang } A = n$ . Более точно, при выполнении данного условия для любой точки  $x \in X$  существует такая вершина  $x^*$ , что  $I(x) \subset I(x^*)$ .*

Заметим, что равенство  $\langle a, x \rangle = b$  равносильно неравенствам  $\langle a, x \rangle \leq b$ ,  $\langle -a, x \rangle \leq -b$ . Поэтому множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x \rangle \leq b_i, i = 1, \dots, k, \\ \langle a_i, x \rangle = b_i, i = k + 1, \dots, m\}, \quad (4.3)$$

конечно, является полиэдром. Говоря об этом более общем по форме записи полиэдре, под  $A$  и  $b$  будем по-прежнему понимать матрицу со строками  $a_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и вектор с координатами  $b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), под  $I(x^*)$  — множество из (4.2) (в которое уже обязательно входят номера от  $k + 1$  до  $m$ ). Понятие вершины и теорема 4.2 переносятся на полиэдр (4.3) в буквальной их формулировке, так как присоединение к матрице тех или иных ее строк с обратным знаком не меняет ее ранга.

Чтобы найти все вершины полиэдра  $X$  вида (4.3), необходимо для каждого множества  $I \subset \{1, \dots, m\}$  такого, что  $|I| = n$  и квадратная матрица  $A_I$  невырождена, най-

ти решение  $x$  системы  $A_1x = b_1$ . Если  $x \in X$ , то по определению  $x^*$  — вершина. В противном случае следует просто перейти к очередному  $I$ .

Выделим особо полиэдр  $X$  вида

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} = \\ = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n a^j x_j = b, x = (x_j) \geq 0\right\}, \quad (4.4)$$

где  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Для любой точки  $x \in \mathbb{R}^n$  обозначим через  $J(x)$  множество номеров ее положительных координат:

$$J(x) = \{j, 1 \leq j \leq n \mid x_j > 0\}. \quad (4.5)$$

**Теорема 4.3.** *Непустой полиэдр  $X$  вида (4.4) всегда имеет по крайней мере одну вершину. Более точно, для любой точки  $x \in X$  существует такая вершина  $x^*$ , что  $J(x^*) \subset J(x)$ .*

**Теорема 4.4.** *Ненулевая точка  $x^*$ , принадлежащая полиэдру  $X$  вида (4.4), является его вершиной в том и только том случае, если векторы  $a^j$  ( $j \in J(x^*)$ ), т. е. столбцы матрицы  $A$ , соответствующие положительным координатам точки  $x^*$ , линейно независимы\*. При этом вершина  $x^*$  невырождена, если  $|J(x^*)| = m$ , и вырождена в противном случае, т. е. если  $|J(x^*)| < m$ .*

Отметим, что вершины полиэдра (4.4) часто называют его *опорными точками*.

Чтобы найти все вершины (опорные точки) полиэдра (4.4), необходимо для каждого множества  $J \subset \{1, \dots, m\}$  такого, что столбцы  $a^j$  ( $j \in J$ ) линейно независимы, составить систему

$$\sum_{j \in J} a^j x_j = b.$$

Если она имеет решение  $x_j$  ( $j \in J$ ), причем  $x_j \geq 0$  при всех  $j \in J$ , то, положив  $x_j = 0$  при всех  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus J$ , получим, что точка  $x = (x_j) \in \mathbb{R}^n$  — вершина. В противном случае осуществляется переход к очередному  $J$ .

**2. Теоремы о разрешимости систем линейных неравенств.** Фундаментальную роль в теории линейных неравенств и ее приложениях играют приводимые ниже теоремы 4.6 и 4.7. Теорема 4.5 является фактически из-

---

\*) Если  $x^* = 0 \in X$  (т. е.  $b = 0$ ), то, очевидно,  $x^*$  — вершина  $X$ .

вестным из курса линейной алгебры результатом, записанным в подходящей форме.

Теорема 4.5. Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ . Тогда совместна (имеет решение) одна и только одна из следующих двух систем:

$$Ax = b \quad (4.6)$$

или

$$rA = 0, \quad \langle r, b \rangle < 0. \quad (4.7)$$

Теорема 4.6 (лемма Минковского — Фаркаша). Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ . Тогда совместна одна и только одна из следующих двух систем:

$$Ax = b, \quad x \geq 0 \quad (4.8)$$

или

$$rA \geq 0, \quad \langle r, b \rangle < 0. \quad (4.9)$$

Теорема 4.6 имеет ясный геометрический смысл: если система (4.8) несовместна, т. е. вектор  $b$  не является линейной комбинацией столбцов  $a^1, \dots, a^n$  матрицы  $A$  с неотрицательными коэффициентами, то существует

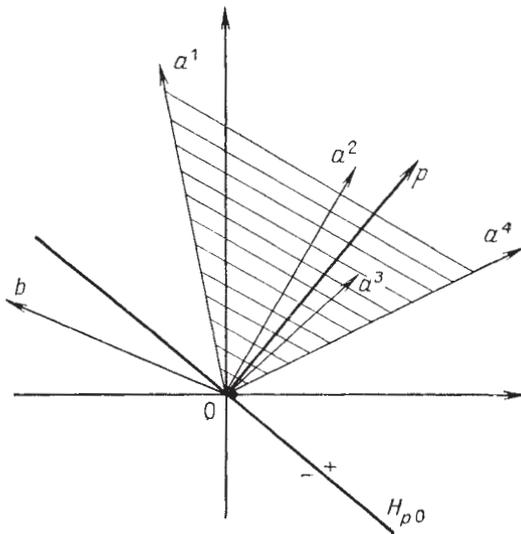


Рис. 9

такая проходящая через нуль гиперплоскость  $H_{p,0}$ , что векторы  $a^1, \dots, a^n$  оказываются в полупространстве  $H_{p,0}^+$ , а вектор  $b$  — во внутренности полупространства  $H_{p,0}^-$  (рис. 9). Можно также сказать, что вектор  $p$  составляет

с векторами  $a^1, \dots, a^n$  тупой угол, а с вектором  $b$  тупой. Таким образом, по своей геометрической природе теорема 4.6 относится к классу теорем отделимости, о которых пойдет детальный разговор в § 8.

Если любое решение системы  $Ax \leq b$  удовлетворяет неравенству  $\langle c, x \rangle \leq d$ , то это неравенство называется *следствием* данной системы. Условимся записывать такое соотношение между ними в виде импликации

$$Ax \leq b \rightarrow \langle c, x \rangle \leq d. \quad (4.10)$$

Геометрически (4.10) означает, что полиэдр  $X$  вида (4.1) располагается в полупространстве  $H_{cd}^-$  (рис. 10).

**Теорема 4.7 (Минковского — Фаркаша о следствиях).** Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , причем система  $Ax \leq b$  совместна. Тогда импликация (4.10) справедлива в том и только том случае, если совместна система

$$pA = c, \quad \langle p, b \rangle \leq d, \quad p \geq 0. \quad (4.11)$$

В одну сторону эта теорема известна еще из школьной программы: если дана система

$$\langle a_i, x \rangle \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

то при любых неотрицательных числах  $p_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) неравенство

$$\sum_{i=1}^m p_i \langle a_i, x \rangle \leq \sum_{i=1}^m p_i b_i$$

является ее следствием; причем это тем более верно, если правую часть последнего неравенства увеличить. Нетривиальным является то, что такой способ получения следствий — единственно возможный.

Полезно отметить, что теорему 4.6 можно переформулировать следующим образом: импликация

$$pA \geq 0 \rightarrow \langle p, b \rangle \geq 0$$

справедлива в том и только том случае, если совместна система (4.8). Таким образом, теорема 4.6 это частный случай теоремы 4.7 для однородных неравенств.

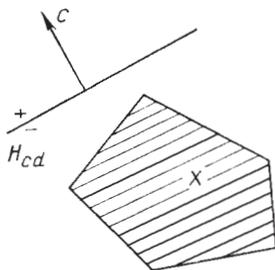


Рис. 10

## УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Изобразить на плоскости полиэдр, задаваемый системой неравенств

$$3x_1 + x_2 \leq 18,$$

$$4x_1 - ax_2 \geq -24,$$

$$bx_1 - 12x_2 \leq 36,$$

$$cx_1 + 3x_2 \geq -27,$$

и найти все его вершины:

|   | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 6  | 2 | 3 | 2 | 11 | 2 | 4 | 3 | 16 | 2 | 2 | 4 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 7  | 3 | 4 | 2 | 12 | 3 | 2 | 3 | 17 | 3 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 4 | 1 | 8  | 4 | 2 | 2 | 13 | 4 | 3 | 3 | 18 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 6 | 2 | 1 | 9  | 6 | 3 | 2 | 14 | 6 | 4 | 3 | 19 | 6 | 2 | 4 |
| 5 | 8 | 3 | 1 | 10 | 8 | 4 | 2 | 15 | 8 | 2 | 3 | 20 | 8 | 3 | 4 |

4.2. Найти все значения параметра  $k$ , при которых среди вершин полиэдра в  $\mathbf{R}^2$ , задаваемого системой

$$x_1 + ax_2 \leq 8,$$

$$bx_1 + x_2 \leq 12,$$

$$2x_1 + cx_2 \leq k, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

имеются вырожденные:

|   | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 1 | 6  | 2 | 6 | 2 | 11 | 2 | 6 | 3 | 16 | 2 | 4 | 1 |
| 2 | 4 | 3 | 1 | 7  | 4 | 6 | 3 | 12 | 4 | 6 | 1 | 17 | 4 | 6 | 2 |
| 3 | 4 | 4 | 1 | 8  | 4 | 2 | 5 | 13 | 1 | 4 | 1 | 18 | 2 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 2 | 3 | 9  | 4 | 3 | 5 | 14 | 2 | 2 | 2 | 19 | 2 | 4 | 3 |
| 5 | 4 | 3 | 3 | 10 | 4 | 6 | 5 | 15 | 2 | 3 | 1 | 20 | 4 | 4 | 5 |

4.3. Найти все значения параметра  $k$ , при которых полиэдр в  $\mathbf{R}^4$ , задаваемый системой

$$(k + a)x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1,$$

$$bx_1 + kx_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2,$$

$$(k + c)x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 3,$$

$$x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0,$$

имеет по крайней мере одну вершину:

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 1   | 6   | 5   | 6  | 5   | 6   | 7   | 11 | 9   | -8  | 7   | 16 | 5   | 24  | 11  |
| 2 | 11  | -18 | 7   | 7  | 3   | -2  | 1   | 12 | 11  | -28 | 3   | 17 | 9   | -20 | 1   |
| 3 | 13  | -42 | 1   | 8  | 3   | 40  | 13  | 13 | 1   | 12  | 7   | 18 | 13  | -22 | 9   |
| 4 | 7   | -10 | 3   | 9  | 1   | 30  | 11  | 14 | 5   | 14  | 9   | 19 | 3   | 4   | 5   |
| 5 | 9   | 40  | 11  | 10 | 9   | -18 | 3   | 15 | 13  | -36 | 5   | 20 | 7   | 30  | 13  |

4.4. Найти вершины полиэдра в  $\mathbb{R}^3$ , задаваемого системой

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + bx_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq (a-1)(b-1), \\ x_3 &\leq c(ab-1): \end{aligned}$$

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 2   | 3   | -1  | 6  | 7   | 3   | -3  | 11 | 6   | 2   | 8   | 16 | 2   | 9   | 2   |
| 2 | 4   | 8   | 2   | 7  | 5   | 4   | 5   | 12 | 4   | 2   | 1/3 | 17 | 6   | 7   | 4   |
| 3 | 5   | 7   | 1/2 | 8  | 4   | 9   | 6   | 13 | 7   | 4   | 7   | 18 | 7   | 2   | -3  |
| 4 | 2   | 4   | 3   | 9  | 3   | 5   | -2  | 14 | 5   | 6   | -1  | 19 | 9   | 7   | 9   |
| 5 | 8   | 2   | 1/5 | 10 | 2   | 5   | 3   | 15 | 6   | 7   | 1/5 | 20 | 5   | 8   | 1/4 |

4.5. Найти все вершины (опорные точки) полупэдра в  $\mathbb{R}^4$ , задаваемого системой

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + bx_2 + cx_3 + x_4 &= 1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

и выяснить, имеются ли среди них вырожденные:

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 3   | 6   | -2  | 6  | 2   | 4   | -4  | 11 | 3   | 2   | 0   | 16 | 6   | 5   | -3  |
| 2 | 2   | 3   | 0   | 7  | 3   | 5   | -2  | 12 | 4   | 5   | -3  | 17 | 2   | 6   | -1  |
| 3 | 5   | 4   | -1  | 8  | 3   | 4   | -1  | 13 | 5   | 2   | -1  | 18 | 4   | 2   | -4  |
| 4 | 6   | 2   | -3  | 9  | 2   | 5   | 0   | 14 | 4   | 3   | -4  | 19 | 5   | 6   | 0   |
| 5 | 5   | 3   | -4  | 10 | 6   | 3   | -3  | 15 | 6   | 4   | -2  | 20 | 4   | 6   | -2  |

4.6. Используя геометрические построения, найти все значения параметра  $k$ , при которых система

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + x_3 + (c+1)x_4 &= k, \\ (a+3)x_1 + (b+2)x_2 + x_3 + cx_4 &= 2 - k, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

совместна:

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 5   | 1   | 2   | 6  | 11  | 4   | 2   | 11 | 10  | 3   | 3   | 16 | 10  | 4   | 1   |
| 2 | 12  | 4   | 3   | 7  | 6   | 2   | 1   | 12 | 10  | 2   | 5   | 17 | 11  | 3   | 4   |
| 3 | 8   | 1   | 5   | 8  | 13  | 4   | 4   | 13 | 6   | 1   | 3   | 18 | 4   | 1   | 1   |
| 4 | 9   | 3   | 2   | 9  | 7   | 2   | 2   | 14 | 12  | 3   | 5   | 19 | 14  | 4   | 5   |
| 5 | 7   | 1   | 4   | 10 | 8   | 3   | 1   | 15 | 9   | 2   | 4   | 20 | 8   | 2   | 3   |

4.7. Используя геометрические построения, найти все значения параметра  $k$ , при которых справедлива импликация

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 12, \\ 0 \leq x_1 &\leq a, \\ 0 \leq x_2 &\leq b \end{aligned} \right\} \rightarrow cx_1 + 5x_2 \leq k:$$

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 8   | 7   | 2   | 6  | 10  | 8   | 1   | 11 | 8   | 10  | 7   | 16 | 10  | 7   | 1   |
| 2 | 7   | 8   | 7   | 7  | 11  | 7   | 6   | 12 | 9   | 11  | 2   | 17 | 11  | 10  | 8   |
| 3 | 10  | 11  | 4   | 8  | 8   | 9   | 8   | 13 | 7   | 9   | 6   | 18 | 7   | 11  | 3   |
| 4 | 11  | 9   | 1   | 9  | 7   | 10  | 2   | 14 | 10  | 9   | 8   | 19 | 8   | 11  | 6   |
| 5 | 9   | 7   | 6   | 10 | 9   | 8   | 7   | 15 | 11  | 7   | 3   | 20 | 9   | 10  | 4   |

### ЗАДАЧИ

4.1. Пусть точки  $x^1, \dots, x^m$  принадлежат полиэдру  $X$ . Доказать, что их выпуклая комбинация, т. е. точка  $x$  вида

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad \text{где } \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1,$$

также принадлежит  $X$ .

Это означает, что полиэдры являются выпуклыми множествами, теория которых излагается в гл. 3. Многие результаты этой

теории применительно к полиэдрам могут быть доказаны значительно проще, чем в общем случае. Ряд таких результатов с соответствующими ссылками на гл. 3 приводится ниже. Таким образом, данный параграф помимо прочего может рассматриваться как элементарное введение в определенный круг понятия и фактов выпуклого анализа.

**4.2.** Пусть  $X$  — полиэдр вида (4.3), где все векторы  $a_i$  отличны от нуля, и  $x^* \in X$ . Доказать, что

а)  $x^*$  является граничной точкой  $X$  в том и только том случае, если  $I(x^*) \neq \emptyset$ ;

б)  $x^*$  является внутренней точкой  $X$  в том и только том случае, если  $I(x^*) = \emptyset$ , т. е.  $k = m$  (ограничения-равенства отсутствуют), и  $Ax^* < b$ .

**4.3.** Доказать, что следующие множества в  $\mathbf{R}^n$  являются полиэдрами:

$$l_{x^0 h} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x = x^0 + \alpha h, \alpha \in \mathbf{R}\}$$

— *прямая*, проходящая через точку  $x^0$  в направлении вектора  $h \neq 0$ ;

$$l_{x^0 h}^+ = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x = x^0 + \alpha h, \alpha \geq 0\}$$

— *луч*, выходящий из точки  $x^0$  в направлении вектора  $h \neq 0$ ;

$$[x^0, x^1] = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x = x^0 + \alpha(x^1 - x^0), 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

— *отрезок*, соединяющий точки  $x^0$  и  $x^1$ .

**4.4.** Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3). Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

а)  $X$  — неограниченное множество;

б) из каждой точки  $x^0 \in X$  исходит некоторый луч  $l_{x^0 h}^+$ , целиком лежащий в  $X$ ;

в) система

$$\langle a_i, h \rangle \leq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\langle a_i, h \rangle = 0, \quad i = k + 1, \dots, m,$$

имеет решение  $h \neq 0$ .

Эквивалентность утверждений а) и б) — общий факт для замкнутых выпуклых множеств (см. теорему 7.20).

**4.5.** Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3). Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) через каждую точку  $x^0 \in X$  проходит некоторая прямая  $l_{x^0 h}$ , целиком лежащая в  $X$ ;

б) система

$$\langle a_i, h \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

т. е.  $Ah = 0$ , имеет решение  $h \neq 0$ ;

в)  $\operatorname{rang} A < n$ .

4.6. Пусть  $X$  — полиэдр вида (4.3) и  $x^* \in X$ . Доказать, что  $x^*$  является единственным элементом  $X$  в том и только том случае, если система

$$\begin{aligned} \langle a_i, h \rangle &\leq 0, & i \in \{1, \dots, k\} \cap I(x^*), \\ \langle a_i, h \rangle &= 0, & i = k + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

имеет лишь тривиальное решение  $h = 0$ .

Задачи 4.7 — 4.34 посвящены понятию размерности полиэдра. Это понятие вначале формулируется для простейшего класса полиэдров — аффинных множеств.

4.7. Множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  называется *аффинным* (иногда говорят — *линейным многообразием*), если  $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X$  при всех  $x^1, x^2 \in X, \lambda \in \mathbf{R}$ , т. е. если  $X$  вместе с любыми своими двумя точками содержит проходящую через них прямую\*). Доказать, что множество  $X$  аффинно в том и только том случае, если для любого  $x^0 \in X$  множество

$$L = X - x^0 = \{y \in \mathbf{R}^n \mid y = x - x^0, x \in X\}$$

является линейным подпространством в  $\mathbf{R}^n$ ; при этом  $L$  не зависит от выбора  $x^0$  в  $X$ .

Указанное подпространство  $L$  называется *параллельным* аффинному множеству  $X$  и обозначается через  $\operatorname{Lin} X$ .

4.8. Доказать, что множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  аффинно в том и только том случае, если его можно представить как множество решений системы из конечного числа линейных уравнений, или (что то же самое) как пересечение конечного числа гиперплоскостей, т. е.

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = b\} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a_i, x \rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, m\}, \quad (4.12)$$

где  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ .

Таким образом, аффинные множества суть полиэдры, которые можно задать ограничениями-равенствами.

---

\*) Одноточечное множество, конечно, является аффинным.

4.9. Доказать, что множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  аффинно в том и только том случае, если его можно представить в виде

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid x = x^0 + Cy = x^0 + \sum_{j=1}^s c^j y_j, y = (y_j) \in \mathbf{R}^s \right\}, \quad (4.13)$$

где  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $C \in \mathcal{A}(n, s)$ .

4.10. Размерностью  $\dim X$  аффинного множества  $X$  называется размерность параллельного ему линейного подпространства  $\text{Lin } X$  (см. 4.7)\*). Доказать следующие утверждения:

а) если  $X$  — непустое множество вида (4.12), то  $\dim X = n - \text{rang } A$ ;

б) если  $X$  — множество вида (4.13), то  $\dim X = \text{rang } C$ .

4.11. Доказать, что аффинное множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  является гиперплоскостью в том и только том случае, если  $\dim X = n - 1$ .

4.12. Найти размерность аффинных множеств в  $\mathbf{R}^4$ , задаваемых следующими системами:

а)  $-x_1 + x_2 + 2x_4 = -4,$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 3;$$

б)  $x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1,$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -3,$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -2;$$

в)  $x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -2,$

$$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 3,$$

$$-x_2 + x_3 + 3x_4 = 1.$$

4.13. При всех значениях параметра  $a$  найти размерность аффинного множества  $X \subset \mathbf{R}^5$ , задаваемого системой

$$x_1 + 2x_2 + ax_3 + x_4 + 3x_5 = 10,$$

$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = -7,$$

$$3x_1 - x_2 + 8x_3 - x_4 + 4x_5 = 3,$$

$$4x_1 + x_2 + 11x_3 + 7x_5 = 13.$$

---

\*) В частности, если  $X = \emptyset$ , то в соответствии с аналогичным соглашением для линейных подпространств полагаем  $\dim X = -1$ .

4.14. Пусть  $X_1, X_2$  — аффинные множества,  $X_1 \subset X_2$ , но  $X_1 \neq X_2$ . Доказать, что  $\dim X_1 < \dim X_2$ .

4.15. Пусть  $X$  — полиэдр вида (4.3),  $Y$  — аффинное множество, принадлежащее  $X$ . Доказать, что  $\dim Y \leq n - \text{rang } A$ .

4.16. Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3). Ограничение с номером  $i$  в системе из (4.3) называется *жестким*, если оно выполняется как равенство всюду на  $X$ , и *нежестким* в противном случае. Введем обозначения для множества номеров жестких ограничений:

$$I(X) = \{i, 1 \leq i \leq m \mid \langle a_i, x \rangle = b, \text{ при любом } x \in X\}.$$

Подчеркнем, что всегда  $\{k+1, \dots, m\} \subset I(X)$ .

Найти  $I(X)$  для полиэдров  $X$ , задаваемых следующими системами (ограничения считаются пронумерованными в естественном порядке):

- а)  $x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ;
- б)  $x_1 + x_2 \leq 1, x_1 - x_2 \leq 0, x_1 \geq 1/2$ ;
- в)  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1 + x_3 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ ;
- г)  $x_1 + 2x_3 \leq 1, x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, 2x_1 + x_3 = 3$ .

4.17. Пусть полиэдр  $X$  вида (4.3) непуст. Доказать, что система

$$pA = 0, \quad \langle p, b \rangle < 0, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

где  $p = (p_i) \in \mathbf{R}^m$ , несовместна.

4.18. Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3), а система

$$pA = 0, \quad \langle p, b \rangle = 0, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

имеет такое решение  $p$ , что  $p_{i_0} > 0$  при некотором  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ . Доказать, что  $i_0$ -е ограничение в (4.3) является жестким, т. е.  $i_0 \in I(X)$ .

Утверждения из 4.17, 4.18 окажутся полезными при решении нескольких следующих задач. При этом стоит отметить, что указанное в 4.17 необходимое условие непустоты  $X$  на самом деле является и достаточным, а указанное в 4.18 достаточное условие жесткости — необходимым (см. 4.93, 4.105). Однако пока можно обойтись без этих более тонких фактов.

4.19. Показать, что полиэдр  $X \subset \mathbf{R}^4$ , задаваемый системой

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 &\leq 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 - 7x_4 &\leq -9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &\leq 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 3, \end{aligned}$$

непуст, и найти  $I(X)$ .

4.20. Показать, что полиэдр  $X \subset \mathbf{R}^4$ , задаваемый системой

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 1, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &\leq -3, \\ -3x_1 - 3x_2 + 10x_3 + x_4 &\leq -1, \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 &\leq 2, \end{aligned}$$

является аффинным множеством, и найти его размерность.

4.21. Найти все значения параметра  $a$ , при которых полиэдр  $X \subset \mathbf{R}^4$ , задаваемый системой

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 &\leq 11, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 &\leq -1, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 &\leq a, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 8, \end{aligned}$$

непуст, и для каждого такого  $a$  определить  $I(X)$ .

4.22. Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3), причем множество  $J = \{1, \dots, m\} \setminus I(X)$  не пусто. Доказать, что существует точка  $\bar{x} \in X$ , в которой все нежесткие ограничения выполняются как строгие неравенства, т. е.  $A_j \bar{x} < b_j$ .

4.23. Аффинной оболочкой  $\text{aff } X$  полиэдра  $X \subset \mathbf{R}^n$  (как и любого другого множества в  $\mathbf{R}^n$ ; см. § 7) называется пересечение всех аффинных множеств из  $\mathbf{R}^n$ , содержащих  $X$ . Доказать, что

- $\text{aff } X$  есть аффинное множество;
- если  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3), то

$$\text{aff } X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid A_{I(x)}x = b_{I(x)}\},$$

т. е. аффинная оболочка полиэдра порождается системой его жестких ограничений \*).

4.24. Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3). Доказать, что  $X$  — аффинное множество в том и только том случае, если

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid A_{I(x)}x = b_{I(x)}\}.$$

---

\*) Если  $I = \emptyset$ , то формальное равенство  $A_I x = b_I$  считается выполненным для всех  $x \in \mathbf{R}^n$ ; кроме того, полагаем  $\text{rang } A_\emptyset = 0$  (см. 4.25).

4.25\*. Размерностью  $\dim X$  полиэдра  $X \subset \mathbf{R}^n$  (как и любого другого выпуклого множества в  $\mathbf{R}^n$ ; см. § 7) называется размерность его аффинной оболочки  $\text{aff } X$ . Доказать, что для непустого полиэдра  $X$  вида (4.3) справедлива формула  $\dim X = n - \text{rang } A_{I(X)}$ .

4.26. Пусть  $X$  — полиэдр в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $\dim X = n$  в том и только том случае, если  $X$  имеет внутренние точки, т. е.  $\text{int } X \neq \emptyset$  (ср. с теоремой 7.19).

4.27. Доказать, что размерность полиэдра (4.1), где  $b > 0$ , равна  $n$ .

4.28. Доказать, что размерность полиэдра

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\},$$

где  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ ,  $b > 0$ , равна  $n$ .

4.29. Найти размерность полиэдров из 4.16 (считается, что первые два полиэдра лежат в  $\mathbf{R}^2$ , остальные — в  $\mathbf{R}^3$ ).

4.30. Найти размерность полиэдра из 4.19.

4.31. При каждом значении параметра  $a$  найти размерность полиэдра из 4.21.

4.32. Найти размерность полиэдров  $X \subset \mathbf{R}^4$ , задаваемых следующими системами:

а)  $2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 5,$

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2,$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$$

б)  $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3,$

$$-4x_1 + x_2 + 5x_3 \leq -33,$$

$$x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 \leq -10,$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 15,$$

в)  $2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 \leq 7,$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1,$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5;$$

г)  $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 0,$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0,$$

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0,$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0.$$

4.33\*. Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.4). Доказать, что

$$\dim X = |J| - \text{rang } A',$$

где  $J = J(X) = \{j, 1 \leq j \leq n \mid x_j > 0 \text{ при некотором } x \in X\}$ . В частности, если существует такая точка  $x \in X$ , что  $x > 0$ , то  $\dim X = n - \text{rang } A$ .

4.34. Найти размерность полиэдров  $X \subset \mathbb{R}^5$ , задаваемых следующими системами:

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 9, \\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ & -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 - 8x_5 = -6. \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \quad & -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 15x_4 - 3x_5 = -3, \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - 10x_4 + 2x_5 = 2, \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 1, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \quad & x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 3, \\ & -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

В задачах 4.35 — 4.76 рассматриваются некоторые вопросы, связанные с понятиями вершины и грани полиэдра. Отметим, что эта тема получит существенное развитие в § 8.

4.35. Доказать теорему 4.1.

4.36. Доказать теорему 4.2.

Заметим, что с учетом 4.5 эту теорему можно переформулировать следующим образом: полиэдр имеет по крайней мере одну вершину в том и только том случае, если он не содержит целиком ни одной прямой. В такой форме данное утверждение переносится на произвольные замкнутые выпуклые множества (см. теоремы 8.11, 8.12).

4.37. Доказать теорему 4.3.

4.38. Доказать теорему 4.4.

4.39. Пусть непустой полиэдр  $X$  принадлежит полиэдру  $Y$ , причем  $Y$  имеет по крайней мере одну вершину. Доказать, что  $X$  также имеет вершину.

Заметим, что первое утверждение теоремы 4.3 есть частный случай сформулированного утверждения при  $Y = \mathbb{R}_+^n$ .

4.40\*. Пусть  $x, x^1, \dots, x^m$  — точки в  $\mathbb{R}^n$ , не все равные нулю. Предположим, что  $x$  является неотрицательной комбинацией точек  $x^1, \dots, x^m$ , т. е.  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$  при некоторых  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Доказать, что  $x$  можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации линейно независимой подсистемы этих точек, т. е. существует такое множество  $I \subset \{1, \dots, m\}$ , что точки  $x^i$  ( $i \in I$ ) линейно независимы и  $x = \sum_{i \in I} \mu_i x^i$  при некоторых  $\mu_i \geq 0$  ( $i \in I$ ).

4.41. Используя геометрические построения, найти все вершины полиэдров в  $\mathbb{R}^2$ , задаваемых следующими системами:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 2x_1 + x_2 \leq 8, & \text{б) } x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 20, & -3x_1 + x_2 \leq 9, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, & x_1 + 2x_2 = 4; \\ x_1 \geq -5; & \\ \text{в) } -3x_1 + 6x_2 \leq 13, & \text{г) } -3x_1 + 2x_2 \leq 0, \\ 3x_1 + x_2 \leq 9, & x_1 - x_2 \leq -1, \\ -x_1 + 2x_2 = 4; & -x_1 + 2x_2 \leq 4. \end{array}$$

4.42. Найти все значения параметра  $a$ , при которых среди вершин полиэдра в  $\mathbb{R}^2$ , задаваемого системой

$$\begin{array}{l} ax_1 + x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \end{array}$$

имеются вырожденные.

4.43. Найти все значения параметра  $a$ , при которых полиэдр в  $\mathbb{R}^5$ , задаваемый системой

$$\begin{array}{l} ax_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 + 2x_5 \leq 0, \\ -4x_2 + 7x_3 + 3x_4 - 4x_5 \leq 1, \\ 2x_4 + x_5 \leq 3, \\ x_4 + x_5 \geq -1, \end{array}$$

имеет хотя бы одну вершину.

4.44. Найти все вершины полиэдров в  $\mathbb{R}^3$ , задаваемых следующими системами:

- а)  $x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 4$ ,  
 $4x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 9$ ,  
 $2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \geq 1$ ,  
 $x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq -3$ ;
- б)  $x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 8$ ,  
 $2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \leq -5$ ,  
 $4x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 12$ ;
- в)  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$ ,  
 $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 43$ ,  
 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$ ,  
 $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1$ ;
- г)  $-x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 2$ ,  
 $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 4$ ,  
 $x_1 - x_2 + x_3 \leq 0$ ,  
 $-x_1 + 5x_2 + x_3 = 8$ .

4.45. Найти все значения параметра  $a$ , при которых полиэдр в  $\mathbb{R}^3$ , задаваемый системой

$$\begin{aligned} ax_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 2, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 4, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3, \end{aligned}$$

имеет вырожденную вершину.

4.46. Найти все вершины полиэдров в  $\mathbb{R}^4$ , задаваемых следующими системами:

- а)  $x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$ ,  
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$ ,  
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$ ;
- б)  $4x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 2$ ,  
 $2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5$ ,  
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$ ;
- в)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ ,  
 $2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2$ ,

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

4.47. Используя геометрические построения, определить число вершин полиэдра в  $\mathbf{R}^5$ , задаваемого системой

$$-2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2,$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Проанализировать с этих же позиций системы а) и б) из 4.46.

4.48. Найти все значения параметра  $k$ , при которых полиэдр в  $\mathbf{R}^4$ , задаваемый системой

$$kx_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 5,$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1,$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4,$$

имеет вырожденную вершину.

4.49. Найти размерность и все вершины полиэдра

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j \leq 1, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\},$$

называемого *стандартным  $n$ -симплексом* в  $\mathbf{R}^n$ .

4.50. Найти размерность и все вершины полиэдра

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\},$$

называемого *стандартным  $(n-1)$ -симплексом* в  $\mathbf{R}^n$ .

4.51. *Гранью* (непустого) полиэдра  $X$  из (4.3) называется его непустое подмножество  $\Gamma$  вида

$$\Gamma = \{ x \in X \mid A_I x = b_I \} = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a_i, x \rangle \leq b_i, i \in \{1, \dots, k\} \setminus I, \langle a_i, x \rangle = b_i, i \in \{k+1, \dots, m\} \cup I \}, \quad (4.14)$$

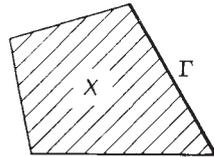


Рис. 11

где  $I$  — некоторое подмножество множества  $\{1, \dots, m\}$  (рис. 11). При этом говорят о *собственной грани*, если  $\Gamma \neq X^*$ ). Иными словами, грань по-

\*) Полиэдр  $X$ , конечно, является своей гранью: достаточно взять любое  $I \subset \{k+1, \dots, m\}$ , в том числе  $I = \emptyset$ .

лиэдра  $X$  образуется путем замены некоторых знаков неравенств в системе, задающей  $X$ , знаками равенств при условии, что полученная система имеет решение.

Доказать, что любой полиэдр имеет не более конечного числа граней и каждая из них сама является полиэдром.

4.52. Доказать, что точка  $x^*$  полиэдра  $X$  является его вершиной в том и только том случае, если одноточечное множество  $\Gamma = \{x^*\}$  есть грань  $X$ .

Таким образом, вершины полиэдра можно определить как его грани нулевой размерности.

4.53. Грань полиэдра  $X$ , имеющая единичную размерность, т. е. являющаяся отрезком, лучом или прямой, называется *ребром* этого полиэдра (рис. 11).

Представить в виде (4.14) все ребра полиэдров в  $\mathbb{R}^2$ , задаваемых следующими системами (ограничения считаются пронумерованными в естественном порядке):

$$\begin{array}{ll} \text{а) } & x_1 + 2x_2 \leq 2, & \text{б) } & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 3, & & 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ & -x_1 + x_2 \leq 1, & & 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ & x_2 \geq 0; & & 2x_1 - 3x_2 \leq 3, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{в) } x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 1. \end{array}$$

4.54. Пусть  $X$  — полиэдр вида (4.3),  $\Gamma$  — его грань вида (4.14). В соответствии с 4.16 под  $I(\Gamma)$  будем понимать множество номеров жестких ограничений в системе из (4.14):

$$I(\Gamma) = \{i, 1 \leq i \leq m \mid \langle a_i, x \rangle = b_i \text{ при любом } x \in \Gamma\}.$$

Доказать, что в (4.14) всегда можно считать  $I = I(\Gamma)$ .

Используя 4.23, данное утверждение можно высказать в такой форме: если  $\Gamma$  — грань полиэдра  $X$ , то  $\Gamma = X \cap \text{aff } \Gamma$ .

4.55. Грань  $\Gamma$  полиэдра  $X$  из (4.3) называется *невыврожденной*, если векторы  $a_i$  ( $i \in I(\Gamma)$ ) линейно независимы, и *вырожденной* в противном случае.

Доказать, что грань  $\Gamma$  размерности  $d$  невырождена, если  $|I(\Gamma)| = n - d$ , и вырождена, если  $|I(\Gamma)| > n - d$ .

4.56. Пусть  $\Gamma$  — грань полиэдра  $X$  из (4.4). Введем множество

$$J(\Gamma) = \{j, 1 \leq j \leq n \mid x_j > 0 \text{ при некотором } x \in \Gamma\}.$$

Доказать, что грань  $\Gamma$  невырождена в том и только том случае, если среди векторов  $a^j$  ( $j \in J(\Gamma)$ ) имеются  $m$  линейно независимых.

4.57. Пусть  $\Gamma'$  — грань полиэдра  $\Gamma$ , а  $\Gamma$  — грань полиэдра  $X$ . Доказать, что  $\Gamma'$  — грань  $X$  (рис. 12); если при этом грань  $\Gamma$  вырождена, то и грань  $\Gamma'$  вырождена.

4.58. Пусть  $\Gamma$  — грань полиэдра  $X$ , а полиэдр  $Y$  таков, что  $\Gamma \subset Y \subset X$ . Доказать, что  $\Gamma$  — грань полиэдра  $Y$  (рис. 13).

4.59\*. Вершины  $x^1$  и  $x^2$  полиэдра  $X$  называются *соседними*, если отрезок  $[x^1, x^2]$  является ребром  $X$  (рис. 14).

Доказать теорему о соседних вершинах полиэдра.

Вершины  $x^1$  и  $x^2$  полиэдра  $X$  из (4.3) соседние в том и только том случае, если  $\text{rang } A_I = n - 1$ , где  $I = I(x^1) \cap I(x^2)$ .

4.60. Пусть  $x^1$  и  $x^2$  — такие вершины полиэдра  $X$  из (4.3), что множества  $I(x^1)$  и  $I(x^2)$  различаются лишь одной позицией, т. е.  $I(x^2) = (I(x^1) \setminus \{r\}) \cup \{s\}$ , где  $r \in I(x^1)$ ,  $s \notin I(x^1)$ . Доказать, что эти вершины соседние.

4.61. Пусть  $x^1$  и  $x^2$  — соседние вершины полиэдра  $X$  из (4.3), причем эти вершины невырождены. Доказать, что  $I(x^1)$  и  $I(x^2)$  различаются лишь одной позицией.

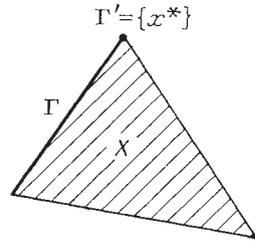


Рис. 12

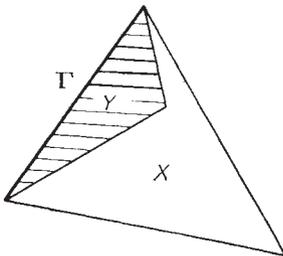


Рис. 13

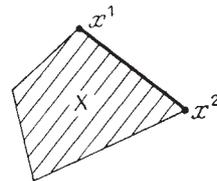


Рис. 14

Можно ли в этом утверждении опустить условие невырожденности вершин?

4.62. Пусть  $x^1$  и  $x^2$  — вершины полиэдра  $X$  из (4.3), причем  $x^1$  невырождена. Доказать, что эти вершины соседние в том и только том случае, если  $|I(x^1) \cap I(x^2)| =$

$= n - 1$ , т. е. имеется ровно  $n - 1$  общих активных ограничений в точках  $x^1$  и  $x^2$ .

Можно ли в этом утверждении опустить условие невырожденности вершины  $x^1$ ?

4.63. Пусть  $X$  — полиэдр в  $\mathbb{R}^4$ , задаваемый системой

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 5, \\3x_1 - 2x_2 &\leq 5, \\-2x_1 + x_2 &\leq 8, \\3x_1 + x_2 &\geq -3.\end{aligned}$$

Найти (не прибегая к геометрическим построениям) все вершины  $X$ , соседние с вершиной  $x^* = (3, 2)$ .

4.64\*. Доказать, что вершины  $x^1$  и  $x^2$  полиэдра  $X$  из (4.4) соседние в том и только том случае, если  $\text{rang } A^J = |J| - 1$ , где  $J = J(x^1) \cup J(x^2)$ , а  $J(x)$ , напомним, определено в (4.5).

Здесь уместно отметить, что условие из теоремы 4.4, определяющее вершину  $x$  данного полиэдра, можно записать в виде  $\text{rang } A^J = |J|$ , где  $J = J(x)$ .

4.65. Пусть  $x^1$  и  $x^2$  — такие вершины полиэдра  $X$  из (4.4), что множества  $J(x^1)$  и  $J(x^2)$  различаются лишь одной позицией (см. 4.60). Доказать, что эти вершины соседние.

4.66. Пусть  $x^1$  и  $x^2$  — соседние вершины полиэдра  $X$  из (4.4), причем эти вершины невырождены. Доказать, что  $J(x^1)$  и  $J(x^2)$  различаются лишь одной позицией.

4.67. Пусть  $x^1$  и  $x^2$  — вершины полиэдра  $X$  из (4.4), причем  $x^1$  невырождена. Доказать, что эти вершины соседние в том и только том случае, если  $|J(x^1) \cup J(x^2)| = m + 1$ .

4.68. Пусть  $X$  — полиэдр в  $\mathbb{R}^5$ , задаваемый системой

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 8x_5 &= 4, \\2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 1, \\x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.\end{aligned}$$

Найти все вершины  $X$ , соседние с вершиной  $(1, 1, 0, 0, 0)$ .

4.69. Пусть  $\Gamma$  — грань полиэдра  $X$  из (4.3). Доказать, что  $\dim \Gamma \geq n - \text{rang } A$ .

4.70. Пусть  $\Gamma$  — собственная грань полиэдра  $X$ . Доказать, что  $\dim \Gamma < \dim X$ .

4.71\*. Доказать, что непустой полиэдр  $X$  имеет хотя бы одну собственную грань в том и только том случае, если он не является аффинным множеством.

4.72. Грань  $\Gamma$  полиэдра  $X$  называется *минимальной*, если сама она не имеет собственной грани. Доказать, что любая грань полиэдра содержит его некоторую минимальную грань.

В частности, это означает, что минимальная грань всегда существует.

4.73\*. Доказать теорему о минимальной грани.

Пусть  $\Gamma$  — грань полиэдра  $X$  вида (4.3). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

а)  $\Gamma$  — минимальная грань  $X$ ;

б)  $\Gamma$  — аффинное множество;

в)  $\dim \Gamma = n - \text{rang } A$ , т. е.  $\Gamma$  — грань минимально возможной размерности (см. 4.69).

4.74. Указать минимальные грани полиэдров, задаваемых следующими системами:

а)  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ ,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2;$$

б)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$ ,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 2.$$

4.75\*. Доказать принцип граничных решений Черникова.

Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $\text{rang } A = r$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ , причем система  $Ax \leq b$  совместна. Тогда существует такое множество  $I \subset \{1, \dots, m\}$ , что  $\text{rang } A_I = r$ , система  $A_I x = b_I$  совместна и справедлива импликация

$$A_I x = b_I \rightarrow Ax \leq b.$$

При этом всегда можно считать, что  $|I| = r$ .

В авторской формулировке данный принцип звучит так. «В каждой совместной конечной системе линейных неравенств над полем действительных чисел, имеющей любой отличный от нуля ранг, можно выделить хотя бы одну такую подсистему того же ранга и с равным ему числом неравенств, каждое решение которой, обращаясь все ее неравенства в равенства, удовлетворяет исходной системе» [43, с. 7]\*).

Отметим, что теорема о минимальной грани и принцип граничных решений представляют собой различные по форме обобщения основного утверждения теоремы 4.2. В следующей задаче приводится обобщение ее дополнительного утверждения.

---

\*) В нашей формулировке тривиальный случай  $r = 0$  (т. е.  $A = 0$ ) допускается; тогда надо просто взять  $I = \emptyset$  (см. подстрочное примечание к 4.23).

4.76. Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3). Доказать, что для любой точки  $x \in X$  существует такая минимальная грань  $\Gamma$  полиэдра  $X$ , что  $I(x) \subset I(\Gamma)$ .

Задачи 4.77—4.108 посвящены теории существования решений систем линейных неравенств и уравнений, которая находит многочисленные приложения в теории оптимизации, теории игр, математической экономике и т. д.

4.77. Доказать теорему 4.5.

4.78. Доказать теорему 4.6.

4.79. Доказать теорему 4.7.

4.80. Используя геометрические построения, найти все значения параметра  $k$ , при которых система

$$kx_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4,$$

совместна.

4.81. Используя теорему 4.7 и геометрические построения, показать, что система

$$p_1 - 2p_2 - p_3 + p_4 = 1,$$

$$-p_1 - p_2 + 2p_3 + 2p_4 = 1,$$

$$p_1 + 4p_2 + 2p_3 + 4p_4 \leq 3,$$

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4,$$

совместна.

4.82. Обосновать следующее замечание к теореме 4.7.

Пусть в дополнение к сделанным предположениям совместна система

$$Ax \leq b, \quad \langle c, x \rangle = d, \quad (4.15)$$

т. е. некоторое решение системы  $Ax \leq b$  обращает неравенство-следствие в равенство. Тогда для любого решения  $p$  системы (4.11) неравенство  $\langle p, b \rangle \leq d$  выполняется как равенство и если существует такое решение  $x$  системы (4.15), что  $\langle a_i, x \rangle < b_i$  при некотором  $i \in \{1, \dots, m\}$ , то  $p_i = 0$ .

4.83. Показать, что решение системы из 4.81 единственно, и найти его.

4.84. Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , причём система  $Ax = b$  совместна. Доказать, что импликация

$$Ax = b \rightarrow \langle c, x \rangle = d$$

справедлива в том и только том случае, если совместна система

$$pA = c, \quad \langle p, b \rangle = d.$$

4.85. Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ ,  $c \in \mathbf{R}^n$ ,  $d \in \mathbf{R}$ , причем система  $Ax \leq b$  совместна. Доказать, что импликация

$$Ax \leq b \rightarrow \langle c, x \rangle = d$$

справедлива в том и только том случае, если совместна каждая из систем

$$pA = c, \quad \langle p, b \rangle = d, \quad p \geq 0$$

и

$$pA = -c, \quad \langle p, b \rangle = -d, \quad p \geq 0.$$

С геометрической точки зрения здесь сформулирован критерий принадлежности полиэдра  $X$  вида (4.1) гиперплоскости  $H_{cd}$ .

4.86\*. Доказать теорему Александрова — Фана (Фань-Цзи).

Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ . Тогда совместна одна и только одна из двух систем:

$$Ax \leq b$$

или

$$pA = 0, \quad \langle p, b \rangle < 0, \quad p \geq 0. \quad (4.16)$$

Иными словами, полиэдр  $X$  вида (4.1) непуст в том и только том случае, если система (4.16) несовместна.

4.87. Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ ,  $c \in \mathbf{R}^n$ ,  $d \in \mathbf{R}$ , причем система  $Ax \leq b$  совместна. Доказать, что импликация

$$Ax \leq b \rightarrow \langle c, x \rangle < d$$

справедлива в том и только том случае, если совместна система

$$pA = c, \quad \langle p, b \rangle < d, \quad p \geq 0.$$

4.88\*. Доказать теорему об очистке системы линейных неравенств, влекущей данное неравенство.

Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ ,  $c \in \mathbf{R}^n$ ,  $d \in \mathbf{R}$ , причем система  $Ax \leq b$  совместна и справедлива импликация

$$Ax \leq b \rightarrow \langle c, x \rangle \leq d.$$

Тогда существует такое множество  $I \subset \{1, \dots, m\}$ , что  $\text{rang } A_I = |I|$  (т. е. строки  $a_i$  матрицы  $A$  с номерами из

$I$  линейно независимы) и справедлива импликация

$$A_I x \leq b_I \rightarrow \langle c, x \rangle \leq d,$$

при этом всегда можно считать, что  $|I| = \text{rang } A$ .

Этот важный результат теории линейных неравенств проиллюстрирован на рис. 15, где  $I = \{1, 3\}$ .

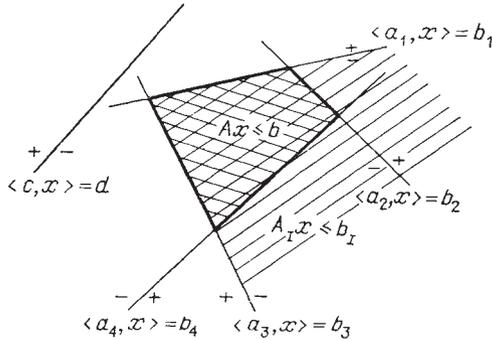


Рис. 15

4.89. Показать, что теорема из 4.88 сохранит свою силу, если в указанных двух импликациях неравенство  $\langle c, x \rangle \leq d$  заменить неравенством  $\langle c, x \rangle < d$ .

4.90. Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}$ , причем система  $Ax \leq b$  совместна. Предположим, что неравенство  $\langle c, x \rangle \leq d$  (или  $\langle c, x \rangle < d$ ) следует из системы  $Ax \leq b$ , но не следует из любой ее собственной подсистемы, т. е. системы вида  $A_I x \leq b_I$ , где  $I \subset \{1, \dots, m\}$ ,  $|I| < m$ . Доказать, что  $\text{rang } A = m$ .

4.91. Система неравенств называется *неприводимо несовместной*, если она несовместна, а любая ее собственная подсистема совместна.

Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $m > 1$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Доказать, что система  $Ax \leq b$  неприводимо несовместна в том и только том случае, если система

$$pA = 0, \quad \langle p, b \rangle < 0, \quad p > 0 \quad (4.17)$$

совместна и любые  $m - 1$  строк матрицы  $A$  линейно независимы.

4.92. Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $\text{rang } A = r$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Доказать, что система  $Ax \leq b$  совместна в том и только том случае, если совместна любая система вида  $A_I x \leq b_I$ , где  $I \subset \{1, \dots, m\}$ ,  $|I| = r + 1$ ,  $\text{rang } A_I = r$ .

Утверждения задач 4.91, 4.92 открывают возможность для получения разнообразных критериев совместности систем линейных неравенств в терминах определителей. Детальное изложение этого вопроса имеется в [43, 47].

4.93. Доказать следующее обобщение теорем 4.5, 4.6 и теоремы из 4.86.

Пусть  $A_{ij} \in \mathcal{A}(m_i, n_j)$ ,  $b^i \in \mathbb{R}^{m_i}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Тогда совместна одна и только одна из двух систем:

$$\begin{aligned} A_{11}x^1 + A_{12}x^2 &\leq b^1, \\ A_{21}x^1 + A_{22}x^2 &= b^2, \quad x^1 \geq 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

или

$$\begin{aligned} p^1 A_{11} + p^2 A_{21} &\geq 0, \\ p^1 A_{12} + p^2 A_{22} &= 0, \\ \langle p^1, b^1 \rangle + \langle p^2, b^2 \rangle &< 0, \quad p^1 \geq 0. \end{aligned}$$

В частности, полиэдр  $X$  вида (4.3) непуст в том и только том случае, если система из 4.17 несовместна.

4.94\*. Доказать теорему о дополняющей нежесткости.

Для любого решения  $(x^1, x^2)$  системы (4.18) и любого решения  $(p^1, p^2)$  системы

$$\begin{aligned} p^1 A_{11} + p^2 A_{21} &\geq 0, \\ p^1 A_{12} + p^2 A_{22} &= 0, \\ \langle p^1, b^1 \rangle + \langle p^2, b^2 \rangle &= 0, \quad p^1 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

выполнены условия дополняющей нежесткости

$$p_i^1 (A_{11}x^1 + A_{12}x^2 - b^1)_i = 0, \quad i = 1, \dots, m_1, \quad (4.20)$$

$$x_j^1 (p^1 A_{11} + p^2 A_{21})_j = 0, \quad j = 1, \dots, n_1, \quad (4.21)$$

означающие лишь то, что в каждом из этих произведений по крайней мере один сомножитель должен обращаться в нуль.

Иными словами, если ограничение  $p_i^1 \geq 0$  в системе (4.19) является нежестким (см. 4.16), то двойственное ограничение  $(A_{11}x^1 + A_{22}x^2)_i \leq b_i^1$  в системе (4.18) должно быть жестким. Аналогично из нежесткости ограничения  $x_j^1 \geq 0$  в системе (4.18) следует жесткость двойственного ограничения  $(p^1 A_{11} + p^2 A_{21})_j \geq 0$  в системе (4.19). Отметим, что сформулированная теорема обобщает утверждение из 4.18, причем для нее также справедливо обратное: жесткость данного ограничения-неравенства одной из

систем (4.18), (4.19) влечет нежесткость двойственного ограничения-неравенства другой (см. 4.104).

4.95. Доказать следующее обобщение теоремы 4.7.

Пусть  $A_{ij} \in \mathcal{A}(m_i, n_j)$ ,  $b^i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $c \in \mathbb{R}^{n_j}$  ( $i, j = 1, 2$ ) и  $d \in \mathbb{R}$ , причем система (4.18) совместна. Тогда импликация (4.18)  $\rightarrow \langle c^1, x^1 \rangle + \langle c^2, x^2 \rangle \leq d$  справедлива в том и только том случае, если совместна система

$$\begin{aligned} p^1 A_{11} + p^2 A_{21} &\geq c^1, \\ p^1 A_{12} + p^2 A_{22} &= c^2, \\ \langle p^1, b^1 \rangle + \langle p^2, b^2 \rangle &\leq d, \quad p^1 \geq 0. \end{aligned}$$

Аналогичные обобщения могут быть сформулированы для утверждений задач 4.85, 4.87.

4.96\*. Доказать теорему Вороного — Карвера.

Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Тогда совместна одна и только одна из двух систем:

$$Ax < b \quad \text{или} \quad pA = 0, \quad \langle p, b \rangle \leq 0, \quad p \geq 0^*.$$

В то время как теорема Александрова — Фана из 4.86 указывает критерий непустоты полиэдра  $X$  вида (4.1), сформулированная теорема указывает критерий непустоты внутренности этого полиэдра, или же его  $n$ -мерности (см. 4.26).

4.97. Доказать обобщение предыдущей теоремы — теорему Моцкина.

Пусть  $A_i \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b^i \in \mathbb{R}^{m_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), причем система  $A_1 x \leq b^1$ ,  $A_2 x = b^2$  совместна. Тогда совместна одна и только одна из двух систем:

$$A_1 x \leq b^1, \quad A_2 x = b^2, \quad A_3 x < b^3$$

или

$$\begin{aligned} p^1 A_1 + p^2 A_2 + p^3 A_3 &= 0, \\ \langle p^1, b^1 \rangle + \langle p^2, b^2 \rangle + \langle p^3, b^3 \rangle &\leq 0, \quad p^1 \geq 0, \quad p^3 \geq 0. \end{aligned}$$

Предлагаем читателю самостоятельно сформулировать конкретизацию этой теоремы для случая, когда на часть переменных первой системы явно наложено условие неотрицательности (ср. 4.93, 4.95). То же предлагается сделать в отношении теоремы из 4.99.

4.98\*. Доказать теорему Штимке — Фана.

---

\*) Здесь и далее запись  $p \geq q$  для векторов  $p, q$  означает, что  $p \geq q$ , но  $p \neq q$ . Вектор  $p$ , удовлетворяющий условию  $p \geq 0$  называется *полуположительным*.

Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , причем система  $Ax \leq b$  совместна. Тогда совместна одна и только одна из двух систем:

$$Ax \leq b \text{ или } pA = 0, \quad \langle p, b \rangle \leq 0, \quad p > 0.$$

4.99. Доказать следующее обобщение предыдущей теоремы.

Пусть  $A_i \in \mathcal{A}(m_i, n)$ ,  $b^i \in \mathbb{R}^{m_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), причем система  $A_1x \leq b^1$ ,  $A_2x = b^2$ ,  $A_3x \leq b^3$  совместна. Тогда совместна одна и только одна из двух систем:

$$A_1x \leq b^1, \quad A_2x = b^2, \quad A_3x \leq b^3$$

или

$$p^1A_1 + p^2A_2 + p^3A_3 = 0, \\ \langle p^1, b^1 \rangle + \langle p^2, b^2 \rangle + \langle p^3, b^3 \rangle \leq 0, \quad p^1 \geq 0, \quad p^3 > 0.$$

4.100. Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ . Доказать, что совместна одна и только одна из двух систем:

- а)  $Ax = 0$ ,  $x \geq 0$  или  $pA > 0$  (теорема Гордана);
- б)  $Ax = 0$ ,  $x > 0$  или  $pA \geq 0$  (теорема Штимке);
- в)  $Ax \leq 0$ ,  $x \geq 0$  или  $pA > 0$ ,  $p \geq 0$  (теорема Вилля);
- г)  $Ax \leq 0$ ,  $x > 0$  или  $pA \geq 0$ ,  $p \geq 0$ .

4.101\*. Доказать два варианта теоремы Таккера о строгой дополняющей нежесткости.

Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ . Тогда

- а) системы  $Ax = 0$ ,  $x \geq 0$  и  $pA \geq 0$  имеют такие решения  $x$  и  $p$ , что  $x + pA > 0$ ;
- б) системы  $Ax \leq 0$ ,  $x \geq 0$  и  $pA \geq 0$ ,  $p \geq 0$  имеют такие решения  $x$  и  $p$ , что  $p - Ax > 0$ ,  $x + pA > 0$ .

Отметим, что эти утверждения включают в себя теоремы из 4.100. По поводу термина «строгая дополняющая нежесткость» см. замечание после 4.104.

4.102. Пусть  $L$  — линейное подпространство в  $\mathbb{R}^n$ ,  $L^\perp$  — его ортогональное дополнение. Доказать, что справедливо одно и только одно из двух: либо  $L \cap \text{int } \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset$ , т. е.  $L$  содержит положительный вектор, либо  $L^\perp \cap \mathbb{R}_+^n \neq \{0\}$ , т. е.  $L^\perp$  содержит полуположительный вектор. Более того, существуют такие векторы  $x \in L$  и  $y \in L^\perp$ , что  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + y > 0$ .

Эти утверждения имеют ясный геометрический смысл. Если подпространство  $L$  на плоскости не пересекается с положительным

ортантом, то подпространство  $L^\perp$  имеет нетривиальное пересечение с неотрицательным ортантом (рис. 16). Если при этом  $L$  совпадает с одной из координат осей, то в качестве указанных  $x$  и  $y$  можно взять единичные орты.

4.103\*. Доказать полную теорему Таккера о строгой дополняющей нежесткости.

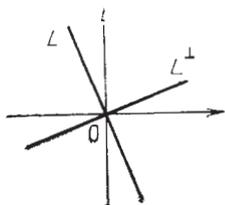


Рис. 16

Пусть  $A_{ij} \in \mathcal{A}(m, n)$  ( $i, j = 1, 2$ ). Тогда системы

$$\begin{aligned} A_{11}x^1 + A_{12}x^2 &\leq 0, \\ A_{21}x^1 + A_{22}x^2 &= 0, \quad x^1 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

и

$$\begin{aligned} p^1 A_{11} + p^2 A_{21} &\geq 0, \\ p^1 A_{12} + p^2 A_{22} &= 0, \quad p^1 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

имеют такие решения  $(x^1, x^2)$  и  $(p^1, p^2)$ , что

$$p^1 - (A_{11}x^1 + A_{12}x^2) > 0, \quad x^1 + (p^1 A_{11} + p^2 A_{21}) > 0.$$

4.104\*. Доказать теорему о строгой дополняющей нежесткости для неоднородной системы.

Пусть (неоднородная) система (4.18) совместна. Тогда эта система и система (4.19) имеют такие решения  $(x^1, x^2)$  и  $(p^1, p^2)$ , что

$$p^1 + (b^1 - A_{11}x^1 - A_{12}x^2) > 0, \quad (4.24)$$

$$x^1 + (p^1 A_{11} + p^2 A_{21}) > 0, \quad (4.25)$$

т. е. для этих решений в каждом из произведений (4.20), (4.21) в нуль обращается ровно один сомножитель.

Иными словами, если ограничение  $p_i^1 \geq 0$  в системе (4.19) является жестким, то двойственное ограничение в системе (4.18) должно быть нежестким. Аналогично из жесткости ограничения  $x_j^1 \geq 0$  в системе (4.18) следует нежесткость двойственного ограничения в системе (4.19). Таким образом, согласно 4.94, 4.104, в каждой паре взаимодвойственных ограничений-неравенств систем (4.18), (4.19) одно и только одно является жестким. Условия (4.20), (4.21), (4.24), (4.25), взятые вместе, принято называть условиями строгой дополняющей нежесткости.

4.105. Доказать утверждение, обратное к 4.18.

Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3). Тогда если  $i_0 \in I(X)$ , то система из 4.18 имеет такое решение  $p$ , что  $p_{i_0} > 0$ .

4.106. Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.4) и  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Доказать, что  $x_j = 0$  при любом  $x \in X$  в том

и только том случае, если система

$$pA \geq 0, \quad \langle p, b \rangle = 0$$

имеет такое решение  $p$ , что  $\langle p, a^j \rangle > 0$ .

4.107. Пусть  $A$  — кососимметрическая матрица, т. е.  $A^T = -A$ . Доказать, что

а) любое решение  $x$  системы

$$Ax \geq 0, \quad x \geq 0 \quad (4.26)$$

обладает свойством  $(Ax)_j, x_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$ ;

б) существует такое решение  $x$  системы (4.26), что  $Ax + x > 0$ .

4.108. Пусть  $A \in \mathcal{A}(n, n)$  — неотрицательно определенная матрица. Доказать, что система  $Ax \geq 0, x \geq 0$  совместна.

Остальные задачи параграфа посвящены некоторым приложениям теории существования решений систем линейных неравенств. В задачах 4.110—4.118 приводятся разнообразные критерии ограниченности и односточности полиэдров, дополняющие тривиальные результаты из 4.4, 4.6. Наиболее важные критерии основаны на следующем результате.

4.109. Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ . Доказать, что система

$$\langle a_i, h \rangle \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (4.27)$$

$$\langle a_i, h \rangle = 0, \quad i = k + 1, \dots, m,$$

имеет лишь тривиальное решение  $h = 0$  в том и только том случае, если  $\text{rang } A = n$  и существует такой вектор  $p \in \mathbb{R}^m$ , что

$$pA = 0, \quad p_i > 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4.28)$$

4.110\*. Доказать, что непустой полиэдр  $X$  вида (4.3) ограничен в том и только том случае, если  $\text{rang } A = n$  и существует вектор  $p \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющий условиям (4.28).

4.111. Доказать, что непустой полиэдр

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\},$$

где  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , ограничен в том и только том случае, если существует такой вектор  $p \in \mathbb{R}^m$ , что  $pA > 0, p \geq 0$ .

4.112. Доказать, что непустой полиэдр  $X$  вида (4.4) ограничен в том и только том случае, если существует такой вектор  $p \in \mathbb{R}^m$ , что  $pA > 0$ .

**4.113\*.** Пусть  $X$  — полиэдр вида (4.3),  $x^* \in X$ ,  $I = I(x^*)$ . Доказать, что  $x^*$  является единственным элементом  $X$  в том и только том случае, если  $\text{rang } A_I = n$  и существуют такие числа  $p_i$  ( $i \in I$ ), что

$$\sum_{i \in I} p_i a_i = 0, \quad p_i > 0, \quad i \in \{1, \dots, k\} \cap I.$$

**4.114.** Пусть  $X$  — полиэдр вида (4.4),  $x^* \in X$ ,  $J = J(x^*)$  (см. (4.5)). Доказать, что  $x^*$  является единственным элементом  $X$  в том и только том случае, если  $\text{rang } A^J = |J|$  и существует такой вектор  $p \in \mathbb{R}^m$ , что

$$\begin{aligned} \langle p, a^j \rangle &= 0, & j \in J; \\ \langle p, a^j \rangle &> 0, & j \in \{1, \dots, n\} \setminus J. \end{aligned}$$

**4.115.** Доказать, что непустой полиэдр  $X$  вида (4.1) ограничен в том и только том случае, если при любом  $c \in \mathbb{R}^n$  система

$$pA = c, \quad p \geq 0 \quad (4.29)$$

совместна.

**4.116.** Доказать, что непустой полиэдр  $X$  вида (4.1) целиком лежит в  $\mathbb{R}_+^n$  в том и только том случае, если существует такая неотрицательная матрица  $P$  размера  $n \times m$ , что  $PA = -E$ ,  $Pb \leq 0$ , где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ .

**4.117.** Доказать, что непустой полиэдр  $X$  вида (4.1) ограничен в том и только том случае, если существуют такие неотрицательные матрицы  $P$  и  $Q$  размера  $n \times m$ , что  $PA = -E$ ,  $QA = E$ , причем отсюда следует, что  $(P + Q)b \geq 0$ .

**4.118.** Доказать, что непустой полиэдр  $X$  вида (4.1) состоит из одной точки в том и только том случае, если существуют такие неотрицательные матрицы  $P$  и  $Q$  размера  $n \times m$ , что  $PA = -E$ ,  $QA = E$ ,  $(P + Q)b = 0$ .

Задачи 4.119—4.123 посвящены выводу одного тонкого факта теории линейных неравенств — теоремы Хоффмана. Решающим является здесь следующее утверждение, представляющее и самостоятельный интерес.

**4.119\*.** Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.1),  $x^*$  — проекция точки  $x \notin X$  на  $X$  (см. п. 3 § 1). Доказать, что существуют числа  $p_i \geq 0$  ( $i \in I(x^*)$ ), при которых

$$x - x^* = \sum_{i \in I(x^*)} p_i a_i,$$

т. е. вектор  $x - x^*$  является неотрицательной линейной комбинацией нормалей активных ограничений в точке  $x^*$  (рис. 17).

4.120. Пусть матрица  $A \in \mathcal{A}(m, n)$  такова, что система  $pA = 0$ ,  $p \geq 0$  несовместна. Доказать, что существует число  $\alpha > 0$ , при котором для любого вектора  $p \geq 0$  справедливо неравенство

$$\max_{1 \leq i \leq m} \langle a_i, pA \rangle \geq \alpha \|pA\|,$$

где, как обычно,  $a_i$  обозначает  $i$ -ю строку матрицы  $A$ .

4.121\*. Доказать теорему Хоффмана.

Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.1). Тогда существует такое число  $\alpha > 0$ , зависящее от матрицы  $A$  и не зависящее от вектора  $b$ , что для любого  $x \notin X$  справедливо неравенство

$$\max_{1 \leq i \leq m} (\langle a_i, x \rangle - b_i) \geq \alpha \rho(x, X), \quad (4.30)$$

где  $\rho(x, X) = \inf_{x' \in X} \|x - x'\|$  — расстояние от точки  $x$  до множества  $X$ .

Отметим, что теорему Хоффмана можно рассматривать как обобщение следующего элементарного факта из аналитической геометрии: если даны полупространство  $\dot{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq b\}$  и точка  $x \notin \dot{X}$ , то расстояние между ними вычисляется по формуле

$$\rho(x, \dot{X}) = \frac{1}{\|a\|} (\langle a, x \rangle - b).$$

4.122. Доказать, что в теореме Хоффмана вместо неравенства (4.30) можно поставить неравенство

$$\sum_{i=1}^m \max(0, \langle a_i, x \rangle - b_i) \geq \alpha \rho(x, X)$$

или неравенство

$$\|Ax - b\| \geq \alpha \rho(x, X).$$

При этом уже допускается случай  $x \in X$ .

4.123. Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3). Доказать, что существует такое число  $\alpha > 0$  ( $\alpha = \alpha(A)$ ), при

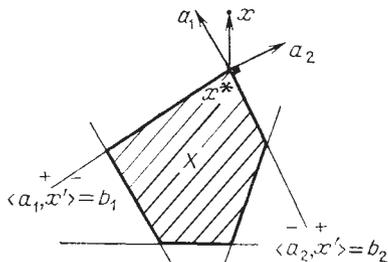


Рис. 17

котором для любого  $x \in \mathbf{R}^n$  справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^k \max(0, \langle a_i, x \rangle - b_i) + \sum_{i=k+1}^m |\langle a_i, x \rangle - b_i| \geq \alpha \rho(x, X).$$

В задачах 4.124—4.137 излагаются основные факты теории параметрических систем линейных неравенств. Если выше практически всюду параметры линейной системы считались заданными, то теперь в центре внимания будет вопрос: как меняются свойства этой системы при варьировании ее параметров?

Под  $X(A, b)$  ниже понимается полиэдр вида (4.3) при данных  $A \in \mathcal{A}(m, n)$  и  $b \in \mathbf{R}^m$ . Для удобства ссылок напомним вид системы из (4.3):

$$\begin{aligned} \langle a_i, x \rangle &\leq b_i, & i = 1, \dots, k, \\ \langle a_i, x \rangle &= b_i, & i = k + 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.124. Система (4.31) называется *устойчивой*, если она совместна и остается таковой при малых возмущениях ее параметров. Иными словами, система (4.31) устойчива, если при любых  $A'$  и  $b'$ , достаточно близких к  $A$  и  $b$ , полиэдр  $X(A', b')$  непуст\*).

Убедиться, что системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1, & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0; \\ x_1 + x_2 &= 1, & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0; \\ x_1 + x_2 &\leq 1, & 2x_1 + 2x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

устойчивы, а системы

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1, & x_1 + x_2 &\geq 1, & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0; \\ x_1 + x_2 &\leq 1, & x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

неустойчивы.

4.125. Доказать, что множество всех пар  $(A, b) \in \mathcal{A}(m, n) \times \mathbf{R}^m$ , при которых система (4.31) устойчива, является открытым.

4.126\*. Доказать теорему об устойчивости системы линейных неравенств и уравнений.

Следующие утверждения эквивалентны:

а) система (4.31) устойчива;

---

\*) В метрическом смысле матрицы из  $\mathcal{A}(m, n)$  рассматриваются как элементы пространства  $\mathbf{R}^{mn}$ .

б) система

$$pA = 0, \quad \langle p, b \rangle \leq 0, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (4.32)$$

имеет лишь тривиальное решение  $p = 0$ ;

в) система

$$\begin{aligned} \langle a_i, x \rangle < b_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \langle a_i, x \rangle = b_i, \quad i = k + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.33)$$

совместна, а векторы  $a_i$  ( $i = k + 1, \dots, m$ ) линейно независимы.

Полезно отметить, что совместность системы (4.33) равносильна тому, что все ограничения-неравенства в системе (4.31) являются нежесткими (см. 4.22).

**4.127\*.** Доказать, что система (4.31) устойчива в том и только том случае, если она *устойчива по правой части ограничений*, т. е. при всех  $b'$ , достаточно близких к  $b$ , полиэдр  $X(A, b')$  непуст.

**4.128.** Пусть система (4.31) имеет такое решение  $x^*$ , что векторы  $a_i$  ( $i \in I(x^*)$ ) линейно независимы. Доказать, что система (4.31) устойчива. Привести пример, показывающий, что это достаточное условие устойчивости не является необходимым.

**4.129.** Пусть последовательности  $\{A^s\}$ ,  $\{b^s\}$  и  $\{x^s\}$  таковы, что  $A^s \rightarrow A$ ,  $b^s \rightarrow b$ ,  $x^s \in X(A^s, b^s)$  и  $x^s \rightarrow x$ . Доказать, что  $x \in X(A, b)$ .

Это простое утверждение означает, что многозначное отображение  $(A, b) \rightarrow X(A, b)$  является замкнутым [29, 32, 39].

**4.130\*.** Пусть система (4.31) устойчива. Рассмотрим любую точку  $x^0 \in X(A, b)$  и любые такие последовательности  $\{A^s\}$ ,  $\{b^s\}$ , что  $A^s \rightarrow A$ ,  $b^s \rightarrow b$ . Доказать, что существует такая последовательность  $\{x^s\}$ , что  $x^s \rightarrow x^0$  и  $x^s \in X(A^s, b^s)$  при всех достаточно больших  $s$ .

Иными словами, утверждается, что многозначное отображение  $(A, b) \rightarrow X(A, b)$  полунепрерывно снизу в данной точке  $(A, b)$  [6, 29].

**4.131.** Привести пример, показывающий, что для неустойчивой системы утверждение из 4.130 может нарушаться, если даже  $X(A^s, b^s) \neq \emptyset$  при всех  $s$ .

**4.132\*.** Пусть полиэдр  $X(A, b)$  непуст и ограничен. Доказать, что при любой матрице  $A'$ , достаточно близкой к  $A$ , и любом векторе  $b' \in \mathbf{R}^m$  полиэдр  $X(A', b')$  ограничен\*).

\*) Пустое множество считается ограниченным по определению.

**4.133.** Пусть полиэдр  $X(A, b)$  непуст и ограничен. Рассмотрим любые такие последовательности  $\{A^s\}$ ,  $\{b^s\}$  и  $\{x^s\}$ , что  $A^s \rightarrow A$ ,  $\{b^s\}$  ограничена и  $x^s \in X(A^s, b^s)$ . Доказать, что последовательность  $\{x^s\}$  ограничена.

В частности, при  $b^s \rightarrow b$  это означает, что многозначное отображение  $(A, b) \rightarrow X(A, b)$  локально ограничено в указанной точке  $(A, b)$  [39].

**4.134.** Доказать, что при любой заданной матрице  $A \in \mathcal{A}(m, n)$  множество всех векторов  $b \in \mathbb{R}^m$ , для которых полиэдр  $X(A, b)$  непуст, замкнуто.

Полезно отметить, что, в частности, здесь отражен факт замкнутости многогранного конуса (см. теорему 7.13).

**4.135.** Привести пример, показывающий, что в **4.134** матрицу  $A$  и вектор  $b$  нельзя поменять местами.

**4.136\*.** При заданной матрице  $A \in \mathcal{A}(m, n)$  введем обозначения  $X(b) = X(A, b)$ ,  $B = \{b \in \mathbb{R}^m \mid X(b) \neq \emptyset\}$ . Доказать, что существует константа  $L > 0$ , зависящая только от матрицы  $A$ , при которой для любых  $b, b' \in B$  выполнено неравенство

$$d(X(b), X(b')) \leq L \|b - b'\|,$$

где

$$d(X, X') = \max \left\{ \sup_{x \in X} \rho(x, X'), \sup_{x \in X'} \rho(x, X) \right\}$$

есть так называемое *хаусдорфово расстояние* между множествами  $X = X(b)$  и  $X' = X(b')$ .

Иными словами, многозначное отображение  $b \rightarrow X(b)$  удовлетворяет условию Липшица в метрике Хаусдорфа и, следовательно, непрерывно по Хаусдорфу на  $B$  [29].

**4.137.** В обозначениях задачи **4.136** доказать, что существует константа  $L = L(A) > 0$ , при которой для любого  $b \in B$  найдется точка  $x \in X(b)$ , удовлетворяющая неравенству  $\|x\| \leq L \|b\|$ .

## § 5. Теория линейного программирования

### СВОДКА ОСНОВНЫХ ФАКТОВ

**1. Постановка и формы записи задачи ЛП.** *Задачей линейного программирования* (ЛП) называется задача максимизации или минимизации линейной функции на полиэдре. Таким образом, задачу ЛП можно записать

в виде

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max, \quad Ax \leq b, \quad (5.1)$$

где  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ ,  $c \in \mathbf{R}^n$ . Для дальнейшего полезно выписать отдельно допустимое множество этой задачи:

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n | Ax \leq b\} = \{x \in \mathbf{R}^n | \langle a_i, x \rangle \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m\}. \quad (5.2)$$

*Теорема 5.1. Любое локальное решение задачи ЛП является и глобальным.*

Учитывая это утверждение, в дальнейшем будем говорить просто о *решении* задачи ЛП.

Полезно отметить, что множество  $X^*$  решений задачи (5.2) также является полиэдром, поскольку, если оно непусто, это множество представимо в виде

$$X^* = \{x \in \mathbf{R}^n | Ax \leq b, \langle c, x \rangle \geq f^*\}, \quad (5.3)$$

где  $f^*$  — значение задачи (5.1), т. е.  $f^* = \sup_x \langle c, x \rangle$ .

Задачу ЛП вида (5.1) называют *основной*. Ниже называются другие распространенные формы записи задачи ЛП на максимум, различающиеся способами представления ее допустимого множества. При этом по-прежнему считаем, что  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ ,  $c \in \mathbf{R}^n$ .

*Стандартная задача ЛП:*

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0. \quad (5.4)$$

*Каноническая задача ЛП:*

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0. \quad (5.5)$$

*Общая задача ЛП:*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = k + 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Аналогичные формы записи используются и для задачи ЛП на минимум, но все неравенства пишутся здесь со знаком  $\geq$ .

Формально говоря, каждая из задач (5.1), (5.4), (5.5) является частным случаем общей задачи (5.6): при  $k = m$  и  $s = 0$  получаем задачу (5.1), при  $k = m$  и  $s = n - m$  — задачу (5.4), при  $k = 0$  и  $s = n$  — задачу (5.5). Однако в свою очередь общая задача может быть представлена в форме любой из трех остальных. Так, задача (5.6) принимает основную форму, если заменить в ней систему ограничений-равенств на эквивалентную систему ограничений-неравенств:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i, \quad i = k+1, \dots, m. \quad (5.7)$$

Если к тому же сделать замену переменных

$$x_j = u_j - v_j, \quad u_j \geq 0, \quad v_j \geq 0, \quad j = s+1, \dots, n, \quad (5.8)$$

то задача (5.6) примет стандартную форму. Если ограничения-неравенства в (5.6) записать в виде

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + w_i = b_i, \quad w_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.9)$$

где  $w_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) — дополнительные переменные (формально входящие в целевую функцию с нулевыми коэффициентами), и вновь использовать замену переменных (5.8), то задача (5.6) превратится в каноническую.

Вообще любую задачу ЛП на максимум или минимум с неравенствами, направленными в ту или иную сторону, можно представить в любой из указанных форм. Для этого наряду с приемами (5.7)–(5.9) необходимо использовать умножение целевой функции или ограничений-неравенств на  $-1$ , что позволяет переходить от минимизации к максимизации и менять знаки неравенств.

**2. Примеры задач ЛП.** Существует большое количество примеров задач ЛП в различных сферах практической деятельности. Приведем три примера, ставшие классическими.

**Пример 5.1** (задача планирования производства). Пусть некоторое предприятие производит  $n$  типов товаров, затрачивая при этом  $m$  типов ресурсов. Известны следующие параметры:

$a_{ij}$  — количество  $i$ -го ресурса, необходимое для производства единичного количества  $j$ -го товара,  $a_{ij} \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ );

$b_i$  — запас  $i$ -го ресурса на предприятии,  $b_i > 0$ ;

$c_j$  — цена единичного количества  $j$ -го товара,  $c_j > 0$ .

Предполагается, что технология производства *линейна*, т. е. затраты ресурсов растут прямо пропорционально объему производства. Пусть число  $x_j$  показывает планируемый объем производства  $j$ -го товара. Тогда допустимым является только такой набор производимых товаров  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , при котором суммарные затраты каждого  $i$ -го ресурса не превосходят его запаса:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.10)$$

Кроме того, имеем следующее естественное ограничение:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.11)$$

Стоимость набора товаров  $x$  выражается величиной

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (5.12)$$

Задача планирования производства ставится следующим образом: среди всех векторов  $x$ , удовлетворяющих ограничениям (5.10), (5.11), найти такой, при котором величина (5.12) принимает наибольшее значение. Таким образом, мы получаем задачу ЛП в стандартной форме (5.4) с той лишь спецификой, что матрица  $A = (a_{ij})$  здесь неотрицательна, а векторы  $b = (b_i)$  и  $c = (c_j)$  положительны.

Пример 5.2 (задача о рационе). При организации питания больших коллективов людей, например в армии, больницах и т. п., возникает задача о наиболее экономном рационе питания, удовлетворяющем определенным медицинским требованиям. Пусть имеется  $n$  продуктов питания (хлеб, мясо, молоко, картофель и т. п.), в которых учитывается  $m$  полезных веществ (жиры, белки, углеводы, витамины и т. п.). Известны следующие параметры:

$a_{ij}$  — содержание  $i$ -го вещества в единичном количестве  $j$ -го продукта,  $a_{ij} \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ );

$b_i$  — минимальное количество  $i$ -го вещества, которое должно потребляться индивидуумом в расчете, скажем, на месяц,  $b_i > 0$ ;

$c_j$  — цена единичного количества  $j$ -го продукта,  $c_j > 0$ .

Задача о рационе формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где  $x_j$  обозначает количество  $j$ -го продукта, потребляемого индивидуумом в течение месяца. Иными словами, среди всех рационов питания  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , покрывающих минимальные потребности индивидуума в полезных веществах, необходимо выбрать наиболее дешевый. Отметим, что (5.13) — это просто стандартная задача ЛП на минимум с неотрицательными параметрами.

**Пример 5.3** (транспортная задача). Пусть некоторый однородный продукт (уголь, кирпич, картофель и т. п.) хранится на  $m$  складах и потребляется в  $n$  пунктах. Известны следующие параметры:

$a_i$  — запас продукта на  $i$ -м складе,  $a_i > 0$  ( $i = 1, \dots, m$ );

$b_j$  — потребность в продукте в  $j$ -м пункте,  $b_j > 0$  ( $j = 1, \dots, n$ );

$c_{ij}$  — стоимость перевозки единичного количества продукта с  $i$ -го склада в  $j$ -й пункт,  $c_{ij} > 0$ .

При этом суммарные запасы равны суммарным потребностям:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (5.14)$$

Транспортная задача ставится как каноническая задача ЛП следующего специального вида:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где  $x_{ij}$  показывает количество продукта, перевозимого с  $i$ -го склада в  $j$ -й пункт. Иными словами, требуется так

организовать перевозки продукта со складов в пункты потребления, чтобы при полном удовлетворении потребностей минимизировать суммарные транспортные расходы. Заметим, что условие (5.14) является необходимым и достаточным для существования по крайней мере одной матрицы перевозок  $X = (x_{ij})$ , удовлетворяющей ограничениям задачи (5.15).

**3. Геометрическая интерпретация задачи ЛП.** Задачу ЛП с двумя переменными можно решить геометрически.

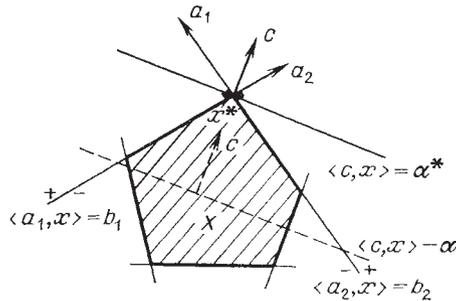


Рис. 18

Пусть, например, дана основная задача ЛП (5.1) при  $n = 2$ . Тогда, следуя общим рекомендациям из п. 4 § 1, необходимо прежде всего изобразить на плоскости допустимое множество этой задачи — полиэдр  $X$  вида (5.2). Линии уровня ее целевой функции представляют собой семейство параллельных прямых  $\langle c, x \rangle = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ ), причем их общая нормаль  $c$  «смотрит» в сторону возрастания функции  $\langle c, x \rangle$ . Поиск решения задачи сводится к нахождению максимального числа  $\alpha^*$  среди всех  $\alpha$ , при которых прямая  $\langle c, x \rangle = \alpha$  имеет непустое пересечение с  $X$ . Если такое (конечное)  $\alpha^*$  существует, то оно является значением задачи. При этом любая точка на прямой  $\langle c, x \rangle = \alpha^*$ , лежащая в  $X$ , служит решением задачи. Решение  $x^*$  может быть как единственным (рис. 18), так и неединственным (рис. 19). Если при всех достаточно больших  $\alpha$  пересечение прямой  $\langle c, x \rangle = \alpha$  с  $X$  пусто, то значение задачи бесконечно, и, следовательно, она не имеет решения (рис. 20).

Из приведенных рисунков очевиден ряд свойств задач ЛП, которые будут сформулированы в п. 4.

Геометрические соображения могут быть полезными и при решении некоторых задач ЛП со многими пере-

менными. Пусть, например, дана задача ЛП в канонической форме

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (5.16)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где число переменных на два больше числа ограничений-равенств, т. е.  $n - m = 2$ , причем ранг матрицы

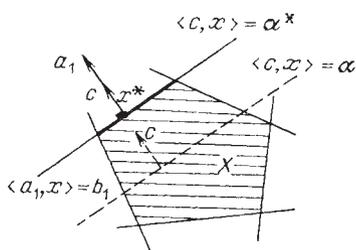


Рис. 19

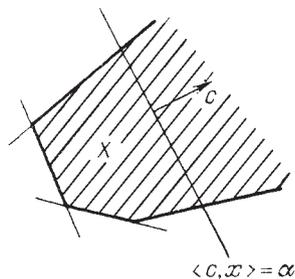


Рис. 20

$A = (a_{ij})$  равен  $m$ . Тогда две переменные в указанной системе уравнений, скажем  $x_1$  и  $x_2$ , являются свободными, т. е. через них можно выразить все остальные переменные:

$$x_j = \alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2 + \beta_j, \quad j = 3, \dots, n, \quad (5.17)$$

где  $\alpha_{j1}$ ,  $\alpha_{j2}$ ,  $\beta_j$  — некоторые числа. Подставляя эти выражения в целевую функцию, получаем

$$f = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \delta, \quad (5.18)$$

где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\delta$  — некоторые числа.

Рассмотрим задачу ЛП с двумя переменными:

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \rightarrow \max,$$

$$\alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2 + \beta_j \geq 0, \quad j = 3, \dots, n, \quad (5.19)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Используя геометрические построения, находим ее решение  $(x_1^*, x_2^*)$ . Подставляя эти числа в (5.17), (5.18), получаем решение и значение исходной задачи (5.16).

Описанный метод исключения переменных, конечно, применим и в том случае, если в задаче (5.16) число переменных лишь на единицу больше числа ограничительных равенств, т. е.  $n - m = 1$ . Тогда все сводится к отысканию решения элементарной задачи ЛП с одной переменной. Если в задаче (5.16) не на все переменные наложено условие неотрицательности, то это приводит лишь к уменьшению числа ограничений в (5.19).

**4. Основные свойства задачи ЛП.** Если допустимое множество задачи ЛП непусто и ограничено, то, согласно теореме Вейерштрасса, она имеет решение. Вместе с тем для задач ЛП справедлива следующая специфическая теорема существования.

*Теорема 5.2. Если допустимое множество задачи ЛП непусто, а значение ее конечно, то эта задача имеет решение.*

Иными словами, для задач ЛП случай 2) из п. 2 § 1 невозможен.

Как и в § 4, под  $I(x^*)$  будем понимать множество номеров активных ограничений в точке  $x^* \in X$ , где  $X$  — полиэдр вида (5.2):

$$I(x^*) = \{i, 1 \leq i \leq m \mid \langle a_i, x^* \rangle = b_i\}.$$

Заметим, что на рис. 18 нормаль  $s$  целевой функции располагается «между» нормальными  $a_1$  и  $a_2$  активных ограничений в точке  $x^*$ . Это означает, что  $s$  является линейной комбинацией векторов  $a_1$  и  $a_2$  с неотрицательными коэффициентами. Аналогично на рис. 19 вектор  $s$  получается умножением на неотрицательное число нормали  $a_1$  единственного активного ограничения в  $x^*$ . Отсюда ясен геометрический смысл следующего утверждения.

*Теорема 5.3 (необходимое и достаточное условие экстремума в основной задаче ЛП). Допустимая точка  $x^*$  задачи (5.1) является ее решением в том и только том случае, если существуют такие числа  $y_i^* \geq 0$  ( $i \in I(x^*)$ ), что*

$$c = \sum_{i \in I(x^*)} y_i^* a_i. \quad (5.20)$$

Из этого принципиального факта без труда выводится аналогичный результат для задачи ЛП в произвольной форме записи.

*Теорема 5.4 (необходимое и достаточное условие экстремума в общей задаче ЛП). Допустимая точка  $x^*$*

задачи (5.6) является ее решением в том и только том случае, если существует такой вектор  $y^* = (y_i^*) \in \mathbb{R}^m$ , что  $y_i^* \geq 0$  при всех  $i = 1, \dots, k$  и

$$\sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} \geq c_j, \quad j = 1, \dots, s, \quad (5.21)$$

$$\sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} = c_j, \quad j = s + 1, \dots, n, \quad (5.22)$$

$$x_j^* \left( \sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} - c_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad (5.23)$$

$$y_i^* \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.24)$$

Подчеркнем, что теорема 5.3 есть частный случай теоремы 5.4, поскольку при  $k = m$ ,  $s = 0$  условия (5.21), (5.23) просто отсутствуют, а условие (5.24) равносильно тому, что  $y_i^* = 0$  при всех  $i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(x^*)$ .

Из рис. 18, 19 очевиден также следующий важный факт теории ЛП.

**Теорема 5.5.** Пусть задача ЛП имеет решение, причем ее допустимое множество обладает по крайней мере одной вершиной. Тогда существует такая вершина, которая служит решением задачи. В частности, если решение единственно, то оно обязательно является вершиной.

Таким образом, если задача ЛП на максимум удовлетворяет условиям теоремы 5.5, то для отыскания ее решения достаточно найти все вершины допустимого множества задачи (число которых, согласно теореме 4.1, конечно) и выбрать из них ту, в которой функция принимает максимальное значение.

Описанный метод полного перебора вершин практически применим лишь для малоразмерных задач ЛП, поскольку при большом числе переменных и ограничений он требует огромной вычислительной работы. Тем не менее именно идея перебора вершин (но не полного, а упорядоченного) лежит в основе эффективного численного метода решения задач ЛП, называемого симплекс-методом. О нем пойдет речь в § 6.

**5. Понятие двойственной задачи ЛП.** Каждой задаче ЛП можно поставить в соответствие другую задачу ЛП, называемую двойственной. Их совместное изучение составляет предмет теории двойственности, являющейся важным разделом линейного программирования. Цент-

ральные результаты этой теории — приводимые ниже теоремы 5.9 и 5.10,— по существу, лишь придают иную форму теоремам 5.3 и 5.4. Однако во многих вопросах именно эта форма оказывается наиболее эффективной.

Для удобства вышшем еще раз общую задачу ЛП:

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = k + 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Двойственной к задаче (5.25) называется следующая задача:

$$\begin{aligned} \langle b, y \rangle &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} &\geq c_j, \quad j = 1, \dots, s, \\ \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} &= c_j, \quad j = s + 1, \dots, n, \\ y_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.26)$$

При этом задача (5.25) называется *прямой*.

Переход к двойственной задаче удобно осуществлять с помощью табл. 1.

Таблица 1

|              |              |          |              |               |          |             |             |
|--------------|--------------|----------|--------------|---------------|----------|-------------|-------------|
|              | $x_1 \geq 0$ | $\dots$  | $x_s \geq 0$ | $x_{s+1}$     | $\dots$  | $x_n$       |             |
| $y_1 \geq 0$ | $a_{11}$     | $\dots$  | $a_{1s}$     | $a_{1,s+1}$   | $\dots$  | $a_{1n}$    | $\leq b_1$  |
| $\vdots$     | $\vdots$     | $\vdots$ | $\vdots$     | $\vdots$      | $\vdots$ | $\vdots$    | $\vdots$    |
| $y_k \geq 0$ | $a_{k1}$     | $\dots$  | $a_{ks}$     | $a_{k,s+1}$   | $\dots$  | $a_{kn}$    | $\leq b_k$  |
| $y_{k+1}$    | $a_{k+1,1}$  | $\dots$  | $a_{k+1,s}$  | $a_{k+1,s+1}$ | $\dots$  | $a_{k+1,n}$ | $= b_{k+1}$ |
| $\vdots$     | $\vdots$     | $\vdots$ | $\vdots$     | $\vdots$      | $\vdots$ | $\vdots$    | $\vdots$    |
| $y_m$        | $a_{m1}$     | $\dots$  | $a_{ms}$     | $a_{m,s+1}$   | $\dots$  | $a_{mn}$    | $= b_m$     |
|              | $\geq$       | $\dots$  | $\geq$       | $=$           | $\dots$  | $=$         |             |
|              | $c_1$        | $\dots$  | $c_s$        | $c_{s+1}$     | $\dots$  | $c_n$       |             |

Сначала в таблицу заносится вся информация о прямой задаче: значения параметров  $a_{ij}$ ,  $b_i$  и  $c_j$ , знаки неравенств или равенств в ограничениях (справа), условия неотрицательности соответствующих переменных (сверху). Затем каждой  $i$ -й строке ( $i$ -му ограничению прямой задачи) ставится в соответствие *двойственная переменная*  $y_i$ , на которую накладывается условие неотрицательности, если справа в этой строке стоит знак неравенства. Внизу проставляются знаки неравенства или равенства в зависимости от того, наложено или не наложено условие неотрицательности на соответствующую переменную прямой задачи. После этого двойственная задача «считывается» путем умножения вектора  $y = (y_i)$  на столбцы матрицы  $A = (a_{ij})$  и вектор  $b = (b_i)$ .

В табл. 2 указаны прямая и двойственная задачи в наиболее важных частных случаях.

Т а б л и ц а 2

| Формы записи прямой задачи ЛП  | Формы записи соответствующей двойственной задачи ЛП                            |
|--|--|
| Основная: $\langle c, x \rangle \rightarrow \max,$<br>$Ax \leq b$              | Каноническая: $\langle b, y \rangle \rightarrow \min,$<br>$yA = c, y \geq 0$   |
| Стандартная: $\langle c, x \rangle \rightarrow \max,$<br>$Ax \leq b, x \geq 0$ | Стандартная: $\langle b, y \rangle \rightarrow \min,$<br>$yA \geq c, y \geq 0$ |
| Каноническая: $\langle c, x \rangle \rightarrow \max,$<br>$Ax = b, x \geq 0$   | Основная: $\langle b, y \rangle \rightarrow \min,$<br>$yA \geq c$              |

## 6. Основные факты теории двойственности.

**Теорема 5.6.** *Задачи (5.25) и (5.26) взаимодвойственны, т. е. двойственной к задаче (5.26) является задача (5.25).*

Ниже под  $X$  и  $Y$  понимаются допустимые множества задач (5.25) и (5.26) соответственно.

**Теорема 5.7.** *Для любых  $x \in X$  и  $y \in Y$  выполняется неравенство  $\langle c, x \rangle \leq \langle b, y \rangle$ .*

**Теорема 5.8.** *Пусть  $x^* \in X, y^* \in Y$ . Тогда*

1) *если*

$$\langle c, x^* \rangle = \langle b, y^* \rangle, \quad (5.27)$$

*то  $x^*$  есть решение задачи (5.25), а  $y^*$  — решение задачи (5.26);*

2) равенство (5.27) равносильно совокупности условий

$$x_j^* \left( \sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} - c_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad (5.28)$$

$$y_i^* \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.29)$$

Равенство (5.27) принято называть *соотношением двойственности*, условия (5.28), (5.29), уже встречавшиеся в теореме 5.4, — *условиями дополняющей нежесткости*.

**Теорема 5.9** (теорема двойственности). *Прямая задача (5.25) имеет решение в том и только том случае, если двойственная задача (5.26) имеет решение; при этом значения данных задач совпадают, т. е. для любых их решений  $x^*$  и  $y^*$  выполнено соотношение двойственности (5.27).*

Важно подчеркнуть, что множество решений двойственной задачи совпадает с множеством векторов  $y^*$  из формулировки теоремы 5.4.

При практическом применении теории двойственности особенно полезным является следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теорем 5.8 и 5.9.

**Теорема 5.10** (о дополняющей нежесткости). *Точки  $x^* \in X$  и  $y^* \in Y$  являются решениями взаимодвойственных задач (5.25) и (5.26) соответственно в том и только том случае, если выполняются условия (5.28), (5.29).*

Итак, взаимодвойственные задачи ЛП имеют или не имеют решения одновременно. Следующая теорема показывает, что уже по их допустимым множествам можно отличить первый случай от второго.

**Теорема 5.11.** *Если допустимые множества взаимодвойственных задач (5.25) и (5.26) непусты, то обе они имеют решение. Если же только у одной из них допустимое множество пусто, то ее значение бесконечно, т. е.*

$$\text{если } X \neq \emptyset, \quad Y = \emptyset, \text{ то } \sup_x \langle c, x \rangle = \infty;$$

$$\text{если } X = \emptyset, \quad Y \neq \emptyset, \text{ то } \inf_y \langle b, y \rangle = -\infty.$$

Отметим некоторые способы использования теории двойственности для отыскания решений простейших за-

дач ЛП. Если из геометрических или иных соображений выдвинута гипотеза о том, что данная точка  $x^* \in X$  является решением задачи (5.25), то эта гипотеза может быть строго обоснована путем подстановки  $x^*$  в систему (5.28), (5.29). Критерием истинности гипотезы является разрешимость этой системы относительно  $y^* \in Y$ . Отметим, впрочем, что здесь нет необходимости прибегать к самому понятию двойственности: можно использовать непосредственно теорему 5.4 или, в частности, теорему 5.3.

Более эффективной теория двойственности является в тех случаях, когда двойственная задача решается проще, чем прямая. Если решение  $y^*$  двойственной задачи (5.26) найдено, то, подставляя  $y^*$  в (5.28), (5.29), получаем систему на  $X$  для определения решения  $x^*$  прямой задачи (5.25). В некоторых случаях удается решить систему (5.28), (5.29) на декартовом произведении  $X \times Y$  и тем самым одновременно найти решение как прямой, так и двойственной задачи.

## УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Привести следующую задачу ЛП к стандартной форме:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 3x_3 &\rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\sim 1, \\ 3x_2 + x_3 &\approx 2, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\infty 4, \\ x_2 &\geq 0, x_3 \geq 0: \end{aligned}$$

|   | $\sim$ | $\approx$ | $\infty$ |    | $\sim$ | $\approx$ | $\infty$ |    | $\sim$ | $\approx$ | $\infty$ |    | $\sim$ | $\approx$ | $\infty$ |
|---|--------|-----------|----------|----|--------|-----------|----------|----|--------|-----------|----------|----|--------|-----------|----------|
| 1 | $\geq$ | $=$       | $\leq$   | 6  | $=$    | $\leq$    | $=$      | 11 | $=$    | $\geq$    | $=$      | 16 | $\leq$ | $\leq$    | $=$      |
| 2 | $=$    | $\leq$    | $\geq$   | 7  | $\leq$ | $=$       | $\geq$   | 12 | $=$    | $=$       | $\leq$   | 17 | $\geq$ | $\geq$    | $\leq$   |
| 3 | $\leq$ | $=$       | $=$      | 8  | $\geq$ | $=$       | $=$      | 13 | $\geq$ | $\geq$    | $=$      | 18 | $\geq$ | $\leq$    | $=$      |
| 4 | $=$    | $\geq$    | $\geq$   | 9  | $=$    | $\geq$    | $\leq$   | 14 | $\leq$ | $\geq$    | $\geq$   | 19 | $\geq$ | $\leq$    | $\geq$   |
| 5 | $\geq$ | $=$       | $\geq$   | 10 | $\leq$ | $\geq$    | $=$      | 15 | $=$    | $=$       | $\geq$   | 20 | $\leq$ | $\leq$    | $\geq$   |

5.2. Привести следующую задачу ЛП к канонической форме:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned}
 x_1 + 3x_2 & - x_4 \sim 2, \\
 -x_1 + x_2 & + x_4 \approx 1, \\
 x_2 + x_3 & \infty 3, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0:
 \end{aligned}$$

|   | $\sim$ | $\approx$ | $\infty$ |    | $\sim$ | $\approx$ | $\infty$ |    | $\sim$ | $\approx$ | $\infty$ |    | $\sim$ | $\approx$ | $\infty$ |
|---|--------|-----------|----------|----|--------|-----------|----------|----|--------|-----------|----------|----|--------|-----------|----------|
| 1 | $\gg$  | $=$       | $\ll$    | 6  | $=$    | $\leq$    | $\leq$   | 11 | $\gg$  | $\leq$    | $\leq$   | 16 | $=$    | $=$       | $\gg$    |
| 2 | $\gg$  | $\gg$     | $\ll$    | 7  | $\leq$ | $\gg$     | $\leq$   | 12 | $=$    | $\leq$    | $\gg$    | 17 | $\gg$  | $=$       | $\gg$    |
| 3 | $\gg$  | $\leq$    | $\gg$    | 8  | $\leq$ | $\leq$    | $\gg$    | 13 | $\gg$  | $\gg$     | $=$      | 18 | $\leq$ | $\gg$     | $=$      |
| 4 | $=$    | $\gg$     | $\gg$    | 9  | $\leq$ | $\gg$     | $\gg$    | 14 | $\leq$ | $=$       | $\leq$   | 19 | $=$    | $=$       | $\leq$   |
| 5 | $\gg$  | $\leq$    | $=$      | 10 | $\leq$ | $\leq$    | $=$      | 15 | $=$    | $\gg$     | $\leq$   | 20 | $\leq$ | $=$       | $\gg$    |

5.3. Используя геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned}
 x_1 + ax_2 & \rightarrow \max, \\
 x_1 + 2x_2 & \leq 10, \\
 3x_1 + 2x_2 & \leq 18, \\
 x_1 - x_2 & \geq -b, \\
 cx_1 - x_2 & \leq 8c + 3 *):
 \end{aligned}$$

|    | $a$  | $b$ | $c$ |    | $a$  | $b$  | $c$ |
|----|------|-----|-----|----|------|------|-----|
| 1  | 5    | 7   | 2   | 11 | -5/6 | 8    | 1/4 |
| 2  | 1    | 6   | 3   | 12 | 3    | 13/2 | 2   |
| 3  | -1   | 6   | 1/8 | 13 | 1    | 9    | 1   |
| 4  | 5    | 9   | 1   | 14 | -1/3 | 10   | 2   |
| 5  | 3/4  | 7   | 1   | 15 | 7/4  | 6    | 3   |
| 6  | -1/4 | 10  | 2   | 16 | -3/4 | 13/2 | 1/2 |
| 7  | 4    | 12  | 1/2 | 17 | 3/2  | 7    | 2   |
| 8  | 5/4  | 9   | 1/3 | 18 | 3    | 6    | 1   |
| 9  | -1   | 6   | 1/2 | 19 | 4    | 8    | 3/4 |
| 10 | 5/6  | 7   | 1   | 20 | -1   | 15/2 | 1/3 |

\*) В подобных заданиях требуется не только выдвинуть геометрическую гипотезу, что некоторая точка является решением задачи, но и строго обосновать эту гипотезу с помощью изложенной теории.

5.4. Используя геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned}
 ax_1 + \quad \quad \quad x_2 &\rightarrow \min, \\
 x_1 + (b - 3)x_2 &\geq b, \\
 (c - 4)x_1 + \quad \quad \quad x_2 &\geq c, \\
 3x_1 + \quad \quad \quad 2x_2 &\geq 11, \\
 x_1 \geq 0, \quad \quad \quad x_2 &\geq 0:
 \end{aligned}$$

|   | a   | b | c |    | a    | b | c |    | a   | b | c |    | a    | b | c |
|---|-----|---|---|----|------|---|---|----|-----|---|---|----|------|---|---|
| 1 | 1/4 | 5 | 9 | 6  | 1/2  | 7 | 6 | 11 | 7/2 | 5 | 7 | 16 | 1/2  | 4 | 9 |
| 2 | 5/4 | 4 | 6 | 7  | 1/6  | 8 | 8 | 12 | 9/2 | 6 | 9 | 17 | 5/3  | 8 | 6 |
| 3 | 9/2 | 7 | 8 | 8  | 5/2  | 4 | 7 | 13 | 1/5 | 7 | 7 | 18 | 3/4  | 5 | 6 |
| 4 | 7/4 | 8 | 7 | 9  | 13/3 | 5 | 8 | 14 | 7/2 | 4 | 8 | 19 | 1/4  | 6 | 8 |
| 5 | 5/2 | 6 | 6 | 10 | 2/3  | 6 | 7 | 15 | 1/3 | 8 | 9 | 20 | 11/2 | 7 | 9 |

5.5. Используя метод исключения переменных и геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned}
 ax_2 - 3x_3 &\rightarrow \max, \\
 2x_1 + bx_2 + x_3 &\leq 15, \\
 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &\leq 0, \\
 cx_1 + 2x_2 - x_3 &= -3, \\
 x_2 \geq 0, \quad x_3 &\geq 0:
 \end{aligned}$$

|   | a  | b | c |    | a  | b | c |    | a  | b | c |    | a  | b | c |
|---|----|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|
| 1 | 10 | 2 | 3 | 6  | -2 | 2 | 2 | 11 | -1 | 5 | 3 | 16 | -2 | 5 | 2 |
| 2 | -1 | 1 | 2 | 7  | 2  | 3 | 4 | 12 | 6  | 6 | 4 | 17 | 4  | 4 | 3 |
| 3 | 3  | 5 | 4 | 8  | 5  | 5 | 3 | 13 | 10 | 1 | 2 | 18 | 12 | 2 | 4 |
| 4 | -3 | 4 | 2 | 9  | 11 | 1 | 4 | 14 | -3 | 3 | 3 | 19 | 5  | 3 | 2 |
| 5 | 12 | 3 | 3 | 10 | 7  | 7 | 2 | 15 | 7  | 3 | 4 | 20 | -1 | 3 | 4 |

5.6. Используя метод исключения переменных и геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned}
 x_1 + \quad \quad \quad x_3 + ax_4 + bx_5 &\rightarrow \max, \\
 x_1 - x_2 + \quad \quad \quad 6x_4 - 2x_5 &= c - 15,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 &= 24, \\
 x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 &= c + 24, \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5:
 \end{aligned}$$

|   | a | b  | c | a  | b | c | a | b  | c | a  | b | c  |   |   |   |
|---|---|----|---|----|---|---|---|----|---|----|---|----|---|---|---|
| 1 | 3 | 5  | 6 | 6  | 1 | 1 | 7 | 11 | 1 | 2  | 8 | 16 | 2 | 2 | 6 |
| 2 | 5 | 2  | 7 | 7  | 6 | 3 | 8 | 12 | 8 | 4  | 6 | 17 | 1 | 3 | 7 |
| 3 | 1 | 5  | 8 | 8  | 2 | 1 | 6 | 13 | 2 | 5  | 7 | 18 | 7 | 4 | 8 |
| 4 | 3 | -1 | 6 | 9  | 3 | 0 | 7 | 14 | 9 | 5  | 8 | 19 | 6 | 2 | 6 |
| 5 | 4 | 3  | 7 | 10 | 5 | 7 | 8 | 15 | 7 | -1 | 6 | 20 | 3 | 3 | 7 |

5.7. Определить, имеется ли решение задачи

$$\begin{aligned}
 (4 - 5a)x_1 + 10bx_2 + 15cx_3 &\rightarrow \max, \\
 (2a + 1)x_1 - 4bx_2 - 6cx_3 &\leq 13, \\
 (5 - 4a)x_1 + 8bx_2 + 12cx_3 &\leq 23, \\
 -(3a + 1)x_1 + 6bx_2 + 9cx_3 &\leq 3
 \end{aligned}$$

среди точек

$$x^1 = \left(0, \frac{1}{2b}, 0\right), \quad x^2 = \left(5, 0, \frac{5a}{3c}\right), \quad x^3 = \left(3, \frac{3a+2}{2b}, 0\right):$$

|   | a  | b  | c | a  | b  | c  | a | b  | c  | a  | b | c  |   |    |   |
|---|----|----|---|----|----|----|---|----|----|----|---|----|---|----|---|
| 1 | -1 | 1  | 3 | 6  | 3  | -1 | 8 | 11 | 5  | -2 | 6 | 16 | 1 | -1 | 3 |
| 2 | -1 | 1  | 6 | 7  | -3 | 2  | 3 | 12 | 5  | -2 | 8 | 17 | 1 | -1 | 6 |
| 3 | -1 | 1  | 8 | 8  | -3 | 2  | 6 | 13 | -3 | 1  | 3 | 18 | 1 | -1 | 8 |
| 4 | 3  | -1 | 3 | 9  | -3 | 2  | 8 | 14 | -3 | -1 | 6 | 19 | 3 | -2 | 3 |
| 5 | 3  | -1 | 6 | 10 | 5  | -2 | 3 | 15 | -3 | 1  | 8 | 20 | 3 | -2 | 8 |

5.8. Привести примеры таких значений параметров  $p$  и  $q$ , при которых задача

$$\begin{aligned}
 ax_1 + bx_2 &\rightarrow \max, \\
 x_1 + px_2 &\leq 1, \\
 x_1 - x_2 &\geq q, \\
 x_1 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- а) имеет пустое допустимое множество;  
 б) имеет значение, равное  $\infty$ ;

- в) имеет единственное решение;  
 г) имеет бесконечно много решений:

| a b |     | a b |     | a b |     | a b |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 3 5 | 6   | 2 1 | 11  | 7 3 | 16  | 2 5 |
| 2   | 3 7 | 7   | 6 5 | 12  | 7 4 | 17  | 5 2 |
| 3   | 2 3 | 8   | 3 7 | 13  | 3 2 | 18  | 2 7 |
| 4   | 8 3 | 9   | 5 8 | 14  | 5 3 | 19  | 7 2 |
| 5   | 3 4 | 10  | 4 7 | 15  | 5 6 | 20  | 3 1 |

5.9. Найти все значения параметра  $k$ , при которых точка  $x^* = (b, a)$  является решением задачи

$$\begin{aligned}
 kx_1 + (2 - k)x_2 &\rightarrow \max, \\
 ax_1 - bx_2 &\leq 0, \\
 2x_1 + 3x_2 &\leq c, \\
 x_1 + x_2 &\leq a + b:
 \end{aligned}$$

| a b c |      |    | a b c |      |    | a b c |      |    | a b c |      |    |
|-------|------|----|-------|------|----|-------|------|----|-------|------|----|
| 1     | 4 -3 | 7  | 6     | 3 1  | 13 | 11    | 3 -1 | 8  | 16    | 5 1  | 20 |
| 2     | 3 2  | 14 | 7     | 3 -1 | 9  | 12    | 3 -2 | 7  | 17    | 5 2  | 20 |
| 3     | 2 -1 | 5  | 8     | 4 -1 | 12 | 13    | 4 2  | 16 | 18    | 5 -3 | 11 |
| 4     | 5 -2 | 13 | 9     | 4 -2 | 10 | 14    | 4 3  | 19 | 19    | 6 -5 | 10 |
| 5     | 5 4  | 25 | 10    | 4 1  | 15 | 15    | 5 -1 | 14 | 20    | 6 -4 | 11 |

5.10. Найти решение следующей задачи ЛП методом полного перебора вершин:

$$\begin{aligned}
 ax_1 + x_2 + 8x_3 &\rightarrow \max, \\
 x_1 + bx_2 + x_3 &\geq 1, \\
 x_1 + x_2 + cx_3 &\leq 1, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0:
 \end{aligned}$$

| a b c |     |     | a b c |      |     | a b c |      |     | a b c |      |     |
|-------|-----|-----|-------|------|-----|-------|------|-----|-------|------|-----|
| 1     | 4/3 | 4 5 | 6     | 4/3  | 4 6 | 11    | 7/3  | 4 3 | 16    | 3/2  | 2 5 |
| 2     | 3/2 | 6 4 | 7     | 16/5 | 3 2 | 12    | 19/5 | 6 2 | 17    | 7/4  | 5 4 |
| 3     | 7/3 | 2 3 | 8     | 6/5  | 2 6 | 13    | 3/2  | 2 4 | 18    | 15/4 | 7 2 |
| 4     | 6/5 | 3 6 | 9     | 9/5  | 3 4 | 14    | 5/3  | 6 5 | 19    | 4/3  | 5 6 |
| 5     | 5/4 | 2 7 | 10    | 7/2  | 4 2 | 15    | 7/2  | 5 2 | 20    | 7/3  | 6 3 |

5.11. Найти решение следующей задачи ЛП методом полного перебора вершин (опорных точек):

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &\rightarrow \max, \\ ax_1 - x_2 + x_3 + bx_4 &= 120, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + cx_4 &= 120, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4: \end{aligned}$$

|   | a | b  | c |    | a | b  | c |    | a | b | c |    | a | b  | c |
|---|---|----|---|----|---|----|---|----|---|---|---|----|---|----|---|
| 1 | 1 | 2  | 2 | 6  | 1 | 5  | 5 | 11 | 1 | 0 | 0 | 16 | 1 | 3  | 3 |
| 2 | 3 | 5  | 2 | 7  | 2 | 8  | 5 | 12 | 3 | 1 | 0 | 17 | 2 | 5  | 3 |
| 3 | 5 | 8  | 2 | 8  | 3 | 11 | 5 | 13 | 5 | 2 | 0 | 18 | 3 | 7  | 3 |
| 4 | 7 | 11 | 2 | 9  | 4 | 14 | 5 | 14 | 7 | 3 | 0 | 19 | 4 | 9  | 3 |
| 5 | 9 | 14 | 2 | 10 | 5 | 17 | 5 | 15 | 9 | 4 | 0 | 20 | 5 | 11 | 3 |

5.12. Построить задачу, двойственную к следующей задаче ЛП:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\rightarrow \max, \\ 3x_1 - 4x_2 &\sim 1, \\ 5x_1 + 6x_2 &\approx 2, \\ -7x_1 + 8x_2 &\infty 3, \\ x_2 &\geq 0: \end{aligned}$$

|   | ~ | ≈ | ∞ |    | ~ | ≈ | ∞ |    | ~ | ≈ | ∞ |    | ~ | ≈ | ∞ |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| 1 | ≥ | = | ≤ | 6  | = | ≤ | ≤ | 11 | ≥ | ≤ | ≤ | 16 | = | = | ≥ |
| 2 | ≥ | ≥ | ≤ | 7  | ≤ | ≥ | ≤ | 12 | = | ≤ | ≥ | 17 | ≥ | = | ≥ |
| 3 | ≥ | ≤ | ≥ | 8  | ≤ | ≤ | ≥ | 13 | ≥ | ≥ | = | 18 | ≤ | ≥ | = |
| 4 | = | ≥ | ≥ | 9  | ≤ | ≥ | ≥ | 14 | ≤ | = | ≤ | 19 | = | = | ≤ |
| 5 | ≥ | ≤ | = | 10 | ≤ | ≤ | = | 15 | = | ≥ | ≤ | 20 | ≤ | = | ≥ |

5.13. Даны задача

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\rightarrow \max, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 &\leq a, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq b, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq c, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

ее допустимые точки

$$x^1 = \left( \frac{a+4c}{7}, \frac{2a+c}{7}, 0 \right), \quad x^2 = \left( \frac{4a+c}{7}, \frac{a+2c}{7}, \frac{c-a}{2} \right),$$

а также допустимые точки

$$y^1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad y^2 = \left( \frac{5}{7}, 0, \frac{6}{7} \right)$$

двойственной задачи. Определить, имеются ли среди этих точек решения соответствующих задач:

|   | a | b  | c  | a  | b | c  | a  | b  | c | a  | b  | c  |   |    |    |
|---|---|----|----|----|---|----|----|----|---|----|----|----|---|----|----|
| 1 | 5 | 8  | 6  | 6  | 6 | 9  | 7  | 11 | 7 | 10 | 8  | 16 | 8 | 11 | 9  |
| 2 | 5 | 9  | 7  | 7  | 6 | 10 | 8  | 12 | 7 | 11 | 9  | 17 | 8 | 12 | 10 |
| 3 | 5 | 10 | 8  | 8  | 6 | 12 | 9  | 13 | 7 | 13 | 10 | 18 | 8 | 14 | 11 |
| 4 | 5 | 12 | 9  | 9  | 6 | 13 | 10 | 14 | 7 | 14 | 11 | 19 | 8 | 15 | 12 |
| 5 | 5 | 13 | 10 | 10 | 6 | 14 | 11 | 15 | 7 | 16 | 12 | 20 | 8 | 17 | 13 |

5.14. Используя теорию двойственности и геометрические построения, найти решение следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned} 3ax_1 + 11x_2 + 5bx_3 + x_4 &\rightarrow \min, \\ -3x_1 + x_2 + (2+b)x_3 - x_4 &\geq c, \\ (2+a)x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 &\geq 7, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4: \end{aligned}$$

|   | a | b | c | a  | b | c | a | b  | c | a | b | c  |   |   |   |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 4 | 6  | 2 | 1 | 1 | 11 | 3 | 1 | 3 | 16 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 7  | 2 | 2 | 3 | 12 | 3 | 2 | 2 | 17 | 4 | 2 | 4 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 8  | 2 | 3 | 2 | 13 | 3 | 3 | 4 | 18 | 4 | 3 | 1 |
| 4 | 1 | 4 | 2 | 9  | 2 | 4 | 4 | 14 | 3 | 4 | 1 | 19 | 4 | 4 | 3 |
| 5 | 1 | 5 | 4 | 10 | 2 | 5 | 1 | 15 | 3 | 5 | 3 | 20 | 4 | 5 | 2 |

5.15. Используя теорию двойственности, геометрические построения и метод исключения переменных, найти решение следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - (2+12a)x_3 + (1+6a)x_4 - 3bx_5 &\rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\
 x_1 + x_2 - (5 + 2a - 2b)x_3 + (2 + a - b)x_4 - (b - 2)x_5 & \leq -b, \\
 x_1 + x_2 - 14x_3 + 7x_4 + 3x_5 & \leq 4, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, & x_5 \geq 0.
 \end{aligned}$$

|   | a | b | a  | b | a | b  | a  | b |
|---|---|---|----|---|---|----|----|---|
| 1 | 4 | 3 | 6  | 5 | 3 | 11 | 6  | 3 |
| 2 | 5 | 4 | 7  | 6 | 4 | 12 | 7  | 4 |
| 3 | 6 | 5 | 8  | 7 | 5 | 13 | 8  | 5 |
| 4 | 7 | 6 | 9  | 8 | 6 | 14 | 9  | 6 |
| 5 | 8 | 7 | 10 | 9 | 7 | 15 | 10 | 7 |

5.16. Найти все решения следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned}
 (a - 4b)x_1 - 3ax_2 + 8x_3 - 4ax_4 & \rightarrow \max, \\
 -(b - 1)x_1 + (b - 3)x_2 + x_3 + (b - 4)x_4 & \leq -1, \\
 (a - 4)x_1 - ax_2 + 4x_3 - ax_4 & \leq -c, \\
 x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.
 \end{aligned}$$

При этом указать те решения, которые являются вершинами допустимого множества:

|   | a | b | c | a  | b | c | a | b  | c | a | b | c  |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|
| 1 | 3 | 5 | 4 | 6  | 3 | 6 | 4 | 11 | 2 | 6 | 3 | 16 |
| 2 | 3 | 5 | 2 | 7  | 3 | 6 | 2 | 12 | 1 | 5 | 4 | 17 |
| 3 | 2 | 5 | 1 | 8  | 3 | 6 | 3 | 13 | 1 | 5 | 2 | 18 |
| 4 | 2 | 5 | 2 | 9  | 2 | 6 | 4 | 14 | 1 | 5 | 3 | 19 |
| 5 | 2 | 5 | 3 | 10 | 2 | 6 | 2 | 15 | 1 | 6 | 4 | 20 |

5.17. Пряжильная фабрика для производства двух видов пряжи использует три типа сырья — чистую шерсть, капрон и акрил. В табл. 3 указаны нормы расхода сырья, его общее количество, которое может быть использовано фабрикой в течение года, и прибыль от реализации тонны пряжи каждого вида.

Таблица 3

| Тип сырья                            | Нормы расхода сырья на 1 т пряжи (т) |       | Количество сырья (т) |
|--------------------------------------|--------------------------------------|-------|----------------------|
|                                      | Вид 1                                | Вид 2 |                      |
| Шерсть                               | 0,5                                  | 0,2   | 600                  |
| Капрон                               | <i>a</i>                             | 0,6   | <i>b</i>             |
| Акрил                                | 0,5 — <i>a</i>                       | 0,2   | <i>c</i>             |
| Прибыль от реализации 1 т пряжи (р.) | 1100                                 | 900   |                      |

Требуется составить годовой план производства пряжи с целью максимизации суммарной прибыли:

|   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|---|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1 | 0,1      | 620      | 500      | 6  | 0,1      | 870      | 510      | 11 | 0,2      | 710      | 400      | 16 | 0,3      | 690      | 300      |
| 2 | 0,1      | 730      | 500      | 7  | 0,1      | 790      | 520      | 12 | 0,2      | 880      | 410      | 17 | 0,3      | 720      | 300      |
| 3 | 0,1      | 840      | 500      | 8  | 0,2      | 920      | 400      | 13 | 0,2      | 810      | 410      | 18 | 0,3      | 750      | 300      |
| 4 | 0,1      | 650      | 510      | 9  | 0,2      | 850      | 400      | 14 | 0,2      | 740      | 410      | 19 | 0,3      | 780      | 300      |
| 5 | 0,1      | 760      | 510      | 10 | 0,2      | 780      | 400      | 15 | 0,3      | 660      | 300      | 20 | 0,3      | 800      | 300      |

5.18. Нефтеперерабатывающий завод может использовать две различные технологии перегонки нефти для производства бензина, керосина и солярового масла. В табл. 4

Таблица 4

| Наименование продукции         | Выход продукции (т) |              | Стоимость 1 т готового продукта (р.) | Суточный объем газа (т) |
|--------------------------------|---------------------|--------------|--------------------------------------|-------------------------|
|                                | Технология 1        | Технология 2 |                                      |                         |
| Бензин                         | 0,6                 | 0,3          | 100                                  | 117                     |
| Керосин                        | 0,1                 | 0,3          | 50                                   | 54                      |
| Соляровое масло                | —                   | 0,3          | 20                                   |                         |
| Отходы                         | 0,3                 | 0,1          |                                      |                         |
| Издержки производства (р.)     | <i>a</i>            | <i>b</i>     |                                      |                         |
| Загрузка оборудования (маш.-ч) | 0,2                 | 0,05         |                                      |                         |

приведены данные, показывающие выход продукции, отходы, издержки производства (стоимость нефти, заработная плата, амортизация и т. п.) и загрузку оборудования в расчете на 1 т переработанной нефти. Кроме того, указаны стоимость 1 т готовой продукции и суточный объем государственного заказа, который необходимо удовлетворить.

Ресурс оборудования составляет 75 маш.-ч в сутки. Все отходы должны пройти через очистные сооружения, производительность которых составляет  $c$  т/сут. Поставки нефти и спрос на всю продукцию завода неограничены.

Требуется составить суточный план производства с целью максимизации прибыли:

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 13  | 37  | 130 | 6  | 21  | 39  | 135 | 11 | 37  | 43  | 140 | 16 | 39  | 45  | 145 |
| 2 | 15  | 37  | 135 | 7  | 23  | 39  | 140 | 12 | 39  | 45  | 145 | 17 | 31  | 45  | 130 |
| 3 | 17  | 37  | 140 | 8  | 25  | 39  | 145 | 13 | 37  | 45  | 130 | 18 | 37  | 45  | 135 |
| 4 | 19  | 37  | 145 | 9  | 29  | 41  | 130 | 14 | 35  | 45  | 135 | 19 | 35  | 45  | 140 |
| 5 | 21  | 37  | 130 | 10 | 31  | 41  | 135 | 15 | 33  | 45  | 140 | 20 | 33  | 45  | 145 |

5.19. Цех выпускает три вида деталей, которые изготавливаются на двух станках. На рис. 21 показана технологическая схема изготовления детали каждого вида с

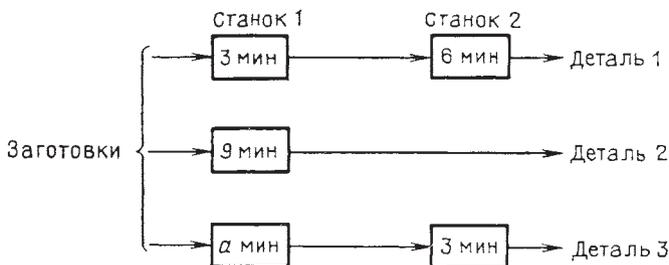


Рис. 21

указанием времени ее обработки на станках. Задан суточный ресурс рабочего времени каждого станка:  $b$  мин для станка 1,  $c$  мин для станка 2. Стоимость одной детали вида 1, 2 и 3 составляет 3, 1 и 2 р. соответственно. Требуется составить суточный план производства де-

талей с целью максимизации стоимости выпущенной продукции:

| a b c |   |         | a b c |   |         | a b c |   |         | a b c |   |         |
|-------|---|---------|-------|---|---------|-------|---|---------|-------|---|---------|
| 1     | 3 | 600 900 | 6     | 5 | 840 450 | 11    | 5 | 870 900 | 16    | 4 | 870 450 |
| 2     | 3 | 960 600 | 7     | 3 | 660 900 | 12    | 5 | 930 450 | 17    | 5 | 630 270 |
| 3     | 3 | 510 750 | 8     | 3 | 960 510 | 13    | 3 | 720 900 | 18    | 3 | 600 750 |
| 4     | 4 | 690 450 | 9     | 4 | 600 900 | 14    | 3 | 960 420 | 19    | 4 | 720 900 |
| 5     | 5 | 660 900 | 10    | 4 | 780 450 | 15    | 4 | 660 900 | 20    | 4 | 750 360 |

5.20. Для производства трех видов изделий ( $A, B$  и  $C$ ) используется сырье типа I, II и III, причем закупки сырья типа I и II ограничены возможностями поставщиков. В табл. 5 приведены нормы затрат сырья, цены на сырье и на изделия, а также ограничения по закупке сырья.

Таблица 5

| Тип сырья                | Цена 1 кг сырья (р.) | Нормы затрат сырья на одно изделие (кг) |           |   | Ограничения по закупке сырья (кг) |
|--------------------------|----------------------|---|-----------|---|-----------------------------------|
|                          |                      | A                                       | B         | C |                                   |
| I                        | 2                    | 1                                       | 3         | a | 3000                              |
| II                       | 1                    | 4                                       | 1         | 3 | —                                 |
| III                      | b                    | 6                                       | 5         | 2 | 3320                              |
| Цена одного изделия (р.) |                      | $6b + 12$                               | $5b + 22$ | c |                                   |

Требуется определить план производства продукции с целью максимизации прибыли:

| a b c |   |      | a b c |   |      | a b c |   |      | a b c |   |      |
|-------|---|------|-------|---|------|-------|---|------|-------|---|------|
| 1     | 2 | 1 17 | 6     | 3 | 1 22 | 11    | 3 | 3 26 | 16    | 4 | 2 27 |
| 2     | 2 | 2 19 | 7     | 3 | 2 23 | 12    | 3 | 4 26 | 17    | 4 | 3 28 |
| 3     | 2 | 3 21 | 8     | 3 | 2 24 | 13    | 4 | 1 25 | 18    | 4 | 3 30 |
| 4     | 2 | 4 23 | 9     | 3 | 2 25 | 14    | 4 | 1 27 | 19    | 4 | 4 30 |
| 5     | 3 | 1 21 | 10    | 3 | 3 25 | 15    | 4 | 2 26 | 20    | 4 | 4 32 |

5.21. На фабрике производится ткань двух артикулов. Любая из этих тканей может изготавливаться на станках одного из двух типов.

В табл. 6 указаны: производительность станка каждого типа при изготовлении ткани артикулов 1 и 2; суммарные мощности станочного парка фабрики в расчете на одну рабочую неделю; трудовые затраты по обслуживанию станков в минутах рабочего времени на 1 ч работы станка; цена метра ткани каждого артикула.

Т а б л и ц а 6

| Тип станков           | Мощности<br>(тыс. ч) | Трудозатраты<br>(мин/ч) | Производительность (м/ч) |           |
|-----------------------|----------------------|-------------------------|--------------------------|-----------|
|                       |                      |                         | Артикул 1                | Артикул 2 |
| 1                     | 30                   | $a$                     | 20                       | 15        |
| 2                     | $b$                  | 6                       | 12                       | 6         |
| Цена 1 м ткани<br>(р) |                      |                         | 18                       | $c$       |

Известно также, что недельный ресурс трудозатрат на обслуживание станков равен 6000 ч.

Требуется составить недельный план выпуска тканей с целью максимизации стоимости изготовленной продукции:

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 10  | 30  | 26  | 6  | 10  | 40  | 28  | 11 | 9   | 30  | 30  | 16 | 8   | 30  | 28  |
| 2 | 10  | 30  | 28  | 7  | 10  | 40  | 30  | 12 | 9   | 30  | 32  | 17 | 8   | 30  | 30  |
| 3 | 10  | 30  | 30  | 8  | 10  | 40  | 32  | 13 | 9   | 40  | 28  | 18 | 8   | 30  | 32  |
| 4 | 10  | 30  | 32  | 9  | 9   | 30  | 26  | 14 | 9   | 40  | 30  | 19 | 8   | 40  | 28  |
| 5 | 10  | 40  | 26  | 10 | 9   | 30  | 28  | 15 | 9   | 40  | 32  | 20 | 8   | 40  | 30  |

5.22. Строителям требуются комплекты досок, каждый из которых состоит из  $a$  досок длиной 1,5 м и  $b$  досок длиной 0,6 м. Как следует распилить  $c$  четырехметровых досок, чтобы получить наибольшее количество указанных комплектов?

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 1   | 3   | 660 | 6  | 2   | 5   | 770 | 11 | 3   | 7   | 960 | 16 | 4   | 9   | 630 |
| 2 | 1   | 3   | 720 | 7  | 2   | 5   | 880 | 12 | 3   | 8   | 510 | 17 | 4   | 9   | 660 |
| 3 | 1   | 3   | 780 | 8  | 2   | 5   | 990 | 13 | 3   | 8   | 680 | 18 | 4   | 9   | 690 |
| 4 | 1   | 3   | 840 | 9  | 3   | 7   | 640 | 14 | 3   | 8   | 850 | 19 | 4   | 9   | 720 |
| 5 | 2   | 5   | 660 | 10 | 3   | 7   | 800 | 15 | 4   | 9   | 600 | 20 | 4   | 9   | 750 |

## ЗАДАЧИ

Задачи 5.1—5.34 посвящены доказательству сформулированных выше основных фактов теории линейного программирования и примерам их использования для отыскания решений задач ЛП небольшой размерности.

5.1. Доказать теорему 5.1.

5.2. Преобразовать к основной, стандартной и канонической формам задачу ЛП

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 5x_3 &\rightarrow \max, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4, \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 &\geq 2, \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 5, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

5.3. Преобразовать задачу ЛП к канонической форме так, чтобы число переменных в новой задаче не превышало трех:

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &\rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &\leq 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 6, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= -3, \\ x_3 &\geq 0, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

5.4. Доказать теорему 5.2.

5.5. Доказать теорему 5.3.

5.6. Доказать теорему 5.4.

5.7. Доказать теорему 5.5.

5.8. Используя геометрические построения, найти решения следующих задач ЛП \*):

|   |   |
|---|---|
| <p>а) <math>x_1 + 2x_2 \rightarrow \max</math><br/> <math>3x_1 - 2x_2 \leq 6,</math><br/> <math>-x_1 + 2x_2 \leq 4,</math><br/> <math>3x_1 + 2x_2 \leq 12,</math><br/> <math>x_1 \geq 0;</math></p> | <p>б) <math>2x_1 + x_2 \rightarrow \max,</math><br/> <math>-x_1 + x_2 \leq 2,</math><br/> <math>x_1 + 2x_2 \leq 7,</math><br/> <math>4x_1 - 3x_2 \leq 6,</math><br/> <math>x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;</math></p> |
| <p>в) <math>7x_1 + 5x_2 \rightarrow \min,</math><br/> <math>x_1 + x_2 \geq 3,</math><br/> <math>x_1 + 5x_2 \geq 5,</math><br/> <math>2x_1 + x_2 \geq 4;</math></p>                                  | <p>г) <math>-x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,</math><br/> <math>2x_1 - 3x_2 \geq 0,</math><br/> <math>x_1 - x_2 \leq 3,</math><br/> <math>2x_1 - x_2 = 4.</math></p>  |

---

\*) См. подстрочное примечание к упражнению 5.3.

5.9. Используя метод исключения переменных и геометрические построения, найти решения следующих задач ЛП:

- а)  $8x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max,$   
 $-x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4,$   
 $7x_1 - 2x_3 \leq 16,$   
 $2x_1 - x_2 - x_3 = 2,$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$
- б)  $x_1 + x_3 - 7x_4 + x_5 \rightarrow \max,$   
 $x_1 - x_2 + 6x_4 - 2x_5 = -7,$   
 $x_2 - x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 24,$   
 $x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 32,$   
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5;$
- в)  $-x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 \rightarrow \min,$   
 $x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + 2x_5 = -5,$   
 $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2,$   
 $-2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 6,$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$
- г)  $x_1 + x_2 + 2x_3 - 9x_4 \rightarrow \max,$   
 $2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \leq 6,$   
 $x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 5,$   
 $5x_1 + x_2 - 3x_4 = 11,$   
 $3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7,$   
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.$

5.10. Доказать, что указанные точки  $x^*$  являются решениями соответствующих задач ЛП:

- а)  $7x_1 - 5x_2 + x_4 \rightarrow \max,$   
 $5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq -5,$   
 $x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 14,$   
 $x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 3,$   
 $x^* = (1, 2, -2, 4);$
- б)  $-12x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 \rightarrow \max,$   
 $-3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 \leq 10,$   
 $-x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \leq -3,$   
 $2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7,$   
 $x_2 \geq 0, x_4 \geq 0,$   
 $x^* = (1, 0, -1, 3);$
- в)  $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \rightarrow \max,$   
 $-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 3,$   
 $x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq -1,$   
 $3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \leq 7,$   
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4,$   
 $x^* = (1, 2, 0, 0);$

$$\begin{aligned}
 \text{г) } & x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 9, \\
 & x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5, \\
 & x^* = (3, 2, 0, 0, 4).
 \end{aligned}$$

5.11. Определить, имеются ли среди указанных точек решения соответствующих задач ЛП:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & -2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 3, \\
 & x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \leq -1, \\
 & -5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq -3, \\
 & x^1 = (1, 3, 0, 3), \\
 & x^2 = (0, -1, 3, 2), \\
 & x^3 = (5, 0, -6, 0);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 \rightarrow \min, \\
 & -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 1, \\
 & x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq -3, \\
 & 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\
 & x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \\
 & x^1 = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\
 & x^2 = (1, 0, 0, -2), \\
 & x^3 = (0, 0, 0, 1);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } & -x_1 + 3x_3 + 7x_4 \rightarrow \max, \\
 & 5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 9, \\
 & -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 9, \\
 & -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq -1, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \\
 & x^1 = (1, 1, 0, 1), \\
 & x^2 = (2, 0, 1, 0), \\
 & x^3 = \left(\frac{5}{12}, 2, 0, \frac{11}{12}\right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{г) } & -3x_2 + 4x_3 - 4x_4 - 6x_5 \rightarrow \max, \\
 & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 1, \\
 & x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\
 & 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - 7x_5 = 2, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5, \\
 & x^1 = (1, 1, 0, 0, 2), \\
 & x^2 = (1, 0, 2, 1, 1), \\
 & x^3 = (0, 1, 1, 0, 0).
 \end{aligned}$$

5.12. Найти все значения параметра  $a$ , при которых указанные точки  $x^*$  являются решениями соответствующих задач ЛП:

- а)  $ax_1 + x_2 \rightarrow \max,$   
 $2x_1 + x_2 \leq 10,$   
 $x_1 + 2x_2 \leq 14,$   
 $4x_1 + x_2 \leq 16,$   
 $x^* = (2, 6);$
- б)  $x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$   
 $ax_1 + x_2 \geq 4,$   
 $2x_1 - x_2 \leq 2,$   
 $3ax_1 + 2x_2 \leq 8,$   
 $x^* = (0, 4);$
- в)  $-x_1 + 7ax_2 + 2ax_3 \rightarrow \max,$   
 $-3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 0,$   
 $2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5,$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 2,$   
 $x_2 \geq 0,$   
 $x^* = (-1, 0, 3);$
- г)  $4x_1 - x_2 + ax_3 \rightarrow \max,$   
 $5ax_1 - 4x_2 + x_3 \leq 1,$   
 $4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3,$   
 $3ax_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 7,$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$   
 $x^* = (0, 1, 3).$

5.13. Найти решения следующих задач ЛП методом полного перебора вершин:

- а)  $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max,$   
 $x_1 - x_2 + x_3 \leq 4,$   
 $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3,$   
 $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6,$   
 $-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -3;$
- б)  $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \min,$   
 $x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12,$   
 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2,$   
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4;$
- в)  $x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max,$   
 $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1,$   
 $x_1 + x_2 - x_3 = 0,$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$
- г)  $x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 \rightarrow \max,$   
 $-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -4,$   
 $3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \leq -3,$   
 $x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4,$   
 $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

5.14. Используя теорему 5.5 и геометрические построения, найти решения следующих задач ЛП:

- а)  $5x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max,$   
 $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1,$   
 $-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6,$   
 $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4,$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \max, \\
 & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2, \\
 & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4, \\
 & x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 5, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } & 13x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \max, \\
 & 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 6, \\
 & -3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 2, \\
 & 4x_1 + x_2 - 7x_3 \leq -2, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{г) } & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow \max, \\
 & -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 10, \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9, \\
 & 4x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 2, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

5.15. Доказать теорему 5.6.

5.16. Доказать теоремы 5.7 и 5.8.

5.17. Доказать теорему 5.9.

5.18. Доказать теорему 5.11.

5.19. Построить задачи, двойственные к следующим задачам ЛП:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & 17x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 - 8x_5 \rightarrow \max, \\
 & 3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 + 7x_5 \leq 11, \\
 & x_1 - 5x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -8, \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 4, \\
 & x_1 \geq 0, x_4 \geq 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \rightarrow \min, \\
 & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 \geq -5, \\
 & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 1, \\
 & -2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 \leq 3;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } & 3x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\
 & -x_1 + x_3 - x_4 = 5, \\
 & 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 7, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{г) } & 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\
 & 4x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 9, \\
 & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 6x_5 = 10, \\
 & -x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 1, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.
 \end{aligned}$$

5.20. Используя теорию двойственности и геометрические построения, найти решения следующих задач ЛП:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & 7x_1 + x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 6, \\
 & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq -1, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4;
 \end{aligned}$$

- б)  $x_1 + x_3 + x_5 \rightarrow \max,$   
 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 \leq 6,$   
 $x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 5,$   
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5;$
- в)  $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \rightarrow \min,$   
 $-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1,$   
 $-4x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -1,$   
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5;$
- г)  $6x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \rightarrow \max,$   
 $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 0,$   
 $2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1,$   
 $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

5.21. Используя теорию двойственности, геометрические построения и метод исключения переменных, найти решения следующих задач ЛП:

- а)  $2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max,$   
 $-2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \leq -2,$   
 $x_1 - x_2 + x_3 \leq 1,$   
 $3x_1 + x_2 + x_4 = 5,$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0;$
- б)  $-x_1 + 3x_2 + 31x_3 + 25x_4 - 4x_5 \rightarrow \max,$   
 $x_1 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 2,$   
 $x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1,$   
 $x_1 + x_2 + 10x_3 + 8x_4 + x_5 \leq 5,$   
 $2x_1 - x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 5x_5 \leq 0,$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_5 \geq 0;$
- в)  $3x_1 - 2x_2 - x_3 \rightarrow \max,$   
 $3x_2 + x_3 \geq -2,$   
 $x_1 + x_2 \leq 3,$   
 $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -1,$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$
- г)  $4x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 2x_4 \rightarrow \max,$   
 $-3x_2 - 4x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 1,$   
 $4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 3x_5 = -4,$   
 $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = -1,$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

5.22. Найти все решения следующих задач ЛП (при этом указать те решения, которые являются вершинами допустимых множеств):

- а)  $10x_1 + 17x_2 + 29x_3 \rightarrow \min,$   
 $-2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 = 1,$   
 $5x_1 + 5x_2 + 10x_3 - x_4 = 2,$   
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4;$
- б)  $2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \min,$   
 $2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_5 \leq -2,$

$$\begin{aligned}
 & -7x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \leq -7, \\
 & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 7, \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0; \\
 \text{в)} & x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\
 & 4x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -2, \\
 & -3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq -1, \\
 & x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4; \\
 \text{г)} & 10x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 \rightarrow \min, \\
 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 1, \\
 & 5x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2, \\
 & x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.
 \end{aligned}$$

5.23. Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сорта А и Б, смешивая три ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай. В табл. 7 приведены нормы расхода ингредиентов, объем запасов каждого ингредиента и прибыль от реализации 1 т чая сорта А и Б.

Таблица 7

| Ингредиенты                              | Нормы расхода (т/т) |     | Объем запасов (т) |
|--|---------------------|-----|-------------------|
|  | А                   | Б   |                   |
| Индийский чай                            | 0,5                 | 0,2 | 600               |
| Грузинский чай                           | 0,2                 | 0,6 | 870               |
| Краснодарский чай                        | 0,3                 | 0,2 | 430               |
| Прибыль от реализации 1 т продукции (р.) | 320                 | 290 |                   |

Требуется составить план производства чая сорта А и Б с целью максимизации суммарной прибыли.

5.24. Нефтеперерабатывающий завод производит за месяц 1 500 000 л алкилата, 1 200 000 л крекинг-бензина и 1 300 000 л изопентона. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1:1:1 и 3:1:2 получается бензин сорта А и Б соответственно. Стоимость 1000 л бензина сорта А и Б соответственно равна 90 р. и 120 р.

Определить месячный план производства бензина сорта А и Б, максимизирующий стоимость выпущенной продукции.

5.25. Рацион кормления коров на молочной ферме может состоять из трех продуктов — сена, силоса и концентратов. Эти продукты содержат питательные вещества — белок, кальций и витамины. Численные данные представлены в табл. 8. В расчете на одну корову

суточные нормы потребления белка и кальция составляют не менее 2000 и 210 г соответственно. Потребление витаминов строго дозировано и должно быть равно 87 мг в сутки.

Т а б л и ц а 8

| Продукты    | Питательные вещества |                |                  |
|-------------|----------------------|----------------|------------------|
|             | Белок (г/кг)         | Кальций (г/кг) | Витамины (мг/кг) |
| Сено        | 50                   | 10             | 2                |
| Силос       | 70                   | 6              | 3                |
| Концентраты | 180                  | 3              | 1                |

Составить самый дешевый рацион, если стоимость 1 кг сена, силоса и концентрата равна соответственно 1,5, 2 и 6 к.

5.26. В области имеются два цементных завода и три потребителя их продукции — домостроительных комбината. В табл. 9 указаны суточные объемы производства цемента, суточные потребности в нем комбинатов и стоимость перевозки 1 т цемента от каждого завода к каждому комбинату.

Т а б л и ц а 9

| Заводы | Производство цемента (т/сут)  | Стоимость перевозки 1 т цемента (р.) |            |            |
|--------|-------------------------------|--------------------------------------|------------|------------|
|        |                               | Комбинат 1                           | Комбинат 2 | Комбинат 3 |
| 1      | 40                            | 10                                   | 15         | 25         |
| 2      | 60                            | 20                                   | 30         | 30         |
|        | Потребности в цементе (т/сут) | 50                                   | 20         | 30         |

Требуется составить план суточных перевозок цемента с целью минимизации транспортных расходов.

5.27. Перед проектировщиками автомобиля поставлена задача сконструировать самый дешевый кузов, используя листовой металл, стекло и пластмассу. Основные характеристики материалов представлены в табл. 10.

Общая поверхность кузова (вместе с дверьми и окнами) должна составить  $14 \text{ м}^2$ ; из них не менее  $4 \text{ м}^2$  и не более  $5 \text{ м}^2$  следует отвести под стекло. Масса кузова не должна превышать 150 кг. Сколько металла, стекла и пластмассы должен использовать наилучший проект?

Таблица 10

| Характеристики                 | Материалы |        |            |
|--------------------------------|-----------|--------|------------|
|                                | Металл    | Стекло | Пластмасса |
| Стоимость (р /м <sup>2</sup> ) | 25        | 20     | 40         |
| Масса (кг/м <sup>2</sup> )     | 10        | 15     | 3          |

5.28. В металлургический цех в качестве сырья поступает латунь (сплав меди с цинком) четырех типов с содержанием цинка 10, 20, 25 и 40 % по цене 10, 30, 40 и 60 к. за 1 кг соответственно. В каких пропорциях следует переплавлять это сырье в цехе, чтобы получить сплав (латунь), содержащий 30 % цинка и при этом самый дешевый?

5.29. Цех выпускает три вида деталей, которые изготавливаются на трех станках. На рис. 22 показана технологическая схема изготовления детали каждого вида с учета

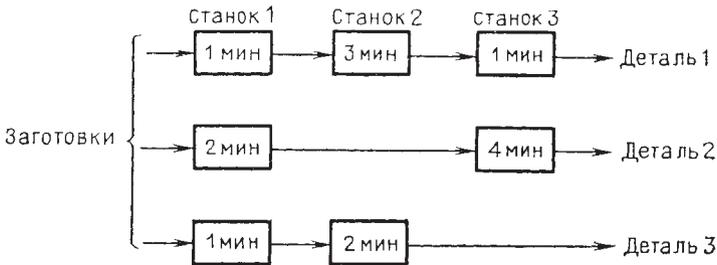


Рис. 22

занием времени ее обработки на станках. Суточный ресурс рабочего времени станков 1, 2 и 3 составляет соответственно 890, 920 и 840 мин. Стоимость одной детали вида 1, 2 и 3 равна соответственно 3, 1 и 2 р.

Требуется составить суточный план производства с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

5.30. Объединение «Комфорт» производит холодильники, газовые плиты, морозильные шкафы и электропечи по цене 200, 180, 250 и 100 р. соответственно. Постоянным фактором, ограничивающим объемы производства, является фиксированная величина трудовых ресурсов — 12 000 человеко-часов в месяц. Выяснилось, однако, что в ближайший месяц дефицитной будет и ли-

стовая сталь для корпусов указанных изделий, поскольку поставщики смогут обеспечить лишь 7000 м<sup>2</sup> этого материала.

Требуется составить план производства на данный месяц, с тем чтобы максимизировать стоимость выпущенной продукции. Известно, что для изготовления холодильника требуется 2 м<sup>2</sup> листовой стали и 3 чел.-ч рабочего времени, для газовой плиты — соответственно 1,5 м<sup>2</sup> и 3 чел.-ч, для морозильного шкафа — 3 м<sup>2</sup> и 4 чел.-ч, для электропечи — 1 м<sup>2</sup> и 2 чел.-ч.

**5.31.** Участник экспедиции «Северный полюс» укладывает рюкзак, и ему требуется решить, какие положить продукты. В его распоряжении имеются мясо, мука, сухое молоко и сахар. В рюкзаке для продуктов осталось лишь 45 дм<sup>3</sup> объема, и нужно, чтобы суммарная масса продуктов не превосходила 35 кг. Врач экспедиции рекомендовал, чтобы мяса (по массе) было больше муки по крайней мере в два раза, муки не меньше молока, а молока по крайней мере в восемь раз больше, чем сахара. Сколько и каких продуктов нужно положить в рюкзак, с тем чтобы суммарная калорийность продуктов была наибольшей? Характеристики продуктов приведены в табл. 11.

Таблица 11

| Характеристики              | Продукты |      |        |       |
|-----------------------------|----------|------|--------|-------|
|                             | Мясо     | Мука | Молоко | Сахар |
| Объем (дм <sup>3</sup> /кг) | 1        | 1,5  | 2      | 1     |
| Калорийность (ккал/кг)      | 1500     | 5000 | 5000   | 4000  |

**5.32.** На мебельной фабрике требуется раскроить 5000 прямоугольных листов фанеры размером 4×5 м каждый, с тем чтобы получить два вида прямоугольных деталей: деталь *A* должна иметь размер 2×2 м, деталь *B* — размер 1×3 м. Необходимо, чтобы деталей *A* оказалось не меньше, чем деталей *B*. Каким образом следует произвести раскрой, чтобы получить минимальное (по площади) количество отходов?

**5.33.** Для серийного производства некоторого изделия требуются комплекты заготовок профильного проката. Каждый комплект состоит из двух заготовок длиной 1800 мм и пяти заготовок длиной 700 мм. Как следует раскроить 770 полос проката стандартной длины 6000 мм,

чтобы получить наибольшее количество указанных комплектов?

5.34. Колхоз может засеять свои поля пшеницей четырех сортов, урожайность которых зависит от того, будет ли лето дождливым или сухим. Соответствующие данные приведены в табл. 12. Какие сорта пшеницы

Т а б л и ц а 12

| Погода    | Урожайность (ц/га) |        |        |        |
|-----------|--------------------|--------|--------|--------|
|           | Сорт 1             | Сорт 2 | Сорт 3 | Сорт 4 |
| Дождливая | 25                 | 20     | 30     | 15     |
| Сухая     | 15                 | 20     | 10     | 40     |

и в какой пропорции следует сеять, чтобы максимизировать гарантированный (не зависящий от погоды) урожай?

В задачах 5.35—5.112 мы продолжим изложение теоретических основ линейного программирования. Отметим, что многие из приводимых ниже утверждений являются следствиями соответствующих фактов о системах линейных неравенств из § 4. Поэтому для активной работы с последующим материалом необходимо основательно освоить содержание § 4.

Ради краткости задачу ЛП будем называть *допустимой* (*разрешимой*), если ее допустимое множество (множество решений) не пусто.

5.35. Рассмотрим допустимую задачу ЛП при наличии только ограничений-равенств:

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max, \quad Ax = b.$$

Доказать, что множество ее решений либо пусто, либо совпадает с допустимым множеством, причем последнее имеет место в том и только том случае, если вектор  $c$  есть линейная комбинация строк матрицы  $A$ , т. е.  $c = yA$  при некотором векторе  $y$ .

Таким образом, задача ЛП без ограничений-неравенств большого интереса не представляет. В то же время только такая задача ЛП является по своей форме классической задачей на условный экстремум. Отсюда понятно, почему классические методы анализа экстремальных задач оказываются непригодными для задач ЛП, в результате чего здесь приходится использовать иной математический аппарат — теорию линейных неравенств.

**5.36.** Рассмотрим основную задачу ЛП (5.1) при  $b = 0$ . Доказать, что множество ее решений либо содержит точку  $x^* = 0$ , либо пусто; соответственно ее значение  $f^*$  равно либо 0, либо  $\infty$ .

**5.37.** Пусть основная задача ЛП (5.1) допустима. Доказать, что ее целевая функция постоянна на допустимом множестве в том и только том случае, если существуют такие векторы  $y^1 \geq 0$  и  $y^2 \geq 0$ , что  $y^1 A = c$ ,  $y^2 A = -c$ ,  $\langle y^1 + y^2, b \rangle = 0$ .

**5.38.** Доказать, что стандартная задача ЛП (5.4), где  $b \geq 0$ , разрешима, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) в матрице  $A$  имеется по крайней мере одна положительная строка;

б) матрица  $A$  неотрицательна и в ней нет нулевых столбцов.

**5.39.** Доказать, что стандартная задача ЛП на минимум

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \min, \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0,$$

где  $c \geq 0$ , разрешима, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) в матрице  $A$  имеется по крайней мере один положительный столбец;

б) матрица  $A$  неотрицательна и в ней нет нулевых строк.

**5.40.** Пусть при любом векторе  $c \in \mathbf{R}^n$  основная задача ЛП (5.1) разрешима. Доказать, что ее допустимое множество ограничено.

**5.41.** Привести примеры взаимодвойственных задач ЛП, у каждой из которых допустимое множество

а) пусто;

б) не ограничено.

**5.42\*.** Пусть  $X$  и  $Y$  — допустимые множества основной задачи ЛП (5.1) и двойственной к ней задачи (см. табл. 2). Доказать, что эти множества не могут быть одновременно непустыми и ограниченными; более того, при любом ненулевом векторе  $d \in \mathbf{R}_+^m$  справедливы следующие утверждения:

а) если  $X$  непусто и ограничено, то  $\sup_Y \langle d, y \rangle = \infty$ ;

б) если  $Y$  непусто и ограничено, то  $\inf_X \langle d, Ax \rangle = -\infty$ .

**5.43.** Пусть допустимые множества  $X$  и  $Y$  взаимодвойственных задач (5.25) и (5.26) непусты и ограничены. Доказать, что тогда

а) ограничения-неравенства в этих задачах отсутствуют, т. е.  $k = 0$ ,  $s = 0$ ;

б) число переменных совпадает с числом неизвестных, т. е.  $n = m$ ;

в) квадратная матрица  $A = (a_{ij})$  невырождена;

г) множества  $X$  и  $Y$  одноточечны.

5.44\*. Пусть  $\Gamma$  — грань полиэдра  $X$  из (5.2) (см. 4.51). Доказать, что  $\Gamma$  является множеством решений задачи (5.1) при некотором  $c \in \mathbb{R}^n$ .

5.45. Ограничение-неравенство в разрешимой задаче ЛП принято называть *закрепленным*, если оно выполняется как равенство для любого решения задачи, и *свободным* в противном случае.

Пусть  $X^*$  — непустое множество решений основной задачи ЛП (5.1),  $I^*$  — множество номеров ее закрепленных ограничений:

$$I^* = \{i, 1 \leq i \leq m \mid \langle a_i, x \rangle = b_i, \text{ при всех } x \in X^*\}.$$

Доказать, что существует точка  $\bar{x} \in X^*$ , для которой  $I(\bar{x}) = I^*$ , т. е. активными в  $\bar{x}$  являются только закрепленные ограничения задачи.

Так, на рис. 19 указанным свойством обладает любая внутренняя точка отрезка-множества решений задачи.

5.46\*. Доказать, что непустое множество  $X^*$  решений задачи (5.1) является гранью ее допустимого множества  $X$ ; при этом размерность  $X^*$  (см. 4.25) вычисляется по формуле  $\dim X^* = n - \text{rang } A_{I^*}$ , где  $I^*$  взято из 5.45. В частности,  $X^*$  состоит из одной точки (решение задачи (5.1) единственно) в том и только том случае, если  $\text{rang } A_{I^*} = n$ .

5.47\*. Доказать принцип граничных решений для задачи ЛП (обобщение теоремы 5.5).

Если множество решений основной задачи ЛП (5.1) непусто, то оно содержит грань допустимого множества задачи, имеющую размерность  $n - \text{rang } A$  и являющуюся аффинным множеством; иными словами, существует такое множество  $I \subset \{1, \dots, m\}$ , что  $\text{rang } A_I = \text{rang } A$ , система  $A_I x = b_I$  совместна и любое ее решение служит решением задачи (5.1).

5.48\*. Доказать теорему об очистке задачи ЛП.

Пусть основная задача ЛП (5.1) разрешима. Тогда существует такое множество  $I \subset \{1, \dots, m\}$ , что  $\text{rang } A_I = |I|$  и любое решение  $x^*$  задачи (5.1) является решением задачи

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max, \quad A_I x \leq b_I, \quad (5.30)$$

при этом  $A_I x^* = b_I$ . Верно и обратное: если  $x^*$  — решение задачи (5.30) и  $x^* \in X$ , то  $x^*$  — решение задачи (5.1).

Иллюстрациями к этой теореме служат рис. 23 и 24, где  $I = \{1, 3\}$  и  $I = \{1\}$  соответственно.

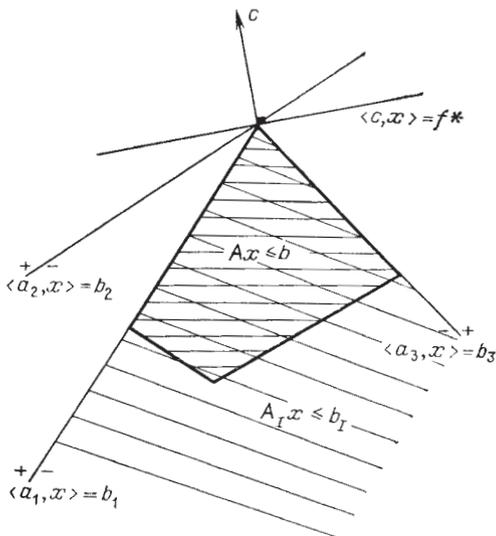


Рис. 23

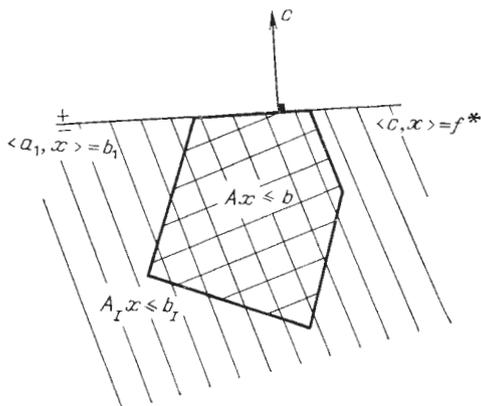


Рис. 24

5.49. Привести примеры взаимодвойственных задач ЛП, у одной из которых решение единственно, а у другой множество решений

- а) состоит более чем из одной точки, но ограничено;  
 б) не ограничено.

5.50. Привести примеры взаимодвойственных задач ЛП, у каждой из которых множество решений удовлетворяет условию а) (условию б)) из 5.49.

5.51. Привести пример взаимодвойственных задач ЛП, у одной из которых множество решений удовлетворяет условию а), а у другой — условию б) из 5.49.

5.52. Пусть множество решений основной задачи ЛП (5.1) непусто. Доказать, что это множество ограничено в том и только том случае, если система  $\langle c, x \rangle \geq 0, A_h \leq 0$  имеет лишь тривиальное решение  $h = 0$ .

5.53. Пусть  $x^*$  — решение основной задачи ЛП (5.1),  $I = I(x^*)$ . Доказать, что это решение единственно в том и только том случае, если система  $\langle c, h \rangle \geq 0, A_h \leq 0$  имеет лишь тривиальное решение  $h = 0$ .

5.54\*. Пусть основная задача ЛП (5.1) допустима. Доказать, что множество  $X^*$  ее решений непусто и ограничено в том и только том случае, если  $\text{rang } A = n$  и существует такой вектор  $y \in \mathbb{R}^m$ , что  $yA = c, y > 0$ .

5.55\*. Пусть стандартная задача ЛП (5.4) допустима. Доказать, что множество ее решений непусто и ограничено в том и только том случае, если существует такой вектор  $y \in \mathbb{R}^m$ , что  $yA > c, y \geq 0$ .

5.56\*. Пусть каноническая задача ЛП (5.5) допустима. Доказать, что множество ее решений непусто и ограничено в том и только том случае, если существует такой вектор  $y \in \mathbb{R}^m$ , что  $yA > c$ .

5.57\*. Пусть  $x^*$  — допустимая точка основной задачи ЛП (5.1). Доказать, что  $x^*$  — единственное решение этой задачи в том и только том случае, если  $\text{rang } A_{I(x^*)} = n$  и существует такое решение  $y^*$  двойственной задачи, что  $y_i^* > 0$  при всех  $i \in I(x^*)$ .

Первое условие  $\text{rang } A_{I(x^*)} = n$  означает, что  $x^*$  является вершиной допустимого множества задачи. Второе можно переформулировать так: равенство (5.20) выполнено при некоторых положительных числах  $y_i^*$  ( $i \in I(x^*)$ ). Так, на рис. 19 точка  $x^*$  не удовлетворяет первому условию, а концевые точки множества решений — второму.

5.58\*. Пусть  $x^*$  — допустимая точка канонической задачи ЛП (5.5),  $J = J(x^*)$  (см. формулу (5.5)). Доказать, что  $x^*$  — единственное решение этой задачи в том и только том случае, если  $\text{rang } A^J = |J|$  (т. е.  $x^*$  является вершиной допустимого множества задачи) и существует та-

кое решение  $y^*$  двойственной задачи, что  $\langle y^*, a^j \rangle > c_j$  при всех  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus J$ .

**5.59\*.** Доказать теорему о строгой дополняющей нежесткости для задач ЛП.

Пусть задачи (5.25) и (5.26) разрешимы. Тогда существуют такие их решения  $x^*$  и  $y^*$ , что

$$y_i^* + \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) > 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.31)$$

$$x_j^* + \left( \sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} - c_j \right) > 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad (5.32)$$

т. е. для этих решений в каждом из произведений (5.28), (5.29) в нуль обращается ровно один сомножитель. В частности, если решения задач (5.25) и (5.26) единственны, то они обязательно удовлетворяют условиям (5.31), (5.32).

Отметим, что применительно к основной задаче ЛП (5.1) и двойственной к ней последнее утверждение сразу следует из 5.57, 5.58. Условия (5.28), (5.29), (5.31), (5.32), взятые вместе, принято называть условиями строгой дополняющей нежесткости.

**5.60.** Рассмотрим взаимодвойственные задачи ЛП:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \max, & y_1 + 2y_2 &\rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\leq 1, & y_1 + 2y_2 &\geq 1, \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 2, & y_1 + 2y_2 &\geq 1, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0; & y_1 &\geq 0, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Привести примеры таких их решений, которые а) удовлетворяют; б) не удовлетворяют условиям (5.31), (5.32).

**5.61\*.** Доказать теорему о закрепленных и свободных ограничениях во взаимодвойственных задачах ЛП (см. 5.45):

Пусть задачи (5.25) и (5.26) разрешимы. Тогда в каждой из  $k + s$  пар взаимодвойственных ограничений-неравенств

$$\begin{aligned} y_i &\geq 0, & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, & i = 1, \dots, k, \\ x_j &\geq 0, & \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} &\geq c_j, & j = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

одно является закрепленным, а другое — свободным.

**5.62.** Найти закрепленные и свободные ограничения в следующих задачах ЛП:

- а)  $12x_1 + x_2 + 8x_3 \rightarrow \min,$   
 $4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1,$   
 $3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2,$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$
- б)  $21x_1 + 9x_2 - 8x_3 + 12x_4 \rightarrow \min,$   
 $-5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq -1,$   
 $-x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 \leq -3,$   
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4;$
- в)  $6x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 13x_4 \rightarrow \max,$   
 $2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 \leq 2,$   
 $3x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 \leq 4,$   
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4.$

**5.63\*.** Доказать, что решение задачи ЛП единственно в том и только том случае, если множество решений двойственной задачи является невырожденной гранью ее допустимого множества (см. 4.55).

**5.64.** Пусть задача ЛП имеет единственное решение. Следует ли отсюда, что у двойственной задачи существует такое решение, которое является невырожденной вершиной ее допустимого множества?

**5.65\*.** Единственное решение задачи ЛП называется *невырожденным* (*вырожденным*), если оно является невырожденной (вырожденной) вершиной допустимого множества задачи.

Доказать, что задача ЛП имеет невырожденное единственное решение в том и только том случае, если двойственная задача имеет невырожденное единственное решение.

**5.66.** Доказать, что если взаимодвойственные задачи ЛП имеют по единственному решению, то эти решения невырождены.

По-другому можно сказать так: если задача ЛП имеет вырожденное единственное решение, то двойственная задача имеет более одного решения. Конкретные проявления этого общего факта неоднократно встречались ранее (см. 5.22, 5.33, 5.49).

**5.67.** Доказать теорему о доминировании.

Пусть общая задача ЛП (5.25), где  $s \geq 1$ , разрешима. Предположим, что переменная  $x_r$  ( $1 \leq r \leq s$ ) является *доминируемой* в этой задаче, т. е. существуют такие чис-

ла  $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_s \geq 0, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n$ , что

$$a_{ir} \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$a_{ir} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j, \quad i = k+1, \dots, m,$$

$$c_r < \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j.$$

Тогда  $x_r^* = 0$  для любого решения  $x^*$  задачи (5.25).

Эта теорема имеет ясный экономический смысл в рамках примера 5.1: если можно указать такой набор товаров, производство которого потребует не больше всех ресурсов, чем производство единичного количества  $r$ -го товара, а стоимость этого набора будет выше стоимости единицы  $r$ -го товара, то  $r$ -й товар выпускать не следует.

**5.68.** Используя теорему о доминировании, найти решения следующих задач ЛП:

а)  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6,$$

$$-3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 0,$$

$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 \leq 0,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$$

б)  $7x_2 - 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max,$

$$x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 15,$$

$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 0,$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4;$$

в)  $x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 \rightarrow \max,$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 12x_4 \leq 6,$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 8,$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 - 7x_4 \leq 2,$$

$$2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 10x_4 \leq -10,$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

**5.69\*.** Доказать теорему Хойфмана для задачи ЛП.

Пусть  $X^*$  — непустое множество решений основной задачи ЛП (5.1),  $f^*$  — ее значение. Тогда существует такое число  $\alpha > 0$ , зависящее от  $A$  и  $c$  и не зависящее от  $b$ , что для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^m \max(0, \langle a_i, x \rangle - b_i) + \max(0, f^* - \langle c, x \rangle) \geq \alpha \rho(x, X^*),$$

где  $\rho(x, X^*) = \inf_{x^* \in X^*} \|x - x^*\|$  — расстояние от  $x$  до  $X^*$ ;  
 в частности, если  $x$  — допустимая точка задачи (5.1), то  $f^* - \langle c, x \rangle \geq \alpha \rho(x, X^*)$ .

В задачах 5.70—5.108 излагаются основы теории параметрических задач ЛП. При этом в задачах 5.70—5.78, 5.81—5.85 будем использовать следующие обозначения:

$P(s) = P(A, b, c)$  — основная задача ЛП (5.1) при данном наборе параметров  $s = (A, b, c) \in \mathcal{A}(m, n) \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ ;  
 $X(s) = X(A, b)$  — допустимое множество задачи  $P(s)$ ;  
 $I(x, s) = I(x, A, b)$  — множество номеров активных ограничений в точке  $x \in X(s)$ ;

$X^*(s)$  — множество решений задачи  $P(s)$ ;

$D(s)$  — задача, двойственная к  $P(s)$ ;

$Y(s) = Y(A, c)$  — допустимое множество задачи  $D(s)$ ;

$Y^*(s)$  — множество решений задачи  $D(s)$ ;

$F(s)$  — общее значение разрешимых задач  $P(s)$  и  $D(s)$ .

5.70. Задача  $P(s)$  называется *устойчивой*, если при любом  $s'$  из некоторой окрестности  $s$  задача  $P(s')$  имеет решение. Аналогично вводится понятие устойчивости задачи ЛП в любой другой форме записи. Убедиться, что задачи

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max, \quad x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

и

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max, \quad x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

устойчивы, а задачи

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max, \quad x_1 + x_2 \leq 1$$

и

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max, \quad x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 + x_2 \geq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

неустойчивы.

Пример второй и четвертой задач показывает, что при переходе от одной формы записи задачи ЛП к другой свойство устойчивости может быть потеряно

5.71. Доказать, что взаимодвойственные задачи ЛП устойчивы или неустойчивы одновременно.

5.72. Доказать, что взаимодвойственные задачи ЛП устойчивы в том и только том случае, если устойчивы системы, определяющие их допустимые множества (см. 4.124).

5.73\*. Доказать теорему об устойчивости задач ЛП.

Для любого  $s = (A, b, c) \in \mathcal{A}(m, n) \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$  следующие утверждения эквивалентны:

- а) задачи  $P(s)$  и  $D(s)$  устойчивы;  
 б)  $\text{rang } A = n$  и существуют такие точки  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , что  $Ax < b$ ,  $yA = c$ ,  $y > 0$ ;  
 в) множества  $X^*(s)$  и  $Y^*(s)$  непусты и ограничены.
- 5.74\***. Доказать теорему об устойчивости задач ЛП по значению и решению.

Пусть задача  $P(s)$  устойчива. Тогда

а) функция  $F(s)$  непрерывна в данной точке  $s$  (устойчивость по значению);

б) если последовательности  $\{s^h\}$  и  $\{x^h\}$  таковы, что  $\lim_{h \rightarrow \infty} s^h = s$  и  $x^h \in X^*(s^h)$ , то последовательность  $\{x^h\}$  ограничена и любая ее предельная точка принадлежит  $X^*(s)$  (устойчивость по решению).

В общих терминах теории многозначных отображений утверждение б) можно сформулировать так: отображение  $s \rightarrow X^*(s)$  локально ограничено и замкнуто в данной точке  $s$  [29, 32, 39].

**5.75.** Пусть устойчивая задача  $P(s)$  имеет единственное решение. Следует ли отсюда, что при любом  $s'$ , достаточно близком к  $s$ , задача  $P(s')$  также имеет единственное решение?

**5.76\***. Пусть задача  $P(s)$  имеет невырожденное единственное решение  $x^*(s)$  (см 5.65). Доказать, что при любом  $s'$ , достаточно близком к  $s$ , задача  $P(s')$  также имеет единственное невырожденное решение  $x^*(s')$ ; при этом  $\lim_{s' \rightarrow s} x^*(s') = x^*(s)$  и  $I(x^*(s'), s') = I(x^*(s), s)$ , т. е. номера активных ограничений в точках  $x^*(s')$  и  $x^*(s)$  совпадают.

**5.77.** Пусть задача  $P(s)$  имеет единственное решение  $x^*(s)$ ; последовательность  $\{s^h\}$  сходится к  $s$ , и при любом  $h$  задача  $P(s^h)$  имеет невырожденное единственное решение  $x^*(s^h)$ . Следует ли отсюда, что  $\lim_{h \rightarrow \infty} x^*(s^h) = x^*(s)$ ?

**5.78\***. Пусть множество решений задачи  $P(s)$ , где  $s = (A, b, c)$ , непусто и ограничено. Доказать, что при любых  $A', c'$ , достаточно близких к  $A, c$ , и любом  $b' \in \mathbb{R}^m$  множество решений задачи  $P(s')$ , где  $s' = (A', b', c')$ , также непусто и ограничено, если только эта задача допустима.

**5.79\***. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) стандартная задача ЛП (5.4) и двойственная к ней устойчивы;

б) существуют такие точки  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $y \in \mathbb{R}^m$ , что  $Ax < b$ ,  $x \geq 0$ ,  $yA > c$ ,  $y \geq 0$ ;

в) множества решений задачи (5.4) и двойственной к ней непусты и ограничены.

Отметим, что формулировать аналогичный факт для канонической задачи ЛП (5.5) нет необходимости, поскольку с точностью до перемены местами прямой и двойственной задач он уже отражен в 5.73.

5.80\*. Положим  $u = (1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^n$ ,  $v = (1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^m$ . При данном числе  $\alpha \geq 0$  обозначим через  $X^*(\alpha)$  множество решений стандартной задачи ЛП

$$\begin{aligned} \langle c - \alpha u, x \rangle &\rightarrow \max, \\ Ax &\leq b + \alpha v, \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (5.33)$$

а через  $F(\alpha)$  ее значение.

Доказать теорему о регуляризации задачи ЛП.

Пусть задача (5.33) при  $\alpha = 0$  (т. е. задача (5.4)) разрешима. Тогда

а) при любом  $\alpha > 0$  задача (5.33) устойчива;

б)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} F(\alpha) = F(0)$ ;

в) множества  $X^*(\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ) ограничены в совокупности;

г) если последовательности  $\{\alpha_k\}$  и  $\{x^k\}$  таковы, что  $\alpha_k \rightarrow 0$ ,  $\alpha_k > 0$ ,  $x^k \in X^*(\alpha_k)$  и  $x^k \rightarrow x$ , то  $x \in X^*(0)$ .

Отметим, что сформулированная теорема легко переносится на задачу ЛП в любой форме записи. Например, если дана основная задача ЛП (5.1), то после приведения ее к стандартной форме получается следующее семейство задач вида (5.33):

$$\begin{aligned} \langle c - \alpha u, x^1 \rangle - \langle c + \alpha u, x^2 \rangle &\rightarrow \max, \\ Ax^1 - Ax^2 &\leq b + \alpha v, \quad x^1 \geq 0, \quad x^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Полезно заметить, что в силу 5.79 эта задача при  $\alpha = 0$  неустойчива, если даже задача (5.1) была устойчивой.

5.81\*. Пусть задача  $P(s)$  устойчива и, значит, функция  $F(s)$  определена в некоторой окрестности данной точки  $s$ . При заданном элементе  $h \in \mathcal{A}(m, n) \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$  величину

$$F'(s, h) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{F(s + \alpha h) - F(s)}{\alpha},$$

т. е. производную функции  $F$  по направлению  $h$  в точке  $s$ , принято называть *маргинальным значением* задачи  $P(s)$  по направлению  $h$ .

Доказать теорему о маргинальных значениях задачи ЛП.

Если задача  $P(s)$ , где  $s = (A, b, c)$ , устойчива, то ее маргинальное значение по любому направлению  $h = (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})$  существует и вычисляется по формуле

$$F'(s, h) = \max_{x \in X^*(s)} \min_{y \in Y^*(s)} L(x, y, h) = \\ = \min_{y \in Y^*(s)} \max_{x \in X^*(s)} L(x, y, h), \quad (5.34)$$

где  $L(x, y, h) = \langle \bar{c}, x \rangle + \langle y, \bar{b} - \bar{A}x \rangle$ . В частности,

а) если  $h = (\bar{A}, 0, 0)$ , то

$$F'(s, h) = - \min_{x \in X^*(s)} \max_{y \in Y^*(s)} \langle y, \bar{A}x \rangle = - \max_{y \in Y^*(s)} \min_{x \in X^*(s)} \langle y, \bar{A}x \rangle;$$

б) если  $h = (0, \bar{b}, 0)$ , то

$$F'(s, h) = \min_{y \in Y^*(s)} \langle \bar{b}, y \rangle; \quad (5.35)$$

в) если  $h = (0, 0, \bar{c})$ , то

$$F'(s, h) = \max_{x \in X^*(s)} \langle \bar{c}, x \rangle. \quad (5.36)$$

5.82. Пусть задача  $P(s)$ , где  $s = (A, b, c)$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $b = (b_i)$ ,  $c = (c_j)$ , устойчива. Доказать, что все право- и левосторонние частные производные функции  $F(s)$  в данной точке  $s$  существуют и вычисляются по формулам

$$\frac{\partial F^+}{\partial b_i}(s) = \min_{y \in Y^*(s)} y_i, \quad \frac{\partial F^-}{\partial b_i}(s) = \max_{y \in Y^*(s)} y_i, \\ \frac{\partial F^+}{\partial c_j}(s) = \max_{x \in X^*(s)} x_j, \quad \frac{\partial F^-}{\partial c_j}(s) = \min_{x \in X^*(s)} x_j, \\ \frac{\partial F^+}{\partial a_{ij}}(s) = \begin{cases} -\frac{\partial F^-}{\partial b_i}(s) \frac{\partial F^-}{\partial c_j}(s), & \text{если } \frac{\partial F^-}{\partial c_j}(s) \geq 0, \\ -\frac{\partial F^+}{\partial b_i}(s) \frac{\partial F^-}{\partial c_j}(s), & \text{если } \frac{\partial F^-}{\partial c_j}(s) < 0, \end{cases} \\ \frac{\partial F^-}{\partial a_{ij}}(s) = \begin{cases} -\frac{\partial F^+}{\partial b_i}(s) \frac{\partial F^+}{\partial c_j}(s), & \text{если } \frac{\partial F^+}{\partial c_j}(s) \geq 0, \\ -\frac{\partial F^-}{\partial b_i}(s) \frac{\partial F^+}{\partial c_j}(s), & \text{если } \frac{\partial F^+}{\partial c_j}(s) < 0, \end{cases}$$

где  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ .

5.83. Пусть задачи  $P(s)$  и  $D(s)$  имеют по единственному решению  $x^*(s)$  и  $y^*(s)$  соответственно. Доказать, что функция  $F(s)$  непрерывно дифференцируема в дан-

ной точке  $s$ , причем частные производные  $F$  в  $s$  вычисляются по формулам

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(s) = -y_i^*(s)x_j^*(s), \quad \frac{\partial F}{\partial b_i}(s) = y_i^*(s), \quad \frac{\partial F}{\partial c_j}(s) = x_j^*(s), \quad (5.37)$$

где  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ , а величины  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$  имеют тот же смысл, что и в 5.82.

5.84. Привести пример таких  $s = (A, b, c)$  и  $h = (A, \bar{b}, \bar{c})$ , что задача  $P(s + \alpha h)$  разрешима при любом  $\alpha \geq 0$ , но величина  $f'(s, h)$  не существует.

5.85. Привести пример таких  $s = (A, b, c)$  и  $h = (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})$ , что величина  $f'(s, h)$ , а также максимум и минимум в (5.34) существуют, но первое равенство в (5.34) не выполнено.

В задачах 5.86—5.92 матрица  $A$  считается постоянной. Соответственно будем использовать обозначения  $P(b, c)$ ,  $X(b)$ ,  $X^*(b, c)$  и т. п. Кроме того, введем множества

$$B = \{b \in \mathbb{R}^m \mid Ax \leq b \text{ при некотором } x \in \mathbb{R}^n\}, \\ C = \{c \in \mathbb{R}^n \mid yA = c \text{ при некотором } y \in \mathbb{R}_+^m\}.$$

Ясно, что  $B$  и  $C$  непусты.

5.86. Доказать, что множества  $B$  и  $C$  замкнуты.

5.87. Доказать, что для любых  $b^i \in B$ ,  $c^i \in C$ ,  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 1, 2$ ) следует  $\lambda_1 b^1 + \lambda_2 b^2 \in B$ ,  $\lambda_1 c^1 + \lambda_2 c^2 \in C$ .

Это означает, что  $B$  и  $C$  являются выпуклыми конусами (см. § 7).

5.88. Доказать, что задача  $P(b, c)$  имеет решение в том и только том случае, если  $b \in B$ ,  $c \in C$ ; иными словами, областью определения функции  $F(b, c)$  является декартово произведение  $B \times C$ .

5.89. Пусть задачи  $P(b, c)$  и  $P(b', c')$  разрешимы. Доказать, что задачи

$$\langle b' - b, y \rangle \rightarrow \min, \quad y \in Y^*(b, c), \quad (5.38)$$

$$\langle c' - c, x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in X^*(b, c) \quad (5.39)$$

также разрешимы.

5.90\*. Доказать теорему об устойчивости задачи ЛП по значению и решению при постоянной матрице коэффициентов.

а) Функция  $F(b, c)$  непрерывна всюду на  $B \times C$  (устойчивость по значению);

б) если последовательности  $\{b^k\}$ ,  $\{c^k\}$  и  $\{x^k\}$  таковы, что  $b^k \in B$ ,  $b^k \rightarrow b$ ,  $c^k \in C$ ,  $c^k \rightarrow c$  и  $x^k \in X^*(b^k, c^k)$ , то  $X^*(b, c) \neq \emptyset$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, X^*(b, c)) = 0$ , т. е. при достаточно больших  $k$  все решения задач  $P(b^k, c^k)$  близки к множеству решений задачи  $P(b, c)$  (устойчивость по решению).

Подчеркнем, что в отличие от теоремы из 5.74 последовательность  $\{x^k\}$  здесь может быть и неограниченной. Согласно терминологии теории многозначных отображений, свойство б) означает полунепрерывность сверху отображения  $(b, c) \rightarrow X^*(b, c)$  [32, 33].

**5.91\*.** Задача  $P(b, c)$  называется *устойчивой по направлению*  $h = (\bar{b}, \bar{c}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , если эта задача, а также задача  $P(b + \alpha \bar{b}, c + \alpha \bar{c})$  при любом достаточно малом  $\alpha > 0$  разрешимы.

Доказать теорему об устойчивости задачи ЛП относительно изменения целевой функции и правой части ограничений по направлению.

Задача  $P(b, c)$  устойчива по направлению  $h = (\bar{b}, \bar{c})$  в том и только том случае, если разрешимы следующие задачи ЛП:

$$\langle \bar{b}, y \rangle \rightarrow \min, \quad y \in Y^*(b, c), \quad (5.40)$$

$$\langle \bar{c}, x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in X^*(b, c). \quad (5.41)$$

Иллюстрацией этого утверждения при  $\bar{b} = 0$  служит рис. 25.

**5.92\*.** Доказать теорему о маргинальных значениях задачи ЛП относительно изменения целевой функции и правых частей ограничений.

Если задача  $P(b, c)$  устойчива по направлению  $h = (\bar{b}, \bar{c})$ , то маргинальное значение

$$F'(b, c, h) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{F(b + \alpha \bar{b}, c + \alpha \bar{c}) - F(b, c)}{\alpha}$$

существует и вычисляется по формуле

$$F'(b, c, h) = \max_{x \in X^*(b, c)} \langle \bar{c}, x \rangle + \min_{y \in Y^*(b, c)} \langle \bar{b}, y \rangle. \quad (5.42)$$

Отметим, что формула (5.42) совпадает с формулой (5.34) для  $h = (0, \bar{b}, \bar{c})$ . Суть приведенной теоремы состоит в том, что здесь

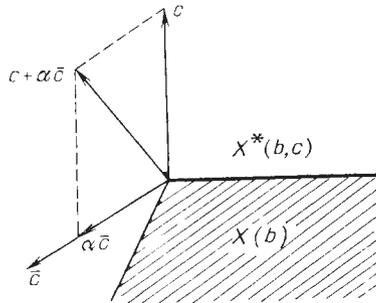


Рис. 25

предельно ослабляются условия, при которых сохраняется утверждение теоремы из 5.81 для направлений  $h$  указанного вида. Используя 5.92, можно соответствующим образом ослабить условия, при которых справедливы формулы (5.35), (5.36) и первые четыре формулы в 5.82.

В задачах 5.93—5.99 считаются постоянными матрица  $A$  и вектор  $b$ . Соответственно используем обозначения  $P(c)$ ,  $X$ ,  $I(x^*)$ ,  $X^*(c)$  и т. д.

5.93. Пусть задачи  $P(c^1)$  и  $P(c^2)$  разрешимы. Доказать, что

$$F(\lambda_1 c^1 + \lambda_2 c^2) \leq \lambda_1 F(c^1) + \lambda_2 F(c^2)$$

при любых  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ .

В частности, это означает, что функция  $F(c)$  является выпуклой (см., например, [39]).

5.94. Пусть задача  $P(c)$  разрешима. Доказать, что  $F(\lambda c) = \lambda F(c)$  при любом  $\lambda \geq 0$ , т. е. функция  $F(c)$  положительно однородна первой степени.

5.95\*. Доказать теорему об устойчивости задачи ЛП относительно изменения целевой функции (ср. с 5.73).

Следующие утверждения эквивалентны:

- а) задача  $P(c)$  устойчива, т. е. при любом  $c'$  из некоторой окрестности точки  $c$  задача  $P(c')$  разрешима;
- б) множество  $X^*(c)$  непусто и ограничено;
- в)  $\text{rang } A = n$  и существуют такие точки  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , что  $Ax \leq b$ ,  $yA = c$ ,  $y > 0$ .

5.96\*. Доказать теорему об инвариантности решения задачи ЛП при малом возмущении целевой функции.

Пусть задача  $P(c)$  разрешима. Тогда при любом  $c'$ , достаточно близком к  $c$ , все решения задачи  $P(c')$ , если они существуют, являются решениями задачи  $P(c)$ , т. е.  $X^*(c') \subset X^*(c)$  (рис. 26). Более того, для любого  $h \in \mathbb{R}^n$  обозначим через  $\bar{X}(h)$  множество решений задачи

$$\langle h, x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in X^*(c).$$

Тогда существует число  $\bar{\alpha} > 0$ , при котором  $X^*(c + \alpha h) = \bar{X}(h)$

для всех таких  $\alpha$  и  $h$ , что  $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$ ,  $\|h\| = 1$ .

Таким образом, множества  $X^*(c + \alpha h)$  и  $\bar{X}(h)$  пусты или непусты одновременно, что согласуется с 5.91 при  $b = 0$ .

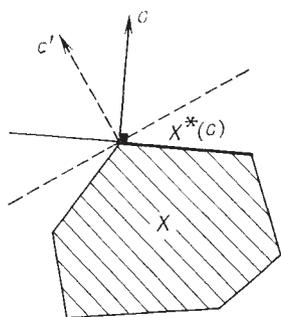


Рис. 26

5.97\*. Пусть задача  $P(c)$  имеет единственное решение  $x^*$ . Доказать, что при любом  $c'$ , достаточно близком к  $c$ , та же точка  $x^*$  служит единственным решением задачи  $P(c')$  (рис. 27) и, следовательно,  $F(c') = \langle x^*, c' \rangle$ , т. е. функция  $F(c)$  является линейной в некоторой окрестности данной точки  $c$ .

Отсюда, в частности, следует, что для справедливости третьей формулы в (5.37) при  $j = 1 \dots, n$  нет необходимости требовать единственности решения двойственной задачи.

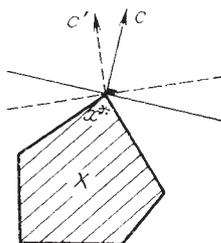


Рис. 27

5.98. Пусть функция  $F(c)$  определена в некоторой окрестности точки  $c$  и дифференцируема в этой точке. Доказать, что тогда решение задачи  $P(c)$  единственно.

5.99. Пусть вершина  $x^*$  допустимого множества задачи  $P(c)$  является ее решением (возможно, неединственным). Доказать, что та же точка  $x^*$  служит единственным решением задачи  $P(c')$ , где  $c' = c + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i a_i$ ,  $\lambda_i > 0$  ( $i \in I(x^*)$ ).

Таким образом, неединственность решения можно устранить сколь угодно малым возмущением целевой функции. Иллюстрацией служит здесь тот же рис. 26.

В задачах 5.100—5.108 считаются постоянными матрица  $A$  и вектор  $c$ . Соответственно используем обозначения  $P(b)$ ,  $X(b)$ ,  $X^*(b)$  и т. п. Кроме того, ниже встретится множество  $B$ , определенное перед текстом задачи 5.86.

5.100. Пусть задача  $P(b)$  разрешима. Доказать, что при любом  $b' \in B$  задача  $P(b')$  также разрешима (ср. с 5.78).

5.101. Пусть задачи  $P(b^1)$  и  $P(b^2)$  разрешимы. Доказать, что

$$F(\lambda_1 b^1 + \lambda_2 b^2) \geq \lambda_1 F(b^1) + \lambda_2 F(b^2)$$

при любых  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ .

Отсюда следует, что функция  $F(b)$  является вогнутой (см., например, [39]).

5.102. Пусть задача  $P(b)$  разрешима. Доказать, что  $F(\lambda b) = \lambda F(b)$  при любом  $\lambda \geq 0$ , т. е. функция  $F(b)$  положительно однородна первой степени.

5.103. Пусть задача  $P(b)$  разрешима и  $b' \geq b$ . Доказать, что  $F(b') \geq F(b)$ , т. е. функция  $F(b)$  не убывает.

**5.104.** Пусть задача  $P(b)$  разрешима. Через  $e^i$  обозначим  $i$ -й единичный орт в  $\mathbf{R}^m$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Доказать следующие утверждения:

а) если  $y_i^* = 0$  для некоторого  $y^* \in Y^*(b)$ , то  $F(b + \alpha e^i) = F(b)$  при всех  $\alpha > 0$ ;

б) если  $y_i^* > 0$  для любого  $y^* \in Y^*(b)$ , то  $F(b + \alpha e^i) > F(b)$  при всех  $\alpha > 0$ .

**5.105\*.** Доказать теорему об устойчивости задачи ЛП относительно изменения правой части ограничений (ср. с 5.73 и 5.95).

Следующие утверждения эквивалентны:

а) задача  $P(b)$  устойчива, т. е. при любом  $b'$  из некоторой окрестности точки  $b$  задача  $P(b')$  разрешима;

б) множество  $Y^*(b)$  непусто и ограничено;

в) существуют такие точки  $x \in \mathbf{R}^n$  и  $y \in \mathbf{R}^m$ , что  $Ax < b$ ,  $yA = c$ ,  $y \geq 0^*$ ).

**5.106\*.** Пусть задача  $D(b)$  имеет единственное решение  $y^*$ . Доказать, что  $F(b') = \langle y^*, b' \rangle$  при любом  $b'$ , достаточно близком к  $b$ .

Таким образом, для справедливости второй формулы в (5.37) при  $i = 1, \dots, m$  нет необходимости требовать единственности решения задачи  $P(b)$ .

**5.107.** Пусть функция  $F(b)$  определена в некоторой окрестности точки  $b$  и дифференцируема в этой точке. Доказать, что решение задачи  $D(b)$  единственно.

**5.108\*.** Доказать теорему о полной устойчивости задачи ЛП по решению относительно изменения правой части ограничений.

Пусть задача  $P(b)$  разрешима, а последовательность  $\{b^k\}$  такова, что  $b^k \in B$  и  $b^k \rightarrow b$ . Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(X^*(b^k), X^*(b)) = 0$ , где символ  $d$  обозначает хаусдорфово расстояние между множествами (см. 4.136).

Иными словами, отображение  $b \rightarrow X^*(b)$  является не только полунепрерывным сверху, что следует из 5.90, но и полунепрерывным снизу.

**5.109.** Показать, что задача кусочно-линейного программирования

$$f(x) = \max_{k=1, \dots, s} (\langle c^k, x \rangle + d_k) \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (5.43)$$

\*) Условие существования такой точки  $y$ , т. е. допустимости двойственной задачи  $D(b)$ , можно заменить требованием разрешимости прямой задачи  $P(b)$ .

где  $c^k \in \mathbf{R}^n$ ,  $d_k \in \mathbf{R}$  ( $k = 1, \dots, s$ ), а  $X$  — полиэдр в  $\mathbf{R}^n$ , может быть сведена к задаче ЛП\*).

5.110. Показать, что задачи

$$f(x) = \max_{k=1, \dots, s} |\langle c^k, x \rangle + d_k| \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (5.44)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^s |\langle c^k, x \rangle + d_k| \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (5.45)$$

где  $c^k \in \mathbf{R}^n$ ,  $d_k \in \mathbf{R}$  ( $k = 1, \dots, s$ ), а  $X$  — полиэдр в  $\mathbf{R}^n$ , могут быть сведены к задачам ЛП, причем они разрешимы, если  $X \neq \emptyset$ .

Отметим, что задачи типа (5.44), (5.45) возникают при линейной аппроксимации зависимостей с соответствующими критериями точности (см. замечание после задачи 2.22).

5.111. Свести к задаче ЛП задачу *дробно-линейного программирования*

$$f(x) = \frac{\langle c, x \rangle + d}{\langle p, x \rangle + q} \rightarrow \min, \quad x \in X, \quad (5.46)$$

где  $c, p \in \mathbf{R}^n$ ;  $d, q \in \mathbf{R}$ ;  $X$  — непустой ограниченный полиэдр в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $\langle p, x \rangle + q \neq 0$  для любого  $x \in X$ .

5.112\*. Доказать (путем построения соответствующей пары взаимодвойственных задач) *теорему о линейном минимаксе*.

Для любой матрицы  $A \in \mathcal{A}(m, n)$  и непустых полиэдров  $X \subset \mathbf{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbf{R}^m$  введем величины

$$R = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \langle y, Ax \rangle, \quad S = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} \langle y, Ax \rangle,$$

Тогда  $R = S$ ; при этом

а) если  $R < \infty$ , то  $R = \inf_{y \in Y} \langle y, Ax^* \rangle$  для некоторого  $x^* \in X$ , т. е. супремум  $R$  достигается;

б) если  $S > -\infty$ , то  $S = \sup_{x \in X} \langle y^*, Ax \rangle$  для некоторого  $y^* \in Y$ , т. е. инфимум  $S$  достигается.

Частным случаем этого утверждения является *основная теорема теории матричных игр* [5, 34], получаемая при

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n x_j = 1 \right\}, \quad Y = \left\{ y \in \mathbf{R}_+^m \mid \sum_{i=1}^m y_i = 1 \right\}.$$

---

\*) Иными словами, требуется построить такую задачу ЛП, по решениям которой легко восстанавливаются решения исходной задачи.

Заключительная часть параграфа посвящена в основном примерам аналитического решения задач ЛП с произвольным числом переменных.

5.113. Рассмотрим задачу ЛП с одним связующим ограничением

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max, \quad \langle a, x \rangle = b, \quad x \geq 0, \quad (5.47)$$

где  $a = (a_j) \in \mathbf{R}^n$ ,  $b \in \mathbf{R}$ ,  $c = (c_j) \in \mathbf{R}^n$ . Найти все решения этой задачи при условии, что  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Указать те решения, которые являются вершинами допустимого множества.

5.114. Рассмотрим задачу (5.47) при условии, что первые  $k$  координат вектора  $a$  положительны ( $1 \leq k < n$ ), а остальные отрицательны и  $b > 0$ . Выяснить, когда данная задача разрешима; указать при этом все ее решения.

5.115. Найти все значения параметра  $k$ , при которых задача

$$\begin{aligned} kx_1 - 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 &\rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 - x_4 &= 2, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

разрешима, и указать ее решение.

5.116. Найти решение задачи

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 &\rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 12x_4 - x_5 + x_6 &= 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 - x_5 - 3x_6 &= -7, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 2x_5 + x_6 &= 52, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

5.117. Считая, что  $a > 0$ , найти решения следующих задач ЛП:

- а)  $\langle c, x \rangle \rightarrow \max$ ,  $\langle a, x \rangle = b$ ,  $x \geq d$ , где  $\langle a, d \rangle < b$ ;
- б)  $\langle c, x \rangle \rightarrow \max$ ,  $\langle a, x \rangle = b$ ,  $0 \leq x \leq d$ , где  $0 < b < \langle a, d \rangle$ ;
- в)  $\langle c, x \rangle \rightarrow \max$ ,  $\langle a, x \rangle = b$ ,  $d^0 \leq x \leq d$ , где  $\langle a, d^0 \rangle < b < \langle a, d \rangle$ .

5.118. Найти решения следующих задач ЛП:

- а)  $10x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$ ,  
 $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 21$ ,  
 $0 \leq x_1 \leq 1$ ,  $0 \leq x_2 \leq 4$ ,  $0 \leq x_3 \leq 6$ ,  $0 \leq x_4 \leq 3$ ;
- б)  $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$ ,  
 $x_1 + x_2 + x_3 = b$ ,  
 $0 \leq x_1 \leq 5$ ,  $0 \leq x_2 \leq 4$ ,  $0 \leq x_3 \leq 1$ ,

где  $0 < b < 10$ ;

$$\begin{aligned} \text{в) } & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq b, \end{aligned}$$

$$0 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_3 \leq 1,$$

где  $b > 0$ ;

$$\begin{aligned} \text{г) } & 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 \rightarrow \max, \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 23, \end{aligned}$$

$$-1 \leq x_1 \leq 4, \quad 2 \leq x_2 \leq 3, \quad 5 \leq x_3 \leq 7, \quad -4 \leq x_4 \leq 2;$$

$$\begin{aligned} \text{д) } & 3x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 8x_4 \rightarrow \max, \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 \leq 33, \end{aligned}$$

$$1 \leq x_1 \leq 4, \quad -3 \leq x_2 \leq 4, \quad -1 \leq x_3 \leq 2, \quad 6 \leq x_4 \leq 7.$$

**5.119.** Колхоз собирается засеять четыре поля пшеницей и кукурузой. В табл. 13 указаны площадь каждого поля, урожайность на нем обеих культур, а также

Таблица 13

| Поле          | Площадь (га) | Урожайность (п/га) |          |
|---------------|--------------|--------------------|----------|
|               |              | Пшеница            | Кукуруза |
| 1             | 400          | 20                 | 35       |
| 2             | 300          | 35                 | 50       |
| 3             | 200          | 25                 | 40       |
| 4             | 100          | 30                 | 45       |
| Цена 1 ц (р.) |              | 7                  | 5        |

закупочные цены. Согласно госзаказу колхоз обязан произвести не менее 12 000 ц пшеницы; спрос как на пшеницу, так и на кукурузу неограничен.

Требуется определить такое сочетание посевов пшеницы и кукурузы на полях, при котором валовый доход от реализации урожая будет наибольшим.

**5.120.** Какой должна быть цена на пшеницу в предыдущей задаче, чтобы выполнение госзаказа не противоречило экономическим интересам колхоза?

**5.121.** Пусть полиэдр  $X \subset \mathbf{R}^n$  ограничен и имеет внутренние точки. Требуется поместить в  $X$  сферу наибольшего радиуса. Сформулировать эту задачу как задачу ЛП.

**5.122.** Найти окружность наибольшего радиуса, лежащую в полнэдре  $X \subset \mathbf{R}^2$ , который задается системой:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 50, \\ -5x_1 + 12x_2 &\leq 60, \\ 15x_1 - 8x_2 &\leq 120, \\ x_1 &\geq 2, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

5.123. Найти сферу наибольшего радиуса, лежащую в полиэдре

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\},$$

где матрица  $A = \mathcal{A}(m, n)$  и вектор  $b \in \mathbf{R}^m$  положительны. Конкретизировать ответ для следующих данных:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

5.124. Построить задачу, двойственную к транспортной задаче ЛП (см. (5.15)).

5.125. Построить задачу, двойственную к *блочной задаче ЛП*:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^K \langle c^h, x^h \rangle &\rightarrow \max, \\ A_k x^k &\leq b^k, \quad k = 1, \dots, K, \\ \sum_{h=1}^K B_h x^h &\leq d, \\ x^k &\geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \end{aligned}$$

где заданы  $A_k \in \mathcal{A}(m_k, n_k)$ ,  $B_k \in \mathcal{A}(m, n_k)$ ,  $b^k \in \mathbf{R}^{m_k}$ ,  $c^k \in \mathbf{R}^{n_k}$  ( $k = 1, \dots, K$ ) и  $d \in \mathbf{R}^m$ .

5.126. Построить задачу, двойственную к *динамической линейной задаче планирования производства*:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \langle c^t, x^t \rangle &\rightarrow \max, \\ A_t x^t &\leq x^{t-1}, \quad t = 1, \dots, T, \\ x^t &\geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

где заданы  $A_t \in \mathcal{A}(n, n)$ ,  $c^t \in \mathbf{R}^n$  ( $t = 1, \dots, T$ ) и  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ .

Исследование этой задачи с помощью теории двойственности приводит к так называемой теореме о магистрали. Подробное изложение магистральной теории — одного из важнейших разделов математической экономики — можно найти в [6]. Там же читатель встретит большое количество других примеров использования теории двойственности при изучении экономико-математических моделей.

5.127. Найти решение задачи

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^i x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где  $b_1 \geq 0, \dots, b_n \geq 0, c_1 > c_2 > \dots > c_n > 0$ .

5.128. Найти решение предыдущей задачи при указанных ниже  $n$  и  $b = (b_1, \dots, b_n)$  (коэффициенты  $c_1 > c_2 > \dots > c_n > 0$  любые):

а)  $n = 6, b = (2, 1, 6, 5, 3, 4)$ ;

б)  $n = 7, b = (1, 5, 2, 4, 2, 7, 6)$ ;

в)  $n = 5, b = (2, 4, 6, 7, 9)$ ;

г)  $n = 5, b = (8, 6, 5, 3, 2)$ .

5.129. Найти значение и все решения задачи

$$\sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min,$$

$$x_j + x_{j+1} \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$x_1 + x_n \geq b_n,$$

где  $b_1, \dots, b_n$  — произвольные числа.

5.130. В следующем месяце предприятие планирует выпускать определенный продукт, для производства которого требуются  $n$  видов сырья. Известны следующие параметры:

$a_j > 0$  — количество  $j$ -го сырья, необходимое для производства единичного количества продукта ( $j = 1, \dots, n$ );

$b_j \geq 0$  — остатки  $j$ -го сырья на предприятии на конец текущего месяца;

$p_j > 0$  — цена одной единицы  $j$ -го сырья;

$d > 0$  — количество денежных средств, которое предприятие может затратить на закупку дополнительных объемов сырья в текущем месяце.

Какие виды сырья и в каком количестве следует закупить предприятию, чтобы обеспечить максимальный объем производства в следующем месяце?

5.131. В табл. 14 указаны конкретные значения параметров предыдущей задачи при  $n = 3$ . Построить для этого случая зависимость максимального объема производства от величины денежных средств  $d$  и вычислить оптимальные объемы закупки сырья при  $d = 3, 12, 36$ .

Таблица 14

| $j$ | $a_j$ | $b_j$ | $p_j$ |
|-----|-------|-------|-------|
| 1   | 0,2   | 4     | 3     |
| 2   | 0,6   | 18    | 1     |
| 3   | 0,3   | 12    | 2     |

5.132. На овощную базу прибыл железнодорожный состав, доставивший  $A$  тонн овощей. Имеется  $n$  бригад грузчиков, предложивших свои услуги на следующих условиях: бригада  $j$  берется разгружать по  $a_j$  тонн в день по расценке  $p_j$  рублей за тонну ( $j=1, \dots, n$ ). За каж-

дый день простоя состава база платит штраф  $c$  рублей.

Какие договоры на разгрузку состава следует заключить базе, чтобы минимизировать суммарные расходы, и сколько дней при этом будет продолжаться разгрузка?

5.133. Найти решение предыдущей задачи при следующих данных:

$$A = 300, \quad n = 4, \quad c = 250,$$

$$a_1 = 10, \quad a_2 = 20, \quad a_3 = 30, \quad a_4 = 40,$$

$$p_1 = 10, \quad p_2 = 15, \quad p_3 = 20, \quad p_4 = 25.$$

5.134\*. *Линейной задачей оптимального управления в дискретном времени* называется задача ЛП следующего вида:

$$\sum_{t=1}^T (\langle c^t, x^t \rangle + \langle b^t, u^t \rangle) \rightarrow \max,$$

$$x^t = A_{t-1}x^{t-1} + B_t u^t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.48)$$

$$D_t u^t \leq d^t, \quad t = 1, \dots, T,$$

где заданы  $A_{t-1} \in \mathcal{A}(n, n)$ ,  $B_t \in \mathcal{A}(n, m)$ ,  $D_t \in \mathcal{A}(k, m)$ ,  $d^t \in \mathbb{R}^k$ ,  $c^t \in \mathbb{R}^n$ ,  $b^t \in \mathbb{R}^m$  ( $t = 1, \dots, T$ ),  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ .

При этом  $x^t$  трактуется как *состояние* некоторой системы, а  $u^t$  — как *управление* системой в момент времени  $t$ . Введем множества допустимых управлений

$$U_t = \{u \in \mathbb{R}^m \mid D_t u \leq d^t\}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Последовательность управлений  $u^t \in U_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) называется *оптимальной*, если вместе с соответствующей (однозначно определяемой из (5.48)) последовательностью состояний  $x_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) она образует решение задачи (5.48).

Рассмотрим векторы  $p^t \in \mathbb{R}^n$  ( $t = 1, \dots, T$ ), определяемые следующими рекуррентными формулами:

$$p^T = c^T, \quad p^t = p^{t+1}A_t + c^t, \quad t = T-1, \dots, 1. \quad (5.49)$$

Введем семейство функций Гамильтона:

$$\mathcal{H}_t(u) = \langle p^t B_t + b^t, u \rangle, \quad t = 1, \dots, T.$$

Доказать, что для задачи (5.48) справедлив дискретный принцип максимума.

Пусть задача (5.48) разрешима. Тогда последовательность управлений  $\bar{u}^t \in U_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) оптимальна в том и только том случае, если

$$\mathcal{H}_t(\bar{u}^t) = \max_{u \in U_t} \mathcal{H}_t(u), \quad t = 1, \dots, T.$$

Отсюда, в частности, следует, что оптимальная последовательность управлений не зависит от начального состояния  $x^0$ .

**5.135.** Пусть векторы  $p^t \in \mathbb{R}^n$  ( $t = 1, \dots, T$ ) определяются по рекуррентным формулам (5.49), где  $A_t = A$ ,  $c^t = c$ , причем матрица  $A$  имеет  $n$  попарно различных собственных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , отличных от единицы. Обозначим через  $Q$  матрицу размера  $n \times n$ , у которой  $j$ -й столбец является собственным вектором матрицы  $A$ , соответствующим собственному числу  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Положим

$$R_j = Q E_j Q^{-1},$$

где  $E_j$  — матрица размера  $n \times n$ , у которой элемент на пересечении  $j$ -го столбца и  $j$ -й строки равен единице, а остальные элементы — нули. Доказать, что

$$p^t = \sum_{j=1}^n \frac{1 - \lambda_j^{T-t+1}}{1 - \lambda_j} c R_j, \quad t = 1, \dots, T.$$

**5.136.** На территории охотничьего хозяйства обитают популяция волков и популяция косуль. Динамика роста этих популяций определяется следующими статистическими закономерностями. Численность волков составляет долю  $\alpha$  от количества косуль в предыдущем году (роль основного регулятора здесь играет миграция волков). Естественный темп роста поголовья косуль за год равен  $\beta$ , однако каждый волк уничтожает в год в среднем  $\gamma$  косуль.

Содержание охотничьего хозяйства предполагает расходы в размере  $\bar{c}$  рублей в год в расчете на одну косулю.

Хозяйство имеет право продавать не более  $d$  охотничьих лицензий за год, причем лицензия на отстрел волка стоит  $b_1$  рублей, а для охоты на косулю —  $b_2$  рублей.

Как следует организовать продажу лицензий с целью максимизации суммарной прибыли за  $T$  лет? Параметр  $d$  считается столь малым в сравнении с начальной численностью животных, что при любой организации продажи лицензии в течение  $T$  лет ни одна из популяций не может быть уничтожена полностью.

Предложить общий способ решения задачи и получить численный ответ для случая, когда

$$\alpha = \frac{1}{25}, \quad \beta = \frac{7}{5}, \quad \gamma = 6, \quad \bar{c} = 2, \quad b_1 = 100, \quad b_2 = 50, \quad T = 10.$$

5.137. Распространение вирусной эпидемии описывается следующим образом. Различают два понятия: больные и вирусоносители. В течение месяца доля  $\alpha$  больных умирает, доля  $\beta$  вирусоносителей заболевает, а число вирусоносителей в  $\gamma$  раз больше суммарного количества всех больных и вирусоносителей в прошлом месяце.

Только что изобретена вакцина против этой болезни. Через год будет построен завод для ее производства и все население можно будет вакцинировать. Однако до этого момента изготовление вакцины ведется в лабораторных условиях, и ее не хватает даже для больных и вирусоносителей. Известно, что за месяц доля  $\lambda$  вакцинированных больных условно выздоравливает (переходит в разряд вирусоносителей), доля  $\mu$  вакцинированных вирусоносителей выздоравливает полностью.

Как следует ежемесячно распределять имеющееся количество доз вакцины между больными и вирусоносителями, чтобы за год умерло как можно меньше больных?

Предложить общий способ решения задачи и получить численный ответ для случая, когда

$$\alpha = \frac{1}{5}, \quad \beta = \frac{4}{11}, \quad \gamma = \frac{11}{10}, \quad \lambda = \frac{2}{3}, \quad \mu = \frac{1}{3}.$$

5.138. Кооператив, располагающий некоторой суммой денег, собирается взять в аренду на несколько лет помещение производственного назначения, купить оборудование и организовать выпуск товаров широкого потребления с целью накопить к концу аренды максимальный объем денежных средств.

Условия аренды и характеристики оборудования таковы, что каждый рубль основных фондов (стоимости оборудования) приносит за год чистую прибыль  $\alpha$  рублей. В то же время основные фонды амортизируют (изнашиваются в процессе эксплуатации) с темпом  $\mu$ , т. е. стои-

мость оборудования к концу года составляет  $(1 - \mu)$ -ю часть его стоимости на начало года. Показатели  $\alpha$  и  $\mu$  удовлетворяют соотношению  $0 < \mu < \alpha < 1$ . Неравенство  $\mu < \alpha$  означает, что прибыль, приносимая основными фондами, превышает потери от их амортизации. Условие  $\alpha < 1$  говорит о том, что каждый рубль, вложенный в основные фонды, окупаются не за один год, а за больший период службы оборудования.

Кооператив планирует закупать дополнительное оборудование в начале каждого года, используя при этом только накопленные средства.

Требуется выяснить, при какой продолжительности аренды задуманное предприятие имеет смысл, определить оптимальную политику капиталовложений (закупки оборудования) и вычислить величину накопленных денежных средств за  $T$  лет аренды.

## § 6. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

### СВОДКА ОСНОВНЫХ ФАКТОВ

**1. Введение.** Симплекс-метод является основным численным методом решения задач ЛП. В этом параграфе будут отражены лишь его принципиальные положения. Более детальное изложение (в частности, подробное обсуждение вычислительных аспектов метода) имеется, например, в книгах [5, 11, 15, 26, 30, 46]. Там же приводятся и другие численные методы линейного программирования.

Симплекс-метод описывается применительно к канонической задаче ЛП

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\rightarrow \max, \\ Ax = b, \quad x &\geq 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Это не ограничивает общность метода, так как любая задача ЛП может быть представлена в форме (6.1) (см. п. 1 § 5). Естественно считать, что  $b \neq 0$ , так как иначе задача (6.1) тривиальна (см. задачу 5.36). Кроме того, предположим, что  $\text{rang } A = m$ , т. е. все строки матрицы  $A$  линейно независимы. К этому можно прийти, исключив из системы  $Ax = b$  линейно зависимые уравнения, что обычно и делается в рамках специальной процедуры, предшествующей симплекс-методу (см. п. 4).

Обозначим через  $X$  допустимое множество задачи (6.1), т. е.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Напомним, что, согласно теореме 4.4, точка  $x$  множества  $X$  является его вершиной (опорной точкой) в том и только том случае, если векторы  $a^j$  ( $j \in J(x)$ ), т. е. столбцы матрицы  $A$ , соответствующие положительным координатам точки  $x$ , линейно независимы. При этом вершина  $x$  невырождена, если  $|J(x)| = m$ , и вырождена в противном случае, т. е. если  $|J(x)| < m$ .

Базисом вершины  $x$  множества  $X$  называется произвольная система из  $m$  линейно независимых столбцов матрицы  $A$ , включающая в себя все столбцы, соответствующие положительным координатам точки  $x$ . Другими словами, система  $\{a^j \mid j \in J\}$ , где  $J \subset \{1, \dots, n\}$ , есть базис вершины  $x$ , если это базис в  $\mathbb{R}^m$  (в обычном смысле) и  $J(x) \subset J$ . Переменные  $x_j$  ( $j \in J$ ), соответствующие данному базису  $\{a^j \mid j \in J\}$ , называются *базисными*.

Ясно, что невырожденная вершина  $x$  имеет единственный базис  $\{a^j \mid j \in J(x)\}$ . У вырожденной вершины базисов может быть несколько, причем условие  $\text{rang } A = m$  обеспечивает существование по крайней мере одного базиса.

Симплекс-метод представляет собой вычислительную процедуру, которая генерирует последовательность вершин  $x^0, x^1, \dots, x^t$  вместе с некоторыми их базисами. На очередной  $t$ -й итерации в зависимости от текущего значения параметров либо делается один из двух выводов:

1)  $x^t$  — решение задачи (6.1);

2) задача (6.1) не имеет решения,

либо строится следующая вершина  $x^{t+1}$ . Если при этом вершина  $x^t$  невырождена, то в новой вершине целевая функция принимает заведомо большее значение:

$$\langle c, x^{t+1} \rangle > \langle c, x^t \rangle. \quad (6.2)$$

Если же вершина  $x^t$  вырождена, то либо выполняется условие (6.2), либо  $x^{t+1} = x^t$ , т. е. перехода к новой вершине не происходит, а итогом итерации является лишь замена одного базиса вершины  $x^t$  другим. Перебор базисов может продолжаться несколько итераций, но рано или поздно находится такой базис, при котором осуществляется переход в новую вершину с большим значением целевой функции.

Подобная процедура за конечное число итераций приводит к выводу 1) или 2), поскольку число вершин поли-

эдра  $X$  конечно и среди них обязательно имеется решение задачи (6.1), если она вообще разрешима (см. теоремы 4.1, 4.3 и 5.5).

Приступим к более детальному описанию.

**2. Итерация симплекс-метода.** Пусть на начало  $t$ -й итерации уже получены вершина  $x^t$  и ее базис  $\{a^j | j \in J_t\}$ . Для краткости положим  $x = x^t$ ,  $J = J^t$ .

Поскольку  $\{a^j | j \in J\}$  есть базис в  $\mathbf{R}^m$ , то все столбцы матрицы  $A$  можно представить как линейные комбинации столбцов из базиса, т. е.

$$a^h = \sum_{j \in J} a^j \lambda_{jh}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.3)$$

где  $\lambda_{jh}$  ( $j \in J$ ) — некоторые числа. Вычислим величины

$$\Delta_k = \sum_{j \in J} c_j \lambda_{jh} - c_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.4)$$

Параметры  $\lambda_{jh}$  принято называть *коэффициентами замещения*, а параметры  $\Delta_k$  — *оценками замещения*. Для любого  $k \in J$ , очевидно, имеем

$$\lambda_{jh} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \in J \setminus \{k\}, \end{cases} \quad \Delta_k = 0. \quad (6.5)$$

В зависимости от знаков параметров  $\lambda_{jh}$ ,  $\Delta_k$  при  $j \in J$ ,  $k \notin J$  (т. е.  $k \in \{1, \dots, n\} \setminus J$ ) выполняется хотя бы одно из трех условий:

I. Для любого номера  $k \notin J$  справедливо неравенство  $\Delta_k \geq 0$ .

II. Существует такой номер  $s \notin J$ , что  $\Delta_s < 0$  и  $\lambda_{js} \leq 0$  при всех  $j \in J$ .

III. Существует такой номер  $s \notin J$ , что  $\Delta_s < 0$  и  $\lambda_{js} > 0$  при некотором  $j \in J$ .

Каждому из этих условий соответствует одно из следующих трех правил симплекс-метода.

**Теорема 6.1** (правило оптимальности). *Если выполняется условие I, то  $x$  — решение задачи (6.1).*

При этом решение  $y$  двойственной задачи может быть найдено как решение невырожденной квадратной системы линейных уравнений

$$\langle y, a^j \rangle = c_j, \quad j \in J.$$

**Теорема 6.2** (правило отсутствия решения). *Если выполняется условие II, то задача (6.1) не имеет решения.*

Пусть теперь выполняется условие III. Для указанного там номера  $s$  положим

$$\alpha = \min_{j \in J, \lambda_{js} > 0} \frac{x_j}{\lambda_{js}}. \quad (6.6)$$

Пусть минимум в (6.6) достигается на номере  $r$ , т. е.

$$\alpha = \frac{x_r}{\lambda_{rs}}, \quad r \in J, \quad \lambda_{rs} > 0. \quad (6.7)$$

Введем множество номеров

$$J' = (J \setminus \{r\}) \cup \{s\} \quad (6.8)$$

и точку  $x' \in \mathbb{R}^n$  с координатами

$$x'_j = \begin{cases} x_j - \alpha \lambda_{js}, & \text{если } j \in J \setminus \{r\}, \\ \alpha, & \text{если } j = s, \\ 0, & \text{если } j \notin J'. \end{cases} \quad (6.9)$$

**Теорема 6.3** (правило перехода к новой вершине). *Точка  $x'$  является вершиной множества  $X$ , а  $\{a^j | j \in J'\}$  — ее базисом; при этом*

$$\langle c, x' \rangle = \langle c, x \rangle - \alpha \Delta_s. \quad (6.10)$$

Указанные вершина и ее базис берутся для расчетов на следующей,  $(t+1)$ -й, итерации:  $x^{t+1} = x'$ ,  $J_{t+1} = J'$ . При этом говорят, что столбец  $a^r$  *выводится* из базиса, а столбец  $a^s$  *вводится* в базис. Элемент  $\lambda_{rs}$  называется *ведущим*.

Теперь мы можем конкретизировать возможные ситуации при переходе от  $x^t$  к  $x^{t+1}$ , упоминавшиеся в п. 1. Если число  $\alpha$  из (6.6) положительно, то из (6.10) и условия  $\Delta_s < 0$  следует (6.2). Неравенство  $\alpha > 0$  заведомо выполнено, если вершина  $x$  невырождена, так как в этом случае  $J = J(x)$ , т. е.  $x_j > 0$  при всех  $j \in J$ . Если же вершина  $x$  вырождена, то не исключено, что найдется такой номер  $r \in J$ , для которого  $\lambda_{rs} > 0$  и  $x_r = 0$ . Тогда окажется, что  $\alpha = 0$  и  $x' = x$ , т. е. итогом вычислений по формулам (6.6) — (6.9) будет лишь замена базиса  $\{a^j | j \in J\}$  вершины  $x$  ее же базисом  $\{a^j | j \in J'\}$  \*).

Заметим теперь, что процедура, описанная перед теоремой 6.3, содержит некоторую неопределенность: там не уточняется, как следует выбирать номер  $s$  из условия III и номер  $r$  из условий (6.6), (6.7), если таких  $s$  или  $r$  не-

\* По этой причине теорему 6.3 более точно следовало бы называть *правилом перехода к новому базису*.

сколько. Существуют примеры, показывающие, что при определенном выборе этих номеров описанная процедура может привести к циклическому перебору базисов одной и той же вырожденной вершины [30, с. 125]. В таком случае говорят, что произошло *зацикливание* симплекс-метода. Однако возможность этого неблагоприятного явления полностью исключается, если применять особые правила выбора  $r$  и  $s$ . Простейшее правило такого сорта состоит в следующем.

**Теорема 6.4** (правило Блэнда для устранения зацикливания). Пусть при выполнении условия III выбирается «первое подходящее  $s$ , а затем первое подходящее  $r$ », т. е.

$$s = \min \{k \notin J \mid \Delta_k < 0\},$$

$$r = \min \left\{ j \in J \mid \lambda_{js} > 0, \frac{x_j}{\lambda_{js}} = \alpha \right\},$$

где  $\alpha$  определено в (6.6). Тогда зацикливание симплекс-метода невозможно.

Итак, на следующей,  $(t+1)$ -й итерации необходимо выразить через базис  $\{a^j \mid j \in J_{t+1} = J'\}$  вершины  $x^{t+1} = x'$  все столбцы матрицы  $A$ :

$$a^k = \sum_{j \in J'} a^j \lambda'_{jk} = \sum_{j \in J \setminus \{r\}} a^j \lambda'_{jk} + a^s \lambda'_{sk}, \quad k = 1, \dots, n,$$

а затем вычислить параметры

$$\Delta_k = \sum_{j \in J'} c_j \lambda'_{jk} - c_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Вообще говоря, определение коэффициентов  $\lambda'_{jk}$  требует решения соответствующих систем линейных уравнений, что является довольно трудоемкой операцией. Однако оказывается, что параметры  $\lambda'_{jk}$ ,  $\Delta'_k$  можно легко рассчитать на базе уже известных величин  $\lambda_{jk}$ ,  $\Delta_k$ .

**Теорема 6.5** (связь между параметрами последовательных итераций). При любом  $k = 1, \dots, n$  выполняются соотношения

$$\lambda'_{jk} = \begin{cases} \lambda_{jk} - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_{rs}} \lambda_{rk}, & \text{если } j \in J \setminus \{r\}, \\ \frac{\lambda_{rk}}{\lambda_{rs}}, & \text{если } j = s, \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\Delta'_k = \Delta_k - \frac{\Delta_s}{\lambda_{rs}} \lambda_{rk}. \quad (6.12)$$

**3. Симплекс-таблица.** При организации вычислений по симплекс-методу основной конструкцией является так называемая *симплекс-таблица*  $T$ , соответствующая данной вершине  $x$  и ее базису  $\{a^j | j \in J\}$ . Эта таблица представляет собой матрицу размера  $(m+1) \times (n+1)$

Т а б л и ц а 15

|          | $a^1$          |         | $a^k$          |         | $a^s$          |         | $a^n$          | $b$                    |
|----------|----------------|---------|----------------|---------|----------------|---------|----------------|------------------------|
| $\cdot$  | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        | $\cdot$                |
| $\cdot$  | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        | $\cdot$                |
| $a^j$    | $\lambda_{j1}$ | $\dots$ | $\lambda_{jk}$ | $\dots$ | $\lambda_{js}$ | $\dots$ | $\lambda_{jn}$ | $x_j$                  |
| $\cdot$  | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        | $\cdot$                |
| $\cdot$  | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        | $\cdot$                |
| $a^r$    | $\lambda_{r1}$ | $\dots$ | $\lambda_{rk}$ | $\dots$ | $\lambda_{rs}$ | $\dots$ | $\lambda_{rn}$ | $x_r$                  |
| $\cdot$  | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        | $\cdot$                |
| $\cdot$  | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        | $\cdot$                |
| $\cdot$  | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        |         | $\cdot$        | $\cdot$                |
| $\Delta$ | $\Delta_1$     | $\dots$ | $\Delta_k$     | $\dots$ | $\Delta_s$     | $\dots$ | $\Delta_n$     | $\langle c, x \rangle$ |

(табл. 15). Над столбцами таблицы записываются буквенные обозначения  $a^1, \dots, a^n, b$  столбцов матрицы  $A$  и вектора правых частей ограничений задачи (6.1), а с левой стороны таблицы — обозначения  $a^j$  ( $j \in J$ ) столбцов, образующих базис, и обозначение  $\Delta$ . На указанные места таблицы заносятся численные значения параметров  $\lambda_{jk}, x_j, \Delta_{jk}$  ( $j \in J, k = 1, \dots, n$ ),  $\langle c, x \rangle^*$ ). В дальнейшем под строкой  $a^j$  таблицы  $T$  будем понимать  $(n+1)$ -мерный вектор  $(\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jn}, x_j)$ , под строкой  $\Delta$  — вектор  $(\Delta_1, \dots, \Delta_n, \langle c, x \rangle)$ .

После заполнения таблицы  $T$  проводится ее анализ на основе правил симплекс-метода. Если выполняется условие I или II, то расчеты заканчиваются. Если же выполнено условие III, то осуществляется переход к симплекс-таблице  $T'$ , соответствующей новой вершине  $x'$  и ее базису  $\{a^j | j \in J'\}$  (табл. 16). Для этого выбираются номера  $s$  и  $r$ , удовлетворяющие условиям III и (6.7) (в случае

\*) Отметим, что подобно тому, как в первых  $n$  столбцах стоят коэффициенты разложения векторов  $a^1, \dots, a^n$  по базису  $\{a^i | i \in J\}$ , в последнем столбце располагаются коэффициенты разложения вектора  $b$  по тому же базису:  $b = Ax = \sum_{j \in J} a^j x_j$ . Этим объясняется использование обозначения  $b$ .

неопределенности выбора используется правило Блэнда). Ведущий элемент  $\lambda_{rs}$  в таблице  $T$  помечается для наглядного указания на то, что столбец  $a^r$  должен быть выведен из базиса, а столбец  $a^s$  введен в него. В таблице  $T'$  слева вместо  $a^r$  ставится  $a^s$ , а остальные буквенные обозначения остаются неизменными. Из сопоставления формул (6.7) —

Т а б л и ц а 16

|          | $a^1$           |         | $a^k$           |         | $a^s$   |         | $a^n$           | $b$                     |
|----------|-----------------|---------|-----------------|---------|---------|---------|-----------------|-------------------------|
| $\cdot$  | $\cdot$         |         | $\cdot$         |         | $\cdot$ |         | $\cdot$         | $\cdot$                 |
| $\cdot$  | $\cdot$         |         | $\cdot$         |         | $\cdot$ |         | $\cdot$         | $\cdot$                 |
| $\cdot$  | $\cdot$         |         | $\cdot$         |         | $\cdot$ |         | $\cdot$         | $\cdot$                 |
| $a^j$    | $\lambda'_{j1}$ | $\dots$ | $\lambda'_{jk}$ | $\dots$ | 0       | $\dots$ | $\lambda'_{jn}$ | $x'_j$                  |
| $\cdot$  | $\cdot$         |         | $\cdot$         |         | $\cdot$ |         | $\cdot$         | $\cdot$                 |
| $\cdot$  | $\cdot$         |         | $\cdot$         |         | $\cdot$ |         | $\cdot$         | $\cdot$                 |
| $\cdot$  | $\cdot$         |         | $\cdot$         |         | $\cdot$ |         | $\cdot$         | $\cdot$                 |
| $a^s$    | $\lambda'_{s1}$ | $\dots$ | $\lambda'_{sk}$ | $\dots$ | 1       | $\dots$ | $\lambda'_{sn}$ | $x'_s$                  |
| $\cdot$  | $\cdot$         |         | $\cdot$         |         | $\cdot$ |         | $\cdot$         | $\cdot$                 |
| $\cdot$  | $\cdot$         |         | $\cdot$         |         | $\cdot$ |         | $\cdot$         | $\cdot$                 |
| $\Delta$ | $\Delta'_1$     | $\dots$ | $\Delta'_k$     | $\dots$ | 0       | $\dots$ | $\Delta'_n$     | $\langle c, x' \rangle$ |

(6.12) ясно, что вычисление параметров таблицы  $T'$  сводится к следующим элементарным операциям со строками таблицы  $T$ :

1) для получения строки  $a^j$  таблицы  $T'$  при  $j \in J \setminus \{r\}$  из строки  $a^j$  таблицы  $T$  вычитается ее строка  $a^r$ , умноженная на коэффициент  $\lambda_{js}/\lambda_{rs}$ ;

2) для получения строки  $a^s$  таблицы  $T'$  строка  $a^r$  таблицы  $T$  делится на коэффициент  $\lambda_{rs}$ ;

3) для получения строки  $\Delta$  таблицы  $T'$  из строки  $\Delta$  таблицы  $T$  вычитается ее строка  $a^r$ , умноженная на коэффициент  $\Delta_s/\lambda_{rs}$ .

При этом (в соответствии с (6.5)) элемент столбца  $a^s$  таблицы  $T'$ , стоящий на пересечении со строкой  $a^s$ , оказывается равным единице, а все остальные его элементы равны нулю.

Затем проводится анализ таблицы  $T'$ . Если выполняется условие III, то осуществляется переход к следующей симплекс-таблице и т. д.

4. Поиск начальной вершины и ее базиса. При описании симплекс-метода мы предполагали, что уже известны какая-то вершина  $x^0$  множества  $X$  и ее некоторый базис.

В некоторых частных случаях проблема их отыскания решается совсем просто.

Пусть, например, дана стандартная задача ЛП

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\rightarrow \max, \\ Ax &\leq b, \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ , причем  $b \geq 0$ . Чтобы применить к этой задаче симплекс-метод, ее необходимо привести к канонической форме:

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\rightarrow \max, \\ Ax + u &= b, \quad x \geq 0, \quad u \geq 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Обозначим через  $Z$  допустимое множество задачи (6.13):

$$Z = \left\{ z = (x, u) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{j=1}^n a^j x_j + \sum_{i=1}^m e^i u_i = b \right\},$$

где  $e^i$  есть  $i$ -й единичный орт в  $\mathbb{R}^m$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Ясно, что точка  $z = (0, b)$  является вершиной множества  $Z$ , а система  $\{e^1, \dots, e^m\}$  — ее базисом. Их и можно принять за начальные при решении задачи (6.13) симплекс-методом. Соответствующая симплекс-таблица составляется без труда, поскольку коэффициенты разложения векторов  $a^1, \dots, a^n$  по указанному базису совпадают с их координатами.

Рассмотрим теперь один из общих способов построения начальной вершины — *метод искусственного базиса*.

Пусть дана задача (6.1). Без ограничения общности будем считать, что  $b \geq 0$ . Рассмотрим задачу

$$\sum_{i=1}^m u_i \rightarrow \min, \quad (6.14)$$

$$Ax + u = b, \quad x \geq 0, \quad u \geq 0,$$

имеющую решение по теореме 5.2. Допустимые множества задач (6.13) и (6.14) совпадают. Применим к задаче (6.14) симплекс-метод, начав с той же вершины  $z = (0, b)$  множества  $Z$ . В результате будут найдены:

а) решение  $z^0 = (x^0, u^0)$  задачи (6.14), являющееся вершиной  $Z$ ;

б) базис  $\{a^j \mid j \in J\} \cup \{e^i \mid i \in I\}$  вершины  $z^0$ ; согласно определению, это означает, что векторы  $a^j$  ( $j \in J$ ),  $e^i$  ( $i \in I$ ) линейно независимы,  $|J| + |I| = m$ ,  $J(x^0) \subset J$ ,  $J(u^0) \subset I$ ;

в) коэффициенты разложения по этому базису всех столбцов матрицы  $A$  и единичных ортов в  $\mathbb{R}^m$ ; нас будет интересовать лишь разложение столбцов:

$$a^k = \sum_{j \in J} a^j \lambda_{jk} + \sum_{i \in I} e^i \mu_{ik}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.15)$$

Возможны следующие случаи.

А.  $u^0 \neq 0$ . Тогда легко доказывается от противного, что допустимое множество  $X$  задачи (6.1) пусто.

Б.  $u^0 = 0$ . Тогда, очевидно,  $x^0$  является вершиной  $X$ . Чтобы построить ее базис, рассмотрим три подслучая.

Б.1.  $I = \emptyset$ . Тогда  $\{a^j | j \in J\}$  — базис  $x^0$ . При этом формула (6.15) переходит в (6.3) и, чтобы начать процедуру симплекс-метода для решения исходной задачи (6.1), достаточно вычислить соответствующие оценки замещения по формуле (6.4).

Б.2.  $I \neq \emptyset$  и  $\mu_{rs} \neq 0$  при некоторых  $r \in I, s \in \{1, \dots, n\}$  (точнее,  $s \notin J$ ). Тогда система  $\{a^j | j \in J'\} \cup \{e^i | i \in I'\}$ , где  $J' = J \cup \{s\}, I' = I \setminus \{r\}$ , также образует базис вершины  $z^0 = (x^0, 0)$ . Коэффициенты разложения по этому базису столбцов матрицы  $A$  вычисляются по формулам, аналогичным (6.11). Если для нового базиса также выполняется условие Б.2, то описанную процедуру следует повторить. В результате за конечное число шагов мы придем к Б.1 или Б.3.

Б.3.  $I \neq \emptyset$  и  $\mu_{ik} = 0$  при всех  $i \in I, k = 1, \dots, n$ . В этом случае формула (6.15) также предстанет в виде (6.3), т. е.

$$a^k = \sum_{j \in J} a^j \lambda_{jk}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.16)$$

Однако система  $\{a^j | j \in J\}$  не является базисом в  $\mathbb{R}^m$ , поскольку  $|J| < m$ . Положив  $\bar{I} = \{1, \dots, m\} \setminus J$ , введем следующие обозначения:  $\bar{A}$  — матрица со строками  $a_i$  ( $i \in \bar{I}$ ),  $\bar{a}^j$  —  $j$ -й столбец матрицы  $\bar{A}$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $\bar{b}$  — вектор с координатами  $b_i$  ( $i \in \bar{I}$ ). Тогда

1)  $\text{rang } \bar{A} = |\bar{I}|$ , т. е. строки матрицы  $\bar{A}$  линейно независимы;

2) система  $Ax = b$  равносильна системе  $\bar{A}x = \bar{b}$ , т. е. в исходной задаче (6.1) ограничения  $\langle a_i, x \rangle = b_i$ , где  $i \in \bar{I}$ , являются «лишними»;

3)  $\{\bar{a}^j | j \in J\}$  есть базис вершины  $x^0$  множества  $X$ , записанного в виде

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | \bar{A}x = \bar{b}, x \geq 0\}.$$

Рассматривая в векторных равенствах (6.16) лишь координаты с номерами  $i \in \bar{I}$ , получаем разложение по указанному базису всех столбцов матрицы  $\bar{A}$ .

Таким образом, метод искусственного базиса позволяет помимо прочего выявить и исключить из системы  $Ax = b$  линейно зависимые уравнения, т. е. перейти к эквивалентной задаче ЛП, у которой матрица ограничений имеет полный строчный ранг.

#### УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Пусть полиэдр в  $\mathbb{R}^6$  задается системой

$$\begin{aligned} ax_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 2x_6 &= -1, \\ bx_1 + bx_2 - 2x_3 + x_4 + bx_5 + x_6 &= -1, \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + cx_5 - x_6 &= 2, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Найти все базисы его вершины  $x^0 = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$ .

|   | a  | b  | c     |    | a   | b | c  |    | a  | b  | c    |    | a  | b  | c  |
|---|----|----|-------|----|-----|---|----|----|----|----|------|----|----|----|----|
| 1 | 1  | 2  | -3    | 6  | 1   | 5 | -8 | 11 | 1  | 1  | -2   | 16 | 6  | 0  | 2  |
| 2 | 1  | 1  | 2     | 7  | -4  | 2 | 2  | 12 | -4 | 2  | -3   | 17 | -4 | 2  | -3 |
| 3 | 11 | -1 | 2     | 8  | -19 | 5 | -8 | 13 | 1  | 1  | -4/3 | 18 | 26 | -4 | 7  |
| 4 | 6  | 0  | 1/3   | 9  | -14 | 4 | 1  | 14 | 3  | -1 | 2    | 19 | 3  | 2  | -3 |
| 5 | 2  | 4  | -19/3 | 10 | -9  | 3 | 2  | 15 | 2  | 4  | 1    | 20 | 1  | -4 | 7  |

6.2. Сформулируем три утверждения относительно задачи ЛП и вершины  $x^0$  ее допустимого множества:

А.  $x^0$  — решение задачи.

Б. Задача не имеет решения.

В. Существует вершина, в которой целевая функция принимает большее значение, чем в  $x^0$ .

Используя правила симплекс-метода, выяснить, какое из этих утверждений имеет место в следующих случаях:

а)  $-2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + ax_4 + 3x_5 \rightarrow \max,$   
 $3x_1 + x_2 + 2x_3 + bx_4 + 4x_5 = 15,$   
 $-x_1 + cx_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -4,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5;$

$$x^0 = (1, 0, 0, 0, 3):$$

|   | a | b  | c  |    | a | b  | c  |    | a  | b  | c  |    | a  | b  | c  |
|---|---|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | -1 | 1  | 6  | 1 | -7 | 2  | 11 | 2  | -5 | -2 | 16 | 3  | -1 | -1 |
| 2 | 0 | -7 | 1  | 7  | 2 | -1 | -1 | 12 | -1 | -6 | -3 | 17 | -2 | -8 | 1  |
| 3 | 2 | -1 | 1  | 8  | 1 | 2  | 1  | 13 | 1  | -5 | 2  | 18 | -1 | -6 | 3  |
| 4 | 1 | -1 | -1 | 9  | 5 | -6 | 1  | 14 | 6  | -7 | 3  | 19 | 3  | -5 | -2 |
| 5 | 1 | -5 | -2 | 10 | 3 | -1 | 1  | 15 | 2  | -5 | 2  | 20 | 7  | -6 | 2  |

$$\begin{aligned}
 & \text{б) } x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\
 & \quad x_1 + ax_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 3, \\
 & \quad x_1 - bx_2 - x_3 + cx_4 = 1, \\
 & \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5;
 \end{aligned}$$

$$x^0 = (2, 0, 1, 0, 0):$$

|   | a  | b | c  |    | a  | b  | c  |    | a  | b  | c  |    | a  | b  | c  |
|---|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | -1 | 5 | 2  | 6  | 0  | 2  | 3  | 11 | 2  | 1  | -3 | 16 | -2 | 1  | 2  |
| 2 | 0  | 1 | 2  | 7  | -2 | -1 | 1  | 12 | -3 | -2 | 1  | 17 | 2  | 3  | 1  |
| 3 | -1 | 0 | -3 | 8  | -6 | 2  | 3  | 13 | 0  | 2  | -3 | 18 | -1 | 3  | -5 |
| 4 | 6  | 1 | -2 | 9  | 2  | -1 | 3  | 14 | -1 | 2  | 1  | 19 | 2  | 1  | 5  |
| 5 | 4  | 2 | 3  | 10 | -4 | 1  | -4 | 15 | -5 | 3  | -3 | 20 | 3  | -4 | 1  |

$$\begin{aligned}
 & \text{в) } x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\
 & \quad 2x_1 + 3x_2 + ax_3 + 7x_4 + 9x_5 = b, \\
 & \quad x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + cx_5 = 2, \\
 & \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5;
 \end{aligned}$$

$$x^0 = (0, 0, (b - 14)/a, 2, 0):$$

|   | a  | b  | c |    | a  | b  | c |    | a  | b  | c |    | a  | b  | c |
|---|----|----|---|----|----|----|---|----|----|----|---|----|----|----|---|
| 1 | -1 | 5  | 2 | 6  | -7 | 12 | 6 | 11 | -2 | 8  | 2 | 16 | -6 | 8  | 2 |
| 2 | -6 | 12 | 3 | 7  | -6 | 10 | 3 | 12 | -8 | 12 | 3 | 17 | 4  | 19 | 1 |
| 3 | 2  | 18 | 3 | 8  | 2  | 15 | 2 | 13 | -3 | 10 | 6 | 18 | -1 | 12 | 3 |
| 4 | -4 | 10 | 5 | 9  | 3  | 19 | 1 | 14 | -7 | 8  | 2 | 19 | -2 | 5  | 2 |
| 5 | -3 | 8  | 4 | 10 | 1  | 19 | 3 | 15 | 3  | 15 | 4 | 20 | 5  | 16 | 2 |

6.3. Используя теорию симплекс-метода, найти все значения параметра  $k$ , при которых точка  $x^* = (1, 2, 0, 1, 0)$

является решением задачи

$$\begin{aligned} 3x_1 + ax_2 + kx_3 - 5x_4 - 2kx_5 &\rightarrow \max, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 5, \\ bx_1 + cx_2 + x_3 + x_5 &= b + 2c, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5: \end{aligned}$$

|   | a  | b  | c  |    | a  | b  | c  |    | a  | b  | c  |    | a  | b  | c  |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 12 | -1 | -3 | 6  | 3  | 0  | -1 | 11 | 8  | -1 | -3 | 16 | 10 | 1  | 1  |
| 2 | 7  | 1  | 1  | 7  | 17 | 2  | 3  | 12 | 7  | -2 | -5 | 17 | 1  | -2 | -5 |
| 3 | 15 | 2  | 3  | 8  | 8  | 1  | 1  | 13 | 9  | 1  | 1  | 18 | 9  | 0  | -1 |
| 4 | 5  | 0  | -1 | 9  | 0  | -1 | -3 | 14 | 15 | -3 | -7 | 19 | 19 | 2  | 3  |
| 5 | 3  | -2 | -5 | 10 | 21 | 2  | 3  | 15 | -1 | 0  | -1 | 20 | -5 | -1 | -3 |

6.4. Решить симплекс-методом следующие задачи ЛП, начав с указанных вершин допустимых множеств \*):

а)  $ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max,$   
 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = b,$   
 $x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = c,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5;$

$$x^0 = (0, 0, (b - 7c)/5, c, 0):$$

|   | a | b  | c |    | a | b  | c |    | a | b  | c |    | a | b  | c |
|---|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|
| 1 | 2 | 8  | 1 | 6  | 3 | 32 | 4 | 11 | 4 | 15 | 2 | 16 | 5 | 22 | 3 |
| 2 | 1 | 9  | 1 | 7  | 2 | 33 | 4 | 12 | 2 | 16 | 2 | 17 | 1 | 23 | 3 |
| 3 | 5 | 10 | 1 | 8  | 1 | 34 | 4 | 13 | 3 | 17 | 2 | 18 | 4 | 24 | 3 |
| 4 | 4 | 11 | 1 | 9  | 5 | 35 | 4 | 14 | 5 | 18 | 2 | 19 | 3 | 25 | 3 |
| 5 | 3 | 12 | 1 | 10 | 4 | 36 | 4 | 15 | 1 | 19 | 2 | 20 | 2 | 26 | 3 |

б)  $x_1 + ax_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_6 \rightarrow \max,$   
 $-x_1 + x_2 + x_3 + (b-6)x_4 + (c+1)x_5 + x_6 = 3,$   
 $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2(b+3)x_4 + (2c+1)x_5 + 5x_6 = 6,$   
 $3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3(b+2)x_4 + (2c+1)x_5 + 6x_6 = 6,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6;$

$$x^0 = (0, 0, 3, 0, 0, 0), \text{ начальный базис } - \{a^1, a^2, a^3\}:$$

\*) В этом и следующих упражнениях в случае неопределенности выбора вводимого и выводимого столбцов использовать правило Блэнда.

|   | a  | b | c |    | a  | b | c |    | a  | b | c |    | a  | b | c |
|---|----|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|
| 1 | -1 | 4 | 5 | 6  | -5 | 4 | 1 | 11 | -2 | 3 | 2 | 16 | -4 | 4 | 4 |
| 2 | -3 | 3 | 4 | 7  | -4 | 3 | 2 | 12 | -3 | 4 | 3 | 17 | -3 | 3 | 3 |
| 3 | -4 | 2 | 3 | 8  | -1 | 2 | 3 | 13 | -4 | 5 | 4 | 18 | -2 | 2 | 2 |
| 4 | -5 | 1 | 2 | 9  | -2 | 1 | 4 | 14 | -1 | 2 | 5 | 19 | -1 | 1 | 1 |
| 5 | -2 | 5 | 1 | 10 | -3 | 5 | 5 | 15 | -5 | 1 | 1 | 20 | -6 | 5 | 5 |

в)  $ax_1 + x_2 + x_3 + (b+1)x_4 + (c-3)x_5 - 2x_6 \rightarrow \max,$   
 $2x_1 + x_2 + x_3 + (b+1)x_4 + (c-3)x_5 - 2x_6 = 1,$   
 $3x_1 + 3x_2 + x_3 + bx_4 + (c-12)x_5 - 11x_6 = 3,$   
 $-x_1 + 2x_2 - x_3 - (b+3)x_4 - (c+11)x_5 - 12x_6 = 2,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6;$   
 $x^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0),$  начальный базис —  $\{a^1, a^2, a^3\}:$

|   | a  | b | c |    | a  | b | c |    | a  | b | c |    | a  | b | c |
|---|----|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|
| 1 | -4 | 2 | 2 | 6  | -4 | 3 | 3 | 11 | -7 | 6 | 4 | 16 | -6 | 4 | 2 |
| 2 | -6 | 3 | 2 | 7  | -7 | 5 | 3 | 12 | -5 | 3 | 2 | 17 | -7 | 2 | 2 |
| 3 | -3 | 2 | 1 | 8  | -8 | 6 | 2 | 13 | -6 | 5 | 5 | 18 | -5 | 4 | 3 |
| 4 | -7 | 4 | 2 | 9  | -5 | 4 | 1 | 14 | -4 | 3 | 1 | 19 | -8 | 5 | 1 |
| 5 | -9 | 3 | 1 | 10 | -8 | 7 | 5 | 15 | -9 | 6 | 3 | 20 | -7 | 3 | 1 |

6.5. Решить симплекс-методом задачу

$$x_1 - x_2 - x_3 + ax_4 \rightarrow \max,$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 2,$$

$$bx_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 12,$$

$$2x_1 + cx_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 6,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4,$$

предварительно приведя ее к каноническому виду:

|   | a | b | c  |    | a | b | c |    | a | b | c  |    | a | b | c |
|---|---|---|----|----|---|---|---|----|---|---|----|----|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | -1 | 6  | 5 | 2 | 3 | 11 | 2 | 1 | 2  | 16 | 3 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 1  | 7  | 4 | 3 | 6 | 12 | 3 | 3 | 4  | 17 | 4 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 2 | -1 | 8  | 6 | 1 | 5 | 13 | 5 | 2 | -1 | 18 | 3 | 1 | 0 |
| 4 | 7 | 2 | 3  | 9  | 2 | 2 | 2 | 14 | 7 | 1 | 5  | 19 | 4 | 1 | 3 |
| 5 | 8 | 3 | 4  | 10 | 5 | 3 | 7 | 15 | 6 | 3 | 8  | 20 | 5 | 2 | 6 |

6.6. Найти методом искусственного базиса вершину полиэдра  $X$  в  $\mathbb{R}^4$ , задаваемого системой

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 - 2x_3 - x_4 &= b, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 &= c, \\ -4x_2 + x_3 + x_4 &= 8, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4: \end{aligned}$$

|   | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 6  | 7 | 1 | 3 | 11 | 5 | 1 | 4 | 16 | 3 | 1 | 5 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 7  | 8 | 2 | 4 | 12 | 6 | 2 | 5 | 17 | 4 | 2 | 6 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 8  | 2 | 3 | 5 | 13 | 7 | 3 | 6 | 18 | 5 | 3 | 7 |
| 4 | 5 | 4 | 5 | 9  | 3 | 4 | 6 | 14 | 8 | 4 | 7 | 19 | 6 | 4 | 8 |
| 5 | 6 | 5 | 6 | 10 | 4 | 5 | 7 | 15 | 2 | 5 | 8 | 20 | 7 | 5 | 9 |

6.7. Решить симплекс-методом следующую задачу ЛП, предварительно определив начальную вершину методом искусственного базиса:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 & & - & & 3x_5 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + x_2 & & + & & x_4 - & & x_5 = a, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & & - & & x_4 - & & \frac{b}{b+1}x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 & & + & & \frac{c}{c+1}x_4 + & & x_5 = 8, \\ x_j & \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5: \end{aligned}$$

|   | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 6  | 6 | 2 | 2 | 11 | 2 | 2 | 3 | 16 | 3 | 2 | 4 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 7  | 7 | 2 | 2 | 12 | 4 | 2 | 3 | 17 | 6 | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 8  | 2 | 1 | 3 | 13 | 6 | 2 | 3 | 18 | 3 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 1 | 2 | 9  | 4 | 1 | 3 | 14 | 3 | 1 | 4 | 19 | 6 | 3 | 4 |
| 5 | 5 | 2 | 2 | 10 | 6 | 1 | 3 | 15 | 6 | 1 | 4 | 20 | 3 | 4 | 4 |

6.8. Найти решение задачи

$$\begin{aligned} 5x_1 + & & 6x_2 + & & 13x_3 \rightarrow \min, \\ 5x_1 + (5 - a)x_2 + (12 - a)x_3 & \geq 2, \\ -x_1 + & & x_2 & & \leq 2, \\ & & x_2 + & & x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + & & 3x_2 + & & 6x_3 \geq 1, \\ bx_1 - (b + c)x_2 - & & cx_3 & \leq -15 \end{aligned}$$

путем применения симплекс-метода к двойственной задаче, начиная с вершины  $y^0 = (0, 1, 1, 2, 0)$ :

|   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|---|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1 | 1        | 1        | 4        | 6  | 1        | 1        | 3        | 11 | 9        | 1        | 2        | 16 | 1        | 5        | 1        |
| 2 | 3        | 1        | 4        | 7  | 3        | 2        | 3        | 12 | 7        | 2        | 2        | 17 | 1        | 4        | 1        |
| 3 | 5        | 1        | 4        | 8  | 5        | 2        | 3        | 13 | 5        | 3        | 2        | 18 | 1        | 3        | 1        |
| 4 | 7        | 1        | 4        | 9  | 7        | 1        | 3        | 14 | 3        | 4        | 2        | 19 | 1        | 2        | 1        |
| 5 | 9        | 1        | 4        | 10 | 9        | 2        | 3        | 15 | 1        | 1        | 2        | 20 | 1        | 1        | 1        |

6.9. Металлургический цех в качестве сырья закупает латунь типов I, II и III — различные по процентному составу сплавы меди и цинка (с некоторыми добавками) — и переплавляет это сырье в отношении 1:1:3, с тем чтобы получить сплав, содержащий 57% меди и 34% цинка.

Появилась возможность покупать сырье новых типов IV, V и VI. Характеристика сырья каждого типа приведена в табл. 17. Какое сырье следует покупать теперь цеху и в каких пропорциях его переплавлять, с тем

Таблица 17

| Тип сырья | Содержание меди (%) | Содержание цинка (%) | Стоимость (р./кг) |
|-----------|---------------------|----------------------|-------------------|
| I         | 75                  | 20                   | 5                 |
| II        | 60                  | 30                   | 3                 |
| III       | 50                  | 40                   | 2                 |
| IV        | <i>a</i>            | 95 — <i>a</i>        | <i>c</i>          |
| V         | <i>b</i>            | 90 — <i>b</i>        | 2                 |
| VI        | 45                  | 40                   | 1                 |

чтобы выпускать тот же сплав, расходуя на сырье как можно меньше денег?

|   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|---|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1 | 72       | 58       | 4,2      | 6  | 72       | 70       | 4,2      | 11 | 68       | 65       | 3,4      | 16 | 74       | 60       | 4,4      |
| 2 | 72       | 60       | 4        | 7  | 68       | 58       | 3,4      | 12 | 68       | 70       | 3,4      | 17 | 74       | 62       | 4,6      |
| 3 | 72       | 62       | 4,2      | 8  | 68       | 60       | 3,2      | 13 | 72       | 60       | 4,2      | 18 | 74       | 64       | 4,4      |
| 4 | 72       | 64       | 4        | 9  | 68       | 62       | 3,4      | 14 | 68       | 58       | 3,2      | 19 | 74       | 65       | 4,6      |
| 5 | 72       | 65       | 4,2      | 10 | 68       | 64       | 3,2      | 15 | 74       | 58       | 4,6      | 20 | 74       | 70       | 4,6      |

6.10. В пекарне для выпечки четырех видов хлеба используются мука двух сортов, маргарин и яйца. Имеющееся оборудование, производственные площади и поставки продуктов таковы, что в сутки можно переработать не более  $a$  кг муки сорта I,  $b$  кг муки сорта II,  $c$  кг маргарина,  $d$  штук яиц. В табл. 18 приведены нормы расхода продуктов, а также прибыль от продажи 1 кг хлеба каждого вида.

Т а б л и ц а 1

| Наименование продукта | Нормы расхода на 1 кг хлеба (по видам) |     |     |       |
|-----------------------|--|-----|-----|-------|
|                       | 1                                      | 2   | 3   | 4     |
| Мука I (кг)           | 0,5                                    | 0,5 | 0   | 0     |
| Мука II (кг)          | 0                                      | 0   | 0,5 | 0,5   |
| Маргарин (кг)         | 0,125                                  | 0   | 0   | 0,125 |
| Яйцо (шт.)            | 2                                      | 1   | 1   | 1     |
| Прибыль (к./кг)       | 14                                     | 12  | 5   | 6     |

Требуется определить суточный план выпечки хлеба, максимизирующий прибыль:

|    | $a$ | $b$ | $c$ | $d$  |    | $a$ | $b$ | $c$ | $d$  |
|----|-----|-----|-----|------|----|-----|-----|-----|------|
| 1  | 250 | 200 | 60  | 1380 | 11 | 210 | 180 | 50  | 1180 |
| 2  | 290 | 200 | 70  | 1540 | 12 | 260 | 190 | 60  | 1380 |
| 3  | 350 | 200 | 80  | 1740 | 13 | 300 | 200 | 70  | 1560 |
| 4  | 380 | 200 | 90  | 1880 | 14 | 330 | 210 | 80  | 1720 |
| 5  | 290 | 150 | 50  | 1280 | 15 | 370 | 220 | 90  | 1900 |
| 6  | 300 | 150 | 60  | 1380 | 16 | 220 | 160 | 50  | 1160 |
| 7  | 310 | 150 | 70  | 1480 | 17 | 270 | 210 | 60  | 1440 |
| 8  | 330 | 150 | 80  | 1600 | 18 | 310 | 190 | 70  | 1560 |
| 9  | 400 | 150 | 90  | 1820 | 19 | 340 | 200 | 80  | 1720 |
| 10 | 240 | 100 | 50  | 1080 | 20 | 390 | 180 | 90  | 1860 |

6.11. Для рытья котлована объемом  $a$  м<sup>3</sup> строители получили три экскаватора. Мощный экскаватор производительностью 22,5 м<sup>3</sup>/ч расходует в час 10 л бензина. Аналогичные характеристики среднего экскаватора — 10 м<sup>3</sup>/ч и  $b$  л/ч, малого — 5 м<sup>3</sup>/ч и 2 л/ч. Экскаваторы могут работать все одновременно, не мешая друг другу. Запас бензина у строителей ограничен и равен  $c$  литров. Если рыть котлован только малым экскаватором, то бензина заведомо хватит, но это будет очень долго. Каким

образом следует использовать имеющуюся технику, чтобы выполнить работу как можно скорее?

|    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1  | 1350     | 10/3     | 548      | 11 | 1890     | 11/3     | 777      |
| 2  | 1080     | 4        | 460      | 12 | 1200     | 4        | 510      |
| 3  | 1080     | 11/3     | 444      | 13 | 1800     | 10/3     | 728      |
| 4  | 1440     | 10/3     | 580      | 14 | 1380     | 4        | 580      |
| 5  | 1140     | 4        | 480      | 15 | 1620     | 11/3     | 666      |
| 6  | 1350     | 11/3     | 552      | 16 | 1500     | 4        | 630      |
| 7  | 1620     | 10/3     | 656      | 17 | 1980     | 10/3     | 800      |
| 8  | 2160     | 11/3     | 888      | 18 | 1890     | 11/3     | 780      |
| 9  | 1200     | 4        | 500      | 19 | 1860     | 4        | 780      |
| 10 | 1320     | 4        | 550      | 20 | 1140     | 4        | 470      |

### ЗАДАЧИ

6.1. Пусть полиэдр в  $\mathbb{R}^6$  задается системой

$$\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 + 4x_6 &= 4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_6 &= -1, \\ x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 &= 0, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Найти все базисы его вершины  $x^0 = (0, 1, 0, 1, 0, 0)$ .

6.2. Пусть полиэдр в  $\mathbb{R}^5$  задается системой

$$\begin{aligned} kx_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 3, \\ -x_2 + x_3 + (k-5)x_4 + 2x_5 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Найти все базисы его вершины  $x^0 = (0, 0, 1, 0, 0)$  в зависимости от параметра  $k$ .

6.3. Сформулируем три утверждения относительно задачи ЛП и вершины  $x^0$  ее допустимого множества:

А.  $x^0$  — решение задачи.

Б. Задача не имеет решения.

В. Существует вершина, в которой целевая функция принимает большее значение, чем в  $x^0$ .

Используя правила симплекс-метода, выяснить, какое из этих утверждений имеет место в следующих случаях:

а) 
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &\rightarrow \max, \\ -5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 14x_5 &= -7, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 - 4x_4 + 20x_5 &= -10, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5; \end{aligned}$$

$$x^0 = (2, 0, 0, 3, 0);$$

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad & -x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 \rightarrow \max, \\
 & 5x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -1, \\
 & -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 5, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5; \\
 & x^0 = (0, 1, 2, 0, 0);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad & 3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max, \\
 & -2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1, \\
 & 10x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5; \\
 & x^0 = (0, 1, 0, 0, 1);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{г)} \quad & x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \min, \\
 & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\
 & 2x_1 - 2x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 4, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5; \\
 & x^0 = (2, 1, 0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

6.4. Используя теорию симплекс-метода, найти все значения параметра  $k$ , при которых точка  $x^*$  является решением соответствующей задачи:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & x_1 + k^2x_2 - 2x_3 + 2kx_4 + 5x_5 - 10x_6 \rightarrow \max, \\
 & -2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 = 2, \\
 & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\
 & -2x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6, \\
 & x^* = (0, 1, 1, 3, 0, 0);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad & x_1 + 3kx_2 + 2x_3 + 15x_4 - k^2x_5 + 5x_6 \rightarrow \max, \\
 & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 4, \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6; \\
 & x^* = (0, 3, 0, 0, 1, 1);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad & -3x_1 + kx_2 + 2x_3 + x_4 - 2kx_5 + 5x_6 \rightarrow \max, \\
 & 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 4, \\
 & 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4, \\
 & -7x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_6 = -5, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6; \\
 & x^* = (0, 0, 1, 2, 0, 1).
 \end{aligned}$$

6.5. Решить симплекс-методом следующие задачи ЛП, начав с указанных вершин допустимых множеств:

а)  $5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max,$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 5,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4;$$

$$x^0 = (0, 0, 1, 5);$$

б)  $x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max,$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 3,$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4;$$

$$x^0 = (0, 0, 1, 3);$$

в)  $3x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 \rightarrow \max,$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 3,$$

$$4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 - 7x_6 = -2,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6;$$

$$x^0 = (0, 0, 1, 0, 1, 0);$$

г)  $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 \rightarrow \min,$

$$-x_1 + x_3 - 2x_4 = -2,$$

$$x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0,$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_4 + x_5 = 7,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5;$$

$$x^0 = (3, 1, 1, 0, 0);$$

д)  $3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 \rightarrow \max,$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2,$$

$$-4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 = -4,$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5;$$

$$x^0 = (1, 0, 0, 0, 0);$$

е)  $x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 + 3x_6 \rightarrow \max,$

$$x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1,$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 1,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6;$$

$$x^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

6.6. Решить симплекс-методом следующие задачи ЛП в стандартной форме, предварительно преобразовав их к

каноническому виду:

- а)  $-x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \rightarrow \max,$   
 $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 3,$   
 $-x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 1,$   
 $2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 1,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5;$
- б)  $x_1 + 2x_2 - 4x_3 \rightarrow \max,$   
 $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 1,$   
 $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3,$   
 $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \leq 2,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4;$
- в)  $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \min,$   
 $2x_1 - x_2 + x_4 \leq 3,$   
 $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 1,$   
 $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1,$   
 $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 1,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.$

6.7. Для каждой из указанных ниже систем обозначим через  $X$  множество ее решений. Используя метод искусственного базиса, определить, является ли полиэдр  $X$  непустым множеством. В этом случае найти его вершину  $x^0$ , исключить линейно зависимые уравнения системы и указать соответствующий базис  $x^0$ :

- а)  $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1,$   
 $x_1 - x_3 + 2x_4 = 1,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4;$
- б)  $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4,$   
 $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5,$   
 $3x_1 + 7x_3 + 2x_4 = 13,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4;$
- в)  $-x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3,$   
 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$   
 $2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4;$
- г)  $2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5,$   
 $-4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 9,$   
 $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 12,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5;$
- д)  $x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3,$   
 $-2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 5,$   
 $x_1 + x_2 + x_4 = 2,$   
 $x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4;$

$$\begin{aligned}
 \text{е) } & 3x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 6, \\
 & \quad \quad \quad x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\
 & \quad \quad \quad x_1 + 2x_3 + x_4 = 1, \\
 & \quad \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4,
 \end{aligned}$$

6.8. Решить симплекс-методом следующие задачи ЛП, определив начальные вершины методом искусственного базиса:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max, \\
 & -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\
 & \quad \quad \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\
 & \quad \quad \quad -x_1 + x_2 - x_5 = 4, \\
 & \quad \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 + 2x_6 \rightarrow \max, \\
 & \quad \quad \quad 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\
 & \quad \quad \quad -3x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 2, \\
 & \quad \quad \quad -5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_6 = 3, \\
 & \quad \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max, \\
 & \quad \quad \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\
 & \quad \quad \quad x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 1, \\
 & \quad \quad \quad -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\
 & \quad \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{г) } & 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 \rightarrow \min, \\
 & \quad \quad \quad 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 9x_5 = 30, \\
 & \quad \quad \quad 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 19, \\
 & \quad \quad \quad x_1 + x_2 + 3x_4 = 3, \\
 & \quad \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.
 \end{aligned}$$

6.9. Решить следующие задачи ЛП в основной форме, применив симплекс-метод к соответствующей двойственной задаче:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\
 & \quad \quad \quad 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\
 & \quad \quad \quad -x_1 + x_2 - x_3 \leq 1, \\
 & \quad \quad \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq -6, \\
 & \quad \quad \quad x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2, \\
 & \quad \quad \quad 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 12;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & 19x_1 + x_2 + 16x_3 \rightarrow \max, \\
 & \quad \quad \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq -2, \\
 & \quad \quad \quad 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 \leq -10, \\
 & \quad \quad \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3, \\
 & \quad \quad \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3, \\
 & \quad \quad \quad 3x_1 + 2x_3 \leq -1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } & 4x_1 + 6x_2 - 3x_3 \rightarrow \max, \\
 & \quad \quad \quad -3x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\
 & \quad \quad \quad -2x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 5,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\geq 3, \\ 2x_2 + x_3 &\leq 2. \end{aligned}$$

6.10. Вычислить радиус наибольшего шара, вписанного в полиэдр  $X \subset \mathbf{R}^3$ , который задается следующей системой неравенств:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1, & x_1 + x_2 - x_3 &\leq 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leq 1, & -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1, & -x_1 + x_2 - x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

(см. 5.121).

6.11. На звероферме могут выращиваться песцы, черно-бурые лисы, нутрии и норки. Для их питания используются три вида кормов. В табл. 19 приведены нормы расхода кормов, их ресурс в расчете на день, а также прибыль от реализации одной шкурки каждого зверя.

Т а б л и ц а 19

| Вид корма         | Нормы расхода кормов (кг/день) |      |        |       | Ресурс кормов (кг) |
|-------------------|--------------------------------|------|--------|-------|--------------------|
|                   | Песец                          | Лиса | Нутрия | Норка |                    |
| I                 | 1                              | 2    | 1      | 2     | 300                |
| II                | 1                              | 4    | 2      | 0     | 400                |
| III               | 1                              | 1    | 3      | 2     | 600                |
| Прибыль р./шкурка | 6                              | 12   | 8      | 10    |                    |

Определить, сколько и каких зверьков следует выращивать на ферме, чтобы прибыль от реализации шкурок была наибольшей.

6.12. Завод изготавливает корпуса для холодильников и комплектует их оборудованием, поставляемым без ограничений другими предприятиями. В табл. 20 указаны нормы трудозатрат, затрат материалов для изготовления корпусов, ограничения по этим ресурсам в расчете на месяц и прибыль от реализации холодильника каждой из пяти марок.

Найти месячный план выпуска холодильников, максимизирующий прибыль.

6.13. Для серийного изготовления детали механический цех может использовать пять различных технологий

Таблица 20

| Наименование ресурса      | Марка холодильника |    |     |     |    | Объем ресурса |
|---------------------------|--------------------|----|-----|-----|----|---------------|
|                           | 1                  | 2  | 3   | 4   | 5  |               |
| Трудозатраты (чел.-ч)     | 2                  | 3  | 5   | 4   | 4  | 9000          |
| Металл (м <sup>3</sup> )  | 2                  | 2  | 4   | 5   | 0  | 8500          |
| Пластик (м <sup>2</sup> ) | 1                  | 3  | 2   | 0   | 4  | 4000          |
| Краска (кг)               | 1                  | 2  | 3   | 3   | 2  | 5000          |
| Прибыль (р.)              | 40                 | 70 | 120 | 120 | 50 |               |

ее обработки на токарном, фрезерном, строгальном и шлифовальном станках. В табл. 21 указано время (в минутах) обработки детали на каждом станке в зависимости от технологического способа, а также общий ресурс рабочего времени станков каждого вида за одну смену.

Таблица 21

| Станки       | Технологические способы |   |   |   |   | Ресурс времени станков (мин) |
|--------------|-------------------------|---|---|---|---|------------------------------|
|              | 1                       | 2 | 3 | 4 | 5 |                              |
| Токарный     | 2                       | 1 | 3 | 0 | 1 | 4 100                        |
| Фрезерный    | 1                       | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 000                        |
| Строгальный  | 1                       | 2 | 0 | 3 | 2 | 5 800                        |
| Шлифовальный | 3                       | 4 | 2 | 1 | 1 | 10 800                       |

Требуется указать, как следует использовать имеющиеся технологии, с тем чтобы добиться максимального выпуска продукции.

Задачи 6.14—6.28 посвящены обоснованию сформулированных ранее основных положений симплекс-метода и некоторым дополнительным фактам. Решающую роль играют здесь утверждения следующих трех задач.

6.14. Пусть  $x$  — вершина допустимого множества  $X$  задачи (6.1),  $\{a^j | j \in J\}$  — базис этой вершины,  $\lambda_{jk}$ ,  $\Delta_k$  ( $j \in J$ ,  $k = 1, \dots, n$ ) — соответствующие коэффициенты и оценки замещения (см. (6.3), (6.4)). Рассмотрим любую такую точку  $x' \in R^n$ , что  $Ax' = b$ . Доказать, что

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{jk} x'_k = x_j, \quad j \in J, \quad (6.17)$$

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k x'_k = \langle c, x \rangle - \langle c, x' \rangle. \quad (6.18)$$

**6.15.** В обозначениях предыдущей задачи рассмотрим любой номер  $s \notin J$ , любое число  $\alpha$  и точку  $x' \in \mathbb{R}^n$  с координатами

$$x'_j = \begin{cases} x_j - \alpha \lambda_{js}, & \text{если } j \in J, \\ \alpha, & \text{если } j = s, \\ 0, & \text{если } j \notin J, \quad j \neq s. \end{cases} \quad (6.19)$$

Доказать, что  $Ax' = b$  и  $\langle c, x' \rangle = \langle c, x \rangle - \alpha \Delta_s$ .

**6.16.** В обозначениях задачи **6.14** рассмотрим любые такие  $r \in J$  и  $s \notin J$ , что  $\lambda_{rs} \neq 0$  (случай  $\lambda_{rs} < 0$  не исключается). Доказать, что система  $\{a^j | j \in J'\}$ , где  $J'$  определено в (6.8), является базисом в  $\mathbb{R}^n$ , причем коэффициенты разложения по нему векторов  $a^1, \dots, a^n$  вычисляются по формуле (6.11).

**6.17.** Доказать теорему 6.1.

**6.18.** Доказать теорему 6.2.

**6.19.** Доказать теоремы 6.3 и 6.5.

**6.20.** Доказать теорему 6.4.

**6.21.** Обосновать утверждения, сформулированные при разборе случаев Б.2 и Б.3 из п. 4.

**6.22\*.** Доказать, что для невырожденной вершины  $x$  справедливо утверждение, обратное к теореме 6.1: если  $x$  — решение задачи (6.1), то выполнено условие I.

**6.23.** Привести пример, когда вырожденная вершина  $x$  является решением задачи (6.1), но условие I не выполняется.

**6.24\*.** Доказать, что если вырожденная вершина  $x$  является решением задачи (6.1), то существует такой базис этой вершины, при котором условие I выполнено.

**6.25\*.** Пусть условие I выполняется в следующей усиленной форме:  $\Delta_k > 0$  при всех  $k \notin J$ . Доказать, что  $x$  — единственное решение задачи (6.1).

**6.26\*.** Доказать, что для невырожденной вершины  $x$  справедливо утверждение, обратное к предыдущему: если  $x$  — единственное решение задачи (6.1), то  $\Delta_k > 0$  при всех  $k \notin J = J(x)$ .

**6.27.** Пусть вершина  $x$  является решением задачи (6.1), причем для некоторого ее базиса выполнено следующее условие: существует такой номер  $s \notin J$ , что  $\Delta_s = 0$  и  $\lambda_{js} \leq 0$  при всех  $j \in J$  (ср. с условием II). Доказать, что множество решений задачи (6.1) неограничено.

**6.28\*.** Доказать, что если на данной итерации симплекс-метода происходит переход от вершины  $x$  к отличной от нее вершине  $x'$ , то они соседние (см. 4.59, 4.64).

## ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

В этой главе излагается теория выпуклых множеств, которая вместе с теорией выпуклых функций образует важный раздел современной математики — выпуклый анализ. Понятия и факты выпуклого анализа играют фундаментальную роль в теории оптимизации и особенно нелинейном программировании\*). Они находят широкое применение и в других областях прикладной математики: теории игр, исследовании операций, математической экономике и др. Как справедливо отмечается в предисловии книги [38], «выпуклый анализ — это раздел, изучить который целесообразно математикам самых различных направлений, и классических, и прикладных, и обязательно тем, чьи исследования связаны с экстремальными задачами».

## § 7. Начальные сведения о выпуклых множествах

## СВОДКА ОСНОВНЫХ ФАКТОВ

**1. Аффинные множества.** Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *аффинным*, если  $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X$  при всех  $x^1, x^2 \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ , т. е. если  $X$  вместе с любыми своими двумя точками содержит проходящую через них прямую\*\*).

**Теорема 7.1.** *Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  аффинно в том и только том случае, если для любого  $x^0 \in X$  множество*

$$L = X - x^0 = \{y \in \mathbb{R}^n | y = x - x^0, x \in X\}$$

---

\*) Как уже отмечалось в предисловии, выпуклые функции и нелинейное программирование должны составить предмет другой книги аналогичного характера, которую авторы надеются написать в недалеком будущем.

\*\*) Считается, что пустое множество принадлежит всем вводимым в пп. 1, 2 классам множеств. Вместе с тем в дальнейшем подразумевается, если не оговорено противное, что участвующие в рассмотрении множества непусты.

является линейным подпространством в  $\mathbf{R}^n$ ; при этом  $L$  не зависит от выбора  $x^0$  в  $X^*$ ).

Указанное подпространство  $L$  называется *параллельным* аффинному множеству  $X$  и обозначается через  $\text{Lin } X$ .

**Теорема 7.2.** Множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  аффинно в том и только том случае, если его можно представить как множество решений системы из конечного числа линейных

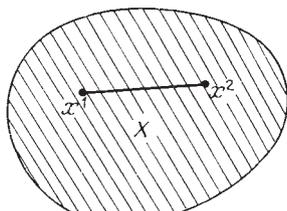


Рис. 28

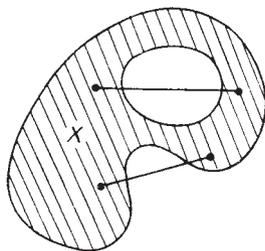


Рис. 29

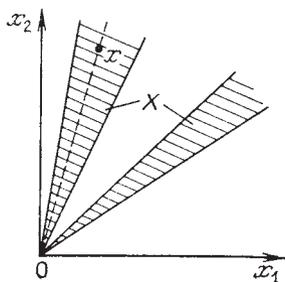


Рис. 30

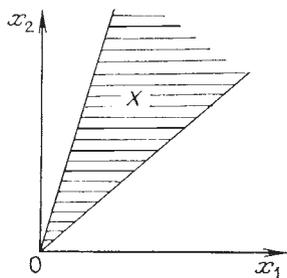


Рис. 31

уравнений, или (что то же самое) как пересечение конечного числа гиперплоскостей, т. е.

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = b\} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a_i, x \rangle = b_i, i = 1, \dots, m\},$$

где  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ .

**Следствие 7.1.** Любое аффинное множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  замкнуто, причем если  $X \neq \mathbf{R}^n$ , то  $X$  принадлежит некоторой гиперплоскости и, значит,  $X$  не имеет внутренних точек, т. е.  $\text{int } X = \emptyset$ .

**2. Выпуклые множества и выпуклые конусы.** Множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  называется *выпуклым*, если  $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in$

\*) Отметим, что это теорема, а также теоремы 7.2, 7.10 уже приводились ранее в связи с изучением простейших представителей выпуклых множеств — полиэдров (см. задачи 4.7, 4.8, 4.40).

$\in X$  при всех  $x^1, x^2 \in X, \lambda \in [0, 1]$ , т. е. если  $X$  вместе с любыми своими двумя точками  $x^1$  и  $x^2$  содержит соединяющий их отрезок.

Так, на рис. 28 изображено выпуклое множество, а на рис. 29 — невыпуклое.

Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется

1) *конусом*, если  $\lambda x \in X$  при всех  $x \in X, \lambda \geq 0$ , т. е. если  $X$  вместе с любой своей точкой  $x$  содержит проходящий через нее луч с началом в нуле (рис. 30);

2) *выпуклым конусом*, если  $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \in X$  при всех  $x^1, x^2 \in X, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ , т. е. если  $X$  одновременно является выпуклым множеством и конусом (рис. 31).

**Теорема 7.3.** Пусть  $X_i$  ( $i \in I$ ) — выпуклые множества в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда их пересечение  $X = \bigcap_{i \in I} X_i$  также выпукло. Здесь  $I$  — любое (конечное или бесконечное) множество индексов.

**Теорема 7.4.** Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbb{R}^n, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  — любые числа. Тогда множество

$$X = \sum_{i=1}^m \alpha_i X_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^i, x^i \in X_i, i = 1, \dots, m \right\},$$

называемое *линейной комбинацией множеств*  $X_1, \dots, X_m$ , выпукло. В частности, выпуклы сумма и разность выпуклых множеств  $X_1$  и  $X_2$ , т. е. множества

$$X_1 \pm X_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x^1 \pm x^2, x^1 \in X_1, x^2 \in X_2\}.$$

**Теорема 7.5.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда его замыкание  $\bar{X}$  также выпукло.

Аналогичные утверждения справедливы для конусов и выпуклых конусов.

В связи с понятием суммы множеств отметим следующее полезное утверждение.

**Лемма 7.1.** Сумма двух замкнутых множеств, хотя бы одно из которых ограничено, замкнута.

**3. Комбинация точек и оболочки множеств.** Пусть  $x^1, \dots, x^m$  — точки из  $\mathbb{R}^n$ . Их линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \text{ называется}$$

1) *выпуклой*, если  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ ;

2) *неотрицательной*, если  $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ ;

3) *аффинной*, если  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ .

**Теорема 7.6.** *Выпуклое множество (выпуклый конус, аффинное множество) содержит всевозможные выпуклые (неотрицательные, аффинные) комбинации своих точек.*

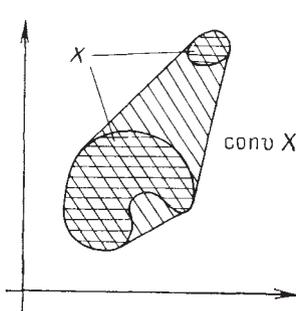


Рис. 32

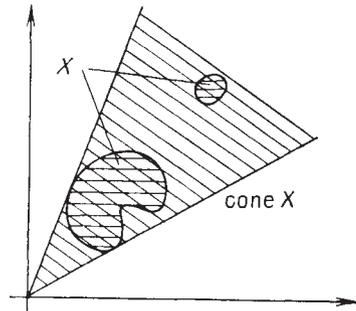


Рис. 33

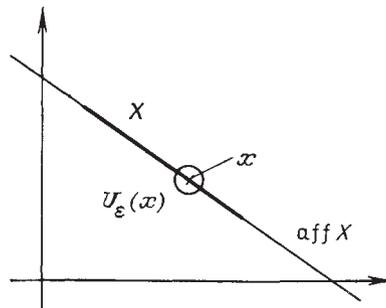


Рис. 34

Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Пересечение всех выпуклых множеств (выпуклых конусов, аффинных множеств) из  $\mathbb{R}^n$ , содержащих  $X$ , называется его *выпуклой (конической, аффинной) оболочкой* и обозначается через  $\text{conv } X$  ( $\text{cone } X$ ,  $\text{aff } X$ ) (рис. 32—34).

Ясно, что  $\text{conv } X$  — выпуклое множество, и если  $X$  выпукло, то  $\text{conv } X = X$ . Аналогичные замечания можно высказать относительно  $\text{cone } X$  и  $\text{aff } X$ . Отметим также, что множество  $\text{aff } X$  всегда замкнуто в силу следствия 7.1. Отсюда легко выводится, что для любого  $X \subset \mathbb{R}^n$  справедлива формула  $\text{aff } \bar{X} = \text{aff } X$ .

**Теорема 7.7.** *Выпуклая (коническая, аффинная) оболочка произвольного множества  $X$  совпадает с множеством всевозможных выпуклых (неотрицательных, аффинных) комбинаций точек из  $X$ .*

**Теорема 7.8.** Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — произвольные множества в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\text{conv} \left( \sum_{i=1}^m X_i \right) = \sum_{i=1}^m \text{conv} X_i.$$

Пусть  $x^1, \dots, x^m$  — точки из  $\mathbb{R}^n$ . Множество

$$X = \text{conv} \{x^1, \dots, x^m\}$$

называется *выпуклым многогранником* (рис. 35), множество

$$X = \text{cone} \{x^1, \dots, x^m\}$$

— *многогранным конусом* (рис. 36), множество

$$X = \text{conv} \{x^1, \dots, x^k\} + \text{cone} \{x^{k+1}, \dots, x^m\}$$

— *многогранным множеством* (рис. 37).

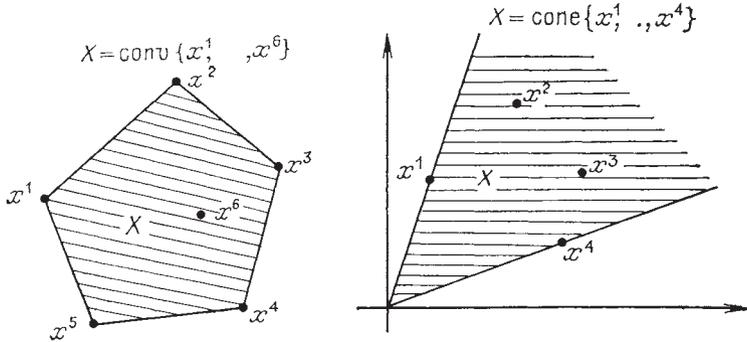


Рис. 35

Рис. 36

Иными словами, многогранное множество — это сумма выпуклого многогранника и многогранного конуса.

**Теорема 7.9.** Сумма конечного числа многогранных множеств (выпуклых многогранников, многогранных конусов) также является многогранным множеством (выпуклым многогранником, многогранным конусом).

**Теорема 7.10.** Если точка  $x$  является неотрицательной комбинацией точек  $x^1, \dots, x^m$ , не равных нулю одновременно, то  $x$  можно представить в виде неотрицательной комбинации линейно независимой подсистемы этих точек.

**Следствие 7.2.** Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда любую точку из  $\text{cone} X$  можно представить в виде неотрицательной комбинации не более  $n$  точек из  $X$ .

**Теорема 7.11 (Каратеодори).** Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда любую точку из  $\text{conv } X$  можно представить в виде выпуклой комбинации не более  $n + 1$  точек из  $X$ .

$$\begin{aligned} X &= P + K \\ P &= \text{conv} \{x^1, x^2, x^3\} \\ K &= \text{cone} \{x^4, x^5\} \end{aligned}$$

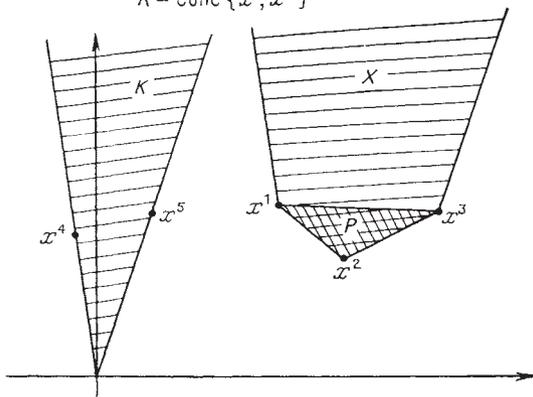


Рис. 37

**Теорема 7.12.** Если  $X$  — компакт в  $\mathbb{R}^n$ , то  $\text{conv } X$  также является компактом.

**Теорема 7.13.** Выпуклый многогранник есть компакт. Многогранный конус и многогранное множество замкнуты.

**4. Относительная внутренность выпуклого множества.** Точка  $x$  множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется его *относительно внутренней точкой*, если  $U_\varepsilon(x) \cap \text{aff } X \subset X$  при некотором  $\varepsilon > 0$  (см. рис. 34), т. е. если из условий  $\{x^k\} \subset \subset \text{aff } X$ ,  $x^k \rightarrow x$  следует, что  $x^k \in X$  при всех достаточно больших  $k$ .

Совокупность всех относительно внутренних точек множества называется его *отрицательной внутренностью* и обозначается через  $\text{ri } X$ . Множество  $X$  называется *относительно открытым*, если  $X = \text{ri } X$ .

Ясно, что если  $\text{int } X \neq \emptyset$ , то  $\text{ri } X = \text{int } X$ . В самом деле, если  $\text{int } X \neq \emptyset$ , то тем более  $\text{int}(\text{aff } X) \neq \emptyset$ ; тогда  $\text{aff } X = \mathbb{R}^n$  в силу следствия 7.1, но в таком случае определения  $\text{int } X$  и  $\text{ri } X$  просто совпадают.

**Теорема 7.14.** Пусть  $X$  — непустое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\text{ri } X \neq \emptyset$ .

**Теорема 7.15.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in \text{ri } X$ ,  $y \in \text{aff } X$ . Тогда  $x$  можно представить в виде  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ , где  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $z \in X$  (рис. 38).

**Теорема 7.16.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in \text{ri } X$ ,  $y \in \bar{X}$  и  $\lambda \in (0, 1]$ . Тогда точка  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  принадлежит  $\text{ri } X$  (рис. 39).

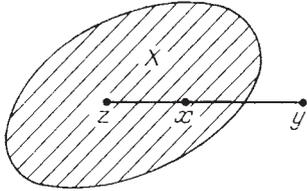


Рис. 38

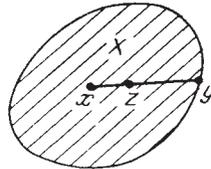


Рис. 39

**Следствие 7.3.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда его относительная внутренность  $\text{ri } X$  также выпукла.

**Теорема 7.17.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\bar{X} = \overline{\text{ri } X}$ ,  $\text{ri } X = \text{ri } \bar{X}$ ,  $\text{int } X = \text{int } \bar{X}$ .

Подчеркнем, что последняя формула справедлива и в том случае, если  $\text{int } X = \emptyset$ , т. е. из этого условия следует, что  $\text{int } \bar{X} = \emptyset$ .

Напомним, что множество  $\partial X = \bar{X} \setminus \text{int } X$  называется *границей*, а любая его точка — *граничной точкой* множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

Множество  $\text{rd } X = \bar{X} \setminus \text{ri } X$  назовем *относительной границей*, а его точки — *относительно граничными точками* множества  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

Из теоремы 7.17 непосредственно получаем следующее утверждение.

**Теорема 7.18.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\partial X = \partial \bar{X}$ ,  $\text{rd } X = \text{rd } \bar{X}$ .

**5. Размерность выпуклого множества.** Размерностью  $\dim X$  выпуклого множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется размерность линейного подпространства, параллельного его аффинной оболочке, т. е.  $\dim X = \dim [\text{Lin}(\text{aff } X)]$ .

Так, размерность точки (одноточечного множества) равна нулю, размерность отрезка, луча, прямой — единице независимо от размерности пространства, в котором они лежат. Если  $X = \emptyset$ , то полагаем  $\dim X = -1$ .

**Теорема 7.19.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\dim X = n$  в том и только том случае, если  $\text{int } X \neq \emptyset$ .

**6. Неограниченные выпуклые множества.** Напомним, что лучом, исходящим из точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  в направлении ненулевого вектора  $h \in \mathbb{R}^n$ , называется множество

$$l_{x^0 h}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x^0 + \alpha h, \alpha \geq 0\}.$$

**Теорема 7.20.** Пусть  $X$  — неограниченное замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

1) для любой точки  $x^0 \in X$  существует ненулевой вектор  $h \in \mathbb{R}^n$  такой, что  $l_{x^0 h}^+ \subset X$ ; иными словами, из каждой точки множества  $X$  исходит некоторый луч, целиком лежащий в  $X$  (рис. 40);

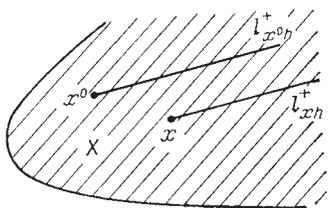


Рис. 40

2) если  $l_{x^0 h}^+ \subset X$  при некотором  $x^0 \in X$ , то  $l_{x h}^+ \subset X$  при любом  $x \in X$ ; иными словами, если некоторый луч содержится в  $X$ , то луч в том же направлении, но с началом в любой другой точке множества  $X$  также содержится в  $X$  (рис. 40).

**Рецессивным конусом** (непустого) множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется множество

$$K(X) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid l_{x^0 h}^+ \subset X \text{ при некотором } x^0 \in X\}.$$

Здесь считается, что  $l_{x^0 0}^+ = \{x^0\}$ . Поэтому всегда  $0 \in K(X)$ .

С учетом теоремы 7.20 следующая теорема очевидна.

**Теорема 7.21.** Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

1)  $X$  неограничено в том и только том случае, если  $K(X) \neq \{0\}$ ;

2)  $K(X)$  — замкнутый выпуклый конус, причем

$$K(X) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid l_{x^0 h}^+ \subset X\},$$

где  $x^0$  — произвольная точка из  $X$ .

#### УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Найти минимальное среди всех значений параметра  $k$ , при которых множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (ax_1^2 + 1)x_2 \leq b, x_2 \geq k\}$$

выпукло:

| a b |     | a b |     | a b |     | a b |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2 1 | 6   | 1 2 | 11  | 2 2 | 16  | 4 4 |
| 2   | 1 5 | 7   | 5 3 | 12  | 1 3 | 17  | 5 4 |
| 3   | 4 2 | 8   | 3 1 | 13  | 3 2 | 18  | 1 1 |
| 4   | 5 1 | 9   | 4 5 | 14  | 5 2 | 19  | 2 4 |
| 5   | 3 4 | 10  | 2 3 | 15  | 4 3 | 20  | 3 3 |

7.2. Доказать, что множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \leq 0, x_2 \geq 0\}$$

является выпуклым конусом, и изобразить его на плоскости:

| a | b | c   | a  | b  | c | a   | b  | c  | a | b  | c  |    |   |    |    |
|---|---|-----|----|----|---|-----|----|----|---|----|----|----|---|----|----|
| 1 | 2 | -7  | 6  | 6  | 4 | -5  | -6 | 11 | 2 | 1  | -3 | 16 | 6 | -1 | -5 |
| 2 | 3 | 4   | -4 | 7  | 5 | -13 | 6  | 12 | 3 | 1  | -4 | 17 | 2 | 7  | 3  |
| 3 | 2 | -5  | 2  | 8  | 5 | -17 | 6  | 13 | 3 | -1 | -2 | 18 | 2 | -3 | -5 |
| 4 | 2 | -5  | -3 | 9  | 3 | -1  | -4 | 14 | 5 | -8 | -4 | 19 | 6 | 1  | -5 |
| 5 | 4 | -15 | 9  | 10 | 3 | -8  | 4  | 15 | 5 | -2 | -3 | 20 | 4 | -5 | -6 |

7.3. Изобразить на плоскости сумму двух выпуклых множеств: отрезка  $X = [x^1, x^2]$ , где  $x^1 = (4, a)$ ,  $x^2 = (4, 3)$ , и

- 1) круга  $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - b)^2 + (x_2 - c)^2 \leq 1\}$ ;
- 2) квадрата  $X_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - b| \leq 1, |x_2 - c| \leq 1\}$ ;
- 3) треугольника  $X_3 = \text{conv}\{(-2, -1), (1, b), (3, -c)\}$ ;

| a | b  | c | a | b  | c  | a | b | c  | a  | b | c |    |    |   |   |
|---|----|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|
| 1 | 1  | 2 | 1 | 6  | -2 | 4 | 3 | 11 | 0  | 2 | 1 | 16 | 2  | 4 | 2 |
| 2 | 0  | 3 | 2 | 7  | 1  | 3 | 1 | 12 | -2 | 3 | 2 | 17 | 1  | 2 | 3 |
| 3 | -1 | 4 | 3 | 8  | 0  | 2 | 2 | 13 | 1  | 4 | 3 | 18 | 0  | 3 | 1 |
| 4 | 2  | 2 | 1 | 9  | -1 | 3 | 3 | 14 | 0  | 2 | 3 | 19 | -1 | 4 | 2 |
| 5 | 0  | 3 | 2 | 10 | 2  | 4 | 1 | 15 | -1 | 3 | 1 | 20 | 2  | 2 | 3 |

7.4. Изобразить на плоскости сумму треугольников

$$X_1 = \text{conv} \{(0, 0), (2, 0), (1, 2)\}$$

и

$$X_2 = \text{conv} \{(2, a), (5, b), (3, c)\}:$$

|   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|---|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1 | 2        | 2        | 1        | 6  | 3        | 3        | 2        | 11 | 4        | 4        | 3        | 16 | 1        | 1        | 0        |
| 2 | 2        | 3        | 1        | 7  | 3        | 4        | 2        | 12 | 4        | 5        | 3        | 17 | 1        | 2        | 0        |
| 3 | 2        | 4        | 1        | 8  | 3        | 5        | 2        | 13 | 4        | 6        | 3        | 18 | 1        | 3        | 0        |
| 4 | 2        | 5        | 1        | 9  | 3        | 6        | 2        | 14 | 4        | 7        | 3        | 19 | 1        | 4        | 0        |
| 5 | 2        | 6        | 1        | 10 | 3        | 7        | 2        | 15 | 4        | 8        | 3        | 20 | 1        | 5        | 0        |

7.5. Изобразить на плоскости многогранное множество  $X = \text{conv} \{(-1, -1), (1, a), (b, -2)\} + \text{cone} \{(2, 1), (c, 1)\}:$

|   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|---|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1 | 1        | 2        | 3        | 6  | 1        | 2        | 4        | 11 | 1        | 3        | 4        | 16 | 1        | 3        | 5        |
| 2 | 2        | 2        | 3        | 7  | 2        | 2        | 4        | 12 | 2        | 3        | 4        | 17 | 2        | 3        | 5        |
| 3 | 3        | 2        | 3        | 8  | 3        | 2        | 4        | 13 | 3        | 3        | 4        | 18 | 3        | 3        | 5        |
| 4 | 4        | 2        | 3        | 9  | 4        | 2        | 4        | 14 | 4        | 3        | 4        | 19 | 4        | 3        | 5        |
| 5 | 5        | 2        | 3        | 10 | 5        | 2        | 4        | 15 | 5        | 3        | 4        | 20 | 5        | 3        | 5        |

7.6. На плоскости  $\mathbf{R}^2$  заданы пять точек:

$$x^1 = (-a, 0), \quad x^2 = (0, 2), \quad x^3 = (b, 2),$$

$$x^4 = (b, 0), \quad x^5 = (0, -3),$$

а также точка  $x^0 = (c, -3/2)$ , принадлежащая  $\text{conv} \{x^1, \dots, x^5\}$ . Указать все такие наборы номеров  $\{i, j, k\} \subset \{1, \dots, 5\}$ , что  $x^0 \in \text{conv} \{x^i, x^j, x^k\}$ :

|   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|---|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1 | 3        | 10       | 1        | 6  | 2        | 12       | 1        | 11 | 3        | 12       | 5        | 16 | 3        | 15       | 1        |
| 2 | 4        | 10       | -1       | 7  | 3        | 12       | 4        | 12 | 6        | 15       | 5        | 17 | 2        | 12       | 2        |
| 3 | 5        | 10       | 4        | 8  | 4        | 15       | 7        | 13 | 6        | 15       | 3        | 18 | 2        | 12       | 4        |
| 4 | 5        | 8        | -1       | 9  | 2        | 10       | 2        | 14 | 6        | 3        | -1       | 19 | 5        | 12       | 3        |
| 5 | 5        | 6        | -2       | 10 | 6        | 5        | -2       | 15 | 8        | 4        | -3       | 20 | 2        | 10       | 4        |

7.7. В пространстве  $\mathbf{R}^3$  заданы пять точек:

$$x^1 = (-2, 3, 1), \quad x^2 = (a, b, 1), \quad x^3 = (24, 0, 2),$$

$$x^4 = (0, -12, 2), \quad x^5 = (-8, -12, 4),$$

а также точка  $x^0 = (c, 0, 1)$ , принадлежащая cone  $\{x^1, \dots, x^5\}$ . Указать все такие наборы номеров  $\{i, j, k\} \subset \{1, \dots, 5\}$ , что  $x^0 \in \text{cone}\{x^i, x^j, x^k\}$ :

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 3   | 4   | 3   | 6  | 4   | 4   | 4   | 11 | 5   | 3   | 1   | 16 | 6   | 4   | 3   |
| 2 | 4   | 4   | 0   | 7  | 4   | 4   | 1   | 12 | 5   | 3   | 6   | 17 | 3   | 4   | 1   |
| 3 | 6   | 4   | 4   | 8  | 8   | 5   | 3   | 13 | 6   | 5   | 4   | 18 | 3   | 4   | 4   |
| 4 | 6   | 5   | 2   | 9  | 6   | 5   | 0   | 14 | 6   | 5   | -1  | 19 | 4   | 4   | -1  |
| 5 | 5   | 3   | -1  | 10 | 5   | 3   | 0   | 15 | 5   | 3   | 2   | 20 | 6   | 4   | 5   |

7.8. В пространстве  $\mathbf{R}^3$  заданы шесть точек:

$$x^1 = (-2, 1, a), \quad x^2 = (7, -3, b), \quad x^3 = (c + 2, -1, -a),$$

$$x^4 = (1, -1, -1 - a), \quad x^5 = (1, 0, 1), \quad x^6 = (-9 - c, 4, a - b),$$

а также точка  $x^0 = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 x^j$ . Представить  $x^0$  в виде выпуклой комбинации не более четырех из точек  $x^1, \dots, x^6$ :

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 4   | -10 | 4   | 6  | 1   | -1  | 5   | 11 | 1   | -1  | 2   | 16 | 2   | -4  | 3   |
| 2 | 3   | -7  | 4   | 7  | 2   | -4  | 1   | 12 | 1   | -1  | 1   | 17 | 2   | -4  | 4   |
| 3 | 3   | -7  | 3   | 8  | 3   | -7  | 2   | 13 | 3   | -7  | 1   | 18 | 2   | -4  | 5   |
| 4 | 1   | -1  | 4   | 9  | 4   | -10 | 3   | 14 | 4   | -10 | 5   | 19 | 3   | -7  | 5   |
| 5 | 1   | -1  | 3   | 10 | 2   | -4  | 2   | 15 | 4   | -10 | 2   | 20 | 4   | -10 | 1   |

7.9. В пространстве  $\mathbf{R}^3$  заданы шесть точек:

$$x^1 = (4, -3, 2), \quad x^2 = (a, 6, 3), \quad x^3 = (-4, 0, b),$$

$$x^4 = (a + 12, 0, 7 - b), \quad x^5 = (a - 16, 9, 3b + 1),$$

$$x^6 = (2a - 16, 21, b),$$

а также точка  $x^0 = (c, -3, d)$ , принадлежащая cone  $\{x^1, x^2, x^3\}$ . Представить  $x^0$  в виде неотрицательной

комбинации точек  $x^1, \dots, x^6$  так, чтобы сумма коэффициентов была минимальной:

|   | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |    | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |    | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |    | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 4   | 1   | 20  | 18  | 6  | 1   | 5   | 14  | 26  | 11 | 1   | 4   | 14  | 24  | 16 | 2   | 5   | 16  | 26  |
| 2 | 1   | 2   | 14  | 20  | 7  | 3   | 2   | 18  | 20  | 12 | 5   | 1   | 22  | 18  | 17 | 3   | 4   | 18  | 24  |
| 3 | 2   | 3   | 16  | 22  | 8  | 2   | 1   | 16  | 18  | 13 | 4   | 3   | 20  | 22  | 18 | 5   | 3   | 22  | 22  |
| 4 | 3   | 1   | 18  | 18  | 9  | 2   | 4   | 16  | 24  | 14 | 6   | 5   | 24  | 26  | 19 | 5   | 6   | 22  | 28  |
| 5 | 4   | 2   | 20  | 20  | 10 | 1   | 3   | 14  | 22  | 15 | 5   | 2   | 22  | 20  | 20 | 3   | 5   | 18  | 26  |

7.10. Для каждой из точек  $x^1 = (a, 1)$ ,  $x^2 = (-2, 0)$ ,  $x^3 = (b, 1)$  определить, при каких значениях параметра  $k$  она принадлежит относительной внутренности полиэдра  $X \subset \mathbb{R}^2$ , задаваемого системой

$$\begin{aligned} -3x_1 + (b + 2)x_2 &\leq 6, \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq -10, \\ 2x_1 - cx_2 &\leq 5c, \\ kx_1 - x_2 &\leq -2k, \\ 6x_1 - (b - c)x_2 &\leq 3(b + c): \end{aligned}$$

|   | $a$  | $b$ | $c$ |    | $a$  | $b$ | $c$ |    | $a$  | $b$ | $c$ |    | $a$  | $b$ | $c$ |
|---|------|-----|-----|----|------|-----|-----|----|------|-----|-----|----|------|-----|-----|
| 1 | -1/3 | 3   | 5   | 6  | -2/3 | 2   | 5   | 11 | -1   | 1   | 2   | 16 | -1/3 | 3   | 7   |
| 2 | 0    | 4   | 6   | 7  | -1/3 | 3   | 4   | 12 | -1   | 1   | 3   | 17 | 0    | 4   | 6   |
| 3 | -2/3 | 2   | 4   | 8  | 0    | 4   | 5   | 13 | -2/3 | 2   | 3   | 18 | 0    | 4   | 7   |
| 4 | 1    | 7   | 8   | 9  | 1/3  | 5   | 8   | 14 | -2/3 | 2   | 6   | 19 | 1/3  | 5   | 6   |
| 5 | 1    | 7   | 9   | 10 | 2/3  | 6   | 8   | 15 | -1/3 | 3   | 6   | 20 | 1/3  | 5   | 7   |

7.11. При каждом значении параметра  $k$  найти размерность множества  $X \subset \mathbb{R}^3$ , задаваемого системой

$$\begin{aligned} ax_1 - bx_2 + cx_3 &\leq -1, \\ ax_1 + bx_2 - cx_3 &\leq 1, \\ 3ax_1 + bx_2 - cx_3 &\geq 1, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3 &\leq k: \end{aligned}$$

|   | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| 1 | 2 | 8 | 3 | 6  | 3 | 4 | 9 | 11 | 5 | 8 | 7 | 16 | 1 | 6 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 2 | 7  | 5 | 6 | 2 | 12 | 1 | 4 | 5 | 17 | 5 | 6 | 6 |
| 3 | 5 | 2 | 5 | 8  | 1 | 6 | 5 | 13 | 3 | 8 | 5 | 18 | 2 | 2 | 3 |
| 4 | 4 | 6 | 7 | 9  | 2 | 2 | 7 | 14 | 2 | 2 | 4 | 19 | 4 | 2 | 9 |
| 5 | 3 | 8 | 4 | 10 | 4 | 2 | 6 | 15 | 4 | 4 | 8 | 20 | 3 | 4 | 3 |

7.12. Вычислить и изобразить на плоскости рецессивный конус  $K(X)$  множества

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{ax_1^2 + x_2^2} + bx_1 + x_2 \leq c\}:$$

|   | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |    | a | b | c |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 1 | 6  | 8 | 4 | 2 | 11 | 6 | 4 | 4 | 16 | 4 | 4 | 1 |
| 2 | 5 | 7 | 3 | 7  | 1 | 5 | 5 | 12 | 1 | 3 | 5 | 17 | 5 | 3 | 3 |
| 3 | 2 | 4 | 5 | 8  | 3 | 3 | 3 | 13 | 5 | 5 | 3 | 18 | 7 | 5 | 4 |
| 4 | 3 | 7 | 4 | 9  | 9 | 7 | 1 | 14 | 7 | 3 | 1 | 19 | 2 | 2 | 5 |
| 5 | 1 | 9 | 2 | 10 | 9 | 5 | 4 | 15 | 9 | 9 | 2 | 20 | 7 | 7 | 2 |

### ЗАДАЧИ

7.1. Доказать, что множество  $X$  выпукло в том и только том случае, если  $\lambda_1 X + \lambda_2 X = (\lambda_1 + \lambda_2)X$  при всех  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$ .

7.2. Пусть  $X$  — замкнутое множество, причем для любых точек  $x^1, x^2 \in X$  существует такое число  $\lambda \in (0, 1)$ , что  $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X$ . Доказать, что  $X$  выпукло. Привести пример, показывающий, что условие замкнутости  $X$  здесь существенно.

Доказать выпуклость следующих множеств в  $\mathbb{R}^2$ .

7.3.  $X = \{x \mid x_1^3 \leq x_2\}$ .

7.4.  $X = \{x \mid x_1 x_2 \geq 1, x_1 > 0\}$ .

7.5.  $X = \{x \mid \sin x_1 \geq x_2, 0 \leq x_1 \leq \pi\}$ .

7.6.  $X = \{x \mid e^{x_1} \leq x_2\}$ .

7.7. Используя геометрические построения, найти минимальное среди всех значений параметра  $k$ , при которых множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^3 + x_2^3 \leq 1, x_1 + x_2 \geq k\}$$

выпукло.

7.8. Доказать, что шар в  $\mathbf{R}^n$  является выпуклым множеством.

7.9\*. Пусть  $A$  — неотрицательно определенная матрица размера  $n \times n$ . Доказать, что множество

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle Ax, x \rangle \leq \alpha\}$$

выпукло при любом  $\alpha \geq 0$ , причем если  $\alpha = 0$ , то  $X$  — линейное подпространство.

7.10. Доказать, что множество

$$X = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 \leq 0, x_1 \geq 0\}$$

является выпуклым конусом. Изобразить этот конус.

7.11. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^{n_1}, \dots, \mathbf{R}^{n_m}$  соответственно. Доказать, что их декартово произведение  $X = X_1 \times \dots \times X_m$  также выпукло.

7.12. Пусть  $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  — линейное отображение,  $X \subset \mathbf{R}^n$  и  $Y \subset \mathbf{R}^m$  — выпуклые множества. Доказать, что множества

$$A(X) = \{y \in \mathbf{R}^m \mid y = Ax \text{ при некотором } x \in X\},$$

$$A^{-1}(Y) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \in Y\},$$

т. е. образ  $X$  и прообраз  $Y$ , также выпуклы.

7.13. Убедиться, что теорема 7.4 является частным случаем утверждений из 7.11, 7.12.

7.14. Доказать теорему 7.5.

7.15. Изобразить на плоскости сумму множеств

$$X_1 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x_i| \leq 1, i = 1, 2\},$$

$$X_2 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

7.16. Доказать, что сумма открытого и произвольного множеств открыта.

7.17. Доказать лемму 7.1.

7.18. Привести пример двух замкнутых выпуклых множеств, сумма которых незамкнута.

7.19. Привести пример двух замкнутых выпуклых конусов, сумма которых незамкнута.

7.20. Проекцией множества  $X \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  (на пространство первых  $n$  координат) называется множество

$$P(X) = \{y \in \mathbf{R}^n \mid (y, z) \in X \text{ при некотором } z \in \mathbf{R}^m\}.$$

Доказать, что проекция выпуклого множества выпукла.

7.21. Доказать, что проекция компакта есть компакт.

7.22. Привести пример замкнутого выпуклого множества, проекция которого незамкнута.

7.23. Привести пример замкнутого выпуклого конуса, проекция которого незамкнута.

**7.24.** Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ . Доказать, что множество

$$X = \{(y, z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid (y, z^1) \in X_1, (y, z^2) \in X_2, \\ z = z^1 + z^2 \text{ при некоторых } z^1, z^2 \in \mathbf{R}^m\},$$

называемое *частичной суммой* множеств  $X_1$  и  $X_2$ , выпукло.

Заметим, что в предельных случаях  $n = 0, m = 0$  это множество имеет соответственно вид  $X = X_1 + X_2, X = X_1 \cap X_2$ .

**7.25.** Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что множество

$$X = \bigcup_{0 \leq \lambda < 1} (\lambda X_1 \cap (1 - \lambda) X_2),$$

называемое *инверсной суммой* множеств  $X_1$  и  $X_2$ , выпукло.

**7.26.** Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что множества

$$X = \bigcap_{x \in X_2} \bigcup_{\lambda \geq 1} (\lambda X_1 + (1 - \lambda)x), \\ Y = \bigcup_{x \in X_2} \bigcup_{\lambda \geq 1} (\lambda X_1 + (1 - \lambda)x),$$

называемые *полной тенью* и *полутенью* множества  $X_1$  относительно множества («источника света»)  $X_2$ , выпуклы.

**7.27\*.** Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ ,  $\Lambda$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^m$ , причем  $\Lambda \subset \mathbf{R}_+^m$ . Доказать, что множество

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i X_i \right), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$

выпукло. Привести пример, показывающий, что условие  $\Lambda \subset \mathbf{R}_+^m$  здесь существенно.

**7.28.** Доказать теорему Полтеровича — Спивака.

Пусть  $X$  — конус в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X \subset \mathbf{R}_+^n$ , и для любых  $x, y \in X$  векторы

$$\min \{x, y\} = (\min \{x_j, y_j\}), \quad \max \{x, y\} = (\max \{x_j, y_j\})$$

принадлежат  $X$ . Тогда  $X$  — выпуклый конус.

Привести примеры, показывающие существенность здесь того, что  $X$  — конус и  $X \subset \mathbf{R}_+^n$ .

В задачах 7.29—7.80 рассматриваются разнообразные вопросы, связанные с понятиями комбинаций точек и оболочек множеств.

- 7.29. Доказать теорему 7.6.  
 7.30. Доказать теорему 7.7.  
 7.31. Доказать теорему 7.8.  
 7.32. Доказать теорему 7.9.

Еще раз напомним, что теорема 7.10 уже была приведена в виде задачи 4.40. Следствие 7.2 с учетом теоремы 7.7 очевидно.

- 7.33. Доказать теорему 7.11.  
 7.34. Доказать теорему 7.12.  
 7.35. Доказать теорему 7.13.

7.36. Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество,

$x^k \in X$ ,  $\lambda_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ , причем точка

$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x^k$  существует (т. е. ряд сходится). Доказать, что

$x \in X$ . Существенно ли здесь условие замкнутости  $X$ ?

7.37\*. а) Пусть  $X_1$  — произвольное множество,  $X_2$  — выпуклое множество,  $A$  — ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $X_1 + A \subset X_2 + A$ . Доказать, что  $X_1 \subset \bar{X}_2$ .

б) Пусть  $X_1, X_2$  — замкнутые выпуклые множества,  $A$  — ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $X_1 + A = X_2 + A$ . Доказать, что  $X_1 = X_2$ .

Найти выпуклые и конические оболочки следующих множеств в  $\mathbb{R}^2$ .

7.38.  $X = \{x \mid x_1^2 = x_2\}$ .

7.39.  $X = \{x \mid x_1^2 = x_2, x_1 \geq 0\}$ .

7.40.  $X = \{x \mid x_1 x_2 = 1\}$ .

7.41.  $X = \{x \mid \sin x_1 = x_2, 0 \leq x_1 \leq \pi\}$ .

7.42.  $X = \{x \mid e^{x_1} = x_2\}$ .

7.43. Доказать, что выпуклая оболочка открытого множества открыта.

7.44. Верно ли, что выпуклая оболочка замкнутого множества и коническая оболочка выпуклого компакта замкнуты?

7.45. Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что

$$\text{cone } X = \bigcup_{\lambda \geq 0} (\lambda \text{ conv } X).$$

В частности, если  $X$  — выпуклое множество, то  $\text{cone } X = \bigcup_{\lambda \geq 0} (\lambda X)$ ; если  $X$  — конус, то  $\text{cone } X = \text{conv } X$ .

**7.46.** Пусть  $X$  — выпуклый компакт в  $\mathbf{R}^n$  и  $0 \notin X$ . Доказать, что  $\text{cone } X$  — замкнутое множество. Существенно ли здесь условие выпуклости  $X$ ?

**7.47.** Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать

$$\begin{aligned}\text{cone}(\text{conv } X) &= \text{conv}(\text{cone } X) = \text{cone } X, \\ \text{aff}(\text{conv } X) &= \text{conv}(\text{aff } X) = \text{aff } X,\end{aligned}$$

и если  $0 \in X$ , то

$$\text{aff}(\text{cone } X) = \text{cone}(\text{aff } X) = \text{aff } X,$$

причем в этом случае  $\text{aff } X$  является линейным подпространством. Верна ли последняя формула для произвольного  $X$ ?

**7.48.** Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$\text{aff}(\text{cone } X) = \text{cone } X - \text{cone } X.$$

Изобразить суммы следующих пар множеств в  $\mathbf{R}^2$ .

**7.49.**  $X_1 = \text{conv} \{(1, 2), (1, -3)\},$

$$X_2 = \text{conv} \{(2, -3), (4, -1), (0, 1), (3, 2)\}.$$

**7.50.**  $X_1 = \text{conv} \{(1, 1), (-3, 1), (2, -4)\},$

$$X_2 = \text{conv} \{(-1, 0), (1, 3), (-2, 2)\}.$$

**7.51.** Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — произвольные множества в  $\mathbf{R}^{n_1}, \dots, \mathbf{R}^{n_m}$  соответственно. Доказать, что

$$\begin{aligned}\text{conv}(X_1 \times \dots \times X_m) &= \text{conv } X_1 \times \dots \times \text{conv } X_m, \\ \text{aff}(X_1 \times \dots \times X_m) &= \text{aff } X_1 \times \dots \times \text{aff } X_m,\end{aligned}$$

и если  $0 \in X_1, \dots, 0 \in X_m$ , то

$$\text{cone}(X_1 \times \dots \times X_m) = \text{cone } X_1 \times \dots \times \text{cone } X_m.$$

Верна ли последняя формула для произвольных множеств?

**7.52.** Пусть  $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  — линейное отображение,  $X$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$\begin{aligned}\text{conv } A(X) &= A(\text{conv } X), \quad \text{cone } A(X) = A(\text{cone } X), \\ \text{aff } A(X) &= A(\text{aff } X).\end{aligned}$$

**7.53.** Доказать, что образ многогранного множества (выпуклого многогранника, многогранного конуса) при линейном отображении также является многогранным

множеством (выпуклым многогранником, многогранным конусом).

**7.54.** Доказать, что прообраз полиэдра при линейном отображении является полиэдром.

Верно также то, что при линейном отображении образ полиэдра является полиэдром, а прообраз многогранного множества — многогранным множеством. Непосредственное доказательство этих утверждений затруднительно. Однако с учетом 7.53, 7.54 они немедленно следуют из теоремы 8.14.

**7.55.** Убедиться, что теоремы 7.8, 7.9 являются частными случаями утверждений из 7.51—7.53 (ср. с 7.13).

**7.56.** Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — произвольные множества в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$\text{aff} \left( \sum_{i=1}^m X_i \right) = \sum_{i=1}^m \text{aff } X_i,$$

и если  $0 \in X_1, \dots, 0 \in X_m$ , то  $\text{cone} \left( \sum_{i=1}^m X_i \right) = \sum_{i=1}^m \text{cone } X_i$ .

Верна ли последняя формула для произвольных множеств?

**7.57.** Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — произвольные множества в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$\text{cone} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right) = \sum_{i=1}^m \text{cone } X_i,$$

и если  $0 \in X_1, \dots, 0 \in X_m$ , то  $\text{aff} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right) = \sum_{i=1}^m \text{aff } X_i$ .

Верна ли последняя формула для произвольных множеств?

**7.58.** Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$\text{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, x^i \in X_i, \right. \\ \left. \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\},$$

$$\text{cone} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, x^i \in X_i, \right. \\ \left. \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m \right\}.$$

7.59. Если  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые конусы в  $\mathbf{R}^n$ , то из 7.45, 7.57 или из 7.58 легко выводится, что

$$\operatorname{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right) = \sum_{i=1}^m X_i.$$

Доказать следующий более тонкий факт.

Пусть  $X_1, \dots, X_{m-1}$  — выпуклые конусы,  $X_m$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $0 \in X_m$ . Тогда

$$\overline{\operatorname{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right)} = \overline{\sum_{i=1}^m X_i}.$$

Привести пример, когда в данной формуле выпуклая оболочка незамкнута, в то время как сумма замкнута.

7.60. Пусть  $X_i = \operatorname{conv} Y_i$ , где  $Y_i$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Доказать, что

$$\operatorname{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right) = \operatorname{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m Y_i \right).$$

7.61. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые многогранники в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что множество  $X = \operatorname{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right)$  также является выпуклым многогранником. Справедливо ли аналогичное утверждение для многогранных множеств?

7.62. Пусть  $X_i = \operatorname{conv} Y_i + \operatorname{cone} Z_i$ , где  $Y_i, Z_i$  — произвольные множества в  $\mathbf{R}^n$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Доказать, что

$$\overline{\operatorname{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right)} = \overline{\operatorname{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m Y_i \right) + \operatorname{cone} \left( \bigcup_{i=1}^m Z_i \right)}.$$

7.63. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — многогранные множества в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что множество  $X = \operatorname{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right)$  также является многогранным.

7.64. Пусть  $\Pi(\mathbf{R}^n)$  — множество всех подмножеств пространства  $\mathbf{R}^n$ . Отображение  $H: \Pi(\mathbf{R}^n) \rightarrow \Pi(\mathbf{R}^n)$  называется операцией взятия оболочки, если оно удовлетворяет трем аксиомам:

- 1)  $X \subset H(X)$  для любого  $X \subset \mathbf{R}^n$ ;
- 2)  $H(H(X)) = H(X)$  для любого  $X \subset \mathbf{R}^n$ ;
- 3) из условия  $X \subset Y \subset \mathbf{R}^n$  следует  $H(X) \subset H(Y)$ .

Убедиться, что операции  $\operatorname{conv}$ ,  $\operatorname{cone}$ ,  $\operatorname{aff}$  являются операциями взятия оболочки.

7.65. Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Пересечение всех замкнутых выпуклых множеств (замкнутых выпуклых конусов), содержащих  $X$ , называется его *замкнутой выпуклой (замкнутой конической) оболочкой* и обозначается через  $\text{conv } X$  ( $\text{cone } X$ ). Доказать, что

а) операции  $\text{conv}$  и  $\text{cone}$ , а также просто операции замыкания множества являются операциями взятия оболочки;

б)  $\text{conv } X = \text{conv } X$ ,  $\text{cone } X = \text{cone } X$ .

7.66. Пусть  $H: \Pi(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$  — операция взятия оболочки. Множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  назовем  *$H$ -выпуклым*, если  $X = H(Y)$  при некотором  $Y \subset \mathbb{R}^n$ . Доказать, что

а) множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  является  $H$ -выпуклым в том и только том случае, если  $X = H(X)$ ;

б) для любого  $X \subset \mathbb{R}^n$  множество  $H(X)$  есть пересечение всех  $H$ -выпуклых множеств из  $\mathbb{R}^n$ , содержащих  $X$ .

7.67. На плоскости  $\mathbb{R}^2$  заданы пять точек:  $x^1 = (-2, 2)$ ,  $x^2 = (4, 1)$ ,  $x^3 = (1, 4)$ ,  $x^4 = (-1, 3)$ ,  $x^5 = (3, 3)$ , а также точка  $x^0 = (2, 1)$ , принадлежащая  $\text{cone}\{x^1, \dots, x^5\}$ . В качестве иллюстрации теоремы 7.10 и следствия 7.2 указать все такие наборы номеров  $\{i, j\} \subset \{1, \dots, 5\}$ , что  $x^0 \in \text{cone}\{x^i, x^j\}$ .

7.68. На плоскости  $\mathbb{R}^2$  заданы шесть точек:  $x^1 = (-3, 1)$ ,  $x^2 = (-3, 3)$ ,  $x^3 = (2, 5)$ ,  $x^4 = (4, 4)$ ,  $x^5 = (5, -2)$ ,  $x^6 = (0, -1)$ , а также точка  $x^0 = (3, 1)$ , принадлежащая  $\text{conv}\{x^1, \dots, x^6\}$ . В качестве иллюстрации теоремы 7.11 (Каратеодори) указать все такие наборы номеров  $\{i, j, k\} \subset \{1, \dots, 6\}$ , что  $x^0 \in \text{conv}\{x^i, x^j, x^k\}$ .

7.69. В пространстве  $\mathbb{R}^3$  заданы пять точек:  $x^1 = (2, 8, 2)$ ,  $x^2 = (6, 2, 2)$ ,  $x^3 = (0, -8, 4)$ ,  $x^4 = (9, -6, 3)$ ,  $x^5 = (-6, 9, 3)$ , а также точка  $x^0 = (1, 1, 1)$ , принадлежащая  $\text{cone}\{x^1, \dots, x^5\}$ . Указать все такие наборы номеров  $\{i, j, k\} \subset \{1, \dots, 5\}$ , что  $x^0 \in \text{cone}\{x^i, x^j, x^k\}$ .

7.70. В пространстве  $\mathbb{R}^3$  заданы шесть точек:  $x^1 = (1, 1, -1)$ ,  $x^2 = (1, -1, 0)$ ,  $x^3 = (0, -1, -1)$ ,  $x^4 = (-1, 1, 1)$ ,  $x^5 = (-3, 1, -1)$ ,  $x^6 = (2, -5, 1)$ . Выяснить, принадлежит ли точка  $x^0 = 0$  множеству  $\text{conv}\{x^1, \dots, x^6\}$ , и в случае положительного ответа представить  $x^0$  в виде выпуклой комбинации не более четырех из точек  $x^1, \dots, x^6$ .

7.71. В пространстве  $\mathbb{R}^3$  заданы шесть точек:  $x^1 = (1, -1, 1)$ ,  $x^2 = (-5, 12, 7)$ ,  $x^3 = (3, 1, 0)$ ,  $x^4 = (-2, 3, 3)$ ,  $x^5 = (2, 4, 9)$ ,  $x^6 = (2, 3, 4)$ , а также точка  $x^0 = (-1, 9, 16)$ , принадлежащая  $\text{cone}\{x^1, x^3, x^4\}$ . Представить  $x^0$  в виде неотрицательной комбинации точек  $x^1, \dots$

...,  $x^6$  так, чтобы сумма коэффициентов была минимальной.

7.72\*. Точки  $x^1, \dots, x^m$  из  $\mathbb{R}^n$  называются *аффинно зависимыми*, если существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , не равные нулю одновременно и такие, что

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 0.$$

В противном случае точки  $x^1, \dots, x^m$  называются *аффинно независимыми*. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

- а) точки  $x^1, \dots, x^m$  аффинно независимы;
- б) точки  $x^2 - x^1, \dots, x^m - x^1$  линейно независимы;
- в) точки  $(x^1, 1), \dots, (x^m, 1)$  линейно независимы.

Отсюда следует, что максимальное число аффинно независимых точек в  $\mathbb{R}^n$  равно  $n + 1$ .

7.73. Выпуклая оболочка  $m + 1$  аффинно независимых точек называется  *$m$ -мерным симплексом*. Доказать, что

- а) размерность  $m$ -мерного симплекса равна  $m$ ;
- б) размерность выпуклого множества  $X$  совпадает с максимальной размерностью симплексов, лежащих в  $X$ .

7.74\*. Доказать следующий аналог теоремы 7.10.

Если точка  $x$  является выпуклой (аффинной) комбинацией точек  $x^1, \dots, x^m$ , то  $x$  можно представить в виде выпуклой (аффинной) комбинации аффинно независимой подсистемы этих точек.

7.75. Пусть  $x^1, \dots, x^m$  — линейно независимые точки и  $x$  — их линейная комбинация, т. е.  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$ , причем  $\lambda_m \neq 0$ . Доказать, что точки  $x^1, \dots, x^{m-1}, x$  линейно независимы.

7.76. Пусть  $x^1, \dots, x^m$  — аффинно независимые точки и  $x$  — их аффинная комбинация, т. е.  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$ ,  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ , причем  $\lambda_m \neq 0$ . Доказать, что точки  $x^1, \dots, x^{m-1}, x$  аффинно независимы.

7.77\*. Доказать следующее уточнение теоремы Каратеодори.

Пусть  $X$  — множество в  $\mathbb{R}^n$ , имеющее не более  $n$  связанных компонент. Тогда любую точку из  $\text{conv } X$  можно представить в виде выпуклой комбинации не более  $n$  точек из  $X$ .

Множество  $A \subset X$  называется *связной компонентой* множества  $X$ , если оно является объединением всех связных подмножеств  $X$ , содержащих некоторую точку  $x^0 \in X$ .

**7.78\*.** Доказать теорему Радона.

Пусть  $x^1, \dots, x^m$  — точки из  $\mathbf{R}^n$ , причем  $m > n + 1$ . Тогда множество номеров  $I = \{1, \dots, m\}$  можно так разбить на два непересекающихся подмножества  $I_1$  и  $I_2$ , что

$$\text{conv} \{x^i | i \in I_1\} \cap \text{conv} \{x^i | i \in I_2\} \neq \emptyset.$$

**7.79\*.** Доказать теорему Хелли для конечного числа множеств.

Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $m \geq n + 1$ . Предположим, что каждые  $n + 1$  из этих множеств имеют общую точку. Тогда все они имеют общую точку.

**7.80\*.** Доказать теорему Хелли для бесконечного числа множеств.

Пусть  $X_i$  ( $i \in I$ ) — выпуклые компакты в  $\mathbf{R}^n$ , каждые  $n + 1$  из которых имеют общую точку. Тогда все они имеют общую точку.

Теоремы Хелли, Радона и Каратеодори относятся к числу важнейших фактов конечномерного выпуклого анализа. Их разнообразные применения можно найти в [14, 25, 28].

Задачи **7.81—7.104** посвящены понятию относительной внутренней, играющему весьма важную роль в выпуклом анализе. Читателю, стремящемуся овладеть техникой выпуклого анализа, мы рекомендуем отнестись к этим задачам с повышенным вниманием.

**7.81.** Доказать теорему 7.14.

**7.82.** Доказать теорему 7.15.

**7.83.** Доказать теорему 7.16.

**7.84.** Доказать теорему 7.17.

**7.85.** Доказать теорему 7.19.

**7.86.** Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$  и  $x \in \text{ri } X$ . Доказать, что  $U_\varepsilon(x) \cap \text{aff } X \subset \text{ri } X$  при некотором  $\varepsilon > 0$ .

Поскольку  $\text{aff}(\text{ri } X) \subset \text{aff } X$ , то это означает, что  $\text{ri}(\text{ri } X) = \text{ri } X$ , т. е.  $\text{ri } X$  есть относительно открытое множество. Отсюда следует, что вторую формулу в теореме 7.18 можно продолжить:  $\text{rd } X = \text{rd } \bar{X} = \text{rd}(\text{ri } X)$ .

**7.87.** Доказать, что любое аффинное множество относительно открыто.

В частности,  $\text{ri} \{x\} = \{x\}$  для любого  $x \in \mathbf{R}^n$ .

7.88. Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $\text{aff}(\text{ri } X) = \text{aff } X$ .

7.89. Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что любое из соотношений

$$\bar{X}_1 = \bar{X}_2, \quad \text{ri } X_1 = \text{ri } X_2, \quad \text{ri } X_2 \subset X_1 \subset \bar{X}_2$$

влечет остальные два.

7.90. Пусть выпуклые множества  $X_1$  и  $X_2$  таковы, что  $X_1 \subset X_2$ . Следует ли отсюда, что  $\text{ri } X_1 \subset \text{ri } X_2$ ?

7.91\*. Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X_1 \subset \bar{X}_2$  и  $\bar{X}_1 \cap \text{ri } X_2 \neq \emptyset$ . Доказать, что  $\text{ri } X_1 \subset \text{ri } X_2$ .

7.92. Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X_1 \subset \text{aff } X_2$  и  $\bar{X}_1 \cap \text{ri } X_2 \neq \emptyset$ . Доказать, что  $\text{ri } X_1 \cap \text{ri } X_2 \neq \emptyset$ .

В частности, если  $\bar{X}_1 \cap \text{int } X_2 \neq \emptyset$ , то  $\text{ri } X_1 \cap \text{int } X_2 \neq \emptyset$ .

7.93. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^{n_1}, \dots, \mathbf{R}^{n_m}$  соответственно. Доказать, что

$$\text{ri}(X_1 \times \dots \times X_m) = \text{ri } X_1 \times \dots \times \text{ri } X_m.$$

7.94\*. Пусть  $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  — линейное отображение,  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $\text{ri } A(X) = A(\text{ri } X)$ .

7.95. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  — любые числа. Доказать, что

$$\text{ri} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i X_i \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \text{ri } X_i.$$

7.96\*. Пусть  $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  — линейное отображение,  $Y$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^m$ , причем  $A^{-1}(\text{ri } Y) \neq \emptyset$ . Доказать, что

$$\text{ri } A^{-1}(Y) = A^{-1}(\text{ri } Y), \quad \overline{A^{-1}(Y)} = A^{-1}(\bar{Y}).$$

Привести пример, показывающий, что условие  $A^{-1}(Y) \neq \emptyset$  не обеспечивает этих соотношений.

7.97\*. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $\bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i \neq \emptyset$ . Положим  $X = \bigcap_{i=1}^m X_i$ . Доказать, что

$$\text{aff } X = \bigcap_{i=1}^m \text{aff } X_i, \quad \bar{X} = \bigcap_{i=1}^m \bar{X}_i, \quad \text{ri } X = \bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i.$$

Привести пример, показывающий, что условие  $X \neq \emptyset$  не обеспечивает этих соотношений.

7.98\*. Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3),  $I = I(X)$  — множество номеров жестких ограничений в си-

стеме, задающей  $X$  (см. 4.16), и  $J = \{1, \dots, m\} \setminus I$ . Доказать, что

$$\text{ri } X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid A_I x = b_I, \quad A_J x < b_J\},$$

где в случае  $I = \emptyset$  или  $J = \emptyset$  соответствующее из двух условий считается тривиально выполненным.

7.99\*. Пусть  $X$  — множество из 7.27. Доказать, что

$$\text{ri } X = \bigcup_{\lambda \in \text{ri } \Lambda} \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{ri } X_i \right), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

7.100. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ .

Положим  $X = \text{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right)$ ,  $Y = \text{cone} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right)$  (ср. с. 7.58). Доказать, что

$$\text{ri } X = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad x^i \in \text{ri } X_i, \quad \lambda_i > 0, \right. \\ \left. i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\},$$

$$\text{ri } Y = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad x^i \in \text{ri } X_i, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, m \right\}.$$

7.101\*. Пусть  $X = \text{conv} \{x^1, \dots, x^m\}$  — выпуклый многогранник,  $Y = \text{cone} \{x^1, \dots, x^m\}$  — многогранный конус. Доказать, что

$$\text{ri } X = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\},$$

$$\text{ri } Y = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, m \right\}.$$

7.102\*. Пусть  $X$  — ограниченное выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что любой луч, выходящий из точки  $x \in \text{ri } X$  и лежащий в  $\text{aff } X$ , пересекает относительную границу  $\text{гд } X$  в единственной точке.

7.103. Пусть множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  таково, что  $\text{ri } X \neq \emptyset$  и любой луч, выходящий из произвольной точки  $x \in \text{ri } X$ , пересекает  $\text{гд } X$  не более чем в одной точке. Доказать, что замыкание  $\bar{X}$  выпукло.

7.104\*. Доказать, что множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  аффинно в том и только том случае, если  $\text{гд } X = \emptyset$ , т. е.  $\bar{X} = X = \text{ri } X$ .

Приведем теперь несколько задач на тему размерности выпуклого множества \*).

**7.105.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $\dim(\operatorname{ri} X) = \dim X = \dim \bar{X}$ .

**7.106.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $\dim(X + x^0) = \dim X$  при любом  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ .

**7.107\*.** Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $\operatorname{ri} X_1 \cap \operatorname{ri} X_2 \neq \emptyset$ . Доказать, что

$$\dim(X_1 \cap X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 + X_2).$$

Это утверждение является обобщением известной теоремы о размерности пересечения двух линейных подпространств [21, с. 59].

**7.108.** Привести пример, показывающий, что условие  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  не обеспечивает формулы из **7.107**.

**7.109.** Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $\bar{X}_1 \cap \operatorname{int} X_2 \neq \emptyset$ . Доказать, что  $\dim(X_1 \cap X_2) = \dim \bar{X}_1$ .

**7.110.** Найти размерность выпуклых множеств  $X \subset \mathbf{R}^3$ , задаваемых следующими системами:

а)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1,$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 1;$$

б)  $x_1 + x_2 + x_3 = 1,$

$$x_1 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1,$$

$$x_1^2 + x_2 + x_3^2 \leq 1,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$$

в)  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 1,$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3^2 \leq 1;$$

г)  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3,$

$$x_1 x_2 x_3 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

В заключение параграфа остановимся на свойствах неограниченных выпуклых множеств и их рецессивных конусов.

---

\*) Напомним, что ряд задач, посвященных размерности полиэдров, был приведен в § 4 (см. также 7.73, 7.85).

7.111. Доказать теорему 7.20.

7.112. Описать рецессивные конусы  $K(X)$  множеств  $X$  из 7.3—7.6.

7.113. Найти все  $c \in \mathbf{R}^n$ , при которых множество

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| + \langle c, x \rangle \leq 1\}$$

неограничено.

7.114. Привести пример, показывающий, что условие замкнутости  $X$  в теореме 7.20 существенно.

7.115. Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Предположим, что  $l_{xh}^+ \subset \bar{X}$  при некоторых  $x \in \text{ri } X$  и  $h \in \mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $l_{xh}^+ \subset \text{ri } X$ .

7.116\*. Доказать следующее уточнение теоремы 7.20 для незамкнутых множеств.

Пусть  $X$  — неограниченное выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Тогда

1) для любой точки  $x^0 \in \text{ri } X$  существует такой ненулевой вектор  $h \in \mathbf{R}^n$ , что  $l_{x^0h}^+ \subset \text{ri } X$ ;

2) если  $l_{x^0h}^+ \subset \bar{X}$  при некотором  $x^0 \in \bar{X}$ , то  $l_{xh}^+ \subset \text{ri } X$  при любом  $x \in \text{ri } X$ .

7.117\*. Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $K(X)$  — замкнутый выпуклый конус, причем  $K(\text{ri } X) = K(X) = K(\bar{X})$ ,  $\text{ri } X + K(X) \subset \text{ri } X$ ,  $\bar{X} + K(X) \subset \bar{X}$ .

7.118. Пусть  $X$  — выпуклый конус в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $K(X) = \bar{X}$ .

7.119\*. Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ ,  $h \in \mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $h \in K(X)$  в том и только том случае, если  $h = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k x^k$ , где  $x^k \in X$ ,  $\lambda_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ .

7.120. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — произвольные множества в  $\mathbf{R}^{n_1}, \dots, \mathbf{R}^{n_m}$  соответственно. Доказать, что

$$K(X_1 \times \dots \times X_m) = K(X_1) \times \dots \times K(X_m).$$

7.121. Пусть  $X_i$  ( $i \in I$ ) — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , пересечение которых непусто. Доказать, что

$$K\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} K(X_i).$$

7.122. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества, а  $Y_1, \dots, Y_m$  — ограниченные выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$K\left(\text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^m (X_i + Y_i)\right)\right) = K\left(\text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^m X_i\right)\right).$$

В частности,  $K(X_1 + Y_1) = K(X_1)$ .

**7.123.** Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$K\left(\operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^m X_i\right)\right) = K\left(\sum_{i=1}^m X_i\right).$$

В частности,  $K(\operatorname{conv}(X_1 \cup \{0\})) = K(X_1)$ .

**7.124.** Рецессивным подпространством (непустого) выпуклого множества  $X \subset \mathbf{R}^n$  называется множество

$$L(X) = \{h \in \mathbf{R}^n \mid l_{x^0 h} \subset X \text{ при некотором } x^0 \in X\},$$

где  $l_{x^0 h} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x = x^0 + \alpha h, \alpha \in \mathbf{R}\}$  — прямая, проходящая через точку  $x^0$  в направлении вектора  $h$  (здесь допускается случай  $h = 0$ , когда прямая вырождается в точку). Доказать, что  $L(X)$  — линейное подпространство в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $L(X) = K(X) \cap (-K(X))$ .

Описать рецессивные подпространства следующих множеств.

**7.125.**  $X = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \geq 1\}$ .

**7.126.**  $X = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ .

**7.127.** Пусть  $X$  — непустой полиэдр вида (4.3). Доказать, что

$$K(X) = \{h \in \mathbf{R}^n \mid \langle a_i, h \rangle \leq 0, i = 1, \dots, k, \\ \langle a_i, h \rangle = 0, i = k + 1, \dots, m\},$$

$$L(X) = \{h \in \mathbf{R}^n \mid \langle a_i, h \rangle = 0, i = 1, \dots, m\}$$

(ср. с 4.4, 4.5).

**7.128.** Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ ,  $L$  — линейное подпространство в  $\mathbf{R}^n$ ,  $L^\perp$  — ортогональное дополнение к нему. Доказать следующие утверждения:

а) если  $L \subset L(X)$ , то  $X = X \cap L^\perp + L$ ;

б) если  $L(X) \subset L$ , то множество  $X \cap L^\perp$  не содержит ни одной прямой.

Таким образом, взяв  $L = L(X)$ , получаем, что любое замкнутое выпуклое множество можно разложить на сумму линейного подпространства и замкнутого выпуклого множества, не содержащего ни одной прямой.

**7.129\*.** Пусть  $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  — линейное отображение,  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ , причем множество  $L =$

$= K(X) \cap \{h \in \mathbf{R}^n \mid Ah = 0\}$  является линейным подпространством. Доказать, что

$$\overline{A(X)} = A(\overline{X}), \quad K(A(X)) = A(K(X));$$

в частности, если  $X$  замкнуто, то  $A(X)$  также замкнуто.

Указанное условие на  $L$  можно записать в следующем виде: если  $h \in K(X)$  и  $Ah = 0$ , то  $-h \in K(X)$ . С учетом 7.124 ясно, что это условие равносильно также включению  $L \subset L(X)$ . Аналогичные замечания можно высказать в отношении задач 7.131, 7.132.

**7.130.** Привести примеры, показывающие существенность условия на  $L$  в 7.129.

**7.131.** Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем множество

$$L = \left\{ h \in \mathbf{R}^{mn} \mid h = (h^i), \quad h^i \in K(X_i), \quad i = 1, \dots, m, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^m h^i = 0 \right\}$$

является линейным подпространством. Доказать, что

$$\overline{\sum_{i=1}^m X_i} = \sum_{i=1}^m \overline{X_i}, \quad K\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) = \sum_{i=1}^m K(X_i);$$

в частности, если множества  $X_1, \dots, X_m$  замкнуты, то их сумма также замкнута.

**7.132.** Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем множество  $L = K(X_1) \cap (-K(X_2))$  является линейным подпространством. Доказать, что

$$\overline{X_1 + X_2} = \overline{X_1} + \overline{X_2}, \quad K(X_1 + X_2) = K(X_1) + K(X_2);$$

в частности, если множества  $X_1$  и  $X_2$  замкнуты, то их сумма также замкнута.

Это утверждение является обобщением для выпуклых множеств леммы 7.1: если, например, множество  $X_1$  ограничено, то  $K(X_1) = \{0\}$  и, значит,  $L = \{0\}$ .

**7.133\*.** Пусть  $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  — линейное отображение,  $Y$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^m$ , причем дополнительно выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1)  $A^{-1}(\text{ri } Y) \neq \emptyset$ ;
- 2)  $Y$  замкнуто и  $A^{-1}(Y) \neq \emptyset$ .

Доказать, что  $K(A^{-1}(Y)) = A^{-1}(K(Y))$ .

Полезно отметить, что формула для прообразов, аналогичная формуле в 7.129, была указана в 7.96, причем там также потребовалось условие 1). При условии 2) эта формула выполняется тривиально, так как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут.

7.134. Привести пример существенности условий 1) или 2) в 7.133.

7.135. Убедиться, что первая формула в 7.127 есть частный случай формулы из 7.133.

## § 8. Теоремы отделимости и их приложения

### СВОДКА ОСНОВНЫХ ФАКТОВ

#### 1. Сильная отделимость точки от замкнутого выпуклого множества.

**Теорема 8.1.** Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\pi_X(a)$  — проекция точки  $a \in \mathbb{R}^n$  на  $X$  (см. п. 3 § 1). Тогда

$$\langle a - \pi_X(a), x - \pi_X(a) \rangle \leq 0$$

при всех  $x \in X$ .

Геометрически это означает, что векторы  $a - \pi_X(a)$  и  $x - \pi_X(a)$  образуют неострый угол (рис. 41). Простой переформулировкой теоремы 8.1 получаем утверждение, являющееся исходным пунктом теории отделимости.

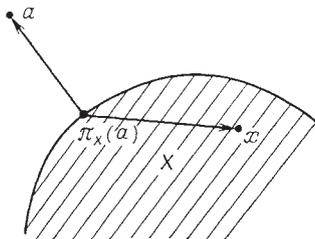


Рис. 41

**Теорема 8.2** (Минковского об отделимости точки от множества). Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $a$  — точка в  $\mathbb{R}^n$ , не принадлежащая  $X$ . Тогда существуют такие  $p \in \mathbb{R}^n$  и  $\beta \in \mathbb{R}$ , что

$$\langle p, x \rangle \leq \beta < \langle p, a \rangle \text{ при всех } x \in X.$$

Более точно, этому условию удовлетворяют

$$p = a - \pi_X(a) \text{ и } \beta = \langle p, \pi_X(a) \rangle.$$

Иными словами, утверждается существование такой гиперплоскости  $H_{p\beta}$ , что множество  $X$  оказывается в одном из полупространств, порождаемых  $H_{p\beta}$ , а точка  $a$  — внутри другого:  $X \subset H_{p\beta}^-$ ,  $a \in \text{int } H_{p\beta}^+$  (рис. 42). Кроме

того, при указанных конкретных  $p$  и  $\beta$  гиперплоскость  $H_{p\beta}$  содержит хотя бы одну точку из  $X$ :  $\pi_X(a) \in H_{p\beta}$ . Если взять любое число  $\beta'$ , удовлетворяющее условию  $\beta < \beta' < \langle p, a \rangle$ , то получим

$$\sup_X \langle p, x \rangle < \beta' < \langle p, a \rangle.$$

В таком случае говорят, что гиперплоскость  $H_{p\beta'}$  *сильно отделяет* точку  $a$  от множества  $X$  (рис. 42).

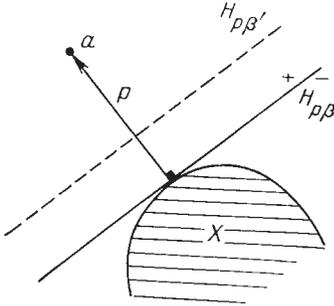


Рис. 42

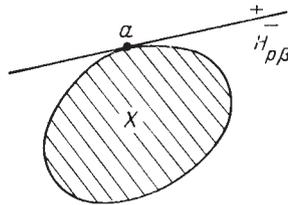


Рис. 43

**2. Опорные гиперплоскости.** Гиперплоскость  $H_{p\beta}$  называется

1) *опорной* к множеству  $X \subset \mathbb{R}^n$  в точке  $a \in \bar{X}$ , если  $X$  содержится в одном из полупространств, порожденных

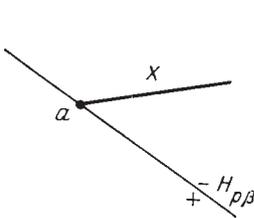


Рис. 44

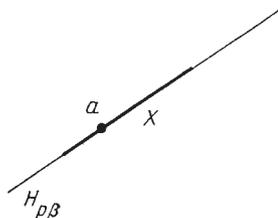


Рис. 45

этой гиперплоскостью, а сама она содержит точку  $a$ , т. е.

$$\langle p, x \rangle \leq \beta = \langle p, a \rangle \text{ при всех } x \in X; \quad (8.1)$$

2) *собственно опорной* к  $X$  в  $a$ , если она служит опорной к  $X$  в  $a$ , но не содержит целиком  $X$ , т. е.

$$\langle p, \bar{x} \rangle < \beta \text{ при некотором } \bar{x} \in X. \quad (8.2)$$

На рис. 43, 44 изображены собственно опорные гиперплоскости, на рис. 45 — просто опорная гиперплоскость.

Полупространство, порожаемое гиперплоскостью, опорной (собственно опорной) к  $X$  в  $a$ , и содержащее  $X$ , также называют *опорным (собственно опорным)* к  $X$  в  $a$ .

**Теорема 8.3.** *В любой граничной точке  $a$  выпуклого множества  $X \subset \mathbf{R}^n$  существует опорная гиперплоскость.*

**Теорема 8.4.** *В любой относительно граничной точке  $a$  выпуклого множества  $X \subset \mathbf{R}^n$  существует собственная опорная гиперплоскость.*

**3. Отделимость двух множеств.** Множества  $X_1$  и  $X_2$  из  $\mathbf{R}^n$  называются

1) *отделимыми*, если существуют такие  $p \in \mathbf{R}^n$ ,  $p \neq 0$ , и  $\beta \in \mathbf{R}$ , что

$$\langle p, x^1 \rangle \leq \beta \leq \langle p, x^2 \rangle \text{ при всех } x^1 \in X_1, x^2 \in X_2; \quad (8.3)$$

2) *собственно отделимыми*, если существуют такие  $p$  и  $\beta$ , что выполняется (8.3) и, кроме того,

$$\langle p, \bar{x}^1 \rangle < \langle p, \bar{x}^2 \rangle \text{ при некоторых } \bar{x}^1 \in X_1, \bar{x}^2 \in X_2; \quad (8.4)$$

3) *сильно отделимыми*, если существуют такие  $p$  и  $\beta$ , что

$$\sup_{X_1} \langle p, x^1 \rangle < \beta < \inf_{X_2} \langle p, x^2 \rangle. \quad (8.5)$$

Геометрически отделимость множеств  $X_1$  и  $X_2$  означает, что их можно поместить в разные полупространства, порожаемые некоторой гиперплоскостью  $H_{p\beta}$ :  $X_1 \subset H_{p\beta}^-$ ,  $X_2 \subset H_{p\beta}^+$ . При этом говорят, что гиперплоскость  $H_{p\beta}$  *разделяет*  $X_1$  и  $X_2$ ; саму гиперплоскость  $H_{p\beta}$  называют *разделяющей*. При собственной отделимости исключается вырожденный случай, когда оба множества лежат в разделяющей их гиперплоскости. Сильная отделимость говорит о том, что множества находятся на положительном расстоянии от разделяющей их гиперплоскости, а значит, и друг от друга (см. теорему 8.7). Множества на рис. 46 сильно отделимы, на рис. 47—49 собственно отделимы, на рис. 50 просто отделимы.

**Теорема 8.5.** *Если выпуклые множества  $X_1 \subset \mathbf{R}^n$  и  $X_2 \subset \mathbf{R}^n$  не пересекаются, то они отделимы.*

Это утверждение является упрощенным вариантом следующей фундаментальной теоремы выпуклого анализа.

**Теорема 8.6 (Фенхеля о собственной отделимости).** Выпуклые множества  $X_1 \subset \mathbb{R}^n$  и  $X_2 \subset \mathbb{R}^n$  собственно отделимы в том и только том случае, если их относительные внутренности  $\text{ri } X_1$  и  $\text{ri } X_2$  не пересекаются.

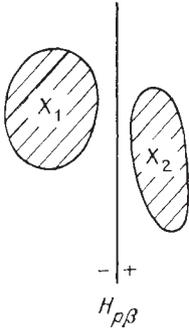


Рис. 46

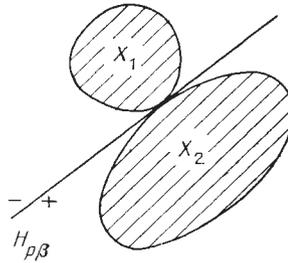


Рис. 47

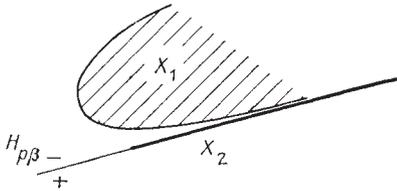


Рис. 48

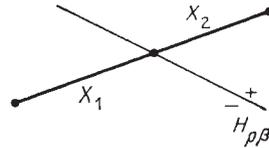


Рис. 49

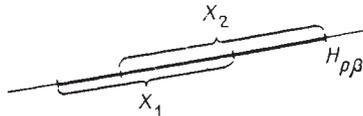


Рис. 50

Отметим также следующий результат.

**Теорема 8.7.** Выпуклые множества  $X_1 \subset \mathbb{R}^n$  и  $X_2 \subset \mathbb{R}^n$  сильно отделимы в том и только том случае, если расстояние между ними положительно, т. е.

$$\rho(X_1, X_2) = \inf_{\substack{x^1 \in X_1 \\ x^2 \in X_2}} \|x^1 - x^2\| > 0.$$

**Следствие 8.1.** Если замкнутые выпуклые множества  $X_1$  и  $X_2$  не пересекаются и хотя бы одно из них ограничено, то они сильно отделимы.

**4. Сопряженные множества.** Сопряженным к данному множеству  $X \subset \mathbf{R}^n$  называется множество

$$X^* = \{p \in \mathbf{R}^n \mid \langle p, x \rangle \leq 1 \text{ при всех } x \in X\}.$$

Ясно, что  $X^*$  всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль. При этом,

1) если  $X$  — конус в  $\mathbf{R}^n$ , то

$$X^* = \{p \in \mathbf{R}^n \mid \langle p, x \rangle \leq 0 \text{ при всех } x \in X\}, \quad (8.6)$$

т. е.  $X^*$  также является конусом и состоит из векторов, составляющих неострый угол с любым вектором из  $X$  (рис. 51);

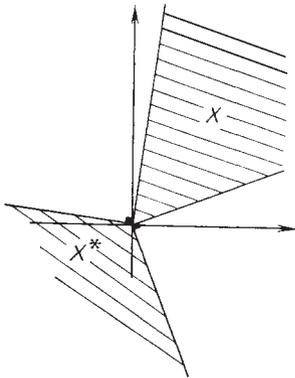


Рис. 51

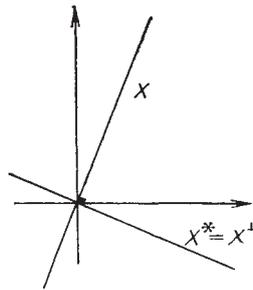


Рис. 52

2) если  $X$  — линейное подпространство в  $\mathbf{R}^n$ , то

$$X^* = \{p \in \mathbf{R}^n \mid \langle p, x \rangle = 0 \text{ при всех } x \in X\}, \quad (8.7)$$

т. е.  $X^*$  есть линейное подпространство, ортогональное к  $X$ :  $X^* = X^\perp$  (рис. 52).

**Теорема 8.8.** Пусть  $x^1, \dots, x^m$  — точки из  $\mathbf{R}^n$ . Сопряженным к многогранному множеству

$$X = \text{conv} \{x^1, \dots, x^k\} + \text{cone} \{x^{k+1}, \dots, x^m\}$$

является полиэдр

$$X^* = \{p \in \mathbf{R}^n \mid \langle p, x^i \rangle \leq 1, i = 1, \dots, k, \langle p, x^i \rangle \leq 0, i = k + 1, \dots, m\}. \quad (8.8)$$

**Теорема 8.9.** Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ . Если полиэдр  $X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leq b\}$  непуст, то сопряженным к

нему является множество

$$X^* = \{p \in \mathbb{R}^n \mid p = qA \text{ при некотором } q \geq 0, \langle q, b \rangle \leq 1\}. \quad (8.9)$$

Множество

$$X^{**} = (X^*)^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, p \rangle \leq 1\} \text{ при всех } p \in X^*$$

называется *вторым сопряженным* к множеству  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

**Теорема 8.10.** Для произвольного множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  справедлива формула

$$X^{**} = \overline{\text{conv}(X \cup \{0\})}. \quad (8.10)$$

В частности, если  $X$  — замкнутое выпуклое множество, содержащее нуль, то  $X^{**} = X$ .

**5. Крайние точки выпуклого множества.** Точка  $x$  выпуклого множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *крайней*, если ее нельзя представить в виде

$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, \quad x^1, x^2 \in X, \quad x^1 \neq x^2, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (8.11)$$

Совокупность всех крайних точек множества  $X$  обозначим через  $E(X)$ .

Таким образом, точка  $x$  является крайней в  $X$ , если ее нельзя поместить внутрь отрезка, концы которого лежат в  $X$ . Например, у треугольника крайними точками служат его вершины, у луча — начало, у круга — все точки окружности.

**Теорема 8.11.** Множество крайних точек полиэдра совпадает с множеством его вершин (см. п. 1 § 4).

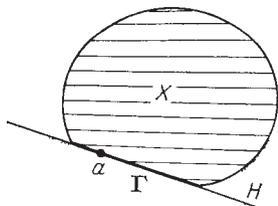


Рис 53

Приведем лемму, которая является полезным инструментом для доказательства следующих основных теорем теории крайних точек (см. 8.112, 8.113). Сама формулировка леммы опирается на теорему 8.4.

**Лемма 8.1.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $H = H_{p^0}$  — гиперплоскость, собственная опорная к  $X$  в точке  $a \in \text{гд} X$ , т. е. выполнены условия (8.1), (8.2). Положим  $\Gamma = X \cap H$  (рис. 53). Тогда

1) любая крайняя точка в  $\Gamma$  является крайней и в  $X$ , т. е.  $E(\Gamma) \subset E(X)$ ;

2)  $\dim \Gamma < \dim X$ .

Теорема 8.12 (критерий существования крайней точки). Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Тогда  $X$  имеет хотя бы одну крайнюю точку в том и только том случае, если  $X$  не содержит прямых, т. е. множеств вида

$$l_{x_0 h} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x = x^0 + \alpha h, \alpha \in \mathbf{R}\},$$

где  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $h \in \mathbf{R}^n$ ,  $h \neq 0$ .

Теорема 8.13 (Минковского о представлении выпуклого компакта). Пусть  $X$  — выпуклый компакт в  $\mathbf{R}^n$ . Тогда  $X = \text{conv } E(X)$ , т. е.  $X$  совпадает с выпуклой оболочкой множества своих крайних точек.

**6. Эквивалентность понятий полиэдра и многогранного множества.** Полиэдр, являющийся ограниченным множеством, называется *ограниченным*; полиэдр вида  $X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leq 0\}$  — *однородным*.

Теорема 8.14 (Минковского — Вейля). Пусть  $X \subset \mathbf{R}^n$ . Тогда

1)  $X$  является ограниченным полиэдром в том и только том случае, если  $X$  — выпуклый многогранник;

2)  $X$  является однородным полиэдром в том и только том случае, если  $X$  — многогранный конус;

3)  $X$  является полиэдром в том и только том случае, если  $X$  — многогранное множество.

Из данной теоремы с учетом теорем 7.9, 8.8, а также того простого факта, что пересечение конечного числа полиэдров есть полиэдр, получаем следующие выводы (см. также замечание после задачи 7.54).

Теорема 8.15. 1) Пересечение конечного числа многогранных множеств является многогранным множеством.

2) Сумма конечного числа полиэдров является полиэдром.

3) Множество, сопряженное к полиэдру (многогранному множеству), является полиэдром (многогранным множеством).

## УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Вывести уравнение гиперплоскости, сильно отделяющей точку  $x^0 = (3, 2, 1, 1)$  от множества  $X \subset \mathbf{R}^4$ , ко-

торое задается системой

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + ax_3 - 9x_4 &\leq 7, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + bx_4 &\leq 1, \\ cx_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 &\leq 9, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 5: \end{aligned}$$

|   | a  | b  | c  |    | a  | b | c  |    | a  | b  | c  |    | a  | b | c  |
|---|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|---|----|
| 1 | 6  | -1 | -1 | 6  | -3 | 0 | 4  | 11 | 2  | 5  | 0  | 16 | 4  | 0 | 5  |
| 2 | 3  | 6  | 1  | 7  | 3  | 2 | 4  | 12 | 2  | 1  | 3  | 17 | 9  | 1 | 0  |
| 3 | -1 | -1 | 2  | 8  | -1 | 4 | 0  | 13 | -3 | 6  | -1 | 18 | 4  | 7 | -1 |
| 4 | 1  | 4  | -1 | 9  | 7  | 1 | -1 | 14 | -2 | -2 | 3  | 19 | -2 | 5 | 1  |
| 5 | 6  | 0  | -1 | 10 | 8  | 0 | 1  | 15 | 7  | -2 | 1  | 20 | 8  | 2 | 1  |

8.2. Вывести уравнение гиперплоскости, опорной к множеству

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{25} \leq 1 \right\}$$

в точке  $x^0 = (a, b, c)$ :

|    | a    | b     | c  |    | a    | b     | c  |
|----|------|-------|----|----|------|-------|----|
| 1  | -6/5 | 12/5  | 0  | 11 | 0    | 9/5   | -4 |
| 2  | -8/5 | 0     | 3  | 12 | 6/5  | 0     | -4 |
| 3  | 0    | 9/5   | 4  | 13 | 8/5  | -9/5  | 0  |
| 4  | 6/5  | 0     | 4  | 14 | 0    | 12/5  | -3 |
| 5  | 0    | 12/5  | 3  | 15 | 8/5  | 0     | 3  |
| 6  | 8/5  | 9/5   | 0  | 16 | 6/5  | 12/5  | 0  |
| 7  | 0    | -9/5  | 4  | 17 | 0    | -12/5 | 3  |
| 8  | 6/5  | -12/5 | 0  | 18 | -6/5 | 0     | 4  |
| 9  | 8/5  | 0     | -3 | 19 | -8/5 | -9/5  | 0  |
| 10 | 0    | -9/5  | -4 | 20 | 0    | -12/5 | -3 |

8.3. Вывести уравнение гиперплоскости, опорной к множеству

$$X = \{ x \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 \geq x_1^2 + x_2^2 \}$$

и отделяющей его от точки  $x^0 = (a, b, c)$ :

|    | $a$  | $b$   | $c$   |    | $a$  | $b$   | $c$   |
|----|------|-------|-------|----|------|-------|-------|
| 1  | 5/4  | 5/16  | 15/16 | 11 | 9/8  | 27/32 | 3/2   |
| 2  | 4/3  | 2/3   | 13/12 | 12 | 5/4  | 5/4   | 15/8  |
| 3  | 5/3  | 5/9   | 7/9   | 13 | 9/8  | 9/32  | 1     |
| 4  | 5/4  | 15/16 | 23/16 | 14 | 4/3  | 4/9   | 17/18 |
| 5  | 5/3  | 10/9  | 10/9  | 15 | 5/3  | 5/6   | 11/12 |
| 6  | 3/2  | 3/2   | 7/4   | 16 | 11/9 | 22/27 | 4/3   |
| 7  | 3/2  | 3/8   | 13/16 | 17 | 7/5  | 14/25 | 24/25 |
| 8  | 5/4  | 5/8   | 9/8   | 18 | 3/2  | 3/4   | 1     |
| 9  | 10/9 | 10/27 | 19/18 | 19 | 4/3  | 8/9   | 23/18 |
| 10 | 13/9 | 26/27 | 11/9  | 20 | 11/9 | 11/27 | 1     |

8.4. Выяснить, при каких значениях параметра  $k$  гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , где  $p = (2k, k, 1)$ ,  $\beta = 3$ , является опорной в точке  $x^0 = (1, -2, 3)$  к полиэдру  $X \subset \mathbb{R}^3$ , задаваемому системой

$$\begin{aligned} ax_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq a, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4, \\ 2x_1 + bx_2 + x_3 &\leq 5 - 2b, \\ -x_1 - 2x_2 - cx_3 &\leq 3 - 3c \end{aligned}$$

(имеется в виду включение  $X \subset H_{p\beta}^-$ ):

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 5   | -1  | 1   | 6  | 2   | 1   | 3   | 11 | 3   | -2  | 1   | 16 | 2   | 1   | 4   |
| 2 | 3   | -1  | 1   | 7  | 5   | -1  | 3   | 12 | 5   | -1  | 2   | 17 | 2   | -2  | 4   |
| 3 | 2   | -1  | 2   | 8  | 3   | -1  | 3   | 13 | 2   | -2  | 3   | 18 | 3   | -2  | 2   |
| 4 | 3   | 0   | 3   | 9  | 5   | 1   | 2   | 14 | 3   | -2  | 3   | 19 | 2   | -1  | 3   |
| 5 | 5   | 1   | 1   | 10 | 2   | -2  | 2   | 15 | 5   | 1   | 0   | 20 | 3   | 0   | 1   |

8.5. Вывести уравнение гиперплоскости, разделяющей множества

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 1, x_1 > 0\},$$

$$X_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq \frac{a}{x_1 - b} + c, x_1 < b\right\}:$$

|    | $a$ | $b$  | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$  |
|----|-----|------|-----|----|-----|-----|------|
| 1  | 1/9 | 2/3  | 8/3 | 11 | 1/4 | 1/2 | 9/2  |
| 2  | 4   | 1    | 9   | 12 | 25  | 2   | 18   |
| 3  | 1/4 | 1    | 9/4 | 13 | 9/4 | 5   | 5/4  |
| 4  | 25  | 12   | 3   | 14 | 9   | 8   | 2    |
| 5  | 1/9 | 16/3 | 1/3 | 15 | 25  | 3   | 12   |
| 6  | 25  | 18   | 2   | 16 | 1/4 | 9/4 | 1    |
| 7  | 25  | 9    | 4   | 17 | 1/9 | 1/3 | 16/3 |
| 8  | 1/4 | 9/2  | 1/2 | 18 | 25  | 4   | 9    |
| 9  | 1/9 | 8/3  | 2/3 | 19 | 9/4 | 5/4 | 5    |
| 10 | 9   | 2    | 8   | 20 | 1   | 4   | 1    |

8.6. Пусть конус  $X_1 \subset \mathbf{R}^4$  задается системой

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &\leq 0, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &\leq 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &\leq 0, \end{aligned}$$

а конус  $X_2 \subset \mathbf{R}^4$  — системой

$$\begin{aligned} 3x_1 + ax_2 + x_3 - 10x_4 &\leq 0, \\ -bx_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &\leq 0, \\ -x_1 + x_2 + cx_3 + 2x_4 &\leq 0. \end{aligned}$$

Обозначим через  $P$  множество, состоящее из нуля в  $\mathbf{R}^4$  и всех таких векторов  $p \in \mathbf{R}^4$ , что гиперплоскость  $H_{p0}$  разделяет  $X_1$  и  $X_2$ , т. е.  $X_1 \subset H_{p0}^-$ ,  $X_2 \subset H_{p0}^+$ .

Показать, что  $P$  — двумерный конус в  $\mathbf{R}^4$ , и найти его образующие, т. е. такие векторы  $p^1$  и  $p^2$ , что  $P = \text{cone}\{p^1, p^2\}$ :

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 3   | -5  | -1  | 6  | 1   | 1   | 3   | 11 | 3   | -6  | -1  | 16 | 3   | -2  | -1  |
| 2 | 1   | 1   | 2   | 7  | 1   | 2   | 4   | 12 | 1   | 2   | 5   | 17 | 1   | 1   | 5   |
| 3 | 1   | 2   | 2   | 8  | 1   | 2   | 7   | 13 | 3   | -1  | 0   | 18 | 1   | 2   | 3   |
| 4 | 3   | -3  | -1  | 9  | 3   | -4  | -1  | 14 | 1   | 1   | 8   | 19 | 1   | 1   | 4   |
| 5 | 3   | -1  | -1  | 10 | 1   | 1   | 6   | 15 | 1   | 2   | 6   | 20 | 1   | 1   | 7   |

8.7. Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к конусу

$$X = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid ax_1 \leq x_2 \leq bx_1, x_1 \geq 0\}:$$

| a b |    |   | a b |    |   | a b |    |   | a b |    |   |
|-----|----|---|-----|----|---|-----|----|---|-----|----|---|
| 1   | -1 | 2 | 6   | 0  | 2 | 11  | -2 | 0 | 16  | -3 | 0 |
| 2   | 1  | 2 | 7   | 1  | 3 | 12  | -1 | 4 | 17  | 0  | 4 |
| 3   | -1 | 1 | 8   | -1 | 3 | 13  | 1  | 4 | 18  | 3  | 4 |
| 4   | 2  | 3 | 9   | -3 | 3 | 14  | 2  | 4 | 19  | -4 | 0 |
| 5   | -1 | 2 | 10  | -2 | 3 | 15  | 0  | 3 | 20  | 1  | 5 |

8.8. Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу

$$X = \text{cone} \{(a, b), (4, 1), (2, 2)\}:$$

| a b |   |   | a b |   |   | a b |    |   | a b |    |   |
|-----|---|---|-----|---|---|-----|----|---|-----|----|---|
| 1   | 2 | 3 | 6   | 1 | 2 | 11  | -1 | 1 | 16  | -2 | 1 |
| 2   | 2 | 4 | 7   | 1 | 3 | 12  | -1 | 2 | 17  | -2 | 2 |
| 3   | 2 | 5 | 8   | 1 | 4 | 13  | -1 | 3 | 18  | -2 | 3 |
| 4   | 2 | 6 | 9   | 1 | 5 | 14  | -1 | 4 | 19  | -2 | 4 |
| 5   | 2 | 7 | 10  | 1 | 6 | 15  | -1 | 5 | 20  | -2 | 5 |

8.9. Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к выпуклому многограннику

$$X = \text{conv} \{(a, b), (1, -1), (2, 5)\}:$$

| a b |   |   | a b |   |    | a b |   |    | a b |   |    |
|-----|---|---|-----|---|----|-----|---|----|-----|---|----|
| 1   | 3 | 2 | 6   | 3 | 3  | 11  | 4 | -1 | 16  | 4 | -2 |
| 2   | 4 | 3 | 7   | 5 | 3  | 12  | 5 | -1 | 17  | 4 | 0  |
| 3   | 5 | 4 | 8   | 4 | 4  | 13  | 3 | 1  | 18  | 5 | 1  |
| 4   | 4 | 2 | 9   | 5 | 5  | 14  | 3 | 2  | 19  | 5 | 0  |
| 5   | 5 | 2 | 10  | 3 | -1 | 15  | 4 | 1  | 20  | 3 | 4  |

8.10. Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному множеству

$$X = \text{conv} \left\{ (a, b), \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\} + \\ + \text{cone} \{(c, c-1), (1, 0)\}:$$

|    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1  | -1       | 0        | 2        | 11 | -1       | -1/4     | 2        |
| 2  | -3/4     | 0        | 3        | 12 | -3/4     | -1/4     | 3        |
| 3  | -2/3     | 0        | 4        | 13 | -2/3     | -1/4     | 4        |
| 4  | -1/2     | 0        | 5        | 14 | -1/2     | -1/4     | 5        |
| 5  | -1/3     | 0        | 6        | 15 | -1/3     | -1/4     | 6        |
| 6  | -1       | 1/4      | 2        | 16 | -1/2     | 1/3      | 2        |
| 7  | -3/4     | 1/4      | 3        | 17 | -2/3     | 1/3      | 3        |
| 8  | -2/3     | 1/4      | 4        | 18 | -2/3     | 1/3      | 4        |
| 9  | -1/2     | 1/4      | 5        | 19 | -1/2     | 1/3      | 5        |
| 10 | -1/3     | 1/4      | 6        | 20 | -1       | -1/3     | 6        |

8.11. Найти и изобразить на плоскости множества, сопряженные к полуплоскостям

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | ax_1 + bx_2 \leq c\}, \quad X_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | ax_1 + bx_2 \geq c\},$$

$$X_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 | ax_1 + bx_2 \leq -c\}:$$

|   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|---|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1 | 2        | 3        | 5        | 6  | 2        | 4        | 7        | 11 | 1        | 3        | 4        | 16 | 2        | 3        | 6        |
| 2 | 1        | 4        | 5        | 7  | 4        | 2        | 7        | 12 | 3        | 1        | 4        | 17 | 3        | 2        | 6        |
| 3 | 2        | 5        | 7        | 8  | 5        | 1        | 6        | 13 | 1        | 2        | 3        | 18 | 5        | 2        | 6        |
| 4 | 3        | 2        | 5        | 9  | 1        | 5        | 6        | 14 | 2        | 1        | 3        | 19 | 2        | 5        | 6        |
| 5 | 4        | 1        | 5        | 10 | 2        | 5        | 7        | 15 | 5        | 2        | 7        | 20 | 1        | 3        | 5        |

8.12. Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к полнэдру

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 | ax_1 + bx_2 \leq c, 2x_1 + 3x_2 \leq 6, -3x_1 + 5x_2 \leq 15\}:$$

|   | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |    | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|---|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----|----------|----------|----------|
| 1 | -2       | -4       | 2        | 6  | -1       | -15      | 6        | 11 | -2       | -15      | 10       | 16 | 1        | -15      | 3        |
| 2 | -1       | -9       | 2        | 7  | -2       | -9       | 2        | 12 | 0        | -1       | 1        | 17 | 2        | -5       | 10       |
| 3 | -2       | -21      | 6        | 8  | -4       | -24      | 8        | 13 | 0        | -1       | 2        | 18 | 1        | -3       | 6        |
| 4 | -1       | -12      | 4        | 9  | -1       | -6       | 3        | 14 | 0        | -1       | 3        | 19 | 1        | -2       | 6        |
| 5 | -2       | -20      | 10       | 10 | -4       | -24      | 16       | 15 | 0        | -1       | 4        | 20 | 2        | -9       | 12       |

8.13. Найти все значения параметра  $k$ , при которых выпуклое множество  $X$  в  $\mathbb{R}^4$ , определяемое неравенствами

$$(x_1 - ax_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (bx_3 + 5x_4)^2 \leq 10,$$

$$cx_1 + kx_2 - 2x_3 + 3kx_4 \leq 0,$$

обладает крайними точками:

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 4   | 1   | 1   | 6  | 1   | -1  | -1  | 11 | 4   | 2   | 1   | 16 | 2   | 2   | -1  |
| 2 | 1   | 2   | -1  | 7  | 2   | 1   | 1   | 12 | 3   | 1   | 1   | 17 | 4   | 1   | -1  |
| 3 | 2   | -1  | -1  | 8  | 3   | 2   | -1  | 13 | 2   | 1   | -1  | 18 | 4   | 2   | -1  |
| 4 | 3   | 1   | -1  | 9  | 1   | 1   | -1  | 14 | 1   | 2   | 1   | 19 | 1   | 1   | 1   |
| 5 | 2   | 2   | 1   | 10 | 3   | -1  | -1  | 15 | 4   | -1  | -1  | 20 | 3   | 2   | 1   |

8.14. Определить все значения параметра  $k$ , при которых точка  $x(k)$  является крайней в многограннике

$$X = \text{conv} \{x^1, x^2, x^3, x^4, x(k)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

где

$$x^1 = (-2, a, 1), \quad x^2 = (5, 1, -4), \quad x^3 = (3, -1, b),$$

$$x^4 = (1, 1, 2), \quad x(k) = (1, c, k):$$

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 8   | 3   | 2   | 6  | 10  | -1  | 3   | 11 | 9   | -1  | 2   | 16 | 11  | -3  | 3   |
| 2 | 9   | 1   | 2   | 7  | 9   | -3  | 2   | 12 | 11  | 3   | 3   | 17 | 8   | -1  | 2   |
| 3 | 10  | -3  | 3   | 8  | 11  | 2   | 3   | 13 | 8   | -2  | 2   | 18 | 11  | 1   | 3   |
| 4 | 11  | -1  | 3   | 9  | 8   | 1   | 2   | 14 | 10  | -2  | 3   | 19 | 9   | 2   | 2   |
| 5 | 8   | -3  | 2   | 10 | 10  | 3   | 3   | 15 | 9   | -2  | 2   | 20 | 10  | 1   | 3   |

8.15. Рассмотрим выпуклый многогранник

$$X = \text{conv} \{(1, a), (-2, 1), (-1, 3), (b, 0), (0, -2), (c, 1)\},$$

содержащий нуль. В качестве иллюстрации к доказательству теоремы 8.14 (см. 8.114) проделать следующие операции:

- 1) вычислить  $X^*$  по теореме 8.8;
- 2) представить  $X^*$  как выпуклый многогранник;
- 3) вычислить  $X^{**}$  по теореме 8.8;

4) представить  $X$  как полиэдр, убедившись, что  $X = X^{**}$ :

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 3   | 6   | 4   | 6  | 3   | 7   | 3   | 11 | 4   | 7   | 3   | 16 | 3   | 7   | 2   |
| 2 | 4   | 4   | 3   | 7  | 3   | 4   | 2   | 12 | 3   | 3   | 2   | 17 | 4   | 5   | 2   |
| 3 | 4   | 7   | 4   | 8  | 4   | 3   | 2   | 13 | 3   | 6   | 3   | 18 | 3   | 5   | 2   |
| 4 | 3   | 5   | 3   | 9  | 4   | 5   | 4   | 14 | 4   | 4   | 2   | 19 | 4   | 6   | 4   |
| 5 | 3   | 7   | 5   | 10 | 3   | 4   | 3   | 15 | 4   | 6   | 3   | 20 | 4   | 5   | 3   |

8.16. Представить как полиэдр многогранное множество  $X$  из упражнения 8.10.

8.17. Представить как многогранное множество полиэдр

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -ax_1 + bx_2 \leq c, \quad x_1 + x_2 \geq 2, \quad 2x_1 - 3x_2 \leq 6\}:$$

|   | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |    | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 2   | 4   | 4   | 6  | 1   | 2   | 5   | 11 | 2   | 4   | 5   | 16 | 1   | 2   | 3   |
| 2 | 2   | 5   | 5   | 7  | 1   | 3   | 4   | 12 | 2   | 5   | 6   | 17 | 2   | 5   | 8   |
| 3 | 1   | 3   | 3   | 8  | 2   | 5   | 15  | 13 | 1   | 3   | 4   | 18 | 1   | 3   | 5   |
| 4 | 1   | 4   | 4   | 9  | 1   | 4   | 10  | 14 | 1   | 4   | 5   | 19 | 1   | 4   | 6   |
| 5 | 1   | 5   | 5   | 10 | 1   | 5   | 10  | 15 | 1   | 5   | 6   | 20 | 1   | 5   | 8   |

### ЗАДАЧИ

8.1\*. Доказать, что проекция любой точки  $a \in \mathbb{R}^n$  на замкнутое выпуклое множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  единственна.

Более тонкое обратное утверждение будет приведено в задаче 8.178.

8.2. Доказать утверждение, обратное к теореме 8.1.

Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если точка  $x^* \in X$  удовлетворяет условию

$$\langle a - x^*, x - x^* \rangle \leq 0 \text{ при всех } x \in X,$$

то  $x^*$  — проекция точки  $a$  на  $X$ .

8.3. Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что оператор проектирования  $\pi_X(a)$  обладает свойством нерастяжения расстояний, т. е.

$$\|\pi_X(a^1) - \pi_X(a^2)\| \leq \|a^1 - a^2\| \text{ при всех } a^1, a^2 \in \mathbb{R}^n.$$

Задачи 8.4—8.46 посвящены теории отделимости двух множеств и некоторым ее следствиям.

8.4. Доказать теорему 8.1.

8.5. Доказать теорему 8.3.

8.6. Доказать теорему 8.4.

8.7. Доказать теорему 8.6.

8.8. Доказать теорему 8.7 и следствие 8.1.

8.9. Вывести уравнение гиперплоскости, отделяющей точку  $x^0 = (-1, 2, 1, -3)$  от множества  $X \subset \mathbf{R}^4$ , которое задается системой

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 &\leq 1, \\ -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 &\leq 2, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &\leq 9. \end{aligned}$$

8.10. Вывести уравнение гиперплоскости, опорной к множеству

$$X = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_1x_2 + 40x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2 \leq 25\}$$

в точке  $x^0 = (4, 1, 1)$ .

8.11. Вывести уравнение гиперплоскости, опорной к множеству

$$X = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 \geq x_1^2 + x_2^2\}$$

и отделяющей его от точки  $x^0 = \left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{15}{16}\right)$ .

8.12. Выяснить, при каких значениях параметра  $k$  гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , где  $p = (-3k, 12, 2k)$ ,  $\beta = 12$ , является опорной в точке  $x^0 = (2, 1, 3)$  к полиэдру  $X \subset \mathbf{R}^3$ , задаваемому системой

$$\begin{aligned} x_1 + 8x_2 + x_3 &\leq 13, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &\leq 2, \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq -3. \end{aligned}$$

(Здесь и в 8.13 имеется в виду включение  $X \subset H_{p\beta}^-$ .)

8.13. Найти все значения параметра  $k$ , при которых гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , где  $p = (k, 1, -2, -k^2 - 4k + 4, -1)$ ,  $\beta = 2k + 1$ , является опорной в точке  $x^0 = (2, 1, 0, 0, 0)$

к полиэдру  $X \subset \mathbb{R}^5$ , определяемому системой

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 1, \\2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 &= 3, \\x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.\end{aligned}$$

8.14. Найти все значения параметра  $k$ , при которых полиэдр  $X \subset \mathbb{R}^3$ , задаваемый системой

$$\begin{aligned}-x_1 + x_2 &\leq 1, \\x_1 + x_3 &\leq 2, \\-x_2 + x_3 &\leq 0, \\-x_1 - 2x_2 - x_3 &\leq 0, \\-2x_2 &\leq 1, \\x_2 - 3x_3 &\leq 2,\end{aligned}$$

лежит в полупространстве  $H_{p\beta}^-$ , где  $p = (-3, 3 - k, k)$ ,  $\beta = 8$ .

8.15. Вывести уравнение гиперплоскости, разделяющей выпуклые множества

$$\begin{aligned}X_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2(x_1 - 1) \geq 3, x_1 < 1\}, \\X_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_2 + 4)(x_1 + 2) \geq 3, x_1 > -2\}.\end{aligned}$$

8.16. Вывести уравнение гиперплоскости, разделяющей выпуклые множества

$$X_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\right\}, \quad X_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq \frac{3}{x_1}, x_1 > 0\right\}.$$

8.17. Пусть конус  $X_1 \subset \mathbb{R}^4$  задается системой

$$\begin{aligned}-x_1 + x_2 + x_3 &\leq 0, \\2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &\leq 0, \\3x_1 - x_2 - 8x_3 + x_4 &\leq 0,\end{aligned}$$

а конус  $X_2 \subset \mathbb{R}^4$  — системой

$$\begin{aligned}-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &\leq 0, \\-2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 &\leq 0, \\-5x_1 + x_2 + 17x_3 + x_4 &\leq 0.\end{aligned}$$

Обозначим через  $P$  множество, состоящее из нуля в  $\mathbb{R}^4$  и всех таких векторов  $p \in \mathbb{R}^4$ , что гиперплоскость  $H_{p0}$  разделяет  $X_1$  и  $X_2$ , т. е.  $X_1 \subset H_{p0}^-$ ,  $X_2 \subset H_{p0}^+$ .

Показать, что  $P$  — двумерный конус в  $\mathbf{R}^4$ , и найти его образующие, т. е. такие векторы  $p^1$  и  $p^2$ , что  $P = \text{cone} \{p^1, p^2\}$ .

8.18. Пусть полиэдр  $X_1 \subset \mathbf{R}^4$  задается системой

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_4 &\leq 1, \\ x_1 - x_3 + x_4 &\leq -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 1, \\ -x_1 + x_3 + x_4 &\leq -1, \end{aligned}$$

а полиэдр  $X_2 \subset \mathbf{R}^4$  — системой

$$\begin{aligned} -3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &\leq 1, \\ -2x_1 - 7x_2 + 4x_3 - x_4 &\leq 1, \\ -7x_2 + 3x_3 - 2x_4 &\leq -3, \\ -3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &\leq 1. \end{aligned}$$

Найти гиперплоскость, разделяющую  $X_1$  и  $X_2$ .

8.19. Пусть гиперплоскость  $H_{p\beta}$  является опорной к множеству  $X$  в точке  $a \in \bar{X}$ , причем  $a$  есть выпуклая положительная комбинация точек  $x^1, \dots, x^m$  из  $\bar{X}$ , т. е.

$$a = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Доказать, что эти точки лежат в  $H_{p\beta}$ .

8.20. Доказать, что любая гиперплоскость, опорная к конусу, проходит через нуль.

8.21. Доказать, что любая гиперплоскость, опорная к аффинному множеству, его содержит.

8.22. Доказать, что гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , опорная к шару  $U_\varepsilon(x^0)$  в его граничной точке  $a$ , единственна и определяется параметрами  $p = a - x^0$ ,  $\beta = \langle p, a \rangle$ .

8.23. Пусть  $X$  — ограниченное множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что при любом  $p \in \mathbf{R}^n$  существует такое число  $\beta$ , что гиперплоскость  $H_{p\beta}$  является опорной к  $X$ .

8.24. Пусть полиэдр  $X$  лежит в полупространстве  $H_{p\beta}^-$ . Доказать, что существует такое число  $\alpha \leq \beta$ , что гиперплоскость  $H_{p\alpha}$  является опорной к  $X$ .

8.25. Привести пример замкнутого выпуклого множества  $X$ , для которого утверждение задачи 8.24 неверно.

8.26. Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ ,  $H_{p\beta}$  — гиперплоскость, собственно опорная к  $X$ , т. е. выполняются условия (8.1), (8.2). Доказать, что  $\langle p, x \rangle < \beta$  при всех  $x \in \text{ri } X$ , т. е.  $\text{ri } X \subset \text{int } H_{p\beta}^-$ .

**8.27.** Пусть выпуклые множества  $X_1$  и  $X_2$  собственно отделимы с помощью гиперплоскости  $H_{p\beta}$ , т. е. выполняются условия (8.3), (8.4). Доказать, что  $\langle p, x^1 \rangle < \langle p, x^2 \rangle$  при всех  $x^1 \in \text{ri } X_1$ ,  $x^2 \in \text{ri } X_2$ , т. е. выполнено по крайней мере одно из двух:  $\text{ri } X_1 \subset \text{int } H_{p\beta}^-$  или  $\text{ri } X_2 \subset \text{int } H_{p\beta}^+$ .

**8.28\*.** Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X \neq \mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $X$  есть пересечение всех полупространств, опорных к  $X$ .

Данное утверждение получит существенное усиление в 8.168.

**8.29.** Замкнутое множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  называется *строго выпуклым*, если  $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in \text{int } X$  при всех  $x^1, x^2 \in X$ ,  $x^1 \neq x^2$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ . Показать, что шар  $U_\varepsilon(x^0)$  является строго выпуклым множеством, а куб

$$K_\varepsilon(x^0) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x_j - x_j^0| \leq \varepsilon, j = 1, \dots, n\}$$

не является.

**8.30\*.** Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $X$  строго выпукло в том и только том случае, если любая гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , опорная к  $X$  в произвольной точке  $a \in \partial X$ , пересекается с  $X$  только по этой точке:  $H_{p\beta} \cap X = \{a\}$ .

**8.31\*.** Доказать следующее уточнение теоремы Каратеодори.

Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$ . Тогда любую точку из  $\text{conv } X$ , лежащую на границе  $\text{conv } X$ , можно представить в виде выпуклой комбинации не более  $n$  точек из  $X$ .

**8.32.** Показать, что в задаче 7.36 условие замкнутости  $X$  лишнее.

**8.33\*.** Доказать, что выпуклые множества  $X_1$  и  $X_2$  из  $\mathbf{R}^n$  отделимы в том и только том случае, если выполняется по крайней мере одно из двух условий:

- 1)  $\text{ri } X_1 \cap \text{ri } X_2 = \emptyset$ ;
- 2)  $\text{aff}(X_1 \cup X_2) \neq \mathbf{R}^n$ .

Если при этом  $0 \in X_1$ ,  $0 \in X_2$ , то условие 2) можно заменить следующим:

- 2')  $\text{aff } X_1 + \text{aff } X_2 \neq \mathbf{R}^n$ .

**8.34\*.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X \cap \text{int } \mathbf{R}_+^n = \emptyset$ . Доказать, что существует ненулевой вектор  $p \geq 0$ , для которого  $\langle p, x \rangle \leq 0$  при всех  $x \in X$ .

**8.35.** Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X \cap \mathbf{R}_+^n = \{0\}$ . Следует ли отсюда, что существует

вектор  $p > 0$ , для которого  $\langle p, x \rangle \leq 0$  при всех  $x \in X$  (ср. с 8.82)?

8.36. Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ , отличное от  $\mathbf{R}^n$ , причем его дополнение  $\mathbf{R}^n \setminus X$  также выпукло. Доказать, что  $X$  — полупространство.

8.37. Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $\text{ri } X_1 \cap \text{ri } X_2 = \emptyset$ . Предположим, что дополнительно выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- а)  $X_1$  ограничено;
- б)  $X_1$  — конус;
- в)  $X_1$  — полиэдр.

Доказать, что  $X_1$  и  $X_2$  можно собственно отделить с помощью гиперплоскости, опорной к  $X_1$ .

8.38\*. Доказать теорему Хана — Банаха (в геометрической форме).

Пусть  $X_1$  — аффинное,  $X_2$  — выпуклое множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X_1 \cap \text{ri } X_2 = \emptyset$ . Тогда  $X_1$  и  $X_2$  можно собственно отделить с помощью гиперплоскости, содержащей  $X_1$ .

8.39. Пусть  $X_1, X_2$  — замкнутые выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , а множество  $L = K(X_1) \cap K(X_2)$  является линейным подпространством. Доказать, что  $X_1$  и  $X_2$  сильно отделимы.

Напомним, что  $K(X)$  — рецессивный конус множества  $X$  (см. п. 6 § 7).

8.40\*. Доказать, что непересекающиеся полиэдры  $X_1$  и  $X_2$  из  $\mathbf{R}^n$  сильно отделимы.

8.41\*. Доказать модификацию теоремы Хана — Банаха для полиэдров.

Пусть  $X_1$  — аффинное множество,  $X_2$  — полиэдр в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ . Тогда  $X_1$  и  $X_2$  можно отделить с помощью гиперплоскости, содержащей  $X_1$  и не пересекающейся с  $X_2$ .

8.42. Можно ли в теореме из 8.41 предполагать, что  $X_2$  — просто замкнутое выпуклое множество (ср. [28, с. 30, упр. 5])?

8.43. Пусть  $X_1, X_2$  — замкнутые выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ . Следует ли отсюда, что существует такой вектор  $p$ , для которого  $\langle p, x^1 \rangle < \langle p, x^2 \rangle$  при всех  $x^1 \in X_1, x^2 \in X_2$ ?

8.44. Пусть  $X_1$  и  $X_2$  — полиэдры в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ . Предположим, что существуют вектор  $p$  и число  $\beta$ , для которых

$$\langle p, x \rangle \leq \beta \text{ при всех } x \in X_1 \cap X_2.$$

Доказать, что существуют векторы  $p^1, p^2$  и числа  $\beta_1, \beta_2$ , для которых

$$\begin{aligned} \langle p^1, x \rangle &\leq \beta_1 \quad \text{при всех } x \in X_1, \\ \langle p^2, x \rangle &\leq \beta_2 \quad \text{при всех } x \in X_2, \\ p^1 + p^2 &= p, \quad \beta_1 + \beta_2 \leq \beta. \end{aligned}$$

Это утверждение допускает естественное обобщение на случай конечного числа полиэдров (см. 8.56). Здесь оно фигурирует в качестве леммы к решению следующей задачи, где приводится один из наиболее тонких фактов теории отделимости.

8.45\*. Доказать теорему Рокафеллара.

Пусть  $X_1$  — полиэдр,  $X_2$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $X_1 \cap \text{ri } X_2 = \emptyset$ . Тогда  $X_1$  и  $X_2$  можно собственно отделить с помощью гиперплоскости, не содержащей  $X_2$ .

8.46. Можно ли в теореме Рокафеллара предполагать, что  $X_1$  — просто выпуклое множество?

В задачах 8.47—8.59 излагаются основы теории отделимости конечного числа множеств.

8.47. Множества  $X_1, \dots, X_m$  из  $\mathbb{R}^n$  называются

1) *отделимыми*, если существуют векторы  $p^1, \dots, p^m$  из  $\mathbb{R}^n$ , не равные нулю одновременно, и числа  $\beta_1, \dots, \beta_m$  такие, что

$$\langle p^i, x^i \rangle \leq \beta_i \quad \text{при всех } x^i \in X_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8.12)$$

$$\sum_{i=1}^m p^i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \beta_i \leq 0; \quad (8.13)$$

2) *собственно отделимыми*, если существуют векторы  $p^1, \dots, p^m$  и числа  $\beta_1, \dots, \beta_m$  такие, что выполняются условия (8.12), (8.13) и, кроме того,  $\langle p^i, \bar{x}^i \rangle < \beta_i$  при некоторых  $i$  и  $\bar{x}^i \in X_i$ ;

3) *сильно отделимыми*, если существуют  $p^1, \dots, p^m$  и  $\beta_1, \dots, \beta_m$  такие, что выполняются условия (8.12), (8.13) и, более того,  $\sum_{i=1}^m \beta_i < 0$ .

Показать, что

а) понятия отделимости, собственной и сильной отделимости двух множеств являются частными случаями данных определений;

б) если  $0 \in \bar{X}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), то из (8.12), (8.13) следует, что  $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$ .

Таким образом, если  $X_1, \dots, X_m$  — конусы, а  $X_1^*, \dots, X_m^*$  — сопряженные к ним конусы (см. (8.6)), то условие (8.12) можно записать в виде  $p^i \in X_i^*$  ( $i = 1, \dots, m$ ), оставляя в (8.13) лишь первую сумму.

8.48\*. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $\bigcap_{i=1}^m X_i = \emptyset$ . Доказать, что эти множества отделимы.

8.49\*. Доказать, что выпуклые множества  $X_1, \dots, X_m$  из  $\mathbb{R}^n$  собственно отделимы в том и только том случае, если  $\bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i = \emptyset$ .

8.50. Доказать, что выпуклые множества  $X_1, \dots, X_m$  из  $\mathbb{R}^n$  сильно отделимы в том и только том случае, если

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^n} \max_{i=1, \dots, m} \rho(z, X_i) > 0.$$

8.51. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — замкнутые выпуклые множества в  $\mathbb{R}^n$ , причем хотя бы одно из них ограничено и  $\bigcap_{i=1}^m X_i = \emptyset$ . Доказать, что они сильно отделимы.

8.52. Доказать, что полиэдры  $X_1, \dots, X_m$  из  $\mathbb{R}^n$ , не имеющие общей точки, сильно отделимы.

8.53. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые конусы в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $\bigcap_{i=1}^m X_i = \{0\}$ . Доказать, что существуют векторы  $p^i \in X_i^*$  ( $i = 1, \dots, m$ ), не равные нулю одновременно и такие, что  $\sum_{i=1}^m p^i = 0$ .

8.54\*. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые конусы в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $\bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i = \emptyset$  в том и только том случае, если существуют векторы  $p^i \in X_i^*$  ( $i = 1, \dots, m$ ) такие, что  $\sum_{i=1}^m p^i = 0$  и  $\langle p^i, \bar{x}^i \rangle < 0$  при некоторых  $i$  и  $\bar{x}^i \in X_i$ .

8.55\*. Доказать теорему Дубовицкого — Милютина.

Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые конусы в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $\text{int } X_i \neq \emptyset$  для всех  $i = 1, \dots, m-1$ . Тогда  $\left( \bigcap_{i=1}^{m-1} \text{int } X_i \right) \cap \text{int } X_m = \emptyset$  в том и только том случае, если существуют векторы  $p^i \in X_i^*$  ( $i = 1, \dots, m$ ), не равные нулю одновременно и такие, что  $\sum_{i=1}^m p^i = 0$ .

8.56. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbb{R}^n$ , причем выполняется хотя бы одно из следующих

условий:

$$1) \bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i \neq \emptyset;$$

$$2) X_1, \dots, X_m \text{ — полиэдры и } \bigcap_{i=1}^m X_i \neq \emptyset.$$

Предположим, что существуют вектор  $p$  и число  $\beta$ , для которых

$$\langle p, x \rangle \leq \beta \text{ при всех } x \in \bigcap_{i=1}^m X_i.$$

Доказать, что существуют векторы  $p^1, \dots, p^m$  и числа  $\beta_1, \dots, \beta_m$ , для которых

$$\langle p^i, x^i \rangle \leq \beta_i \text{ при всех } x^i \in X_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m p^i = p, \quad \sum_{i=1}^m \beta_i \leq \beta.$$

**8.57.** Привести пример, показывающий, что утверждение 8.56 становится неверным, если вместо условий 1) или 2) потребовать лишь условие  $\bigcap_{i=1}^m X_i \neq \emptyset$ .

**8.58.** Доказать, что выпуклые множества  $X_1, \dots, X_m$  из  $\mathbf{R}^n$  отделимы в том и только том случае, если при некотором  $i \in \{1, \dots, m\}$  либо множество  $Y_i = \bigcap_{j \neq i} X_j$  пусто, либо множества  $X_i$  и  $Y_i \neq \emptyset$  отделимы.

**8.59\*.** Доказать, что выпуклые множества  $X_1, \dots, X_m$  из  $\mathbf{R}^n$  отделимы в том и только том случае, если выполняется по крайней мере одно из двух условий:

$$1) \bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i = \emptyset;$$

$$2) \text{aff} \left( X_i \cup \left( \bigcap_{j \neq i} X_j \right) \right) \neq \mathbf{R}^n \text{ при некотором } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Если при этом  $0 \in \bigcap_{i=1}^m X_i$ , то условие 2) можно заменить следующим:

$$2') \text{aff} X_i + \bigcap_{j \neq i} \text{aff} X_j \neq \mathbf{R}^n \text{ при некотором } i.$$

В задачах **8.60—8.109** излагаются элементы теории сопряженных множеств, играющей важную роль в выпуклом анализе и его приложениях.

**8.60.** Доказать теорему 8.8.

8.61. Доказать теорему 8.9.

8.62. Доказать теорему 8.10.

8.63. Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу

$$X = \text{cone} \{(-3, 1), (2, 3), (4, 5)\}.$$

8.64. Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к выпуклому многограннику

$$X = \text{conv} \{(-3, -2), (-1, 4), (1, 1)\}.$$

8.65. Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному множеству

$$X = \text{conv} \{(-4, -1), (-2, -1), (-2, 1)\} + \\ + \text{cone} \{(2, 1), (1, 0)\}.$$

8.66. Найти и изобразить на плоскости множества, сопряженные к полуплоскостям

а)  $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + 2x_2 \leq 3\}$ ;

б)  $X_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + 2x_2 \geq 3\}$ ;

в)  $X_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + 2x_2 \leq -3\}$ .

8.67. Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к полиэдру

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -3x_1 + 2x_2 \leq 7, x_1 + 5x_2 \leq 9, \\ x_1 - x_2 \leq 3, -x_2 \leq 1\}.$$

8.68. Доказать, что для произвольных множеств  $X_1$  и  $X_2$  из условия  $X_1 \subset X_2$  следует  $X_2^* \subset X_1^*$ .

8.69. Пусть  $X_1, X_2$  — замкнутые выпуклые множества в  $\mathbb{R}^n$ , содержащие нуль. Доказать, что

а) если  $X_1^* \subset X_2^*$ , то  $X_2 \subset X_1$ ;

б) если  $X_1^* = X_2^*$ , то  $X_1 = X_2$ .

8.70. Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что

$$X^* = (\overline{X})^* = (\text{conv } X)^* = \overline{(\text{conv}(X \cup \{0\}))^*} = X^{***}.$$

8.71. Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $X^* = \{0\}$  в том и только том случае, если  $X = \mathbb{R}^n$ .

8.72. Пусть  $X$  — выпуклый конус в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $X + X^* = \mathbb{R}^n$ ,  $X \cap X^* = \{0\}$ .

Это утверждение является обобщением известной теоремы линейной алгебры о разложении пространства  $\mathbb{R}^n$  в прямую сумму ортогональных подпространств.

8.73. Доказать, что шары  $U_\varepsilon(0)$  и  $U_{1/\varepsilon}(0)$  ( $\varepsilon > 0$ ) являются взаимно сопряженными множествами, т. е.  $[U_\varepsilon(0)]^* = U_{1/\varepsilon}(0)$ .

8.74. Доказать, что шар  $U_1(0)$  является единственным множеством в  $\mathbf{R}^n$ , которое совпадает со своим сопряженным.

8.75. Найти множество, сопряженное к эллипсоиду

$$X = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{j=1}^n a_j^2 x_j^2 \leq \varepsilon^2 \right\}.$$

8.76. Найти множество, сопряженное к шару  $U_1(x^0)$ . При каких  $x^0$  это множество ограничено?

8.77\*. Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

а)  $X$  ограничено в том и только том случае, если  $0 \in \text{int } X^*$ ;

б)  $X^*$  ограничено в том и только том случае, если  $0 \in \text{int}(\text{conv } X)$ .

8.78\*. Конус  $X \subset \mathbf{R}^n$  называется *заостренным*, если из условия  $\pm x \in X$  следует  $x = 0$ , т. е.  $X$  не содержит прямую, проходящую через нуль. Доказать следующие утверждения:

а) если  $X$  — заостренный замкнутый выпуклый конус, то  $\text{int } X^* \neq \emptyset$ ;

б) если  $X$  — конус и  $\text{int } X^* \neq \emptyset$ , то  $X$  заострен, причем для любого  $p \in \text{int } X^*$  следует

$$\langle p, x \rangle < 0 \text{ при всех } x \in X, \quad x \neq 0.$$

8.79. Привести пример, показывающий, что в утверждении а) задачи 8.78 условие замкнутости  $X$  существенно (ср. с 8.85).

8.80\*. Пусть  $X_1, X_2$  — замкнутые выпуклые конусы в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X_1$  заострен,  $X_1 \neq \{0\}$ ,  $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ . Доказать, что существует ненулевой вектор  $p$ , для которого

$$\langle p, x^1 \rangle < 0 \leq \langle p, x^2 \rangle \text{ при всех } x^1 \in X_1,$$

$$x^1 \neq 0, \quad x^2 \in X_2.$$

8.81. Привести примеры, показывающие, что в 8.80 условие замкнутости обоих конусов существенно.

8.82\*. Пусть  $X$  — замкнутый выпуклый конус в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $X \cap \mathbf{R}_+^n = \{0\}$ . Доказать, что существует вектор  $p > 0$ , для которого  $\langle p, x \rangle \leq 0$  при всех  $x \in X$  (ср. с 8.34, 8.35).

Ниже под  $K(X)$  и  $L(X)$  понимаются рецессивный конус и рецессивное подпространство множества  $X$  (см. п. 6 § 7 и 7.124).

8.83. Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать следующие формулы для второго сопряженного к  $X$ :

$$X^{**} = \overline{\bigcup_{0 < \lambda < 1} (\lambda X)}, \quad X^{**} = \bigcup_{0 < \lambda < 1} (\lambda \bar{X}) \cup K(X).$$

8.84\*. Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$K(X^{**}) = K(X), \quad L(X^{**}) = L(X).$$

8.85\*. Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $X$  не содержит прямых в том и только том случае, если  $\text{int } X^* \neq \emptyset$ .

Отметим, что в сравнении с 8.78, а) здесь замкнутость  $X$  не требуется, но зато и не требуется, чтобы прямая проходила через какую-то особую точку множества  $X$ .

8.86. Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$K(X^*) = (\text{cone } X)^* = \{p \in \mathbf{R}^n \mid \langle p, x \rangle \leq 0 \text{ при всех } x \in X\}.$$

8.87. Пусть  $X$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$L(X^*) = \{p \in \mathbf{R}^n \mid \langle p, x \rangle = 0 \text{ при всех } x \in X\},$$

причем это множество совпадает с  $(\text{aff } X)^*$ , если  $0 \in X$ . Привести пример, показывающий, что условие  $0 \in X$  здесь существенно.

8.88. Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$[K(X)]^* = \overline{\text{cone } X^*}, \quad [L(X)]^* = \text{aff } X^*,$$

причем

$$\begin{aligned} \text{cone } X^* &= \left\{ p \in \mathbf{R}^n \mid \sup_{x \in X} \langle p, x \rangle < \infty \right\}, \\ \text{aff } X^* &= \text{cone } X^* - \text{cone } X^*. \end{aligned}$$

8.89\*. а) Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$\dim X^* = n - \dim L(X).$$

б) Пусть  $X$  — замкнутый выпуклый конус в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$\dim X^* = n - \dim [X \cap (-X)].$$

Эти утверждения обобщают известную теорему линейной алгебры о размерности подпространства, ортогонального к линейному подпространству  $X \subset \mathbf{R}^n$ , согласно которой  $\dim X^\perp = n - \dim X$ .

**8.90.** Пусть  $X$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ ,  $a \in \bar{X}$ . Множество

$$P = P(a, X) = \{p \in \mathbf{R}^n \mid \langle p, x \rangle \leq \langle p, a \rangle \text{ при всех } x \in X\}$$

называется *опорным конусом* к  $X$  и  $a$  (ненулевые элементы множества  $P$  суть нормали опорных гиперплоскостей к  $X$  в  $a$ ). Множество

$$V = V(a, X) = \{h \in \mathbf{R}^n \mid a + \alpha h \in X \text{ при некотором } \alpha > 0\}$$

называется *конусом возможных направлений* относительно  $X$  в  $a$ . Доказать, что

а)  $P$  — замкнутый выпуклый конус,  $V$  — выпуклый конус;

$$\text{б) } P^* = \bar{V}, \quad V^* = P;$$

$$\text{в) } \dim P = n - \dim [\bar{V} \cap (-\bar{V})], \\ \dim V = n - \dim [P \cap (-P)].$$

Привести пример, показывающий, что конус  $V$  может быть незамкнутым.

**8.91.** Пусть  $X_1, \dots, X_{m-1}$  — конусы,  $X_m$  — произвольное множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$\left( \sum_{i=1}^m X_i \right)^* = \bigcap_{i=1}^m X_i^*.$$

Привести пример, показывающий, что при произвольных  $X_1, \dots, X_m$  эта формула неверна.

**8.92.** Пусть  $X_1, \dots, X_{m-1}$  — замкнутые выпуклые конусы,  $X_m$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $0 \in X_m$ . Доказать, что

$$\left( \bigcap_{i=1}^m X_i \right)^* = \overline{\left( \sum_{i=1}^m X_i^* \right)}.$$

Привести пример, показывающий, что условие замкнутости множеств здесь существенно.

**8.93.** Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , удовлетворяющие хотя бы одному из следующих условий:

1)  $0 \in \text{int } X_i$  при всех  $i = 1, \dots, m-1$ ;

2)  $\bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i \neq \emptyset$ ;

3)  $X_1, \dots, X_m$  — полиэдры.

Доказать, что множество  $\sum_{i=1}^m X_i^*$  замкнуто.

8.94\*. Пусть  $X_1, \dots, X_{m-1}$  — выпуклые конусы,  $X_m$  — выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $0 \in \bar{X}_m$ . Предположим, что дополнительно выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1)  $\bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i \neq \emptyset$ ;

2)  $X_1, \dots, X_m$  — полиэдры;

3) при некотором  $I \subset \{1, \dots, m\}$  множества  $X_i$  ( $i \in I$ ) суть полиэдры и

$$\left( \bigcap_{i \in I} X_i \right) \cap \left( \bigcap_{i \notin I} \text{ri } X_i \right) \neq \emptyset.$$

Доказать, что

$$\left( \bigcap_{i=1}^m X_i \right)^* = \sum_{i=1}^m X_i^*.$$

Данное утверждение является одним из центральных фактов теории сопряженных множеств.

8.95. Вычислить множество, сопряженное

а) к полушару  $X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq 1, x_1 \geq 0\}$ ;

б) к шаровому сегменту  $X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq 1, x \geq 0\}$ .

8.96. Пусть  $X_i$  ( $i \in I$ ) — произвольные множества в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что

$$\left[ \text{conv} \left( \bigcup_{i \in I} X_i \right) \right]^* = \left( \bigcup_{i \in I} X_i \right)^* = \bigcap_{i \in I} X_i^*.$$

8.97. Пусть  $X_i$  ( $i \in I$ ) — замкнутые выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $0 \in \bigcap_{i \in I} X_i$ . Доказать, что

$$\left( \bigcap_{i \in I} X_i \right)^* = \overline{\text{conv} \left( \bigcup_{i \in I} X_i^* \right)}.$$

8.98. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  — выпуклые множества в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $0 \in \bigcap_{i=1}^m \bar{X}_i$  и  $\bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i \neq \emptyset$ . Доказать, что

$$\left( \bigcap_{i=1}^m X_i \right)^* = \overline{\text{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i^* \right)}.$$

Отметим, что своего рода логической связкой между формулами, указанными в задачах 8.92, 8.94, с одной стороны, и задачах 8.97, 8.98 — с другой, служит задача 7.59.

8.99. Пусть  $X_1, \dots, X_{m-1}$  — конусы,  $X_m$  — произвольное множество в пространствах  $\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_{m-1}}, \mathbb{R}^{n_m}$  соответственно. Доказать, что

$$(X_1 \times \dots \times X_m)^* = X_1^* \times \dots \times X_m^*.$$

8.100\*. Доказать, что в условиях задачи 7.129 справедливо равенство

$$A(X^{**}) = [A(X)]^{**}.$$

8.101\*. Доказать, что в условиях задачи 7.133 справедливо равенство

$$A^{-1}(Y^{**}) = [A^{-1}(Y)]^{**}.$$

В задачах 8.102—8.104, 8.108 под  $A^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  понимается отображение, сопряженное к линейному отображению  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Напомним, что оно определяется условием

$$\langle A^*y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m.$$

Если при этом отображение  $A$  порождается матрицей  $A$  (что мы имеем в виду далее), то отображение  $A^*$  порождается транспонированной матрицей  $A^T$ , т. е.  $A^*y = A^T y = yA$ .

8.102. Пусть  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение и  $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid y = Ax\}$  — его график. Доказать, что

$$L^* = \{(p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid p = -qA\},$$

т. е.  $L^*$  является графиком отображения  $-A^*$ .

8.103. Пусть  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение,  $X$  — произвольное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что

$$[A(X)]^* = (A^*)^{-1}(X^*) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in \mathbb{R}^m \mid qA \in X^*\}.$$

8.104\*. Пусть  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение,  $Y$  — выпуклое множество в  $\mathbb{R}^m$ . Предположим, что дополнительно выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1)  $A^{-1}(\text{ri } Y) \neq \emptyset$ ;
- 2)  $Y$  — полиэдр и  $A^{-1}(Y) \neq \emptyset$ .

Доказать, что

$$[A^{-1}(Y)]^* = A^*(Y^*) \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R}^n \mid p = qA, q \in Y^*\}.$$

**8.105.** Пусть выполняются условия задачи **8.104**. Доказать, что для любого вектора  $p \in \mathbb{R}^n$  совместна одна и только одна из следующих двух систем:

$$Ax \in Y, \quad \langle p, x \rangle > 1 \quad \text{или} \quad qA = p, \quad q \in Y^*.$$

Вывести отсюда теорему 4.6.

**8.106.** Пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$ . Доказать, что совместна одна и только одна из следующих двух систем:

$$\|Ax\| \leq 1, \quad \langle p, x \rangle > 1 \quad \text{или} \quad qA = p, \quad \|q\| \leq 1.$$

**8.107.** Показать, что теорема 8.9 (представляющая собой простую переформулировку теоремы 4.7; см. **8.61**) есть частный случай утверждения задачи **8.104**.

**8.108.** Пусть  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — линейное отображение.  $X \subset \mathbb{R}^n$  и  $Y \subset \mathbb{R}^m$  — выпуклые множества, одно из которых является конусом, а замыкание второго содержит нуль. Предположим, что дополнительно выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1)  $\text{ri } X \cap A^{-1}(\text{ri } Y) \neq \emptyset$ ;
- 2)  $X$  и  $Y$  — полиэдры;
- 3)  $X$  — полиэдр и  $X \cap A^{-1}(\text{ri } Y) \neq \emptyset$ ;
- 4)  $Y$  — полиэдр и  $\text{ri } X \cap A^{-1}(Y) \neq \emptyset$ .

Доказать, что  $[X \cap A^{-1}(Y)]^* = X^* + A^*(Y^*)$ .

**8.109.** Пусть выполняются условия задачи **8.108**. Доказать, что для любого вектора  $p \in \mathbb{R}^n$  совместна одна и только одна из следующих двух систем:

$$Ax \in Y, \quad x \in X, \quad \langle p, x \rangle > 1$$

или

$$s + qA = p, \quad s \in X^*, \quad q \in Y^*.$$

Вывести отсюда теорему из **4.86**.

В задачах **8.110—8.159** приводятся некоторые факты теории крайних точек и крайних подмножеств выпуклого множества.

**8.110.** Доказать теорему 8.11.

**8.111.** Доказать лемму 8.1.

**8.112.** Доказать теорему 8.12.

**8.113.** Доказать теорему 8.13.

**8.114.** Доказать теорему 8.14.

**8.115.** Найти все значения параметра  $k$ , при которых выпуклое множество  $X$  в  $\mathbb{R}^4$ , определяемое системой

$$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + 2x_4)^2 \leq 8,$$

$$kx_1 - 2x_2 + 5kx_3 + 10x_4 = 0,$$

обладает крайними точками.

8.116. Определить все значения параметра  $k$ , при которых точка  $x(k)$  является крайней в многограннике

$$X = \text{conv} \{x^1, x^2, x^3, x^4, x(k)\} \subset \mathbf{R}^3,$$

где

$$\begin{aligned} x^1 &= (-1, 2, 3), & x^2 &= (5, 1, 4), & x^3 &= (1, -6, -1), \\ x^4 &= (1, -2, 4), & x(k) &= (1, -1, k). \end{aligned}$$

8.117. Рассмотрим выпуклый многогранник

$$X = \text{conv} \{(-2, 1), (-1, 2), (1, 3), (3, 3), (4, -1), (3, -3)\},$$

содержащий нуль. В качестве иллюстрации к доказательству теоремы 8.14 (см. 8.114) проделать следующие операции:

- 1) вычислить  $X^*$  по теореме 8.8;
- 2) представить  $X^*$  как выпуклый многогранник;
- 3) вычислить  $X^{**}$  по теореме 8.8;
- 4) представить  $X$  как полиэдр, убедившись, что  $X = X^{**}$ .

8.118. Представить как полиэдр многогранное множество из 8.65.

8.119. Представить выпуклый многогранник

$$X = \text{conv} \{(-1, 3, 1), (2, -1, 1), (0, 1, 1), (-1, -3, -3), (0, 0, 0)\}$$

в виде полиэдра.

8.120. Доказать, что точка  $x$  выпуклого множества  $X$  является крайней в том и только том случае, если из условий

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad x^i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

следует, что для любого  $i = 1, \dots, m$  либо  $x^i = x$ , либо  $\lambda_i = 0$ .

Иными словами, крайнюю точку  $x$  множества  $X$  нельзя представить в виде выпуклой комбинации не только двух, но и большего числа точек из  $X$ , отличных от  $x$ .

8.121. Пусть  $X$  и  $Y$  — выпуклые множества, причем  $Y \subset X$ . Доказать, что любая крайняя точка в  $X$ , принадлежащая  $Y$ , является крайней в  $Y$ , т. е.  $E(X) \cap Y \subset E(Y)$ .

**8.122.** Пусть  $X$  — выпуклое множество,  $Y$  — такое его подмножество, что  $X = \text{conv } Y$ . Доказать, что  $E(X) \subset Y$ .

Данное утверждение с учетом теоремы 8.13 означает, что множество крайних точек выпуклого компакта  $X$  является минимальным среди всех подмножеств  $X$ , выпуклая оболочка которых совпадает с  $X$ .

**8.123.** Пусть  $X$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{R}^n$  и  $\dim X = m$ . Доказать, что  $X$  имеет не менее  $m + 1$  крайних точек.

В частности, если  $\text{int } X \neq \emptyset$ , то  $X$  имеет не менее  $n + 1$  крайних точек.

**8.124.** Пусть  $X = \text{conv } \{x^1, \dots, x^{m+1}\}$  —  $m$ -мерный симплекс в  $\mathbb{R}^n$  (см. 7.73). Доказать, что каждая из точек  $x^1, \dots, x^{m+1}$  является крайней в  $X$ .

**8.125.** Доказать, что единственной крайней точкой заостренного конуса (см. 8.78) является нуль, а незаостренный конус крайних точек не имеет.

**8.126.** Пусть  $X_1$  — выпуклый компакт,  $X_2$  — замкнутый выпуклый конус и  $X = X_1 + X_2$ . Доказать, что  $E(X) \neq \emptyset$  в том и только том случае, если конус  $X_2$  заострен; при этом из условий  $x = x^1 + x^2$ ,  $x \in E(X)$ ,  $x^1 \in X_1$ ,  $x^2 \in X_2$  следует, что  $x^2 = 0$ ,  $x \in E(X_1)$  и, таким образом,  $E(X) \subset E(X_1)$ .

**8.127\***. Рассмотрим многогранное множество

$$X = \text{conv } \{x^1, \dots, x^h\} + \text{cone } \{x^{h+1}, \dots, x^m\},$$

где точки  $x^1, \dots, x^h$  попарно различны, а конус  $\text{cone } \{x^{h+1}, \dots, x^m\}$  заострен. Доказать, что

а)  $E(X) \subset \{x^1, \dots, x^h\}$ ;

б) точка  $x^i$  ( $1 \leq i \leq h$ ) является крайней в  $X$  в том и только том случае, если

$$x^i \notin \text{conv } \{x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^h\} + \text{cone } \{x^{h+1}, \dots, x^m\}.$$

**8.128.** Привести пример выпуклого компакта, множество крайних точек которого незамкнуто.

**8.129.** Выпуклое подмножество  $\Gamma$  выпуклого множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *крайним* в  $X$ , если из условий

$$x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in \Gamma, \quad x^1, x^2 \in X, \quad 0 < \lambda < 1$$

следует, что  $x^1, x^2 \in \Gamma$ . Описать все крайние подмножества квадрата, круга, конуса на плоскости. Убедиться, что крайние точки множества  $X$  суть его крайние подмножества нулевой размерности.

**8.130.** Доказать, что выпуклое подмножество  $\Gamma$  выпуклого множества  $X$  является крайним в  $X$  в том и только том случае, если из условий

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \in \Gamma, \quad x^i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

следует, что для любого  $i = 1, \dots, m$  либо  $x^i \in \Gamma$ , либо  $\lambda_i = 0$ .

**8.131.** Доказать, что любое крайнее подмножество  $\Gamma$  выпуклого конуса  $X$  является конусом.

**8.132.** Доказать, что выпуклое подмножество  $\Gamma$  выпуклого конуса  $X$  является крайним в  $X$  в том и только том случае, если из условий

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \in \Gamma, \quad x^i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

следует, что для любого  $i = 1, \dots, m$  либо  $x^i \in \Gamma$ , либо  $\lambda_i = 0$ .

**8.133.** Доказать, что множество  $\Gamma$  из леммы 8.1 является крайним подмножеством в  $X$ .

**8.134\*.** Доказать, что для полиэдра  $X$  и его собственного подмножества  $\Gamma$  следующие утверждения эквивалентны:

- а)  $\Gamma$  — крайнее подмножество  $X$ ;
- б)  $\Gamma$  — грань  $X$  (см. 4.51);
- в)  $\Gamma = X \cap H_{p\beta}$ , где  $H_{p\beta}$  — гиперплоскость, опорная к  $X$ .

Отметим, что для произвольного выпуклого множества  $X$  из а) не следует в) (см. 8.160).

**8.135.** Пусть  $\Gamma'$  — крайнее подмножество  $\Gamma$ , а  $\Gamma$  — крайнее подмножество выпуклого множества  $X$ . Доказать, что  $\Gamma'$  — крайнее подмножество  $X$  (ср. с 4.57).

**8.136.** Пусть  $\Gamma$  — крайнее подмножество выпуклого множества  $X$ , а выпуклое множество  $Y$  таково, что  $\Gamma \subset Y \subset X$ . Доказать, что  $\Gamma$  — крайнее подмножество  $Y$  (ср. с 4.58, 8.121).

**8.137.** Доказать, что пересечение любого числа крайних подмножеств выпуклого множества  $X$  является крайним (возможно, пустым) подмножеством  $X$ .

**8.138.** Пусть  $X$  — выпуклое множество,  $\Gamma$  — крайнее подмножество  $X$ ,  $Y$  — выпуклое подмножество  $X$ , причем  $\Gamma \cap \text{ri } Y \neq \emptyset$ . Доказать, что  $Y \subset \Gamma$ .

**8.139.** Пусть  $\Gamma$  — собственное крайнее подмножество выпуклого множества  $X$ . Доказать, что  $\Gamma \subset \text{rd } X$ .

**8.140\*.** Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество. Доказать, что  $X$  имеет хотя бы одно собственное крайнее подмножество в том и только том случае, если  $X$  не является аффинным множеством (ср. с 4.71).

**8.141.** Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество. Доказать, что любое его крайнее подмножество  $\Gamma$  замкнуто.

**8.142.** Пусть  $\Gamma_1, \Gamma_2$  — крайние подмножества выпуклого множества  $X$ , причем  $\text{ri } \Gamma_1 \cap \text{ri } \Gamma_2 \neq \emptyset$ . Доказать, что  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ .

**8.143.** Пусть  $X$  и  $Y$  — выпуклые множества, причем  $Y \subset X \cap \text{rd } X$ . Доказать, что существует крайнее подмножество  $\Gamma$  множества  $X$ , удовлетворяющее условиям  $Y \subset \Gamma \subset \text{rd } X$ .

**8.144.** Пусть  $X$  и  $Y$  — выпуклые множества, причем  $Y \subset X$ . Пересечение всех крайних подмножеств множества  $X$ , содержащих  $Y$ , называется *крайним носителем*  $Y$  в  $X$  и обозначается через  $\Gamma_X(Y)$ . Доказать, что  $\Gamma = \Gamma_X(Y)$  является единственным крайним подмножеством  $X$ , которое удовлетворяет условиям  $Y \subset \Gamma$  и  $Y \cap \text{ri } \Gamma \neq \emptyset$ .

**8.145\*.** Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества и  $X = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ . Доказать, что множество  $\Gamma$  является крайним подмножеством  $X$  в том и только том случае, если  $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — некоторые крайние подмножества  $X_1$  и  $X_2$  соответственно.

**8.146\*.** Пусть  $X_1, X_2$  — выпуклые множества и  $X = X_1 + X_2$ . Доказать, что если  $\Gamma$  — крайнее подмножество  $X$ , то  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — некоторые крайние подмножества множеств  $X_1$  и  $X_2$  соответственно.

Привести пример, показывающий, что обратное неверно: сумма крайних подмножеств  $X_1$  и  $X_2$  не обязана быть крайним подмножеством  $X$ .

**8.147.** Учитывая 8.134 и теорему 8.14, будем называть крайние подмножества многогранных множеств *гранями*.

Доказать, что гранями выпуклого многогранника  $X = \text{conv}\{x^1, \dots, x^m\}$  могут быть лишь множества вида  $\Gamma = \text{conv } P$ , где  $P \subset \{x^1, \dots, x^m\}$ .

**8.148\*.** Рассмотрим выпуклый многогранник  $X = \text{conv}\{x^1, \dots, x^m\}$  и множество  $\Gamma = \text{conv } P$ , где  $P \subset \{x^1, \dots, x^m\}$ . Обозначим через  $Q$  совокупность всех тех точек множества  $\{x^1, \dots, x^m\}$ , которые не принадлежат  $\Gamma$ . Доказать, что  $\Gamma$  является гранью  $X$  в том и только том случае, если  $\text{aff } \Gamma \cap \text{conv } Q = \emptyset$  (рис. 54).

8.149. Доказать, что гранями многогранного конуса  $X = \text{cone}\{x^1, \dots, x^m\}$  могут быть лишь множества вида  $\Gamma = \text{cone } P$ , где  $P \subset \{x^1, \dots, x^m, 0\}$ .

8.150\*. Рассмотрим многогранный конус  $X = \text{cone}\{x^1, \dots, x^m\}$  и множество  $\Gamma = \text{cone } P$ , где  $P \subset \{x^1, \dots, x^m\}$ . Обозначим через  $Q$  объединение нуля и

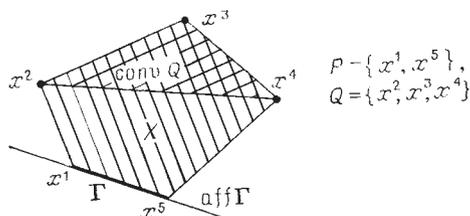


Рис. 54

совокупности всех тех точек множества  $\{x^1, \dots, x^m\}$ , которые не принадлежат  $\Gamma$ . Доказать, что  $\Gamma$  является гранью  $X$  в том и только том случае, если  $\text{aff } \Gamma \cap \text{cone } Q = \{0\}$  и конус  $\text{cone } Q$  заострен (см. 8.78).

Привести пример, показывающий, что условие заостренности конуса  $\text{cone } Q$  здесь существенно.

8.151\*. Доказать, что гранями многогранного множества

$$X = \text{conv}\{x^1, \dots, x^k\} + \text{cone}\{x^{k+1}, \dots, x^m\}$$

могут быть лишь множества вида  $\Gamma = \text{conv } P + \text{cone } Q$ , где  $P \subset \{x^1, \dots, x^k\}$ ,  $Q \subset \{x^{k+1}, \dots, x^m, 0\}$ .

8.152. Выпуклый многогранник  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *двухсмежностным*, если любые его две вершины (крайние точки)  $x^1$  и  $x^2$  являются соседними, т. е. отрезок  $[x^1, x^2]$  служит гранью  $X$  (см. 4.59). Убедиться, что двухсмежностными многогранниками в  $\mathbb{R}^3$  являются отрезки, треугольники, треугольные пирамиды и только они.

8.153. Рассмотрим в  $\mathbb{R}^4$  выпуклый многогранник  $X$ , натянутый на  $m$  точек вида

$$x(i) = (i, i^2, i^3, i^4), \quad i = 1, \dots, m.$$

Доказать, что все эти точки являются вершинами  $X$ , причем  $X$  — двухсмежностный многогранник.

Таким образом, если при  $n = 1, 2, 3$  число вершин двухсмежностного многогранника в  $\mathbb{R}^n$  не превышает  $n + 1$ , то уже при  $n = 4$  такой многогранник может иметь любое число вершин. Большое количество других интересных фактов комбинаторной теории многогранников можно найти в [18].

Задачи 8.154—8.159 посвящены важным результатам о представлении выпуклых замкнутых множеств, выступающим как обобщение и развитие теоремы 8.13. При этом выяснится, что среди всех крайних подмножеств особую роль наряду с крайними точками играют *крайние лучи*. Введем следующие обозначения:

$G(X)$  — объединение всех крайних точек и крайних лучей в  $X$ ;

$H(X)$  — конус крайних направляющих в  $X$ , т. е. множество, состоящее из нуля и всех таких векторов  $h \neq 0$ , что при некотором  $x \in X$  луч  $l_{xh}^+$  является крайним в  $X$ .

8.154. Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ , не содержащее прямых, причем  $\dim X > 1$ . Доказать, что  $X = \text{conv}(\text{гд } X)$  и, более точно, любая точка  $x \in X$  принадлежит некоторому отрезку с концами в  $\text{гд } X$ .

8.155\*. Доказать теорему Кли.

Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ , не содержащее прямых. Тогда

$$X = \text{conv } G(X) = \text{conv } E(X) + \text{cone } H(X).$$

8.156. Пусть  $X$  — заостренный замкнутый выпуклый конус в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $X = \text{cone } H(X)$ , причем здесь (в случае  $X \neq \{0\}$ ) множество  $H(X)$  представляет собой объединение крайних лучей в  $X$ .

8.157. Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что

$$\begin{aligned} X &= \text{conv } G(X \cap L^\perp) + L = \\ &= \text{conv } E(X \cap L^\perp) + \text{cone } H(X \cap L^\perp) + L, \end{aligned}$$

где  $L = L(X)$  — рецессивное подпространство множества  $X$  (см. 7.124), причем множество  $X \cap L^\perp$  не содержит прямых.

8.158. Пусть  $X$  — замкнутый выпуклый конус в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $X = \text{cone } H(X \cap L^\perp) + L$ , где  $L = X \cap (-X)$ , причем конус  $X \cap L^\perp$  заострен.

8.159\*. Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $X$  является многогранным множеством (полиэдром) в том и только том случае, если число крайних подмножеств  $X$  конечно.

В задачах 8.160—8.173 излагаются основы теории выступающих точек и выступающих подмножеств выпуклого множества.

8.160. Подмножество  $\Gamma$  выпуклого множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  называется *выступающим*, если оно представимо в виде

$\Gamma = X \cap H_{pv}$ , где  $H_{pv}$  — гиперплоскость, опорная к  $X$ . Иными словами, выступающее подмножество является множеством решений задачи максимизации (или минимизации) некоторой линейной функции  $f(x) = \langle p, x \rangle$  ( $p \neq 0$ ) на  $X$ . Точка  $a \in X$  называется *выступающей*, если  $\{a\}$  — выступающее подмножество  $X$ . Совокупность всех выступающих точек множества  $X$  обозначим через  $S(X)$ .

Согласно 8.30, любая граничная точка замкнутого строго выпуклого множества является выступающей. В силу 8.133 любое выступающее подмножество выпуклого множества  $X$  является крайним. Если  $X$  — полиэдр, то верно и обратное: любая его собственная грань является выступающим подмножеством (см. 8.134).

Привести примеры, показывающие, что как одноточечное, так и неодноточечное крайнее подмножество выпуклого множества может не быть выступающим.

8.161\*. Пусть  $X$  — выпуклый компакт в  $\mathbf{R}^n$ ,  $a \in \mathbf{R}^n$ . Доказать, что точка из  $X$ , наиболее удаленная от  $a$ , является выступающей в  $X$ .

8.162. Пусть  $X$  — выпуклый компакт в  $\mathbf{R}^n$ ,  $a \notin X$ . Доказать, что существует точка  $y \in \mathbf{R}^n$ , которая находится на большем расстоянии от  $a$ , чем от любой точки из  $X$ , т. е.

$$\|a - y\| > \|x - y\| \quad \text{при всех } x \in X.$$

8.163\*. Доказать теорему Страссевича.

Пусть  $X$  — выпуклый компакт в  $\mathbf{R}^n$ . Тогда

$$X = \overline{\text{conv } S(X)} = \text{conv } \overline{S(X)}.$$

8.164. Пусть  $X$  — выпуклый компакт в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что любая крайняя точка в  $X$  является пределом некоторой последовательности выступающих точек, т. е.  $E(X) \subset \overline{S(X)}$ .

Это включение, вообще говоря, нельзя заменить на равенство (см. 8.128).

8.165\*. Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbf{R}^n$ . Доказать, что  $X$  имеет по крайней мере одну выступающую точку в том и только том случае, если  $X$  не содержит прямых; при этом  $E(X) \subset \overline{S(X)}$ .

8.166. Гиперплоскость  $H_{pv}$  называется *касательной* к множеству  $X \subset \mathbf{R}^n$  в точке  $a \in \overline{X}$ , если она является единственной опорной к  $X$  в  $a$ . Полупространство, порождаемое этой гиперплоскостью и содержащее  $X$ , также называют *касательным* к  $X$  в  $a$ . Указать все касательные ги-

перпендикулярности к отрезку, квадрату, кругу на плоскости.

8.167. Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $0 \in \text{int } X$ . Доказать, что полупространство  $H_{p1}^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x \rangle \leq 1\}$  является касательным к  $X$  в том и только том случае, если  $p$  — выступающая точка сопряженного множества  $X^*$ , т. е.  $p \in S(X^*)$  и  $p \neq 0$ .

8.168\*. Доказать теорему о касательных полупространствах.

Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $\text{int } X \neq \emptyset$  и  $X \neq \mathbb{R}^n$ . Тогда  $X$  есть пересечение всех полупространств, касательных к  $X$ .

8.169. Пусть  $X$  — замкнутый выпуклый конус в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что полупространство  $H_{p0}^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x \rangle \leq 0\}$  является касательным к  $X$  в том и только том случае, если  $l_{op}^+$  — выступающий луч сопряженного конуса  $X^*$ .

8.170. Доказать теорему Страшевича — Кли для конусов.

Пусть  $X$  — заостренный замкнутый выпуклый конус в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $X \neq \{0\}$ . Тогда  $X = \text{cone } T(X)$ , где  $T(X)$  — объединение всех выступающих лучей в  $X$ .

Данное утверждение является частным случаем теоремы из 8.173. Оно приводится отдельно, поскольку может быть доказано проще и поучительней. Утверждения следующих двух задач окажутся полезными при доказательстве общей теоремы Страшевича — Кли.

8.171. Пусть гиперплоскости  $H_{p\beta}$ ,  $H_{q\alpha}$ ,  $H_{r\gamma}$  таковы, что пересечение  $H_{p\beta} \cap H_{q\alpha}$  непусто и принадлежит  $H_{r\gamma}$ , причем  $H_{p\beta} \neq H_{r\gamma}$ . Доказать, что  $H_{p\beta} \cap H_{q\alpha} = H_{p\beta} \cap H_{r\gamma}$ .

8.172. Пусть выпуклое множество  $X$  и гиперплоскость  $H_{p\beta}$  таковы, что  $X \cap H_{p\beta} = \{x^0\}$ , но  $x^0$  не является крайней точкой в  $X$ . Доказать, что  $\dim X = 1$ .

8.173\*. Доказать теорему Страшевича — Кли.

Пусть  $X$  — замкнутое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ , не содержащее прямых. Тогда  $X = \text{conv } T(X)$ , где  $T(X)$  — объединение всех выступающих точек и выступающих лучей в  $X$ .

В заключение параграфа приведем три точных факта выпуклого анализа — теоремы Мозкина, Бурбаки и Красносельского. В задачах 8.174—8.177 проводится подготовка к доказательству первой из этих теорем.

8.174. Пусть  $x$  — выпуклая комбинация точек  $x^i \in \mathbb{R}^n$  ( $i = 1, \dots, m$ ), не лежащих в шаре  $U_\varepsilon(x)$ . Обозначим

через  $Y$  множество всех пар  $(y, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , удовлетворяющих условиям (рис. 55)

$$U_\varepsilon(x) \subset U_r(y), \quad x^i \neq U_r(y), \quad i = 1, \dots, m.$$

Доказать, что  $Y$  ограничено.

8.175. Пусть  $X$  — замкнутое множество,  $Y$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $X$  и  $Y$  пересекаются в единственной точке  $a$ , лежащей на границе  $Y$ :  $X \cap Y = \{a\}$ ,

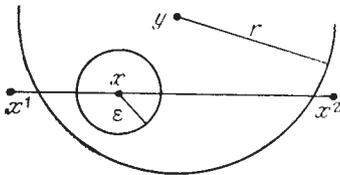


Рис. 55

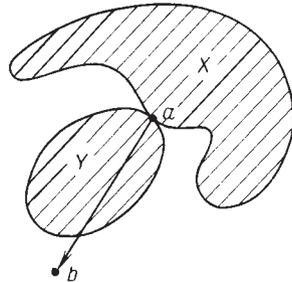


Рис. 56

$a \in \partial Y$  (рис. 56). Известно, что точка  $b$  принадлежит внутренности любого полупространства, опорного к  $Y$  в  $a$ . Доказать, что любой малый сдвиг множества  $Y$  в направлении вектора  $h = b - a$  устранил касание с  $X$ , т. е.

$$X \cap (Y + \alpha(b - a)) = \emptyset$$

при всех достаточно малых  $\alpha > 0$ .

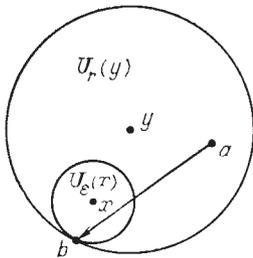


Рис. 57

Убедиться, что точка  $b$  удовлетворяет указанному условию, если  $b \in Y$ ,  $b \neq a$  и  $Y$  строго выпукло (см. 8.29).

8.176. Пусть замкнутое множество  $X$  пересекается с шаром  $U_r(y)$  в единственной точке  $a$ , лежащей на его границе (сфере). Пусть  $b \in U_r(y)$ ,  $b \neq a$ . Доказать, что

$$X \cap U_r(y + \alpha(b - a)) = \emptyset$$

при всех достаточно малых  $\alpha > 0$ .

8.177. Пусть шар  $U_\varepsilon(x)$  лежит в отличном от него шаре  $U_r(y)$ , причем границы этих шаров (сферы) имеют общую точку  $b$  (рис. 57). Пусть  $a \in U_r(y)$ ,  $a \neq b$ . Доказать, что шар, получаемый любым малым сдвигом

шара  $U_r(y)$  в направлении вектора  $h = b - a$ , также содержит  $U_\varepsilon(x)$ , т. е.

$$U_\varepsilon(x) \subset U_r(y + \alpha(b - a))$$

при всех достаточно малых  $\alpha > 0$ .

8.178\*. Доказать теорему Моцкина.

Пусть  $X$  — замкнутое множество в  $\mathbf{R}^n$ , причем любая точка из  $\mathbf{R}^n$  имеет единственную проекцию на  $X$ . Тогда  $X$  — выпуклое множество.

8.179. Подчеркнем, что в теореме Моцкина имеется в виду проекция относительно евклидовой нормы  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , которая порождает шары, являющиеся строго выпуклыми множествами. Привести пример, показывающий, что утверждение теоремы становится неверным, если взять за основу, например, норму  $\|x\| = \max_{1 \leq y \leq n} |x_j|$ , не обладающую указанным свойством (см. 8.29).

8.180. Пусть  $X$  — замкнутое множество в  $\mathbf{R}^n$ , обладающее следующим свойством: для любой точки  $x \in \mathbf{R}^n$  существует такое  $\varepsilon > 0$ , что пересечение  $X$  с шаром  $U_\varepsilon(x)$  непусто и выпукло. Доказать, что  $X$  выпукло.

8.181. Множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  называется *локально выпуклым*, если у любой точки  $x \in X$  существует такая окрестность  $U$ , что множество  $X \cap U$  выпукло.

Пусть  $X$  — замкнутое, локально выпуклое множество и отрезки  $[a, b]$ ,  $[b, c]$  лежат в  $X$ . Доказать, что отрезок  $[a, c]$  также целиком принадлежит  $X$ .

8.182\*. Доказать теорему Бурбаки.

Если  $X$  — связное, замкнутое и локально выпуклое множество, то  $X$  выпукло (ср. с 8.180).

8.183. Множество  $X \subset \mathbf{R}^n$  называется *звездным* относительно своей точки  $x^0$ , если для любой точки  $x \in X$  отрезок  $[x^0, x]$  целиком лежит в  $X$ . Доказать, что множество  $X$  звездно относительно любой своей точки в том и только том случае, если оно выпукло.

8.184\*. Доказать теорему Красносельского.

Пусть  $X$  — компакт в  $\mathbf{R}^n$ , обладающий следующим свойством: для любых  $n + 1$  точек  $x^1, \dots, x^{n+1}$  из  $X$  существует такая точка  $x^0$ , что  $[x^0, x^i] \subset X$  при всех  $i = 1, \dots, n + 1$ . Тогда  $X$  — звездное множество относительно некоторой своей точки.

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### ГЛАВА 1

#### § 1

1.2. а) Следует из 1.1 при  $\varphi(u) = \alpha u + \beta$ .

б) Для любого  $x \in X$  имеем  $f(x) + g(x) \geq f^* + g^*$ . Поэтому

$$(f + g)^* = \inf_X (f(x) + g(x)) \geq f^* + g^*.$$

в) Доказывается аналогично.

г) Пусть  $x \in X$ . Тогда

$$(\min \{f, g\})^* \leq \min \{f(x), g(x)\} \leq f(x).$$

Поэтому  $(\min \{f, g\})^* \leq \inf_X f(x) = f^*$ . Аналогично доказывается, что выражение слева не превосходит  $g^*$ . Следовательно,

$$(\min \{f, g\})^* \leq \min \{f^*, g^*\}.$$

В то же время  $\min \{f(x), g(x)\} \geq \min \{f^*, g^*\}$  и, значит,

$$(\min \{f, g\})^* \geq \min \{f^*, g^*\}.$$

д) Для любого  $x \in X$  имеем  $\max \{f(x), g(x)\} \geq \max \{f^*, g^*\}$ . Поэтому

$$(\max \{f, g\})^* \geq \max \{f^*, g^*\}.$$

е) Раскрыть неравенство  $(f(x) - f^*)(g(x) - g^*) \geq 0$ .

1.3. По сути дела требуется провести те же рассуждения, что и в доказательстве утверждений г) и д) задачи 1.2.

1.4.  $f(0) = -1$  ( $f(0) = 1$ ).

1.6. Использовать формулу  $\overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} (-f(x^h)) = -\underline{\lim}_{h \rightarrow \infty} f(x^h)$ .

1.7. Использовать формулу

$$\underline{\lim}_{h \rightarrow \infty} (\alpha_1 f_1(x^h) + \alpha_2 f_2(x^h)) \geq \alpha_1 \underline{\lim}_{h \rightarrow \infty} f_1(x^h) + \alpha_2 \underline{\lim}_{h \rightarrow \infty} f_2(x^h),$$

где  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ .

1.8. Пусть  $\{x^h\} \subset X$ ,  $\lim_{h \rightarrow \infty} x^h = x \in X$ . Для любого  $y \in Y$  имеем  $\varphi(x^h, y) \leq f(x^h)$ . Отсюда с учетом полунепрерывности снизу  $\varphi(x, y)$  по  $x$  получаем

$$\varphi(x, y) \leq \underline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \varphi(x^h, y) \leq \underline{\lim}_{h \rightarrow \infty} f(x^h).$$

Следовательно,

$$f(x) = \sup_Y \varphi(x, y) \leq \lim_{h \rightarrow \infty} f(x^h),$$

т. е.  $f$  полунепрерывна снизу на  $X$ .

1.9. Пусть последовательность  $\{x^h\} \subset X$  такова, что  $\lim_{h \rightarrow \infty} f(x^h) = \inf_X f(x) = f^*$ . Поскольку  $X$  — компакт, то  $\{x^h\}$  имеет предельные точки в  $X$ . Пусть без ограничения общности вся эта последовательность сходится к некоторой точке  $x^* \in X$ . Тогда имеем

$$f(x^*) \leq \lim_{h \rightarrow \infty} f(x^h) = f^*$$

и, значит,  $f(x^*) = f^*$ . Таким образом,  $x^*$  — точка глобального минимума  $f$  на  $X$ .

1.10. Сначала рассмотрим случай, когда  $\varphi(x, y)$  полунепрерывна снизу на  $X \times Y$ . Пусть  $\{x^h\} \subset X$ ,  $\lim_{h \rightarrow \infty} x^h = x \in X$ . Отметим, что определение функции  $f(x)$  как минимума корректно в силу 1.9. Поэтому  $f(x^h) = \varphi(x^h, y^h)$  при некотором  $y^h \in Y$ . Пусть подпоследовательности  $\{x^{h_m}\}$  и  $\{y^{h_m}\}$  таковы, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x^{h_m}) = \lim_{h \rightarrow \infty} f(x^h), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} y^{h_m} = y \in Y.$$

Тогда с учетом полунепрерывности снизу  $\varphi(x, y)$  на  $X \times Y$  имеем

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f(x^h) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(x^{h_m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(x^{h_m}, y^{h_m}) \geq \varphi(x, y) \geq f(x),$$

т. е.  $f$  полунепрерывна снизу на  $X$ .

Если  $\varphi(x, y)$  непрерывна на  $X \times Y$ , то непрерывность  $f(x)$  на  $X$  следует из только что доказанного, а также из 1.8.

1.11. Рассмотрим функцию  $\varphi(x, y) = \max\{0, 1 - xy\}$  и множества  $X = Y = [0, \infty)$ . Здесь

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

т. е.  $f$  полунепрерывна сверху, но не снизу.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2), & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

и множества  $X = Y = [-1, 1]$ . Функция  $\varphi$  непрерывна по каждой переменной в отдельности, но разрывна в нуле по совокупности переменных. При этом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ -1/2, & \text{если } x \neq 0, \end{cases}$$

т. е.  $f$  полунепрерывна сверху, но не снизу.

1.12. Пусть  $\{x^k\} \subset X$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x \in X$ . Обозначим  $y^k = y(x^k)$ .

Требуется показать, что предел последовательности  $\{y^k\}$  существует и равен  $y(x)$ . Поскольку  $Y$  — компакт, то  $\{y^k\}$  имеет предельные точки. Пусть  $\bar{y}$  — любая из них и подпоследовательность  $\{y^{k_m}\}$  сходится к  $\bar{y}$ . По определению  $y^k$  имеем

$$\varphi(x^{k_m}, y^{k_m}) \leq \varphi(x^{k_m}, y) \text{ при всех } y \in Y.$$

Переходя здесь к пределу с учетом непрерывности  $\varphi$  на  $X \times Y$ , получаем

$$\varphi(x, \bar{y}) \leq \varphi(x, y) \text{ при всех } y \in Y.$$

Следовательно,  $\bar{y} = y(x)$ . Таким образом, последовательность  $\{y^k\}$  имеет единственную предельную точку  $y(x)$ .

1.13. Для функции  $f(x, y) = (xy - 1)^2(y^2 + 1)$  на  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  имеем

$$y(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

1.15. а) С учетом 1.14 имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) &= \sup_k f_k(x), \quad x \in X, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_X f_k(x) &= \sup_k \sup_X f_k(x). \end{aligned}$$

Нужное равенство следует теперь из 1.3, а).

б) Поскольку  $f(x) = \sup_k f_k(x)$ , то можно использовать 1.8.

Требуемые примеры:

$$\text{а) } f_k(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/k, \\ 0, & x = 0, \quad 1/k \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } f_k(x) = \max\{0, 1 - kx\}, \quad X = [0, 1] \text{ (ср. с ответом к 1.11).}$$

1.16. Прежде всего отметим, что точка  $x^k$  существует в силу 1.9, а точка  $\bar{x}$  — в силу компактности  $X$ , причем  $\bar{x} \in X$ . Без ограничения общности будем считать, что последовательность  $\{x^k\}$  сходится к  $\bar{x}$ . Требуется показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x^k) = \min_X f(x) = f(\bar{x}).$$

Но

$$f_k(x^k) = \min_X f_k(x) \leq \min_X f(x) \leq f(\bar{x}).$$

Поэтому остается доказать лишь следующее: для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $K$ , что

$$f(\bar{x}) - f_k(x^k) \leq \varepsilon \text{ при всех } k \geq K. \quad (1)$$

Так как по определению  $f(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\bar{x})$ , то найдется такое  $m$ , что

$$f(\bar{x}) \leq f_m(\bar{x}) + \varepsilon/2.$$

Поскольку функция  $f_m$  полунепрерывна снизу и  $x^h \rightarrow \bar{x}$ , то существует такое  $K_0$ , что

$$f_m(\bar{x}) \leq f_m(x^h) + \varepsilon/2 \quad \text{при всех } h \geq K_0.$$

Из условия поточечного неубывания функций следует, что

$$f_m(x^h) \leq f_h(x^h) \quad \text{при всех } h \geq m.$$

Складывая выписанные неравенства, приходим к (I), где  $K = \max\{m, K_0\}$ .

Примерами существенности условия полунепрерывности функций  $f_k$  служат

$$\text{а) } f_k(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1/k, \\ 1, & x = 0, \quad 1/k \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } f_k(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad x^h = 1/k.$$

Примерами существенности условия неубывания  $\{f_h(x)\}$  являются примеры из ответа к 1.15, где в б) следует взять  $x^h = 1/k$ .

1.17. а) Пусть  $\{x^h\} \subset X_\beta$ ,  $\lim_{h \rightarrow \infty} x^h = x$ . Поскольку  $\{x^h\} \subset X$  и  $X$  замкнуто, то  $x \in X$ . Так как  $f(x^h) \leq \beta$  и  $f$  полунепрерывна снизу, то  $f(x) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} f(x^h) \leq \beta$ , т. е.  $x \in X_\beta$ . Следовательно,  $X_\beta$  замкнуто.

б) Пусть  $\{x^h\} \subset X$ ,  $\lim_{h \rightarrow \infty} x^h = x \in X$ . Допустим, что  $\alpha = \lim_{h \rightarrow \infty} f(x^h) < f(x)$ . Выберем такое  $\beta$ , что  $\alpha < \beta < f(x)$ . Тогда

$x \notin X_\beta$  и в то же время существует подпоследовательность  $\{x^{h_m}\}$ , лежащая в  $X_\beta$ . При этом  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{h_m} = x$ . Мы пришли к противоречию с замкнутостью  $X_\beta$ . Следовательно,  $f(x) \leq \alpha$ , т. е.  $f$  полунепрерывна снизу.

Требуемый пример:  $f(x) = \ln x$ ,  $X$  — множество положительных чисел.

1.18. С учетом 1.17 множество  $X_\beta$  есть (непустой) компакт. Тогда, согласно 1.9, функция  $f$  имеет точку глобального минимума на  $X_\beta$ . Ясно, что она же является точкой глобального минимума  $f$  на  $X$ .

1.20. Пусть последовательность  $\{x^h\} \subset X$  такова, что  $\lim_{h \rightarrow \infty} f(x^h) = \inf_X f(x) = f^*$ . Поскольку  $f$  — бесконечно растущая функция на  $X$  и  $f^* < \infty$ , то, рассуждая от противного, получаем, что  $\{x^h\}$  ограничена и любая ее предельная точка лежит в  $X$ . Остается повторить концовку решения задачи 1.9.

1.21. Предположим, что  $f^* = \inf_{\mathbb{R}^n} f(x) > -\infty$ . Как известно

из курса линейной алгебры, для симметрической матрицы  $A$  существует такая невырожденная матрица  $C$  размера  $n \times n$ , что  $C^T A C$  есть диагональная матрица. Пусть ее диагональными элементами служат числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Положим  $d = C^T b$ . Тогда для

любого  $y \in \mathbf{R}^n$  имеем

$$f(Cy) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i y_i^2 + d_i y_i) + c \geq f^*.$$

Отсюда следует, что при любом  $i = 1, \dots, n$  функция  $\varphi_i(y_i) = \lambda_i y_i^2 + d_i y_i$  ограничена снизу на числовой оси  $\mathbf{R}$ . Тогда либо  $\lambda_i > 0$ , либо  $\lambda_i = 0$ ,  $d_i = 0$ , и во всяком случае  $\varphi_i$  имеет на  $\mathbf{R}$  точку глобального минимума  $y_i^*$ . Ясно, что  $x^* = Cy^*$ , где  $y^* = (y_i^*)$ , есть точка глобального минимума функции  $f$  на  $\mathbf{R}^n$  (ср. 2.31).

Далее пусть  $f^* > -\infty$ , но  $A$  не является неотрицательно определенной, т. е. существует такой  $x \in \mathbf{R}^n$ , что  $\langle Ax, x \rangle < 0$ . Тогда, очевидно,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda x) = -\infty$ , что противоречит условию  $f^* > -\infty$ .

1.22. Допустим, что  $f$  не является бесконечно растущей на  $\mathbf{R}^n$ , т. е. существует такая последовательность  $\{x^k\} \subset \mathbf{R}^n$ , что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k\| = \infty$ , но  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^k) < \infty$ . Положим  $h^k = x^k / \|x^k\|$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\{h^k\}$  сходится к некоторому  $h \neq 0$ . Тогда

$$0 \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x^k)}{\|x^k\|^2} = \langle Ah, h \rangle.$$

Но это противоречит положительной определенности  $A$ .

$$1.23. A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.24. Пусть  $x^*$  — точка глобального минимума  $f$  на  $\bar{X}$ , существующая по теореме Вейерштрасса. Предположим, что  $x^* \in \bar{X} \setminus X$ . Рассмотрим соответствующий вектор  $h$  из условия задачи. Положим  $\varphi(\alpha) = f(x^* + \alpha h)$ . По теореме Лагранжа о конечных приращениях для любого достаточно малого  $\alpha > 0$  найдется такое  $\varepsilon \in (0, \alpha)$ , что

$$\varphi(\alpha) - \varphi(0) = \varphi'(\varepsilon)\alpha = \langle f'(x^* + \varepsilon h), h \rangle \alpha < 0.$$

Но это противоречит выбору  $x^*$ . Таким образом,  $x^* \in X$ .

1.25. Пусть  $x \in \bar{X} \setminus X$ , т. е.  $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ ,  $x_j \geq 0$  при всех  $j = 1, \dots, n$  и  $x_j = 0$  хотя бы при одном  $j$ . Без ограничения общности предположим, что  $x_1 = \dots = x_k = 0$ ,  $x_{k+1} > 0, \dots, x_n > 0$ . Рассмотрим вектор  $h \in \mathbf{R}^n$  с координатами

$$h_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 1, \dots, k, \\ -k/(n-k), & \text{если } j = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

Тогда, очевидно,  $x + \alpha h \in X$  при всех достаточно малых  $\alpha > 0$  и

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \langle f'(x + \alpha h), h \rangle &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \sum_{j=1}^n f'_j(\alpha) - \frac{k}{n-k} \sum_{j=k+1}^n f'_j \left( x_j - \frac{\alpha k}{n-k} \right) \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Остается использовать 1.24.

1.26. Нет, не следует. Рассмотрим функцию  $f(x, y) = x^2$  и множество  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy \geq 1\}$ .

1.27. Нет, не следует. Рассмотрим функции  $f(x) = |x|/(1+x^2)$ ,  $g(x) = |x-1|/(1+x^2)$  и множество  $X = \mathbb{R}$ .

1.28. Если  $a > 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ . Если  $a \leq -1$ , то  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ . Если  $-1 < a < 0$ , то  $f$  является бесконечно растущей на указанном множестве. Если, наконец,  $a = 0$ , то  $f'(0) < 0$  (ср. с 1.24) и  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Следовательно, точка глобального

минимума существует в случае  $-1 < a \leq 0$  и отсутствует в остальных случаях.

1.29. Точка глобального минимума существует при  $a = 2$ ,  $a = 3$  и  $a > 4$ ; величина  $f^*$  конечна, но не достигается при  $a < 2$  и  $3 < a \leq 4$ .

1.30. Неравенство, определяющее  $X$ , можно записать в виде  $(b-1)x^2 + (x-y)^2 \leq 1$ . Следовательно, если  $b > 1$ , то  $X$  ограничено и, значит,  $f$  при любом  $a$  имеет на  $X$  точку глобального минимума. Если  $b = 1$ , то лишь при  $a = -1$  величина  $f^* = \inf_X f(x, y)$

конечна и достигается. Если  $b < 1$ , то при любом  $a$  точка минимума отсутствует.

1.31. Требуется рассмотреть лишь случай  $b \leq 1$ . Если при этом  $a = -1$ , то точка минимума  $f$  на  $X$  отсутствует, так как  $(x, x) \in X$  для всех  $x$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, x) = -\infty$ .

Пусть  $a = 1$ . Если  $b > 0$ , то точка минимума существует, поскольку для любой точки  $(x, y) \in X$  справедливо

$$f(x, y) = xy \geq \frac{bx^2 + y^2 - 1}{2}$$

и, значит,  $f$  является бесконечно растущей на  $X$ . Если  $b = 0$ , то, как нетрудно показать,  $f^* = \inf_X f = -1/2$ , но эта величина не достигается. Если  $b < 0$ , то  $f^* = -\infty$ , так как  $(x, 1) \in X$  при всех  $x \leq 2/b$  и  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 1) = -\infty$ .

1.32. Для любой точки  $(x, y)$ , удовлетворяющей условию  $y^2 = 1 - (a-1)x$ , имеем  $(x, y) \in X$  и

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4x^2 + (a-4)x(1 - (a-1)x) = \\ &= (4 - (a-1)(a-4))x^2 + (a-4)x. \end{aligned}$$

Следовательно, если  $(a-1)(a-4) \geq 4$ , то для последовательности  $\{(x_s, y_s)\}$  такой, что  $(a-1)x_s \rightarrow -\infty$  при  $s \rightarrow \infty$  и  $y_s^2 = 1 - (a-1)x_s$ , получаем  $(a-4)x_s \rightarrow -\infty$  и  $\lim_{s \rightarrow \infty} f(x_s, y_s) = -\infty$ .

Таким образом, необходимым условием существования точки глобального минимума является неравенство

$$(a-1)(a-4) < 4. \quad (I)$$

Покажем, что это условие и достаточно. Пусть  $\{(x_s, y_s)\} \subset X$ ,  $\lim_{s \rightarrow \infty} (|x_s| + |y_s|) = \infty$ . Тогда обязательно  $|x_s| \rightarrow \infty$ , и без ограничения общности можно считать, что либо  $x_s \rightarrow \infty$ , либо  $x_s \rightarrow -\infty$ . Если  $(a-4)x_s \rightarrow +\infty$ , то очевидно, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(x_s, y_s) = \infty. \quad (II)$$

Пусть  $(a-4)x_s \rightarrow -\infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} f(x_s, y_s) &\geq 4x_s^2 + (a-4)x_s(1 - (a-1)x_s) = \\ &= (4 - (a-1)(a-4))x_s^2 + (a-4)x_s. \end{aligned}$$

При этом из (I) вновь получаем (II). Следовательно,  $f$  является бесконечно растущей на  $X$ . Таким образом, точка глобального минимума  $f$  на  $X$  существует в том и только том случае, если  $a$  удовлетворяет (I), т. е.  $0 < a < 5$ .

1.33. (1, 4, 7).

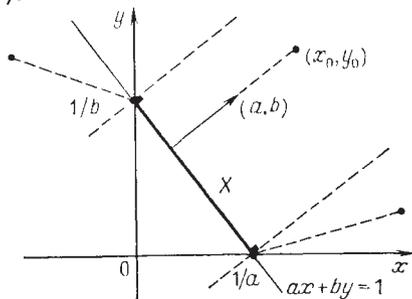


Рис. 58

1.34. Из рис. 58 ясно, что проекция  $(x, y)$  точки  $(x_0, y_0)$  на прямую  $ax + by = 1$  должна удовлетворять системе

$$ax + by = 1, \quad \frac{x_0 - x}{a} = \frac{y_0 - y}{b}.$$

Решая ее, находим, что

$$x = x_0 + (1 - ax_0 - by_0) \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$y = y_0 + (1 - ax_0 - by_0) \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Проекция точки  $(x_0, y_0)$  на  $X$  определяется теперь по формуле

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} (x, y), & \text{если } x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ (0, 1/b), & \text{если } x < 0, \\ (1/a, 0), & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

1.35. Если  $(x_0, y_0) \in X$ , то проекцией служит сама точка  $(x_0, y_0)$ . Если  $x_0^2 + y_0^2 < 1, y_0 > 0$ , то из рис. 59 ясно, что проекция  $(x, y)$  должна удовлетворять системе

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x/x_0 = y/y_0 > 0.$$

Решая ее, находим, что

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \quad y = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Пусть теперь  $y_0 \leq 0$ . Тогда если  $|x_0| > 1$ , то проекцией служит точка  $(x_0, 0)$ ; если  $-1 \leq x_0 < 0$ , то — точка  $(-1, 0)$ ; если  $0 < x_0 \leq$

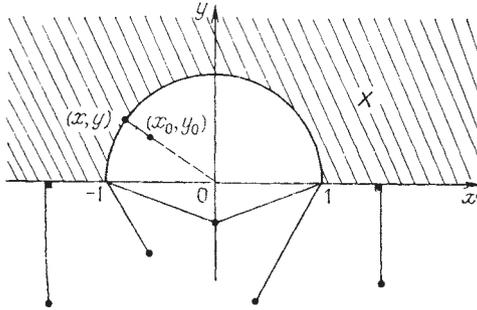


Рис. 59

$\leq 1$ , то — точка  $(1, 0)$ . Наконец, если  $x_0 = 0, y_0 = 0$ , то проекция являются все точки  $(x, y)$  такие, что  $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ , а если  $x_0 = 0, y_0 < 0$ , то — точки  $(-1, 0)$  и  $(1, 0)$ .

1.36. Геометрическая интерпретация задачи приведена на рис. 60. Отсюда видно, что решением является такая точка  $(x^*, y^*)$ , в которой проходящая через нее линия уровня функции  $f$  (гипербола) касается прямой  $ax + by = 1$ . Условием касания служит коллинеарность градиента  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$  и вектора  $(a, b)$ . Следовательно,  $(x^*, y^*)$  есть решение системы

$$ax + by = 1, \quad y/a = x/b.$$

Отсюда  $x^* = 1/(2a), y^* = 1/(2b)$ .

1.37. Геометрическая интерпретация задачи приведена на рис. 61 (здесь и на следующих рисунках  $X$  обозначает допустимое множество). Отсюда видно, что решением служит такая точка  $(x^*, y^*)$ , в которой проходящая через нее линия уровня функции  $f$  касается прямой  $x - y = 2$ . Из этого условия находим, что  $x^* = 1, y^* = -1$ .

1.38. Из рис. 62 ясно, что решением  $(x^*, y^*)$  служит точка пересечения прямых  $x - y = 0$  и  $x + y = 1$ , т. е.  $x^* = y^* = 1/2$ .

1.39. Решениями служат точки  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  (рис. 63).

1.40. Решениями служат две точки  $(x^*, \pm y^*)$  такие, что  $(x^*, y^*)$  удовлетворяет системе  $2x - y = 2, 2 - x = y$  (рис. 64). Отсюда  $x^* = 4/3, y^* = 2/3$ .

1.41. Если  $|a| < 1$ , то  $X$  состоит из единственной точки  $(0, 0)$ , которая и служит решением. Если  $|a| \geq 1$ , то  $X$  есть объединение прямых  $y = k_1x$  и  $y = k_2x$ , где  $k_1 = a - \sqrt{a^2 - 1}$ ,  $k_2 = a + \sqrt{a^2 - 1}$ .

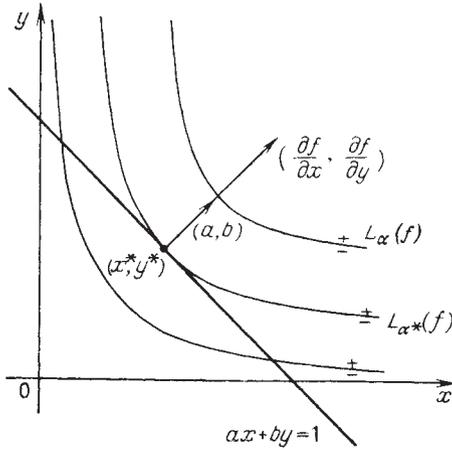


Рис. 60

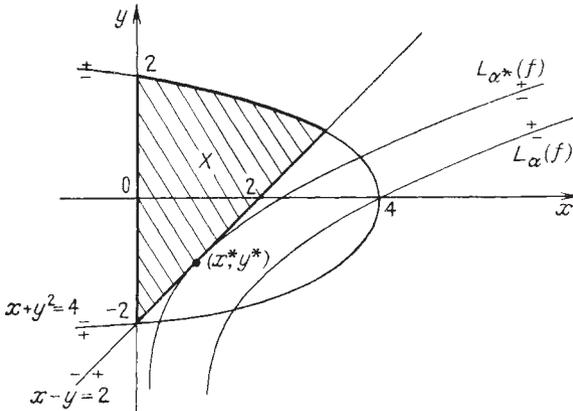


Рис. 61

Если  $a \geq 1$  (рис. 65), то решением  $(x^*, y^*)$  является проекция точки  $(1, 0)$  на прямую  $y = k_1x$ , т. е.

$$x^* = \frac{1}{1 + k_1^2}, \quad y^* = \frac{k_1}{1 + k_1^2}.$$

Если же  $a \leq -1$ , то решением является проекция точки  $(1, 0)$  на прямую  $y = k_2x$ .

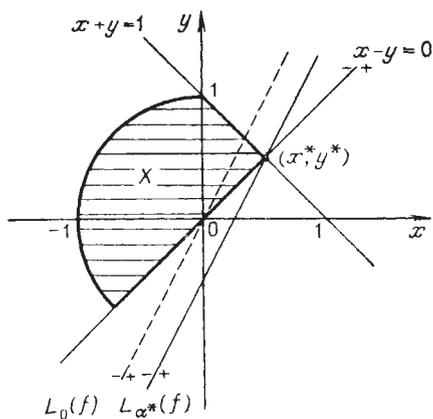


Рис. 62

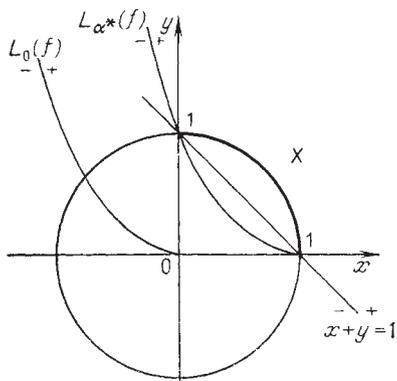


Рис. 63

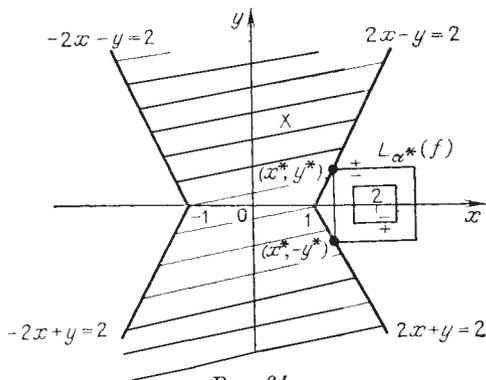


Рис. 64

1.42. Рассмотрим сначала задачу максимизации. Из геометрических соображений ясно, что ее глобальное решение находится среди точек  $(3, a + 1)$  и  $(4, a)$  (рис. 66). Неравенство  $f(3, a + 1) < f(4, a)$  равносильно неравенству  $a < 27/2$ . Следовательно, решением является: точка  $(4, a)$ , если  $0 \leq a < 27/2$ ; точка  $(3, a + 1)$ , если  $a > 27/2$ ; любая из этих точек, если  $a = 27/2$ .

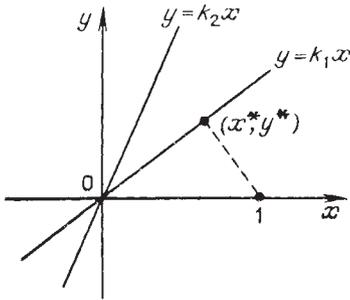


Рис. 65

Обратимся к задаче минимизации. Понятно, что ее глобальное решение находится на отрезке, соединяющем точки  $(2, a)$  и  $(3, a - 1)$  (рис. 66). Этот отрезок описывается условиями  $x + y = a + 2$ ,  $2 \leq x \leq 3$ . Выражая отсюда  $y$  и подставляя в формулу для  $f(x, y)$ , приходим к задаче минимизации функции  $\varphi(x) = 5x^2 - 2(a + 2)x$  на числовом отрезке  $[2, 3]$ . Отсюда несложно получаем, что решением исходной задачи минимизации служит: точка  $(2, a)$ , если  $0 \leq a \leq 8$ ;

точка  $(\frac{1}{5}(a + 2), \frac{4}{5}(a + 2))$ , если  $8 < a < 13$ ; точка  $(3, a - 1)$ , если  $a \geq 13$ .

1.43. Локальными решениями служат точки  $(2, 0)$  и  $(0, 1)$  (рис. 67).

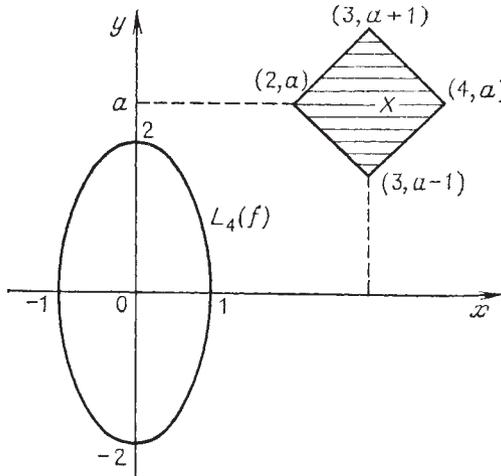


Рис. 66

1.44. Допустимое множество задачи представляет собой кривую, называемую *декартовым листом* (рис. 68). Очевидно, что лишь при  $a = 1$  глобальное решение существует и равно  $(3/2, 3/2)$ . При

всех остальных  $a$  имеется локальное решение, не являющееся глобальным.

1.45.  $-2 \leq a < 1$ .

1.46. а) Из аксиомы 1) имеем  $\Phi(\beta + \beta) = \Phi(\beta) + \beta$  и  $\Phi(2\beta) = 2\Phi(\beta)$ . Следовательно,  $\Phi(\beta) = \beta$ .

б) Использовать аксиому 2).

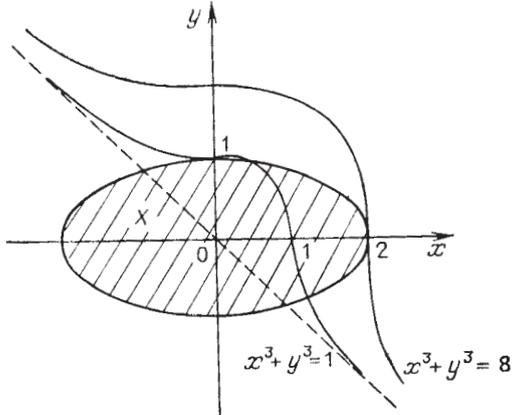


Рис. 67

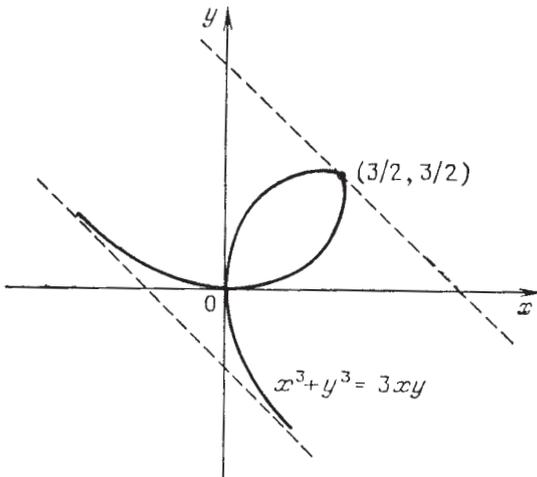


Рис. 68

в) Положим  $\beta_1 = \min_X f(x)$ ,  $\beta_2 = \max_X f(x)$ . Имеем  $\beta_1 \leq f(x) \leq \beta_2$  при всех  $x \in X$ . Нужные неравенства следуют теперь из а) и б).

1.47. а) Для любого  $x \in Y$  имеем  $x \notin E$  и, следовательно, существует такая функция  $f \in C(X)$ , что  $x \notin E_f$ , т. е.  $f(x) > \Phi(f)$ . Это означает, что открытые множества

$$U_f = \{x \in Y \mid f(x) > \Phi(f)\}, \quad f \in C(X),$$

образуют покрытие множества  $Y$ . Пользуясь компактностью  $Y$ , выделим из этого покрытия конечное подпокрытие  $U_{f_1}, \dots, U_{f_m}$ . Рассмотрим функцию

$$f(x) = \max \{f_1(x) - \Phi(f_1), \dots, f_m(x) - \Phi(f_m)\}, \quad x \in X.$$

Используя аксиомы 1) и 2) из 1.46, получаем, что  $\Phi(f) = 0$ . В то же время для любого  $x \in Y$  существует такой индекс  $i \in \{1, \dots, m\}$ , что  $x \in U_{f_i}$ , и, значит,

$$f(x) \geq f_i(x) - \Phi(f_i) > 0 = \Phi(f).$$

Таким образом,  $f$  — искомая функция.

б) Если предположить, что  $E = \emptyset$ , то в а) можно взять  $Y = X$ . Но это приводит к противоречию с первым неравенством из 1.46, в). Замкнутость  $E$  следует из непрерывности функций  $f$ .

в) Указанное неравенство равносильно определению  $E$ .

1.48. Докажем, что искомым является множество  $E$  из 1.47. Если  $E = X$ , то нужная формула есть следствие неравенств 1.46, в) и 1.47, в).

Пусть  $E \neq X$ . В силу 1.47, в) достаточно показать, что  $\max_E f(x) \geq \Phi(f)$  при всех  $f \in C(X)$ . Предположим, что это не так, т. е. существует функция  $g \in C(X)$ , для которой

$$\max_E g(x) < \Phi(g).$$

Тогда найдется множество  $U$ , открытое в  $X$  и такое, что

$$E \subset U, \quad \sup_U g(x) < \Phi(g). \quad (I)$$

Положим  $Y = X \setminus U$ . Из 1.47, а) следует, что существует функция  $f \in C(X)$ , для которой

$$\min_Y f(x) > \Phi(f). \quad (II)$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \max \{f(x) - \Phi(f), 0\}, \quad x \in X, \\ \bar{g}(x) &= g(x) - \sup_U g(x), \quad x \in X. \end{aligned}$$

Из (II) следует, что  $\bar{f}(x) > 0$  при всех  $x \in Y$ . Тогда, поскольку  $Y$  — компакт, а функции  $\bar{f}$  и  $\bar{g}$  непрерывны, найдется столь большое число  $\alpha > 0$ , что

$$\alpha \bar{f}(x) \geq \bar{g}(x) \quad \text{при всех } x \in Y. \quad (III)$$

Для любого  $x \in U$  по определению  $\bar{f}$  и  $\bar{g}$  имеем  $\bar{f}(x) \geq 0$ ,  $\bar{g}(x) \leq$

$\leq 0$ . Следовательно, неравенство из (III) справедливо при всех  $x \in Y \cup U = X$ . Тогда из 1.46, б) заключаем, что  $\Phi(\alpha\bar{f}) \geq \Phi(\bar{g})$ . Но, согласно аксиомам 1), 2) из 1.46 и формуле (1), должно выполняться обратное неравенство:

$$\Phi(\alpha\bar{f}) = \alpha\Phi(\bar{f}) = 0 < \Phi(\bar{g}).$$

## § 2

2.1. Пусть  $x^*$  — локальное решение задачи (2.1). Зафиксируем любой вектор  $h \in \mathbb{R}^n$ . Тогда если функция  $f$  дифференцируема в  $x^*$ , то

$$0 \leq f(x^* + \alpha h) - f(x^*) = \langle f'(x^*), \alpha h \rangle + o(\alpha)$$

при всех достаточно малых  $\alpha$ . Разделив обе части неравенства на  $\alpha > 0$  и перейдя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , получаем, что  $\langle f'(x^*), h \rangle \geq 0$ . Отсюда при  $h = -f'(x^*)$  следует (2.2).

Если же  $f$  дважды дифференцируема в  $x^*$ , то с учетом (2.2) имеем

$$0 \leq f(x^* + \alpha h) - f(x^*) = \frac{1}{2} \langle f''(x^*)(\alpha h), \alpha h \rangle + o(\alpha^2)$$

при всех достаточно малых  $\alpha$ . Разделив обе части неравенства на  $\alpha^2$  и перейдя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , получаем (2.3).

Пусть теперь выполнены условия (2.2), (2.4) и по-прежнему  $f$  дважды дифференцируема в  $x^*$ . Предположим, что  $x^*$  не является строгим локальным решением задачи (2.1), т. е. существует такая последовательность  $\{x^k\}$ , что

$$x^k \neq x^*, \quad x^k \rightarrow x^*, \quad f(x^k) \leq f(x^*).$$

Представим  $x^k$  в виде

$$x^k = x^* + \alpha_k h^k, \quad \text{где } \alpha_k = \|x^k - x^*\|, \quad h^k = \frac{1}{\alpha_k} (x^k - x^*).$$

Поскольку  $\|h^k\| = 1$ , то без ограничения общности можно считать, что  $h^k \rightarrow h \neq 0$ . Учитывая (2.2), имеем

$$0 \geq f(x^k) - f(x^*) = \frac{1}{2} \langle f''(x^*)(\alpha_k h^k), \alpha_k h^k \rangle + o(\alpha_k^2).$$

Разделив обе части неравенства на  $\alpha_k^2$  и перейдя к пределу, получаем противоречие с (2.4).

2.2. а) По теореме Лагранжа о конечных приращениях для любого  $x \in U$ ,  $x \neq x^*$ , найдется такое  $\alpha \in (0, 1)$ , что

$$f(x^*) - f(x) = f'(x + \alpha(x^* - x))(x^* - x) \leq 0 \quad (< 0).$$

б) Нет, не следует. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left( 2 + \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

2.3. При данном  $x \in U_\varepsilon(x^*)$ ,  $x \neq x^*$ , положим  $\varphi(\alpha) = f(x + \alpha(x^* - x))$ . По теореме Лагранжа найдется такое  $\alpha \in (0, 1)$ , что

$$\begin{aligned} f(x^*) - f(x) &= \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\alpha) = \langle f'(x + \alpha(x^* - x)), x^* - x \rangle = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \langle f'(x + \alpha(x^* - x)), x^* - (x + \alpha(x^* - x)) \rangle \leq 0 \quad (< 0) \end{aligned}$$

2.4. Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получаем при всех достаточно близких к нулю  $h$

$$\begin{aligned} f(x^* + h) - f(x^*) &= \frac{1}{k!} f^{(k)}(x^*) h^k + o(h^k) = \\ &= h^k \left( \frac{1}{k!} f^{(k)}(x^*) + \frac{o(h^k)}{h^k} \right) \end{aligned}$$

Отсюда легко выводятся требуемые утверждения.

2.5. Нет, не следует. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

2.7. Пусть  $e^i$  обозначает  $i$ -й единичный орт пространства  $\mathbf{R}^n$ . Тогда при  $h = e^i$  получаем  $0 = A[h] = a_{iii}$ . Возьмем  $h = e^i + e^j$ , где  $i \neq j$ . Тогда

$$0 = A[h] = a_{iii} + a_{jjj} + 3(a_{iij} + a_{jji}) = 3(a_{iij} + a_{jji}).$$

Если же  $h = 2e^i + e^j$ , где  $i \neq j$ , то

$$0 = A[h] = 8a_{iii} + a_{jjj} + 3(4a_{iij} + a_{jji}) = 3(4a_{iij} + a_{jji}).$$

Следовательно,  $a_{iij} = a_{jji} = 0$ . Пусть теперь  $h = e^i + e^j + e^k$ , где  $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ . Имеем

$$\begin{aligned} 0 = A[h] &= a_{iii} + a_{jjj} + a_{kkk} + 3(a_{iij} + a_{jji} + a_{jjk} + \\ &\quad + a_{hkh} + a_{khi} + a_{ikh}) + 6a_{ijk} = 6a_{ijk}. \end{aligned}$$

2.8. Рассмотрим при данном  $h \in \mathbf{R}^n$  функцию  $\varphi(\alpha) = f(x^* + \alpha h)$ . Выпишем для нее формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Пеано:

$$\varphi(\alpha) - \varphi(0) = \varphi'(0) \alpha + \frac{1}{2!} \varphi''(0) \alpha^2 + \frac{1}{3!} \varphi'''(0) \alpha^3 + o(\alpha^3).$$

При этом  $\varphi'(0) = \langle f'(x^*), h \rangle = 0$ ,  $\varphi''(0) = f''(x^*)[h]$ ,  $\varphi'''(0) = f'''(x^*)[h]$ . Следовательно, если  $f'''(x^*)[h] = 0$ , то при всех достаточно малых по модулю  $\alpha$  имеем

$$0 \leq f(x^* + \alpha h) - f(x^*) = \frac{1}{3!} f'''(x^*)[h] \alpha^3 + o(\alpha^3).$$

Если поделить это соотношение на  $\alpha^3 > 0$  ( $< 0$ ) и перейти к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , то получим, что  $f'''(x^*)[h] \geq 0$  ( $\leq 0$ ). Таким образом,  $f'''(x^*)[h] = 0$ . Частное утверждение следует из 2.7.

2.9. Согласно теореме 2.1, точки экстремума функции  $f$  обязаны удовлетворять системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y - 2x - 4z = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 10z - 4y - 2 = 0.\end{aligned}$$

Эта система имеет единственное решение  $x^* = 2$ ,  $y^* = 2$ ,  $z^* = 1$ . Заметим, что функция  $f$  является квадратичной. При этом

$$f'' = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Угловые миноры матрицы  $f''$  положительны:

$$2 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 4 > 0, \quad \det f'' = 8 > 0.$$

Тогда по критерию Сильвестра матрица  $f''$  положительно определена, и, значит, в силу теоремы 1.4 функция  $f$  имеет точку глобального минимума на  $\mathbf{R}^3$ . Согласно замечанию 2.3, таковой и является точка  $(2, 2, 1)$ .

2.10. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -ae^{-x} + \frac{e^x}{e^x + e^y} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -be^{-y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = 0.\end{aligned}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$x^* = \ln(a + \sqrt{ab}), \quad y^* = \ln(b + \sqrt{ab}).$$

Заметим, что функция  $f$  является бесконечно растущей на  $\mathbf{R}^2$ . Тогда по теореме 1.2 она имеет точку глобального минимума. Таковой, следовательно, и служит точка  $(x^*, y^*)$ .

2.11. Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0.$$

Эта система имеет три решения:  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ . Вычислим гесспан функции  $f$ :

$$f'' = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$f''(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(1, 1) = f''(-1, -1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $f''(0, 0)$  закононеопределена. Тогда по теореме 2.2 точка  $(0, 0)$  не является экстремальной. Матрица  $f''(1, 1)$  положительно определена. Тогда из теоремы 2.3 следует, что  $(1, 1)$  и  $(-1, -1)$  суть точки (строгого) локального минимума. Заметим далее, что функция  $f$  является бесконечно растущей на  $\mathbf{R}^2$ . Поэтому  $f$  достигает глобального минимума. Значения  $f$  в точках  $(1, 1)$  и  $(-1, -1)$  совпадают. Следовательно, каждая из них является точкой не только локального, но и глобального минимума. (После этого ясно, что исследование матриц  $f''(\pm 1, \pm 1)$  было фактически лишним.)

2.12. Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x + y - a)(y - b) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y + x - b)(x - a) = 0.$$

Эта система имеет четыре решения:  $(a, -a)$ ,  $(b, -b)$ ,  $(a, b)$  и  $(x^*, y^*)$ , где  $x^* = (2a - b)/3$ ,  $y^* = (2b - a)/3$ . Вычислим гессиан  $f$ :

$$f'' = \begin{bmatrix} 2(y - b) & 2(x + y) - a - b \\ 2(x + y) - a - b & 2(x - a) \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$f''(a, -a) = \begin{bmatrix} -2(a + b) & -a - b \\ -a - b & 0 \end{bmatrix},$$

$$f''(b, -b) = \begin{bmatrix} 0 & -a - b \\ -a - b & -2(a + b) \end{bmatrix},$$

$$f''(a, b) = \begin{bmatrix} 0 & a + b \\ a + b & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(x^*, y^*) = -\frac{1}{3}(a + b) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что  $a + b \neq 0$ . Тогда, используя теоремы 2.2 и 2.3, получаем, что первые три точки не являются экстремальными; в точке  $(x^*, y^*)$  достигается локальный минимум, если  $a + b < 0$ , и локальный максимум, если  $a + b > 0$ . Ясно, что глобальным этот экстремум не является. Пусть теперь  $a + b = 0$ . Тогда все четыре точки «сливаются» в одну точку  $(a, -a)$ . При этом  $f''(a, -a) = 0$ , и, значит, теоремы 2.2, 2.3 неприменимы. Заметим, однако, что  $f(a + \varepsilon, -a + \varepsilon) = 2\varepsilon^3$ . Отсюда следует, что точка  $(a, -a)$  не является экстремальной при  $a + b = 0$ . Тот же вывод получим, исходя из 2.8, поскольку, например,  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} = 2$ , и, значит,  $f''' \neq 0$ .

2.13. Функция  $f$  имеет единственную стационарную точку  $(0, 0)$ . Теоремы 2.2, 2.3 здесь «не работают». Поэтому требуется специальное исследование поведения  $f$  в  $(0, 0)$ . Положим  $x = \varepsilon^2$ ,  $y = \varepsilon$ . Тогда  $f(x, y) = -\varepsilon^5$ . Отсюда следует, что точка  $(0, 0)$  не является экстремальной.

2.14. Функция  $f$  имеет бесконечное число стационарных точек вида

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + (k + m) \frac{\pi}{2}, \quad y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + (k - m) \frac{\pi}{2},$$

где  $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . С помощью теорем 2.2, 2.3 получаем, что в  $(x, y)$  достигается локальный минимум, если  $k$  четно,  $m$  нечетно, и локальный максимум, если  $k$  нечетно,  $m$  четно; если же  $k + m$  четно, то точка  $(x, y)$  не является экстремальной.

2.15. Стационарными точками функции  $f$  являются точки вида  $(0, 2k\pi)$  и  $(-2, (2k + 1)\pi)$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Из теорем 2.2, 2.3 следует, что в точках  $(0, 2k\pi)$  достигается локальный минимум, а точки  $(-2, (2k + 1)\pi)$  не являются экстремальными.

2.16. Функция  $f$  имеет две стационарные точки:  $(0, 0, -1)$  и  $(24, -144, -1)$ . При этом  $f(\varepsilon, 0, -1) - f(0, 0, -1) = \varepsilon^3$ . Отсюда ясно, что первая точка не является экстремальной. Применяя теорему 2.3, убеждаемся, что во второй точке достигается локальный (но не глобальный) минимум.

2.17. Функция  $f$  имеет следующие стационарные точки:

- 1)  $x = y = z = 1/7$ ;
- 2)  $x = 0, y = \frac{1 - 3z}{2}, z$  любое;
- 3)  $y = 0, x$  и  $z$  любые;
- 4)  $z = 0, x$  и  $y$  любые.

С помощью теоремы 2.3 получаем, что в точке из 1) достигается строгий локальный максимум. Глобальным этот максимум не является, поскольку  $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(1, y, 1) = \infty$ . Путем непосредственного анализа локального поведения функции  $f$  выводим, что в

точке  $(x, 0, z)$  из 3) достигается нестрогий локальный минимум, если  $xz(1 - x - 3z) > 0$ , и нестрогий локальный максимум, если  $xz(1 - x - 3z) < 0$ . Все остальные стационарные точки из 2)–4) не являются экстремальными.

2.18. Функция  $f$  является бесконечно растущей в области  $x > 0, y > 0, z > 0$  и, следовательно, имеет там точку глобального минимума. Единственной стационарной точкой функции в указанной области служит  $(1/2, 1, 1)$ . Значит, эта точка и является глобальным решением задачи (см. замечания 2.2 и 2.3).

2.19. Функция  $f$  является бесконечно растущей в области  $x + y > 0$ . В самом деле, если  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$  или  $x + y \rightarrow 0$  при условии  $x + y > 0$ , то  $f \rightarrow \infty$ . Пусть  $y \rightarrow -\infty$  и  $x + y > 0$ . Тогда  $x \rightarrow \infty$  и  $f(x, y) \geq x^2 - x$ , т. е.  $f \rightarrow \infty$ . Единственной стационарной точкой функции  $f$  в области  $x + y > 0$  и, следовательно, глобальным решением задачи служит точка  $(1/2, 1/2)$ .

2.20. а) Допустим, что  $C^{-1}$  не существует. Тогда система  $Cx = 0$  имеет решение  $x \neq 0$ . При этом  $\langle Cx, x \rangle = 0$ , что противоречит положительной определенности  $C$ .

б) Для любого  $y \in \mathbb{R}^m$  положим  $x = yA = A^T y$ . Тогда с учетом неотрицательной определенности  $C$  имеем

$$\langle y, ACA^T y \rangle = \langle x, Cx \rangle \geq 0.$$

в) Пусть  $y \neq 0$ . Тогда  $x = yA$  — ненулевой вектор, так как обратное означало бы, что строки матрицы  $A$  линейно зависимы, т. е.  $\text{rang } A < m$ . Следовательно,  $\langle x, Cx \rangle > 0$  в силу положительной определенности  $C$ .

2.21. Используя теорему 1.4, формулу  $f'(x) = Ax + b$  и 2.20, получаем, что единственной стационарной точкой и, следовательно, глобальным решением задачи является  $x^* = -A^{-1}b$ .

(Отметим, что этот результат отнюдь не решает проблему численного отыскания минимума указанной квадратичной функ-

ции, поскольку обращение матрицы является довольно трудоемкой вычислительной процедурой. По этой причине разработаны более экономные численные методы минимизации квадратичных функций, позволяющие избегать явного вычисления обратной матрицы, например метод сопряженных градиентов [39, с. 201]. Аналогичное замечание можно сделать в отношении задач 2.22, 3.25, 3.26.)

2.22. Функция  $f$  является квадратичной:

$$f(x) = \langle Ax - b, Ax - b \rangle = \langle A^T Ax, x \rangle - 2\langle A^T b, x \rangle + \langle b, b \rangle.$$

При этом матрица  $A^T A$  положительно определена (см. 2.20). Тогда из 2.21 следует, что глобальным решением служит точка  $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$ .

2.23. Матрица входных данных и вектор выходных данных имеют здесь вид

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0,5 & 2 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} -4,5 \\ 1,5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

В соответствии со сказанным перед формулировкой этой задачи и ответом к задаче 2.22 наилучшая зависимость получается при

$$(a_1, a_2) = (C^T C)^{-1} C^T d.$$

Последовательно проводя вычисления, имеем

$$C^T C = \begin{bmatrix} 5/2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad (C^T C)^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & -1/14 \\ -1/14 & 5/28 \end{bmatrix}.$$

$$C^T d = (7, -7), \quad (a_1, a_2) = (7/2, -7/4).$$

2.24. Пусть  $f'(x^*) = Ax^* + b = 0$ . Для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  в силу неотрицательной определенности  $A$  имеем

$$\langle A(x - x^*), x - x^* \rangle \geq 0.$$

Последовательно преобразуя это неравенство с учетом того, что  $Ax^* = -b$ , получаем

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle - 2\langle Ax^*, x \rangle + \langle Ax^*, x^* \rangle &\geq 0, \\ \langle Ax, x \rangle + 2\langle b, x \rangle &\geq -\langle Ax^*, x^* \rangle = \langle Ax^*, x^* \rangle + 2\langle b, x^* \rangle, \\ f(x) &\geq f(x^*). \end{aligned}$$

Следовательно,  $x^*$  — точка глобального минимума  $f$  на  $\mathbb{R}^n$ .

2.25. Выищем, учитывая теоремы 2.1, 2.2, критерий Сильвестра, а также 2.24, необходимые и достаточные условия глобального минимума в точке  $(1, -4)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -4) = 2a - 4b + 6 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, -4) = b - 8 + c = 0,$$

$$4a \geq b^2.$$

Отсюда получаем искомые  $a$ ,  $b$  и  $c$ :

$$a = 13 - 2c, \quad b = 8 - c, \quad 2 \leq c \leq 6.$$

2.26. Выпишем необходимые условия экстремума в точке  $(0, 1)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = (4x + a^3 e^x + by) \Big|_{(0, 1)} = a^3 + b = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = (bx + b^3 y + a) \Big|_{(0, 1)} = b^3 + a = 0.$$

Этим условиям удовлетворяют три пары параметров:  $a = b = 0$ ;  $a = 1, b = -1$ ;  $a = -1, b = 1$ . Ясно, что при  $a = b = 0$  в точке  $(0, 1)$  достигается нестрогий глобальный минимум. Далее вычислим гессиан  $f$  в точке  $(0, 1)$ :

$$f''(0, 1) = \begin{bmatrix} 4 + a^3 & b \\ b & b^3 \end{bmatrix},$$

Если  $a = 1, b = -1$ , то эта матрица знаконеопределена, и, значит, по теореме 2.2 точка  $(0, 1)$  не является экстремальной. Если  $a = -1, b = 1$ , то  $f''(0, 1)$  положительно определена и, следовательно, по теореме 2.3 в точке  $(0, 1)$  достигается строгий локальный минимум. Этот минимум глобальным не является, поскольку  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0) = -\infty$ .

2.27. Примером служит функция  $f$  из 2.13.

2.29. Примером служит функция  $f$  из 2.15.

2.30. По определению обратного отображения имеем  $F^{-1}(F(x)) = x$ . Применяя цепное правило (2.5), получаем

$$(F^{-1})'(y)F'(x) = E, \quad y = F(x),$$

где  $E$  — единичная матрица.

2.31. а) Имеем  $\varphi'(x^*) = f'(y^*)F'(x^*)$ , где матрица  $F'(x^*)$  невырождена (см. 2.30). Поэтому условия  $\varphi'(x^*) = 0$  и  $f'(y^*) = 0$  эквивалентны.

б) Пусть  $y^*$  — точка локального минимума  $f$ , а  $x^*$  не является точкой локального минимума  $\varphi$ . Тогда найдется такая последовательность  $\{x^k\} \subset X$ , что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$  и

$$\varphi(x^k) = f(F(x^k)) < \varphi(x^*) = f(F(x^*)).$$

Положим  $y^k = F(x^k)$ . Имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = y^* = F(x^*)$  и  $f(y^k) < f(y^*)$ . Но это противоречит тому, что  $y^*$  — точка минимума  $f$ . Обратное утверждение доказывается аналогично. Доказательство для точек глобального минимума еще проще.

в) Непосредственные вычисления матрицы  $\varphi''(x^*)$  с учетом равенства  $f'(y^*) = 0$  приводят к формуле

$$\varphi''(x^*) = [F'(x^*)]^T f''(y^*) F'(x^*).$$

Нужное утверждение следует теперь из 2.20, 2.30.

2.33. Рассмотрим функцию  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ . Она имеет две стационарные точки:  $(1, 1)$  и  $(0, 0)$ , причем в  $(1, 1)$  достигается

ется локальный, но не глобальный минимум. Введем множество  $Y = \{(x, y) | y > 0\}$ , содержащее  $(1, 1)$  и не содержащее  $(0, 0)$ , и диффеоморфизм  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow Y$  вида  $F(x, y) = (x, e^y)$ . Построим функцию

$$\varphi(x, y) = f(F(x, y)) = x^3 + e^{3y} - 3xe^y.$$

Из 2.31 следует, что  $(1, 0) = F^{-1}(1, 1)$  — ее единственная стационарная точка, в которой достигается локальный, но не глобальный минимум. Впрочем, в этом нетрудно убедиться и непосредственно.

Другим примером, получаемым из несколько иных соображений, служит функция

$$\varphi(x, y) = (3x^2 - 2x^3) e^y + \int_0^y \frac{te^t}{1+t^2} dt.$$

**2.34.** Рассмотрим числовой многочлен

$$\psi(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-(2m-1))$$

и функцию

$$f(x, y) = \int_0^x \psi(t) dt + y^2$$

на  $\mathbf{R}^2$ . Ясно, что у  $f$  имеется  $2m-1$  стационарных точек вида  $(k, 0)$ , где  $k = 1, \dots, 2m-1$ . При этом  $\psi'(k) > 0$ , если  $k$  нечетно, и  $\psi'(k) < 0$ , если  $k$  четно. Следовательно, матрица

$$f''(k, 0) = \begin{bmatrix} \psi'(k) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

является положительно определенной при нечетных  $k$  и знаконеопределенной при четных  $k$ . Итак,  $f$  имеет ровно  $m$  точек ло-

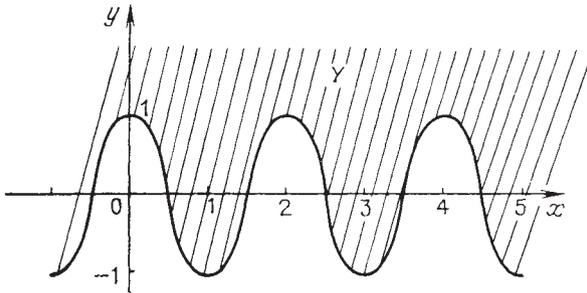


Рис. 69

кального минимума вида  $(k, 0)$ , где  $k = 1, 3, \dots, 2m-1$ . Рассмотрим теперь множество

$$Y = \{(x, y) | \cos \pi x < y\}$$

(рис. 69). Оно содержит все точки минимума  $f$  и не содержит ос-

тальных стационарных точек. Введем диффеоморфизм  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  вида  $F(x, y) = (x, \cos \pi x + e^y)$ . Тогда, согласно 2.31, функция

$$\varphi(x, y) = f(F(x, y)) = \int_0^x \psi(t) dt + (\cos \pi x + e^y)^2$$

имеет ровно  $m$  стационарных точек на  $\mathbf{R}^2$ , и все они являются точками локального минимума. Таковыми служат все те же точки  $(k, 0)$ , где  $k = 1, 3, \dots, 2m - 1$ , поскольку при диффеоморфизме  $F$  они остаются «на месте».

2.35. Если в предыдущей схеме рассуждений взять функцию

$$f(x, y) = \cos \pi x + y^2,$$

то получим функцию  $\varphi(x, y) = \cos \pi x + (\cos \pi x + e^y)^2$ , удовлетворяющую нужному требованию.

(Отметим, что функция из 2.15, являющаяся ответом к 2.29, здесь не подходит, так как наряду с бесконечным числом точек минимума она имеет бесконечное число других стационарных точек.)

2.36. Рассмотрим в окрестности точки  $(x^*, 0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$  непрерывно дифференцируемое отображение  $F$  вида

$$F(x, \varepsilon) = \psi'(x, \varepsilon) = f'(x) + \varepsilon \varphi'(x).$$

Имеем  $F(x^*, 0) = f'(x^*) = 0$ , причем матрица  $F'_x(x^*, 0) = f''(x^*)$ , будучи положительно определенной, невырождена (см. 2.20). Тогда по теореме 2.4 о неявной функции существует единственная вектор-функция  $x(\varepsilon)$ , переводящая некоторую окрестность  $V$  точки  $0 \in \mathbf{R}$  в окрестность  $U$  точки  $x^*$  и такая, что  $F(x(\varepsilon), \varepsilon) = \psi'(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0$  для всех  $\varepsilon \in V$ ; при этом  $x(0) = x^*$ , функция  $x(\varepsilon)$  непрерывно дифференцируема на  $V$  и

$$x'(0) = -[F'_x(x^*, 0)]^{-1} F'_\varepsilon(x^*, 0) = -[f''(x^*)]^{-1} \varphi'(x^*).$$

Таким образом, имеют место свойства а) и в). Кроме того, из положительной определенности матрицы  $f''(x^*)$  и непрерывности  $x(\varepsilon)$ ,  $f''(x)$ ,  $\varphi''(x)$  легко следует, что при достаточно малых по модулю  $\varepsilon$  матрица  $\psi''_x(x(\varepsilon), \varepsilon) = f''(x(\varepsilon)) + \varepsilon \varphi''(x(\varepsilon))$  также положительно определена, т. е. справедливо б).

2.37. Функция  $f(x) = x^4$  имеет точку строгого минимума  $x^* = 0$ , по  $f''(0) = 0$ . Функция  $\psi(x, \varepsilon) = x^4 - \varepsilon x^2$  при  $\varepsilon > 0$  имеет три стационарные точки:  $x_1(\varepsilon) = 0$ ,  $x_2(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon/2}$ ,  $x_3(\varepsilon) = -\sqrt{\varepsilon/2}$ . В первой достигается строгий локальный максимум, в двух остальных — строгий локальный минимум. При этом  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_i(\varepsilon) = 0$  для любого  $i = 1, 2, 3$ , и функции  $x_2(\varepsilon)$ ,  $x_3(\varepsilon)$  в нуле недифференцируемы.

2.38. Нет, не верно. Рассмотреть функцию  $\psi(x, \varepsilon) = x^2 + \varepsilon x^3$ .

2.39.  $x(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon)$ . Использовать 2.36.

2.40.  $x(\varepsilon) = 1 + \frac{4}{9} \varepsilon \pi + o(\varepsilon)$ ;  $y(\varepsilon) = 1 + \frac{5}{9} \varepsilon \pi + o(\varepsilon)$ .

2.41. Рассмотрим отображение  $F(r, \alpha)$  ( $r \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) со следующими координатами:

$$F_i(r, \alpha) = \begin{cases} g_i(x^* + \alpha h + r), & i = 1, \dots, m, \\ \langle a_i, r \rangle, & i = m + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Из условий теоремы следует, что  $F$  непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки  $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , причем  $F(0, 0) = 0$ , а матрица  $F'_r(0, 0)$ , строками которой служат векторы  $g'_1(x^*), \dots, g'_m(x^*), a_{m+1}, \dots, a_n$ , невырождена. Таким образом,  $F$  удовлетворяет всем условиям теоремы 2.4 о неявной функции. Поэтому существует такая  $n$ -мерная вектор-функция  $r(\alpha)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), что для всех достаточно малых по модулю  $\alpha$  выполнено равенство  $F(r(\alpha), \alpha) = 0$ , т. е.

$$\begin{aligned} g_i(x^* + \alpha h + r(\alpha)) &= 0, & i = 1, \dots, m, \\ \langle a_i, r(\alpha) \rangle &= 0, & i = m + 1, \dots, n, \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$r(0) = 0, \quad r'(0) = -[F'_r(0, 0)]^{-1} F'_\alpha(0, 0).$$

Заметим, что

$$F'_\alpha(0, 0) = (\langle g'_1(x^*), h \rangle, \dots, \langle g'_m(x^*), h \rangle, 0, \dots, 0) = 0.$$

Следовательно,

$$0 = r'(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(\alpha) - r(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(\alpha)}{\alpha}.$$

### § 3

#### 3.1. Составим функцию Лагранжа

$$L = \lambda_0 y + \lambda(x^3 + y^3 - 3xy).$$

Выпишем в соответствии с принципом Лагранжа необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3\lambda(x^2 - y) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda_0 + 3\lambda(y^2 - x) = 0,$$

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0, \quad (\lambda_0, \lambda) \neq 0.$$

Ясно, что здесь  $\lambda \neq 0$ . Поэтому можно считать, что  $\lambda = -1$ . В таком случае выписанная система имеет два решения:

$$1) \quad x = \sqrt[3]{2}, \quad y = \sqrt[3]{4}, \quad \lambda_0 = 3(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) > 0;$$

$$2) \quad x = y = 0, \quad \lambda_0 = 0.$$

Вычислим гессиан функции  $L$  по  $x, y$ :

$$L'' = \begin{bmatrix} 6\lambda x & -3\lambda \\ -3\lambda & 6\lambda y \end{bmatrix}.$$

При значениях из 1) (и  $\lambda = -1$ ) эта матрица отрицательно определена. Тогда из теоремы 3.3 следует, что  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$  — точка локального (но не глобального) максимума. При значениях из 2) матрица  $L''$  является знаконеопределенной. Однако здесь нельзя воспользоваться теоремой 3.2, так как градиент функции  $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  в точке  $(0, 0)$  обращается в нуль (см. 3.11). Чтобы исследовать характер этой стационарной точки, положим  $x = ky$ . Тогда условие  $g(x, y) = 0$  равносильно тому, что

$$x = \frac{3k^2}{k^3 + 1}, \quad y = \frac{3k}{k^3 + 1}.$$

Отсюда с учетом вида функции  $f$  ясно, что точка  $(0, 0)$  не является экстремальной.

3.2. Учитывая, что ограничение линейно, можно рассмотреть функцию Лагранжа вида:

$$L = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} y^3 + \lambda(1 - ax - by).$$

Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = x^2 - \lambda a = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = y^2 - \lambda b = 0, \quad ax + by = 1.$$

Без труда проверяется, что в случае  $a \neq b$  эта система имеет два решения:

$$x_1 = a^{1/2}(a^{3/2} + b^{3/2})^{-1}, \quad y_1 = b^{1/2}(a^{3/2} + b^{3/2})^{-1}, \quad \lambda_1 = (a^{3/2} + b^{3/2})^{-2};$$

$$x_2 = a^{1/2}(a^{3/2} - b^{3/2})^{-1}, \quad y_2 = b^{1/2}(b^{3/2} - a^{3/2})^{-1}, \quad \lambda_2 = (a^{3/2} - b^{3/2})^{-2}.$$

Если же  $a = b$ , то решением служит только  $(x_1, y_1, \lambda_1)$ . Выпишем гессиан функции  $L$  по  $x, y$  и условию ортогональности (3.6):

$$L'' = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}, \quad ah_1 + bh_2 = 0.$$

При данном условии имеем

$$\langle L''h, h \rangle = 2xh_1^2 + 2yh_2^2 = \frac{2h_1^2}{b}(bx + ay).$$

Величина  $bx + ay$  положительна в точке  $(x_1, y_1)$  и отрицательна в точке  $(x_2, y_2)$ . Тогда из теоремы 3.3 следует, что  $(x_1, y_1)$  — точка строгого локального минимума, а  $(x_2, y_2)$  (при  $a \neq b$ ) — точка строгого локального максимума. Если  $a = b$ , то в точке  $(x_1, y_1)$  достигается глобальный минимум. Если же  $a \neq b$ , то ни одна из двух указанных точек не доставляет глобального экстремума.

3.3. Ясно, что можно рассматривать регулярную функцию Лагранжа:

$$L = \frac{1}{3} x^3 + y + \frac{\lambda}{2} (x^2 + y^2 - a).$$

Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = x^2 + \lambda x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = a. \quad (I)$$

Если  $x = 0$ , то  $y = \pm\sqrt{a}$ ,  $\lambda = -1/y$ . Если же  $x \neq 0$ , то  $x = -\lambda$ ,  $y = -\lambda^{-1}$  и  $\lambda^2 + \lambda^{-2} = a$ . При  $a < 2$  это уравнение корней не имеет. Если  $a \geq 2$ , то корнями служат  $\lambda = \pm b$ ,  $\lambda = \pm b^{-1}$ , где  $b = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 - 4})/2}$ . Таким образом, если  $0 < a < 2$ , то система (1) имеет два решения:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = \sqrt{a}, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{a}};$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = -\sqrt{a}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Если  $a \geq 2$ , то к ним добавляются еще четыре:

$$x_3 = -b, \quad y_3 = -b^{-1}, \quad \lambda_3 = b;$$

$$x_4 = b, \quad y_4 = b^{-1}, \quad \lambda_4 = -b;$$

$$x_5 = -b^{-1}, \quad y_5 = -b, \quad \lambda_5 = b^{-1};$$

$$x_6 = b^{-1}, \quad y_6 = b, \quad \lambda_6 = -b^{-1}.$$

Вычислим гессиан функции  $L$  по  $x$ ,  $y$ :

$$L'' = \begin{bmatrix} 2x + \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Эта матрица отрицательно определена при  $(x_1, y_1, \lambda_1)$  и положительно определена при  $(x_2, y_2, \lambda_2)$ . Следовательно,  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  — точки локального максимума и минимума соответственно. Для анализа остальных стационарных точек выпишем условие ортогональности:

$$2xh_1 + 2yh_2 = 0.$$

При данной условии и условиях  $x = -\lambda$ ,  $y = -\lambda^{-1}$  имеем

$$\langle L''h, h \rangle = (2x + \lambda)h_1^2 + \lambda h_2^2 = \lambda(\lambda^4 - 1)h_1^2.$$

Положим  $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda^4 - 1)$ . Пусть  $a > 2$  и, значит,  $b > 1$ . Тогда  $\varphi(\lambda_3) > 0$ ,  $\varphi(\lambda_4) < 0$ ,  $\varphi(\lambda_5) < 0$ ,  $\varphi(\lambda_6) > 0$ . Отсюда в силу теоремы 3.3 заключаем, что  $(x_3, y_3)$  и  $(x_6, y_6)$  — точки локального минимума, а  $(x_4, y_4)$  и  $(x_5, y_5)$  — точки локального максимума.

Пусть теперь  $a = 2$  и, значит,  $b = 1$ . Тогда указанные четыре решения «сливаются» в два:

$$x_3 = y_3 = -1, \quad \lambda_3 = 1; \quad x_4 = y_4 = 1, \quad \lambda_4 = -1.$$

При этом  $\varphi(\lambda_3) = \varphi(\lambda_4) = 0$  и, значит, теоремы 3.2, 3.3 неприменимы. Для дальнейшего анализа данных стационарных точек перейдем к полярным координатам:

$$x = \sqrt{2} \cos \psi, \quad y = \sqrt{2} \sin \psi,$$

$$F(\psi) = f(x, y) = \sqrt{2} \left( \frac{2}{3} \cos^3 \psi + \sin \psi \right).$$

Точке  $(-1, -1)$  соответствует угол  $\psi = 5\pi/4$ , точке  $(1, 1)$  — угол  $\psi = \pi/4$ . Непосредственные вычисления показывают, что при этих

$\psi$  выполнено  $F'(\psi) = F''(\psi) = 0$ , но  $F'''(\psi) \neq 0$ . Тогда в силу 2.4 указанные  $\psi$  не могут быть точками локального экстремума функции  $F(\psi)$  на  $[0, 2\pi]$ . Но это означает, что  $(-1, -1)$  и  $(1, 1)$  не являются точками локального экстремума функции  $f(x, y)$  при условии  $x^2 + y^2 = 2$ .

Обратимся теперь к вопросу о глобальных экстремумах (которые существуют по теореме Вейерштрасса). Если  $a \leq 2$ , то, как показано,  $(x_1, y_1)$  — единственная точка локального, а значит, и глобального максимума. Пусть  $a > 2$ . Вычислим значения  $f$  в точках локальных максимумов:

$$f(x_1, y_1) = \sqrt{a}, \quad f(x_4, y_4) = \frac{1}{3} b^3 + \frac{1}{b}, \quad f(x_5, y_5) < 0.$$

Отсюда следует, что максимальным значением  $f$  является

$$f^* = \max \left\{ \sqrt{a}, \frac{1}{3} b^3 + \frac{1}{b} \right\}.$$

Оно достигается при  $(x_1, y_1)$ , если  $\sqrt{a} > \frac{1}{3} b^3 + \frac{1}{b}$ , и при  $(x_4, y_4)$  в противном случае. Отметим, что оба этих случая возможны. Например, если взять  $a$  близким к 2, то точкой глобального максимума окажется  $(x_1, y_1)$ ; если же  $a$  достаточно велико, то ею будет  $(x_4, y_4)$ . Рассуждения для глобальных минимумов аналогичны.

3.4. Без труда проверяется, что градиент функции  $g(x, y) = 3x^2 - 4 \cos y - 1$  не может обращаться в нуль для точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих условию  $g(x, y) = 0$ . Поэтому можно сразу рассматривать регулярную функцию Лагранжа:

$$L = x \sin y + \lambda(3x^2 - 4 \cos y - 1).$$

Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \sin y + 6\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x \cos y + 4\lambda \sin y = 0,$$

$$3x^2 - 4 \cos y - 1 = 0.$$

Отсюда находим, что  $x^2 = 1$ ,  $\cos y = 1/2$ . Следовательно, имеются четыре группы стационарных точек:

- 1)  $x = 1, \quad y = \pi/3 + 2k\pi;$
- 2)  $x = -1, \quad y = \pi/3 + 2k\pi;$
- 3)  $x = 1, \quad y = -\pi/3 + 2k\pi;$
- 4)  $x = -1, \quad y = -\pi/3 + 2k\pi,$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Заметим, что функция  $f$  имеет точки глобального максимума и минимума на множестве  $g(x, y) = 0$  (поскольку это множество ограничено при дополнительном условии  $0 \leq y \leq 2\pi$ , не влияющем на значения  $f$  и  $g$ ). Но  $f = 1/\sqrt{3}/2$  в любой точке из 1), 4) и  $f = -1/\sqrt{3}/2$  в любой точке из 2), 3). Следовательно, 1), 4) суть точки глобального максимума, а 2), 3) — глобального минимума.

3.5. Градиенты функций из ограничений задачи равны  $(2x, 2y, 2z)$  и  $(1, 1, 1)$ . Эти векторы линейно зависимы лишь в случае  $x = y = z$ . Но точки вида  $(x, x, x)$  не лежат в допустимом множестве. Следовательно, можно рассматривать регулярную

функцию Лагранжа:

$$L = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z - 1).$$

Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz + 2\lambda x + \mu = 0, \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = xz + 2\lambda y + \mu = 0, \quad (\text{II})$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = xy + 2\lambda z + \mu = 0, \quad (\text{III})$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (\text{IV})$$

$$x + y + z = 1. \quad (\text{V})$$

Из (I)–(III) имеем

$$(x - y)(2\lambda - z) = 0, \quad (y - z)(2\lambda - x) = 0, \quad (z - x)(2\lambda - y) = 0.$$

Как отмечено выше, случай  $x = y = z$  здесь невозможен. Поэтому случай  $x \neq y$ ,  $y \neq z$ ,  $z \neq x$  также недопустим. Таким образом, могут представиться лишь следующие три случая:  $x = y \neq z$ ,  $y = z \neq x$ ,  $z = x \neq y$ . Пусть  $x = y \neq z$ . Тогда  $x = y = 2\lambda$  и, значит,  $z = 1 - 4\lambda$  в силу (V). Теперь из (IV) следует, что  $8\lambda^2 + (1 - 4\lambda)^2 = 1$ . Отсюда  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1/3$ . В результате находим две стационарные точки:

$$x_1 = y_1 = 0, \quad z_1 = 1; \quad x_2 = y_2 = 2/3, \quad z_2 = -1/3.$$

Рассматривая остальные два случая, находим еще четыре стационарные точки:

$$x_3 = 1, \quad y_3 = z_3 = 0; \quad x_4 = -1/3, \quad y_4 = z_4 = 2/3; \\ x_5 = z_5 = 0, \quad y_5 = 1; \quad x_6 = z_6 = 2/3, \quad y_6 = -1/3.$$

При этом

$$f(x_i, y_i, z_i) = \begin{cases} 0, & i = 1, 3, 5, \\ -4/27, & i = 2, 4, 6. \end{cases}$$

Поскольку глобальные экстремумы существуют, то  $(x_i, y_i, z_i)$  при  $i = 1, 3, 5$  ( $i = 2, 4, 6$ ) — точки глобального максимума (минимума).

3.6. Составим регулярную функцию Лагранжа:

$$L = f(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x(a^2 - 2a(ax^2 + by^2 + cz^2) + \lambda) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y(b^2 - 2b(ax^2 + by^2 + cz^2) + \lambda) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z(c^2 - 2c(ax^2 + by^2 + cz^2) + \lambda) = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Укажем находимые отсюда стационарные точки и значения в них функции  $f$ :

- 1)  $x = y = 0, z = \pm 1, f = 0;$
- 2)  $x = z = 0, y = \pm 1, f = 0;$
- 3)  $x = \pm 1, y = z = 0, f = 0;$
- 4)  $x = 0, y = z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, f = \frac{1}{4}(b - c)^2;$
- 5)  $x = z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = 0, f = \frac{1}{4}(a - c)^2;$
- 6)  $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, z = 0, f = \frac{1}{4}(a - b)^2.$

Отметим, что точки глобального экстремума существуют. Сопоставляя приведенные значения функции  $f$ , приходим к выводу, что в точках из 1)–3) достигается глобальный минимум, в точках из 5) — глобальный максимум. Остается проанализировать точки из 4) и 6). Возьмем, например, точку  $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ . Ей соответствует  $\lambda = bc$ . Вычислим при данных значениях гессиан функции  $L$  по  $x, y, z$ :

$$L'' = 2 \cdot \begin{bmatrix} (a-b)(a-c) & 0 & 0 \\ 0 & -2b^2 & -2bc \\ 0 & -2bc & -2c^2 \end{bmatrix}.$$

Условие ортогональности приводит здесь к соотношению  $h_2 + h_3 = 0$ . С учетом этой связи имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle L''h, h \rangle &= (a-b)(a-c)h_1^2 - 2b^2h_2^2 - 2c^2h_3^2 - 4bch_2h_3 = \\ &= (a-b)(a-c)h_1^2 - 2(b-c)^2h_2^2, \end{aligned}$$

где, заметим,  $(a-b)(a-c) > 0$ . Следовательно, форма  $\langle L''h, h \rangle$  может принимать разные знаки. Тогда по теореме 3.2 точка  $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  не является экстремальной. Аналогично показывается, что не являются экстремальными другие точки из 4) и 6).

3.7. Для точек  $(x, y, z)$ , удовлетворяющих указанному равенству, имеем

$$f(x, y, z) = (x + y + z)^2 + x + y + z - 1.$$

Положим  $u = x + y + z$ . Тогда задача сводится к отысканию точек экстремума функции  $\varphi(x, y, u) = u^2 + u$  при ограничении

$$x^2 + y^2 + u - x - y = 1,$$

которое можно записать также в виде

$$(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 + u = 3/2. \quad (I)$$

Ясно, что  $(x, y, u) = (1/2, 1/2, 3/2)$  — точка строгого локального максимума, а любая точка  $(x, y, -1/2)$ , удовлетворяющая условию

$$(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 2, \quad (II)$$

есть точка нестрогого глобального минимума функции  $\varphi$  при ограничении (I). Следовательно,  $(x, y, z) = (1/2, 1/2, 1/2)$  — точка строгого локального (но не глобального) максимума, а любая точка  $(x, y, z)$ , удовлетворяющая условию (II) и равенству  $x + y + z =$

$= -1/2$ , — точка нестрогого глобального минимума исходной функции  $f$  при ограничении  $x^2 + y^2 + z = 1$ .

3.8. Приведем три одинаково поучительных доказательства.

*Доказательство, основанное на исключении переменных* (классическое). Пусть градиенты  $g'_1(x^*), \dots, g'_m(x^*)$  линейно зависимы, т. е. существуют числа  $y_1^*, \dots, y_m^*$ , не равные нулю одновременно и такие, что

$$\sum_{i=1}^m y_i^* g'_i(x^*) = 0.$$

Тогда число  $y_0^* = 0$  и вектор  $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$  удовлетворяют условию (3.4).

Теперь рассмотрим нетривиальный случай, когда указанные градиенты линейно независимы. Положим  $G(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$ . Тогда  $\text{rang } G'(x^*) = m$ , и без ограничения общности можно считать, что первые  $m$  столбцов матрицы  $G'(x^*)$  линейно независимы. Разобьем вектор  $x$  на две части:  $x = (u, v)$ , где  $u = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $v = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ . Отображение  $G(u, v)$  удовлетворяет всем условиям теоремы 2.4 о неявной функции: оно непрерывно дифференцируемо в окрестности точки  $(u^*, v^*)$ , где  $u^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$ ,  $v^* = (x_{m+1}^*, \dots, x_n^*)$ , причем  $G(u^*, v^*) = 0$ , а матрица  $G'_u(u^*, v^*)$  невырождена. Поэтому существует такая  $m$ -мерная вектор-функция  $u(v)$  ( $v \in \mathbb{R}^{n-m}$ ), что для всех  $v$ , достаточно близких к  $v^*$ , выполнено

$$G(u(v), v) = 0 \quad (\text{I})$$

и, кроме того,

$$u(v^*) = u^*, \quad u'(v^*) = -[G'_u(u^*, v^*)]^{-1} G'_v(u^*, v^*). \quad (\text{II})$$

Введем функцию  $F(v) = f(u(v), v)$ . По условию точка  $x^* = (u^*, v^*)$  является локальным решением исходной задачи (3.1). Отсюда с учетом (I), (II) легко выводится, что  $v^*$  есть точка локального минимума функции  $F(v)$ . Используя ценное правило дифференцирования (2.5), а также (II), получаем

$$\begin{aligned} 0 = F'(v^*) &= f'_u(u^*, v^*) u'(v^*) + f'_v(u^*, v^*) = \\ &= -f'_u(u^*, v^*) [G'_u(u^*, v^*)]^{-1} G'_v(u^*, v^*) + f'_v(u^*, v^*). \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Введем  $m$ -мерный вектор

$$y^* = -f'_u(u^*, v^*) [G'_u(u^*, v^*)]^{-1}. \quad (\text{IV})$$

Тогда (III) можно переписать в виде

$$f'_v(u^*, v^*) + y^* G'_v(u^*, v^*) = 0.$$

При этом само равенство (IV) равносильно следующему:

$$f'_u(u^*, v^*) + y^* G'_u(u^*, v^*) = 0.$$

Последние два равенства, взятые вместе, означают, что

$$f'(x^*) + y^*G'(x^*) = 0,$$

т. е.

$$L'_x(x^*, 1, y^*) = f'(x^*) + \sum_{i=1}^n y_i^* g'_i(x^*) = 0.$$

*Доказательство, основанное на теореме Люстерника.* Пусть градиенты  $g'_1(x^*), \dots, g'_m(x^*)$  линейно независимы (в противном случае, как отмечено выше, теорема тривиальна). Рассмотрим систему линейных уравнений относительно  $h \in \mathbb{R}^n$ :

$$\langle f'(x^*), h \rangle = -1, \quad (I)$$

$$\langle g'_i(x^*), h \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (II)$$

Предположим, что она имеет решение  $h$ . Тогда по теореме Люстерника (см. 2.41) найдется такая  $n$ -мерная вектор-функция  $r(\alpha)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), что для всех достаточно малых по модулю  $\alpha$  выполнено

$$g_i(x^* + \alpha h + r(\alpha)) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (III)$$

и, кроме того,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(\alpha)}{\alpha} = 0. \quad (IV)$$

Равенства (III) означают, что точка  $x(\alpha) = x^* + \alpha h + r(\alpha)$  является допустимой в задаче (3.1). При этом с учетом дифференцируемости  $f$  в  $x^*$  имеем

$$\begin{aligned} f(x(\alpha)) - f(x^*) &= \langle f'(x^*), \alpha h + r(\alpha) \rangle + o(\alpha) = \\ &= \alpha \left( \langle f'(x^*), h \rangle + \left\langle f'(x^*), \frac{r(\alpha)}{\alpha} \right\rangle + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (I), (IV) следует, что  $f(x(\alpha)) < f(x^*)$  при всех достаточно малых  $\alpha > 0$ . Мы пришли к противоречию с тем, что  $x^*$  — локальное решение задачи (3.1). Таким образом, система (I), (II) не имеет решения. Но это возможно лишь в том случае, если ранг матрицы данной системы меньше  $m + 1$ , т. е. векторы  $f'(x^*), g'_1(x^*), \dots, g'_m(x^*)$  линейно зависимы.

*Доказательство, основанное на штрафных функциях* (при дополнительном предположении, что функция  $f$  непрерывно дифференцируема в точке  $x^*$ ). Поскольку  $x^*$  — локальное решение задачи (3.1), то существует столь малое число  $\varepsilon > 0$ , что  $x^*$  есть точка глобального минимума  $f$  на  $Y = X \cap U_\varepsilon(x^*)$ , где, напомним,  $X$  обозначает допустимое множество задачи (3.1), а  $U_\varepsilon(x^*)$  — шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в  $x^*$ . Для любого  $k = 1, 2, \dots$  введем функцию

$$f_k(x) = f(x) + k \sum_{i=1}^m g_i^2(x) + \|x - x^*\|^2.$$

Пусть  $x^k$  — точка глобального минимума  $f_k(x)$  на  $U_\varepsilon(x^*)$ , существующая по теореме Вейерштрасса. Без ограничения общности бу-

дем считать, что последовательность  $\{x^k\}$  сходится к некоторой точке  $\bar{x} \in U_\varepsilon(x^*)$ .

Для любого  $k = 1, 2, \dots$  имеем  $f_k(x^k) \leq f_k(x^*)$ , т. е.

$$f(x^k) + k \sum_{i=1}^m g_i^2(x^k) + \|x^k - x^*\|^2 \leq f(x^*). \quad (I)$$

Отсюда следует, что

$$g_i(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_i(x^k) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Таким образом,  $\bar{x} \in X \cap U_\varepsilon(x^*) = Y$  и, значит,  $f(x^*) \leq f(\bar{x})$ . Отсюда и из (I) получаем

$$f(x^k) + \|x^k - x^*\|^2 \leq f(\bar{x}).$$

Переходя здесь к пределу, убеждаемся, что  $\bar{x} = x^*$ . Итак,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$ . Тогда при всех достаточно больших  $k$  имеем  $x^k \in \text{int } U_\varepsilon(x^*)$  и, значит,  $f'_k(x^k) = 0$ , т. е.

$$f'(x^k) + 2k \sum_{i=1}^m g_i(x^k) g'_i(x^k) + 2(x^k - x^*) = 0. \quad (II)$$

Введем числа

$$y_0^k = \left( 1 + 4k^2 \sum_{i=1}^m g_i^2(x^k) \right)^{-1/2},$$

$$y_i^k = 2k g_i(x^k) \left( 1 + 4k^2 \sum_{i=1}^m g_i^2(x^k) \right)^{-1/2},$$

$$i = 1, \dots, m.$$

Тогда (II) можно переписать в виде

$$y_0^k f'(x^k) + \sum_{i=1}^m y_i^k g'_i(x^k) + 2y_0^k(x^k - x^*) = 0. \quad (III)$$

Поскольку вектор  $(y_0^k, y_1^k, \dots, y_m^k)$  лежит на единичной сфере в  $\mathbf{R}^{m+1}$ , то без ограничения общности можно считать, что при любом  $i = 0, 1, \dots, m$  последовательность  $\{y_i^k\}$  сходится к некоторому числу  $y_i^*$ . При этом  $(y_0^*, y_1^*, \dots, y_m^*) \neq 0$ . Переходя к пределу в (III), получаем (3.4).

3.9. Нет, не следует. Простейшим примером служит задача

$$x^2 \rightarrow \min, \quad x^2 = 0.$$

Можно указать и менее тривиальный пример:

$$f(x) = x_1^2 \rightarrow \min, \quad g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$

$$g_2(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 1 = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Точка  $x^* = (0, 1, 0)$  является глобальным решением этой задачи. При этом градиенты  $g_1'(x^*) = (0, 2, 0)$  и  $g_2'(x^*) = (0, 3, 0)$  линейно зависимы. Составим функцию Лагранжа:

$$L = y_0 f(x) + y_1 g_1(x) + y_2 g_2(x).$$

Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2y_0 x_1 + 2y_1 x_1 + 3y_2 x_1^2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2y_1 x_2 + 3y_2 x_2^2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 3y_2 x_3^2 = 0.$$

При  $x = x^*$  здесь можно взять любое  $y_0$ , а также любые  $y_1$  и  $y_2$ , удовлетворяющие условию  $2y_1 + 3y_2 = 0$ .

**3.10.** Пусть  $y_0^* = 1$ ,  $y^*$  и  $h$  удовлетворяют условиям (3.4), (3.6) (случай  $y_0^* > 0$  легко сводится к данному). По теореме Люстерника существует такая  $n$ -мерная вектор-функция  $r(\alpha)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), что для всех достаточно малых по модулю  $\alpha$  выполнено

$$g_i(x(\alpha)) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{I})$$

где  $x(\alpha) = x^* + \alpha h + r(\alpha)$ , и, кроме того,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(\alpha)}{\alpha} = 0. \quad (\text{II})$$

Из (I) следует, что

$$L(x(\alpha), y^*) = f(x(\alpha)) + \sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x(\alpha)) = f(x(\alpha)).$$

Аналогично  $L(x^*, y^*) = f(x^*)$ . При этом  $f(x^*) \leq f(x(\alpha))$  для всех достаточно малых по модулю  $\alpha$ . Положим  $h(\alpha) = x(\alpha) - x^* = \alpha h + r(\alpha)$ . Тогда, используя (3.4), имеем

$$0 \leq f(x(\alpha)) - f(x^*) = L(x(\alpha), y^*) - L(x^*, y^*) =$$

$$\begin{aligned} &= \langle L'_x(x^*, y^*), h(\alpha) \rangle + \frac{1}{2} \langle L''_x(x^*, y^*) h(\alpha), h(\alpha) \rangle + o(\alpha^2) = \\ &= \frac{1}{2} \langle L''_x(x^*, y^*) h(\alpha), h(\alpha) \rangle + o(\alpha^2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left\langle L''_x(x^*, y^*) \left( h + \frac{r(\alpha)}{\alpha} \right), h + \frac{r(\alpha)}{\alpha} \right\rangle + \frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} \geq 0.$$

Переходя здесь к пределу с учетом (II), получаем (3.5) (при  $y_0^* = 1$ ).

3.11. Подходит любая из двух задач, приведенных в ответе к 3.9. Покажем это для более сложной второй задачи. Имеем

$$L''_x = \begin{bmatrix} 2y_0 + 2y_1 + 6y_2x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2y_1 + 6y_2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 6y_2x_3 \end{bmatrix}.$$

Поставим в соответствие решению  $x^* = (0, 1, 0)$  множители  $y_0^* = 1$ ,  $y_1^* = -3$ ,  $y_2^* = 2$ , удовлетворяющие условию  $2y_1^* + 3y_2^* = 0$ . При этих значениях получаем

$$L''_x = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Условие ортогональности сводится здесь к равенству  $h_2 = 0$ . Но при  $h = (h_1, 0, h_3)$ ,  $h_1 \neq 0$ , величина  $\langle L''_x h, h \rangle = -4h_1^2$  отрицательна.

3.12. Пусть  $x^*$  не является строгим локальным решением задачи (3.1). Тогда найдется последовательность  $\{x^k\}$ , удовлетворяющая условиям

$$x^k \in X, \quad x^k \neq x^*, \quad x^k \rightarrow x^*, \quad f(x^k) \leq f(x^*).$$

Представим  $x^k$  в виде

$$x^k = x^* + \alpha_k h^k, \quad \text{где } \alpha_k = \|x^k - x^*\|, \quad h^k = \frac{1}{\alpha_k} (x^k - x^*).$$

Поскольку  $\|h^k\| = 1$ , то без ограничения общности можно считать, что  $h^k \rightarrow h \neq 0$ . Имеем

$$0 = g_i(x^k) - g_i(x^*) = \langle g'_i(x^*), \alpha_k h^k \rangle + o(\alpha_k), \quad i = 1, \dots, m.$$

Поделив эти соотношения на  $\alpha_k$  и перейдя к пределу, получаем (3.6). В то же время с учетом условия (3.4) можем записать

$$\begin{aligned} 0 \geq y_0^* f(x^k) - y_0^* f(x^*) &= L(x^k, y_0^*, y^*) - L(x^*, y_0^*, y^*) = \\ &= \frac{1}{2} \langle L''_x(x^*, y_0^*, y^*) \alpha_k h^k, \alpha_k h^k \rangle + o(\alpha_k^2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\langle L''_x(x^*, y_0^*, y^*) h^k, h^k \rangle + \frac{o(\alpha_k^2)}{\alpha_k^2} \leq 0.$$

Переходя здесь к пределу, получаем противоречие с (3.7).

3.13. Это следует из самой теоремы 3.3. Если в ее рамках  $y_0^* = 0$ , то  $x^*$  является строгим локальным решением не только задачи (3.1), но и задачи максимизации той же функции на том же множестве. Это возможно лишь в тривиальном случае, когда  $x^*$  — изолированная допустимая точка. Примером служит задача

$$x_1 \rightarrow \min, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_1^3 + x_2^3 = 1$$

и ее изолированная допустимая точка  $(0, 1)$ .

**3.14.** Задача имеет решение  $x^* = (x_j^*)$  в силу теоремы Вейерштрасса\*). При этом из вида целевой функции ясно, что  $x^* > 0$ . Следовательно, принцип Лагранжа здесь применим. Перейдем к эквивалентной задаче максимизации логарифма целевой функции. Поскольку задача регулярна, ее функцию Лагранжа можно записать в виде

$$L = - \sum_{j=1}^n \alpha_j \ln x_j + y \left( \sum_{j=1}^n a_j x_j^{\beta_j} - b \right).$$

Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = - \frac{\alpha_j}{x_j} + y a_j \beta_j x_j^{\beta_j-1} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (I)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j^{\beta_j} = b, \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (II)$$

Из (I) выражаем  $x_j$  через  $y$ :

$$x_j = \left( \frac{\alpha_j}{y a_j \beta_j} \right)^{1/\beta_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (III)$$

Подставляя эти выражения в (II), находим множитель Лагранжа

$$y^* = \frac{A}{b}, \quad \text{где } A = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\beta_j}. \quad \text{Подставляя } y = y^* \text{ в (III), получаем}$$

стационарную точку задачи:

$$x^* = (x_j^*), \quad x_j^* = \left( \frac{\alpha_j b}{a_j \beta_j A} \right)^{1/\beta_j}.$$

Так как эта точка единственна, то она и является решением задачи.

**3.15.** Целевая функция задачи является бесконечно растущей на допустимом множестве. Тогда по теореме 1.2 решение задачи существует. Из вида ограничения-равенства ясно, что  $x^* > 0$ . Применяя принцип Лагранжа, убеждаемся, что единственной стационарной точкой, а значит, и решением задачи является вектор  $x^* = (x_j^*)$ , где

$$x_j^* = \left( \frac{b}{A} \right)^{1/(\alpha_j B)} \left( \frac{\beta_j}{\alpha_j c_j} \right)^{1/\alpha_j}, \quad A = \prod_{j=1}^n \left( \frac{\beta_j}{\alpha_j c_j} \right)^{\beta_j/\alpha_j},$$

$$B = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\alpha_j}.$$

---

\*) Здесь и всюду далее в указаниях к § 3, если не оговорено противное, под решением экстремальной задачи понимается глобальное решение.

3.16. Здесь, как и выше, целевая функция является бесконечно растущей на допустимом множестве. Поэтому решение задачи существует. Им является единственная стационарная точка  $x^* = (x_j^*)$ , где

$$x_j^* = \left(\frac{b}{A}\right)^{1/(\alpha_j B)} \left(\frac{\alpha_j c_j}{\beta_j}\right)^{1/\alpha_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$A = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\alpha_j c_j}{\beta_j}\right)^{\beta_j/\alpha_j}, \quad B = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j}{\alpha_j}.$$

3.17.  $x^* = (x_j^*)$ ,  $x_j^* = \frac{b}{A} \left(\frac{c_j}{a_j}\right)^{1/(\alpha+1)}$ ,  $A = \sum_{j=1}^n (a_j^\alpha c_j)^{1/(\alpha+1)}$ .

3.18. Функция  $f(t) = t^\alpha$  удовлетворяет условию  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = \infty$ .

Поэтому из 1.25 следует, что решение  $x^*$  данной задачи существует. Проводя стандартные рассуждения на основе принципа Лагранжа, получаем, что

$$x^* = (x_j^*), \quad x_j^* = \frac{b}{A} \left(\frac{a_j}{c_j}\right)^{1/(\alpha-1)}, \quad A = \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j^\alpha}{c_j}\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

3.19. Поскольку  $\alpha$  четно, то целевая функция является бесконечно растущей. Следовательно, решение задачи существует. Составим (регулярную) функцию Лагранжа:

$$L = \sum_{j=1}^n c_j x_j^\alpha + y \left(b - \sum_{j=1}^n a_j x_j\right).$$

Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \alpha c_j x_j^{\alpha-1} - y a_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{I})$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b. \quad (\text{II})$$

Учитывая, что  $\alpha - 1$  нечетно, из (I) однозначно выражаем  $x_j$  через  $y$ :

$$x_j = \left(\frac{y a_j}{\alpha c_j}\right)^{1/(\alpha-1)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{III})$$

Подставляя эти выражения в (II), находим множитель Лагранжа:

$$y^* = \alpha \left(\frac{b}{A}\right)^{\alpha-1}, \quad \text{где } A = \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_j^\alpha}{c_j}\right)^{1/(\alpha-1)} > 0.$$

Подставляя  $y = y^*$  в (III), получаем стационарную точку задачи:

$$x^* = (x_j^*), \quad x_j^* = \frac{b}{A} \left( \frac{a_j}{c_j} \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Так как эта точка единственна, то она и является решением задачи.

3.20. Решение задачи существует, так как ее целевая функция является бесконечно растущей. Составим (регулярную) функцию Лагранжа:

$$L = \sum_{j=1}^n c_j |x_j|^\alpha + y \left( b - \sum_{j=1}^n a_j x_j \right).$$

Отметим, что функция  $\varphi(t) = |t|^\alpha$ , где  $\alpha > 1$ , является всюду дифференцируемой, причем  $\varphi'(t) = \alpha |t|^{\alpha-1} \text{sign } t$ . Поэтому принцип Лагранжа здесь применим. Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \alpha c_j |x_j|^{\alpha-1} \text{sign } x_j - y a_j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{I})$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b. \quad (\text{II})$$

Заметим, что здесь  $y \neq 0$ , так как  $b \neq 0$ . Рассмотрим два случая:

1)  $y > 0$ . Тогда из (I) следует, что  $\text{sign } x_j = \text{sign } a_j$ , и поскольку  $a_j = |a_j| \text{sign } a_j$ , то

$$\alpha c_j |x_j|^{\alpha-1} = y |a_j|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Отсюда

$$x_j = \left( \frac{y |a_j|}{\alpha c_j} \right)^{1/(\alpha-1)} \text{sign } a_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{III})$$

Подставляя эти выражения в (II), получаем

$$\sum_{j=1}^n |a_j| \left( \frac{y |a_j|}{\alpha c_j} \right)^{1/(\alpha-1)} = b.$$

Решением этого уравнения служит

$$y^* = \alpha \left( \frac{b}{A} \right)^{\alpha-1}, \quad \text{где } A = \sum_{j=1}^n \left( \frac{|a_j|}{c_j} \right)^{1/(\alpha-1)} > 0.$$

Подставляя  $y = y^*$  в (III), получаем стационарную точку задачи:

$$x^* = (x_j^*), \quad x_j^* = \frac{b}{A} \left( \frac{|a_j|}{c_j} \right)^{1/(\alpha-1)} \text{sign } a_j. \quad (\text{IV})$$

2)  $y < 0$ . Тогда  $\text{sign } x_j = -\text{sign } a_j$ . В этом случае приходим к уравнению

$$-\sum_{j=1}^n |a_j| \left( \frac{-y |a_j|}{\alpha c_j} \right)^{1/(\alpha-1)} = b,$$

которое не имеет решения, так как  $b > 0$ .

Таким образом, единственной стационарной точкой и, значит, решением задачи является (IV).

3.21. Обе экстремальные задачи имеют решения по теореме Вейерштрасса. Без труда показывается, что их стационарными точками служат  $x^* = (x_j^*)$  и  $-x^*$ , где

$$x_j^* = \left( \frac{b}{A} \right)^{1/\alpha} \left( \frac{c_j}{a_j} \right)^{1/(\alpha-1)}, \quad A = \sum_{j=1}^n a_j \left( \frac{c_j}{a_j} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} > 0.$$

(При проверке этого следует учесть, что уравнение вида  $y^{\alpha/(\alpha-1)} = a > 0$ , где  $\alpha$  — четное число, имеет два корня:  $y = \pm a^{(\alpha-1)/\alpha}$ .)

Заметим, что  $\sum_{j=1}^n c_j x_j^* > 0$ . Следовательно,  $x^*$  и  $-x^*$  — решения задач максимизации и минимизации соответственно.

3.22. Решениями задач максимизации и минимизации являются соответственно точки  $x^* = (x_j^*)$  и  $-x^*$ , где

$$x_j^* = \left( \frac{b}{A} \right)^{1/\alpha} \left( \frac{|c_j|}{a_j} \right)^{1/(\alpha-1)} \text{sign } c_j, \quad A = \sum_{j=1}^n a_j \left( \frac{|c_j|}{a_j} \right)^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

3.23. Обе экстремальные задачи имеют решения по теореме Вейерштрасса. Составим (регулярную) функцию Лагранжа:

$$L = \sum_{j=1}^n |x_j + c_j|^\alpha + y \left( b - \sum_{j=1}^n |x_j|^\alpha \right).$$

Выпишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \alpha |x_j + c_j|^{\alpha-1} \text{sign}(x_j + c_j) - y \alpha |x_j|^{\alpha-1} \text{sign } x_j = 0, \quad (\text{I})$$

$$j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n |x_j|^\alpha = b. \quad (\text{II})$$

Из (I) следует, что  $x_j = \lambda c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) при некотором  $\lambda$ . В самом деле, если  $x_j = 0$ , то в (I) по необходимости  $c_j = 0$ . Поэтому указанное равенство справедливо при любом  $\lambda$ . Пусть  $x_j \neq 0$ . Тогда (I) можно переписать в виде

$$\left| 1 + \frac{c_j}{x_j} \right|^{\alpha-1} \text{sign} \left( 1 + \frac{c_j}{x_j} \right) = y.$$

Отсюда очевидно, что  $c_j/x_j = \mu$ , где  $\mu = |y|^{1/(\alpha-1)} \text{sign } y - 1$ . Если  $\mu = 0$ , то  $y = 1$ . Но тогда система (I) заведомо не имеет решений, так как  $c = (c_1, \dots, c_n) \neq 0$ . Таким образом,  $\mu \neq 0$ , и остается положить  $\lambda = 1/\mu$ .

Подставляя теперь  $x_j = \lambda c_j$  в (II), находим

$$\lambda = \pm \left( \frac{b}{A} \right)^{1/\alpha}, \text{ где } A = \sum_{j=1}^n |c_j|^\alpha.$$

Таким образом, стационарными точками обеих задач являются  $x^* = (x_j^*)$  и  $-x^*$ , где

$$x_j^* = c_j \left( \frac{b}{A} \right)^{1/\alpha}.$$

Подставляя эти точки в целевую функцию, убеждаемся, что  $x^*$  и  $-x^*$  — решения задач максимизации и минимизации соответственно.

**3.24.** Решение задачи существует в силу теоремы 1.2. Составим (регулярную) функцию Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2 + y_1 \left( b_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \right) + y_2 \left( b_2 - \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \right).$$

Приравняв к нулю ее частные производные по  $x_j$ , получаем

$$x_j = y_1 a_{1j} + y_2 a_{2j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{I})$$

Подставляя эти выражения в ограничения задачи, приходим к системе относительно  $y_1$  и  $y_2$ :

$$p y_1 + r y_2 = b_1, \quad r y_1 + q y_2 = b_2,$$

где  $p = \langle a_1, a_1 \rangle$ ,  $r = \langle a_1, a_2 \rangle$ ,  $q = \langle a_2, a_2 \rangle$ . Поскольку  $a_1$  и  $a_2$  линейно независимы, то  $pq > r^2$  в силу неравенства Коши — Буяковского (см. 3.65). Следовательно, система имеет единственное решение:

$$y_1 = \frac{b_1 q - b_2 r}{pq - r^2}, \quad y_2 = \frac{b_2 p - b_1 r}{pq - r^2}.$$

Подставляя эти выражения в (I), получаем решение задачи.

**3.25.** Решение задачи существует в силу теоремы 1.4. Составим (регулярную) функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = \frac{1}{2} \langle Cx, x \rangle + \langle d, x \rangle + \langle y, b - Ax \rangle.$$

Приравняем к нулю ее градиент по  $x$ :  $Cx + d - yA = 0$ . Отсюда с учетом 2.20 имеем  $x = C^{-1}(yA - d) = C^{-1}A^T y - C^{-1}d$ . Подставляя это выражение в систему ограничений и вновь учитывая 2.20, получаем  $y = [AC^{-1}A^T]^{-1}(b + AC^{-1}d)$ . Следовательно,

$$x^* = C^{-1}A^T [AC^{-1}A^T]^{-1}(b + AC^{-1}d) - C^{-1}d$$

— единственная стационарная точка задачи. Она и является ее решением.

3.26. Решение  $x^*$  вычисляется по полученной выше формуле при  $C = \overline{A^T A}$ ,  $d = -\overline{A^T b}$ . В частности, если  $\overline{A} = E$ , то

$$x^* = \overline{b} - A^T [AA^T]^{-1} (A\overline{b} - b).$$

3.27. Нет, не являются. Применить теорему 3.2 с учетом того, что собственные векторы симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

3.28. Составим (регулярную) функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = (a + 2)x - 2y + \lambda(a(x + e^x) + b(y + e^y) - 1)$$

и выпишем необходимые условия экстремума в точке  $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(0, 0, \lambda) = a + 2 + \lambda a(1 + e^x)|_{(0,0,\lambda)} = a + 2 + 2\lambda a = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(0, 0, \lambda) = -2 + \lambda b(1 + e^y)|_{(0,0,\lambda)} = -2 + 2\lambda b = 0,$$

$$(a(x + e^x) + b(y + e^y))|_{(0,0)} = a + b = 1.$$

Эта система имеет два решения:

1)  $a = -1$ ,  $b = 2$ ,  $\lambda = 1/2$ ;

2)  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $\lambda = -1$ .

Вычислим гессиан функции  $L$  по  $x, y$  в точке  $(0, 0, \lambda)$ :

$$L'' = \begin{bmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda b \end{bmatrix}.$$

Для вектора  $h = (h_1, h_2)$ , удовлетворяющего условию ортогональности  $ah_1 + bh_2 = 0$ , имеем

$$\langle L''h, h \rangle = \lambda (ah_1^2 + bh_2^2) = \lambda b \left( \frac{b}{a} + 1 \right) h_2^2.$$

Если  $h_2 \neq 0$ , то величина  $\langle L''h, h \rangle$  отрицательна при значениях из 1) и положительна при значениях из 2). Тогда по теореме 3.3 в точке  $(0, 0)$  достигается строгий локальный максимум, если  $a = -1$ ,  $b = 2$ , и строгий локальный минимум, если  $a = 2$ ,  $b = -1$ . Более того, в каждом из двух случаев точка  $(0, 0)$  является точкой глобального экстремума. Докажем это, например, для случая  $a = -1$ ,  $b = 2$ . Пусть  $(x, y)$  удовлетворяет условию

$$-(x + e^x) + 2(y + e^y) = 1.$$

Требуется показать, что  $x - 2y \leq 0$ . Допустим обратное:  $x > 2y$ . Тогда

$$2(y + e^y) - 1 = x + e^x > 2y + e^{2y}.$$

Отсюда приходим к противоречивому неравенству  $2 > e^y + e^{-y}$ .

3.29. Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + ax + by^2 + \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1).$$

Выпишем необходимые условия экстремума в точке  $(0, 1)$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(0, 1, \lambda) = 2x + a + \lambda(2x - y)|_{(0,1,\lambda)} = a - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(0, 1, \lambda) = 2by + \lambda(-x + 2y)|_{(0,1,\lambda)} = 2(b + \lambda) = 0.$$

Таким образом, точка  $(0, 1)$  является стационарной при любых таких  $a$  и  $b$ , что  $a + b = 0$ , причем  $\lambda = a$  — соответствующий множитель Лагранжа. Выпишем гессиан  $L$  по  $x, y$  в точке  $(0, 1, \lambda)$  при указанных  $a, b$  и  $\lambda$ :

$$L'' = \begin{bmatrix} 2 + 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2b + 2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1 + a) & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix}.$$

Условие ортогональности в точке  $(0, 1)$  имеет вид  $h_1 = 2h_2$ . Если вектор  $h = (h_1, h_2)$  удовлетворяет этому условию, то

$$\langle L''h, h \rangle = 2(1 + a)h_1^2 - 2ah_1h_2 = (2 + a)h_1^2.$$

Следовательно,  $(0, 1)$  является точкой строгого глобального минимума (максимума) при любых таких  $a$  и  $b$ , что  $a > -2$  (соответственно  $a < -2$ ) и  $b = -a$ .

Остается рассмотреть случай  $a = -2, b = 2$ . Уравнение кривой  $x^2 - xy + y^2 = 1$  можно записать в следующем параметрическом виде:

$$x = \cos \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi,$$

$$y = \cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi.$$

При этом точке  $(0, 1)$  соответствует значение параметра  $\varphi_0 = -\pi/3$ . Подставляя указанные выражения в формулу для  $f(x, y)$ , получаем функцию

$$F(\varphi) = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{4}{\sqrt{3}} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right).$$

Ее, очевидно, можно разложить в ряд Тейлора в точке  $\varphi_0$ . Тогда, поскольку эта функция не является постоянной, хотя бы при одном  $k$  должно выполняться  $F^{(k)}(\varphi_0) \neq 0$ . Заметим, однако, что

$$F^{(2k)}(\varphi) = \alpha_k \cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + \beta_k \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right),$$

где  $\alpha_k, \beta_k$  — некоторые числа, и, значит,  $F^{(2k)}(\varphi_0) = 0$  при всех  $k$ . Следовательно,  $F^{(2k+1)}(\varphi_0) \neq 0$  хотя бы при одном  $k$ . Поэтому точка  $\varphi_0$  не является экстремальной для  $F(\varphi)$  (см. 2.4). Таким образом, в случае  $a = -2, b = 2$  точка  $(0, 1)$  не является экстремальной для функции  $f(x, y)$  при указанном ограничении.

**3.30.** Рассмотрим задачу

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle Cx, x \rangle} \rightarrow \min, \quad \langle Cx, x \rangle > 0, \quad \|x\| = 1,$$

Ясно, что функция  $f$  является бесконечно растущей на допустимом множестве задачи. Следовательно, задача имеет глобальное решение  $x^*$ . Возьмем любое число  $\lambda > -f(x^*)$ . Тогда для любого  $x$ , удовлетворяющего условию  $\langle Cx, x \rangle > 0$ , имеем  $f(x) \geq f(x^*) > -\lambda$ . Отсюда путем простых преобразований получаем, что

$$\langle (A + \lambda C)x, x \rangle > 0. \quad (I)$$

Для остальных ненулевых  $x \in \mathbb{R}^n$  (в силу неотрицательной определенности  $C$ ) выполняется  $\langle Cx, x \rangle = 0$ . Поэтому для них неравенство (I) следует из условий задачи.

**3.31.** Условие  $Bx = 0$  равносильно тому, что

$$0 = \|Bx\|^2 = \langle Bx, Bx \rangle = \langle B^T Bx, x \rangle.$$

При этом матрица  $B^T B$  неотрицательно определена (см. 2.20). Тогда из а) следует б) в силу теоремы Финслера (см. 3.30). Обратное очевидно.

Пусть  $\text{rang } B = m$  и выполнено а). Допустим, что матрица  $C$  вырождена, т. е. существует такой вектор  $(x, y) \neq 0$ , что

$$Ax + B^T y = 0, \quad Bx = 0.$$

Если  $x = 0$ , то  $B^T y = yB = 0$ , и, значит,  $y = 0$ , так как  $\text{rang } B = m$ . Но это невозможно. Следовательно,  $x \neq 0$ . Имеем

$$\langle Ax, x \rangle = -\langle B^T y, x \rangle = -\langle y, Bx \rangle = 0,$$

что противоречит а). Таким образом, в) справедливо.

**3.32.** Из 3.31 с учетом критерия Сильвестра выводим, что условие а) равносильно следующему: для всех  $k = 1, \dots, n$  и всех достаточно больших  $\lambda$

$$\det (A_k + \lambda B_k^T B_k) > 0. \quad (I)$$

Заметим, что

$$\begin{bmatrix} A_k + \lambda B_k^T B_k & \lambda B_k^T \\ 0 & -E_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & \lambda B_k^T \\ B_k & -E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_k & 0 \\ B_k & E_m \end{bmatrix},$$

где  $E_m$  и  $E_k$  — единичные матрицы размера  $m \times m$  и  $k \times k$  соответственно. Из известных свойств определителей имеем

$$\det \begin{bmatrix} A_k + \lambda B_k^T B_k & \lambda B_k^T \\ 0 & -E_m \end{bmatrix} = (-1)^m \det (A_k + \lambda B_k^T B_k),$$

$$\det \begin{bmatrix} E_k & 0 \\ B_k & E_m \end{bmatrix} = 1.$$

Поскольку определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей, то

$$\det (A_k + \lambda B_k^T B_k) =$$

$$= (-1)^m \det \begin{bmatrix} A_k & \lambda B_k^T \\ B_k & -E_m \end{bmatrix} = (-1)^m \lambda^m \det \begin{bmatrix} A_k & B_k^T \\ B_k & -\frac{1}{\lambda} E_m \end{bmatrix}. \quad (II)$$

Отсюда и из (I) легко выводятся требуемые утверждения. При этом следует учесть, что определитель является непрерывной функцией своих элементов.

3.33. Пусть уже проведены при  $m = 1$  рассуждения из решения предыдущей задачи вплоть до первого равенства в (II). Далее очевидно, что

$$-\det \begin{bmatrix} A_k & \lambda b_k^T \\ b_k & -1 \end{bmatrix} = \det A_k - \lambda \delta_k.$$

Таким образом, условие а) равносильно тому, что  $\det A_k - \lambda \delta_k > 0$  для всех  $k = 1, \dots, n$  и всех достаточно больших  $\lambda$ . Ясно, что в свою очередь это эквивалентно условию б).

3.34. Это немедленно следует из 3.32 и теоремы 3.3.

3.35. Поскольку  $\text{rang } B = m$ , то в (3.4) заведомо  $y_0^* \neq 0$ , и можно считать  $y_0^* = 1$ . При этом  $L_x''(x^*, 1, y^*) = f''(x^*)$ . Остается использовать 3.34.

3.36. Рассмотрим в окрестности точки  $(x^*, y^*, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$  непрерывно дифференцируемое отображение в  $\mathbb{R}^n$  вида

$$F(x, y, \varepsilon) = L_x'(x, y, \varepsilon).$$

По условию  $F(x^*, y^*, 0) = 0$ ,  $G(x^*, 0) = 0$ . Матрица Якоби отображения  $(F, G): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  по координатам вектора  $(x, y)$  в точке  $(x^*, y^*, 0)$  имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix},$$

где  $A = L_x''(x^*, y^*, 0)$ ,  $B = G_x'(x^*, 0)$ . Поскольку  $\text{rang } B = m$  и  $\langle Ah, h \rangle > 0$  при всех таких  $h \neq 0$ , что  $Bh = 0$ , то матрица  $C$  невырождена в силу 3.31. Таким образом, для отображения  $(F, G)$  и точки  $(x^*, y^*, 0)$  выполнены все условия теоремы 2.4 о неявной функции. Поэтому существуют единственные функции  $x(\varepsilon)$  и  $y(\varepsilon)$ , переводящие некоторую окрестность  $V$  точки  $0 \in \mathbb{R}^k$  в окрестности  $U$  и  $W$  точек  $x^*$  и  $y^*$  соответственно, и такие, что

$$F(x(\varepsilon), y(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad G(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0;$$

при этом функции  $x(\varepsilon)$ ,  $y(\varepsilon)$  непрерывно дифференцируемы на  $V$  и  $x(0) = x^*$ ,  $y(0) = y^*$ . Таким образом, они обладают свойствами а) и в). Чтобы получить б), достаточно с учетом теоремы 3.3 показать, что для любого близкого к нулю  $\varepsilon$  справедливо

$$\langle L_x''(x(\varepsilon), y(\varepsilon), \varepsilon)h, h \rangle > 0$$

при всех таких  $h \neq 0$ , что  $G_x'(x(\varepsilon), \varepsilon)h = 0$ .

Допустим, что это не так. Тогда найдутся такие последовательности  $\{\varepsilon^k\}$  и  $\{h^k\}$ , что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon^k = 0$ ,  $G_x'(x(\varepsilon^k), \varepsilon^k)h^k = 0$ ,  $\|h^k\| = 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k = h \neq 0$  и

$$\langle L_x''(x(\varepsilon^k), y(\varepsilon^k), \varepsilon^k)h^k, h^k \rangle \leq 0.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\langle L_x''(x^*, y^*, 0) h, h \rangle \leq 0, \quad G'_x(x^*, 0) h = 0.$$

Но это противоречит условиям задачи.

3.37. Конкретизируя приведенные выше построения, получаем

$$f'(x(\varepsilon)) + y(\varepsilon)G'(x(\varepsilon)) = 0, \quad (I)$$

$$G(x(\varepsilon)) = \varepsilon. \quad (II)$$

Применяя к  $\varphi(\varepsilon) = f(x(\varepsilon))$  цепное правило дифференцирования (2.5) и учитывая (I), имеем

$$\begin{aligned} \varphi'(\varepsilon) &= f'(x(\varepsilon))x'(\varepsilon) = \\ &= -y(\varepsilon)G'(x(\varepsilon))x'(\varepsilon), \end{aligned}$$

где, подчеркнем,  $G'(x(\varepsilon))$  и  $x'(\varepsilon)$  суть матрицы размера  $m \times n$  и  $n \times m$  соответственно. Дифференцируя (II), приходим к формуле

$$G'(x(\varepsilon))x'(\varepsilon) = E,$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $m \times m$ . Таким образом,  $\varphi'(\varepsilon) = -y(\varepsilon)$ .

3.38. В обозначениях, указанных на рис. 70, соответствующая экстремальная задача формулируется следующим образом:

$$\frac{a}{\sin \alpha} + \frac{b}{\sin \beta} \rightarrow \min,$$

$$a \operatorname{ctg} \alpha + b \operatorname{ctg} \beta = MN, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $MN$  заданы. Если  $(\alpha, \beta)$  — ее решение, то, согласно принципу Лагранжа, существует такое число  $\lambda$ , что

$$\frac{a \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \lambda \frac{a}{\sin^2 \alpha} = 0,$$

$$\frac{b \cos \beta}{\sin^2 \beta} + \lambda \frac{b}{\sin^2 \beta} = 0.$$

Отсюда получаем, что  $\cos \alpha = \cos \beta$ , и, значит,  $\alpha = \beta$ .

3.39. Согласно принципу Ферма, в однородной оптической среде свет распространяется прямолинейно. Следовательно, траектория движения света из  $A$  в  $B$  есть ломаная  $ACB$ , где  $C$  лежит на границе сред. В обозначениях, указанных на рис. 71, соответствующая экстремальная задача формулируется так:

$$\frac{a}{v_1 \sin \alpha} + \frac{b}{v_2 \sin \beta} \rightarrow \min,$$

$$a \operatorname{ctg} \alpha + b \operatorname{ctg} \beta = MN, \quad 0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi.$$

Отсюда аналогично решению предыдущей задачи получаем, что  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{v_1}{v_2}$ , т. е. отношение косинусов углов падения и преломления равно отношению скоростей света в данных средах.

3.40. Введем следующие обозначения:  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $AF = x$ ,  $AD = EF = y$  (рис. 72). Тогда площадь параллелограмма  $ADEF$  равна  $S = xy \sin A$ . Из подобия треугольников  $ABC$  и  $FEC$  получаем, что  $cx + by = bc$ . В результате приходим к задаче

$$xy \rightarrow \max, \quad cx + by = bc, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Ее решение:  $x = b/2$ ,  $y = c/2$ . Та-

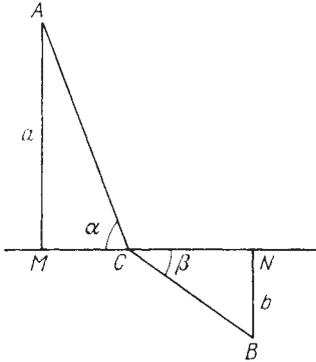


Рис. 71

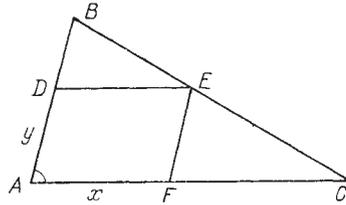


Рис. 72

ким образом, у искомого параллелограмма  $ADEF$  вершины  $D$ ,  $E$ ,  $F$  являются серединами соответствующих сторон треугольника  $ABC$ .

3.41. Искомый треугольник  $ABC$  не может быть тупоугольным, так как площадь такого заведомо меньше площади некоторого прямоугольного треугольника, вписанного в ту же окружность (рис. 73). Следовательно, центр окружности  $O$  не выходит за треугольник  $ABC$ . Обозначим через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  углы  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COA$  соответственно (рис. 74). Тогда площадь треугольника вычисляется

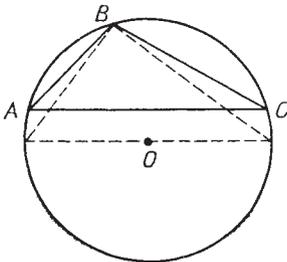


Рис. 73

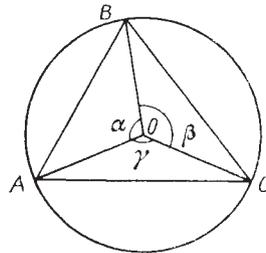


Рис. 74

по формуле  $S = \frac{1}{2} R^2 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$ , где  $R$  — радиус описанной окружности. Таким образом, приходим к задаче

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \rightarrow \max, \\ \alpha + \beta + \gamma = 2\pi, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0.$$

Ее решение:  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2}{3} \pi$ . Следовательно, искомым треугольником  $ABC$  является равносторонним.

3.42. Для площади треугольника справедлива следующая формула:

$$S = \frac{1}{2} r^2 \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right),$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы треугольника,  $r$  — радиус вписанной окружности. Поэтому задача сводится к следующей:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \rightarrow \min,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0.$$

Ее решение:  $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ . Таким образом, искомым треугольником является равносторонним.

3.43. С учетом формулы Герона задача формализуется следующим образом:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \rightarrow \max,$$

$$a + b + c = 2p, \quad p > a, \quad p > b, \quad p > c,$$

где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника. Если обозначить  $x = p - a, y = p - b, z = p - c$ , то приходим к задаче

$$xyz \rightarrow \max, \quad x + y + z = p, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

Ее решение:  $x = y = z = p/3$ . Таким образом, искомым треугольником является равносторонним.

3.44. Рассмотрим задачу

$$a^2 + b^2 + c^2 \rightarrow \min, \quad p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2,$$

$$a + b + c - 2p = 0, \quad p > a, \quad p > b, \quad p > c, \quad (I)$$

где переменными являются  $a, b, c$  и  $p$ , а  $S$  фиксировано. Для равностороннего треугольника доказываемое неравенство выполняется как равенство. Поэтому достаточно показать, что решение задачи (I) образуют  $a, b$  и  $c$ , равные друг другу. Положим  $x = p - a, y = p - b, z = p - c$ . Тогда задачу (I) можно переписать в виде

$$(y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2 \rightarrow \min,$$

$$(x+y+z)xyz = S^2, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

Из теоремы 1.2 следует, что решение  $(x, y, z)$  данной задачи существует. При этом градиент функции  $(x+y+z)xyz$  в точке  $(x, y, z)$  отличен от нуля. Тогда, согласно принципу Лагранжа, существует такое число  $\lambda$ , что

$$2(x+z) + 2(x+y) + \lambda(2xyz + (y+z)yz) = 0,$$

$$2(y+z) + 2(x+y) + \lambda(2xyz + (x+z)xz) = 0,$$

$$2(y+z) + 2(x+z) + \lambda(2xyz + (x+y)xy) = 0.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$(x-y)(2 - \lambda z(x+y+z)) = 0.$$

Если  $x \neq y$ , то  $\lambda > 0$ . Но в этом случае выписанная система не имеет решения в области  $x > 0, y > 0, z > 0$ . Таким образом,  $x = y$ . Аналогично показывается, что  $y = z$  и  $z = x$ .

3.45. В обозначениях, указанных на рис. 75, имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \cdot AB \cdot AC, \quad AB = \frac{r \sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma_1)},$$

$$AC = \frac{r \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma_2)}, \quad BM = \frac{r \sin \gamma_1}{\sin(\alpha + \gamma_1)}, \quad MC = \frac{r \sin \gamma_2}{\sin(\beta + \gamma_2)}.$$

Задача формализуется теперь следующим образом:

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \gamma_1) \sin(\beta + \gamma_2)} \rightarrow \min, \quad \alpha + \beta = \pi, \quad \alpha + \gamma_1 < \pi, \quad \beta + \gamma_2 < \pi,$$

где переменными являются  $\alpha$  и  $\beta$ , а  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  даны. Применяя принцип Лагранжа, получаем, что  $BM = MC$ . Следовательно, прямую отрезок между сторонами угла делился данной точкой  $M$  пополам.

3.46. Пусть  $l$  — образующая конуса,  $\alpha$  — угол между образующей и основанием. Тогда

$$V = \frac{1}{3} \pi l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha,$$

$$S = \pi l^2 \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{V^2}{S^3} = \frac{1}{9\pi} \cos \alpha \sin^2 \alpha = \frac{1}{9\pi} \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha).$$

Остается заметить, что глобальный максимум функции  $\varphi(t) = t(1 - t^2)$  достигается в точке  $t = 1/\sqrt{3}$  и равен  $2/(3\sqrt{3})$ .

3.47. Если  $R$  — радиус сегмента,  $h$  — его высота, то, как известно, объем сегмента равен  $\pi h^2(R - h/3)$ , а его сферическая поверхность —  $2\pi R h$ . Таким образом, имеем задачу

$$h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right) \rightarrow \min, \quad Rh = a, \quad 0 \leq h \leq 2R,$$

где  $a$  — константа. Если  $(R, h)$  — ее решение, то  $h = R$ . Следовательно, искомый шаровой сегмент является полушаром.

3.48. Пусть  $x, y, z$  — координаты вершины параллелепипеда, лежащей в первом координатном трехгранном угле. Тогда приходим к задаче

$$8xyz \rightarrow \max, \quad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

Ее решение (см. 3.14):  $x = \frac{1}{a\sqrt{3}}, y = \frac{1}{b\sqrt{3}}, z = \frac{1}{c\sqrt{3}}$ .

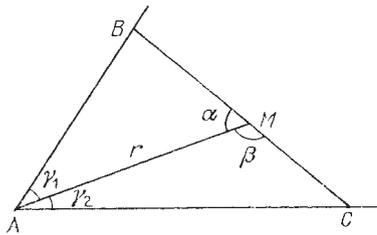


Рис. 75

3.49. Пусть  $O$  — основание высоты пирамиды,  $x$  — расстояние от  $O$  до прямой  $AB$ , взятое со знаком плюс, если  $O$  лежит по ту же сторону от  $AB$ , что и треугольник  $ABC$ , и со знаком минус в обратном случае. Аналогично определим  $y$  и  $z$  (рис. 76). Тогда приходим к задаче

$$\frac{1}{2} (a \sqrt{x^2 + h^2} + b \sqrt{y^2 + h^2} + c \sqrt{z^2 + h^2}) \rightarrow \min,$$

$$\frac{1}{2} (ax + by + cz) = S,$$

где  $a, b, c$  — стороны треугольника  $ABC$ ,  $S$  — его площадь,  $h$  — длина высоты пирамиды. Решение задачи удовлетворяет условию  $x = y = z$ . Следовательно,  $O$  есть центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

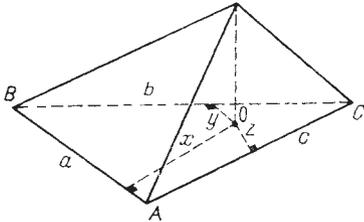


Рис. 76

3.50. По определению проекции  $x$  является решением задачи

$$\|x - a\|^2 \rightarrow \min, \quad g(x) = 0.$$

Применяя принцип Лагранжа, немедленно получаем нужный факт (ср. с геометрической интерпретацией этого принципа, данной после теоремы 3.1).

3.52. Точка  $x$  является решением задачи

$$\|x - a\| + \|x - b\| \rightarrow \min, \quad g(x) = 0.$$

Тогда, согласно принципу Лагранжа, существует такое число  $\lambda$ , что

$$\frac{x - a}{\|x - a\|} + \frac{x - b}{\|x - b\|} + \lambda g'(x) = 0,$$

или

$$\lambda g'(x) = \frac{a - x}{\|a - x\|} + \frac{b - x}{\|b - x\|}. \quad (I)$$

Отметим, что  $\lambda \neq 0$ , так как обратное означало бы, что точка  $x \in S$  лежит на отрезке  $[a, b]$ . Из (I) вытекает, что вектор  $\lambda g'(x)$  является диагональю ромба со сторонами единичной длины, а следовательно, и его биссектрисой.

$$3.53. \quad x = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x^j.$$

$$3.54. \quad \text{Если } x^0 = \sum_{j=1}^m x^j \neq 0, \text{ то } x = x^0 / \|x^0\|; \text{ если } x^0 = 0, \text{ то } x -$$

любая точка сферы.

3.55. Все слагаемые равны  $b/n$  (см. задачу 3.17 при  $c_j = a_j = 1, \alpha = 1$ ).

3.56. Все слагаемые равны  $b/n$  (см. задачу 3.19 при  $c_j = a_j = 1$ ,  $\alpha = 2$ ).

3.57. Сделаем замену переменных  $t = x + 1/x$ . Тогда указанное уравнение можно переписать в виде  $t^2 + at + b - 2 = 0$ . При этом  $t$  обязано удовлетворять условию  $|t| \geq 2$ . Получаем задачу

$$a^2 + b^2 \rightarrow \min, \quad t^2 + at + b - 2 = 0, \quad |t| \geq 2.$$

Пусть  $(a, b, t)$  — ее решение (существующее по теореме 1.2). Предположим, что  $|t| > 2$ . Градиент функции  $g(a, b, t) = t^2 + at + b - 2$  не обращается в нуль. Тогда, согласно принципу Лагранжа, должно существовать такое число  $y$ , что

$$\begin{aligned} 2a + yt &= 0, & 2b + y &= 0, & y(2t + a) &= 0, \\ t^2 + at + b - 2 &= 0, & |t| &> 2. \end{aligned}$$

Однако эта система несовместна. Таким образом, возможен лишь случай  $|t| = 2$ . Если  $t = 2$ , то приходим к задаче

$$a^2 + b^2 \rightarrow \min, \quad 2a + b = -2.$$

Ее решение:  $a = -4/5$ ,  $b = -2/5$ . Аналогично при  $t = -2$  получаем  $a = 4/5$ ,  $b = -2/5$ . Следовательно, наименьшее значение суммы  $a^2 + b^2$  равно  $4/5$  и достигается на двух указанных парах  $(a, b)$ .

3.58. Рассмотрим задачу 3.14 при  $\alpha_j = \beta_j = a_j = 1$ :

$$\prod_{j=1}^n x_j \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n x_j = b, \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Она имеет единственное решение  $x^* = (b/n, \dots, b/n)$ . Возьмем любые числа  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и положим  $b = \sum_{j=1}^n x_j$ . Тогда

$$\prod_{j=1}^n x_j \leq \prod_{j=1}^n x_j^* = \left(\frac{b}{n}\right)^n,$$

причем равенство имеет место лишь в случае  $x_1 = \dots = x_n$ .

3.59. Применяя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем

$$f(x) \geq (n+1) \left( x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{2}{x_n} \right)^{1/(n+1)} = (n+1) 2^{1/(n+1)},$$

причем равенство достигается лишь в том случае, если

$$x_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \dots = \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{2}{x_n}.$$

Отсюда находим единственное решение задачи:

$$x_1 = 2^{1/(n+1)}, \quad x_2 = x_1^2, \quad x_3 = x_1^3, \quad \dots, \quad x_n = x_1^n.$$

3.60. Для любого допустимого  $x$  имеем

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x_1 \cdot x_1 x_2 \cdot x_3 \cdot x_2 x_3 x_4 \leq \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2x_1 + x_1 x_2 + x_3 + x_2 x_3 x_4}{4} \right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{1}{512},$$

причем равенство достигается лишь в случае  $2x_1 = x_1 x_2 = x_3 = = x_2 x_3 x_4$ , т. е. при  $x_1 = 1/8$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 1/4$ ,  $x_4 = 1/2$ .

3.61. Рассмотреть задачу 3.14 при  $a_j = \alpha_j$ ,  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ ,  $\beta_j = 1$ .

3.62. Рассмотреть задачу 3.21 (на максимум) при  $c_j = a_j = = 1$ ,  $\alpha = 2$ .

3.63. Положим  $S_p = S_p(x, c)$ . Имеем  $x_j^p = e^{p \ln x_j} = 1 + + p \ln x_j + o(p)$ , где  $o(p)$  — бесконечно малая при  $p \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \ln S_p &= \frac{1}{p} \ln \left( \sum_{j=1}^n c_j x_j^p \right) = \frac{1}{p} \ln \left( 1 + p \sum_{j=1}^n c_j \ln x_j + o(p) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \ln x_j + \frac{o(p)}{p} = \ln S_0 + \frac{o(p)}{p}. \end{aligned}$$

Поэтому  $\lim_{p \rightarrow 0} S_p = S_0$ . Далее, пусть без ограничения общности  $S_\infty = x_1$ . Тогда

$$c_1^{1/p} S_\infty = (c_1 x_1^p)^{1/p} \leq S_p \leq \left( \sum_{j=1}^n c_j S_\infty^p \right)^{1/p} = S_\infty.$$

Отсюда заключаем, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} S_p = S_\infty$ . Точно так же доказыва-ется, что  $\lim_{p \rightarrow -\infty} S_p = S_{-\infty}$ . Остальные утверждения очевидны.

3.64. Если  $p = -\infty$  или  $q = \infty$ , то неравенство очевидно. До-кажем его для конечных  $p$  и  $q$  путем последовательного анализа различных случаев. Положим  $S_p(x) = S_p(x, c)$ .

1)  $0 < p < q = 1$ . Рассмотрим задачу 3.18 при  $a_j = c_j$ ,  $\alpha = p$ :

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^p \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j = b, \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ее единственным решением служит вектор  $x^* = (b, \dots, b)$ . Отсю-да легко выводится, что для любого  $x = (x_j) > 0$  справедливо

$$S_p(x) \leq S_1(x), \quad (I)$$

причем равенство имеет место лишь в том случае, если  $x_1 = \dots = x_n$ .

2)  $0 < p < q$ . Используя (I) и утверждение а) задачи 3.63, получаем

$$S_p(x) = [S_{p/q}(x^q)]^{1/q} \leq [S_1(x^q)]^{1/q} = S_q(x). \quad (II)$$

3)  $p = 0 < q$ . Неравенство  $S_0(x) \leq S_q(x)$  можно получить предельным переходом в (II) с учетом утверждения б) задачи 3.63 или путем рассмотрения задачи 3.14 при  $\alpha_j = a_j = c_j$ ,  $\beta_j = q$ .

4)  $p < q \leq 0$ . Вновь используя утверждение а) задачи 3.63, имеем

$$S_p(x) = [S_{-p}(x^{-1})]^{-1} \leq [S_{-q}(x^{-1})]^{-1} = S_q(x).$$

5)  $p < 0 < q$ . Согласно уже доказанному, справедливо

$$S_p(x) \leq S_0(x) \leq S_q(x).$$

3.65. Если  $y = 0$ , то неравенство очевидно. В противном случае рассмотреть задачу 3.21 при  $c_j = y_j$ ,  $a_j = 1$ ,  $\alpha = 2$ .

3.66. Согласно неравенству Коши — Буняковского,

$$|f(x, y)| \leq \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \stackrel{\text{def}}{=} M.$$

Пусть  $c > 0$ . Тогда  $f(x, y) = M$  в том случае, если  $(a, b, c) = \lambda(x, y, 1)$  при некотором  $\lambda \geq 0$ . Отсюда  $\lambda = c$ , и, значит,  $x = a/c$ ,  $y = b/c$ . В то же время не существует таких  $(x, y)$ , что  $f(x, y) = -M$ , поскольку условия  $(a, b, c) = \lambda(x, y, 1)$ ,  $\lambda \leq 0$  несовместны. Однако

$$\begin{aligned} f(x, y) &> \frac{ax + by}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \geq -\frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \geq \\ &\geq -\sqrt{a^2 + b^2} \stackrel{\text{def}}{=} -m. \end{aligned}$$

При этом  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(\frac{a}{c}t, \frac{b}{c}t\right) = -m$ . Таким образом, если  $c > 0$ , то

$$\inf_{\mathbf{R}^2} f(x, y) = -m, \quad \sup_{\mathbf{R}^2} f(x, y) = M,$$

причем лишь верхняя грань достигается. Если  $c < 0$ , то аналогично показывается, что

$$\inf_{\mathbf{R}^2} f(x, y) = -M, \quad \sup_{\mathbf{R}^2} f(x, y) = m,$$

причем лишь нижняя грань достигается. Если  $c = 0$ , то грани  $-m$  и  $m$  достигаются лишь в тривиальном случае  $a = b = 0$ .

3.67. Ясно, что неравенство достаточно доказать для  $x_j \geq 0$ ,  $y_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $y = (y_1, \dots, y_n) \neq 0$ . Рассмотрим задачу 3.22 при  $c_j = y_j$ ,  $a_j = 1$ ,  $\alpha = p$ :

$$\sum_{j=1}^n y_j x_j \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n |x_j|^p = b.$$

Ее единственным решением служит точка  $x^* = (x_j^*)$ , где

$$x_j^* = \left(\frac{b}{A}\right)^{1/p} y_j^{1/(p-1)}, \quad A = \sum_{j=1}^n y_j^{p/(p-1)} = \sum_{j=1}^n y_j^q.$$

Возьмем любые числа  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и положим  $b = \sum_{j=1}^n x_j^p$ . Тогда

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j \leq \sum_{j=1}^n x_j^* y_j = \left(\frac{b}{A}\right)^{1/p} A = b^{1/p} A^{1/q},$$

причем равенство имеет место лишь в том случае, если  $x_j = x_j^*$  ( $j = 1, \dots, n$ ), т. е. если  $x_j^p = \lambda y_j^{p/(p-1)} = \lambda y_j^q$  ( $j = 1, \dots, n$ ) при некотором  $\lambda \geq 0$ .

3.68. Если  $y = 0$ , то неравенство очевидно. В противном случае рассмотрим задачу 3.23 при  $c_j = y_j$ ,  $\alpha = p$ .

3.69. Прежде всего отметим, что если  $AA^T$  — диагональная матрица, то

$$\Delta^2 = \det A \det A^T = \det (AA^T) = \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

Рассмотрим теперь задачу максимизации  $\Delta^2$  на множестве всех матриц  $A = (a_{ij})$  размера  $n \times n$ , удовлетворяющих ограничениям

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = b_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (I)$$

при заданных  $b_i > 0$  (случай, когда  $b_i = 0$  хотя бы при одном  $i$ , тривиален, так как тогда  $\Delta = 0$ ). Заметим, что эта задача имеет глобальное решение по теореме Вейерштрасса, причем ее значение положительно. Выпишем функцию Лагранжа

$$L = y_0 \Delta^2 + \sum_{i=1}^n y_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 - b_i \right).$$

Напомним, что по теореме Лапласа для любого  $i = 1, \dots, n$  справедливо равенство

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij},$$

где  $\Delta_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Таким образом, если  $A = (a_{ij})$  — глобальное решение задачи, то

$$\frac{\partial L}{\partial a_{ij}} = 2y_0 \Delta \Delta_{ij} + 2y_i a_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где  $y_0, y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — некоторые числа, не равные нулю одновременно. С учетом (I) ясно, что  $y_0 \neq 0$ . Случай  $y_i = 0$  также невозможен, так как тогда  $\Delta_{ij} = 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и, значит,  $\Delta = 0$ . Следовательно, для любого  $i = 1, \dots, n$  имеем

$$\Delta_{ij} = \lambda_i a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (II)$$

при некоторых  $\lambda_i \neq 0$ . Вспомним теперь, что по свойствам определителей

$$\sum_{j=1}^n \Delta_{ij} a_{kj} = 0, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad i \neq k.$$

Отсюда и из (II) заключаем, что

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = 0, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad i \neq k,$$

т. е.  $AA^T$  есть диагональная матрица.

**3.70.** Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = 2a \sin x \sin y + e^{x^2 + y^2}.$$

Она является бесконечно растущей на  $\mathbf{R}^2$  и, следовательно, имеет точку глобального минимума. Заметим теперь, что указанная система равносильна следующей:  $\partial f / \partial x = 0$ ,  $\partial f / \partial y = 0$ . Точка  $(0, 0)$  удовлетворяет данной системе, но матрица

$$f''(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 2a \\ 2a & 2 \end{bmatrix}$$

знакоопределена. Поэтому  $(0, 0)$  не может быть точкой минимума  $f$ . Таким образом, система заведомо имеет еще одно решение.

**3.71.** Рассмотреть задачу

$$ax^2 + y^2 \rightarrow \min, \quad xe^y + ye^x = 1.$$

**3.72.** Выберем систему координат так, как указано на рис. 77. Пусть  $(x(t), y(t))$  — траектория полета камня, выпущенного под углом  $\alpha$  к плоскости земной поверхности. Тогда

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h, \quad \dot{x}(0) = v \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = v \sin \alpha.$$

Согласно второму закону Ньютона,  $\ddot{x}(t) = 0$ ,  $\ddot{y}(t) = -g$ , где  $g$  — ускорение свободного падения. Отсюда получаем, что

$$x(t) = vt \cos \alpha, \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + vt \sin \alpha + h.$$

Дальность полета определяется моментом времени  $t^*$ , для которого  $y(t^*) = 0$ , и равна  $vt^* \cos \alpha$ . Следовательно, искомый угол  $\alpha^*$  и соответствующий момент  $t^*$  образуют решение задачи

$$vt \cos \alpha \rightarrow \max, \quad -\frac{gt^2}{2} + vt \sin \alpha + h = 0,$$

$$t \geq 0, \quad -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2.$$

Отсюда находим, что  $\alpha^* = \arcsin \frac{v}{\sqrt{2(v^2 + hg)}}$ .

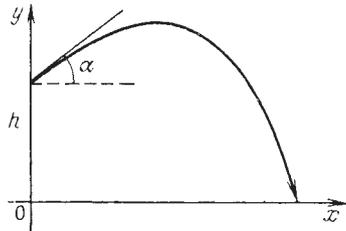


Рис. 77

**3.73.** Решением указанной задачи Коши является

$$K(t) = \bar{K} \left(1 - e^{-\gamma(\theta - \theta_0)t}\right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Поэтому искомый режим  $(T^*, \theta^*)$  служит решением задачи

$$(\theta - \theta_0)T \rightarrow \max, \quad p_1 T^2 + p_2(\theta - \theta_0)^3 = D_0, \quad T \geq 0, \quad \theta \geq \theta_0$$

(ср. с 3.14). Отсюда находим, что

$$T^* = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{D_0}{P_1}\right)^{1/2}, \quad \theta^* = \theta_0 + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{D_0}{P_2}\right)^{1/3}.$$

#### § 4

4.1. Пусть  $X$  имеет вид (4.1). Тогда

$$Ax = \sum_{i=1}^m \lambda_i Ax^i \leq b \sum_{i=1}^m \lambda_i = b.$$

Следовательно,  $x \in X$ .

4.2. Пусть  $I(x^*) \neq \emptyset$ , т. е. существует такой номер  $i$ , что  $\langle a_i, x^* \rangle = b_i$ . Рассмотрим точку  $x^\varepsilon = x^* + \varepsilon a_i$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  имеем

$$\langle a_i, x^\varepsilon \rangle = \langle a_i, x^* \rangle + \varepsilon \|a_i\|^2 > b_i,$$

т. е.  $x^\varepsilon \notin X$ . При этом  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^\varepsilon = x^*$ . Следовательно,  $x^*$  — граничная точка  $X$ . Пусть теперь  $I(x^*) = \emptyset$ , т. е.  $Ax^* < b$ . Тогда, очевидно, при всех  $x$ , достаточно близких к  $x^*$ , выполнено  $Ax < b$ , т. е.  $x^*$  — внутренняя точка  $X$ . Этим доказаны оба утверждения.

4.3. Пусть  $a^1, \dots, a^{n-1}$  — базис в линейном подпространстве  $L^\perp$ , ортогональном к прямой  $L = l_{0h}$ . Тогда, как известно,  $L = (L^\perp)^\perp$ , т. е.

$$l_{0h} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a^i, x \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n-1\}.$$

Следовательно,

$$l_{x^0 h} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a^i, x \rangle = \langle a^i, x^0 \rangle, \quad i = 1, \dots, n-1\}.$$

При этом луч и отрезок можно представить, например, следующим образом:

$$l_{x^0 h}^+ = l_{x^0 h} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle h, x \rangle \geq \langle h, x^0 \rangle\},$$

$$[x^0, x^1] = l_{x^0 h}^+ \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle h, x \rangle \leq \langle h, x^1 \rangle\},$$

где  $h = x^1 - x^0$ .

4.4. Ясно, что из в) следует б), а из б) следует а). Пусть справедливо а), т. е. существует такая последовательность  $\{x^s\} \subset X$ , что

$\lim_{s \rightarrow \infty} \|x^s\| = \infty$ . Положим  $h^s = \frac{x^s}{\|x^s\|}$ . Тогда

$$\langle a_i, h^s \rangle \leq \frac{b_i}{\|x^s\|}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (I)$$

$$\langle a_i, h^s \rangle = \frac{b_i}{\|x^s\|}, \quad i = k+1, \dots, m.$$

Так как  $\|h^s\| = 1$ , то без ограничения общности можно считать, что последовательность  $\{h^s\}$  сходится к некоторому вектору  $h \neq 0$ . Переходя к пределу в (I), получаем, что  $h$  — решение системы из в). Таким образом, а) влечет в).

4.6. Пусть указанная система имеет решение  $h \neq 0$ . Тогда, очевидно,  $x^* + \alpha h \in X$  при достаточно малых  $\alpha > 0$ , т. е.  $X \neq \{x^*\}$ . Пусть, напротив, существует точка  $x \in X$ , отличная от  $x^*$ . Тогда вектор  $h = x - x^*$  является решением данной системы.

4.7. Ясно, что  $L$  — аффинное множество и  $0 \in L$ . Тогда для любых  $x^1, x^2 \in L$  и  $\lambda \in R$  имеем

$$\lambda x^1 = \lambda x^1 + (1 - \lambda) \cdot 0 \in L, \quad x^1 + x^2 = 2 \left( \frac{1}{2} x^1 + \frac{1}{2} x^2 \right) \in L,$$

т. е. по определению  $L$  — линейное подпространство.

Пусть  $L_1 = X - x^1$ , где  $x^1 \in X$ . Возьмем любую точку  $x \in L$ . Поскольку  $x^1 - x^0 \in L$ , то  $x + (x^1 - x^0) \in L$ . Следовательно,  $x \in L + x^0 - x^1 = X - x^1 = L_1$ , т. е.  $L \subset L_1$ . Включение  $L_1 \subset L$  доказывается аналогично. Таким образом,  $L_1 = L$ .

4.8. Пусть  $X$  — аффинное множество и  $x^0 \in X$ . Тогда множество  $L = X - x^0$ , как и любое другое линейное подпространство в  $R^n$ , можно представить в виде

$$L = \{x \in R^n | Ax = 0\},$$

где  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ . Ясно, что при  $b = Ax^0$  получаем (4.12). В обратную сторону утверждение очевидно.

4.9. Использовать 4.7 и тот факт, что любое линейное подпространство  $L \subset R^n$  можно представить в виде

$$L = \{x \in R^n | x = Cy, \quad y \in R^s\},$$

где  $C \in \mathcal{A}(n, s)$ .

4.10. В случаях а) и б) соответственно имеем

$$\text{Lin } X = \{x \in R^n | Ax = 0\}, \quad \text{Lin } X = \{x \in R^n | x = Cy, \quad y \in R^s\}.$$

Остается использовать известные факты линейной алгебры [21, с. 57, 78].

4.12. а) (−1); б) 2; в) 1. Привести системы к треугольному виду.

4.13. Вычитая из третьего уравнения сумму первых двух, а из четвертого сумму второго и удвоенного первого, приводим систему к следующему эквивалентному виду:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + ax_3 + x_4 + 3x_5 &= 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 &= -7, \\ (3 - a)x_3 &= 0, \\ 2(3 - a)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ясно, что эта система имеет решение, причем ранг ее матрицы равен 2 при  $a = 3$  и равен 3 при  $a \neq 3$ . Поэтому  $\dim X = 3$  при  $a = 3$  и  $\dim X = 2$  при  $a \neq 3$ .

4.14. Линейные подпространства, параллельные  $X_1$  и  $X_2$ , связаны теми же соотношениями:  $\text{Lin } X_1 \subset \text{Lin } X_2$ ,  $\text{Lin } X_1 \neq \text{Lin } X_2$ . Поэтому утверждение следует из соответствующего факта линейной алгебры [21, с. 57].

4.15. Случай  $Y = \emptyset$  тривиален. Пусть

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = d\} \neq \emptyset,$$

где  $C \in \mathcal{A}(t, n)$ ,  $d \in \mathbb{R}^t$ . Предположим, что при некотором  $i \in \{1, \dots, m\}$  вектор  $a_i$  не является линейной комбинацией строк  $c_1, \dots, c_t$  матрицы  $C$ , т. е. система  $yC = a_i$  несовместна. Тогда, согласно теореме 4.5, система

$$Ch = 0, \quad \langle a_i, h \rangle > 0$$

имеет решение  $h$ . Рассмотрим любую точку  $x \in Y$ . Тогда, очевидно,  $x + \alpha h \in Y$  для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $x + \alpha h \notin X$  для достаточно больших  $\alpha > 0$ . Но это противоречит условию  $Y \subset X$ . Таким образом, каждый из векторов  $a_1, \dots, a_m$  линейно зависит от  $c_1, \dots, c_t$ . Отсюда и из теоремы о размерности линейной оболочки [21, с. 57] легко выводится, что  $\text{rang } A \leq \text{rang } C$ . Следовательно, с учетом 4.10 имеем

$$\dim Y = n - \text{rang } C \leq n - \text{rang } A.$$

4.16. а)  $I(X) = \emptyset$ ; б)  $I(X) = \{1, 2, 3\}$ ; в)  $I(X) = \{1, 2, 4\}$ ; г)  $I(X) = \{1, 3, 4\}$ .

4.17. Если предположить, что указанная система имеет решение  $p$ , то, взяв  $x \in X$ , приходим к противоречию:

$$0 = \langle pA, x \rangle = \langle p, Ax \rangle \leq \langle p, b \rangle < 0.$$

4.18. Пусть  $i_0 \notin I(X)$ , т. е.  $\langle a_{i_0}, x \rangle < b_{i_0}$  при некотором  $x \in X$ . Тогда получаем противоречие:

$$0 = \langle pA, x \rangle = \langle p, Ax \rangle < \langle p, b \rangle = 0.$$

4.19. Пусть  $A$  — матрица указанной системы,  $b$  — вектор ее правых частей. Рассмотрим систему  $pA = 0$ ,  $\langle p, b \rangle = 0$ , т. е.

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 & 2 & 0 \\ 4 & -7 & 1 & -7 & -9 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0.$$

Приводя эту систему к треугольному виду, убеждаемся, что ее общее решение выражается формулами

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{1}{2} p_4, \quad p_3 = \frac{3}{2} p_4.$$

Поскольку здесь можно взять  $p_4 > 0$ , то, согласно 4.18, имеем  $\{2, 3, 4\} \subset I(X)$ , если только  $X \neq \emptyset$ . Общее решение системы уравнений, получаемой путем замены знаков неравенств во втором, третьем и четвертом условиях знаками равенств, можно записать так:

$$x_1 = 10 - 2x_3 - 7x_4, \quad x_2 = 7 - x_3 - 5x_4.$$

Подставляя эти выражения в первое неравенство исходной системы, получаем

$$-5x_3 - x_4 + 4 \leq 0.$$

Например, при  $x_3 = x_4 = 1$  это неравенство выполняется как строгое. Следовательно,  $X \neq \emptyset$  и  $I(X) = \{2, 3, 4\}$ .

4.20. Повторяя схему решения задачи 4.19, рассмотрим систему типа  $pA = 0$ ,  $\langle p, b \rangle = 0$ . Ее общее решение записывается в виде  $p_1 = p_2 = p_4$ ,  $p_3 = 0$ . Следовательно,  $\{1, 2, 4\} \subset I(X)$ , если только  $X \neq \emptyset$ . Общее решение соответствующей системы из трех уравнений имеет вид

$$x_1 = \frac{14}{9} + \frac{22}{9}x_3 - \frac{2}{9}x_4, \quad x_2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9}x_3 + \frac{5}{9}x_4.$$

Подставляя эти выражения в третье неравенство исходной системы, убеждаемся, что оно всегда выполняется, и поэтому его можно просто отбросить, не изменив  $X$ . Таким образом, полиэдр  $X \subset \mathbb{R}^4$  задается системой из трех уравнений ранга 2. Иными словами,  $X$  — аффинное множество размерности 2 (см. 4.10).

4.21. Пусть, как обычно,  $A$  — матрица указанной системы,  $b$  — вектор ее правых частей. Рассмотрим систему  $pA = 0$ ,  $p \geq 0$ . С точностью до скалярного множителя ее решение единственно:  $p = (1, 0, 1, 3)$ . При этом  $\langle p, b \rangle = a + 35$ . Следовательно, если  $a < -35$ , то  $X = \emptyset$  в силу 4.17.

Пусть  $a = -35$ . Тогда из 4.18 заключаем, что  $\{1, 3, 4\} \subset I(X)$ . Повторяя прием, изложенный выше, приходим к выводу, что заведомо существует  $\bar{x} \in X$  и  $I(X) = \{1, 3, 4\}$ .

Пусть теперь  $a > -35$ . Тогда при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  и указанным  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)$  вектор  $x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2 - \varepsilon, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$  обращает все неравенства исходной системы в строгие. Следовательно,  $X \neq \emptyset$  и  $I(X) = \emptyset$ .

4.22. По определению нежесткого ограничения для любого  $i \in J$  существует такая точка  $x^i \in X$ , что  $\langle a_i, x^i \rangle < b_i$ . В качестве  $\bar{x}$  можно взять любую выпуклую комбинацию точек  $x^i$  ( $i \in J$ ) с положительными коэффициентами (см. 4.1).

4.23. б) Обозначим правую часть доказываемой формулы через  $Y$ . По определению  $I = I(X)$  имеем  $X \subset Y$ . При этом  $Y$  — аффинное множество. Тогда  $\text{aff } X \subset Y$  в силу определения  $\text{aff } X$ . Остается доказать обратное включение. Пусть  $x \in Y$ . Если  $I = \{1, \dots, m\}$ , то сразу очевидно, что  $x \in X \subset \text{aff } X$ . Поэтому будем считать, что  $J = \{1, \dots, m\} \setminus I$  не пусто. Возьмем точку  $\bar{x}$  из 4.22. Поскольку  $A_J \bar{x} = b_J$ ,  $A_J \bar{x} = b_J$ ,  $A_J \bar{x} < b_J$ , то заведомо найдется достаточно малое  $\alpha > 0$ , при котором точка  $y = \bar{x} + \alpha(x - \bar{x})$  принадлежит  $X$ .

Таким образом, точку  $x$  можно представить в виде  $x = \frac{1}{\alpha}y + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\bar{x}$ , где  $y, \bar{x} \in X \subset \text{aff } X$ . Тогда  $x \in \text{aff } X$ , так как  $\text{aff } X$  — аффинное множество. Следовательно,  $Y \subset \text{aff } X$ .

4.24. Ясно, что множество  $X$  является аффинным в том и только том случае, если  $X = \text{aff } X$ . Остается использовать 4.23.

4.25. Утверждение непосредственно следует из 4.10, 4.23.

4.26. Пусть  $X$  — полиэдр вида (4.3), где можно считать, что все векторы  $a_i$  отличны от нуля. Тогда, согласно 4.25, 4.22, 4.2, каждое из двух утверждений задачи равносильно тому, что в системе, задающей  $X$ , нет жестких ограничений, т. е.  $I(X) = \emptyset$ .

4.29. а)  $\dim X = 2$ ; б)  $\dim X = 0$ ; в)  $\dim X = 1$ ; г)  $\dim X = 1$ .

4.30.  $\dim X=2$ .

$$4.31. \dim X = \begin{cases} -1, & a < -35, \\ 2, & a = -35, \\ 4, & a > -35. \end{cases}$$

4.32. а)  $\dim X = 3$ . Точка  $x = (0, 1, 1, 0) \in X$  обращает все неравенства системы в строгие.

б)  $\dim X = 2$ . Повторяя схему решения задач 4.19, 4.20, получаем, что  $I(X) = \{1, 2, 4\}$ . При этом  $\text{rang } A_{I(X)} = 2$ .

в)  $\dim X = 2$ . Найти общее решение системы уравнений и подставить его в неравенство.

г)  $\dim X = 1$ .

4.33. Положим  $I = \{1, \dots, n\} \setminus J$ . Пусть  $e^i$  обозначает  $i$ -й единичный орт в  $\mathbb{R}^n$ ,  $E_I$  — матрицу со строками  $e^i$  ( $i \in I$ ). Согласно 4.25, имеем

$$\dim X = n - \text{rang} \begin{bmatrix} A \\ E_I \end{bmatrix}. \quad (\text{I})$$

Заметим, что столбцы матрицы  $E_I$  с номерами из  $I$ , будучи единичными ортами, линейно независимы, а остальные ее столбцы (с номерами из  $J$ ) равны нулю. Отсюда очевидно, что

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A \\ E_I \end{bmatrix} = |I| + \text{rang } A^J = (n - |J|) + \text{rang } A^J. \quad (\text{II})$$

Из (I), (II) следует нужная формула.

(Для дальнейшего полезно отметить, что формула (II) справедлива для любых  $I$  и  $J$ , удовлетворяющих условию  $I = \{1, \dots, n\} \setminus J$ .)

4.34. а) Общее решение системы уравнений можно записать в виде

$$x_1 = 2x_4 - 3x_5 + 4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -x_4 + x_5 + 1.$$

Это решение неотрицательно, например при  $x_4 = x_5 = 1$ , т. е. вектор  $(3, 0, 1, 1, 1)$  принадлежит  $X$ . Следовательно,  $X \neq \emptyset$  и  $J = I(X) = \{1, 3, 4, 5\}$  (в обозначениях задачи 4.33). Поскольку  $\text{rang } A^J = 2$ , то  $\dim X = 2$ .

б)  $\dim X = 2$ .

в)  $\dim X = 3$ .

4.35. Пусть полиэдр  $X$  имеет вид (4.1). Согласно определению, любая его вершина  $x^*$  является единственным решением системы вида  $A_I x = b_I$ , где  $I$  — некоторое подмножество множества  $\{1, \dots, m\}$  (как отмечалось, достаточно взять  $I = I(x^*)$ ). Но число таких систем конечно. Поэтому число вершин  $X$  не более чем конечно.

4.36. Пусть  $x \in X$ . Положим  $I = I(x)$ ,  $J = \{1, \dots, m\} \setminus I$ . Если  $\text{rang } A_I = n$ , то по определению точка  $x$  есть вершина. Пусть  $\text{rang } A_I < n$ . Это означает, что столбцы матрицы  $A_I$  линейно зависимы. Следовательно, найдется такой ненулевой вектор  $h \in \mathbb{R}^n$ , что  $A_I h = 0$ . При этом заведомо  $A_J h \neq 0$ , поскольку  $A h \neq 0$  в силу условия  $\text{rang } A = n$ . Без ограничения общности будем считать, что среди координат вектора  $A_J h$  имеются положительные, т. е.  $\langle a_i, h \rangle > 0$  при некотором  $i \in J$ . Рассмотрим точку  $x' = x + \alpha h$ ,

где  $\alpha \in \mathbb{R}$ . При любом  $\alpha$  имеем  $A_I x' = b_I$ . Выберем максимальное  $\alpha$  такое, что  $A_I x' \leq b_I$ , т. е.  $x' \in X$  (рис. 78). Ясно, что

$$\alpha = \min_{i \in J} \frac{b_i - \langle a_i, x \rangle}{\langle a_i, h \rangle}.$$

$\langle a_i, h \rangle > 0$

Пусть этот минимум достигается на индексе  $k$ , т. е.  $k \in J$ ,  $\langle a_k, h \rangle > 0$  и  $\langle a_k, x' \rangle = b_k$ . Положим  $I' = I(x')$ . Тогда  $I \cup \{k\} \subset I'$

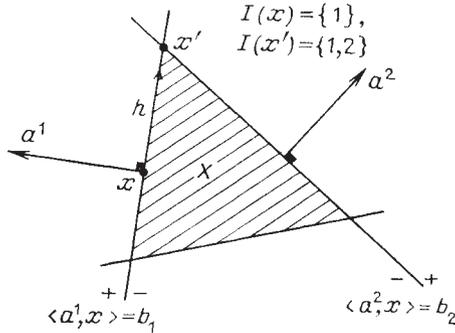


Рис. 78

(рис. 78). При этом  $a_k$  не является линейной комбинацией векторов  $a_i$  ( $i \in I$ ), так как иначе из условия  $A_I h = 0$  следовало бы, что  $\langle a_k, h \rangle = 0$ . Таким образом,  $\text{rang } A_{I'} > \text{rang } A_I$ . Если  $\text{rang } A_I = n$ ,

то  $x'$  — вершина  $X$ . В противном случае следует повторить описанную процедуру применительно к  $x'$ . Ясно, что за конечное число шагов эта процедура приведет к вершине  $x^*$ , причем такой, что  $I(x) \subset I(x^*)$ .

В обратную сторону теорема очевидна.

4.37. Перепишем (4.4) в виде

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, -Ex \leq 0\},$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ . Ясно, что  $\text{rang} \begin{bmatrix} A \\ -E \end{bmatrix} = n$ . Поэтому существование вершины данного полиэдра непосредственно следует из теоремы 4.2. Пусть теперь  $x \in X$ . В силу той же теоремы 4.2 найдется такая вершина  $x^*$ , что  $I(x) \subset I(x^*)$ . В данном случае это означает только следующее: если  $x_j = 0$ , то  $x_j^* = 0$ ; другими словами, если  $x_j^* > 0$ , то  $x_j > 0$ . Таким образом,  $J(x^*) \subset J(x)$ .

4.38. Положим  $J = J(x^*)$ ,  $I = \{1, \dots, n\} \setminus J(x^*)$ . Пусть  $e^i$  обозначает  $i$ -й единичный орт в  $\mathbb{R}^n$ ,  $E_I$  — матрицу со строками  $e^i$  ( $i \in I$ ). Согласно определению, точка  $x^* \in X$  является вершиной  $X$  в том и только том случае, если

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A \\ E_I \end{bmatrix} = n.$$

Применяя формулу (II) из решения задачи 4.33, заканчиваем доказательство первого утверждения теоремы. Второе непосредственно следует из того, что для рассматриваемого полиэдра множества  $I(x)$  (из (4.2)) и  $J(x)$  связаны соотношением

$$|I(x)| = m + (n - |J(x)|).$$

4.39. Можно, например, воспользоваться замечанием после задачи 4.36.

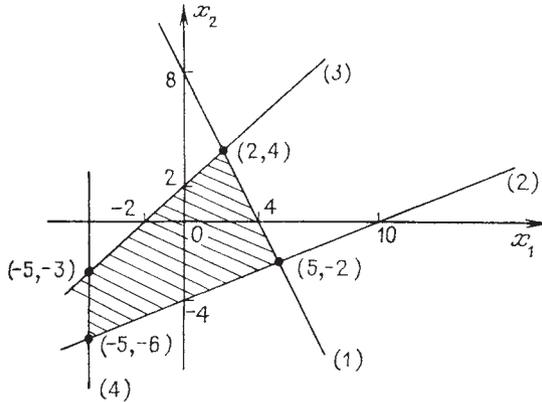


Рис. 79

4.40. Если  $x = 0$ , то утверждение тривиально: достаточно взять с нулевым коэффициентом любую точку  $x^i \neq 0$ . Пусть  $x \neq 0$ . Рассмотрим по условию непустой полиэдр

$$A = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i = x, \lambda = (\lambda_i) \geq 0 \right\}.$$

В силу теоремы 4.3 этот полиэдр имеет по крайней мере одну вершину  $\lambda^*$ . Согласно теореме 4.4, точки  $x^i$  ( $i \in J(\lambda^*)$ ) линейно независимы. Следовательно, эти точки образуют искомую подсистему.

Прямое доказательство данного утверждения можно найти в [5, с. 58; 39, с. 60].

4.41. а) Полиэдр и его четыре вершины изображены на рис. 79\*).

б) Полиэдр представляет собой отрезок с концами-вершинами  $(-2, 3)$  и  $(8, -2)$ .

в) Полиэдр представляет собой луч с началом-вершиной  $(2, 3)$ .

г) Полиэдр состоит из одной точки-вершины  $(2, 3)$ .

4.42.  $a = -1/2$ ,  $a = 3/2$ . Соответствующие положения прямой  $ax_1 + x_2 = 1$  показаны на рис. 80 штриховыми линиями. Заштрихован полиэдр, задаваемый последними тремя неравенствами.

\*) Здесь и далее на рисунках, где изображены полиэдры, цифры в скобках возле прямых соответствуют порядковым номерам ограничений.

4.43. Прежде всего отметим, что полиэдр непуст, так как содержит нулевую точку. Ясно, что ранг матрицы системы меньше 5, т. е. ее столбцы линейно зависимы в том и только том случае, если

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Единственным решением этого уравнения служит  $a = 2/5$ . Следовательно, по теореме 4.2 полиэдр имеет вершину при всех  $a \neq 2/5$  и не имеет при  $a = 2/5$ .

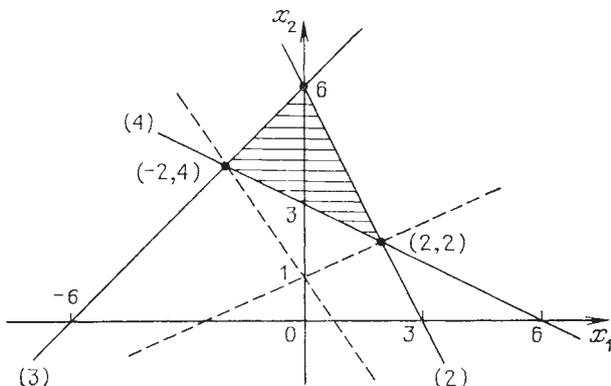


Рис. 80

4.44. а) Используем общую схему поиска вершин, описанную в п. 1. Последовательно рассмотрим все множества  $I \subset \{1, \dots, 4\}$ , состоящие из трех элементов.

1)  $I = \{1, 2, 3\}$ . Система  $A_I x = b_I$  имеет здесь вид

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 4, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 &= 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Ее единственное решение — точка  $(1, 1, 1)$  — удовлетворяет четвертому ограничению системы. Следовательно, эта точка — вершина полиэдра.

2)  $I = \{1, 2, 4\}$ . Решая соответствующую систему, находим вершину  $(2, -1, 0)$ .

3)  $I = \{1, 3, 4\}$ . Находим вершину  $(-1, 0, 1)$ .

4)  $I = \{2, 3, 4\}$ . Решение соответствующей системы — точка  $(-2, 1, 3)$  — не удовлетворяет первому ограничению системы и поэтому не является вершиной полиэдра.

Таким образом, всего вершин три.

б) (1, 1, 1); в)  $(24, -10, 1)$ ,  $(20, -6, -3)$ ; г)  $(-2, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 0)$ .

4.45. В данном случае вырожденной вершиной может быть только решение системы из четырех уравнений, получаемой путем замены всех знаков неравенств в исходной системе знаками равенств. Единственным решением системы из последних трех уравнений служит точка  $(1, 0, 1)$ . Она удовлетворяет первому уравнению, т. е. является вырожденной вершиной, при  $a = 1$ .

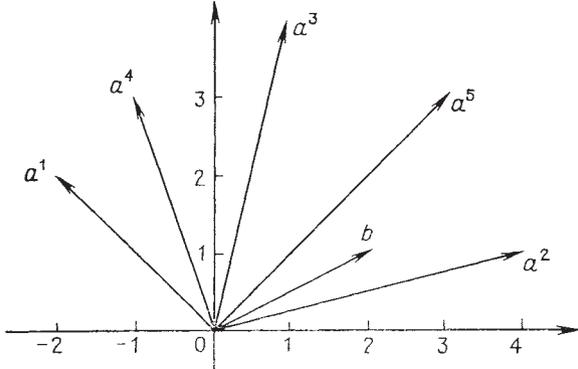


Рис. 81

4.46. а) Воспользуемся описанной в конце п. 1 схемой отыскания вершин полиэдров вида (4.4). Ясно, что для указанной системы требуется перебрать лишь такие множества  $J \subset \{1, \dots, 4\}$ , которые состоят ровно из двух элементов. Последовательно рассмотрим эти шесть множеств.

1)  $J = \{1, 2\}$ . В данном случае система  $\sum_{j \in J} a^j x_j = b$  имеет вид

$$x_1 - 2x_2 = 1,$$

$$2x_1 + 3x_2 = 3.$$

Ее решение:  $x_1 = 9/7, x_2 = 1/7$ . Поскольку оба этих числа неотрицательны, то точка  $(9/7, 1/7, 0, 0)$  — вершина полиэдра.

2)  $J = \{1, 3\}$ . Решение соответствующей системы:  $x_1 = 11/7, x_3 = -1/7$ . Так как  $x_3 < 0$ , то этот случай не дает вершины.

3)  $J = \{1, 4\}$ . Находим вершину  $(5/4, 0, 0, 1/4)$ .

4)  $J = \{2, 3\}$ . Находим вершину  $(0, 11/14, 9/14, 0)$ .

5)  $J = \{2, 4\}$ . Решение соответствующей системы имеет отрицательные координаты:  $x_2 = -5, x_4 = 9$ .

6)  $J = \{3, 4\}$ . Находим вершину  $(0, 0, 5/9, 11/9)$ .

Таким образом, всего вершин четыре.

б)  $(11/4, 0, 0, 8/7), (0, 11/16, 0, 23/16), (0, 0, 11/4, 3/4)$ .

в)  $(1, 1, 1, 0), (11/8, 0, 5/6, 19/24)$ .

4.47. На рис. 81 изображены вектор-столбцы  $a^1, \dots, a^5$  матрицы указанной системы уравнений и вектор  $b$  ее правых частей. Отсюда видно, что вектор  $b$  может быть неотрицательной комбинацией двух из этих столбцов в том и только том случае, если одним из них является  $a^2$ . Таким образом, всего вершин четыре.

4.48. Пусть, как обычно,  $a^1, \dots, a^4$  — столбцы рассматриваемой системы,  $b$  — вектор ее правых частей. Заметим, что система  $a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = b$  заведомо не имеет неотрицательного решения, так как в ее первой строке слева стоят отрицательные элементы, а справа — положительный. Таким образом, задача сводится к следующей: при каком значении параметра  $k$  вектор  $b$  является неотрицательной линейной комбинацией вектора  $a^1$  с одним из векторов  $a^2, a^3$  или  $a^4$ ? Чтобы сократить вычисления, изобразим на

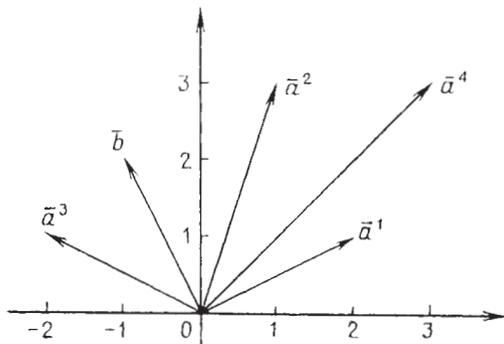


Рис. 82

рис. 82 векторы  $\bar{a}^1, \dots, \bar{a}^4, \bar{b}$ , получаемые из векторов  $a^1, \dots, a^4, b$  отбрасыванием их первых координат. Отсюда видно, что вектор  $\bar{b}$  является неотрицательной комбинацией вектора  $\bar{a}^1$  только с вектором  $\bar{a}^3$ . Решая систему  $\bar{a}^1x_1 + \bar{a}^3x_3 = \bar{b}$ , находим  $x_1 = 3/4, x_3 = 5/4$ . Следовательно, искомый параметр  $k$  может быть только таким, при котором указанные числа удовлетворяют системе  $a^1x_1 + a^3x_3 = b$ . Отсюда  $k = 35/3$ .

4.49.  $\dim X = n$ . Вершинами служат  $n$  единичных ортов в  $\mathbb{R}^n$ , а также точка 0.

4.50.  $\dim X = n - 1$ . Вершины те же, что и в 4.49, кроме 0.

4.52. Пусть  $x^*$  — вершина полиэдра  $X$  вида (4.3), т. е.  $\text{rang } A_I = n$ , где  $I = I(x^*)$ . Тогда  $x^*$  является единственным решением уравнения  $A_Ix = b_I$ . Следовательно, множество

$$\Gamma = \{x \in X | A_Ix = b_I\},$$

будучи гранью  $X$ , состоит только из точки  $x^*$ . Пусть, напротив,

$$\{x^*\} = \{x \in X | A_Ix = b_I\} \quad (I)$$

при некотором  $I \subset \{1, \dots, m\}$ . Тогда  $I \subset I(x^*)$  и, значит, соотношение (I) сохранит свою силу, если считать  $I = I(x^*)$ . Допустим, что  $x^*$  не является вершиной  $X$ , т. е.  $\text{rang } A_I < n$ . Тогда  $A_Ih = 0$  при некотором  $h \neq 0$ . Ясно, что  $x^* + \alpha h \in X$  для числа  $\alpha$ , достаточно близкого к нулю, и в то же время  $A_I(x^* + \alpha h) = b_I$ . Но это противоречит (I).

4.53. а) Полиэдр (будучи треугольником) имеет три ребра-отрезка, представимых в виде (4.14) при  $I = \{1\}, \{3\}, \{4\}$ .

б) Имеются ребро-отрезок ( $I = \{1\}$ ) и два ребра-луча ( $I = \{2\}, \{4\}$ ).

в) Имеются два ребра-прямых ( $I = \{1\}, \{2\}$ ).

4.54. Ясно, что множество  $I$  из (4.14) принадлежит  $I(\Gamma)$ . Поэтому

$$\{x \in X \mid A_{I(\Gamma)}x = b_{I(\Gamma)}\} \subset \Gamma.$$

В то же время справедливо и обратное включение, поскольку из условия  $x \in \Gamma$  по определению  $I(\Gamma)$  следует, что  $A_{I(\Gamma)}x = b_{I(\Gamma)}$ .

4.55. Согласно определению, грань  $\Gamma$  невырождена, если  $|I(\Gamma)| = \text{rang } A_{I(\Gamma)}$ , и вырождена, если  $|I(\Gamma)| > \text{rang } A_{I(\Gamma)}$ . В то же время размерность грани  $\Gamma$ , как и любого другого другого полиэдра, вычисляется по формуле  $d = \dim \Gamma = n - \text{rang } A_{I(\Gamma)}$  (см. 4.25).

4.56. Положим  $I = \{1, \dots, n\} \setminus J(\Gamma)$ . Пусть  $e^i$  обозначает  $i$ -й единичный орт в  $\mathbb{R}^n$ ,  $E_I$  — матрицу со строками  $e^i$  ( $i \in I$ ). Согласно определению, грань  $\Gamma$  указанного полиэдра невырождена в том и только том случае, если

$$m + |I| = \text{rang} \begin{bmatrix} A \\ E_I \end{bmatrix}.$$

Остается использовать формулу (II) из решения задачи 4.33.

4.57. Пусть  $X, \Gamma$  имеют вид (4.3), (4.14), а

$$\Gamma' = \{x \in \Gamma \mid A_{I'}x = b_{I'}\},$$

где  $I' \subset \{1, \dots, m\}$ . Тогда

$$\Gamma' = \{x \in X \mid A_{I'}x = b_{I'}, \quad A_Ix = b_I\},$$

т. е.  $\Gamma'$  — грань  $X$ . Дополнительное утверждение очевидно, поскольку  $I(\Gamma) \subset I(\Gamma')$ .

4.58. Пусть  $X, \Gamma$  имеют вид (4.3), (4.14), а

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq d\},$$

где  $C \in \mathcal{A}(s, n)$ ,  $d \in \mathbb{R}^s$ . Поскольку  $Y \subset X$ , то  $Y$  представим в виде  $Y = \{x \in X \mid Cx \leq d\}$ , т. е. в систему, задающую  $Y$ , всегда можно включить все ограничения, задающие  $X$ . При этом

$$\Gamma = \{y \in Y \mid A_Iy = b_I\},$$

т. е. по определению  $\Gamma$  есть грань  $Y$ .

4.59. Пусть  $[x^1, x^2]$  — ребро  $X$ , т. е.

$$[x^1, x^2] = \{x \in X \mid A_{I'}x = b_{I'}\},$$

где в силу 4.54 можно считать  $I' = I([x^1, x^2])$ . При этом, согласно 4.25, имеем

$$1 = \dim [x^1, x^2] = n - \text{rang } A_{I'}.$$

Заметим далее, что неравенство  $\langle a_i, x \rangle \leq b_i$  обращается в равенство всюду на отрезке  $[x^1, x^2]$  тогда и только тогда, когда оно обращается в равенство на его концах. Следовательно,

$$I([x^1, x^2]) = I(x^1) \cap I(x^2),$$

т. е.  $I' = I$ . В одну сторону утверждение доказано.

Пусть теперь  $\text{rang } A_I = n - 1$ . Тогда прежде всего  $x^1 \neq x^2$ , так как иначе  $I = I(x^1)$  и  $\text{rang } A_I = n$ . Рассмотрим грань  $\Gamma = \{x \in X \mid A_Ix = b_I\}$  полиэдра  $X$ . Поскольку  $x^1, x^2 \in \Gamma$ , то

$[x^1, x^2] \subset \Gamma$ . Тогда из 4.58 следует, что  $x^1, x^2$  — вершины  $\Gamma$ . Кроме того, имеем

$$\dim \Gamma \geq \dim [x^1, x^2] = 1.$$

В то же время  $I \subset I(\Gamma)$  и, значит,  $\text{rang } A_I \leq \text{rang } A_{I(\Gamma)}$ . Поэтому

$$\dim \Gamma = n - \text{rang } A_{I(\Gamma)} \leq n - \text{rang } A_I = 1,$$

т. е.  $\dim \Gamma = 1$ . Таким образом,  $\Gamma$  — одномерный полиэдр, имеющий  $x^1$  и  $x^2$  своими вершинами. Но этим свойством обладает только  $\Gamma = [x^1, x^2]$ .

4.60. Из условия задачи следует, что  $x^1 \neq x^2$  и

$$I = I(x^1) \cap I(x^2) = I(x^1) \setminus \{r\} = I(x^2) \setminus \{s\}.$$

При этом  $A_{I(x^i)} x^i = b_{I(x^i)}$  ( $i = 1, 2$ ) по определению  $I(x)$  и, значит,  $A_I x^i = b_I$  ( $i = 1, 2$ ). Таким образом, система  $A_I x = b_I$  имеет два различных решения. Тогда  $\text{rang } A_I \leq n - 1$ . В то же время  $\text{rang } A_I \geq n - 1$ , так как  $\text{rang } A_{I(x^1)} = n$  и  $|I| = |I(x^1)| - 1$  (\*). Следовательно,  $\text{rang } A_I = n - 1$ . Остается применить 4.59.

4.61. Согласно определению невырожденной вершины, имеем  $|I(x^1)| = |I(x^2)| = n$ . Поэтому если указанное условие не выполнено, т. е.  $I(x^2)$  имеет по крайней мере два элемента, не лежащие в  $I(x^1)$ , то множество  $I = I(x^1) \cap I(x^2)$  содержит не более  $n - 2$  элементов. Но это противоречит условию  $\text{rang } A_I = n - 1$  из 4.59.

Опустить условие невырожденности вершин нельзя. Чтобы множества  $I(x^1)$  и  $I(x^2)$  различались лишь одной позицией, они должны, как минимум, иметь одинаковое число элементов. Однако это заведомо не так, если лишь одна из соседних вершин невырождена.

4.62. Применить 4.59 с учетом того, что  $|I(x^1)| = n$ .

Опустить условие невырожденности вершины  $x^1$  нельзя. Рассмотрим полиэдр

$$X = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, 2x_1 + 2x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

4.63. Вершина  $x^*$  невырождена и  $I(x^*) = \{1, 2\}$ . Поэтому, согласно 4.62, достаточно найти решения систем вида  $A_I x = b_I$ , где  $I = \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$ , и выбрать среди них те, которые принадлежат  $X$ . Ответ:  $x^1 = (-1, 6)$ ,  $x^2 = (-1/9, -8/3)$ .

4.64. Положим  $I_i = \{1, \dots, n\} \setminus J(x^i)$  ( $i = 1, 2$ ) и  $I = I_1 \cap I_2 = \{1, \dots, n\} \setminus J$ . Согласно 4.59, вершины  $x^1$  и  $x^2$  соседние в том и только том случае, если

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A \\ E_I \end{bmatrix} = n - 1.$$

Остается использовать формулу (II) из решения задачи 4.33.

4.65. Если множества  $J(x^i)$  ( $i = 1, 2$ ) различаются лишь одной позицией, то их дополнения  $I_i = \{1, \dots, n\} \setminus J(x^i)$  ( $i = 1, 2$ ) обладают тем же свойством. Поэтому можно применить 4.60.

4.66. Применить 4.61.

4.67. Применить 4.62 или непосредственно вывести из 4.64.

4.68.  $(0, 10/11, 7/11, 0, 0)$ ,  $(0, 11/10, 0, 7/10, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 0, 1/2)$ .

\*) Если у матрицы исключить одну строку, то ее ранг либо не изменится, либо уменьшится на единицу.

4.69. Поскольку заведомо  $\text{rang } A_{I(\Gamma)} \leq \text{rang } A$ , то  $\dim \Gamma = n - \text{rang } A_{I(\Gamma)} \geq n - \text{rang } A$ .

4.70. Поскольку  $\Gamma \subset X$ , то  $\text{aff } \Gamma \subset \text{aff } X$ . Допустим, что  $\text{aff } \Gamma = \text{aff } X$ . Тогда  $X \subset \text{aff } X = \text{aff } \Gamma$ . Поэтому с учетом замечания после 4.54 имеем  $X \subset X \cap \text{aff } \Gamma = \Gamma$ , т. е.  $\Gamma = X$ , что противоречит условию задачи. Таким образом,  $\text{aff } \Gamma \neq \text{aff } X$ , и, значит, в силу 4.14, 4.25 получаем  $\dim \Gamma = \dim \text{aff } \Gamma < \dim \text{aff } X = \dim X$ .

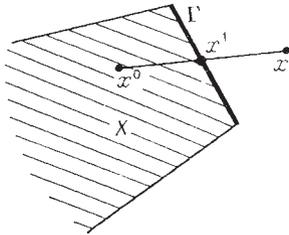


Рис. 83

4.71. Пусть  $X$  — полидр вида (4.3), а  $\Gamma$  — его собственная грань вида (4.14). Рассмотрим любые точки  $x^0 \in X \setminus \Gamma$  и  $x^1 \in \Gamma$ . Тогда  $\langle a_i, x^0 \rangle < b_i$  при некотором  $i \in I$  и в то же время  $\langle a_i, x^1 \rangle = b_i$ . Для точки  $x = x^1 + \alpha(x^0 - x^1)$ , где  $\alpha < 0$ , имеем  $\langle a_i, x \rangle > b_i$ , т. е.  $X$  не содержит прямую, проходящую через  $x^0$  и  $x^1$  (рис. 83). Следовательно,  $X$  не является аффинным множеством.

Пусть, напротив,  $X$  — неаффинное множество вида (4.3). Тогда  $I(X) \neq \{1, \dots, m\}$  и в силу 4.22 существует такая точка  $x^0 \in X$ , что  $\langle a_i, x^0 \rangle < b_i$  при всех  $i \notin I(X)$ . Кроме того,  $X \neq \text{aff } X$ , и, значит, существует точка  $x \in \text{aff } X \setminus X$ . С учетом 4.23 ясно, что на отрезке  $[x^0, x]$  найдется такая точка  $x^1 \in X$ , что  $\langle a_i, x^1 \rangle = b_i$  при некотором  $i \notin I(X)$  (рис. 83). Тогда

$$\Gamma = \{x' \in X \mid \langle a_i, x' \rangle = b_i\}$$

есть собственная грань полиэдра  $X$  ( $x^0 \notin \Gamma$ ,  $x^1 \in \Gamma$ ).

4.72. Если  $\Gamma$  — минимальная грань  $X$ , то все доказано. В противном случае  $\Gamma$  имеет собственную грань  $\Gamma'$ . При этом  $\Gamma' — грань  $X$  в силу 4.57. Далее рассуждение повторяется для  $\Gamma'$ . Эта процедура за конечное число шагов приведет к минимальной грани полиэдра  $X$ , так как любая новая грань собственно вкладывается в предыдущую, а число граней конечно (см. 4.51).$

4.73. Из а) следует б) в силу 4.57, 4.71. Используя 4.15, 4.69, из б) выводим в). Наконец, в) влечет а) благодаря 4.69, 4.70.

4.74. Минимальные грани задаются следующими системами:

$$\text{а) } x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2;$$

$$\text{б) } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \text{ и}$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2.$$

4.75. Пусть  $X$  — множество решений системы  $Ax \leq b$ ,  $\Gamma$  — минимальная грань  $X$ , существующая согласно 4.72. Положим  $I = I(\Gamma)$ . Учитывая 4.24 и замечание после 4.69, утверждения б) и в) из 4.73 можно переформулировать так:

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_I x = b_I\}, \quad \text{rang } A_I = r.$$

Отсюда ясно, что  $I$  удовлетворяет основному утверждению сформулированного принципа. Если  $|I| > r$ , то существует такое  $I' \subset I$ , что  $\text{rang } A_{I'} = r$  и  $|I'| = r$ . При этом системы  $A_{I'} x = b_{I'}$  и  $A_I x = b_I$  равносильны.

4.76. Для любой точки  $x \in X$  рассмотрим грань полиэдра  $X$  вида

$$\Gamma' = \{x' \in X \mid A_{I(x)} x' = b_{I(x)}\}.$$

Согласно 4.72, существует такая минимальная грань  $\Gamma$  этого полиэдра, что  $\Gamma \subset \Gamma'$ . Имеем  $I(x) \subset I(\Gamma') \subset I(\Gamma)$ .

4.77. Если предположить, что одновременно существует решение  $x$  системы (4.6) и решение  $p$  системы (4.7), то приходим к противоречию:

$$0 > \langle p, b \rangle = \langle p, Ax \rangle = \langle pA, x \rangle = 0. \quad (I)$$

Предположим теперь, что система (4.6) несовместна. Это означает, что вектор  $b$  не принадлежит линейному подпространству  $L$ , натянутому на столбцы матрицы  $A$ . Пусть  $L^\perp$  — подпространство, ортогональное к  $L$ . Тогда, как известно,  $L = (L^\perp)^\perp$ , т. е.

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x \rangle = 0 \text{ при всех } p \in L^\perp\}.$$

Поскольку  $b \notin L$ , то найдется такой вектор  $p \in L^\perp$  (т. е.  $pA = 0$ ), что  $\langle p, b \rangle \neq 0$ . При этом без ограничения общности можно считать, что  $\langle p, b \rangle < 0$ . Таким образом,  $p$  — решение системы (4.7).

4.78. Тот факт, что системы (4.8) и (4.9) не могут иметь решение одновременно, доказывается с помощью цепочки, аналогичной (I) из решения предыдущей задачи.

Основное утверждение теоремы о совместности хотя бы одной из систем (4.8), (4.9) докажем индукцией по числу  $n$  столбцов  $a^j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) матрицы  $A$ . Случай  $n = 1$  оставляем разобрать читателю.

Пусть  $n > 1$  и при числе столбцов матрицы  $A$ , меньшем  $n$ , утверждение уже доказано. Предположим, что система (4.9) несовместна. Тогда это тем более верно для системы (4.7). Но в таком случае совместна система (4.6). Требуется показать, что среди ее решений существует неотрицательное. Для этого достаточно указать процедуру, позволяющую по данному решению, если оно имеет отрицательные компоненты, построить новое, у которого отрицательных компонент по крайней мере на одну меньше.

Итак, пусть числа  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) таковы, что

$$\sum_{j=1}^n a^j x_j = b,$$

и без ограничения общности  $x_j \geq 0$  при  $j = 1, \dots, k$  и  $x_j < 0$  при  $j = k+1, \dots, n$  (случай  $k = 0$ , когда все  $x_j < 0$ , не исключается).

Рассмотрим вектор

$$c = \sum_{j=1}^k a^j x_j + a^n x_n = b - \sum_{j=k+1}^{n-1} a^j x_j. \quad (I)$$

Допустим, что существует вектор  $p$ , удовлетворяющий системе

$$\langle p, a^j \rangle \geq 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \langle p, c \rangle < 0. \quad (II)$$

Тогда из (I) получаем, что  $\langle p, a^n \rangle > 0$ ,  $\langle p, b \rangle < 0$ . Следовательно,  $p$  — решение системы (4.9). Но это противоречит исходному предположению. Таким образом, система (II) не имеет решения. Тогда по предположению индукции существуют такие числа  $y_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ), что

$$\sum_{j=1}^{n-1} a^j y_j = c.$$

Отсюда и из (I) следует

$$\sum_{j=1}^{n-1} a^j y_j = b - \sum_{j=k+1}^{n-1} a^j x_j,$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^k a^j y_j + \sum_{j=k+1}^{n-1} a^j (x_j + y_j) + a^n \cdot 0 = b.$$

Нужная процедура построена.

(Мы привели одно из алгебраических (финитных) доказательств теоремы 4.6, относящейся к важнейшим фактам теории линейных неравенств. Другие ее алгебраические доказательства имеются в [43, 47]. Традиционное доказательство, основанное на теории отделимости, можно найти в [39]. Хотя оно выглядит наиболее простым, однако с учетом подготовительной работы, пожалуй, проигрывает приведенному выше.)

4.79. Пусть импликация (4.10) справедлива, но система (4.11) несовместна. Тогда не будет совместной система

$$\left. \begin{array}{l} pA = c \\ \langle p, b \rangle + \lambda = d \\ p \geq 0, \lambda \geq 0 \end{array} \right\} \sim \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad p \geq 0, \lambda \geq 0.$$

Следовательно, по теореме 4.6 существует такой вектор  $(x, \gamma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , что

$$\left. \begin{array}{l} (x, \gamma) \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \\ \langle (x, \gamma), (c, d) \rangle < 0 \end{array} \right\} \sim \begin{cases} Ax + \gamma b \geq 0, \\ \gamma \geq 0, \\ \langle c, x \rangle + \gamma d < 0. \end{cases}$$

Возможны два случая.

1)  $\gamma > 0$ . Тогда для точки  $\bar{x} = -x/\gamma$  имеем  $A\bar{x} \leq b$ ,  $\langle c, \bar{x} \rangle > d$ . Но это противоречит (4.10).

2)  $\gamma = 0$ . Тогда  $Ax \geq 0$ ,  $\langle c, x \rangle < 0$ . По условию существует такая точка  $x^*$ , что  $Ax^* \leq b$ . Положим  $x^\alpha = x^* - \alpha x$ . Для любого  $\alpha \geq 0$  имеем  $Ax^\alpha \leq b$ . В то же время  $\langle c, x^\alpha \rangle \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Но это также противоречит (4.10).

В одну сторону теорема доказана. Пусть теперь система (4.11) имеет решение  $p$ , а точка  $x$  такова, что  $Ax \leq b$ . Тогда

$$\langle c, x \rangle = \langle pA, x \rangle = \langle p, Ax \rangle \leq \langle p, b \rangle \leq d,$$

т. е. импликация (4.10) справедлива.

4.80. Из рис. 84 (где, как обычно,  $a^1, \dots, a^4$  — вектор-столбцы матрицы системы,  $b$  — вектор ее правых частей) ясно, что система имеет решение в том и только том случае, если вектор  $a^1$  находится в заштрихованной области, исключая его левое крайнее положение. Отсюда легко получается ответ:  $-3 < k \leq 1$ .

4.81. Рассмотрим эту систему как систему типа (4.11). Тогда согласно теореме 4.7 она имеет решение в том и только том слу-

чае, если справедлива импликация

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 1 \\ -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{array} \right\} \rightarrow x_1 + x_2 \leq 3,$$

причем система, стоящая здесь слева, должна быть совместной. Но оба этих факта очевидны из рис. 85, где заштриховано множество решений левой системы.

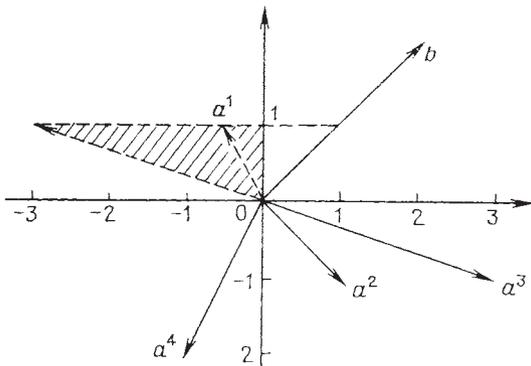


Рис. 84

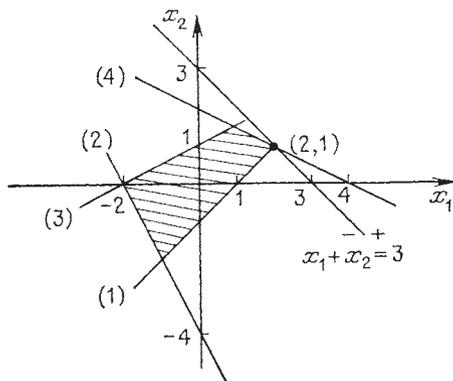


Рис. 85

4.82. Пусть  $x$  и  $p$  — решения систем (4.15), (4.11). Тогда

$$\langle p, b \rangle \geq \langle p, Ax \rangle = \langle pA, x \rangle = \langle c, x \rangle = d.$$

Следовательно,  $\langle p, b \rangle = d$ . Если предположить, что  $p_i > 0$ ,  $\langle a_i, x \rangle < b_i$  при некотором  $i$ , то в выписанной цепочке неравенство будет строгим, что невозможно.

4.83. Из рис. 85 видно, что точка  $(2, 1)$  является решением системы типа (4.15), причем второе и третье неравенства в этой точке выполняются как строгие. Тогда, согласно 4.82, любое решение исходной системы имеет вид  $(p_1, 0, 0, p_4)$ . После этого уже однозначно находятся  $p_1 = 1/3$  и  $p_2 = 2/3$ .

4.84. Это фактически известно из курса линейной алгебры утверждение можно доказать на основе теоремы 4.5 точно так же, как из теоремы 4.6 была выведена теорема 4.7 (см. 4.79).

4.85. Применить теорему 4.7 к каждой из импликаций

$$\begin{aligned} Ax \leq b &\rightarrow \langle c, x \rangle \leq d, \\ Ax \leq b &\rightarrow \langle -c, x \rangle \leq -d \end{aligned}$$

и учесть 4.82.

4.86. Пусть система  $Ax \leq b$  несовместна. Тогда, очевидно, справедлива импликация

$$Ax - \lambda b \leq 0 \rightarrow \lambda \leq 0.$$

В силу теоремы 4.7 существует такой вектор  $p$ , что

$$pA = 0, \quad \langle p, -b \rangle = 1, \quad p \geq 0.$$

4.87. Рассматриваемая импликация равносильна тому, что система

$$Ax \leq b, \quad \langle -c, x \rangle \leq -d$$

не имеет решения. Тогда в силу 4.86 существует такой вектор  $(p, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ , что

$$pA - \lambda c = 0, \quad \langle p, b \rangle - \lambda d < 0, \quad p \geq 0, \quad \lambda \geq 0.$$

Случай  $\lambda = 0$  невозможен, так как он противоречит совместности системы  $Ax \leq b$  (см. 4.86). Поэтому  $\lambda > 0$ . Тогда  $\bar{p} = \frac{1}{\lambda} p$  — решение указанной системы.

В обратную сторону утверждение очевидно.

4.88. Из теоремы 4.7 и условий задачи следует, что совместна система (4.11), т. е.

$$\sum_{i=1}^m p_i a_i = c, \quad \sum_{i=1}^m p_i b_i \leq d, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

С учетом той же теоремы 4.7 требуется показать, что существует множество  $I \subset \{1, \dots, m\}$ , при котором векторы  $a_i$  ( $i \in I$ ) линейно независимы и совместна система

$$\sum_{i \in I} p_i a_i = c, \quad \sum_{i \in I} p_i b_i \leq d, \quad p_i \geq 0, \quad i \in I. \quad (I)$$

В свою очередь, для этого достаточно убедиться в следующем: если при данном множестве  $I$  система (I) совместна, но векторы  $a_i$  ( $i \in I$ ) линейно зависимы, то существует такое его собственное подмножество  $I'$ , что система (I) при замене  $I$  на  $I'$  также совместна.

Итак, пусть  $p = (p_i)$  — решение системы (I). Если векторы  $a_i$  ( $i \in I$ ) линейно зависимы, то найдутся числа  $\lambda_i$  ( $i \in I$ ), не рав-

ные нулю одновременно и такие, что

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0, \quad (\text{II})$$

Случай  $\sum_{i \in I} \lambda_i b_i = 0$  лишь упрощает дальнейшие рассуждения.

Пусть  $\sum_{i \in I} \lambda_i b_i \neq 0$ . Тогда без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{i \in I} \lambda_i b_i < 0. \quad (\text{III})$$

Из условия задачи следует, что система  $\langle a_i, x \rangle \leq b_i$  ( $i \in I$ ) имеет решение. Тогда в силу 4.86 соотношения (II), (III) несовместимы с тем, что  $\lambda_i \geq 0$  при всех  $i \in I$ . Поэтому  $\lambda_i < 0$  хотя бы для одного  $i \in I$ . Из (II), (III) заключаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} (p_i + \alpha \lambda_i) a_i &= c \text{ при всех } \alpha \in \mathbb{R}, \\ \sum_{i \in I} (p_i + \alpha \lambda_i) b_i &\leq d \text{ при всех } \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

Выберем максимальное  $\alpha \geq 0$  такое, что  $p_i + \alpha \lambda_i \geq 0$  ( $i \in I$ ). Ясно, что  $\alpha < \infty$  и  $p_k + \alpha \lambda_k = 0$  при некотором  $k \in I$ . Следовательно, множество  $I' = I \setminus \{k\}$  удовлетворяет нужному требованию. Основное утверждение теоремы доказано. Дополнительное утверждение очевидно, поскольку если векторы  $a_i$  ( $i \in I$ ) линейно независимы, то всегда можно найти такое множество  $I' \subset \{1, \dots, m\}$ , что  $I \subset I'$ ,  $|I'| = \text{rang } A$  и векторы  $a_i$  ( $i \in I'$ ) линейно независимы. При этом выполняется тривиальная импликация

$$A_{I'} x \leq b_{I'} \rightarrow A_I x \leq b_I.$$

4.89. Проходит та же схема доказательства. Необходимо лишь вместо теоремы 4.7 использовать 4.87.

4.90. При этих условиях в 4.88 возможен только случай  $I = \{1, \dots, m\}$ .

4.91. Пусть система  $Ax \leq b$  неприводимо несовместна. Поскольку она просто несовместна, то, согласно 4.86, существует решение  $p$  системы (4.16). Если предположить, что  $p_i = 0$  при некотором  $i \in \{1, \dots, m\}$ , то опять же в силу 4.86 получим, что несовместна система  $A_I x \leq b_I$ , где  $I = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ . Но это противоречит определению неприводимо несовместной системы. Таким образом,  $p_i > 0$ , т. е. система (4.17) совместна. Далее, условие неприводимой несовместности системы  $Ax \leq b$  можно выразить также в следующей форме: при любом  $i = 1, \dots, m$  неравенство  $\langle a_i, x \rangle > b_i$  следует из системы  $A_I x \leq b_I$ , где  $I = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ , и не следует из любой ее собственной подсистемы. Тогда  $\text{rang } A_I = m - 1$  в силу 4.90. В одну сторону теорема доказана. Простое доказательство обратного утверждения оставляем читателю.

4.92. Пусть система  $Ax \leq b$  несовместна. В частности, это означает, что несовместна система  $Ax = b$ . Следовательно, по теореме Кронекера — Капелли  $\text{rang}(A, b) = r + 1$ . Применяя 4.88 к импликации из решения задачи 4.86, находим такое множество

$I \subset \{1, \dots, m\}$ , что  $|I| = r + 1$ ,  $\text{rang}(A_I, b_I) = r + 1$  и справедлива импликация

$$A_I x - \lambda b_I \leq 0 \rightarrow \lambda \leq 0,$$

т. е. система  $A_I x \leq b_I$  несовместна. Поскольку система  $A_I x = b_I$  тем более несовместна, то  $\text{rang} A_I = \text{rang}(A_I, b_I) - 1 = r$ .

В другую сторону утверждение тривиально.

4.93. Переписать систему (4.18) в виде

$$\begin{aligned} A_{11}x^1 + A_{12}x^2 &\leq b^1, \\ A_{21}x^1 + A_{22}x^2 &\leq b^2, \\ -A_{21}x^1 - A_{22}x^2 &\leq -b^2, \\ -Ex^1 &\leq 0 \end{aligned}$$

и применить 4.86.

4.94. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle p^1 A_{11} + p^2 A_{21}, x^1 \rangle + \langle p^1 A_{12} + p^2 A_{22}, x^2 \rangle = \\ &= \langle p^1, A_{11}x^1 + A_{12}x^2 \rangle + \langle p^2, A_{21}x^1 + A_{22}x^2 \rangle \leq \\ &\leq \langle p^1, b^1 \rangle + \langle p^2, b^2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Это возможно лишь в том случае, если два фигурирующих здесь неравенства выполняются как равенства, т. е.

$$0 = \langle p^1 A_{11} + p^2 A_{21}, x^1 \rangle = \sum_{j=1}^{n_1} (p^1 A_{11} + p^2 A_{21})_j x_j^1,$$

$$0 = \langle p^1, A_{11}x^1 + A_{12}x^2 - b^1 \rangle = \sum_{i=1}^{m_1} p_i^1 (A_{11}x^1 + A_{12}x^2 - b^1)_i.$$

В первой из этих сумм все слагаемые неотрицательны, во второй — неположительны. Отсюда приходим к (4.20), (4.21).

4.95. Применить теорему 4.7, переписав систему (4.18), как в указании к 4.93.

4.96. Допустим, что первая система несовместна. Тогда при любом фиксированном  $c > 0$  справедлива импликация

$$Ax + \lambda c \leq b \rightarrow \lambda \leq 0.$$

Система, стоящая здесь слева, имеет решение; им является пара  $(x, \lambda)$ , где  $x$  — любой вектор, а  $\lambda$  — достаточно большое по модулю отрицательное число. Применяя теорему 4.7, получаем, что существует вектор  $p$ , для которого

$$pA = 0, \quad \langle p, c \rangle = 1, \quad \langle p, b \rangle \leq 0, \quad p \geq 0,$$

т. е.  $p$  — решение второй из указанных систем.

Тот факт, что системы не имеют решений одновременно, легко доказывается от противного.

4.97. При любом  $c > 0$  применить 4.95 к импликации

$$\left. \begin{aligned} A_1 x &\leq b^1, \\ A_2 x &= b^2, \\ A_3 x + \lambda c &\leq b^3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lambda \geq 0.$$

4.98. Перепишем вторую из указанных систем в виде

$$-A^T p = 0, \quad \langle b, p \rangle \leq 0, \quad -E p < 0.$$

Допустим, что эта система несовместна. Тогда, согласно 4.97, существует такой вектор  $(x, \lambda, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ , что

$$-x A^T + \lambda b - u E = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad u \geq 0.$$

Запишем эти соотношения несколько иначе:

$$A x \leq \lambda b, \quad \lambda \geq 0.$$

Возможны два случая.

1)  $\lambda > 0$ . Тогда  $A(x/\lambda) \leq b$ .

2)  $\lambda = 0$ . Пусть  $x^*$  — любое решение системы  $Ax \leq b$ . Тогда  $A(x + x^*) \leq b$ .

Итак, во всяком случае система  $Ax \leq b$  совместна.

4.99. Соответствующим образом дополнить схему решения задачи 4.98.

4.100. Все утверждения являются частными случаями предыдущих результатов. Например, а) следует из 4.96 при  $b = 0$  и замене  $A$  на  $-A^T$ .

4.101. а) Пусть утверждение неверно, т. е. система

$$\begin{aligned} Ax &= 0, \\ -x &\leq 0, \\ -A^T p &\leq 0, \\ -x - A^T p &< 0 \end{aligned}$$

не имеет решения. Тогда, согласно 4.97, найдется такой вектор  $(q, r, s, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , что

$$\begin{aligned} qA - r &\quad -t = 0, \\ -sA^T - tA^T &= 0, \\ r \geq 0, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $t \leq qA$ ,  $A(s + t) = 0$ . Поэтому

$$\langle t, t \rangle \leq \langle t, s + t \rangle \leq \langle qA, s + t \rangle = \langle q, A(s + t) \rangle = 0,$$

т. е.  $t = 0$ . Но это противоречит условию  $t \geq 0$ .

б) Применить утверждение а) к матрице  $(A, E)$ , где  $E$  — единичная матрица размера  $m \times m$ .

4.102. Первое утверждение — иначе сформулированная теорема Гордана из 4.100. В самом деле, пусть  $A \in \mathcal{A}(m, n)$  — матрица, строки которой образуют базис в  $L$ . Тогда

$$\begin{aligned} L &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = pA, \quad p \in \mathbb{R}^m\}, \\ L^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}. \end{aligned}$$

При этом первая из альтернатив равносильна совместности системы  $pA > 0$ , а вторая — системы  $Ax = 0$ ,  $x \geq 0$ . Второе утверждение есть следствие утверждения а) из 4.101.

4.103. Применить утверждение б) задачи 4.101, приведя указанные системы к соответствующему виду.

4.104. Рассмотрим следующую систему типа (4.22):

$$\begin{aligned} A_{11}x^1 + A_{12}x^2 - \lambda b^1 &\leq 0, \\ A_{21}x^1 + A_{22}x^2 - \lambda b^2 &= 0, \\ x^1 &\geq 0, \quad \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Соответствующая система типа (4.23) имеет вид

$$\begin{aligned} p^1 A_{11} + p^2 A_{21} &\geq 0, \\ p^1 A_{12} + p^2 A_{22} &= 0, \\ \langle p^1, b^1 \rangle + \langle p^2, b^2 \rangle &\leq 0, \quad p^1 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Поскольку система (4.18) совместна, то, согласно 4.93, любое решение системы (II) обращает неравенство  $\langle p^1, b^1 \rangle + \langle p^2, b^2 \rangle \leq 0$  в равенство. Тогда в силу 4.103 системы (I) и (II) имеют такие решения  $(x^1, x^2, \lambda)$  и  $(p^1, p^2)$ , что  $\lambda > 0$  и

$$\begin{aligned} p^1 + (\lambda b^1 - A_{11}x^1 - A_{12}x^2) &> 0, \\ x^1 + (p^1 A_{11} + p^2 A_{21}) &> 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lambda^{-1}(x^1, x^2)$  и  $\lambda^{-1}(p^1, p^2)$  — решения систем (4.18), (4.19), удовлетворяющие условиям (4.24), (4.25).

4.105. Данное утверждение — частный случай предыдущего.

4.106. Конкретизировать 4.94, 4.104.

4.107. а) При любом  $x \in \mathbb{R}^n$  имеем

$$-\langle Ax, x \rangle = \langle A^T x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle.$$

Следовательно,  $\langle Ax, x \rangle = 0$ .

б) Применяя утверждение б) задачи 4.101 к матрице  $-A$ , получаем, что существуют векторы  $q$  и  $p$ , для которых

$$\begin{aligned} Aq \geq 0, \quad q \geq 0, \quad -pA = Ap \geq 0, \quad p \geq 0, \\ p + Aq > 0, \quad q + Ap > 0. \end{aligned}$$

Положим  $x = p + q$ . Тогда  $Ax \geq 0$ ,  $x \geq 0$  и  $Ax + x > 0$ .

4.108. Применить теорему Вилля из 4.100.

4.109. Указанное условие относительно системы (4.27) равносильно совокупности следующих двух:

1) система  $Ah = 0$  имеет лишь решение  $h = 0$ ,

2) система  $A_I h \leq 0$ ,  $A_J h = 0$ , где  $I = \{1, \dots, k\}$ ,  $J = \{k + 1, \dots, m\}$  не имеет решения.

Но 1) — это иная запись условия  $\text{rang } A = n$ . В то же время, согласно 4.99, условие 2) эквивалентно совместности системы (4.28).

4.110. Утверждение непосредственно следует из 4.4, 4.109.

4.111, 4.112. Применить 4.110, учитывая, что для данных полиэдров  $\text{rang}$  матрицы системы равен  $n$ .

4.113. Утверждение непосредственно следует из 4.6, 4.109.

4.114. Положим  $I = \{1, \dots, n\} \setminus J$ . Пусть  $e_i$  обозначает  $i$ -й единичный орт в  $\mathbb{R}^n$ ,  $E_I$  — матрицу со строками  $e_i$  ( $i \in I$ ). Согласно 4.113, точка  $x^*$  является единственным элементом  $X$  в том и только том случае, если

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A \\ E_I \end{pmatrix} = n \quad (\text{I})$$

и существуют такие вектор  $p \in \mathbb{R}^m$  и числа  $q_i > 0$  ( $i \in I$ ), что

$$pA - \sum_{i \in I} q_i e_i = 0. \quad (\text{II})$$

Но, как уже было показано (см. решения задач 4.33, 4.38), формула (I) равносильна формуле  $\text{rang } A^J = |J|$ . В то же время (II) можно переписать в виде

$$\langle p, a^j \rangle = \begin{cases} 0, & j \in J, \\ q_j > 0, & j \in I. \end{cases}$$

4.115. Пусть  $X$  ограничен. Тогда при любом  $c \in \mathbb{R}^n$  величина  $d = \sup_X \langle c, x \rangle$  конечна. Применяя теорему 4.7, получаем, что система (4.29) совместна.

Пусть теперь  $X$  неограничен. Тогда, согласно 4.4, существует такой вектор  $h \neq 0$ , что  $Ah \leq 0$ . Ясно, что при  $c = h$  система (4.29) несовместна.

4.116. Пусть  $e^j$  есть  $j$ -й единичный орт в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда условие  $X \subset \mathbb{R}_+^n$  равносильно тому, что для любого  $j = 1, \dots, n$  справедлива импликация

$$Ax \leq b \rightarrow \langle -e^j, x \rangle \leq 0.$$

Согласно теореме 4.7, последнее имеет место в том и только том случае, если для любого  $j = 1, \dots, n$  существует такой вектор  $p^j \in \mathbb{R}^m$ , что

$$p^j A = -e^j, \quad \langle p^j, b \rangle \leq 0, \quad p^j \geq 0.$$

Таким образом, в качестве  $P$  можно взять матрицу со строками  $p^j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

4.117. Ограниченность  $X$  равносильна следующему: для любого  $j = 1, \dots, n$  существуют такие числа  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  ( $\alpha_j \leq \beta_j$ ), что справедливы импликации

$$Ax \leq b \rightarrow \langle -e^j, x \rangle \leq -\alpha_j,$$

$$Ax \leq b \rightarrow \langle e^j, x \rangle \leq \beta_j.$$

Применяя теорему 4.7, получаем сформулированный критерий ограниченности  $X$ . Далее, если матрицы  $P$  и  $Q$  обладают указанными свойствами, то при любом  $x \in X$  имеем

$$(P + Q)b \geq (P + Q)Ax = -x + x = 0.$$

4.118. Рассмотреть выше случай  $\alpha_j = \beta_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

4.119. Допустим, что утверждение неверно. Тогда, согласно теореме 4.6, имеет решение  $h \in \mathbb{R}^n$  система

$$\langle a_i, h \rangle \leq 0, \quad i \in I(x^*), \quad (\text{I})$$

$$\langle x - x^*, h \rangle > 0. \quad (\text{II})$$

Из (I) очевидно, что  $x^* + \alpha h \in X$  при всех достаточно малых  $\alpha > 0$ . Используя (II), для достаточно малого  $\alpha > 0$  получаем

$$\begin{aligned} \|x^* + \alpha h - x\|^2 &= \|x^* - x\|^2 + 2\alpha \langle x^* - x, h \rangle + \alpha^2 \|h\|^2 = \\ &= \|x^* - x\|^2 + \alpha(-2\langle x - x^*, h \rangle + \alpha \|h\|^2) < \|x^* - x\|^2, \end{aligned}$$

т. е. точка  $x^* + \alpha h \in X$  находится на более близком расстоянии от  $x$ , чем  $x^*$ . Но это противоречит предположению, что  $x^*$  — проекция  $x$  на  $X$ .

4.120. Пусть утверждение неверно. Тогда для любого  $k = 1, 2, \dots$ , найдется такой вектор  $p^k = (p_i^k) \geq 0$ , что

$$\langle a_i, p^k A \rangle < \frac{1}{k} \|p^k A\|, \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{I})$$

При этом всегда можно добиться того, что  $\sum_{i=1}^m p_i^k = 1$ . Без ограничения общности будем считать, что  $p^k \rightarrow p \geq 0$ . Умножая  $i$ -е неравенство в (I) на  $p_i^k$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и складывая, получаем

$$\left\langle \sum_{i=1}^m p_i^k a_i, p^k A \right\rangle = \|p^k A\|^2 < \frac{1}{k} \|p^k A\|.$$

Следовательно,  $\|p^k A\| < 1/k$ . Отсюда предельным переходом выводится, что  $\|pA\| = 0$ . Но это противоречит условию задачи.

4.121. Рассмотрим любое такое множество номеров  $I \subset \{1, \dots, m\}$ , что векторы  $a_i$  ( $i \in I$ ) линейно независимы. Матрица  $A_I$  заведомо удовлетворяет условию задачи 4.120. Поэтому найдется такое число  $\alpha_I > 0$ , что

$$\max_{i \in I} \left\langle a_i, \sum_{j \in I} p_j a_j \right\rangle \geq \alpha_I \left\| \sum_{j \in I} p_j a_j \right\| \quad (\text{I})$$

при всех  $p_j \geq 0$  ( $j \in I$ ). Покажем, что нужным свойством обладает число  $\alpha = \min_I \alpha_I > 0$ , где минимум берется по всем указанным  $I$ .

Рассмотрим любую точку  $x \in X$ . Пусть  $x^*$  — ее проекция на  $X$ , т. е.  $\rho(x, X) = \|x - x^*\|$ . Согласно 4.119, существуют такие числа  $p_i \geq 0$  ( $i \in I(x^*)$ ), что

$$x - x^* = \sum_{i \in I(x^*)} p_i a_i.$$

С учетом 4.40 выберем такое множество  $I \subset I(x^*)$ , что векторы  $a_i$  ( $i \in I$ ) линейно независимы и

$$x - x^* = \sum_{i \in I} q_i a_i \quad (\text{II})$$

при некоторых  $q_i \geq 0$  ( $i \in I$ ). Тогда, используя (I) и (II), получаем

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq m} (\langle a_i, x \rangle - b_i) &\geq \max_{i \in I} (\langle a_i, x \rangle - b_i) = \\ &= \max_{i \in I} \langle a_i, x - x^* \rangle = \max_{i \in I} \left\langle a_i, \sum_{j \in I} q_j a_j \right\rangle \geq \\ &\geq \alpha \left\| \sum_{j \in I} q_j a_j \right\| = \alpha \|x - x^*\| = \alpha \rho(x, X). \end{aligned}$$

Остается заметить, что  $\alpha$  зависит только от матрицы  $A$ .

4.122. Для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \max(0, \langle a_i, x \rangle - b_i) &\geq \max_{1 \leq i \leq m} (\langle a_i, x \rangle - b_i), \\ \|Ax - b\| &\geq \max_{1 \leq i \leq m} (\langle a_i, x \rangle - b_i). \end{aligned}$$

4.123. Представить каждое равенство в (4.3) как два неравенства и применить 4.122.

4.126. Пусть утверждение а) справедливо, а б) нет, т. е. существует ненулевое решение  $p$  системы (4.32). Для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  рассмотрим вектор  $b^s = b - \varepsilon p$ . Если допустить, что существует  $x \in X(A, b^s)$ , то приходим к противоречию:

$$0 = \langle pA, x \rangle = \langle p, Ax \rangle \leq \langle p, b^s \rangle \leq -\varepsilon \|p\|^2 < 0.$$

Таким образом,  $X(A, b^s) = \emptyset$ . Но это противоречит а). Итак, из а) следует б).

Пусть, напротив, б) справедливо. Если а) неверно, то найдутся такие последовательности  $\{A^s\}$  и  $\{b^s\}$ , что  $A^s \rightarrow A$ ,  $b^s \rightarrow b$  и  $X(A^s, b^s) = \emptyset$  при любом  $s$ . Тогда, согласно 4.93, существует такой вектор  $p^s$ , что

$$p^s A^s = 0, \quad \langle p^s, b^s \rangle < 0, \quad p_i^s \geq 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (I)$$

При этом можно считать, что  $\|p^s\| = 1$ . Без ограничения общности предположим, что  $p^s \rightarrow p \neq 0$ . Переходя к пределу в (I), получаем, что  $p$  — решение системы (4.32). Противоречие. Поэтому из б) следует а).

Пусть по-прежнему б) справедливо. Отсюда, в частности, следует, что  $X(A, b) \neq \emptyset$  (см. 4.93). Тогда система (4.33) совместна, так как в противном случае, согласно 4.97, система (4.32) имеет такое решение  $p$ , что  $p_i > 0$  при некотором  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Предположим, что векторы  $a_i$  ( $i = k+1, \dots, m$ ) линейно зависимы, т. е.

$$\sum_{i=k+1}^m p_i a_i = 0 \quad \text{при некоторых числах } p_i \quad (i = k+1, \dots, m),$$

не равных нулю одновременно. Тогда для любого  $x \in X(A, b)$  имеем

$$\sum_{i=k+1}^m p_i b_i = \sum_{i=k+1}^m p_i \langle a_i, x \rangle = \left\langle \sum_{i=k+1}^m p_i a_i, x \right\rangle = 0.$$

Следовательно, вектор  $p = (0, \dots, 0, p_{k+1}, \dots, p_m)$  является нетривиальным решением системы (4.32), что невозможно. Итак, из б) следует в). Обратное доказывается еще проще.

4.127. Если система (4.31) неустойчива, то система (4.32) имеет нетривиальное решение. Тогда, как показано выше, система (4.31) неустойчива по правой части ограничений.

4.128. Пусть  $p$  — некоторое решение системы (4.32). Требуется показать, что  $p = 0$ . Предположим, что  $p_i > 0$  при каком-либо  $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I(x^*)$ . Тогда приходим к противоречию:

$$0 = \langle pA, x^* \rangle = \langle p, Ax^* \rangle < \langle p, b \rangle \leq 0.$$

Следовательно,  $p_i = 0$  при всех  $i \notin I(x^*)$ . Но тогда

$$0 = pA = \sum_{i \in I(x^*)} p_i a_i.$$

Отсюда в силу линейной независимости векторов  $a_i$  ( $i \in I(x^*)$ ) получаем, что  $p_i = 0$  при всех  $i \in I(x^*)$ .

Примером служит третья система из 4.124.

4.130. При любом фиксированном  $r = 1, 2, \dots$  присоединим к устойчивой системе (4.31) неравенства

$$x_j^0 - 1/r \leq x_j \leq x_j^0 + 1/r, \quad j = 1, \dots, n. \quad (I)$$

В точке  $x^0$  все они выполняются как строгие. Тогда из 4.126 следует, что система (4.31), (I) также устойчива. Значит, найдется такой номер  $s_r$ , что для любого  $s \geq s_r$  существует точка  $x^s$ , удовлетворяющая условиям

$$x^s \in X(A^s, b^s), \quad |x_j^s - x_j^0| \leq 1/r, \quad j = 1, \dots, n. \quad (II)$$

При этом можно считать, что  $s_r < s_{r+1}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ). Теперь для любого  $s \geq s_1$  выберем  $x^s$  из (II), где номер  $r$  таков, что  $s_r \leq s < s_{r+1}$ . Ясно, что  $x^s \rightarrow x^0$ .

4.131. См. рис. 86, где

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 0, \quad x_2 \geq 0\},$$

$$X_s = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{s} x_1 + x_2 \leq 0, \quad x_2 \geq 0\right\}, \quad s = 1, 2, \dots$$

4.132. В силу 4.110 ограниченность полиэдра  $X(A, b)$  равносильна тому, что система

$$pA = 0, \quad p_i > 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

совместна и  $\text{rang } A = n$ . Тогда, согласно 4.125, 4.126, при любой матрице  $A'$ , достаточно близкой к  $A$ , система

$$pA' = 0, \quad p_i > 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

также совместна и  $\text{rang } A' = n$ . Следовательно, если при такой матрице  $A'$  и произвольно взятом  $b'$  полиэдр  $X(A', b')$  непуст, то он ограничен.

4.133. Пусть  $\{x^s\}$  неограничена. Положим  $h^s = \|x^s\|^{-1} x^s$ . Без ограничения общности будем считать, что  $h^s \rightarrow h \neq 0$ . Условие  $x^s \in X(A^s, b^s)$  можно переписать в виде  $h^s \in X(A^s, \|x^s\|^{-1} b^s)$ . Переходя здесь к пределу (см. 4.129), получаем, что  $h \in X(A, 0)$ . Но это противоречит 4.4.

4.134. Пусть последовательность  $\{b^s\}$  такова, что  $X(A, b^s) \neq \emptyset$  и  $b^s \rightarrow b$ . Предположим, что  $X(A, b) = \emptyset$ . Тогда, согласно 4.93,

имеет решение  $\bar{p}$  система

$$pA = 0, \quad \langle p, b \rangle < 0, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (I)$$

Для достаточно большого  $s$  следует  $\langle \bar{p}, b^s \rangle < 0$ , т. е.  $\bar{p}$  является также решением системы (I) при замене  $b$  на  $b^s$ . Но тогда, вновь используя 4.93, получаем, что  $X(A, b^s) = \emptyset$ . Противоречие.

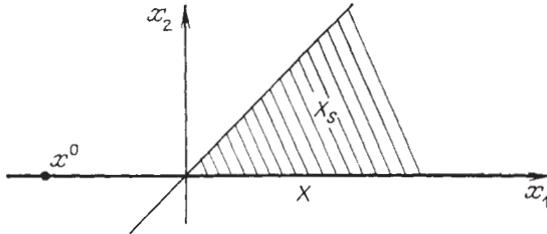


Рис. 86

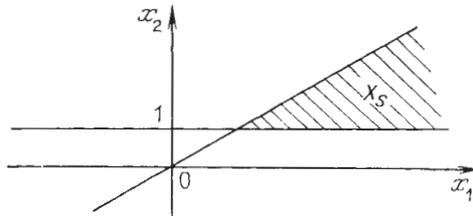


Рис. 87

4.135. См. рис. 87, где

$$X_s = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{s}x_1 + x_2 \leq 0, \quad x_2 \geq 1 \right\}, \quad s = 1, 2, \dots$$

4.136. Согласно теореме Хоффмана в форме 4.123, существует такое число  $\alpha = \alpha(A) > 0$ , что при любом  $x \in X(b')$

$$\begin{aligned} \alpha \rho(x, X(b)) &\leq \sum_{i=1}^k \max(0, \langle a_i, x \rangle - b_i) + \sum_{i=k+1}^m |\langle a_i, x \rangle - b_i| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \max(0, b'_i - b_i) + \sum_{i=k+1}^m |b'_i - b_i| \leq \sum_{i=1}^m |b'_i - b_i| \leq \\ &\leq \sqrt{m} \sqrt{\sum_{i=1}^m (b'_i - b_i)^2} = \sqrt{m} \|b' - b\|, \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из неравенства Коши — Буняковского. Таким образом,

$$\sup_{x \in X(b')} \rho(x, X(b)) \leq \frac{\sqrt{m}}{\alpha} \|b' - b\|.$$

Аналогично получаем, что

$$\sup_{x \in X(b)} \rho(x, X(b')) \leq \frac{\sqrt{m}}{\alpha} \|b - b'\|.$$

Следовательно, можно положить  $L = \sqrt{m}/\alpha$ .  
 4.137. Рассмотреть в 4.136 случай  $b' = 0$ .

## § 5

5.1. Пусть  $x^*$  — локальное, но не глобальное решение задачи (5.1). Тогда найдется такая точка  $x$ , что  $Ax \leq b$ ,  $\langle c, x \rangle > \langle c, x^* \rangle$ . Введем точку  $x^\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)x^*$ . Для любого  $\lambda \in (0, 1]$  имеем

$$Ax^\lambda = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ax^* \leq \lambda b + (1 - \lambda)b = b,$$

$$\langle c, x^\lambda \rangle = \lambda \langle c, x \rangle + (1 - \lambda) \langle c, x^* \rangle > \langle c, x^* \rangle.$$

При этом  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} x^\lambda = x^*$ . Следовательно,  $x^*$  не является локальным решением задачи. Противоречие.

### 5.2. Основная форма:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 5x_3 &\rightarrow \max, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 4, \\ -4x_1 - 3x_2 - x_3 &\leq -4, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 &\leq -2, \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 5, \\ -x_1 &\leq 0, \\ -x_2 &\leq 0; \end{aligned}$$

стандартная форма:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 5u_3 + 5v_3 &\rightarrow \max, \\ 4x_1 + 3x_2 + u_3 - v_3 &\leq 4, \\ -4x_1 - 3x_2 - u_3 + v_3 &\leq -4, \\ x_1 - 6x_2 + u_3 - v_3 &\leq -2, \\ 7x_1 - x_2 + 2u_3 - 2v_3 &\leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, u_3 \geq 0, v_3 \geq 0; \end{aligned} \tag{I}$$

каноническая форма:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 5u_3 + 5v_3 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 &\rightarrow \max, \\ 4x_1 + 3x_2 + u_3 - v_3 &= 4, \\ -x_1 + 6x_2 - u_3 + v_3 - w_2 &= 2, \\ 7x_1 - x_2 + 2u_3 - 2v_3 + w_3 &= 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, u_3 \geq 0, v_3 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{II}$$

В (I), (II) сделана замена переменной  $x_3 = u_3 - v_3$ ,  $u_3 \geq 0$ ,  $v_3 \geq 0$ , а в (II), кроме того, введены переменные  $w_2 \geq 0$ ,  $w_3 \geq 0$  для приведения неравенств к равенствам.

5.3. Вводя дополнительную переменную  $x_5 \geq 0$ , запишем первое ограничение в виде равенства

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5.$$

Выразим из этого и второго ограничения переменные  $x_1$  и  $x_2$ , не связанные условием неотрицательности:

$$x_1 = 5x_3 + x_4 - 3x_5 + 3,$$

$$x_2 = -8x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 2.$$

Подставляя данные выражения в целевую функцию и в третье ограничение, приходим к задаче

$$-36x_3 - 12x_4 + 19x_5 \rightarrow \max,$$

$$4x_3 + 5x_4 - x_5 = -2,$$

$$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0,$$

5.4. С учетом сказанного в п. 1 теорему достаточно доказать, например, для канонической задачи ЛП (5.5). Итак, пусть ее допустимое множество  $X$  непусто и  $f^* = \sup_X \langle c, x \rangle < \infty$ . Предполо-

жим, что утверждение теоремы неверно, т. е. система

$$Ax = b,$$

$$\langle c, x \rangle = f^*, \quad x \geq 0$$

не имеет решения. Тогда по лемме Минковского — Фаркаша (теорема 4.6) найдется такой вектор  $(p, \lambda) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$ , что

$$pA + \lambda c \geq 0, \quad \langle p, b \rangle + \lambda f^* < 0.$$

Отсюда для любого  $x \in X$  получаем

$$\langle \lambda c, x \rangle \geq \langle -pA, x \rangle = -\langle p, Ax \rangle = -\langle p, b \rangle > \lambda f^*.$$

Следовательно,

$$\inf_X \langle \lambda c, x \rangle > \lambda f^* = \lambda \sup_X \langle c, x \rangle.$$

Очевидно, однако, что ни один из случаев  $\lambda = 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\lambda < 0$  здесь невозможен.

5.5. Пусть  $x^*$  — решение задачи (5.1), но не существует чисел  $y_i^* \geq 0$  ( $i \in I(x^*)$ ), удовлетворяющих системе (5.20). Тогда по лемме Минковского — Фаркаша найдется такой вектор  $h \in \mathbf{R}^n$ , что

$$\langle a_i, h \rangle \leq 0, \quad i \in I(x^*),$$

$$\langle c, h \rangle > 0.$$

Отсюда для любого  $i \in I(x^*)$  и всех  $\alpha \geq 0$  следует

$$\langle a_i, x^* + \alpha h \rangle = b_i + \alpha \langle a_i, h \rangle \leq b_i.$$

Для любого  $i \in \{1, \dots, m\} \setminus I(x^*)$  и всех достаточно малых  $\alpha > 0$  имеем

$$\langle a_i, x^* + \alpha h \rangle = \langle a_i, x^* \rangle + \alpha \langle a_i, h \rangle < b_i,$$

поскольку  $\langle a_i, x^* \rangle < b_i$ . Таким образом, для всех достаточно малых  $\alpha > 0$  точка  $x^* + \alpha h$  допустима в задаче (5.1). В то же время

$$\langle c, x^* + \alpha h \rangle = \langle c, x^* \rangle + \alpha \langle c, h \rangle > \langle c, x^* \rangle,$$

но это противоречит тому, что  $x^*$  — решение задачи (5.1). В одну сторону теорема доказана.

Пусть, напротив, существуют неотрицательные числа  $y_i^*$  ( $i \in I(x^*)$ ), удовлетворяющие системе (5.20). Тогда для любой допустимой точки  $x$  задачи (5.1) имеем

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &= \sum_{i \in I(x^*)} y_i^* \langle a_i, x \rangle \leq \sum_{i \in I(x^*)} y_i^* b_i = \\ &= \sum_{i \in I(x^*)} y_i^* \langle a_i, x^* \rangle = \langle c, x^* \rangle, \end{aligned}$$

т. е.  $x^*$  — решение задачи (5.1).

5.6. Отметим, что указанное в теореме 5.3 условие экстремума можно переформулировать следующим образом: существуют числа  $y_i^* \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) такие, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} &= c_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ y_i^* \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) &= 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Представим теперь общую задачу ЛП (5.6) как основную:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i, \quad i = k+1, \dots, m, \\ -x_j &\leq 0, \quad j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Согласно сказанному выше, условие экстремума в этой задаче звучит так: существуют неотрицательные числа  $y_i^*$  ( $i = 1, \dots, k$ ),  $u_i, v_i$  ( $i = k+1, \dots, m$ ),  $z_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ) такие, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k y_i^* a_{ij} + \sum_{i=k+1}^m (u_i - v_i) a_{ij} - z_j &= c_j, \quad j = 1, \dots, s, \\ \sum_{i=1}^k y_i^* a_{ij} + \sum_{i=k+1}^m (u_i - v_i) a_{ij} &= c_j, \quad j = s+1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$y_i^* \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$z_j x_j^* = 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

Система (5.21)–(5.24) получается из выписанной, если положить  $y_i^* = u_i - v_i$  ( $i = k + 1, \dots, m$ ) и исключить за счет перехода к неравенствам переменные  $z_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ).

5.7. Достаточно доказать теорему, например, для основной задачи ЛП (5.1). Пусть  $x$  — ее некоторое решение. Тогда по теореме 5.3 существуют такие числа  $y_i^* \geq 0$  ( $i \in I(x)$ ), что

$$c = \sum_{i \in I(x)} y_i^* a_i. \quad (I)$$

В силу теоремы 4.2 имеется такая вершина  $x^*$  допустимого множества задачи (5.1), что  $I(x) \subset I(x^*)$ . Положим  $y_i^* = 0$  для всех

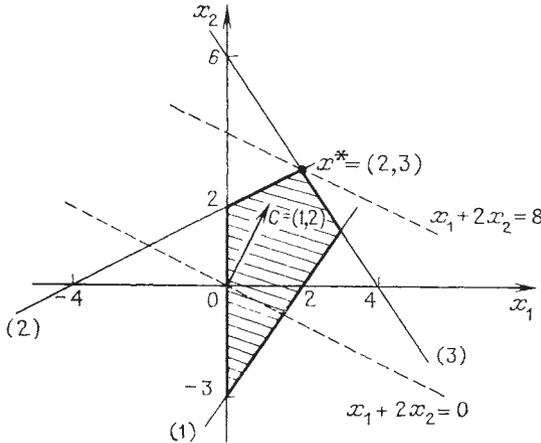


Рис. 88

$i \in I(x^*) \setminus I(x)$ . Тогда (I) можно переписать в виде (5.20). Следовательно,  $x^*$  — решение задачи (5.1).

5.8. а) Геометрическая интерпретация задачи приведена на рис. 88. Отсюда видно, что решением служит точка пересечения прямых  $-x_1 + 2x_2 = 4$  и  $3x_1 + 2x_2 = 12$ , т. е.  $x^* = (2, 3)$ .

Приведем аналитическое обоснование ответа. В точке  $x^*$  по самому ее определению активными являются второе и третье ограничения. Поэтому, согласно теореме 5.3, точка  $x^*$  является решением задачи в том и только том случае, если существуют числа  $y_2^* \geq 0, y_3^* \geq 0$ , удовлетворяющие системе

$$(-1, 2)y_2 + (3, 2)y_3 = (1, 2),$$

т. е.

$$-y_2 + 3y_3 = 1, \quad 2y_2 + 2y_3 = 2.$$

Но ее решение существует и положительно:  $y_2^* = y_3^* = 1/2$ . Следовательно, указанная геометрическая гипотеза верна.

(В качестве обоснования приведенного метода проверки ответа предположим, что на основании неверного геометрического чертежа или по иным причинам была выдвинута гипотеза, что решением задачи служит точка пересечения прямых  $3x_1 - 2x_2 = 6$  и  $3x_1 + 2x_2 = 12$ . Тогда мы пришли бы к системе

$$\begin{aligned} 3y_1 + 3y_3 &= 1, \\ -2y_1 + 2y_3 &= 2, \\ y_1 &\geq 0, \quad y_3 \geq 0, \end{aligned}$$

которая не имеет решения. В результате данная гипотеза была бы отвергнута.)

б)  $x^* = (3, 2)$ ; в)  $x^* = (1, 2)$ ; г)  $x^* = (1, -2)$ .

5.9. а) Из третьего ограничения имеем

$$x_3 = 2x_1 - x_2 - 2. \quad (I)$$

Подставляя это выражение в целевую функцию и первые два ограничения, а также учитывая, что  $x_3 \geq 0$ , приходим к задаче

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 12, \\ 2x_1 - x_2 &\geq 2, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Из геометрических соображений обнаруживаем и проверяем по теореме 5.3, что  $x_1^* = 4$ ,  $x_2^* = 0$  — решение данной задачи. Подставляя эти числа в (I), получаем  $x_3^* = 6$ . Следовательно,  $x^* = (4, 0, 6)$  — решение исходной задачи.

б) Выразим из системы уравнений переменные  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 - x_4 - x_5, \\ x_2 &= 15 + 5x_4 - 3x_5, \\ x_3 &= -9 + x_4 + 3x_5. \end{aligned} \quad (II)$$

Подставляя данные выражения в целевую функцию и учитывая условия неотрицательности, приходим к задаче

$$\begin{aligned} -7x_4 + 3x_5 &\rightarrow \max, \\ x_4 + x_5 &\leq 8, \\ -5x_4 + 3x_5 &\leq 15, \\ x_4 + 3x_5 &\geq 9, \\ x_4 &\geq 0, \quad x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Ее решение:  $x_4^* = 0$ ,  $x_5^* = 5$ . Подставляя эти числа в (II), получаем  $x_1^* = 3$ ,  $x_2^* = 0$ ,  $x_3^* = 6$ . Следовательно,  $x^* = (3, 0, 6, 0, 5)$  — решение исходной задачи.

в)  $x^* = (7/2, 0, 0, 3/2, -1/2)$ .

г) Из системы уравнений получаем

$$x_1 = x_4 + 2, \quad x_2 = -2x_4 + 1, \quad x_3 = 4x_4 - 1.$$

Отсюда приходим к одномерной задаче ЛП

$$-2x_4 + 1 \rightarrow \max,$$

$$4x_4 + 2 \leq 6,$$

$$x_4 + 2 \geq 0,$$

$$-2x_4 + 1 \geq 0,$$

$$4x_4 - 1 \geq 0,$$

$$x_4 \geq 0,$$

т. е.

$$x_4 \rightarrow \min, \quad 1/4 \leq x_4 \leq 1/2.$$

Следовательно,  $x^* = (9/4, 1/2, 0, 1/4)$  — решение исходной задачи.

5.10. а) Точка  $x^*$  допустима, причем активными в ней являются первое и третье ограничения ( $I(x^*) = \{1, 3\}$ ). Согласно теореме 5.3, следует убедиться в совместности системы

$$y_1 a_1 + y_3 a_3 = c, \quad y_1 \geq 0, \quad y_3 \geq 0,$$

где  $a_1 = (5, -1, 2, -1)$ ,  $a_3 = (1, -2, -1, 1)$ ,  $c = (7, -5, 0, 1)$ . Поскольку она имеет решение  $y_1^* = 1$ ,  $y_3^* = 2$ , то  $x^*$  — решение данной задачи ЛП.

б) Точка  $x^*$  допустима, причем активными в ней являются первое и третье ( $x_2 \geq 0$ ) ограничения-неравенства. Согласно теореме 5.4, следует убедиться в совместности системы типа (5.21) — (5.24). В данном случае она сводится к следующей ( $y_2 = 0$ ):

$$-3y_1 + 2y_3 = -12,$$

$$-y_1 + y_3 \geq -7,$$

$$-y_1 - 2y_3 = 4,$$

$$4y_1 + y_3 = 5,$$

$$y_1 \geq 0.$$

Поскольку  $y_1^* = 2$ ,  $y_3^* = -3$  удовлетворяют данным соотношениям, то  $x^*$  — решение.

5.11. а) Непосредственной проверкой убеждаемся, что точка  $x^1$  недопустима, а  $x^2$  и  $x^3$  — допустимые точки задачи. Значения целевой функции в точках  $x^2$  и  $x^3$  равны 0 и  $-10$  соответственно. Таким образом, среди указанных точек решением может быть только  $x^2$ . С помощью теоремы 5.3 показывается, что  $x^2$  действительно является решением.

В остальных заданиях решениями являются: б)  $x^2$ ; в)  $x^1$  и  $x^3$ ; г)  $x^3$ .

5.12. а) Точка  $x^* = (2, 6)$  допустима, причем активными в ней являются первое и второе ограничения. Тогда, согласно теореме 5.3, эта точка является решением задачи в том и только том случае, если совместна система

$$\begin{aligned}(2, 1)y_1 + (1, 2)y_2 &= (a, 1), \\ y_1 &\geq 0, \quad y_2 \geq 0,\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}2y_1 + y_2 &= a, \\ y_1 + 2y_2 &= 1, \\ y_1 &\geq 0, \quad y_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Указанная система уравнений имеет единственное решение:  $y_1^* = (2a - 1)/3$ ,  $y_2^* = (2 - a)/3$ . Отсюда получаем ответ:  $1/2 \leq a \leq 2$ .

б)  $0 < a \leq 2/9$ .

в) Согласно теореме 5.4, параметр  $a$  удовлетворяет нужному условию в том и только том случае, если система

$$\begin{aligned}-3y_1 + y_3 &= -1, \\ 2y_1 + y_3 &\geq 7a, \\ -y_1 + y_3 &= 2a, \\ y_1 &\geq 0\end{aligned}$$

имеет решение. Отсюда получаем ответ:  $-1/2 \leq a \leq 3/4$ .

г) Аналогично в) составляем систему

$$\begin{aligned}4y_2 + 3ay_3 &\geq 4, \\ -3y_2 - 2y_3 &= -1, \\ 2y_2 + 3y_3 &= a, \\ y_2 &\geq 0, \quad y_3 \geq 0.\end{aligned}$$

Отсюда вытекают условия на  $a$ :  $2/3 \leq a \leq 3/2$ ,  $9a^2 - 14a - 8 \geq 0$ . Поскольку эти условия противоречивы, то  $x^*$  не является решением задачи ни при каких значениях  $a$ .

5.13. а) В табл. 22 отражен процесс поиска вершин допустимого множества по общей схеме из п. 1 § 4 и указаны значения в них целевой функции. Из сопоставления этих значений следует, что среди вершин решением может быть только  $x^* = (-5, 1, 10)$ . С помощью теоремы 5.3 убеждаемся, что  $x^*$  действительно является решением\*).

---

\*) Отметим, что для использования в подобных ситуациях теоремы 5.5 необходимо сначала доказать, что решение задачи существует. В данном случае доказательство этого не проще, чем прямая проверка оптимальности  $x^*$  на основе теоремы 5.3.

б) В табл. 23 отражен процесс поиска вершин (опорных точек) допустимого множества по специальной схеме из п. 1 § 4 и указаны значения в них целевой функции. Наименьшее значение достигается в точке  $x^* = (0, 0, 20/7, 6/7)$ . Решение задачи существует, поскольку ее допустимое множество ограничено. Тогда  $x^*$  — решение в силу теоремы 5.5.

Т а б л и ц а 22

| Множество $I$ | Вершина     | Значение целевой функции |
|---------------|-------------|--------------------------|
| {1, 2, 3}     | (1, -1, 2)  | 2                        |
| {1, 2, 4}     | —           | —                        |
| {1, 3, 4}     | (-5, 1, 10) | 6                        |
| {2, 3, 4}     | (0, 0, 3)   | 3                        |

Т а б л и ц а 23

| Множество $J$ | Вершина           | Значение целевой функции |
|---------------|-------------------|--------------------------|
| {1, 2}        | (7, 5, 0, 0)      | 12                       |
| {1, 3}        | —                 | —                        |
| {1, 4}        | (4, 0, 0, 2)      | 10                       |
| {2, 3}        | (0, 3/2, 7/2, 0)  | 17/2                     |
| {2, 4}        | —                 | —                        |
| {3, 4}        | (0, 0, 20/7, 6/7) | 58/7                     |

в) Вершинами служат точки  $x^1 = (0, 0, 0)$ ,  $x^2 = (1, 0, 1)$ ,  $x^3 = (0, 1/4, 1/4)$ ; при этом  $x^1$  — решение задачи.

г) Вершинами служат точки  $x^1 = (-1, 0, 2, 1)$ ,  $x^2 = (5, 4, 0, -7)$ ,  $x^3 = (1, 0, 0, -3)$ ; при этом  $x^2$  и  $x^3$  — решения задачи.

5.14. а) Складывая первые три ограничения, убеждаемся, что допустимое множество задачи ограничено. Следовательно, задача разрешима, и по теореме 5.5 существует такое ее решение, которое является вершиной допустимого множества. Применение здесь метода полного перебора вершин потребовало бы рассмотрения  $C_6^3 = 20$  случаев. Заметим, однако, что по определению любая вершина должна обращать в равенства по крайней мере три из имеющихся шести ограничений. Следовательно, вершина-решение либо обращает в равенства первые три ограничения, либо имеет по крайней мере одну нулевую координату, в то время как остальные две образуют решение получающейся задачи ЛП с двумя переменными. Таким образом, достаточно рассмотреть всего четыре случая, в одном из которых требуется решить систему из трех уравнений, а в каждом из трех остальных ( $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  или  $x_3 = 0$ ) — но задаче ЛП с двумя переменными. В результате находим точки (1, 1, 2), (0, 9/7, 11/7), (2, 0, 1) и (1, 0, 0), среди которых имеется решение исходной задачи. Значение целевой функ-

ции в этих точках равно 9, 29/7, 11 и 5 соответственно. Следовательно, решением служит точка  $x^* = (2, 0, 1)$ .

б)  $x^* = (1, 2, 0)$ ; в)  $x^* = (1, 1, 1)$ ; г)  $x^* = (0, 3, 1)$ .

5.15. Перепишем задачу (5.26) в виде эквивалентной задачи типа (5.25):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (-b_i) y_i &\rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^m (-a'_{ji}) y_i &\leq -c_j, \quad j = 1, \dots, s, \\ \sum_{i=1}^m (-a'_{ji}) y_i &= -c_j, \quad j = s+1, \dots, n, \\ y_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

где  $a'_{ji} = a_{ij}$ . По определению задача, двойственная к этой задаче, имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n x_j (-a'_{ji}) &\geq -b_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n x_j (-a'_{ji}) &= -b_i, \quad i = k+1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Но это лишь иная форма записи задачи (5.25).

5.16. Для любых  $x \in X$  и  $y \in Y$  имеем

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^m y_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^m y_i b_i, \quad (1)$$

что доказывает теорему 5.7.

Далее, если при некоторых  $x^* \in X$  и  $y^* \in Y$  выполняется (5.27), то для любого  $x \in X$  с учетом теоремы 5.7 имеем  $\langle c, x \rangle \leq \langle c, y^* \rangle = \langle c, x^* \rangle$ , т. е.  $x^*$  — решение задачи (5.25). Аналогично показывается, что  $y^*$  — решение задачи (5.26).

Наконец, условие (5.27) равносильно тому, что в цепочке (1) при  $x = x^*$ ,  $y = y^*$  оба неравенства обращаются в равенства. А это в свою очередь эквивалентно условиям (5.28), (5.29).

5.17. В силу теоремы 5.6 достаточно доказать теорему 5.9 лишь в одну сторону. Пусть задача (5.25) имеет решение  $x^*$ . Тогда по теореме 5.4 существует такой вектор  $y^* \in Y$ , что выполнены условия (5.28), (5.29). Из теоремы 5.8 заключаем, что  $y^*$  — решение задачи (5.26) и  $\langle c, x^* \rangle = \langle b, y^* \rangle$ .

5.18. Если  $X \neq \emptyset$ ,  $Y \neq \emptyset$ , то с учетом теоремы 5.8 каждая из задач (5.25) и (5.26) удовлетворяет условиям теоремы 5.2 и поэтому имеет решение. Если же  $X \neq \emptyset$ ,  $Y = \emptyset$ , то  $\sup_X \langle c, x \rangle < \infty$ ,

то в силу той же теоремы 5.2 задача (5.25) имеет решение. Тогда по теореме 5.9 должна иметь решение и задача (5.26), что противоречит условию  $Y = \emptyset$ .

5.19. а) Составим таблицу перехода к двойственной задаче, как она описана в п. 5 (табл. 24).

Отсюда получаем ответ:

Т а б л и ц а 24

|              |              |       |              |       |       |              |       |        |        |     |      |
|--------------|--------------|-------|--------------|-------|-------|--------------|-------|--------|--------|-----|------|
| $y_1 \geq 0$ | $y_2 \geq 0$ | $y_3$ | $x_1 \geq 0$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4 \geq 0$ | $x_5$ | $\leq$ | $\leq$ | $=$ | $11$ |
|              |              |       | $3$          | $-1$  | $-1$  | $4$          | $7$   |        |        |     | $8$  |
|              |              |       | $-1$         | $5$   | $5$   | $-1$         | $-2$  |        |        |     | $4$  |
|              |              |       | $1$          | $1$   | $1$   | $3$          | $-1$  |        |        |     |      |
|              |              |       | $\geq$       | $=$   | $=$   | $\geq$       | $=$   |        |        |     |      |
|              |              |       | $17$         | $-5$  | $1$   | $1$          | $-8$  |        |        |     |      |

$$11y_1 + 8y_2 + 4y_3 \rightarrow \min,$$

$$3y_1 - y_2 + y_3 \geq 17,$$

$$-y_1 + 5y_2 + y_3 = -5,$$

$$-y_1 + 5y_2 + y_3 = 1,$$

$$4y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 1,$$

$$7y_1 - 2y_2 - y_3 = -8,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

5.20. а) Перейдем к двойственной задаче:

$$6y_1 - y_2 \rightarrow \min,$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 7,$$

$$-y_1 + y_2 \geq 0,$$

$$2y_1 - y_2 \geq 1,$$

$$-y_1 \geq -4,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

С помощью геометрических построений находим ее решение  $y^* = (9/5, 13/5)$ . В этой точке активными являются первое и третье ограничения, причем обе ее координаты положительны. Тогда, согласно теореме 5.10, точка  $x^*$  является решением исходной задачи в том и только том случае, если  $x_2^* = x_4^* = 0$ , а  $x_1^*$  и  $x_3^*$  удовлетворяют системе

$$x_1 + 2x_3 = 6,$$

$$2x_1 - x_3 = -1,$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

(I)

Отсюда  $x_1^* = 4/5$ ,  $x_3^* = 13/5$ . Следовательно,  $x^* = (4/5, 0, 13/5, 0)$  — решение исходной задачи.

(Отметим, что одновременно с этим строго обосновано, что указанная точка  $y^*$  является решением двойственной задачи. Если бы была допущена геометрическая ошибка в определении решения двойственной задачи, то система типа (I) не имела бы решения на основании той же теоремы 5.10.)

б)  $x^* = (0, 0, 11, 0, 27)$ ; в)  $x^* = (0, 3/19, 1/19, 0, 0)$ ; г)  $x^* = (-1, 3/2, 0, 0)$ .

5.21. а) Исключая переменную  $x_4 = 5 - 3x_1 - x_2$ , приходим к задаче

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 - x_3 &\rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 5, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (I)$$

Построим к данной задаче двойственную:

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 + 5y_3 &\rightarrow \min, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq 5, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 &\geq 5, \\ -y_1 + y_2 &= -1, \\ y_1 &\geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (II)$$

Исключая  $y_1 = y_2 + 1$ , получаем задачу

$$\begin{aligned} 4y_2 + 5y_3 &\rightarrow \min, \\ 2y_2 + 3y_3 &\geq 4, \\ 2y_2 + y_3 &\geq 2, \\ y_2 &\geq 0, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

С помощью геометрических построений находим ее решение.  $y_2^* = 1/2$ ,  $y_3^* = 1$ . Тогда  $y^* = (3/2, 1/2, 1)$  — решение задачи (II). Поскольку все координаты вектора  $y^*$  положительны, то, согласно теореме 5.10, решение  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  задачи (I) должно удовлетворять системе

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Отсюда  $x_1^* = 3/2$ ,  $x_2^* = 1/2$ ,  $x_3^* = 0$ . Следовательно, решением исходной задачи является  $x^* = (3/2, 1/2, 0, 0)$ .

б)  $x^* = (2, 0, -7, 9, 4)$ ; в)  $x^* = (2, 1, -5)$ ; г)  $x^* = (0, 1/3, 1/3, 0, 5/3)$ .

5.22. а) Перейдем к двойственной задаче

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\rightarrow \max, \\ -2y_1 + 5y_2 &\leq 10, \\ 5y_1 + 5y_2 &\leq 17, \\ 5y_1 + 10y_2 &\leq 29, \\ -y_1 - y_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

С помощью геометрических построений находим ее решение  $y^* = (1, 12/5)$ . В этой точке активными являются первые три ограничения. Тогда, согласно теореме 5.10, точка  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  служит решением прямой задачи в том и только том случае, если  $x_4 = 0$  и

$$\begin{aligned} -2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 10x_3 &= 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (I)$$

Общее решение данной системы можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{7}(4 - 5x_3), \\ x_2 &= \frac{9}{35}(4 - 5x_3), \\ 0 \leq x_3 &\leq 1/5. \end{aligned} \quad (II)$$

Эти соотношения вместе с равенством  $x_4 = 0$  описывают множество всех решений исходной задачи. Сюда входят две вершины ее допустимого множества:  $x^1 = (1/7, 9/35, 0, 0)$  и  $x^2 = (0, 0, 1/5, 0)$ . Первые три координаты этих точек могут быть получены из (I) как вершины соответствующего полиэдра в  $\mathbb{R}^3$  или из (II) при  $x_3 = 0$  и  $x_3 = 1/5$ .

б) Выражая  $x_5$  из уравнения, приходим к задаче

$$\begin{aligned} 9x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 &\rightarrow \min, \\ -11x_1 - 11x_2 - 16x_3 + 6x_4 &\leq -25, \\ -9x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\leq -7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{aligned} \quad (I)$$

Рассмотрим двойственную задачу

$$\begin{aligned} 25y_1 + 7y_2 &\rightarrow \max, \\ 11y_1 + 9y_2 &\leq 9, \\ 11y_1 - 5y_2 &\leq -5, \\ 16y_1 - 2y_2 &= -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6y_1 &\leq 2, \\ y_1 \geq 0, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что допустимое множество двойственной задачи состоит из единственной точки  $y_1 = 0, y_2 = 1$ . Тогда точка  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  является решением задачи (I) в том и только том случае, если  $x_4 = 0$  и

$$\begin{aligned} 11x_1 + 11x_2 + 16x_3 &\geq 25, \\ 9x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Эту систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2}(9x_1 - 5x_2 - 7), \\ 83x_1 - 29x_2 &\geq 81, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Эти соотношения вместе с равенствами

$$x_4 = 0, \quad x_5 = \frac{1}{2}(7 - 5x_1 - 3x_2 - 6x_3)$$

описывают множество всех решений исходной задачи. Сюда входит одна вершина ее допустимого множества:  $x = (81/83, 0, 74/83, 0, -134/83)$ .

в) Множество решений описывается соотношениями

$$x_1 = \frac{5}{13}x_2 + \frac{1}{13}, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 = \frac{11}{13}x_2 + \frac{10}{13}, \quad x_4 = 0.$$

При этом только одно решение  $x = (1/13, 0, 10/13, 0)$  является вершиной допустимого множества.

г) Множество решений описывается соотношениями

$$\begin{aligned} x_2 = 2 - 5x_1 - 3x_3, \quad x_4 &= 0, \\ 8x_1 + 4x_3 &\geq 3, \\ 5x_1 + 3x_3 &\leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вершинами являются следующие решения:

$$x^1 = (1/4, 0, 1/4, 0), \quad x^2 = (3/8, 1/8, 0, 0), \quad x^3 = (2/5, 0, 0, 0).$$

5.23. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — объемы производства (в тоннах) чая сорта А и Б соответственно. Тогда задача формализуется следующим образом:

$$\begin{aligned} 320x_1 + 290x_2 &\rightarrow \max, \\ 0,5x_1 + 0,2x_2 &\leq 600, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,2x_1 + 0,6x_2 &\leq 870, \\ 0,3x_1 + 0,2x_2 &\leq 430, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

С помощью геометрических построений находим ее решение:  $x_1^* = 600$ ,  $x_2^* = 1250$ .

5.24. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — месячный объем производства (в тысячах литров) бензина сорта А и Б соответственно. Тогда приходим к задаче

$$\begin{aligned} 90x_1 + 120x_2 &\rightarrow \max, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\leq 1500, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 &\leq 1200, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{9}x_2 &\leq 1300, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ее решение:  $x_1^* = 2700$ ,  $x_2^* = 1200$ .

5.25. Пусть  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  — количество (в кг) сена, силоса и концентратов соответственно, входящее в рацион одной коровы. Тогда приходим к задаче типа 5.9, а):

$$\begin{aligned} 1,5x_1 + 2x_2 + 6x_3 &\rightarrow \min, \\ 50x_1 + 70x_2 + 180x_3 &\geq 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\geq 210, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 87, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Ее решение:  $x_1^* = 6$ ,  $x_2^* = 25$ ,  $x_3^* = 0$ .

5.26. Пусть  $x_{ij}$  ( $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2, 3$ ) — объем перевозок цемента с  $i$ -го завода на  $j$ -й комбинат. Тогда приходим к транспортной задаче ЛПН следующего вида:

$$\begin{aligned} 10x_{11} + 15x_{12} + 25x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 30x_{23} &\rightarrow \min, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 60, \\ x_{11} + x_{21} &= 50, \\ x_{12} + x_{22} &= 20, \\ x_{13} + x_{23} &= 30, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (I)$$

В системе ограничений любое уравнение является линейной комбинацией остальных. Поэтому из нее можно удалить, например, второе уравнение. Из оставшихся уравнений легко получаем

$$\begin{aligned}x_{13} &= 40 - x_{11} - x_{12}, \\x_{21} &= 50 - x_{11}, \\x_{22} &= 20 - x_{12}, \\x_{23} &= -10 + x_{11} + x_{12}.\end{aligned}\tag{II}$$

В результате приходим к задаче

$$\begin{aligned}x_{11} + 2x_{12} &\rightarrow \max, \\x_{11} + x_{12} &\leq 40, \\x_{11} + x_{12} &\geq 10, \\0 \leq x_{11} \leq 50, \quad 0 \leq x_{12} \leq 20.\end{aligned}$$

С помощью геометрических построений находим ее решение:  $x_{11}^* = 20$ ,  $x_{12}^* = 20$ . Из (II) получаем остальные компоненты решения задачи (I):  $x_{13}^* = 0$ ,  $x_{21}^* = 30$ ,  $x_{22}^* = 0$ ,  $x_{23}^* = 30$ .

5.27. Пусть  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  — используемое количество (в м<sup>2</sup>) металла, стекла и пластмассы соответственно. Тогда получаем следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned}25x_1 + 20x_2 + 40x_3 &\rightarrow \min, \\10x_1 + 15x_2 + 3x_3 &\leq 150, \\x_1 + x_2 + x_3 &= 14, \\x_1 \geq 0, \quad 4 \leq x_2 \leq 5, \quad x_3 \geq 0.\end{aligned}$$

Ее решение:  $x_1^* = 60/7$ ,  $x_2^* = 4$ ,  $x_3^* = 10/7$ .

5.28. Обозначим через  $x_j$  массу (в кг)  $j$ -го типа сырья, которое используется для получения 1 кг требуемого сплава. Тогда поставленную задачу можно формализовать следующим образом:

$$\begin{aligned}10x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 60x_4 &\rightarrow \min, \\10x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 40x_4 &= 30, \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.\end{aligned}$$

Ее решение  $x^* = (1/3, 0, 0, 2/3)$  может быть найдено, например, методом полного перебора вершин (см. 5.13). Таким образом, самым дешевым является сплав первого и четвертого типов сырья в отношении 1:2.

5.29. Обозначим через  $x_j$  объем выпуска  $j$ -й детали. Тогда получаем задачу типа 5.14:

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 + 2x_3 &\rightarrow \max, \\x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 890,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_3 &\leq 920, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 840, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Ее решение:  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 210$ ,  $x_3^* = 460$ .

5.30. Обозначим через  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  планируемое к выпуску количество холодильников, газовых плит, морозильных шкафов и электропечей соответственно. Тогда получаем следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned} 10(20x_1 + 18x_2 + 25x_3 + 10x_4) &\rightarrow \max, \\ 2x_1 + 1,5x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 7000, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\leq 12\,000, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Применяя теорию двойственности и геометрические построения (см. 5.20), находим решение этой задачи:  $x_1^* = x_2^* = 2000$ ,  $x_3^* = x_4^* = 0$ .

5.31. Обозначим через  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  массу (в кг) мяса, муки, молока и сахара соответственно. Тогда задачу можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 500(3x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 8x_4) &\rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 35, \\ x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 45, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 0, \\ -x_2 + x_3 &\leq 0, \\ -x_3 + 8x_4 &\leq 0, \\ x_4 &\geq 0. \end{aligned} \tag{I}$$

Мы наложили условие неотрицательности только на  $x_4$ , поскольку неотрицательность остальных переменных следует из четырех последних ограничений.

Построим двойственную задачу:

$$\begin{aligned} 35y_1 + 45y_2 &\rightarrow \min, \\ y_1 + y_2 - y_3 &= 3, \\ y_1 + 1,5y_2 + 2y_3 - y_4 &= 10, \\ y_1 + 2y_2 + y_4 - y_5 &= 10, \\ y_1 + y_2 + 8y_5 &\geq 8, \\ y_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{aligned} \tag{II}$$

Выразим из первых трех уравнений переменные  $y_3, y_4, y_5$  через  $y_1$  и  $y_2$ :

$$y_3 = y_1 + y_2 - 3,$$

$$y_4 = 3y_1 + 3,5y_2 - 16,$$

$$y_5 = 4y_1 + 5,5y_2 - 26.$$

Подставляя эти выражения в (II), приходим к задаче

$$7y_1 + 9y_2 \rightarrow \min,$$

$$11y_1 + 15y_2 \geq 72,$$

$$y_1 + y_2 \geq 3,$$

$$3y_1 + 3,5y_2 \geq 16,$$

$$4y_1 + 5,5y_2 \geq 26,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

Решением этой задачи является точка  $y_1^* = 0, y_2^* = 4,8$ , в которой второе, третье и четвертое ограничения выполняются как

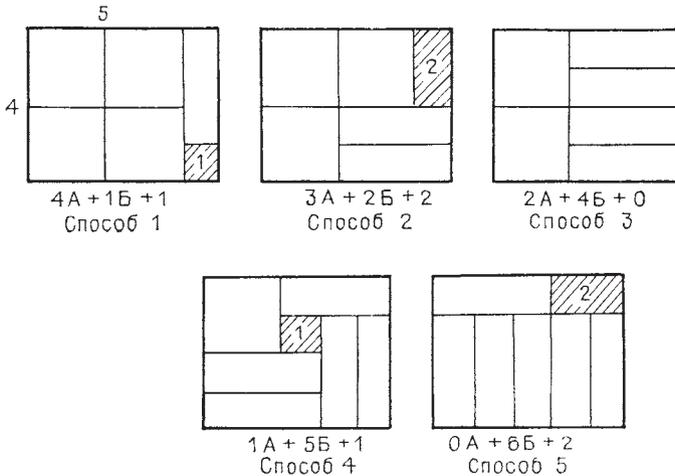


Рис. 89

строгие неравенства. Это означает, что для решения  $y^*$  задачи (II) имеют место соотношения  $y_1^* = 0, y_2^* > 0, y_3^* > 0, y_4^* > 0, y_5^* > 0$ . Тогда, согласно теореме 5.10, решение  $x^*$  задачи (I) должно удовлетворять системе

$$x_1 + 1,5x_2 + 2x_3 + x_4 = 45,$$

$$x_1 = 2x_2, \quad x_2 = x_3, \quad x_3 = 8x_4.$$

Отсюда  $x_1^* = 16, x_2^* = x_3^* = 8, x_4^* = 1$ .

5.32. На рис. 89 указаны пять способов раскроя листа, количество получаемых деталей обоих видов и площадь отходов. Существуют еще несколько способов раскроя, но они либо эквивалентны перечисленным, либо заведомо хуже.

Пусть  $x_j$  — число листов фанеры, которые будут кроиться по  $j$ -му способу. Тогда получаем следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 &\rightarrow \min, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5000, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Ее решение:  $x_1^* = 2000$ ,  $x_2^* = 0$ ,  $x_3^* = 3000$ ,  $x_4^* = x_5^* = 0$ .

5.33. В табл. 25 перечислены возможные способы раскроя стандартной полосы, причем заведомо неоптимальные способы (например, нуль заготовок по 1800 мм и семь заготовок по 700 мм) отброшены.

Т а б л и ц а 25

| Способы раскроя | Количество получаемых заготовок |        |
|-----------------|---------------------------------|--------|
|                 | 1800 мм                         | 700 мм |
| 1               | 0                               | 8      |
| 2               | 1                               | 6      |
| 3               | 2                               | 3      |
| 4               | 3                               | 0      |

Пусть  $x_j$  — количество стандартных полос, раскраиваемых по  $j$ -му способу,  $\alpha$  — число комплектов. Тогда заготовок длиной 1800 и 700 мм будет получено  $x_2 + 2x_3 + 3x_4$  и  $8x_1 + 6x_2 + 3x_3$  штук соответственно. Требуется найти решение следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \max, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\geq 2\alpha, \\ 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\geq 5\alpha, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 770, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (I)$$

Рассмотрим двойственную задачу:

$$\begin{aligned} 770y_3 &\rightarrow \min, \\ -8y_2 + y_3 &\geq 0, \\ -y_1 - 6y_2 + y_3 &\geq 0, \\ -2y_1 - 3y_2 + y_3 &\geq 0, \\ -3y_1 &+ y_3 \geq 0, \end{aligned} \quad (II)$$

$$\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 &= 1, \\ y_1 \geq 0, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Выражая из последнего уравнения  $y_2$ , приходим к задаче

$$\begin{aligned} 770y_3 &\rightarrow \min, \\ 16y_1 + 5y_3 &\geq 8, \\ 7y_1 + 5y_3 &\geq 6, \\ -4y_1 + 5y_3 &\geq 3, \\ -3y_1 + y_3 &\geq 0, \\ 2y_1 &\leq 1, \\ y_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решением этой задачи служит точка  $y_1^* = 3/11$ ,  $y_3^* = 9/11$ . Тогда  $y^* = (3/11, 1/11, 9/11)$  — решение задачи (II). В точке  $y^*$  первое ограничение задачи (II) выполняется как строгое неравенство, а следующие три обращаются в равенства. Тогда, согласно теоремам 5.9 и 5.10, набор  $(x_1^*, \dots, x_4^*, \alpha)$  является решением задачи (I) в том и только том случае, если  $x_1^* = 0$ ,  $\alpha^* = 770y_3^* = 630$ , а остальные его компоненты удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1260, \\ 6x_2 + 3x_3 &= 3150, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 770, \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет бесконечно много решений, которые можно описать так:

$$x_2 = 280 + x_4, \quad x_3 = 490 - 2x_4, \quad 0 \leq x_4 \leq 245.$$

По смыслу задачи величины  $x_1, \dots, x_4$  должны быть целыми числами. Поэтому следует наложить дополнительное предположение, что  $x_4$  — целое число. Каждая получаемая отсюда схема раскроя  $x^* = (0, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$  обеспечивает получение максимального числа комплектов, равного  $\alpha^* = 630$ .

5.34. Пусть  $x_j$  — доля всей колхозной пашни, засеянной пшеницей  $j$ -го сорта,  $\alpha$  — гарантированный урожай. Тогда приходим к задаче III, аналогичной предыдущей:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \max, \\ 25x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 15x_4 &\geq \alpha, \\ 15x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 40x_4 &\geq \alpha, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Применяя тот же метод, находим решение:  $x_1^* = x_2^* = 0$ ,  $x_3^* = 5/9$ ,  $x_4^* = 4/9$ . Таким образом, следует сеять пшеницу только сортов 3 и 4 в отношении 5:4.

5.35. Можно применить, например, теорему 5.4, учитывая, что в данном случае  $k = s = 0$  и, значит, условия (5.21), (5.23), (5.24) просто отсутствуют.

5.37. Применить 4.85.

5.38. В обоих случаях допустимое множество задачи непусто (так как содержит по крайней мере  $x = 0$ ) и ограничено. Поэтому утверждение следует из теоремы Вейерштрасса.

5.39. В обоих случаях допустимое множество задачи непусто. При этом значение задачи ограничено снизу нулем. Остается применить теорему 5.2.

(Здесь можно также применить 5.38 к двойственной задаче, а затем использовать теорему 5.9.)

5.40. Пусть  $X$  неограничено. Тогда, согласно 4.4, существует такой вектор  $h \neq 0$ , что  $Ah \leq 0$  и, значит,  $A(x^* + \alpha h) \leq b$  при любых  $x^* \in X$  и  $\alpha \geq 0$ . Отсюда следует, что задача (5.1) при  $c = h$  не имеет решения, поскольку  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \langle c, x^* + \alpha h \rangle = \infty$ .

5.41. Укажем лишь прямые задачи:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x_1 + x_2 \rightarrow \max, & \text{б) } x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 \leq 0, & x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 \leq -1; & -x_1 - x_2 \leq 0. \end{array}$$

5.42. Если  $X$  и  $Y$  одновременно непусты и ограничены, то, согласно 4.4, системы  $Ax \leq 0$  и  $yA = 0$ ,  $y \geq 0$  имеют лишь нулевые решения. Но это противоречит теореме Таккера (см. 4.101).

Докажем дополнительные более сильные утверждения. (При этом воспользуемся языком теории двойственности ЛП, хотя можно было бы опираться только на теорему 4.7 о следствиях.)

а) Из непустоты и ограниченности  $X$  следует, что задача (5.1) имеет решение. Тогда по теореме 5.9 имеет решение и двойственная к ней задача. Поэтому заведомо ее допустимое множество непусто. Предположим, что доказываемое утверждение неверно, т. е. при некотором  $d \geq 0$  значение задачи

$$\langle d, y \rangle \rightarrow \max, \quad y \in Y$$

конечно. Тогда из теорем 5.2, 5.9 следует, что двойственная задача

$$\langle c, h \rangle \rightarrow \min, \quad Ah \geq d$$

разрешима. Пусть  $h$  — допустимый вектор этой задачи. Поскольку  $d \geq 0$ , то  $h \neq 0$ . При этом для любых  $x \in X$  и  $\alpha \geq 0$ , очевидно, имеем  $x - \alpha h \in X$ , т. е. множество  $X$  неограничено. Противоречие.

б) Из непустоты и ограниченности  $Y$  следует, что при любом  $q \in \mathbb{R}^m$  задача

$$\langle q, y \rangle \rightarrow \min, \quad y \in Y$$

имеет решение. Тогда имеет решение и двойственная задача

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max, \quad Ax \leq q.$$

Пусть  $x^\alpha$  — допустимый вектор этой задачи при  $q = -\alpha e$ , где  $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha > 0$ . Ясно, что  $x^\alpha \in X$  для всех достаточно больших  $\alpha$ . Если  $d \geq 0$ , то  $\langle d, Ax^\alpha \rangle \leq \langle d, q \rangle = -\alpha \langle d, e \rangle$ , и, значит,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \langle d, Ax^\alpha \rangle = -\infty$ .

5.43. Для доказательства (от противного) утверждения а) привести задачу (5.25) к основной форме и использовать утверждение а) задачи 5.42, подбирая вектор  $d$  соответствующим образом. Остальные утверждения легко выводятся из общих фактов о системах линейных уравнений.

5.44. По определению грани  $\Gamma = \{x \in X \mid A_I x = b_I\}$  при некотором  $I = \{1, \dots, m\}$ . Если  $I = \emptyset$ , то  $\Gamma = X$  и подходит  $c = 0$ . Пусть  $I \neq \emptyset$ . Положим

$$c = \sum_{i \in I} a_i.$$

Для любых  $x \in X \setminus \Gamma$  и  $x^* \in \Gamma$  имеем

$$\langle c, x \rangle = \sum_{i \in I} \langle a_i, x \rangle < \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in I} \langle a_i, x^* \rangle = \langle c, x^* \rangle,$$

т. е. решениями задачи (5.1) являются точки из  $\Gamma$  и только они.

5.45. Если  $I^* = \{1, \dots, m\}$ , то подходит любая точка  $\bar{x} \in X^*$ . В противном случае положим  $J = \{1, \dots, m\} \setminus I^* \neq \emptyset$ . По определению  $I^*$  для любого  $i \in J$  существует такая точка  $x^i \in X^*$ , что  $\langle a_i, x^i \rangle < b_i$ . Пусть  $\bar{x}$  — произвольная выпуклая комбинация точек  $x^i$  ( $i \in J$ ) с положительными коэффициентами (см. 4.1). Тогда  $\bar{x} \in X^*$  и  $\langle a_i, \bar{x} \rangle < b_i$  при всех  $i \in J$ . Иными словами,  $I(\bar{x}) \subset I^*$ . Включение  $I^* \subset I(\bar{x})$  очевидно. Таким образом,  $I(\bar{x}) = I^*$ .

(Отметим, что основное рассуждение повторяет решение задачи 4.22 с учетом того, что множество  $X^*$  решений задачи ЛП является полиэдром.)

5.46. Покажем, что  $X^*$  совпадает с гранью  $X$  вида

$$\Gamma = \{x \in X \mid A_{I^*} x = b_{I^*}\}.$$

По определению  $I^*$  имеем  $X^* \subset \Gamma$ . Пусть  $x \in \Gamma$  и, значит,  $I^* \subset I(x)$ . Применяя теорему 5.3 к точке  $\bar{x}$  из 5.45, получаем, что существуют числа  $y_i \geq 0$  ( $i \in I^*$ ), при которых

$$c = \sum_{i \in I^*} y_i a_i. \quad (I)$$

Положим  $y_i = 0$  для всех  $i \in I(x) \setminus I^*$ . Тогда равенство (I) можно переписать в виде

$$c = \sum_{i \in I(x)} y_i a_i.$$

Отсюда в силу той же теоремы 5.3 следует, что  $x \in X^*$ . Таким образом,  $\Gamma \subset X^*$ , т. е.  $X^* = \Gamma$ . При этом  $\dim \Gamma = n - \text{rang } A_{I(\Gamma)}$  в силу 4.25. Но в данном случае  $I(\Gamma) = I^*$  по определению  $I^*$ .

5.47. Утверждение непосредственно следует из 4.72, 4.73 и 5.46.

5.48. Применяя 4.40 к формуле (I) из решения задачи 5.46, получаем, что существует такое множество  $I \subset I^*$ , для которого  $\text{rang } A_I = |I|$  и

$$c = \sum_{i \in I} y_i^* a_i \quad (I)$$

при некоторых  $y_i^* \geq 0$  ( $i \in I$ ). Для любого решения  $x^*$  задачи (1) имеем  $I \subset I^* \subset I(x^*)$ , т. е.  $A_I x^* = b_I$ . Тогда из (1) и теоремы 5.3 следует, что  $x^*$  — решение задачи (5.30). Обратное утверждение очевидно, поскольку допустимое множество задачи (5.30) шире допустимого множества задачи (5.1).

(Отметим, что первая часть прямого утверждения теоремы непосредственно следует из 4.88, если рассмотреть импликацию

$$Ax \leq b \rightarrow \langle c, x \rangle \leq f^*,$$

где  $f^*$  — значение задачи (5.1). Но доказательство равенства  $A_I x^* = b_I$  потребовало бы дополнительных соображений.)

5.49. Укажем лишь прямые задачи:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x_1 + x_2 \rightarrow \max, & \text{б) } x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 1, & x_1 + x_2 \leq 1. \\ x_1 + 3x_2 \leq 1, & \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; & \end{array}$$

Ранее встречались и более сложные примеры (см. 5.22, 5.33).

5.50. Прямые задачи:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x_1 + x_2 \rightarrow \max, & \text{б) } x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 \leq 1, & x_1 + x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 2, & x_1 + x_2 \geq 1. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; & \end{array}$$

5.51. Прямая задача:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

5.52, 5.53. Применить 4.4 и 4.6 к множеству решений задачи (5.1), записанному в виде (5.3).

5.54. Пусть  $X^*$  непусто и ограничено. Тогда из 4.110 с учетом (5.3) следует, что  $\text{rang} \begin{pmatrix} A \\ -c \end{pmatrix} = n$  и  $pA - \lambda c = 0$  при некоторых  $p > 0$ ,  $\lambda > 0$ . Положим  $y = \lambda^{-1}p$ . Тогда  $yA = c$ ,  $y > 0$ . При этом, естественно,  $\text{rang } A = \text{rang} \begin{pmatrix} A \\ -c \end{pmatrix} = n$ .

Пусть, напротив,  $\text{rang } A = n$  и  $yA = c$  при некотором  $y > 0$ . Последнее означает, что задача, двойственная к (5.1), допустима. Тогда  $X^* \neq \emptyset$  в силу теоремы 5.11. Остается вновь использовать 4.110.

5.55. Представить задачу (5.4) в основной форме и применить 5.54.

5.56. Представить задачу (5.5) в стандартной форме и применить 5.55.

5.57. Применить 4.113 по типу решения задачи 5.54.

5.58. Представить задачу (5.5) в основной форме и применить 5.57; затем учесть формулу (II) из решения задачи 4.33.

5.59. Пусть  $f^*$  — значение задачи (5.25). Тогда множество ее решений определяется следующей системой:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i, & i = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &= b_i, & i = k+1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n c_jx_j &\geq f^*, & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Если рассматривать ее как систему типа (4.18), то соответствующая система типа (4.19) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} - \lambda c_j &\geq 0, & j = 1, \dots, s, \\ \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} - \lambda c_j &= 0, & j = s+1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^m p_i b_i - \lambda f^* &= 0, & p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Заметим, что любое решение  $x$  системы (I) обращает неравенство  $\langle c, x \rangle \geq f^*$  в равенство. Тогда, согласно 4.104, системы (I) и (II) имеют такие решения  $x^*$  и  $(p, \lambda)$ , что  $\lambda > 0$  и

$$\begin{aligned} p_i + \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* \right) &> 0, & i = 1, \dots, k, \\ x_j^* + \left( \sum_{i=1}^m p_i a_{ij} - \lambda c_j \right) &> 0, & j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Ясно, что  $x^*$  и  $y^* = \lambda^{-1}p$  удовлетворяют пужным требованиям.

(Другое доказательство этой теоремы, основанное непосредственно на теории двойственности в ЛП, можно найти в [39, с. 177].)

5.60. а)  $x^* = (1/2, 1/2)$ ,  $y^* = (1/3, 1/3)$ ; б)  $x^* = (1, 0)$ ,  $y^* = (1, 0)$ .

5.61. Утверждение непосредственно следует из 5.59 и теоремы 5.10.

5.62. а) Рассмотрим двойственную задачу:

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\rightarrow \max, \\ 4y_1 + 3y_2 &\leq 12, \\ y_1 - y_2 &\leq 1, \\ 2y_1 + 2y_2 &\leq 8, \\ y_1 &\geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Используя геометрические построения, находим, что единственным решением данной задачи служит точка  $y^* = (0, 4)$ , в которой активны первое, третье и четвертое ( $y_1 \geq 0$ ) ограничения. В силу единственности решения эти же ограничения и только они являются закрепленными. Следовательно, соответствующие ограничения в исходной задаче ( $x_1 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ ,  $4x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ ) свободные, а остальные закрепленные.

б) Ограничения  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_4 \geq 0$  свободные, остальные закрепленные.

в) Ограничения  $3x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 \leq 4$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  свободные, остальные закрепленные.

5.63. Ограничимся доказательством утверждения для основной задачи ЛП (5.1). Пусть  $X^*$  и  $Y^*$  — ненулевые множества решений задачи (5.1) и двойственной к ней,  $I^*$  — множество закрепленных ограничений задачи (5.1),  $J^*$  — множество свободных ограничений двойственной задачи:

$$I^* = \{i, 1 \leq i \leq m \mid \langle a_i, x \rangle = b_i \text{ при всех } x \in X^*\},$$

$$J^* = \{i, 1 \leq i \leq m \mid y_i > 0 \text{ при некотором } y \in Y^*\}.$$

В силу 5.46 множество  $X^*$  состоит из одного элемента в том и только том случае, если

$$\text{rang } A_{I^*} = n. \quad (I)$$

В то же время, согласно 4.56, грань  $Y^*$  допустимого множества двойственной задачи является невырожденной в том и только том случае, если среди векторов  $a_i$  ( $i \in J^*$ ) имеется  $n$  линейно независимых, т. е.

$$\text{rang } A_{J^*} = n. \quad (II)$$

Но из 5.61 следует, что  $I^* = J^*$ . Таким образом, условия (I) и (II) совпадают.

5.64. Нет, не следует. Например, задача

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

имеет единственное решение  $x^* = (0, 0, 1)$ . При этом множество решений двойственной задачи совпадает с ее допустимым множеством, имеющим только две вершины:  $y^1 = (1/2, 0, 0, 1/2)$  и  $y^2 = (0, 1/2, 1/2, 0)$ , причем каждая из них является вырожденной.

(Предлагаем читателю самостоятельно разобраться, возможен ли подобный пример в классе задач ЛП с двумя переменными.)

5.65. Если решение прямой задачи ЛП единственно, то, согласно утверждению из 5.63, множество решений двойственной задачи является невырожденной гранью ее допустимого множества. Если к тому же решение прямой задачи невырождено, то в силу того же утверждения, примененного в другую сторону, решение двойственной задачи единственно.

5.66. Предположив обратное, приходим к противоречию с 5.63.  
 5.67. Пусть  $y$  — произвольная допустимая точка (в частности, решение) двойственной задачи (5.26). Тогда

$$\sum_{i=1}^m y_i a_{ir} \geq \sum_{i=1}^m y_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \right) \lambda_j \geq \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j > c_r.$$

Остается использовать теорему 5.10.

5.68. Ниже под  $a^1, a^2, \dots$  понимаются столбцы матрицы ограничений, под  $c_1, c_2, \dots$  — коэффициенты целевой функции, под  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots)$  — решение рассматриваемой задачи.

а) Поскольку  $a^2 \geq a^3$  и  $c_2 < c_3$ , то  $x_2^* = 0$ . В результате приходим к задаче ЛП с двумя переменными, решая которую находим  $x_1^* = 2$  и  $x_3^* = 3$ .

б) Заметим, что  $a^4 \geq 2a^1 + a^3$ , причем в последней координате этого векторного неравенства стоит знак равенства. Кроме того,  $c_4 < 2c_1 + c_3$ . Тогда  $x_4^* = 0$ , и получаем задачу типа 5.9. Ее решение:  $x_1^* = 0, x_2^* = 4/3, x_3^* = 17/3$ .

в) В данном случае  $a^3 \geq a^2 - a^1, c_3 < c_2 - c_1, a^4 > 2a^1 + 3a^2, c_4 < 2c_1 + 3c_2$ . Тогда  $x_3^* = x_4^* = 0$ . После этого легко находятся  $x_1^* = -2, x_2^* = 6$ .

5.69. Применить 4.121, 4.122 к множеству  $X^*$ , заданному в виде (5.3).

5.71. Утверждение непосредственно следует из теоремы 5.9.

5.72. В одну сторону утверждение очевидно, в другую непосредственно следует из теоремы 5.11.

5.73. Согласно 4.126, утверждение б) равносильно устойчивости систем

$$Ax \leq b \text{ и } yA = c, \quad y \geq 0,$$

определяющих  $X(s)$  и  $Y(s)$ . Значит, с учетом 5.72 утверждения а) и б) эквивалентны. Эквивалентность б) и в) непосредственно следует из 5.54, 5.56.

5.74. Пусть  $s = (A, b, c)$ . Согласно теоремам 5.8 и 5.9, условия  $x \in X^*(s), y \in Y^*(s)$  равносильны соотношениям

$$Ax \leq b, \quad yA = c, \quad y \geq 0, \quad \langle c, x \rangle = \langle b, y \rangle. \quad (I)$$

Рассмотрим любые такие последовательности  $\{s^k\}, \{x^k\}, \{y^k\}$ , что  $s^k = (A^k, b^k, c^k), \lim_{k \rightarrow \infty} s^k = s, x^k \in X^*(s^k), y^k \in Y^*(s^k)$ . Тогда

$$A^k x^k \leq b^k, \quad y^k A^k = c^k, \quad y^k \geq 0, \quad \langle c^k, x^k \rangle = \langle b^k, y^k \rangle. \quad (II)$$

Из 5.73 следует, что множество решений системы (I) непусто и ограничено. Поэтому последовательности  $\{x^k\}$  и  $\{y^k\}$  ограничены в силу 4.133. Пусть  $x$  и  $y$  — их произвольные предельные точки. Без потери общности можно считать, что  $x^k \rightarrow x, y^k \rightarrow y$ . Переходя к пределу в (II), получаем (I). Следовательно,  $x \in X^*(s)$ . Утверждение б) доказано. Для доказательства а) остается заметить, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(s^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle c^k, x^k \rangle = \langle c, x \rangle = F(s).$$

5.75. Нет, не следует. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 &\leq 1, \\ -x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

5.76. Пусть  $s = (A, b, c)$ . Примем обозначения  $I = I(x^*(s), s)$ ,  $J = \{1, \dots, m\} \setminus I$ . Согласно 5.57, 5.65, условие задачи равносильно тому, что  $A_I$  — невырожденная матрица размера  $n \times n$ ,  $x^*(s)$  — единственное решение системы

$$A_I x = b_I, \quad A_J x < b_J$$

и существует единственное решение  $y_I^*(s) \in \mathbb{R}^n$  системы

$$y_I A_I = c, \quad y_I > 0.$$

Ясно, что при любом  $s' = (A', b', c')$ , достаточно близком к  $s$ , матрица  $A'_I$  также невырождена, а системы

$$A'_I x = b'_I, \quad A'_J x < b'_J$$

и

$$y_I A'_I = c', \quad y_I > 0$$

имеют единственные решения  $x^*(s')$  и  $y_I^*(s')$ , непрерывно зависящие от  $s'$ .

5.77. Нет, не следует. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow \max, \\ (1 + \alpha)x_1 - x_2 &\leq 0, \\ -(1 - \alpha)x_1 + x_2 &\leq 0, \\ x_2 &\leq 1, \end{aligned}$$

где  $\alpha \geq 0$ . Эта задача имеет вырожденное единственное решение  $(1, 1)$  при  $\alpha = 0$  и невырожденное единственное решение  $(0, 0)$  при любом достаточно малом  $\alpha > 0$ .

5.78. Рассмотрим семейство множеств вида

$$Z(s', \beta') = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \leq b', \langle c', x \rangle \geq \beta'\},$$

где  $s' = (A', b', c')$ . По условию при  $s = (A, b, c)$  множество  $Z(s, F(s)) = X^*(s)$  непусто и ограничено. Тогда согласно 4.132 для любых  $A', c'$ , достаточно близких к  $A, c$ , и любых  $b' \in \mathbb{R}^m$ ,  $\beta' \in \mathbb{R}$  множество  $Z(s', \beta')$  ограничено. Пусть при этом существует  $x \in X(A', b')$ . Положим  $\beta' = \langle c', x \rangle$ . Тогда  $Z(s', \beta') \neq \emptyset$ . Ясно, что множества решений задачи  $P(s')$  и задачи

$$\langle c', x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in Z(s', \beta')$$

совпадают. Следовательно,  $X^*(s')$  непусто и ограничено.

5.79. Согласно 4.126, утверждение б) равносильно устойчивости систем, определяющих допустимые множества задачи (5.4) и двойственной к ней. Остается использовать 5.72 и 5.55.

5.80. Ниже под  $x^*$  и  $y^*$  понимаются решения соответственно задачи (5.4) и двойственной к ней.

а) Если  $\alpha > 0$ , то

$$Ax^* \leq b < b + \alpha v, \quad y^* A \geq c > c - \alpha u, \quad (I)$$

и, значит, задача (5.33) устойчива в силу 5.79.

б) Согласно (I), точки  $x^*$  и  $y^*$  допустимы в задаче (5.33) и двойственной к ней при любом  $\alpha > 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} F(\alpha) &\geq \langle c - \alpha u, x^* \rangle = F(0) - \alpha \langle u, x^* \rangle, \\ F(\alpha) &\leq \langle b + \alpha v, y^* \rangle = F(0) + \alpha \langle v, y^* \rangle. \end{aligned} \quad (II)$$

Следовательно,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(\alpha) = F(0)$ .

в) Рассмотрим любые  $\alpha > 0$  и  $x \in X^*(\alpha)$ . С учетом (II) имеем

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\leq \langle y^* A, x \rangle = \langle y^*, Ax \rangle \leq \langle y^*, b + \alpha v \rangle = \\ &= F(0) + \alpha \langle y^*, v \rangle \leq F(\alpha) + \alpha \langle u, x^* \rangle + \alpha \langle y^*, v \rangle. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha \langle u, x \rangle &= \langle -c + \alpha u, x \rangle + \langle c, x \rangle = -F(\alpha) + \langle c, x \rangle \leq \\ &\leq \alpha \langle u, x^* \rangle + \alpha \langle y^*, v \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\langle u, x \rangle \leq \langle u, x^* \rangle + \langle y^*, v \rangle,$$

где  $u > 0$ ,  $x \geq 0$ . Это и означает, что множества  $X^*(\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ) ограничены в совокупности.

г) При указанных  $\alpha_h$  и  $x^h$  имеем

$$\langle c - \alpha_h u, x^h \rangle = F(\alpha_h), \quad Ax^h \leq b + \alpha_h v, \quad x^h \geq 0.$$

Переходя здесь к пределу с учетом б), получаем

$$\langle c, x \rangle = F(0), \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

т. е.  $x \in X^*(0)$ .

5.81. Согласно 5.73, множества  $X^*(s)$  и  $Y^*(s)$  непусты и ограничены. Тогда с учетом 1.10 максимум и минимум в формуле (5.34) существуют. Кроме того, в силу 1.3 имеем

$$\max_{x \in X^*(s)} \min_{y \in Y^*(s)} L(x, y, h) \leq \min_{y \in Y^*(s)} \max_{x \in X^*(s)} L(x, y, h).$$

Поэтому достаточно доказать первое и последнее неравенства в следующей цепочке:

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y^*(s)} \max_{x \in X^*(s)} L(x, y, h) &\leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \varphi(\alpha) \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0^+} \varphi(\alpha) \leq \max_{x \in X^*(s)} \min_{y \in Y^*(s)} L(x, y, h), \quad (I) \end{aligned}$$

где

$$\varphi(\alpha) = \frac{F(s + \alpha h) - F(s)}{\alpha}.$$

Пусть последовательность  $\{\alpha_k\}$  такова, что  $\alpha_k > 0$ ,  $\alpha_k \rightarrow 0$  и

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_h) = \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} \varphi(\alpha). \quad (\text{II})$$

Рассмотрим любую такую последовательность  $\{x^k\}$ , что  $x^k \in X^*(s + \alpha_k h)$  при всех достаточно больших  $k$ . Учитывая 5.74, можно считать, что  $x^k \rightarrow x \in X^*(s)$ . Для любой точки  $y \in Y^*(s)$  имеем

$$\begin{aligned} F(s + \alpha_k h) &= \langle c + \alpha_k \bar{c}, x^k \rangle \leq \\ &\leq \langle c + \alpha_k \bar{c}, x^k \rangle + \langle y, b + \alpha_k \bar{b} - (A + \alpha_k \bar{A})x^k \rangle = \\ &= \langle b, y \rangle + \langle c - yA, x^k \rangle + \alpha_k L(x^k, y, h) = \\ &= \langle b, y \rangle + \alpha_k L(x^k, y, h) = F(s) + \alpha_k L(x^k, y, h). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi(\alpha_k) \leq L(x^k, y, h).$$

Отсюда с учетом (II) получаем

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} \varphi(\alpha) \leq L(x, y, h).$$

Поскольку это неравенство выполняется для любой точки  $y \in Y^*(s)$ , то

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} \varphi(\alpha) \leq \min_{y \in Y^*(s)} L(x, y, h).$$

Здесь  $x$  — некоторая точка из  $X^*(s)$ . Поэтому последнее неравенство в (I) справедливо. Точно так же с использованием двойственных соображений доказывается первое неравенство. Частные утверждения непосредственно следуют из (5.34).

**5.82.** Последовательно рассмотрим в 5.81 случаи

$h = (0, e^i, 0)$  где  $e^i$  —  $i$ -й единичный орт в  $\mathbb{R}^m$ ;

$h = (0, 0, e^j)$ , где  $e^j$  —  $j$ -й единичный орт в  $\mathbb{R}^n$ ;

$h = (\bar{A}, 0, 0)$ , где  $\bar{A}$  — матрица из  $\mathcal{A}(m, n)$ , у которой элемент на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца равен единице, а остальные элементы равны нулю. При этом учесть, что, например,

$$\frac{\partial F^+}{\partial b_i}(s) = F'(s, h),$$

$$\frac{\partial F^-}{\partial b_i}(s) = -F'(s, -h),$$

где  $h = (0, e^i, 0)$ . При выводе последних двух формул полезно помнить, что векторы из  $Y^*(s)$  неотрицательны, тогда как координаты векторов из  $X^*(s)$  могут иметь разные знаки.

**5.83.** Существование частных производных функции  $F$  в некоторой окрестности точки  $s$  и их непрерывность в самой этой точке легко выводятся из 5.66, 5.76 и 5.82.

**5.84.** Пусть

$$s = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad h = \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Тогда задача  $P(s + \alpha h)$ , т. е.

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \max, \\ x_1 - \alpha x_2 &\leq 0, \\ x_1 &\leq 1 \end{aligned}$$

разрешима для любого  $\alpha \geq 0$  (и даже  $\alpha \in \mathbf{R}$ ). При этом

$$F(s + \alpha h) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 0, \\ 1, & \text{если } \alpha > 0. \end{cases}$$

Следовательно,  $F'(s, h)$  не существует.

5.85. Пусть

$$s = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad h = \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Тогда при любом  $\alpha \geq 0$  задача  $P(s + \alpha h)$ , т. е.

$$\begin{aligned} \alpha x_1 &\rightarrow \max, \\ x_1 - \alpha x_2 &\leq 0, \\ x_1 &\leq 1 \end{aligned}$$

разрешима и  $F(s + \alpha h) = \alpha$ . Следовательно,  $F'(s, h) = 1$ . В данном случае

$$L(x, y, h) = x_1 + y_1 x_2, \quad X^*(s) = \{x \in \mathbf{R}^2 | x_1 \leq 0\}$$

и, как нетрудно проверить,  $Y^*(s) = \{0\}$ . При этом максимум и минимум в (5.34) равны нулю.

5.86. Утверждение непосредственно следует из 4.134.

5.88. Это утверждение — простое следствие теорем 5.9 и 5.11.

5.89. Запишем задачу (5.38) в виде

$$\begin{aligned} \langle b' - b, y \rangle &\rightarrow \min, \\ yA = c, \quad \langle y, b \rangle &\leq F(b, c), \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

По условию она допустима. В то же время допустима и двойственная задача

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle - \alpha F(b, c) &\rightarrow \max, \\ Ax - \alpha b &\leq b' - b, \quad \alpha \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку ее ограничениям удовлетворяет любая точка  $x \in X(b')$  вместе с  $\alpha = 1$ . Таким образом, обе эти задачи разрешимы по теореме 5.11. Аналогично доказывается разрешимость задачи (5.39).

5.90. а) Пусть  $(b, c) \in B \times C$ ,  $(b^k, c^k) \in B \times C$  и  $(b^k, c^k) \rightarrow (b, c)$ . Рассмотрим любую точку  $x \in X^*(b, c)$ . Поскольку  $x \in X(b)$ , то, согласно 4.136, существует такая последовательность  $\{x^k\}$ , что  $x^k \rightarrow x$  и  $x^k \in X(b^k)$ . Тогда  $F(b^k, c^k) \geq \langle c^k, x^k \rangle$ . Переходя в этом неравенстве к пределу, получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(b^k, c^k) \geq \langle c, x \rangle = F(b, c),$$

т. е.  $F$  полунепрерывна снизу в точке  $(b, c)$ . Из аналогичных рассуждений для двойственной задачи следует, что  $F$  полунепрерывна сверху, а значит, и непрерывна в точке  $(b, c)$ .

б) То, что в условиях утверждения б) задача  $P(b, c)$  разрешима ( $X^*(b, c) \neq \emptyset$ ), сразу вытекает из 5.86, 5.88. Далее, в силу

5.69 существует такое число  $\alpha > 0$ , что при любом  $k$  справедливо неравенство

$$\alpha \|x^k - \bar{x}^k\| \leq \sum_{i=1}^m \max(0, \langle a_i, x^k \rangle - b_i) + \max(0, F(b, c) - \langle c, x^k \rangle),$$

где  $\bar{x}^k$  — проекция точки  $x^k$  на  $X^*(b, c)$ . При этом

$$F(b, c) - \langle c, x^k \rangle = F(b, c) - \langle c^k, x^k \rangle + \langle c^k - c, x^k - \bar{x}^k \rangle + \\ + \langle c^k - c, \bar{x}^k \rangle \leq F(b, c) - F(b^k, c^k) + \|c^k - c\| \cdot \|x^k - \bar{x}^k\| + \varphi(c^k),$$

где  $\varphi(c^k)$  — значение задачи

$$\langle c^k - c, x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in X^*(b, c),$$

имеющей решение в силу 5.89. Применяя к этой задаче утверждение а), получаем, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(c^k) = \varphi(c) = 0$ . Таким образом,

$$\alpha \|x^k - \bar{x}^k\| \leq \sum_{i=1}^m \max(0, b_i^k - b_i) + \max(0, F(b, c) - F(b^k, c^k) + \\ + \|c^k - c\| \cdot \|x^k - \bar{x}^k\| + \varphi(c^k)). \quad (I)$$

Пусть без ограничения общности  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \bar{x}^k\| = A$ , где  $0 \leq A \leq \infty$ . Если допустить, что  $A = \infty$ , то, поделив обе части неравенства (I) на  $\|x^k - \bar{x}^k\|$  и перейдя к пределу, получаем противоречие:  $\alpha \leq 0$ . Таким образом,  $A < \infty$ . Тогда с помощью предельного перехода непосредственно в (I) выводим, что  $\alpha A \leq 0$ , т. е.  $A = 0$ .

5.91. Если задача  $P(b, c)$  устойчива по направлению  $h$ , то разрешимость задач (5.40) и (5.41) непосредственно следует из 5.89. Пусть, напротив, задачи (5.40) и (5.41) неразрешимы. Запишем задачу (5.40) в виде

$$\langle \bar{b}, y \rangle \rightarrow \min, \\ yA = c, \quad \langle b, y \rangle \leq F(b, c), \quad y \geq 0. \quad (I)$$

Двойственная к ней задача выглядит следующим образом:

$$\langle c, x \rangle - \gamma F(b, c) \rightarrow \max, \\ Ax - \gamma b \leq \bar{b}, \quad \gamma \geq 0. \quad (II)$$

Ограничение  $\langle b, y \rangle \leq F(b, c)$  в задаче (I) является закрепленным. Тогда, согласно 5.61, существует такое решение  $(x^*, \gamma^*)$  задачи (II), что  $\gamma^* > 0$ , и, следовательно,  $Ax \leq \bar{b} + \alpha \bar{b}$ , где  $x = x^*/\gamma^*$ ,  $\alpha = 1/\gamma^*$ . Итак,  $b + \alpha \bar{b} \in B$  при некотором  $\alpha > 0$ . Аналогично из разрешимости задачи (5.41) выводится, что  $c + \beta \bar{c} \in C$  при некотором  $\beta > 0$ . Отсюда и из 5.87, 5.88 легко получить, что задача  $P(b + \alpha \bar{b}, c + \beta \bar{c})$  разрешима при всех  $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$ ,  $\beta \in [0, \bar{\beta}]$ . Рассматривая здесь случай  $\alpha = \bar{\alpha}$ , приходим к выводу, что задача  $P(b, c)$  устойчива по направлению  $h$ .

5.92. Приводимое ниже доказательство в основном повторяет схему решения задачи 5.81. Но только вместо 5.74 мы используем 5.90.

Прежде всего отметим, что величины, стоящие в правой части формулы (5.42), определены в силу 5.91. Положим

$$\varphi(\alpha) = \frac{F(b + \alpha\bar{b}, c + \alpha\bar{c}) - F(b, c)}{\alpha}.$$

Пусть последовательность  $\{\alpha_k\}$  такова, что  $\alpha_k > 0$ ,  $\alpha_k \rightarrow 0$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_k) = \overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} \varphi(\alpha)$ . Рассмотрим любую такую последовательность  $\{x^k\}$ , что  $x^k \in X^*(b + \alpha_k\bar{b}, c + \alpha_k\bar{c})$  при всех достаточно больших  $k$ . Согласно 5.90, существует последовательность  $\{\bar{x}^k\}$ , удовлетворяющая условиям  $\bar{x}^k \in X^*(b, c)$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \bar{x}^k\| = 0$ .

Для любой точки  $y \in Y^*(b, c)$  имеем

$$\begin{aligned} F(b + \alpha_k\bar{b}, c + \alpha_k\bar{c}) &= \langle c + \alpha_k\bar{c}, x^k \rangle \leq \langle c + \alpha_k\bar{c}, x^k \rangle + \\ &+ \langle y, b + \alpha_k\bar{b} - Ax^k \rangle = \langle b, y \rangle + \langle c - yA, x^k \rangle + \\ &+ \alpha_k(\langle \bar{c}, x^k \rangle + \langle \bar{b}, y \rangle) = F(b, c) + \alpha_k(\langle \bar{c}, x^k \rangle + \langle \bar{b}, y \rangle). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_k) &\leq \langle \bar{c}, x^k \rangle + \langle \bar{b}, y \rangle = \langle \bar{c}, \bar{x}^k \rangle + \langle \bar{c}, x^k - \bar{x}^k \rangle + \langle \bar{b}, y \rangle \leq \\ &\leq \max_{x \in X^*(b, c)} \langle \bar{c}, x \rangle + \|\bar{c}\| \cdot \|x^k - \bar{x}^k\| + \langle \bar{b}, y \rangle. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу с учетом выбора  $\{\alpha_k\}$ , получаем

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} \varphi(\alpha) \leq \max_{x \in X^*(b, c)} \langle \bar{c}, x \rangle + \langle \bar{b}, y \rangle,$$

и, значит,

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} \varphi(\alpha) \leq \max_{x \in X^*(b, c)} \langle \bar{c}, x \rangle + \min_{y \in Y^*(b, c)} \langle \bar{b}, y \rangle. \quad (I)$$

Точно так же с использованием двойственных соображений показывается, что нижний предел  $\underline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} \varphi(\alpha)$ , напротив, не меньше

величины, стоящей в (I) справа. Таким образом, величина  $F'(b, c, h)$  существует и вычисляется по формуле (5.42).

5.93. Учитывая 1.2, имеем

$$\begin{aligned} F(\lambda_1 c^1 + \lambda_2 c^2) &= \sup_{x \in X} \langle \lambda_1 c^1 + \lambda_2 c^2, x \rangle \leq \\ &\leq \lambda_1 \sup_{x \in X} \langle c^1, x \rangle + \lambda_2 \sup_{x \in X} \langle c^2, x \rangle = \lambda_1 F(c^1) + \lambda_2 F(c^2). \end{aligned}$$

5.95. Используя 5.40, 5.91, легко получаем, что а) влечет б). В силу 5.78 из б) следует а) (и даже несколько большее). Эквивалентность б) и в) отмечена в 5.54.

5.96. Пусть  $\bar{x} \in X^*(c + \alpha h)$ ,  $\alpha > 0$ . Для любого  $x \in X^*(c)$  имеем  $\langle c, x \rangle \geq \langle c, \bar{x} \rangle$ , и в то же время  $\langle c + \alpha h, x \rangle \leq \langle c + \alpha h, \bar{x} \rangle$ . Тогда  $\langle h, x \rangle \leq \langle h, \bar{x} \rangle$ , т. е.  $\bar{x} \in \bar{X} = \bar{X}(h)$ . Следовательно,  $X^*(c + \alpha h) \subset \bar{X}$ .

Далее, согласно 5.69, существует такое число  $\bar{\alpha} > 0$ , что

$$F(c) - \langle c, x \rangle \geq \bar{\alpha} \rho(x, X^*(c))$$

при всех  $x \in X$ . Пусть  $\bar{x} \in \bar{X}$ . Поскольку  $\bar{X} \subset X^*(c)$ , то  $F(c) = \langle c, \bar{x} \rangle$ . Рассмотрим любую точку  $x \in X$  и ее проекцию  $x^*$  на  $X^*(c)$ , т. е.  $\rho(x, X^*(c)) = \|x - x^*\|$ . Тогда для любого  $\alpha > 0$  получаем

$$\begin{aligned} \langle c + \alpha h, x \rangle &\leq F(c) - \bar{\alpha} \rho(x, X^*(c)) + \alpha \langle h, x \rangle = \\ &= \langle c, \bar{x} \rangle - \bar{\alpha} \|x - x^*\| + \alpha \langle h, x^* \rangle + \alpha \langle h, x - x^* \rangle \leq \\ &\leq \langle c, \bar{x} \rangle - \bar{\alpha} \|x - x^*\| + \alpha \langle h, \bar{x} \rangle + \alpha \|h\| \cdot \|x - x^*\| = \\ &= \langle c + \alpha h, \bar{x} \rangle + (\alpha \|h\| - \bar{\alpha}) \|x - x^*\|. \end{aligned}$$

Следовательно, если  $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$  и  $\|h\| = 1$ , то  $\bar{x} \in X^*(c + \alpha h)$ , т. е.  $\bar{X} \subset X^*(c + \alpha h)$ . Таким образом,  $X^*(c + \alpha h) = \bar{X}$ .

**5.97.** Утверждение непосредственно следует из 5.96. Приведем, однако, независимое доказательство. Обозначим через  $I = I(x^*)$  множество активных ограничений в точке  $x^*$ . Согласно 5.57, система

$$\sum_{i \in I} y_i a_i = c, \quad y_i > 0, \quad i \in I,$$

совместна и  $\text{rang } A_I = n$ . Тогда из 4.125, 4.126 следует, что при любом  $c'$ , достаточно близком к  $c$ , система

$$\sum_{i \in I} y_i a_i = c', \quad y_i > 0, \quad i \in I,$$

также совместна. Вновь используя 5.57, получаем, что  $x^*$  — единственное решение задачи  $P(c')$ .

**5.98.** Рассматривая в 5.92 направления  $h = (0, \pm e^j)$ , где  $e^j$  —  $j$ -й единичный орт в  $\mathbf{R}^n$  ( $j = 1, \dots, n$ ), получаем

$$\max_{x \in X^*(c)} x_j = \frac{\partial F^+}{\partial c_j}(c) = \frac{\partial F}{\partial c_j}(c) = \frac{\partial F^-}{\partial c_j}(c) = \min_{x \in X^*(c)} x_j.$$

Отсюда ясно, что множество  $X^*(c)$  состоит из одной точки.

**5.99.** Положим  $I = I(x^*)$ . Согласно теореме 5.3, существуют числа  $y_i^* \geq 0$  ( $i \in I$ ), удовлетворяющие равенству (5.20). Введем числа  $y_i = y_i^* + \lambda_i > 0$  ( $i \in I$ ). Тогда

$$\sum_{i \in I} y_i a_i = c + \sum_{i \in I} \lambda_i a_i = c'.$$

При этом  $\text{rang } A_I = n$ , так как  $x^*$  — вершина. Остается использовать 5.57.

**5.100.** Использовать 5.88.

**5.101, 5.102, 5.105—5.107.** Эти утверждения легко выводятся путем применения соответствующих результатов из 5.93—5.95, 5.97, 5.98 к двойственной задаче  $D(b)$ . Нетрудно доказать их и непосредственно.

**5.104.** а) Поскольку указанная точка  $y^*$  допустима в задаче  $D(b + \alpha e^i)$ , то

$$F(b + \alpha e^i) \leq \langle b + \alpha e^i, y^* \rangle = F(b) + \alpha \langle e^i, y^* \rangle = F(b).$$

Отсюда и из 5.103 следует нужное утверждение.

б) Согласно 5.92, величина

$$F'(b, e^i) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{F(b + \alpha e^i) - F(b)}{\alpha}$$

существует и вычисляется по формуле

$$F'(b, e^i) = \min_{y \in Y^*(b)} y_i.$$

По условию величина, стоящая здесь справа, положительна. Следовательно,  $F(b + \alpha e^i) > F(b)$  при всех достаточно малых  $\alpha > 0$ , а значит, вообще при всех  $\alpha > 0$ , так как  $F$  не убывает.

5.108. Применяя 4.136 к множеству

$$X^*(b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \langle c, x \rangle \geq F(b)\},$$

получаем, что существует константа  $L = L(A, c) > 0$ , для которой

$$d(X^*(b^k), X^*(b)) \leq L(\|b^k - b\| + |F(b^k) - F(b)|).$$

Отсюда и из 5.90 следует нужное утверждение.

5.109. Рассмотрим задачу ЛП

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \min, \\ \langle c^k, x \rangle + d_k &\leq \alpha, \quad k = 1, \dots, s, \\ x &\in X. \end{aligned} \quad (I)$$

Ясно, что если  $x^*$  — решение задачи (5.43) и  $\alpha^* = f(x^*)$ , то  $(x^*, \alpha^*)$  — решение задачи (I). Напротив, если  $(x^*, \alpha^*)$  — решение задачи (I), то  $x^*$  — решение задачи (5.43) и  $f(x^*) = \alpha^*$ .

(Отметим, что этот прием мы уже фактически использовали в решении задач 5.33, 5.34.)

5.110. Указанные задачи сводятся соответственно к следующим задачам ЛП:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \min, \\ \langle c^k, x \rangle + d_k &\leq \alpha, \quad k = 1, \dots, s, \\ -\langle c^k, x \rangle - d_k &\leq \alpha, \quad k = 1, \dots, s, \\ x &\in X \end{aligned} \quad (I)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^s \alpha_k &\rightarrow \min, \\ \langle c^k, x \rangle + d_k &\leq \alpha_k, \quad k = 1, \dots, s, \\ -\langle c^k, x \rangle - d_k &\leq \alpha_k, \quad k = 1, \dots, s, \\ x &\in X. \end{aligned} \quad (II)$$

Ясно, что при  $X \neq \emptyset$  задачи (I) и (II) допустимы, а их значения ограничены снизу нулем. Тогда, согласно теореме 5.2, эти задачи, а значит, и задачи (5.44), (5.45) разрешимы.

5.111. Из условий следует, что величина  $\langle p, x \rangle + q$  либо положительна, либо отрицательна всюду на  $X$ . Пусть без ограниче-

ния общности  $\langle p, x \rangle + q > 0$  для любого  $x \in X$  и  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ .

Рассмотрим следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned} \langle c, z \rangle + \alpha d &\rightarrow \min, \\ Az - \alpha b &\leq 0, \\ \langle p, z \rangle + \alpha q &= 1, \\ \alpha &\geq 0. \end{aligned} \tag{I}$$

Пусть  $x^*$  — решение задачи (5.46). Покажем, что

$$z^* = \frac{x^*}{\langle p, x^* \rangle + q}, \quad \alpha^* = \frac{1}{\langle p, x^* \rangle + q}$$

есть решение задачи (I). Прежде всего заметим, что точка  $(z^*, \alpha^*)$  допустима в задаче (I). Пусть  $(z, \alpha)$  — любая другая ее допустимая точка. Тогда  $\alpha > 0$ , так как при  $\alpha = 0$  получаем, что  $Az \leq 0$  и  $z \neq 0$ , а это противоречит условию ограниченности  $X$  (см. 4.4). Следовательно,  $x = z/\alpha$  — допустимая точка задачи (5.46). Поэтому

$$\frac{\langle c, x^* \rangle + d}{\langle p, x^* \rangle + q} \geq \frac{\langle c, x \rangle + d}{\langle p, x \rangle + q},$$

что можно переписать в виде

$$\langle c, z^* \rangle + \alpha^* d \geq \langle c, z \rangle + \alpha d.$$

Таким образом,  $(z^*, \alpha^*)$  — решение задачи (I). Аналогично показывается, что если  $(z^*, \alpha^*)$  — решение задачи (I), то  $x^* = z^*/\alpha^*$  — решение задачи (5.46).

5.112. Пусть

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid C_1 x \leq d^1\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y C_2 \geq d^2\},$$

где  $C_1 \in \mathcal{A}(k_1, n)$ ,  $C_2 \in \mathcal{A}(m, k_2)$ ,  $d^1 \in \mathbb{R}^{k_1}$ ,  $d^2 \in \mathbb{R}^{k_2}$ . Тогда, согласно теоремам 5.9, 5.11, для любого  $x \in X$  имеем

$$\inf_{y \in Y} \langle y, Ax \rangle = \inf_{y C_2 \geq d^2} \langle y, Ax \rangle = \sup_{\substack{C_2 u = Ax \\ u \geq 0}} \langle d^2, u \rangle$$

(супремум по пустому множеству считается равным  $-\infty$ ). Следовательно,

$$R = \sup_{C_1 x \leq d^1} \sup_{\substack{C_2 u = Ax \\ u \geq 0}} \langle d^2, u \rangle,$$

т. е.  $R$  есть значение задачи ЛП

$$\begin{aligned} \langle d^2, u \rangle &\rightarrow \max, \\ -Ax + C_2 u &= 0, \\ C_1 x &\leq d^1, \\ u &\geq 0. \end{aligned} \tag{I}$$

Аналогично получаем, что  $S$  есть значение задачи

$$\begin{aligned} \langle a^1, v \rangle &\rightarrow \min, \\ -yA + vC_1 &= 0, \\ yC_2 &\geq d^2, \\ v &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Но задачи (I) и (II) взаимодвойственны. Поэтому  $R = S$ . Пусть  $-\infty < R < \infty$ , т. е. допустимое множество задачи (I) непусто, а значение ее конечно. Тогда по теореме 5.2 эта задача имеет решение  $(x^*, u^*)$ . Ясно, что  $x^*$  удовлетворяет равенству из а). Если же  $R = -\infty$ , то данное равенство справедливо для любого  $x^* \in X$ . Утверждение б) доказывается аналогично.

5.113. Рассмотрим двойственную задачу

$$\begin{aligned} by &\rightarrow \min, \\ ya &\geq c. \end{aligned}$$

Ее решением является число  $y^* = \max_{1 \leq j \leq n} (c_j/a_j)$ . Обозначим через  $J$  множество номеров, на которых достигается указанный максимум. Тогда

$$y^* a_j \begin{cases} = c_j, & j \in J, \\ > c_j, & j \notin J. \end{cases}$$

По теореме 5.10 решением прямой задачи служит любая такая допустимая точка  $x = (x_j)$ , что  $x_j = 0$  при всех  $j \notin J$ . При этом решения

$$x_j = \frac{b}{a_j} e^j, \quad j \in J,$$

где  $e^j$  обозначает  $j$ -й единичный орт в  $\mathbf{R}^n$ , являются вершинами допустимого множества. Естественно, решение единственно, если  $J$  состоит из одного элемента.

5.114. Согласно теореме 5.11, данная задача разрешима в том и только том случае, если двойственная задача допустима, т. е. если

$$\max_{1 \leq j \leq k} \frac{c_j}{a_j} \leq \min_{k+1 \leq j \leq n} \frac{c_j}{a_j}. \quad (\text{I})$$

Пусть  $J_1 \subset \{1, \dots, k\}$  и  $J_2 \subset \{k+1, \dots, n\}$  — множества номеров, на которых достигаются указанные максимум и минимум соответственно. Тогда если соотношение (I) выполняется как строгое неравенство (как равенство), то решением исходной задачи служит любая такая допустимая точка  $x = (x_j)$ , что  $x_j = 0$  при всех  $j \notin J_1$  (соответственно  $j \notin (J_1 \cup J_2)$ ).

5.115. Согласно сказанному выше, задача разрешима в том и только том случае, когда

$$\max \left\{ \frac{k}{2}, \frac{-4}{1} \right\} \leq \min \left\{ \frac{-5}{-7}, \frac{3}{-1} \right\} = -3,$$

т. е. если  $k \leq -6$ ; при этом ее решение  $x^*$  описывается формулой

$$x^* = \begin{cases} (0, 2, 0, 0), & \text{если } k \leq -8; \\ (1, 0, 0, 0), & \text{если } -8 \leq k \leq -6. \end{cases}$$

5.116.  $x^* = (8, 0, 0, 17, 10)$ . Выразив переменные  $x_5$  и  $x_6$  через остальные, приходим к задаче типа (5.47).

5.117. Во всех трех задачах без ограничения общности предположим, что

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n}.$$

а) Замена переменных  $x' = x - d$  приводит к задаче типа (5.47). Решением служит точка  $x^*$  с координатами

$$x_j^* = \begin{cases} \left( b - \sum_{i=2}^n a_i d_i \right) / a_1, & j = 1, \\ d_j, & j = 2, \dots, n. \end{cases}$$

б) Выберем максимальный номер  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , для которого

$$\sum_{j=1}^k a_j d_j \leq b$$

(при  $k = 0$  эта сумма считается равной нулю). Покажем, что решением задачи служит точка  $x^*$  с координатами

$$x_j^* = \begin{cases} d_j, & j = 1, \dots, k, \\ \left( b - \sum_{i=1}^k a_i d_i \right) / a_{k+1}, & j = k+1; \\ 0, & j = k+2, \dots, n. \end{cases}$$

Ясно, что эта точка допустима. В частности, условие  $x_{k+1}^* \leq d_{k+1}$  обеспечивается выбором  $k$ . Рассмотрим двойственную задачу

$$\begin{aligned} yb + \langle z, d \rangle &\rightarrow \min, \\ ya + z &\geq c, \quad z \geq 0 \end{aligned}$$

и ее допустимую точку  $(y^*, z^*)$ , где

$$y^* = \frac{c_{k+1}}{a_{k+1}}, \quad z_j^* = \max(0, c_j - a_j y^*), \quad j = 1, \dots, n.$$

Точки  $x^*$  и  $(y^*, z^*)$  удовлетворяют условиям дополняющей жесткости:

$$\begin{aligned} z_j^* (x_j^* - d_j) &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_j^* (y^* a_j + z_j^* - c_j) &= 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда по теореме 5.10 эти точки — решения прямой и двойственной задач соответственно.

в) Данная задача сводится к предыдущей заменой переменных  $x' = x - d^0$ . Выберем максимальный номер  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , для которого

$$\sum_{j=1}^k a_j d_j + \sum_{j=k+1}^n a_j d_j^0 \leq b.$$

Тогда решением служит точка  $x^*$  с координатами

$$x_j^* = \begin{cases} d_j, & j = 1, \dots, k, \\ \left( b - \sum_{i=1}^k a_i d_i - \sum_{i=k+2}^n a_i d_i^0 \right) / a_{k+1}, & j = k+1, \\ d_j^0, & j = k+2, \dots, n. \end{cases}$$

5.118. а)  $x^* = (1, 4, 5, 0)$ .

$$б) x^* = \begin{cases} (0, 0, b), & 0 < b < 1, \\ (b-1, 0, 1), & 1 \leq b < 6, \\ (5, b-6, 1), & 6 \leq b < 10. \end{cases}$$

Перейти к переменным  $y_1 = x_3, y_2 = x_1, y_3 = x_2$ .

$$в) x^* = \begin{cases} (0, 0, b), & 0 < b < 1, \\ (b-1, 0, 1), & 1 \leq b < 6, \\ (5, 0, 1), & 6 \leq b < \infty. \end{cases}$$

Привести задачу к виду

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 &\rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= b, \end{aligned}$$

$$0 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_3 \leq 1, \quad 0 \leq x_4 \leq d,$$

где  $d$  — любое число, большее  $b$ .

г)  $x^* = (2, 3, 5, 2)$ .

д)  $x^* = (3, 4, -1, 6)$ . Сделать замену переменной  $x_3' = -x_3$ .

5.119. Пусть  $x_j$  и  $y_j$  — площади, отводимые под посевы пшеницы и кукурузы соответственно на  $j$ -м поле. Тогда приходим к следующей задаче:

$$7(20x_1 + 35x_2 + 25x_3 + 30x_4) + 5(35y_1 + 50y_2 + 40y_3 + 45y_4) \rightarrow \max,$$

$$20x_1 + 35x_2 + 25x_3 + 30x_4 \geq 12\,000,$$

$$x_1 + y_1 = 400, \quad x_2 + y_2 = 300, \quad x_3 + y_3 = 200, \quad x_4 + y_4 = 100,$$

$$x_j \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

После преобразований получаем задачу типа 5.117, б):

$$7y_1 + y_2 + 5y_3 + 3y_4 \rightarrow \max,$$

$$4y_1 + 7y_2 + 5y_3 + 6y_4 = 2900,$$

$$0 \leq y_1 \leq 400, \quad 0 \leq y_2 \leq 300, \quad 0 \leq y_3 \leq 200, \quad 0 \leq y_4 \leq 100.$$

Т а б л и ц а 26

| Поле | Пшеница | Кукуруза |
|------|---------|----------|
| 1    | —       | 400      |
| 2    | 300     | —        |
| 3    | —       | 200      |
| 4    | 50      | 50       |

Оптимальное сочетание посевов указано в табл. 26.

5.120. Вопрос сводится к следующему: при каких значениях параметра  $p$  задача без ограничения, связанного с госзаказом:

$$p(20x_1 + 35x_2 + 25x_3 + 30x_4) + 5(35y_1 + 50y_2 + 40y_3 + 45y_4) \rightarrow \max, \quad (I)$$

$$x_1 + y_1 = 400, \quad x_2 + y_2 = 300, \quad x_3 + y_3 = 200, \quad x_4 + y_4 = 100,$$

$$x_j \geq 0, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4,$$

имеет такое решение  $((x_j), (y_j))$ , что

$$20x_1 + 35x_2 + 25x_3 + 30x_4 \geq 12\,000?$$

Задачу (I) можно привести к виду

$$(4p - 35)x_1 + (7p - 50)x_2 + (5p - 40)x_3 + (6p - 45)x_4 \rightarrow \max,$$

$$0 \leq x_1 \leq 400, \quad 0 \leq x_2 \leq 300, \quad 0 \leq x_3 \leq 200, \quad 0 \leq x_4 \leq 100.$$

Отсюда легко получаем, что искомыми являются

$$p \geq 45/6 = 7,5.$$

5.121. Если  $X$  имеет вид (5.2), то задачу можно записать так:

$$r \rightarrow \max,$$

$$\langle a_i, x \rangle + r \|a_i\| \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

где  $i$ -е ограничение при  $r > 0$  означает, что сфера радиуса  $r$  с центром в  $x$  принадлежит полупространству  $H_{a_i b_i}^-$  (проверьте с помощью неравенства Коши — Буняковского).

5.122. Согласно сказанному выше, требуется решить следующую задачу ЛП ( $x_3 = r$ ):

$$x_3 \rightarrow \max,$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 50,$$

$$-5x_1 + 12x_2 + 13x_3 \leq 60, \quad (I)$$

$$15x_1 - 8x_2 + 17x_3 \leq 120,$$

$$-x_1 + x_3 \leq -2,$$

$$-x_2 + x_3 \leq 0.$$

Перейдем к двойственной задаче:

$$\begin{aligned}
 50y_1 + 60y_2 + 120y_3 - 2y_4 &\rightarrow \min, \\
 3y_1 - 5y_2 + 15y_3 - y_4 &= 0, \\
 4y_1 + 12y_2 - 8y_3 - y_5 &= 0, \\
 5y_1 + 13y_2 + 17y_3 + y_4 + y_5 &= 1, \\
 y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5.
 \end{aligned}
 \tag{II}$$

Выразим переменные  $y_3, y_4, y_5$  через  $y_1$  и  $y_2$ :

$$\begin{aligned}
 y_3 &= \frac{1}{24} - \frac{1}{2}y_1 - \frac{5}{6}y_2, \\
 y_4 &= \frac{5}{8} - \frac{9}{2}y_1 - \frac{35}{2}y_2, \\
 y_5 &= -\frac{1}{3} + 8y_1 + \frac{56}{3}y_2.
 \end{aligned}
 \tag{III}$$

Отсюда приходим к задаче

$$\begin{aligned}
 -y_1 - 5y_2 &\rightarrow \min, \\
 \frac{1}{2}y_1 + \frac{5}{6}y_2 &\leq \frac{1}{24}, \\
 \frac{9}{2}y_1 + \frac{35}{2}y_2 &\leq \frac{5}{8}, \\
 8y_1 + \frac{56}{3}y_2 &\geq \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Используя геометрические построения, находим ее решение:  $y_1^* = 0, y_2^* = 1/28$ . Учитывая (III), получаем решение задачи (II):

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = \frac{1}{28}, \quad y_3^* = \frac{1}{84}, \quad y_4^* = 0, \quad y_5^* = \frac{1}{3}.$$

При этом ее значение равно  $25/7$ . Тогда, согласно теоремам 5.9 и 5.10, решение  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  задачи (I) обращает в равенства ее второе, третье и пятое ограничения, причем  $x_3^* = 25/7$ . Отсюда без труда находим  $x_1^* = 41/7, x_2^* = 25/7$ . Таким образом,  $(x_1^*, x_2^*)$  — центр искомой окружности, а  $r = x_3^*$  — ее радиус. Эта окружность касается граней полиэдра, порождаемых прямыми  $-5x_1 + 12x_2 = 60, 15x_1 - 8x_2 = 120, x_2 = 0$  и находится на столь близком расстоянии от двух других его граней, что получить ответ с помощью геометрических построений практически невозможно.

5.123. Требуется решить задачу

$$\begin{aligned}
 r &\rightarrow \max, \\
 Ax + ra &\leq b, \\
 -x + re &\leq 0,
 \end{aligned}
 \tag{I}$$

где  $a = (\|a_1\|, \dots, \|a_m\|), e = (1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^m$ . Ясно, что ее реше-

ние существует. Запишем двойственную задачу:

$$\begin{aligned} \langle b, y \rangle &\rightarrow \min, \\ yA - z &= 0, \\ \langle y, a \rangle + \langle z, e \rangle &= 1, \\ y &\geq 0, \quad z \geq 0. \end{aligned} \quad (II)$$

Для любого допустимого вектора  $(y, z)$  задачи (II), очевидно, имеем  $z = yA > 0$ . Следовательно, если  $(x^*, r^*)$  — решение задачи (I), то  $x^* = r^*e$ . Иными словами, искомая сфера касается координатных гиперплоскостей  $H_{e_j} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0\}$ . (В двумерном случае это означает, что ее центр всегда лежит на биссектрисе координатного угла.) При этом  $r^*$  находится как максимальное среди чисел  $r$ , удовлетворяющих условию  $r(Ae + a) \leq b$ , т. е.

$$r^* = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{b_i}{(Ae + a)_i} = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{b_i}{\sum_{j=1}^n a_{ij} + \|a_i\|}.$$

При указанных данных имеем

$$\begin{aligned} r^* &= \min \left\{ \frac{15}{4+2}, \frac{40}{13+7}, \frac{60}{16+10} \right\} = 2, \\ x^* &= (2, 2, 2, 2). \end{aligned}$$

5.124. Составим таблицу перехода к двойственной задаче, например, при  $m = 2$ ,  $n = 3$  (табл. 27). Отсюда ясно, что при произвольных  $m$  и  $n$  двойственная задача имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i p_i + \sum_{j=1}^n b_j q_j &\rightarrow \max, \\ p_i + q_j &\leq c_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (I)$$

Отметим, что при исследовании транспортной задачи двойственную

Таблица 27

|                 |                 |                 |                 |                 |                 |   |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---|
| $x_{11} \geq 0$ | $x_{12} \geq 0$ | $x_{13} \geq 0$ | $x_{21} \geq 0$ | $x_{22} \geq 0$ | $x_{23} \geq 0$ |   |
| $p_1$           | $p_2$           | $q_1$           | $q_2$           | $q_3$           |                 |   |
| 1               | 1               | 1               | 0               | 0               | 0               | = |
| 0               | 0               | 0               | 1               | 1               | 1               | = |
| 1               | 0               | 0               | 1               | 0               | 0               | = |
| 0               | 1               | 0               | 0               | 1               | 0               | = |
| 0               | 0               | 1               | 0               | 0               | 1               | = |
| $\leq$          | $\leq$          | $\leq$          | $\leq$          | $\leq$          | $\leq$          |   |
| $c_{11}$        | $c_{12}$        | $c_{13}$        | $c_{21}$        | $c_{22}$        | $c_{23}$        |   |

задачу чаще записывают в виде

$$\sum_{j=1}^n b_j q_j - \sum_{i=1}^m a_i p_i \rightarrow \max,$$

$$q_j - p_i \leq c_{ij} \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n,$$

т. е. в (I) переменные  $p_i$  заменяются на  $-p_i$ .

5.125. Составим таблицу перехода к двойственной задаче, например, при  $k = 3$  (табл. 28). Подчеркнем, что здесь уже в клет-

Т а б л и ц а 28

|              |              |              |              |        |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------|
|              | $x^1 \geq 0$ | $x^2 \geq 0$ | $x^3 \geq 0$ |        |
| $p^1 \geq 0$ | $A_1$        | 0            | 0            | $\leq$ |
| $p^2 \geq 0$ | 0            | $A_2$        | 0            | $\leq$ |
| $p^3 \geq 0$ | 0            | 0            | $A_3$        | $\leq$ |
| $q \geq 0$   | $B_1$        | $B_2$        | $B_3$        | $\leq$ |
|              | $\geq$       | $\geq$       | $\geq$       |        |
|              | $c^1$        | $c^2$        | $c^3$        |        |

ках стоят целые матрицы и векторы. Из таблицы ясно, что двойственная задача имеет вид

$$\sum_{k=1}^K \langle p^k, b^k \rangle + \langle q, d \rangle \rightarrow \min,$$

$$p^k A_k + q B_k \geq c^k, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$p^k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad q \geq 0.$$

5.126. Из табл. 29, где  $T = 4$ , ясно, что двойственная задача имеет вид

$$\langle p^1, x^0 \rangle \rightarrow \min,$$

$$p^t A_t - p^{t+1} \geq c^t, \quad t = 1, \dots, T-1,$$

$$p^T A_T \geq c^T,$$

$$p^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T.$$

5.127. Ясно, что допустимое множество задачи непусто и ограничено. Следовательно, она имеет решение  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ . Пусть  $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$  — решение двойственной задачи

$$\sum_{i=1}^n b_i y_i \rightarrow \min,$$

$$\sum_{i=j}^n y_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (I)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Согласно теореме 5.10, точки  $x^*$  и  $y^*$  должны удовлетворять условиям дополняющей нежесткости

$$x_j^* \left( \sum_{i=j}^n y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (II)$$

$$y_i^* \left( \sum_{j=1}^i x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (III)$$

Т а б л и ц а 29

|              |              |              |              |        |        |       |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------|--------|-------|
| $x^1 \geq 0$ | $x^2 \geq 0$ | $x^3 \geq 0$ | $x^4 \geq 0$ |        |        |       |
| $p^1$        | $A_1$        | $0$          | $0$          | $0$    | $\leq$ | $x^0$ |
| $p^2$        | $-E$         | $A_2$        | $0$          | $0$    | $\leq$ | $0$   |
| $p^3$        | $0$          | $-E$         | $A_3$        | $0$    | $\leq$ | $0$   |
| $p^4$        | $0$          | $0$          | $-E$         | $A_4$  | $\leq$ | $0$   |
|              | $\geq$       | $\geq$       | $\geq$       | $\geq$ |        |       |
|              | $c^1$        | $c^2$        | $c^3$        | $c^4$  |        |       |

Пусть  $k$  — минимальный номер, на котором достигается  $\min_{1 \leq i \leq n} b_i$ ,

т. е.

$$b_k < b_i, \quad i = 1, \dots, k-1^*), \quad (IV)$$

$$b_k \leq b_i, \quad i = k+1, \dots, n. \quad (V)$$

Покажем, что  $x_1^* = b_k$  и

$$x_j^* = 0, \quad j = 2, \dots, k. \quad (VI)$$

Допустим, что  $x_j^* > 0$  при некотором  $j \in \{2, \dots, k\}$ . Тогда, согласно (II), имеем  $\sum_{i=j}^n y_i^* = c_j$ . Поэтому

$$y_{j-1}^* = \sum_{i=j-1}^n y_i^* - \sum_{i=j}^n y_i^* \geq c_{j-1} - c_j > 0.$$

\*) Естественно, если  $k = 1$ , то данное условие, а также условие (VI) отсутствуют.

Отсюда в силу (III) следует  $\sum_{i=1}^{j-1} x_i^* = b_{j-1}$ . Теперь с учетом (IV) получаем

$$\sum_{i=1}^k x_i^* \geq \sum_{i=1}^{j-1} x_i^* = b_{j-1} > b_k.$$

Но это противоречит допустимости точки  $x^*$  в исходной задаче. Итак, условие (VI) справедливо.

Предположим, что  $x_1^* < b_k$ . Тогда  $y_k^* = 0$  в силу (III), (VI). Поэтому

$$\sum_{i=k+1}^n y_i^* = \sum_{i=k}^n y_i^* \geq c_k > c_{k+1},$$

что, согласно (II), влечет  $x_{k+1}^* = 0$ . Учитывая (V), (VI), имеем

$$\sum_{j=1}^{k+1} x_j^* = x_1^* < b_k \leq b_{k+1}.$$

Следовательно,  $y_{k+1}^* = 0$ . Повторяя это рассуждение, приходим к выводу, что  $y_n^* = 0$ . Но это противоречит допустимости  $y^*$  в задаче (I), где  $c_n > 0$ .

Таким образом, мы определили первые  $k$  координаты точки  $x^*$ . Остальные ее координаты образуют решение задачи

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^n c_j x_j &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=k+1}^i x_j &\leq b_i - b_k, \quad i = k+1, \dots, n, \\ x_j &\geq 0, \quad j = k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Применяя теперь уже к этой задаче описанную процедуру, найдем следующие несколько координат точки  $x^*$ . Ясно, что за конечное число таких шагов будут найдены все координаты этой точки.

5.128. а) В соответствии со сказанным выше решение  $x^* = (x_1^*, \dots, x_6^*)$  находится за три шага:

1-й шаг.  $x_1^* = 1, x_2^* = 0$ . Переходим к задаче

$$c_3 x_3 + c_4 x_4 + c_5 x_5 + c_6 x_6 \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned} x_3 &\leq 5, \\ x_3 + x_4 &\leq 4, \\ x_3 + x_4 + x_5 &\leq 2, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leq 3, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 3, \dots, 6; \end{aligned}$$

2-й шаг.  $x_3^* = 2$ ,  $x_4^* = 0$ ,  $x_5^* = 0$ . Переходим к задаче

$$c_6 x_6 \rightarrow \max,$$

$$0 \leq x_6 \leq 1;$$

3-й шаг. а)  $x_6^* = 1$ .

б)  $x^* = (1, 1, 0, 0, 0, 4, 0)$ .

в)  $x^* = (2, 2, 2, 1, 2)$ .

г)  $x^* = (2, 0, 0, 0, 0)$ .

5.129. Задача, двойственная к исходной, имеет вид

$$\sum_{j=1}^n b_j y_j \rightarrow \max,$$

$$y_j + y_{j+1} = 1, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (I)$$

$$y_1 + y_n = 1,$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Выражая из первых  $n-1$  уравнений все переменные через  $y_n$ , находим, что

$$y_j = \begin{cases} 1 - y_n, & \text{если } j \text{ и } n \text{ разной четности,} \\ y_n, & \text{если } j \text{ и } n \text{ одинаковой четности.} \end{cases} \quad (II)$$

Рассмотрим два случая.

1)  $n$  нечетно. Тогда  $y_1 = y_n$ , и, используя последнее уравнение в (I), получаем, что единственной допустимой точкой и, следовательно, решением задачи (I) служит вектор  $y^* = (1/2, \dots, \dots, 1/2)$ . По теореме 5.9 значение  $f^*$  исходной задачи совпадает со значением задачи (I), т. е.

$$f^* = \frac{1}{2} (b_1 + \dots + b_n).$$

Согласно теореме 5.10, вектор  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  является решением исходной задачи в том и только том случае, если он обращает все ограничения в равенства.

Отсюда находим, что

$$x_k^* = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-1+j} b_j + \sum_{j=k}^n (-1)^{k+j} b_j \right), \quad k = 1, \dots, n$$

(при  $k = 1$  первая сумма отсутствует). Например, если  $n = 5$ , то

$$x_1^* = \frac{1}{2} (b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5),$$

$$x_2^* = \frac{1}{2} (b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5),$$

$$x_3^* = \frac{1}{2} (-b_1 + b_2 + b_3 - b_4 + b_5),$$

$$x_4^* = \frac{1}{2} (b_1 - b_2 + b_3 + b_4 - b_5),$$

$$x_5^* = \frac{1}{2} (-b_1 + b_2 - b_3 + b_4 + b_5).$$

2)  $n$  четно. В этом случае общее решение системы уравнений из (I) описывается соотношениями (II) (т. е. последнее уравнение лишнее). Тогда задача (I) сводится к следующей:

$$y_n B \rightarrow \max, \quad 0 \leq y_n \leq 1, \quad \text{где } B = \sum_{j=1}^n (-1)^j b_j. \quad (\text{III})$$

Решением задачи (III) служит число

$$y_n^* = \begin{cases} 1, & \text{если } B > 0, \\ 0, & \text{если } B < 0, \\ \text{любое число из } [0, 1], & \text{если } B = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим три эти возможности.

а)  $B > 0$ . Тогда решение  $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$  задачи (I) имеет вид

$$y_j^* = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ нечетно,} \\ 1, & \text{если } j \text{ четно.} \end{cases}$$

При этом  $f^* = b_2 + b_4 + \dots + b_n$ . По теореме 5.10 вектор  $x = (x_1, \dots, x_n)$  является решением исходной задачи в том и только том случае, если он допустим и обращает в равенства все ограничения с четными номерами, т. е.

$$x_1 = b_n - x_n, \quad (\text{IV})$$

$$x_{2k+1} = b_{2k} - x_{2k}, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \quad (\text{V})$$

$$x_{2k+1} + x_{2k+2} \geq b_{2k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1. \quad (\text{VI})$$

Подставляя в (VI) выражения для переменных с нечетными номерами из (IV) и (V), получаем

$$x_2 - x_n \geq b_1 - b_n, \quad (\text{VII})$$

$$x_{2k+2} - x_{2k} \geq b_{2k+1} - b_{2k}, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1. \quad (\text{VIII})$$

Перепишем неравенства (VIII) в виде

$$x_{2k} = x_{2k+2} + b_{2k} - b_{2k+1} - u_{2k}, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \quad (\text{IX})$$

где  $u_{2k} \geq 0$  ( $k = 1, \dots, n/2 - 1$ ) — дополнительные переменные. Из (IX) можно все переменные с четными номерами выразить через  $x_n$ :

$$x_{2k} = x_n + \sum_{j=2k}^{n-1} (-1)^j b_j - \sum_{j=k}^{n/2-1} u_{2j}, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1. \quad (X)$$

Из (VII) и (X) при  $k = 1$  получаем условие на числа  $u_{2k}$  ( $k = 1, \dots, n/2 - 1$ ):

$$\sum_{j=1}^{n/2-1} u_{2j} \leq \sum_{j=1}^n (-1)^j b_j = B. \quad (XI)$$

Примем обозначения

$$B_k = \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^j b_j, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$v_k = \sum_{j=k}^{n/2-1} u_{2j}, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

Тогда из (IV), (V), (X) и (XI) следует, что множество решений исходной задачи описывается формулами

$$x_1 = -x_n + b_n,$$

$$x_{2k} = x_n + B_{2k} - v_k, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$x_{2k+1} = -x_n - B_{2k+1} + v_k, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

где  $x_n$  произвольно, а числа  $v_k$  удовлетворяют соотношениям

$$0 \leq v_{n/2-1} \leq \dots \leq v_2 \leq v_1 \leq B = -b_1 + b_2 - \dots + b_n.$$

Например, если  $n = 6$ , то

$$x_1 = -x_6 + b_6,$$

$$x_2 = x_6 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 - v_1,$$

$$x_3 = -x_6 + b_3 - b_4 + b_5 + v_1,$$

$$x_4 = x_6 + b_4 - b_5 - v_2,$$

$$x_5 = -x_6 + b_5 + v_2,$$

где  $x_6$  произвольно и  $0 \leq v_2 \leq v_1 \leq B$ .

б)  $B < 0$ . В этом случае аналогично предыдущему получаем, что множество решений исходной задачи описывается формулами

$$x_{2k-1} = -x_n - B_{2k-1} - v_k, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$x_{2k} = x_n + B_{2k} + v_k, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$x_{n-1} = -x_n + b_{n-1},$$

где  $x_n$  произвольно, а числа  $v_k$  удовлетворяют соотношениям

$$0 \leq v_{n/2-1} \leq \dots \leq v_2 \leq v_1 \leq -B.$$

При этом  $f^* = b_1 + b_3 + \dots + b_{n-1}$ .

в)  $B = 0$ . В данном случае множество решений описывается формулами

$$x_k = (-1)^k(x_n + B_k), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

где  $x_n$  произвольно.

5.130. Обозначим через  $\lambda$  планируемый объем производства продукта, через  $y_j$  объем закупки  $j$ -го сырья. Тогда поставленный вопрос приводит к следующей задаче ЛП:

$$\lambda \rightarrow \max,$$

$$a_j \lambda \leq b_j + y_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (I)$$

$$\sum_{j=1}^n p_j y_j = d, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть  $(\lambda^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$  — ее решение. Покажем, что

$$y_j^* = \max \{0, a_j \lambda^* - b_j\}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (II)$$

Допустим противное, т. е.

$$y_j^* > 0, \quad a_j \lambda^* < b_j + y_j^* \quad (III)$$

при некотором  $j$ . Рассмотрим задачу, двойственную к (I):

$$\sum_{j=1}^n b_j x_j + td \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = d,$$

$$0 \leq x_j \leq p_j t, \quad j = 1, \dots, n.$$

Если  $(x_1^*, \dots, x_n^*, t^*)$  — ее решение, то, согласно теореме 5.10, из (III) следует, что  $x_j^* = p_j t^*$  и  $x_j^* = 0$ . Поэтому  $t^* = 0$  и, значит,  $x_1^* = \dots = x_n^* = 0$ , что невозможно. Таким образом, формула (II) справедлива. Но тогда  $\lambda^*$  является корнем уравнения

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^n p_j \max \{0, a_j \lambda - b_j\} = d. \quad (IV)$$

Чтобы найти  $\lambda^*$ , положим  $c_i = b_i/a_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и без ограничения общности будем считать, что  $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ . Функция  $f(\lambda)$  непрерывна и строго возрастает от 0 до  $\infty$  на полуинтервале  $[c_1, \infty)$ . Поэтому корень  $\lambda^*$  уравнения (IV) существует и единствен. Определим номер  $k$  из условия

$$k = \max \{j | f(c_j) < d, \quad 1 \leq j \leq n\}.$$

Поскольку  $f(c_{k+1}) \geq d$ , то, очевидно,  $c_k < \lambda^* \leq c_{k+1}$ ). На полуинтервале  $(c_k, c_{k+1}]$  функция  $f(\lambda)$  имеет вид

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^k p_j (a_j \lambda - b_j).$$

Следовательно, максимальный объем производства вычисляется по формуле

$$\lambda^* = \left( \sum_{j=1}^k p_j a_j \right)^{-1} \left( d + \sum_{j=1}^k p_j b_j \right).$$

Подставляя  $\lambda^*$  в (II), находим оптимальные объемы закупки сырья:

$$y_j^* = \begin{cases} a_j \lambda^* - b_j, & j = 1, \dots, k, \\ 0, & j = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

5.131. В данном случае  $c_1 = 20$ ,  $c_2 = 30$ ,  $c_3 = 40$ ,  $f(c_1) = 0$ ,  $f(c_2) = 6$ ,  $f(c_3) = 18$ ,

$$\lambda^*(d) = \begin{cases} \frac{d+12}{0,6}, & \text{если } 0 < d \leq 6 & (k=1), \\ \frac{d+30}{1,2}, & \text{если } 6 < d \leq 18 & (k=2), \\ \frac{d+54}{1,8}, & \text{если } d > 18 & (k=3). \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 90.

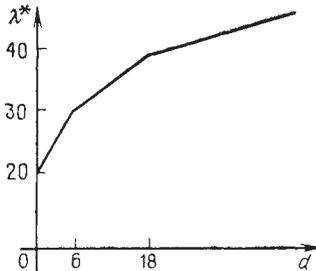


Таблица 30

| $d$ | $\lambda^*$ | $y_1^*$ | $y_2^*$ | $y_3^*$ |
|-----|-------------|---------|---------|---------|
| 3   | 25          | 1       | 0       | 0       |
| 12  | 35          | 3       | 3       | 0       |
| 36  | 50          | 6       | 12      | 3       |

Рис. 90

Оптимальные объемы закупки сырья при указанных значениях  $d$  приведены в табл. 30.

5.132. Обозначим через  $x_j$  количество тонн овощей, которое поручено разгрузить  $j$ -й бригаде, через  $t$  — количество дней, за которые весь состав будет разгружен. Тогда задача минимизации

\*) Если  $k = n$ , то формально полагаем  $c_{n+1} = \infty$ .

расходов может быть записана в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j + ct \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = A, \quad (I)$$

$$0 \leq x_j \leq a_j t, \quad j = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим двойственную задачу

$$A\lambda \rightarrow \max,$$

$$\lambda - y_j \leq p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n a_j y_j = c, \quad (II)$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Заметим, что с точностью до обозначений (II) совпадает с (I) из решения задачи 5.130. Повторя приведенную там схему рассуждений, предположим без ограничения общности, что  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ . Введем функцию

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^n a_j \max\{0, \lambda - p_j\}$$

и номер

$$k = \max\{j \mid f(p_j) < c, \quad 1 \leq j \leq n\}. \quad (III)$$

Тогда решение  $(\lambda^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$  задачи (II) удовлетворяет условиям  $f(\lambda^*) = c$ ,  $p_k < \lambda^* \leq p_{k+1}$  и

$$y_j^* = \max\{0, \lambda^* - p_j\} = \begin{cases} \lambda^* - p_j > 0, & j = 1, \dots, k, \\ 0, & j = k+1, \dots, n. \end{cases} \quad (IV)$$

(Можно легко вывести явную формулу для  $\lambda^*$ ; но здесь это несущественно.) Согласно теореме 5.10, набор  $(x_1^*, \dots, x_n^*, t^*)$  является решением задачи (I) в том и только том случае, когда

$$x_j^* \leq a_j t^*, \quad y_j^* (x_j^* - a_j t^*) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (V)$$

$$x_j^* \geq 0, \quad x_j^* (\lambda^* - y_j^* - p_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (VI)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j^* = A. \quad (VII)$$

Из (IV) следует, что условия (V) и (VI) выполнены, если  $t^* \geq 0$

и

$$x_j^* = \begin{cases} a_j t^*, & j = 1, \dots, k, \\ 0, & j = k + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Отсюда и из (VII) легко получаем, что

$$t^* = A \left/ \sum_{j=1}^k a_j \right.$$

Таким образом, базе следует привлечь  $k$  самых дешевых (по цене за тонну) бригад и распределить работу между ними пропорционально их производительности. При этом время разгрузки

Таблица 31

|       | $x^1$  | $x^2$  | $x^3$  | $x^4$ | $u^1$  | $u^2$  | $u^3$  | $u^4$  |   |           |
|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|---|-----------|
| $p^1$ | $E$    |        |        |       | $-B_1$ |        |        |        | = | $A_0 x^0$ |
| $p^2$ | $-A_1$ | $E$    |        |       |        | $-B_2$ |        |        | = |           |
| $p^3$ |        | $-A_2$ | $E$    |       |        |        | $-B_3$ |        | = |           |
| $p^4$ |        |        | $-A_3$ | $E$   |        |        |        | $-B_4$ | = |           |
| $q^1$ |        |        |        |       | $D_1$  |        |        |        | ≤ | $d^1$     |
| $q^2$ |        |        |        |       |        | $D_2$  |        |        | ≤ | $d^2$     |
| $q^3$ |        |        |        |       |        |        | $D_3$  |        | ≤ | $d^3$     |
| $q^4$ |        |        |        |       |        |        |        | $D_4$  | ≤ | $d^4$     |
|       | =      | =      | =      | =     | =      | =      | =      | =      |   |           |
|       | $c^1$  | $c^2$  | $c^3$  | $c^4$ | $b^1$  | $b^2$  | $b^3$  | $b^4$  |   |           |

определяется, естественно, как отношение всего объема работы к суммарной производительности привлекаемых бригад. Число  $k$ , вычисляемое по формуле (III), тем больше, чем больше штраф за простой состава. Если штраф очень велик ( $c > f(p_n)$ ), то надо привлечь все  $n$  бригад. Полезно обратить внимание на то, что самая дешевая бригада всегда получит работу независимо от ее производительности.

5.133. В данном случае  $f(p_1) = 0$ ,  $f(p_2) = 50$ ,  $f(p_3) = 200$ ,  $f(p_4) = 500$ . Следовательно,  $k = 3$ . При этом  $t^* = 5$ ,  $x_1^* = 50$ ,  $x_2^* = 100$ ,  $x_3^* = 150$ ,  $x_4^* = 0$ .

5.134. Составим таблицу перехода к двойственной задаче для случая  $T = 4$  (табл. 31; в незаполненных местах стоят нули).

Отсюда ясно, что при произвольном  $T$  задача, двойственная к (5.48), имеет вид

$$\langle p^1, A_0 x^0 \rangle + \sum_{t=1}^T \langle q^t, d^t \rangle \rightarrow \min,$$

$$p^T = c^T, \quad p^t = p^{t+1} A_t + c^t, \quad t = T-1, \dots, 1, \quad (\text{I})$$

$$q^t D_t = p^t B_t + b^t, \quad q^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (\text{II})$$

где (I) совпадает с (5.49). Пусть векторы  $p^t, q^t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) образуют решение двойственной задачи. Тогда, согласно теореме 5.10, последовательность управлений  $\bar{u}^t \in U_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) оптимальна в том и только том случае, если

$$\langle q^t, D_t \bar{u}^t - d^t \rangle = 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (\text{III})$$

но в силу той же теоремы 5.10 (или 5.3) условия (II), (III) равносильны тому, что при каждом фиксированном  $t = 1, \dots, T$  вектор  $\bar{u}^t$  является решением задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t(u) = \langle p^t B_t + b^t, u \rangle \rightarrow \max, \\ D_t u \leq d^t. \end{aligned}$$

5.135. Ясно, что

$$p^t = c(E + A + A^2 + \dots + A^{T-t}), \quad t = 1, \dots, T,$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ . В то же время из известных фактов линейной алгебры [21, с. 125] следует, что при любом  $\tau = 1, 2, \dots$

$$Q^{-1} A^\tau Q = \begin{bmatrix} \lambda_1^\tau & & & 0 \\ & \lambda_2^\tau & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^\tau \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^\tau E_j.$$

Отсюда

$$A^\tau = \sum_{j=1}^n \lambda_j^\tau Q E_j Q^{-1} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^\tau R_j.$$

Таким образом,

$$p^t = c \sum_{j=1}^n (1 + \lambda_j + \lambda_j^2 + \dots + \lambda_j^{T-t}) R_j = c \sum_{j=1}^n \frac{1 - \lambda_j^{T-t+1}}{1 - \lambda_j} R_j.$$

(Ясно, что если одно из собственных чисел равно 1, то множитель при соответствующей матрице окажется равным просто  $T - t + 1$ .)

5.136. Обозначим через  $x_1^t, x_2^t$  численность волков и косуль соответственно в конце года  $t$ , через  $u_1^t, u_2^t$  — число лицензий, выдан-

ных для охоты на волков и косуль соответственно в году  $t$ .  
Положим

$$x^t = (x_1^t, x_2^t), \quad u^t = (u_1^t, u_2^t),$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\gamma & \beta \end{bmatrix}, \quad b = (b_1, b_2), \quad c = (0, -\bar{c}).$$

Тогда формальная запись рассматриваемой задачи такова:

$$\sum_{t=1}^T \langle c, x^t \rangle + \sum_{t=1}^T \langle b, u^t \rangle \rightarrow \max,$$

$$x^t = Ax^{t-1} - u^t, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$\langle e, u^t \rangle = d, \quad u^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T,$$

где  $e = (1, 1)$ ,  $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$  — заданный вектор, описывающий начальную численность популяций. Требуемое по смыслу условие  $x^t \geq 0$  считается выполненным в силу предположения о малости параметра  $d$ . Отметим также, что вместо неравенства  $\langle e, u^t \rangle \leq d$  сразу поставлено равенство, поскольку, очевидно, хозяйству всегда выгодно выдавать все  $d$  лицензий (этот факт нетрудно вывести и формально).

Согласно дискретному принципу максимума, последовательность допустимых управлений  $u^t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) оптимальна в том и только том случае, если для любого  $t = 1, \dots, T$  вектор  $u^t$  является решением следующей задачи ЛП:

$$\langle h^t, u \rangle \rightarrow \max,$$

$$\langle e, u \rangle = d, \quad u \geq 0,$$

где  $h^t = b - p^t$ ,  $p^t = p^{t+1}A + c$  ( $t = 1, \dots, T-1$ ),  $p^T = c$ .  
Следовательно,

$$u^t = \begin{cases} (d, 0), & \text{если } h_1^t > h_2^t, \\ (0, d), & \text{если } h_1^t < h_2^t, \\ \text{любой допустимый вектор,} & \text{если } h_1^t = h_2^t. \end{cases}$$

Для удобства вычислений введем в рассмотрение вектор  $\tilde{e} = (1, -1)$ . Тогда неравенство  $h_1^t > h_2^t$  равносильно условию  $\langle h^t, \tilde{e} \rangle > 0$ . Из 5.135 следует, что

$$p^t = \frac{1 - \lambda_1^\tau}{1 - \lambda_1} cR_1 + \frac{1 - \lambda_2^\tau}{1 - \lambda_2} cR_2, \quad t = 1, \dots, T,$$

где  $\tau = T - t + 1$ . Поэтому

$$\langle h^t, \tilde{e} \rangle = b_1 - b_2 - \frac{1 - \lambda_1^\tau}{1 - \lambda_1} \langle cR_1, \tilde{e} \rangle - \frac{1 - \lambda_2^\tau}{1 - \lambda_2} \langle cR_2, \tilde{e} \rangle.$$

Используя обозначения из 5.135, для имеющихся числовых данных получаем:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 1/25 \\ -6 & 7/5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \frac{6}{5}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{5}, \\
 Q &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 30 & -1 \end{pmatrix}, \\
 R_1 &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -150 & 30 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 30 & -1 \\ 150 & -5 \end{pmatrix}, \\
 cR_1 &= \left( 12, -\frac{12}{5} \right), \quad cR_2 = \left( -12, \frac{2}{5} \right), \\
 \langle cR_1, \tilde{e} \rangle &= \frac{72}{5}, \quad \langle cR_2, \tilde{e} \rangle = -\frac{62}{5}, \\
 \langle h^t, \tilde{e} \rangle &= \frac{275}{2} - 72 \left( \frac{6}{5} \right)^\tau - \frac{31}{2} \left( \frac{1}{5} \right)^\tau.
 \end{aligned}$$

С помощью калькулятора убеждаемся, что неравенство  $\langle h^t, \tilde{e} \rangle > 0$  выполнено только при  $\tau = 1, 2, 3$ , т. е. при  $t = 10, 9, 8$ . Таким образом, в первые семь лет следует продавать только лицензии для охоты на косуль, в последующие три года — только на отстрел волков.

5.137. Обозначим через  $x_1^t, x_2^t$  число больных и вирусоносителей соответственно в конце месяца  $t$ , через  $u_1^t, u_2^t$  — количество вакцинированных больных и вирусоносителей соответственно в месяце  $t$ . Положим  $x^t = (x_1^t, x_2^t)$ ,  $u^t = (u_1^t, u_2^t)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & -\mu \end{pmatrix}, \quad c = (-1, 0).$$

Пусть в месяце  $t$  производится  $d_t$  индивидуальных доз вакцины. Тогда сформулированная задача может быть записана в виде

$$\alpha \sum_{t=1}^T \langle c, x^t \rangle \rightarrow \max,$$

$$x^t = Ax^{t-1} + Bu^t, \quad t = 1, \dots, T \quad (T = 12),$$

$$\langle e, u^t \rangle = d_t, \quad u^t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T,$$

где  $e = (1, 1)$ ,  $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$  — заданный вектор, описывающий численность больных и вирусоносителей перед началом вакцинации.

Согласно дискретному принципу максимума, последовательность допустимых управлений  $u^t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) оптимальна в том и только том случае, если для любого  $t = 1, \dots, T$  вектор  $u^t$  является решением следующей задачи ЛП:

$$\langle h^t, u \rangle \rightarrow \max,$$

$$\langle e, u \rangle = d_t, \quad u \geq 0,$$

где  $h^t = p^t B$ ,  $p^t = p^{t+1} A + c$  ( $t = 1, \dots, T-1$ ),  $p^T = c$ . Следовательно,

$$u^t = \begin{cases} (d_t, 0), & \text{если } \langle h^t, \tilde{e} \rangle > 0, \\ (0, d_t), & \text{если } \langle h^t, \tilde{e} \rangle < 0, \\ \text{любой допустимый вектор,} & \text{если } \langle h^t, \tilde{e} \rangle = 0, \end{cases}$$

где  $\tilde{e} = (1, -1)$ . Из 5.135 получаем, что

$$\langle h^t, \tilde{e} \rangle = \frac{1 - \lambda_1^\tau}{1 - \lambda_1} \langle cR_1 B, \tilde{e} \rangle + \frac{1 - \lambda_2^\tau}{1 - \lambda_2} \langle cR_2 B, \tilde{e} \rangle,$$

где  $\tau = T - t + 1$ . Проведем вычисления для имеющихся числовых данных:

$$A = \begin{pmatrix} 4/5 & 4/11 \\ 11/10 & 11/10 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \frac{8}{5}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{10},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{143} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -11 & 5 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \frac{1}{143} \begin{pmatrix} 55 & 40 \\ 121 & 88 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{143} \begin{pmatrix} 88 & -40 \\ -121 & 55 \end{pmatrix},$$

$$cR_1 = \frac{1}{143} (-55, -40), \quad cR_2 = \frac{1}{143} (-88, 40),$$

$$B = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix},$$

$$cR_1 B = \frac{1}{429} (30, 40), \quad cR_2 B = \frac{1}{429} (256, -40),$$

$$\langle cR_1 B, \tilde{e} \rangle = -\frac{10}{429}, \quad \langle cR_2 B, \tilde{e} \rangle = \frac{296}{429},$$

$$\langle h^t, \tilde{e} \rangle = \frac{10}{9009} \left( 923 - 35 \left( \frac{8}{5} \right)^\tau - 888 \left( \frac{3}{10} \right)^\tau \right).$$

С помощью калькулятора находим, что неравенство  $\langle h^t, \tilde{e} \rangle > 0$  выполнено только при  $\tau = 1, 2, \dots, 6$ , т. е. при  $t = 12, 11, \dots, 7$ . Таким образом, в первые полгода следует вакцинировать только вирусносителей, а в оставшиеся полгода — только больных.

5.138. Введем следующие обозначения:

$u_t$  — стоимость оборудования, закупленного в начале года  $t$  (текущие капиталовложения);

$K_t$  — величина основных фондов на начало года  $t$  с учетом текущих капиталовложений;

$S_t$  — сумма денег на начало года  $t$  за вычетом затрат на текущие капиталовложения.

Положим  $\gamma = 1 - \mu$ . Тогда проблему определения оптимальной политики капиталовложений можно формализовать в виде

следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned}
 S_T + \alpha K_T &\rightarrow \max, \\
 K_t &= \gamma K_{t-1} + u_t, & t = 1, \dots, T, \\
 S_t &= S_{t-1} + \alpha K_{t-1} - u_t, & t = 1, \dots, T, \\
 S_t \geq 0, \quad u_t &\geq 0, & t = 1, \dots, T,
 \end{aligned} \tag{I}$$

где  $K_0 = 0$ ,  $S_0 > 0$  — заданная сумма начальных денежных средств. Целевая функция выражает объем накопленных денег к концу года  $T$  — началу года  $T + 1$ . Заметим, что (I) не относится к классу задач типа (5 48), поскольку содержит условие  $S_t \geq 0$ . Поэтому дискретный принцип максимума здесь неприменим.

Составим таблицу перехода к двойственной задаче для случая  $T = 4$  (табл. 32). Отсюда ясно, что при произвольном  $T$  двой-

Таблица 32

|       | $K_1$     | $K_2$     | $K_3$     | $K_4$    | $S_1$  | $S_2$  | $S_3$  | $S_4$  | $u_1$  | $u_2$  | $u_3$  | $u_4$  |         |
|-------|-----------|-----------|-----------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| $r_1$ | 1         |           |           |          |        |        |        |        | -1     |        |        |        | =       |
| $r_2$ | $-\gamma$ | 1         |           |          |        |        |        |        |        | -1     |        |        | =       |
| $r_3$ |           | $-\gamma$ | 1         |          |        |        |        |        |        |        | -1     |        | =       |
| $r_4$ |           |           | $-\gamma$ | 1        |        |        |        |        |        |        |        | -1     | =       |
| $p_1$ |           |           |           |          | 1      |        |        |        | 1      |        |        |        | = $S_0$ |
| $p_2$ | $-\alpha$ |           |           |          | -1     | 1      |        |        |        | 1      |        |        | =       |
| $p_3$ |           | $-\alpha$ |           |          |        | -1     | 1      |        |        |        | 1      |        | =       |
| $p_4$ |           |           | $-\alpha$ |          |        |        | -1     | 1      |        |        |        | 1      | =       |
|       | =         | =         | =         | =        | $\geq$ |         |
|       |           |           |           | $\alpha$ |        |        |        | 1      |        |        |        |        |         |

ственная задача имеет вид

$$\begin{aligned}
 S_0 p_1 &\rightarrow \min, \\
 r_t &= \gamma r_{t+1} + \alpha p_{t+1}, & t = 1, \dots, T, \\
 p_t &\geq p_{t+1}, & t = 1, \dots, T, \\
 p_t &\geq r_t, & t = 1, \dots, T,
 \end{aligned} \tag{II}$$

где полагаем  $r_{T+1} = 0$ ,  $p_{T+1} = 1$ . Очевидно, что задачи (I) и (II) допустимы, а поэтому, согласно теореме 5.11, обе имеют решение.

Из структуры ограничений задача (II) ясно, что для минимизации целевой функции следует стремиться к уменьшению каждой из переменных  $p_T, \dots, p_1$ . Поэтому для решения  $(r_t, p_t; t = 1, \dots, T)$  задачи (II) имеют место соотношения

$$p_t = \max \{r_t, p_{t+1}\}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Положим

$$\tau = \max \{t | r_t > p_{t+1}, 1 \leq t \leq T\}.$$

Если множество в фигурных скобках пусто, считаем  $\tau = 0$ . Поскольку  $r_T = \alpha$ ,  $p_{T+1} = 1$  и  $\alpha < 1$ , то  $\tau < T$ . По определению  $\tau$  имеем

$$r_t \leq p_{t+1}, \quad t = \tau + 1, \dots, T.$$

В таком случае

$$p_t = \max \{r_t, p_{t+1}\} = p_{t+1} = 1, \quad t = \tau + 1, \dots, T.$$

Тогда

$$r_t = \gamma r_{t+1} + \alpha, \quad t = \tau, \dots, T,$$

где, напомним,  $r_{T+1} = 0$ . Из этих соотношений получаем

$$r_t = \alpha \cdot \frac{1 - \gamma^{T-t+1}}{1 - \gamma}, \quad t = \tau, \dots, T.$$

Следовательно,

$$\tau = \max \left\{ t \left| \alpha \frac{1 - \gamma^{T-t+1}}{1 - \gamma} > 1, 1 \leq t \leq T \right. \right\}.$$

Отсюда нетрудно вывести явную формулу для  $\tau$ . Обозначим

$$Q = (\ln \gamma)^{-1} \ln \left( 1 - \frac{1 - \gamma}{\alpha} \right) > 1.$$

Тогда, очевидно,  $\tau = \max \{0, T - \tilde{T}\}$ , где  $\tilde{T} = \lfloor Q \rfloor$  — целая часть числа  $Q$ .

Предположим для простоты, что  $Q$  не является целым числом. В таком случае неравенство  $r_{\tau+1} \leq 1$  выполняется как строгое. При этом  $r_T < r_{T-1} < \dots < r_{\tau+1}$ . Таким образом,

$$1 = p_t > r_t, \quad t = \tau + 1, \dots, T.$$

Отсюда в силу теоремы 5.10 следует, что решение  $(K_t, S_t, u_t; t = 1, \dots, T)$  задачи (I) должно удовлетворять условию

$$u_t = 0, \quad t = \tau + 1, \dots, T. \quad (\text{III})$$

Пусть  $\tau = 0$ . Тогда  $u_t = 0$ ,  $K_t = 0$ ,  $S_t = S_0$ ,  $t = 1, \dots, T$ , т. е. при  $T \leq \tilde{T}$  аренда не имеет смысла.

Предположим теперь, что  $\tau \geq 1$ . Поскольку

$$p_\tau = \max \{r_\tau, 1\} = r_\tau,$$

то в случае  $\tau > 1$  можем записать

$$r_{\tau-1} = \gamma r_\tau + \alpha r_\tau = (\gamma + \alpha) r_\tau > r_\tau,$$

так как  $\gamma + \alpha = 1 - \mu + \alpha > 1$ . Продолжая вычисления, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} p_t &= r_t, & t &= 1, \dots, \tau, \\ r_t &= (\gamma + \alpha)^{\tau-t} r_\tau, & t &= 1, \dots, \tau. \end{aligned}$$

Следовательно,  $p_t > p_{t+1}$ ,  $t = 1, \dots, \tau$ .

Ясно, что это неравенство справедливо и при  $\tau = 1$ . Отсюда, применяя теорему 5.10, извлекаем следующую информацию относительно решения задачи (I):

$$S_t = 0, \quad t = 1, \dots, \tau. \quad (IV)$$

Из (III), (IV) следует, что остальные компоненты решения должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} K_t &= \gamma K_{t-1} + u_t, & t &= 1, \dots, \tau, \\ u_1 &= S_0, \quad u_t = \alpha K_{t-1}, & t &= 2, \dots, \tau; \\ K_t &= \gamma K_{t-1}, & t &= \tau + 1, \dots, T, \\ S_t &= S_{t-1} + \alpha K_{t-1}, & t &= \tau + 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно находим, что решение задачи (I) вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} K_t &= (\alpha + \gamma)^{t-1} S_0, & t &= 1, \dots, \tau, \\ S_t &= 0, & t &= 1, \dots, \tau, \\ u_1 &= S_0, \quad u_t = \alpha (\alpha + \gamma)^{t-2} S_0, & t &= 2, \dots, \tau; \\ K_t &= \gamma^{t-\tau} (\alpha + \gamma)^{\tau-1} S_0, & t &= \tau + 1, \dots, T, \\ S_t &= \alpha (\alpha + \gamma)^{\tau-1} \frac{1 - \gamma^{T-t}}{1 - \gamma} S_0, & t &= \tau + 1, \dots, T, \\ u_t &= 0, & t &= \tau + 1, \dots, T, \end{aligned}$$

а значение задачи — по формуле

$$S_T + \alpha K_T = \alpha (\alpha + \gamma)^{\tau-1} \frac{1 - \gamma^{T-\tau+1}}{1 - \gamma} S_0. \quad (V)$$

Таким образом, оптимальная политика капиталовложений (при  $T > \tilde{T}$ ) состоит в следующем: первые  $\tau$  лет всю прибыль следует затрачивать на приобретение нового оборудования, после чего, наоборот, капиталовложения следует прекратить. При этом к концу года  $T$  объем накопленных денежных средств составит величину (V).

## § 6

6.1. Необходимо выяснить, какие из систем столбцов  $\{a^1, a^2, a^4\}$  ( $l = 1, 3, 5, 6$ ) линейно независимы\*). С этой целью вычис-

\* Здесь и далее под  $a^1, a^2, \dots$  понимаются столбцы матрицы рассматриваемой системы уравнений.

лим четыре определителя:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Отсюда заключаем, что базисами вершины  $x^0$  служат системы  $\{a^3, a^2, a^4\}$  и  $\{a^5, a^2, a^4\}$ .

6.2. Если  $k \neq 4$ ,  $k \neq 15$ , то базисами служат системы  $\{a^1, a^2, a^3\}$ ,  $\{a^1, a^4, a^3\}$  и  $\{a^2, a^4, a^3\}$ ; если  $k = 15$ , то базисами будут только первая и третья из указанных систем. При  $k = 4$  базисы отсутствуют (в этом случае ранг матрицы равен 2).

6.3. а) Единственным базисом вершины  $x^0$  является система векторов  $\{a^1, a^4\}$ . Выразим через этот базис столбцы  $a^2, a^3, a^5$ . Составляем систему

$$a^1\lambda_{12} + a^4\lambda_{42} = a^2,$$

т. е.

$$\begin{aligned} -5\lambda_{12} + \lambda_{42} &= 6, \\ \lambda_{12} - 4\lambda_{42} &= -5. \end{aligned}$$

Находим  $\lambda_{12} = -1$ ,  $\lambda_{42} = 1$ .

Аналогично из систем

$$a^1\lambda_{13} + a^4\lambda_{43} = a^3, \quad a^1\lambda_{15} + a^4\lambda_{45} = a^5$$

находим  $\lambda_{13} = 2$ ,  $\lambda_{43} = 3$ ,  $\lambda_{15} = -4$ ,  $\lambda_{45} = -6$ . Вычислим оценки замещения:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 2\lambda_{12} - \lambda_{42} + 4 = 1, \\ \Delta_3 &= 2\lambda_{13} - \lambda_{43} - 1 = 0, \\ \Delta_5 &= 2\lambda_{15} - \lambda_{45} - 3 = -5. \end{aligned}$$

Поскольку  $\Delta_5 < 0$ ,  $\lambda_{15} < 0$ ,  $\lambda_{45} < 0$ , то, согласно теореме 6.2, имеет место утверждение Б.

б) Проводя вычисления, аналогичные предыдущим, получаем  $\Delta_4 = -6 < 0$ ,  $\lambda_{34} = 3 > 0$ . Тогда по теореме 6.3 имеет место утверждение В.

в) В данном случае  $\Delta_1 = 8$ ,  $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$ . Поэтому в силу теоремы 6.1 справедливо утверждение А.

г) Утверждения Б и В одновременно.

6.4. а) Нетрудно видеть, что  $x^*$  — невырожденная вершина. Решая системы

$$a^2\lambda_{2k} + a^3\lambda_{3k} + a^4\lambda_{4k} = a^k, \quad k = 1, 5, 6,$$

находим

$$\begin{aligned} \lambda_{21} = \lambda_{31} &= 1, & \lambda_{41} &= -1; \\ \lambda_{25} = \lambda_{45} &= 1, & \lambda_{35} &= -1; \\ \lambda_{26} &= -1, & \lambda_{36} = \lambda_{46} &= 1. \end{aligned}$$

Вычислим оценки замещения:

$$\Delta_1 = k^2 - 2k - 3, \quad \Delta_5 = k^2 + 2k - 3, \quad \Delta_6 = -k^2 + 2k + 8.$$

Из теоремы 6.1—6.3 следует (см. 6.22), что невырожденная вершина  $x^*$  является решением задачи при данном  $k$  в том и только том случае, если  $\Delta_1 \geq 0$ ,  $\Delta_5 \geq 0$ ,  $\Delta_6 \geq 0$ . Решая эту систему неравенств, получаем ответ:  $3 \leq k \leq 4$ .

б)  $k = 2$ .

в) Таких  $k$  не существует.

6.5. а) Столбцы  $a^3$  и  $a^4$  образуют естественный базис в  $\mathbb{R}^2$ , и, значит, коэффициенты разложения по нему столбцов  $a^1$  и  $a^2$  совпадают с их координатами. С учетом этого легко строится начальная симплекс-таблица (табл. 33). Для удобства вычисления оценок

Т а б л и ц а 33 \*)

|           | $a^1$              | $a^2$               | $a^3$              | $a^4$              | $b$                        |
|-----------|--------------------|---------------------|--------------------|--------------------|----------------------------|
| $c_3 = 2$ |                    |                     |                    |                    |                            |
| $c_4 = 1$ |                    |                     |                    |                    |                            |
| $a^3$     | $\lambda_{31} = 1$ | $\lambda_{32} = -1$ | $\lambda_{33} = 1$ | $\lambda_{34} = 0$ | $x_3 = 1$                  |
| $a^4$     | $\lambda_{41} = 2$ | $\lambda_{42} = 1$  | $\lambda_{43} = 0$ | $\lambda_{44} = 1$ | $x_4 = 5$                  |
| $\Delta$  | $\Delta_1 = -1$    | $\Delta_2 = -2$     | $\Delta_3 = 0$     | $\Delta_4 = 0$     | $\langle c, x \rangle = 7$ |
|           | $c_1 = 5$          | $c_2 = 1$           | $c_3 = 2$          | $c_4 = 1$          |                            |

замещения слева от таблицы записан столбец из коэффициентов целевой функции, соответствующих базису  $\{a^3, a^4\}$ , а снизу — строка всех ее коэффициентов. Тогда вычисление оценки  $\Delta_k$  сводится к умножению указанного столбца на столбец коэффициентов ( $\lambda_{3k}$ ,  $\lambda_{4k}$ ) и вычитанию из результата коэффициента  $c_k$ , стоящего снизу.

Для построенной симплекс-таблицы выполнено условие III, причем в качестве столбца, вводимого в базис, можно взять  $a^1$  или

Т а б л и ц а 34

|          | $a^1$ | $a^2$   | $a^3$ | $a^4$ | $b$ |
|----------|-------|---|-------|-------|-----|
| $a^1$    | 1     | -1  | 1     | 0     | 1   |
| $a^4$    | 0     | <span style="border: 1px solid black;">3</span> | -2    | 1     | 3   |
| $\Delta$ | 0     | -3  | 1     | 0     | 8   |

$a^2$ . Следуя правилу Блэнда, выберем  $a^1$  ( $s = 1$ ). Поскольку  $x_3/\lambda_{31} = 1$ ,  $x_4/\lambda_{41} = 5/2$ , то из базиса следует вывести  $a^3$  ( $r = 3$ ). Таким образом, ведущим является элемент  $\lambda_{31}$ . Проведем преобразование, указанные в п. 3, получаем новую симплекс-таблицу

\*) В данной таблице для большей наглядности выписаны обозначения числовых параметров. В дальнейшем они опускаются.

(табл. 34). Здесь выполнено условие III, причем ведущим является элемент  $\lambda_{42}$ . Переходим к следующей симплекс-таблице (табл. 35). Теперь ведущим служит элемент  $\lambda_{13}$ . Строим очередную симплекс-таблицу (табл. 36). Здесь выполнено условие I. Следовательно,  $x^* = (0, 5, 6, 0)$  — решение задачи,  $\langle c, x^* \rangle = 17$  — ее значение.

Таблица 35

|          | $a^1$ | $a^2$ | $a^3$         | $a^4$ | $b$ |
|----------|-------|-------|---------------|-------|-----|
| $a^1$    | 1     | 0     | $\boxed{1/3}$ | 1/3   | 2   |
| $a^2$    | 0     | 1     | -2/3          | 1/3   | 1   |
| $\Delta$ | 0     | 0     | -1            | 1     | 11  |

Таблица 36

|          | $a^1$ | $a^2$ | $a^3$ | $a^4$ | $b$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $a^3$    | 3     | 0     | 1     | 1     | 6   |
| $a^2$    | 2     | 1     | 0     | 1     | 5   |
| $\Delta$ | 3     | 0     | 0     | 2     | 17  |

б)  $x^* = (3, 0, 4, 0)$ .

в) Начальная и две последующие симплекс-таблицы сведены воедино в табл. 37. Отсюда заключаем, что решением служит точка  $x^* = (3, 0, 0, 0, 2)$ .

Таблица 37

|          | $a^1$       | $a^2$ | $a^3$ | $a^4$ | $a^5$ | $a^6$       | $b$ |
|----------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------------|-----|
| $a^3$    | -1          | 1     | 1     | 1     | 0     | 2           | 1   |
| $a^5$    | $\boxed{1}$ | 1     | 0     | -1    | 1     | -1          | 1   |
| $\Delta$ | -5          | -1    | 0     | 5     | 0     | 4           | 6   |
| $a^3$    | 0           | 2     | 1     | 0     | 1     | $\boxed{1}$ | 2   |
| $a^1$    | 1           | 1     | 0     | -1    | 1     | -1          | 1   |
| $\Delta$ | 0           | 4     | 0     | 0     | 5     | -1          | 11  |
| $a^6$    | 0           | 2     | 1     | 0     | 1     | 1           | 2   |
| $a^1$    | 1           | 3     | 1     | -1    | 2     | 0           | 3   |
| $\Delta$ | 0           | 6     | 1     | 0     | 6     | 0           | 13  |

г)  $x^* = (0, 1, 0, 1, 1)$ . Перейти к задаче максимизации.

д) Выберем в качестве базиса вершины  $x^0$  систему  $\{a^1, a^2, a^3\}$ . Процесс вычислений показан в табл. 38. В итоге находим решение:  $x^* = (0, 0, 1, 0, 1)$ .

е) Процедура симплекс-метода (с правилом Блэнда) приводит к перебору базисов вершины  $x^0$ :

$$\{a^1, a^2, a^3, a^4\} \rightarrow \{a^5, a^2, a^3, a^4\} \rightarrow \{a^5, a^2, a^6, a^4\}.$$

При этом для третьего базиса оказывается выполненным условие I. Следовательно,  $x^0$  — решение задачи.

Т а б л и ц а 38 \*)

|          | $a^1$ | $a^2$ | $a^3$ | $a^4$ | $a^5$ | $b$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $a^1$    | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1   |
| $a^2$    | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0   |
| $a^3$    | 0     | 0     | 1     | 0     | -1    | 0   |
| $\Delta$ | 0     | 0     | 0     | -2    | -1    | 3   |
| $a^1$    | 1     | -1    | 0     | 0     | 1     | 1   |
| $a^4$    | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0   |
| $a^3$    | 0     | 0     | 1     | 0     | -1    | 0   |
| $\Delta$ | 0     | 2     | 0     | 0     | -1    | 3   |
| $a^5$    |       |       |       |       |       | 1   |
| $a^4$    |       |       |       |       |       | 0   |
| $a^3$    |       |       |       |       |       | 1   |
| $\Delta$ | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 4   |

6.6. а) Введем дополнительные неотрицательные переменные  $x_6, x_7, x_8$ , приводящие ограничения-неравенства к равенствам. Поскольку правые части ограничений положительны, то переменные  $x_6, x_7, x_8$  можно взять за базисные. Соответствующие им столбцы  $a^6, a^7, a^8$  являются единичными ортами в  $R^3$ , и, значит, коэффициенты разложения по этому базису векторов  $a^1, \dots, a^5$  совпадают с их координатами. Три итерации симплекс-метода указаны в табл. 39. Отсюда заключаем, что решением исходной задачи служит точка  $x^* = (0, 3, 0, 2, 0)$ , в которой первое ограничение является неактивным.

б)  $x^* = (9/4, 3/2, 0, 1/4)$ .

в)  $x^* = (1, 0, 0, 0)$ .

6.7. а) Согласно методу искусственного базиса, требуется решить симплекс-методом задачу

$$\begin{aligned} & -x_5 - x_6 \rightarrow \max, \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 1, \\ & x_1 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 1, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6, \end{aligned}$$

\*) Здесь и далее ненужные элементы в последней симплекс-таблице опущены.

начав с вершины  $x = (0, 0, 0, 0, 1, 1)$ . Процесс вычислений показан в табл. 40. В результате приходим к случаю Б и, более точно, к случаю Б.2 из п. 4. Следовательно,  $X \neq \emptyset$  и  $x^0 = (1, 0, 0, 0)$  — вершина  $X$ ; при этом в базис вместо  $a^6$  можно ввести  $a^2$  или  $a^3$ . Чтобы ввести  $a^2$ , произведем соответствующие элементарные опе-

Т а б л и ц а 39

|          | $a^1$ | $a^2$ | $a^3$ | $a^4$ | $a^5$ | $a^6$ | $a^7$ | $a^8$ | $b$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $a^6$    | 1     | 2     | -1    | -2    | 1     | 1     | 0     | 0     | 3   |
| $a^7$    | -1    | -1    | 1     | 2     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1   |
| $a^8$    | 2     | 1     | 1     | -1    | 0     | 0     | 0     | 1     | 1   |
| $\Delta$ | 1     | -1    | 2     | -3    | -1    | 0     | 0     | 0     | 0   |
| $a^6$    | -3    | 0     | -3    | 0     | 1     | 1     | 0     | -2    | 1   |
| $a^7$    | 1     | 0     | 2     | 1     | 1     | 0     | 1     | 1     | 2   |
| $a^2$    | 2     | 1     | 1     | -1    | 0     | 0     | 0     | 1     | 1   |
| $\Delta$ | 3     | 0     | 3     | -4    | -1    | 0     | 0     | 1     | 1   |
| $a^6$    |       |       |       |       |       |       |       |       | 1   |
| $a^4$    |       |       |       |       |       |       |       |       | 2   |
| $a^2$    |       |       |       |       |       |       |       |       | 3   |
| $\Delta$ | 7     | 0     | 11    | 0     | 3     | 0     | 4     | 5     | 9   |

Т а б л и ц а 40

|          | $a^1$ | $a^2$ | $a^3$ | $a^4$ | $a^5$ | $a^6$ | $b$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $a^5$    | 1     | 1     | 2     | 2     | 1     | 0     | 1   |
| $a^6$    | 1     | 0     | -1    | 2     | 0     | 1     | 1   |
| $\Delta$ | -2    | -1    | -1    | 0     | 0     | 0     | -2  |
| $a^1$    | 1     | 1     | 2     | 2     | 1     | 0     | 1   |
| $a^6$    | 0     | -1    | -3    | 0     | -1    | 1     | 0   |
| $\Delta$ | 0     | 1     | 1     | 4     | 2     | 0     | 0   |

рации с интересующей нас частью последней симплекс-таблицы (табл. 41). В итоге получаем не только базис  $\{a^1, a^2\}$  вершины  $x^0$ , но и коэффициенты разложения по этому базису столбцов  $a^3$  и  $a^4$ .

б) Вычисления, аналогичные предыдущим, приводят к случаю Б.3 (табл. 42). Отсюда заключаем, что  $x^0 = (2, 0, 1, 0)$  — вершина  $X$ ; при этом третье уравнение в системе, определяющей  $X$ , является лишним. Исключая его, получаем эквивалентную систему, при которой вектор-столбцы  $\bar{a}^1 = (1, 1)$  и  $\bar{a}^3 = (2, 3)$  образуют базис вершины  $x^0$ .

в)  $x^0 = (5, 6, 1, 0)$ . Применение метода искусственного базиса приводит здесь непосредственно к случаю Б.1.

- г)  $x^0 = (0, 0, 7, 2, 0)$ ,  $\{a^1, a^3, a^4\}$  — базис  $x^0$  (случай Б.2).  
 д) Полиэдр  $X$  пуст (случай А).  
 е)  $x^0 = (1, 3, 0, 0)$ ; одно из уравнений является лишним (случай Б.3).

6.8. а) Ход вычислений отражен в табл. 43. За первые четыре итерации находится вершина допустимого множества исходной

Т а б л и ц а 41

|       | $a^1$ | $a^2$  | $a^3$ | $a^4$ |
|-------|-------|--|-------|-------|
| $a^1$ | 1     | 1  | 2     | 2     |
| $a^6$ | 0     | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-1</span> | -3    | 0     |
| $a^1$ | 1     | 0  | -1    | 2     |
| $a^2$ | 0     | 1  | 3     | 0     |

Т а б л и ц а 42

|          | $a^1$   | $a^2$ | $a^3$   | $a^4$ | $a^5$ | $a^6$ | $a^7$ | $b$ |
|----------|---|-------|---|-------|-------|-------|-------|-----|
| $a^5$    | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> | 1     | 2   | 1     | 1     | 0     | 0     | 4   |
| $a^6$    | 1   | -2    | 3   | 0     | 0     | 1     | 0     | 5   |
| $a^7$    | 3   | 0     | 7   | 2     | 0     | 0     | 1     | 13  |
| $\Delta$ | -5  | 1     | -12   | -3    | 0     | 0     | 0     | -22 |
| $a^1$    | 1   | 1     | 2   | 1     | 1     | 0     | 0     | 4   |
| $a^6$    | 0   | -3    | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> | -1    | -1    | 1     | 0     | 1   |
| $a^7$    | 0   | -3    | 1   | -1    | -3    | 0     | 1     | 1   |
| $\Delta$ | 0   | 6     | -2  | 2     | 5     | 0     | 0     | -2  |
| $a^1$    | 1   | 7     | 0   | 3     |       |       |       | 2   |
| $a^3$    | 0   | -3    | 1   | -1    |       |       |       | 1   |
| $a^7$    | 0   | 0     | 0   | 0     |       |       |       | 0   |
| $\Delta$ | 0   | 0     | 0   | 0     | 3     | 2     | 0     | 0   |

задачи  $x^0 = (0, 5, 4, 0, 1)$ . Одновременно с этим получены коэффициенты разложения столбцов  $a^1$  и  $a^4$  по базису  $\{a^2, a^3, a^5\}$ . Затем вычисляются оценки замещения для исходной задачи и за одну итерацию находится ее решение  $x^* = (0, 9, 0, 8, 5)$ .

б)  $x^* = (0, 9/2, 0, 0, 4, 3/2)$ .

в)  $x^* = (0, 1, 0, 2, 0)$ .

г)  $x^* = (0, 3, 8, 0, 0)$ .

6.9. а) Двойственную задачу можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 -y_1 - y_2 + 6y_3 - 2y_4 - 12y_5 &\rightarrow \max, \\
 2y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + 2y_5 &= 3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -y_1 + y_2 - 2y_3 + 3y_4 + y_5 &= 2, \\
 y_1 - y_2 + 3y_3 + y_4 - 3y_5 &= 1, \\
 y_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.
 \end{aligned}
 \tag{I}$$

Применяя метод искусственного базиса (с правилом Блэнда), находим вершину  $y^0 = (8, 16, 3, 0, 0)$  задачи (I). После этого за

Т а б л и ц а 43

|          | $a^1$ | $a^2$   | $a^3$   | $a^4$   | $a^5$   | $a^6$ | $a^7$ | $a^8$ | $b$ |
|----------|-------|---|---|---|---|-------|-------|-------|-----|
| $a^6$    | -2    | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> | -1  | -1  | 0   | 1     | 0     | 0     | 1   |
| $a^7$    | 1     | -1  | 2   | 1   | 1   | 0     | 1     | 0     | 4   |
| $a^8$    | -1    | 1   | 0   | 0   | -1  | 0     | 0     | 1     | 4   |
| $\Delta$ | 2     | -1  | -1  | 0   | 0   | 0     | 0     | 0     | -9  |
| $a^2$    | -2    | 1   | -1  | -1  | 0   | 1     | 0     | 0     | 1   |
| $a^7$    | -1    | 0   | 1   | 0   | 1   | 1     | 1     | 0     | 5   |
| $a^8$    | 1     | 0   | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span> | 1   | -1  | -1    | 0     | 1     | 3   |
| $\Delta$ | 0     | 0   | -2  | -1  | 0   | 1     | 0     | 0     | -8  |
| $a^2$    | -1    | 1   | 0   | 0   | -1  | 0     | 0     | 1     | 4   |
| $a^7$    | -2    | 0   | 0   | -1  | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span> | 2     | 1     | -1    | 2   |
| $a^8$    | 1     | 0   | 1   | 1   | -1  | -1    | 0     | 1     | 3   |
| $\Delta$ | 2     | 0   | 0   | 1   | -2  | -1    | 0     | 2     | -2  |
| $a^2$    | -2    | 1   | 0   | -1/2  | 0   |       |       |       | 5   |
| $a^5$    | -1    | 0   | 0   | -1/2  | 1   |       |       |       | 1   |
| $a^3$    | 0     | 0   | 1   | <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1/2</span> | 0   |       |       |       | 4   |
| $\Delta$ | 0     | 0   | 0   | 0   | 0   | 1     | 1     | 1     | 0   |
| $\Delta$ | 1     | 0   | 0   | -1  | 0   |       |       |       | 11  |
| $a^2$    |       |   |   |   |   |       |       |       | 9   |
| $a^5$    |       |   |   |   |   |       |       |       | 5   |
| $a^4$    |       |   |   |   |   |       |       |       | 8   |
| $\Delta$ | 1     | 0   | 2   | 0   | 0   |       |       |       | 19  |

одну итерацию получаем решение

$$y^* = (2, 7/4, 0, 3/4, 0)$$

задачи (I). Тогда согласно сказанному после теоремы 6.1 решение задачи  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  прямой задачи может быть найдено из невырож-

денной системы

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что  $x^* = (2, 3/4, -9/4)$ .

б)  $y^* = (0, 2, 3, 1, 0)$  — решение двойственной задачи;  $x^* = (1/5, 1, -4/5)$  — решение прямой задачи.

в)  $y^* = (0, 1, 0, 2, 0)$  — решение двойственной задачи; множество решений прямой задачи описывается формулами

$$x_1 = -\frac{7}{2} + \frac{3}{2}x_3, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3, \quad \frac{7}{3} \leq x_3 \leq \frac{8}{3}.$$

6.10. Требуется найти значение  $r^*$  задачи

$$r \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + r\sqrt{3} &\leq 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + r\sqrt{3} &\leq 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + r\sqrt{3} &\leq 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + r\sqrt{3} &\leq 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + r\sqrt{3} &\leq 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + r\sqrt{3} &\leq 0. \end{aligned}$$

Решая двойственную задачу симплекс-методом, а затем используя теорему 5.9, получаем ответ:  $r^* = \sqrt{3}/2$ .

6.11. На звероферме следует держать 100 песцов, 150 нутрий и 25 порок.

6.12. Нужно выпускать 2000 холодильников марки 1 и 1000 холодильников марки 3.

6.13. Следует изготавливать 1200 деталей по технологии 1, 1700 — по технологии 2 и 400 — по технологии 4.

6.14. Имеем

$$b = \sum_{k=1}^n a^k x'_k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j \in J} a^j \lambda_{jk} \right) x'_k = \sum_{j \in J} a^j \left( \sum_{k=1}^n \lambda_{jk} x'_k \right).$$

В то же время

$$b = \sum_{j=1}^n a^j x_j = \sum_{j \in J} a^j x_j.$$

Отсюда с учетом единственности разложения по базису получаем формулу (6.17). Формула (6.18) доказывается цепочкой равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Delta_k x'_k &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j \in J} c_j \lambda_{jk} - c_k \right) x'_k = \\ &= \sum_{j \in J} c_j \left( \sum_{k=1}^n \lambda_{jk} x'_k \right) - \sum_{k=1}^n c_k x'_k = \sum_{j \in J} c_j x_j - \langle c, x' \rangle = \\ &= \langle c, x \rangle - \langle c, x' \rangle. \end{aligned}$$

6.15. Имеем

$$\begin{aligned} Ax' &= \sum_{j \in J} a^j (x_j - \alpha \lambda_{js}) + \alpha a^s = \sum_{j \in J} a^j x_j + \alpha \left( a^s - \sum_{j \in J} a^j \lambda_{js} \right) = \\ &= \sum_{j \in J} a^j x_j = b. \end{aligned}$$

Вторая формула с учетом (6.5) есть частный случай формулы (6.18).

6.16. Любой вектор  $y \in \mathbf{R}^m$  можно выразить через базис  $\{a^j | j \in J\}$ :

$$y = \sum_{j \in J} a^j \mu_j = \sum_{j \in J \setminus \{r\}} a^j \mu_j + a^r \mu_r.$$

В свою очередь, используя формулу (6.3) при  $k = s$ , вектор  $a^r$  можно выразить через систему  $\{a^j | j \in J'\}$ :

$$a^r = a^s \frac{1}{\lambda_{rs}} - \sum_{j \in J \setminus \{r\}} a^j \frac{\lambda_{js}}{\lambda_{rs}}. \quad (1)$$

Таким образом, любой вектор  $y \in \mathbf{R}^m$  линейно выражается через векторы  $a^j$  ( $j \in J'$ ), т. е. эти  $m$  векторов образуют базис в  $\mathbf{R}^m$ .

Далее, подставляя выражение (1) в (6.3), получаем

$$\begin{aligned} a^h &= \sum_{j \in J \setminus \{r\}} a^j \lambda_{jh} + \left( a^s \frac{1}{\lambda_{rs}} - \sum_{j \in J \setminus \{r\}} a^j \frac{\lambda_{js}}{\lambda_{rs}} \right) \lambda_{rh} = \\ &= \sum_{j \in J \setminus \{r\}} a^j \left( \lambda_{jh} - \frac{\lambda_{js} \lambda_{rh}}{\lambda_{rs}} \right) + a^s \frac{\lambda_{rh}}{\lambda_{rs}}. \end{aligned}$$

Это и доказывает формулу (6.11).

6.17. Теорема непосредственно следует из формулы (6.18): если  $\Delta_k \geq 0$  при всех  $k = 1, \dots, n$  и  $x' \in X$ , т. е.  $Ax' = b$ ,  $x' \geq 0$ , то  $\langle c, x \rangle \geq \langle c, x' \rangle$ .

(Другое стандартное доказательство теоремы 6.1, основанное на теории двойственности, можно найти, например, в [39].)

6.18. Рассмотрим точку  $x'$  вида (6.19), где  $\alpha -$  сколько угодно большое положительное число.

6.19. В силу выбора  $\alpha$  по формуле (6.6) имеем  $x' \geq 0$  и  $J(x') \subset J'$ . С учетом этого теорема 6.3 и формула (6.11) непосредственно следуют из 6.15, 6.16. Остается доказать формулу (6.12). Используя (6.11), получаем

$$\begin{aligned} \Delta'_k &= \sum_{j \in J \setminus \{r\}} c_j \lambda'_{jh} + c_s \lambda'_{sh} - c_k = \\ &= \sum_{j \in J \setminus \{r\}} c_j \left( \lambda_{jh} - \frac{\lambda_{js}}{\lambda_{rs}} \lambda_{rh} \right) + c_s \frac{\lambda_{jh}}{\lambda_{rs}} - c_k = \\ &= \left( \sum_{j \in J \setminus \{r\}} c_j \lambda_{jh} - c_k \right) - \frac{\lambda_{rh}}{\lambda_{rs}} \left( \sum_{j \in J \setminus \{r\}} c_j \lambda_{js} - c_s \right) = \\ &= \left( \sum_{j \in J} c_j \lambda_{jh} - c_k \right) - \frac{\lambda_{rh}}{\lambda_{rs}} \left( \sum_{j \in J} c_j \lambda_{js} - c_s \right) = \Delta_k - \frac{\lambda_{rh}}{\lambda_{rs}} \Delta_s. \end{aligned}$$

6.20. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т. е. существует вырожденная вершина  $x$  допустимого множества задачи (6.1), на которой алгоритм симплекс-метода с правилом Блэнда порождает цикл длиной в  $T$  итераций. Более точно, пусть  $\{a^j | j \in J_t\}$  — базис вершины  $x$  на  $t$ -й итерации ( $t = 1, \dots, T$ ),  $\lambda_{jk}^t$ ,  $\Delta_k^t$  ( $j \in J_t$ ,  $k = 1, \dots, n$ ) — соответствующие коэффициенты и оценки замещения; при этом

$$J_{t+1} = (J_t \setminus \{r_t\}) \cup \{s_t\}, \quad t = 1, \dots, T, \quad J_{T+1} = J_1, \quad (I)$$

где

$$s_t = \min \{k \notin J_t \mid \Delta_k^t < 0\}, \quad (II)$$

$$r_t = \min \left\{ j \in J_t \mid \lambda_{js_t}^t > 0, \quad x_j = 0 \right\}. \quad (III)$$

Обозначим через  $q$  наибольший среди всех номеров столбцов матрицы  $A$ , вводимых в базис во время цикла, и пусть  $a^q$  вводится на итерации  $\tau$ , т. е.

$$q = s_\tau = \max_{t=1, \dots, T} s_t. \quad (IV)$$

Из (I) следует, что существует такая итерация, на которой столбец  $a^q$  будет выведен из базиса, т. е.  $q = r_t$  при некотором  $t \in \{1, \dots, T\}$ . Рассмотрим при данном  $t$  точку  $x' \in \mathbb{R}^n$  с координатами

$$x'_j = \begin{cases} x_j - \lambda_{js_t}^t, & \text{если } j \in J_t, \\ 1, & \text{если } j = s_t, \\ 0, & \text{если } j \notin J_t, \quad j \neq s_t. \end{cases} \quad (V)$$

Тогда  $Ax' = b$  в силу 6.15. Применяя формулу (6.18) к базису  $\{a^j | j \in J_\tau\}$  вершины  $x$  и точке  $x'$ , получаем

$$\sum_{j=1}^n \Delta_j^\tau x'_j = \langle c, x - x' \rangle = \sum_{j \in J_t} c_j \lambda_{js_t}^t - c_{s_t} = \Delta_{s_t}^t < 0. \quad (VI)$$

Покажем, однако, что каждое из произведений  $\Delta_j^\tau x'_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) является неотрицательным. Рассмотрим четыре случая.

1)  $j \in J_\tau$ . Тогда  $\Delta_j^\tau = 0$  (см. (6.5)).

2)  $j = q$ . Тогда  $\Delta_j^\tau < 0$ , так как  $q = s_\tau$ . В то же время  $q = r_t$  и, значит,  $\lambda_{js_t}^t > 0$ ,  $x_j = 0$  (см. (III)). Поэтому из (V) следует, что  $x'_j = -\lambda_{js_t}^t < 0$ . Таким образом,  $\Delta_j^\tau x'_j > 0$ .

3)  $j \notin J_\tau$ ,  $j < q$ . Тогда из условия  $q = s_\tau$  и формулы (II) выведем, что  $\Delta_j^\tau \geq 0$ . Рассмотрим три случая.

3а)  $j \in J_t$ . Поскольку  $j \notin J_\tau$ , то  $x_j = 0$ . Тогда из условия  $j < q = r_t$  и формулы (III) заключаем, что  $\lambda_{js_t}^t \leq 0$ . Поэтому  $x'_j \geq 0$  в силу (V).

3б)  $j = s_t$ . Тогда  $x'_j = 1$ .

3в)  $j \notin J_l, j \neq s_l$ . Тогда  $x'_j = 0$ .

Итак, для всех подслучаев  $\Delta_j^T x'_j \geq 0$ .

4)  $j \notin J_l, j > q$ . Предположим, что  $j \in J_l$ . Тогда с учетом условия  $j \notin J_l$  получаем, что существует итерация  $t'$ , на которой столбец  $a^j$  вводится в базис, т. е.  $j = s_{t'} > q$ . Но это противоречит формуле (IV). Следовательно,  $j \notin J_l$ . Из (IV) вытекает также, что  $j \neq s_l$ . Поэтому  $x'_j = 0$  в силу (V).

Таким образом, мы пришли к противоречию с (VI).

6.21. Утверждения из Б.2 очевидны в силу 6.16.

Докажем утверждения 1)–3) из Б.3. Пусть для определенности  $J = \{1, \dots, l\}$ ,  $I = \{l+1, \dots, m\}$ , где  $1 \leq l \leq m$ . Тогда  $\bar{I} = J$ . По условию векторы  $a^1, \dots, a^l, e^{l+1}, \dots, e^m$  образуют базис вершины  $x^0$  и, значит, базис в  $\mathbf{R}^m$ . Тогда определитель матрицы, составленной из координат этих векторов, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} & 0 & \dots & 0 \\ a_{l+1,1} & \dots & a_{l+1,l} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{ml} & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{I})$$

Рассмотрим векторы  $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{il})$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Из (I) следует, что векторы  $\tilde{a}_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) линейно независимы. Тогда векторы  $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{il}, a_{i, l+1}, \dots, a_{im})$  ( $i = 1, \dots, l$ ) тем более линейно независимы, т. е.  $\text{rang } A = l$ . Утверждение 1) доказано.

Далее, поскольку векторы  $\tilde{a}_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) образуют базис в  $\mathbf{R}^l$ , то

$$\tilde{a}_r = \sum_{i=1}^l \tilde{a}_i \gamma_{ir}, \quad r = l+1, \dots, m, \quad (\text{II})$$

при некоторых  $\gamma_{ir}$ ; иными словами,

$$a_{rj} = \sum_{i=1}^l a_{ij} \gamma_{ir}, \quad r = l+1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, l. \quad (\text{III})$$

Перепишем формулу (6.16) в покоординатном виде:

$$a_{rk} = \sum_{j=1}^l a_{rj} \lambda_{jk}, \quad r = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{IV})$$

Из (III), (IV) для любых  $r = l+1, \dots, m, k = 1, \dots, n$  получаем

$$a_{rk} = \sum_{j=1}^l \left( \sum_{i=1}^l a_{ij} \gamma_{ir} \right) \lambda_{jk} = \sum_{i=1}^l \left( \sum_{j=1}^l a_{ij} \lambda_{jk} \right) \gamma_{ir} = \sum_{i=1}^l a_{ik} \gamma_{ir},$$

Это означает, что формула (II) распространяется на полные строки матрицы  $A$ :

$$a_r = \sum_{i=1}^l a_i \gamma_{ir}, \quad r = l+1, \dots, m.$$

При этом, поскольку  $x^0 \in X$ , то

$$b_r = \langle a_r, x^0 \rangle = \sum_{i=1}^l \langle a_i, x^0 \rangle \gamma_{ir} = \sum_{i=1}^l b_i \gamma_{ir}$$

для всех  $r = l+1, \dots, m$ . Следовательно, если  $\bar{A}x = \bar{b}$ , т. е.  $\langle a_i, x \rangle = b_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ), то

$$\langle a_r, x \rangle = \sum_{i=1}^l \langle a_i, x \rangle \gamma_{ir} = \sum_{i=1}^l b_i \gamma_{ir} = b_r$$

для всех  $r = l+1, \dots, m$ . Утверждение 2) доказано.

Из (I) заключаем, что вектор-столбцы  $\bar{a}^j = (a_{1j}, \dots, a_{lj})$  ( $j = 1, \dots, l$ ) линейно независимы, т. е. они образуют базис в  $\mathbf{R}^l$ . С учетом этого утверждение 3) очевидно.

6.22. Если условие I не выполняется, то в силу разрешимости задачи (6.1) может выполняться лишь условие III. Поскольку вершина  $x$  невырождена, то, согласно теореме 6.3, существует такая вершина  $x'$ , что  $\langle c, x' \rangle > \langle c, x \rangle$ . Но это противоречит тому, что  $x$  — решение задачи (6.1).

6.23. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} x_1 & \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1, \\ x_1 + x_2 & = 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Ясно, что вырожденная вершина  $x^* = (1, 0, 0)$  является решением задачи. Возьмем в качестве базиса  $x^*$  систему  $\{a^1, a^2\}$ . Имеем

$$\Delta_3 = c_1 \lambda_{13} + c_2 \lambda_{23} - c_3 = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 - 0 = -1,$$

т. е. условие I не выполнено. Более сложным примером служит задача 6.5, е).

6.24. Соответствующим образом дополнить схему решения задачи 6.22.

6.25. Использовать формулу (6.18).

6.26. Пусть утверждение неверно. С учетом 6.22 это означает, что  $\Delta_s = 0$  при некотором  $s \notin J = J(x)$ . Рассмотрим точку  $x'$  вида  $(\alpha, 1)$ , где число  $\alpha > 0$  столь мало, что  $x' \geq 0$ , т. е.  $x' \in X$ . Имеем  $\langle c, x \rangle - \langle c, x' \rangle = \alpha \Delta_s = 0$ , т. е. точка  $x' \neq x$  также является решением задачи (6.1). Противоречие.

6.27. В решении предыдущей задачи можно взять любое  $\alpha > 0$ .

6.28. Согласно 4.64, требуется показать, что один из векторов  $a^j$  ( $j \in J(x) \cup J(x')$ ) линейно выражается через остальные, уже линейно независимые векторы. Воспользуемся обозначениями (6.6)–(6.9). Условие  $x' \neq x$  равносильно тому, что  $\alpha > 0$ . Тогда, очевидно,

$$J(x) \cup J(x') = J(x) \cup \bar{J}(x) \cup \{s\},$$

где

$$\bar{J}(x) = \{j \in J \setminus J(x) \mid \lambda_{js} < 0\} = \{j \in J \mid x_j = 0, \lambda_{js} < 0\}.$$

Из условия  $\alpha > 0$  следует также, что для любого  $j \in J \setminus J(x)$  выполнено неравенство  $\lambda_{js} \leq 0$ . Поэтому, используя (6.3), имеем

$$a^s = \sum_{j \in J} a^j \lambda_{js} = \sum_{j \in J(x)} a^j \lambda_{js} + \sum_{j \in \bar{J}(x)} a^j \lambda_{js}.$$

В то же время векторы  $a^j$  ( $j \in J(x) \cup \bar{J}(x)$ ) линейно независимы как часть базиса вершины  $x$ .

(Отметим, что если вершина  $x$  невырождена, то доказанное утверждение можно непосредственно вывести из 4.67, так как в этом случае  $|J(x)| = m$  и  $\bar{J}(x) = \emptyset$ .)

## § 7

**7.2.** Пусть  $x^1, x^2 \in X$  и  $x(\lambda) = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ . Допустим, что  $x(\lambda_0) \notin X$  при некотором  $\lambda_0 \in (0, 1)$ . Положим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sup\{\lambda | x(\lambda) \in X, 0 \leq \lambda \leq \lambda_0\}, \\ \lambda_2 &= \inf\{\lambda | x(\lambda) \in X, \lambda_0 \leq \lambda \leq 1\}. \end{aligned}$$

В силу замкнутости  $X$  имеем  $x(\lambda_1) \in X, x(\lambda_2) \in X$ . При этом  $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ . Ясно, что точки  $x(\lambda_1)$  и  $x(\lambda_2)$  не удовлетворяют условию задачи. Противоречие. Следовательно,  $x(\lambda) \in X$  при всех  $\lambda \in (0, 1)$ , т. е.  $X$  выпукло.

Примером служит множество рациональных чисел.

**7.3.** Пусть  $x, y \in X$ , т. е.  $x_1^2 \leq x_2, y_1^2 \leq y_2$ . Для любого  $\lambda \in (0, 1)$ , используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем

$$\begin{aligned} [\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1]^2 &= \lambda^2 x_1^2 + (1 - \lambda)^2 y_1^2 + 2\lambda(1 - \lambda)x_1 y_1 \leq \\ &\leq \lambda^2 x_2 + (1 - \lambda)^2 y_2 + 2\lambda(1 - \lambda)\sqrt{x_2 y_2} \leq \\ &\leq \lambda^2 x_2 + (1 - \lambda)^2 y_2 + \lambda(1 - \lambda)(x_2 + y_2) = \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$ , т. е.  $X$  выпукло.

**7.5.** Пусть  $x, y \in X$ . Учитывая 7.2, достаточно показать, что  $0,5x + 0,5y \in X$ . В свою очередь, для этого достаточно проверить неравенство

$$\frac{\sin x_1 + \sin y_1}{2} \leq \sin \frac{x_1 + y_1}{2}.$$

Применяя тригонометрические формулы, приходим к эквивалентному неравенству

$$\left(\sin \frac{x_1}{2} - \sin \frac{y_1}{2}\right) \left(\cos \frac{x_1}{2} - \cos \frac{y_1}{2}\right) \leq 0,$$

которое, очевидно, выполнено, так как  $0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq y_1 \leq \pi$ .

**7.7.**  $k = 1$  (рис. 91).

7.9. Пусть  $x, y \in X$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left\langle A\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right), \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right\rangle &= \frac{1}{4}\langle Ax, x \rangle + \frac{1}{4}\langle Ay, y \rangle + \\ &+ \frac{1}{2}\langle Ax, y \rangle = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2}\langle Ay, y \rangle - \frac{1}{4}\langle A(x-y), x-y \rangle \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2}\langle Ay, y \rangle \leq \alpha. \end{aligned}$$

С учетом 7.2 это означает, что  $X$  выпукло. Пусть теперь  $\alpha = 0$ . Тогда  $X$  является также конусом, причем  $\langle Ax, x \rangle = 0$  для любого

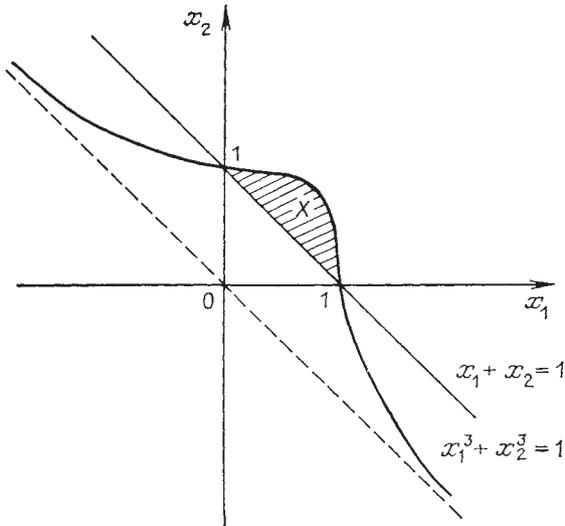


Рис. 91

$x \in X$ . Поэтому если  $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ , то  $x + y \in X, \lambda x \in X$ , т. е.  $X$  — линейное подпространство.

7.10. Ясно, что  $X$  — конус. Для любых  $x, y \in X$ , используя неравенство Коши — Буяковского и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1)^2 - 2(x_1 + y_1)(x_3 + y_3) + (x_2 + y_2)^2 &= \\ &= (x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2) + (y_1^2 - 2y_1y_3 + y_2^2) + \\ &+ 2(x_1y_1 + x_2y_2 - y_1x_3 - x_1y_3) \leq \\ &\leq 2\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - y_1x_3 - x_1y_3\right) \leq \\ &\leq 2\left(2\sqrt{x_1x_3y_1y_3} - y_1x_3 - x_1y_3\right) \leq 0, \end{aligned}$$

т. е.  $x + y \in X$ . Следовательно,  $X$  — выпуклый конус. Он изображен на рис. 92. Сечением конуса плоскостью  $x_3 = \text{const} > 0$  является круг  $(x_1 - x_3)^2 + x_2^2 \leq x_3^2$ , сечением плоскостью  $x_2 = 0$  — конус  $0 \leq x_1 \leq 2x_3$ .

7.13. Рассмотреть отображение  $A(x^1, \dots, x^m) = \alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_m x^m$ , где  $x^i \in \mathbb{R}^n$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

7.14. Пусть  $x, y \in \bar{X}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ . По определению замыкания существуют такие последовательности  $\{x^k\} \subset X$ ,  $\{y^k\} \subset X$ , что  $x^k \rightarrow x$ ,  $y^k \rightarrow y$ . Поскольку  $X$  выпукло, то точка  $z^k = \lambda x^k + (1 - \lambda)y^k$  принадлежит  $X$  для всех  $k$ . При этом  $z^k \rightarrow z$ . Следовательно,  $z \in \bar{X}$ , т. е.  $\bar{X}$  — выпуклое множество.

7.15. См. рис. 93.

7.16. Воспользоваться очевидной формулой  $X_1 + X_2 = \bigcup_{x \in X_2} (X_1 + x)$

и тем фактом, что объединение любого числа открытых множеств открыто.

7.17. Рассмотрим множество  $X = Y + Z$ , где  $Y$  — компакт, а  $Z$  — замкнутое множество. Пусть  $\{x^k\} \subset X$  и  $x^k \rightarrow x$ . Имеем

$$x^k = y^k + z^k, \quad y^k \in Y, \quad z^k \in Z. \quad (I)$$

Поскольку последовательность  $\{y^k\}$  ограничена, то из (I) следует, что  $\{z^k\}$  также ограничена. Пусть без потери общности  $y^k \rightarrow y$ ,  $z^k \rightarrow z$ . Тогда

$$x = y + z, \quad y \in Y, \quad z \in Z,$$

т. е.  $x \in X$ . Таким образом,  $X$  — замкнутое множество.

7.18. Примером служат множество  $X$  из 7.4 и множество

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 1, \quad x_1 < 0\}.$$

Их сумма  $X + Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$  — незамкнутое множество.

7.19. Примером служат конус  $X$  из 7.10 и конус

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 0\}.$$

Их сумма  $X + Y = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0\} \cup Y$  — незамкнутое множество.

7.20. Это следует из 7.12, поскольку  $P(X)$  есть образ  $X$  при отображении  $P(x, y) = x$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ . Разумеется, данный факт легко доказать и непосредственно.

7.23. Примером служит конус из 7.10 и его проекция на плоскость первых двух координат.

7.26. Ограничимся доказательством выпуклости множества  $Y$  (для  $X$  рассуждения лишь упрощаются, причем выпуклость  $X_2$  здесь не требуется). Пусть  $x^i \in Y$  ( $i = 1, 2$ ),  $\alpha \in (0, 1)$  и  $x =$

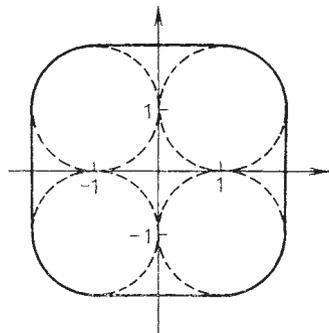
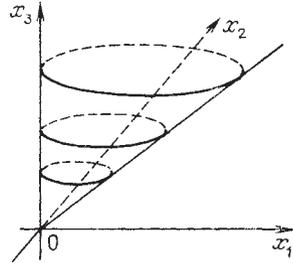


Рис. 93

$= \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$ . Тогда  $x^i = \lambda_i y^i + \mu_i z^i$  при некоторых  $y^i \in X_1$ ,  $z^i \in X_2$ ,  $\lambda_i \geq 1$  и  $\mu_i = 1 - \lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ). Положим  $\beta = \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2 \geq 0$  и  $\gamma = 1 - \beta$ . Если  $\beta > 1$ , то можем записать

$$x = \beta \left( \frac{\alpha\lambda_1}{\beta} y^1 + \frac{(1 - \alpha)\lambda_2}{\beta} y^2 \right) + \gamma \left( \frac{\alpha\mu_1}{\gamma} z^1 + \frac{(1 - \alpha)\mu_2}{\gamma} z^2 \right).$$

Отсюда очевидно, что  $x \in Y$ . Если же  $\beta = 1$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Тогда  $x = \alpha y^1 + (1 - \alpha)y^2 \in X_1 \subset Y$ .

7.27. Пусть  $x, y \in X$  и  $\alpha \in (0, 1)$ . Тогда

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad y = \sum_{i=1}^m \mu_i y^i$$

при некоторых  $\lambda, \mu \in \Lambda$  и  $x^i, y^i \in X_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Введем вектор  $\eta = \alpha\lambda + (1 - \alpha)\mu \in \Lambda$ . Для каждого номера  $i = 1, \dots, m$  в случае  $\eta_i > 0$  положим

$$z^i = \frac{\alpha\lambda_i}{\eta_i} x^i + \frac{(1 - \alpha)\mu_i}{\eta_i} y^i \in X_i.$$

Если же  $\eta_i = 0$  и, значит,  $\lambda_i = \mu_i = 0$ , то выберем  $z^i$  произвольно в  $X_i$ . Тогда, очевидно,

$$\alpha x + (1 - \alpha)y = \sum_{i=1}^m \eta_i z^i \in X.$$

Пример существенности условия  $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^m$ :  $m = 1$ ,  $X_1 = \mathbb{R}_+^n$ ,  $\Lambda = \mathbb{R}$ ; тогда  $X = \mathbb{R}_+^n \cup (-\mathbb{R}_+^n)$  — невыпуклое множество.

7.28. Доказательство проведем индукцией по размерности  $n$  пространства  $\mathbb{R}^n$ . При  $n = 1$  утверждение очевидно. Пусть оно уже доказано для пространства  $\mathbb{R}^{n-1}$ , где  $n \geq 2$ . Рассмотрим любые  $x, y \in X$ . Требуется показать, что  $x + y \in X$ . Введем векторы  $u = \min\{x, y\}$ ,  $v = \max\{x, y\}$ . Ясно, что  $x + y = u + v$ ,  $u \leq v$ . Следовательно, достаточно убедиться в том, что  $u + v \in X$ . Если  $u = 0$ , то  $u + v = v \in X$ . Пусть  $u \neq 0$ . Положим

$$\lambda = \min_{j: u_j > 0} \frac{v_j}{u_j} \geq 1 > 0.$$

Будем считать, что минимум здесь достигается на номере  $i = n$ . Тогда  $\lambda u \leq v$  и  $\lambda u_n = v_n$ . Поэтому

$$(1 + \lambda) u_j \leq u_j + v_j \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) v_j, \quad j = 1, \dots, n - 1, \quad (I)$$

$$(1 + \lambda) u_n = u_n + v_n = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) v_n. \quad (II)$$

Обозначим через  $Y$  проекцию конуса  $X$  на пространство первых  $n - 1$  координат (см. 7.20). Ясно, что  $Y$  — конус в  $\mathbb{R}_+^{n-1}$ , замкнутый относительно операций  $\min$  и  $\max$ . Поэтому, согласно предположению индукции,  $Y$  — выпуклый конус. Векторы  $(u_1, \dots, u_{n-1})$ ,  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  принадлежат  $Y$ . Тогда их сумма также принадле-

жит  $Y$ . Иными словами, существует такой вектор  $w \in X$ , что  $w_j = u_j + v_j$  для всех  $j = 1, \dots, n-1$ . При этом из (I), (II) следует:

если  $w_n \leq u_n + v_n$ , то  $u + v = \max\{w, (1 + \lambda)u\} \in X$ ;

если  $w_n > u_n + v_n$ , то  $u + v = \min\left\{w, \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)v\right\} \in X$ .

Теорема доказана. Требуемыми примерами служат множества

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \text{ или } x_1 = x_2 > 1\},$$

$$X_2 = \mathbb{R}_+^n \cup (-\mathbb{R}_+^n).$$

7.29. Пусть  $X$  — выпуклое множество. Требуется показать, что для любого  $m = 1, 2, \dots$  из условий

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad x^i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \quad (\text{I})$$

следует, что  $x \in X$ . Проведем индукцию по  $m$ . Если  $m = 1$ , то высказывание тривиально. Предположим, что оно уже доказано для  $m = k$ , и пусть условия (I) выполнены при  $m = k + 1$ . Если  $\lambda_{k+1} = 1$ , то  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$  и, значит,  $x = x^m \in X$ . Если же  $\lambda_{k+1} < 1$ , то можем записать

$$x = (1 - \lambda_{k+1}) \bar{x} + \lambda_{k+1} x^{k+1}, \quad \text{где } \bar{x} = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x^i. \quad (\text{II})$$

Ясно, что  $\bar{x}$  — выпуклая комбинация точек  $x^1, \dots, x^k$ . Тогда по предположению индукции  $\bar{x} \in X$ . Поэтому из (II) с учетом выпуклости  $X$  следует, что  $x \in X$ .

Утверждения для выпуклого конуса и аффинного множества доказываются еще проще.

7.30. Обозначим через  $Z$  множество всевозможных выпуклых комбинаций точек из  $X$ . Нетрудно показать, что  $Z$  выпукло. При этом  $X \subset Z$ . Тогда  $\text{conv } X \subset Z$  по определению выпуклой оболочки. В то же время, если  $Y$  — выпуклое множество и  $X \subset Y$ , то  $Z \subset Y$  в силу теоремы 7.6. Но тогда  $Z \subset \text{conv } X$  опять же по определению выпуклой оболочки. Таким образом,  $\text{conv } X = Z$ .

Рассуждения для конической и аффинной оболочек аналогичны.

7.31. Ограничимся рассуждениями для  $m = 2$ . Поскольку  $X_i \subset \text{conv } X_i$  ( $i = 1, 2$ ), то  $X_1 + X_2 \subset \text{conv } X_1 + \text{conv } X_2$ . Следовательно,

$$\text{conv } (X_1 + X_2) \subset \text{conv } X_1 + \text{conv } X_2.$$

Докажем обратное включение. Пусть  $x \in \text{conv } X_1 + \text{conv } X_2$ . Согласно теореме 7.7,

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i y^i + \sum_{j=1}^l \mu_j z^j, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \sum_{j=1}^l \mu_j = 1$$

при некоторых  $y^i \in X_1$ ,  $z^j \in X_2$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\mu_j \geq 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ;  $j = 1, \dots, l$ ). Положим  $\eta_{ij} = \lambda_i \mu_j$ . Тогда, очевидно,

$$x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \eta_{ij} (y^i + z^j), \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \eta_{ij} = 1,$$

т. е.  $x \in \text{conv}(X_1 + X_2)$ .

7.32. Если даны два выпуклых многогранника

$$X_1 = \text{conv}\{x^1, \dots, x^k\}, \quad X_2 = \text{conv}\{y^1, \dots, y^l\},$$

то, согласно теореме 7.8, имеем

$$X_1 + X_2 = \text{conv}\{x^i + y^j | i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, l\}.$$

Если даны два многогранных конуса

$$X_1 = \text{cone}\{x^1, \dots, x^k\}, \quad X_2 = \text{cone}\{y^1, \dots, y^l\},$$

то, очевидно,  $X_1 + X_2 = \text{cone}\{x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l\}$ .

7.33. Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  множество  $A = X \times \{1\}$ , т. е. совокупность точек вида  $(x, 1)$ , где  $x \in X$ . В силу теоремы 7.7 условия  $x \in \text{conv} X$  и  $(x, 1) \in \text{cone} A$  эквивалентны. Остается применить к  $A$  следствие 7.2.

7.34. Рассмотрим любую последовательность  $\{x^k\} \subset \text{conv} X$ . Согласно теореме 7.11, для любого  $k$  имеем

$$x^k = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^k y_i^k, \quad y_i^k \in X, \quad \lambda_i^k \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^k = 1.$$

Последовательности  $\{y_i^k\}$ ,  $\{\lambda_i^k\}$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) ограничены. Следовательно,  $\{x^k\}$  также ограничена. Пусть  $x^k \rightarrow x$ . Без потери общности можно считать, что  $y_i^k \rightarrow y_i$ ,  $\lambda_i^k \rightarrow \lambda_i$ . Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i, \quad y_i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,$$

т. е.  $x \in \text{conv} X$ . Таким образом, множество  $\text{conv} X$  ограничено и замкнуто, т. е. является компактом.

7.35. Первое утверждение непосредственно следует из теоремы 7.12. Рассмотрим многогранный конус  $X = \text{cone}\{x^1, \dots, x^m\} \subset \mathbb{R}^n$ . Пусть  $\{y^k\} \subset X$  и  $y^k \rightarrow y$ . Допустим, что  $y \notin X$ , т. е. система

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i = y, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

несовместна. Тогда по теореме 4.6 существует такой вектор  $p \in \mathbb{R}^n$ , что

$$\langle p, x^i \rangle \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \langle p, y \rangle < 0.$$

Для достаточно большого  $k$  имеем  $\langle p, y^k \rangle < 0$ . Вновь применяя теорему 4.6, получаем, что система (1) при замене  $y$  на  $y^k$  также несовместна, т. е.  $y^k \notin X$ . Противоречие. Таким образом,  $y \in X$ , т. е.  $X$  — замкнутое множество.

Отметим, что, по существу, мы повторили схему рассуждений из решения задачи 4.134.

Доказательство замкнутости многогранного конуса, основанное на теореме 7.10, можно найти в [5, с. 60; 39, с. 63].

С учетом леммы 7.1 замкнутость многогранного множества очевидна.

7.36. Положим  $\mu_s = \sum_{k=1}^s \lambda_k$ . Из теоремы 7.6 следует, что  $y^s = \frac{1}{\mu_s} \sum_{k=1}^s \lambda_k x^k \in X$  ( $s = 1, 2, \dots$ ). Поскольку  $y^s \rightarrow y$ , то  $y \in \overline{X} = X$ .

Утверждение справедливо и без условия замкнутости  $X$ . Но в таком случае для его доказательства требуется привлечь теорию отделимости (см. 8.32).

7.37. а) Зафиксируем любую точку  $x \in X_1$ . Построим последовательности  $\{a^k\}$  и  $\{y^k\}$  по следующему правилу. В качестве  $a^1$  возьмем любую точку из  $A$ . Если точка  $a^k$  уже построена, то, используя условие задачи, выберем точки  $y^k \in X_2$  и  $a^{k+1} \in A$  таким образом, что

$$x + a^k = y^k + a^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Просуммировав первые  $s$  из этих равенств и поделив результат на  $s$ , получим

$$x + \frac{a^1}{s} = \frac{x^s + a^{s+1}}{s}, \quad \text{где } x^s = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s y^k. \quad (1)$$

Поскольку  $X_2$  выпукло, то  $x^s \in X_2$  в силу теоремы 7.6. Переходя к пределу в (1) с учетом ограниченности  $A$ , получаем, что  $x^s \rightarrow x$ , т. е.  $x \in \overline{X}_2$ . Следовательно,  $X_1 \subset \overline{X}_2$ .

$$7.38. \operatorname{conv} X = \{x \mid x_1^2 \leq x_2\}, \quad \operatorname{conc} X = \{x \mid x_2 > 0\} \cup \{0\}.$$

$$7.39. \operatorname{conv} X = \{x \mid x_1^2 \leq x_2, x_1 > 0\} \cup \{0\},$$

$$\operatorname{conc} X = \operatorname{int} \mathbf{R}_+^2 \cup \{0\}.$$

$$7.40. \operatorname{conv} X = \operatorname{conc} X = \mathbf{R}^2.$$

$$7.41. \operatorname{conv} X = \{x \mid \sin x_1 \geq x_2 \geq 0, \quad 0 \leq x_1 \leq \pi\},$$

$$\operatorname{conc} X = \{x \mid x_1 > x_2 \geq 0\} \cup \{0\}.$$

$$7.42. \operatorname{conv} X = \{x \mid e^{x_1} \leq x_2\},$$

$$\operatorname{conc} X = \{x \mid e x_1 \leq x_2, x_2 > 0\} \cup \{0\}.$$

7.43. Пусть  $X$  — открытое множество. Тогда  $X = \operatorname{int} X \subset \subset \operatorname{int}(\operatorname{conv} X)$ , причем множество  $\operatorname{int}(\operatorname{conv} X)$  выпукло в силу следствия 7.3. Поэтому  $\operatorname{conv} X \subset \operatorname{int}(\operatorname{conv} X)$ . Отсюда  $\operatorname{int}(\operatorname{conv} X) = \operatorname{conv} X$ , т. е. множество  $\operatorname{conv} X$  открыто.

7.44. Нет, неверно. Примерами служат замкнутые множества 7.38, 7.39 и выпуклый компакт

$$X = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}.$$

7.45. Применить теорему 7.7.

7.46. Применить 7.45. Условие выпуклости  $X$  существенно. Примером служит множество

$$X = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1, x_3 = 1\} \cup \{(0, 0, -1)\}.$$

7.47. При произвольном  $X$  последняя формула неверна. Примером служит  $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$ .

7.49. Согласно теореме 7.8, сумма  $X_1 + X_2$  является выпуклой оболочкой восьми точек:

$$(3, -1), (5, 1), (1, 3), (4, 4), (1, 0), (3, 2), (-1, 4), (2, 5).$$

Нанеся эти точки на чертеж, убеждаемся, что  $X_1 + X_2$  представляет собой шестиугольник с вершинами в указанных точках, кроме  $(1, 3)$  и  $(3, 2)$ . Эти точки оказываются выпуклыми комбинациями остальных.

7.50. Сумма  $X_1 + X_2$  есть шестиугольник с вершинами  $(-5, 3)$ ,  $(-2, 4)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(3, -1)$ ,  $(1, -4)$ ,  $(-4, 1)$ .

7.51. Ограничимся рассуждениями для  $m = 2$  (ср. с решением задачи 7.31). Включение  $\text{conv}(X_1 \times X_2) \subset \text{conv} X_1 \times \text{conv} X_2$  очевидно. Пусть  $x \in \text{conv} X_1 \times \text{conv} X_2$ , т. е.  $x = (y, z)$ , где

$$y = \sum_{i=1}^k \lambda_i y^i, \quad z = \sum_{j=1}^l \mu_j z^j, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \sum_{j=1}^l \mu_j = 1$$

при некоторых  $y^i \in X_1$ ,  $z^j \in X_2$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\mu_j \geq 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, l$ ). Положим  $\eta_{ij} = \lambda_i \mu_j$ ,  $x^{ij} = (y^i, z^j) \in X_1 \times X_2$ . Тогда, очевидно,

$$x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \eta_{ij} x^{ij}, \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \eta_{ij} = 1,$$

т. е.  $x \in \text{conv}(X_1 \times X_2)$ . Первая формула доказана. Вторая доказывается также (следует лишь убрать условия  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\mu_j \geq 0$ ). Для доказательства третьей формулы в рассуждениях, аналогичных приведенным, вместо точек вида  $(y^i, z^j)$  следует рассмотреть точки вида  $(y^i, 0)$  и  $(0, z^j)$ . Для произвольных множеств эта формула неверна. Примером служат множества  $X_1 = X_2 = \{1\}$ .

7.52. Докажем лишь первую формулу. Включение  $\text{conv} A(X) \subset A(\text{conv} X)$  очевидно с учетом 7.12. Пусть  $y \in A(\text{conv} X)$ , т. е.  $y = Ax$ , где

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad x^i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Тогда, поскольку  $y = \sum_{i=1}^m \lambda_i Ax^i$ , то  $y \in \text{conv} A(X)$ .

7.53. Применим 7.52.

7.54. Пусть даны линейное отображение  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , порождаемое матрицей  $A \in \mathcal{A}(m, n)$ , и полиэдр  $Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid By \leq d\}$ , где  $B \in \mathcal{A}(k, m)$ ,  $d \in \mathbb{R}^k$ . Тогда, очевидно,

$$A^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (BA)x \leq d\}.$$

7.56. Для произвольных множеств последняя формула неверна. Примером служат множества  $X_1 = \{(1, 0)\}$ ,  $X_2 = \{(0, 1)\}$ .

7.57. Первая формула очевидна. Вторую нетрудно доказать непосредственно, но мы выведем ее из первой и из 7.47, 7.56:

$$\begin{aligned} \text{aff} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right) &= \text{aff} \left( \text{cone} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right) \right) = \\ &= \text{aff} \left( \sum_{i=1}^m \text{cone} X_i \right) = \sum_{i=1}^m \text{aff} (\text{cone} X_i) = \sum_{i=1}^m \text{aff} X_i. \end{aligned}$$

Для произвольных множеств эта формула неверна. Примером служат все те же множества  $X_1 = \{(1, 0)\}$  и  $X_2 = \{(0, 1)\}$ .

7.58. Докажем первую формулу при  $m = 2$ . Положим  $X = \text{conv}(X_1 \cup X_2)$  и

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Ясно, что  $Y \subset X$ . Пусть  $x \in X$ , т. е.

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i y^i + \sum_{j=1}^l \mu_j x^j, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{j=1}^l \mu_j = 1$$

при некоторых  $y^i \in X_1, x^j \in X_2, \lambda_i \geq 0, \mu_j \geq 0$  ( $i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, l$ ). Положим  $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i, \mu = \sum_{j=1}^l \mu_j$ . Случай  $\lambda = 0$  и  $\mu = 0$  тривиален. Поэтому будем считать, что  $\lambda > 0, \mu > 0$ . Тогда по теореме 7.6

$$x^1 = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\lambda_i}{\lambda} \right) y^i \in X_1, \quad x^2 = \sum_{j=1}^l \left( \frac{\mu_j}{\mu} \right) x^j \in X_2.$$

При этом  $x = \lambda x^1 + \mu x^2, \lambda + \mu = 1$ , т. е.  $x \in Y$ . Следовательно,  $X = Y$ . Вторая формула легко выводится из 7.45, 7.57.

7.59. Примем обозначения  $A = \text{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i \right), B = \sum_{i=1}^m X_i$ . Поскольку  $0 \in X_m$ , то очевидно, что  $\lambda x \in X_m$  при всех  $x \in X_m$  и  $\lambda \in [0, 1]$ . С учетом этого из 7.58 легко выводится, что  $A \subset B$ . Следовательно,  $\overline{A} \subset \overline{B}$ . Пусть  $x \in B$ , т. е.

$$x = \sum_{i=1}^m x^i, \quad x^i \in X_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

При любом  $k = 1, 2, \dots$  положим

$$y^k = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{k} (k x^i) + \left( 1 - \frac{m-1}{k} \right) x^m.$$

Ясно, что  $y^k \in A$  и  $y^k \rightarrow x$ , т. е.  $x \in \overline{A}$ . Таким образом,  $B \subset \overline{A}$  и, значит,  $\overline{B} \subset \overline{A}$ . Формула  $\overline{A} = \overline{B}$  доказана. Требуемый пример:

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}, \quad X_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 1\}.$$

7.60. Достаточно заметить, что

$$Y_i \subset X_i = \text{conv } Y_i \subset \text{conv} \left( \bigcup_{j=1}^m Y_j \right), \quad i = 1, \dots, m,$$

7.61. Применить 7.60. Для многогранных множеств аналогичное утверждение несправедливо. См. пример к 7.59.

7.62. Обозначим множества, стоящие под знаками замыкания в левой и правой части доказываемой формулы, через  $A$  и  $B$  соответственно. Поскольку  $X_i \subset B$ , то и  $A \subset B$ . Следовательно,  $\overline{A} \subset \overline{B}$ . Пусть  $x \in B$ , т. е.

$$x = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} y^{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{l_i} \eta_{is} z^{is}, \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} = 1$$

при некоторых  $y^{ij} \in Y_i$ ,  $z^{is} \in Z_i$ ,  $\mu_{ij} \geq 0$ ,  $\eta_{is} \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, k_i$ ;  $s = 1, \dots, l_i$ ). Положим

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Если  $\lambda_i > 0$  при всех  $i = 1, \dots, m$ , то можем записать

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\mu_{ij}}{\lambda_i} y^{ij} + \sum_{s=1}^{l_i} \frac{\eta_{is}}{\lambda_i} z^{is} \right).$$

Выражение в скобках представляет собой точку, принадлежащую  $X_i$ . Тогда, очевидно,  $x \in A$ . Если же  $\lambda_i = 0$  при некотором  $i$ , то заведомо  $x \in A$ . Это следует из того, что коэффициенты  $\mu_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, k_i$ ) можно «пошевелить» так, что все они станут положительными, а их сумма будет по-прежнему равна единице (детали рассуждений оставляем читателю). Таким образом,  $B \subset \overline{A}$  и, значит,  $\overline{B} \subset \overline{A}$ , т. е.  $\overline{A} = \overline{B}$ .

7.63. Применить 7.62 и теорему 7.13.

7.67.  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{2, 5\}$ . См. 4.47 и рис. 81.

7.68.  $\{1, 3, 5\}$ ,  $\{1, 4, 5\}$ ,  $\{2, 3, 5\}$ ,  $\{2, 4, 5\}$ ,  $\{3, 5, 6\}$ ,  $\{4, 5, 6\}$ .

7.69.  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$ ,  $\{1, 4, 5\}$ ,  $\{1, 3, 5\}$ ,  $\{2, 4, 5\}$ . Рассмотреть векторы, коллинеарные  $x^1, \dots, x^5$ , у которых третья координата равна 1, и воспользоваться геометрическими построениями на плоскости первых двух координат, имея в виду эквивалентность, указанную в доказательстве теоремы 7.11 (см. 7.33).

7.70. Необходимо либо показать, что система

$$\sum_{j=1}^6 \lambda_j x^j = x^0,$$

$$\sum_{j=1}^6 \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6,$$

несовместна, либо найти некоторую вершину множества ее решений. Применяя метод искусственного базиса из § 6 (с прави-

лом Блэнда), находим вершину с координатами

$$\lambda_1 = \frac{1}{8}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_4 = \frac{3}{8}, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = 0.$$

Следовательно, точка  $x^0 = 0$  представима в виде выпуклой комбинации точек  $x^1, \dots, x^4$  с коэффициентами  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  соответственно.

7.71. Требуется решить следующую задачу ЛП:

$$- \sum_{j=1}^6 \lambda_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^6 \lambda_j x_j = x^0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Применяя симплекс-метод с начальным базисом  $\{x^1, x^3, x^4\}$ , находим решение с координатами

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 2, \quad \lambda_5 = 1, \quad \lambda_6 = 0.$$

Следовательно,  $x^0 = x^1 + 2x^4 + x^5$  — искомое представление.

7.73. а) Пусть  $x^0, x^1, \dots, x^m$  — аффинно независимые точки и  $X = \text{conv}\{x^0, x^1, \dots, x^m\}$ . Тогда  $\text{aff } X = \text{aff}\{x^0, x^1, \dots, x^m\}$  (см. 7.47). Отсюда ясно, что  $L = \text{Lin}(\text{aff } X) = \text{aff } X - x^0$  есть линейное подпространство, натянутое на векторы  $x^1 - x^0, \dots, x^m - x^0$ . В силу 7.72 эти векторы линейно независимы. Следовательно,  $\dim X = \dim L = m$ .

б) Пусть  $P = \text{conv}\{x^0, x^1, \dots, x^m\}$  — максимальный по размерности симплекс, лежащий в  $X$ , т. е.  $x^0, x^1, \dots, x^m$  — максимальная по числу элементов система аффинно независимых точек в  $X$ . Тогда, очевидно,  $X \subset \text{aff } P$  и, значит,  $\text{aff } X \subset \text{aff } P$ . В то же время  $P \subset X$ , и поэтому  $\text{aff } P \subset \text{aff } X$ . Таким образом,  $\text{aff } X = \text{aff } P$ . Отсюда  $\dim X = \dim P$ .

7.74. Утверждение для выпуклой комбинации представляет собой уточнение теоремы Каратеодори, которое доказывается тем же методом (см. 7.33, а также 7.72). Доказательство утверждения для аффинной комбинации использует вместо теоремы 7.10 аналогичный известный факт для произвольных линейных комбинаций.

7.75. По существу, этот факт отражен в 6.16. Дадим его прямое доказательство. Предположим, что  $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x^i + \alpha x = 0$ . Тогда

$$0 = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x^i + \alpha \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i + \alpha \lambda_i) x^i + \alpha \lambda_m x^m.$$

Поскольку точки  $x^1, \dots, x^m$  линейно независимы, то  $\alpha_i + \alpha \lambda_i = 0$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) и  $\alpha \lambda_m = 0$ . Но  $\lambda_m \neq 0$ . Тогда  $\alpha = 0$  и, значит,  $\alpha_i = 0$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ). Таким образом, точки  $x^1, \dots, x^{m-1}$ ,  $x$  линейно независимы.

7.76. Применить 7.72, 7.75.

7.77. Если  $x \in \text{conv } X$ , то  $0 \in \text{conv}(X - x)$ . Поэтому утверждение достаточно доказать для точки 0 в предположении, что

$0 \in \text{conv } X$ . Согласно теореме Каратеодори,

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i, \quad \text{где } x^i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1. \quad (I)$$

Допустим, что точку  $0$  нельзя представить в виде выпуклой комбинации не более  $n$  точек из  $X$ . Тогда  $\lambda_i > 0$  при всех  $i = 1, \dots, n+1$  и, как следует из 7.74, точки  $x^1, \dots, x^{n+1}$  аффинно независимы. Используя 7.72 и 7.76, заключаем, что при любом  $i = 1, \dots, n+1$  точки  $0, x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}$  аффинно независимы и, значит, точки  $x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}$  линейно независимы, т. е. образуют базис в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим многогранные конусы

$$K_i = -\text{cone}\{x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}\}, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (II)$$

Ниже будет показано, что

1)  $X \cap K_i \neq \emptyset$  при всех  $i = 1, \dots, n+1$ ;

2)  $\bigcup_{i=1}^{n+1} K_i = \mathbb{R}^n$ ;

3)  $K_i \cap K_l \cap X = \emptyset$  при всех  $i, l = 1, \dots, n+1$ ;  $i \neq l$ .

Из этих утверждений следует, что в каждом конусе  $K_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) содержится по крайней мере одна связная компонента множества  $X$ . В самом деле, при любом  $i = 1, \dots, n+1$ , согласно 1), существует точка  $a \in X \cap K_i$ . Пусть  $A$  — объединение всех связных подмножеств  $X$ , содержащих  $a$ . Тогда, как легко показать,  $A$  — связное множество. Обозначим через  $L$  объединение конусов  $K_1, \dots, K_{i-1}, K_{i+1}, \dots, K_{n+1}$ . Тогда  $K_i \cup L = \mathbb{R}^n$ ,  $K_i \cap L \cap A = \emptyset$  в силу 2) и 3). Отметим, что по теореме 7.13 конусы  $K_i$  и  $L$  замкнуты в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда множества  $B = K_i \cap A$  и  $C = L \cap A$  замкнуты в  $A$ . При этом  $B \cup C = A$  и  $B \cap C = \emptyset$ . Но  $A$  связно. Поэтому либо  $B = A$ ,  $C = \emptyset$ , либо  $B = \emptyset$ ,  $C = A$ . Второй случай невозможен, так как  $a \in K_i \cap A = B$ . Следовательно,  $B = A$ , т. е.  $A \subset K_i$ .

Итак, из утверждений 1)—3) следует, что  $X$  имеет по крайней мере  $n+1$  связных компонент, а это противоречит условию задачи. Остается доказать 1)—3).

Утверждение 1) непосредственно вытекает из (I), (II): для любого  $i = 1, \dots, n+1$  имеем  $x^i \in X$  и

$$x^i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{j \neq i} \lambda_j x^j \in K_i. \quad (III)$$

Докажем 2). Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ . Поскольку векторы  $x^1, \dots, x^n$  образуют базис в  $\mathbb{R}^n$ , то  $x = \sum_{i=1}^n \mu_i x^i$  при некоторых  $\mu_1, \dots, \mu_n$ . Если  $\mu_1 \leq 0, \dots, \mu_n \leq 0$ , то  $x \in K_{n+1}$ . Пусть  $\mu_i > 0$  при некотором  $i$ .

Примем обозначение  $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\mu_i}{\lambda_i} = \frac{\mu_j}{\lambda_j}$ . Тогда  $\alpha > 0$ ,  $\gamma_i = \mu_i - \alpha \lambda_i \leq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $\gamma_j = 0$ . При этом

$$x = \sum_{i=1}^n \mu_i x^i - \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^n \gamma_i x^i - \alpha \lambda_{n+1} x^{n+1}.$$

Следовательно,  $x \in K_j$ , что доказывает 2).

Предположим, что утверждение 3) неверно. Тогда найдутся точка  $x \in X$  и индексы  $i, l$  ( $i \neq l$ ) такие, что  $x \in K_i \cap K_l$ . Следовательно,

$$-x = \sum_{j \neq i} \alpha_j x^j, \quad -x = \sum_{j \neq l} \beta_j x^j \quad (IV)$$

при некоторых  $\alpha_j \geq 0$  и  $\beta_j \geq 0$ . Подставим во вторую формулу выражение для  $x^i$  из (III):

$$-x = \sum_{j \neq i, l} \beta_j x^j - \frac{\beta_j}{\lambda_i} \sum_{j \neq i} \lambda_j x^j.$$

Данная формула и первая из формул (IV) указывают разложения вектора  $-x$  по одному и тому же базису  $x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}$ . Следовательно, соответствующие коэффициенты в этих разложениях должны совпадать. В частности,  $\alpha_i = -\beta_i \lambda_i / \lambda_i$ . Это возможно лишь в том случае, если  $\alpha_i = \beta_i = 0$ . Таким образом,

$$-x = \sum_{j \neq i, l} \alpha_j x^j.$$

Положим  $\alpha = 1 + \sum_{j \neq i, l} \alpha_j$ . Тогда

$$0 = \frac{1}{\alpha} x + \frac{1}{\alpha} \sum_{j \neq i, l} \alpha_j x^j,$$

т. е. точка 0 оказалась представленной в виде выпуклой комбинации  $n$  точек из  $X$ , а это противоречит предположению.

7.78. Согласно 7.72, точки  $x^1, \dots, x^m$  аффинно зависимы. Рассмотрим указанные в 7.72 числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Положим

$$I_1 = \{i \in I \mid \lambda_i \geq 0\}, \quad I_2 = \{i \in I \mid \lambda_i < 0\},$$

$$x = \sum_{i \in I_1} \lambda_i x^i = - \sum_{i \in I_2} \lambda_i x^i, \quad \lambda = \sum_{i \in I_1} \lambda_i = - \sum_{i \in I_2} \lambda_i > 0.$$

Тогда точка  $y = \frac{1}{\lambda} x$  является одновременно выпуклой комбинацией точек  $x^i$  ( $i \in I_1$ ) и  $x^i$  ( $i \in I_2$ ).

7.79. Докажем теорему индукцией по  $m$ . При  $m = n + 1$  утверждение тривиально. Пусть  $m > n + 1$  и для любых  $m - 1$  множеств теорема уже доказана. Тогда для каждого  $i = 1, \dots, m$  существует точка  $x^i \in \bigcap_{h \neq i} X_h$ . По теореме Радона (см. 7.78)

множество  $I = \{1, \dots, m\}$  можно так разбить на непересекающиеся множества  $I_1$  и  $I_2$ , что найдется точка  $x \in \text{conv } Y_1 \cap \text{conv } Y_2$ , где  $Y_1 = \{x^i \mid i \in I_1\}$ ,  $Y_2 = \{x^i \mid i \in I_2\}$ . При этом, очевидно,  $Y_1 \subset \bigcap_{i \in I_2} X_i$ ,  $Y_2 \subset \bigcap_{i \in I_1} X_i$ . Следовательно,  $x \in \bigcap_{i=1}^m X_i$ .

7.80. Предположим, что  $\bigcap_{i \in I} X_i = \emptyset$ . Зафиксируем индекс  $i_0 \in I$ . Тогда для любого  $x \in X_{i_0}$  найдется такой индекс

$i \in I$ , что  $x \notin X_i$  и, значит,  $x_i \in Y_i$ , где  $Y_i = \mathbb{R}^n \setminus X_i$ . Таким образом,  $X_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} Y_i$ , причем множества  $Y_i$  открыты. Но, как известно, из любого покрытия компакта открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие. Следовательно, существует такое конечное подмножество  $I_0 \subset I$ , что  $X_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I_0} Y_i$ , т. е.  $X_{i_0} \cap$

$\bigcap_{i \in I_0} X_i = \emptyset$ , а это противоречит 7.79.

7.81. Сначала предположим, что  $0 \in X$ . Пусть  $x^1, \dots, x^m$  — максимальная (по числу  $m$ ) линейно независимая система элементов множества  $X$  и  $L$  — линейное подпространство, натянутое на эти элементы, т. е.

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m \right\}. \quad (I)$$

Покажем, что  $L = \text{aff } X$ . Согласно выбору  $x^1, \dots, x^m$ , имеем  $X \subset L$ . Тогда  $\text{aff } X \subset L$  по определению аффинной оболочки. В то же время любую точку из  $L$  можно рассматривать как аффинную комбинацию точек  $x^1, \dots, x^m, 0$  из  $X$ :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i + \left( 1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i \right) \cdot 0. \quad (II)$$

Поэтому  $L \subset \text{aff } X$  в силу теоремы 7.7.

Для любой точки  $x \in L$  указанное в (I) представление единственно. Иными словами, на  $L$  определены однозначные функции  $\lambda_i(x)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) такие, что

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) x^i.$$

Ясно, что эти функции линейны и, значит, непрерывны на  $L$ .

Рассмотрим теперь любую точку  $\bar{x}$  вида

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i x^i, \quad \bar{\lambda}_i > 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i < 1.$$

Из теоремы 7.6 с учетом (II) следует, что  $\bar{x} \in X$ . Кроме того,  $\bar{\lambda}_i = \lambda_i(\bar{x})$ . Тогда в силу непрерывности функций  $\lambda_i(x)$  существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для любого  $x \in L \cap U_\varepsilon(\bar{x})$  справедливы неравенства

$$\lambda_i(x) > 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) < 1.$$

Следовательно,  $x \in X$ . Таким образом,  $\text{aff } X \cap U_\varepsilon(\bar{x}) \subset X$ , т. е.  $\bar{x} \in \text{ri } X$ .

Пусть теперь  $0 \notin X$ . Положим  $Y = X - x^0$ , где  $x^0 \in X$ . Тогда  $0 \in Y$  и по доказанному выше существует точка  $y \in \text{ri } Y$ . Ясно, что  $x = y + x^0 \in \text{ri } X$ .

7.82. Для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$  положим  $z(\alpha) = \alpha x + (1 - \alpha)y$ . Тогда  $z(\alpha) \in \text{aff } X$  и  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} z(\alpha) = x$ . Поскольку  $x \in \text{ri } X$ , то найдется та-

кое число  $\alpha > 1$ , что точка  $z = z(\alpha)$  принадлежит  $X$ . При этом  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ , где  $\lambda = 1 - 1/\alpha$ .

7.83. Пусть  $\{z^k\} \subset \text{aff } X$ ,  $z^k \rightarrow z$ . Требуется показать, что  $z^k \in X$  при всех достаточно больших  $k$ .

Поскольку  $y \in \bar{X}$ , то существует такая последовательность  $\{y^k\} \subset X$ , что  $y^k \rightarrow y$ . Положим  $u^k = y^k - y$ ,  $v^k = z^k - z$ . Тогда

$$z^k = z + v^k = \lambda x + (1 - \lambda)(y^k - u^k) + v^k = \lambda \bar{x}^k + (1 - \lambda)y^k,$$

где

$$\bar{x}^k = x + \frac{\lambda - 1}{\lambda} u^k + \frac{1}{\lambda} v^k.$$

Ясно, что точка  $\bar{x}^k$  является аффинной комбинацией точек  $x$ ,  $y^k$ ,  $y$ ,  $z^k$ ,  $z$ , каждая из которых заведомо лежит в  $\text{aff } \bar{X} = \text{aff } X$ . Поэтому  $\bar{x}^k \in \text{aff } X$  в силу теоремы 7.6. В то же время  $\bar{x}^k \rightarrow x$ , так как  $u^k \rightarrow 0$ ,  $v^k \rightarrow 0$ . Тогда из условия  $x \in \text{ri } X$  следует, что  $\bar{x}^k \in X$  при всех достаточно больших  $k$ . Но в таком случае и  $z^k \in X$ , поскольку  $X$  выпукло.

7.84. Ясно, что  $\overline{\text{ri } X} \subset \bar{X}$ . Пусть  $y \in \bar{X}$ . По теореме 7.14 существует  $x \in \text{ri } X$ . Для любого  $\lambda \in (0, 1]$  положим  $z(\lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)y$ . Тогда  $z(\lambda) \in \text{ri } X$  в силу теоремы 7.16 и  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} z(\lambda) = y$ .

Поэтому  $y \in \overline{\text{ri } X}$ . Следовательно,  $\bar{X} \subset \overline{\text{ri } X}$ , т. е.  $\bar{X} = \overline{\text{ri } X}$ .

Поскольку  $\text{aff } X = \text{aff } \bar{X}$ , то  $\text{ri } X \subset \text{ri } \bar{X}$ . Пусть  $x \in \text{ri } \bar{X}$ . Возьмем  $y \in \text{ri } X$ . Тогда, согласно теореме 7.15, имеем  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ , где  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $z \in \bar{X}$ . Вновь используя теорему 7.16, получаем, что  $x \in \text{ri } X$ . Итак,  $\text{ri } \bar{X} \subset \text{ri } X$ , т. е.  $\text{ri } X = \text{ri } \bar{X}$ .

Если  $\text{int } X \neq \emptyset$ , то формула  $\text{int } X = \text{int } \bar{X}$  совпадает с только что доказанной. Пусть  $\text{int } X = \emptyset$ . Предположим, что  $\text{int } \bar{X} \neq \emptyset$ . Тогда тем более  $\text{int}(\text{aff } \bar{X}) = \text{int}(\text{aff } X) \neq \emptyset$ . Поэтому  $\text{aff } X = \mathbb{R}^n$  в силу следствия 7.1. В таком случае  $\text{ri } X = \text{int } X$ . Но  $\text{ri } X \neq \emptyset$ . Противоречие. Следовательно,  $\text{int } \bar{X} = \emptyset$ .

7.85. Если  $\dim X = n$ , то  $\text{aff } X = \mathbb{R}^n$ . Тогда  $\text{int } X = \text{ri } X \neq \emptyset$ . Напротив, если  $\text{int } X \neq \emptyset$ , то  $\text{aff } X = \mathbb{R}^n$ , значит,  $\dim X = n$ .

7.86. Поскольку  $x \in \text{ri } X$ , то  $U_{\varepsilon_0}(x) \cap \text{aff } X \subset X$  при некотором  $\varepsilon_0 > 0$ . Рассмотрим любое  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Пусть  $y \in U_\varepsilon(x) \cap \text{aff } X$ . Ясно, что существует  $\delta > 0$ , при котором  $U_\delta(y) \subset U_\varepsilon(x)$ . Следовательно,  $U_\delta(y) \cap \text{aff } X \subset X$ , т. е.  $y \in \text{ri } X$ .

7.88. С учетом теоремы 7.17 имеем  $\text{aff}(\text{ri } X) = \text{aff}(\overline{\text{ri } X}) = \text{aff } \bar{X} = \text{aff } X$ .

7.89. Применить теорему 7.17.

7.90. Нет, не следует. Примером служит отрезок и один из его концов.

7.91. Пусть  $x \in \text{ri } X_1$  и  $y \in \bar{X}_1 \cap \text{ri } X_2$ . Согласно теореме 7.15, имеем  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$  при некоторых  $\lambda \in (0, 1)$  и  $z \in X_1 \subset \bar{X}_2$ . Тогда  $x \in \text{ri } \bar{X}_2$  в силу теоремы 7.16, т. е.  $\text{ri } X_1 \subset \text{ri } X_2$ .

7.92. Пусть  $x \in \text{ri } X_1 \subset \text{aff } X_2$ ,  $y \in \bar{X}_1 \cap \text{ri } X_2$  и  $z(\lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)y$ . Тогда  $z(\lambda) \in \text{ri } X_1$  при любом  $\lambda \in (0, 1)$  (теорема 7.16). Из 7.86 легко выводится, что  $z(\lambda) \in \text{ri } X_2$  при любом  $\lambda \in (0, 1)$ , достаточно близком к нулю.

7.93. Утверждение очевидно с учетом второй формулы из 7.51.

7.94. Пусть  $y \in \text{ri } A(X)$ ,  $x^0 \in \text{ri } X$ . Положим  $y^0 = Ax^0 \in A(X)$ . Из теоремы 7.15 следует, что  $y = \lambda y^0 + (1-\lambda)y^1$  при некоторых  $\lambda \in (0, 1)$  и  $y^1 \in A(X)$ , т. е.  $y^1 = Ax^1$ , где  $x^1 \in X$ . Тогда  $y = \lambda(\lambda x^0 + (1-\lambda)x^1)$ , причем  $\lambda x^0 + (1-\lambda)x^1 \in \text{ri } X$  в силу теоремы 7.16. Таким образом,  $y \in A(\text{ri } X)$ , т. е.  $\text{ri } A(X) \subset A(\text{ri } X)$ .

Пусть  $y \in A(\text{ri } X)$ ,  $y^0 \in \text{ri } A(X)$ . Тогда  $y = Ax$ ,  $y^0 = Ax^0$  при некоторых  $x \in \text{ri } X$ ,  $x^0 \in X$ . Вновь используя теорему 7.15, можем записать  $x = \lambda x^0 + (1-\lambda)x^1$  при некоторых  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $x^1 \in X$ . Отсюда получаем  $y = Ax = \lambda y^0 + (1-\lambda)Ax^1$ . Тогда  $y \in \text{ri } A(X)$  в силу теоремы 7.16. Итак,  $A(\text{ri } X) \subset \text{ri } A(X)$ .

7.95. Применить 7.93, 7.94 (ср. с 7.13).

7.96. Пусть  $x \in \text{ri } A^{-1}(Y)$ ,  $x^0 \in A^{-1}(\text{ri } Y)$ . Тогда  $Ax \in Y$ ,  $Ax^0 \in \text{ri } Y$ . Из теоремы 7.15 следует, что  $x = \lambda x^0 + (1-\lambda)x^1$  при некоторых  $\lambda \in (0, 1)$  и  $x^1 \in A^{-1}(Y)$ . Поэтому  $Ax = \lambda Ax^0 + (1-\lambda)Ax^1 \in \text{ri } Y$  в силу теоремы 7.16, т. е.  $x \in A^{-1}(\text{ri } Y)$ .

Пусть  $x \in A^{-1}(\text{ri } Y)$ . Требуется показать, что  $x \in \text{ri } A^{-1}(Y)$ . Для этого достаточно убедиться в следующем: если  $\{x^k\} \subset \text{aff}(A^{-1}(Y))$  и  $x^k \rightarrow x$ , то  $x^k \in A^{-1}(Y)$  при всех достаточно больших  $k$ . Ясно, что

$$\text{aff}(A^{-1}(Y)) \subset A^{-1}(\text{aff } Y).$$

Таким образом,  $Ax^k \in \text{aff } Y$ ,  $Ax^k \rightarrow Ax \in \text{ri } Y$ . Тогда  $Ax^k \in Y$  при всех достаточно больших  $k$ . Первая формула доказана. Докажем вторую.

Включение  $\overline{A^{-1}(Y)} \subset A^{-1}(\overline{Y})$  очевидно. Пусть  $x \in A^{-1}(\overline{Y})$ ,  $x^0 \in \text{ri } A^{-1}(Y)$  и  $x(\lambda) = \lambda x^0 + (1-\lambda)x$ . Из теоремы 7.16 следует, что при любом  $\lambda \in (0, 1)$  точка  $Ax(\lambda) = \lambda Ax^0 + (1-\lambda)Ax$  принадлежит  $\text{ri } Y$ , т. е.  $x(\lambda) \in A^{-1}(\text{ri } Y) \subset A^{-1}(Y)$ . При этом  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} x(\lambda) = x$ . Тогда  $x \in A^{-1}(Y)$ .

Требуемый пример:  $n = m = 2$ ,  $A(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ ,  $Y = \text{int } \mathbb{R}_+^2 \cup \{(0, 0)\}$ .

7.97. Включения  $\text{aff } X \subset \bigcap_{i=1}^m \text{aff } X_i$ ,  $\overline{X} \subset \bigcap_{i=1}^m \overline{X}_i$ ,  $\bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i \subset \text{ri } X$  очевидны (они справедливы для любых множеств). Зафиксируем точку  $y \in \bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i$ .

Пусть  $x \in \bigcap_{i=1}^m \text{aff } X_i$ . Тогда точка  $z(\lambda) = \lambda x + (1-\lambda)y$  принадлежит множествам  $X_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) при любом  $\lambda$ , достаточно близком к 0. Иными словами, точка  $x$  есть аффинная комбинация точек  $y, z(\lambda) \in X$  ( $\lambda \neq 0$ ). Следовательно,  $x \in \text{aff } X$ .

Пусть  $x \in \bigcap_{i=1}^m \overline{X}_i$  и по-прежнему  $z(\lambda) = \lambda x + (1-\lambda)y$ .

С учетом теоремы 7.16 имеем  $z(\lambda) \in \bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i \subset X$  при любом  $\lambda \in (0, 1)$ . Поскольку  $\lim_{\lambda \rightarrow 1} z(\lambda) = x$ , то  $x \in \overline{X}$ .

Пусть  $x \in \text{ri } X$ . Из теоремы 7.15 следует, что  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$  при некоторых  $\lambda \in (0, 1)$  и  $z \in X$ . Но тогда  $x \in \bigcap_{i=1}^m \text{ri } X_i$  в силу теоремы 7.16.

Требуемый пример:  $X_1$  — объединение внутренности треугольника и одной из его вершин,  $X_2$  — сторона треугольника, содержащая эту вершину.

7.98. Будем считать, что  $I \neq \emptyset$ ,  $J \neq \emptyset$  (иначе рассуждения лишь упрощаются). Ясно, что  $X = Y \cap Z$ , где

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_I x = b_I\}, \quad Z = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_J x \leq b_J\}.$$

Поскольку  $Y$  — аффинное множество (точнее,  $Y = \text{aff } X$ ; см. 4.23), то  $\text{ri } Y = Y$ . Легко проверяется, что  $\text{int } Z = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_J x < b_J\}$ . При этом  $Y \cap \text{int } Z \neq \emptyset$  в силу 4.22. Тогда из 7.97 следует, что  $\text{ri } X = \text{ri } Y \cap \text{ri } Z = Y \cap \text{int } Z$ .

7.99. Сначала предположим, что  $\Lambda \cap \text{int } \mathbb{R}_+^m \neq \emptyset$  и, значит,  $\text{ri } \Lambda \subset \text{int } \mathbb{R}_+^m$  (см. 7.91). Обозначим правую часть доказываемой формулы через  $Y$ . Пусть  $x \in \text{ri } X$ ,  $\mu \in \text{ri } \Lambda$ ,  $y^i \in \text{ri } X_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и  $y = \sum_{i=1}^m \mu_i y^i \in X$ . Из теоремы 7.15 следует, что  $x = \alpha y +$

$+(1 - \alpha)z$  при некоторых  $\alpha \in (0, 1)$  и  $z \in X$ , т. е.  $z = \sum_{i=1}^m \eta_i z^i$ ,

где  $\eta \in \Lambda$ ,  $z^i \in X_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). С учетом теоремы 7.16 имеем

$$\lambda = \alpha \mu + (1 - \alpha)\eta \in \text{ri } \Lambda, \quad \lambda > 0, \quad (I)$$

$$z^i = \alpha \mu_i \lambda_i^{-1} y^i + (1 - \alpha) \eta_i \lambda_i^{-1} z^i \in \text{ri } X_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (II)$$

При этом  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$ , т. е.  $x \in Y$ . Итак,  $\text{ri } X \subset Y$ .

Пусть  $x \in Y$ ,  $y \in \text{ri } X$ . Тогда  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$ ,  $y = \sum_{i=1}^m \mu_i y^i$  при некоторых  $\lambda \in \text{ri } \Lambda$ ,  $x^i \in \text{ri } X_i$ ,  $\mu \in \Lambda$ ,  $y^i \in X_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Поскольку  $\lambda \in \text{ri } \Lambda$ ,  $x^i \in \text{ri } X_i$ , то (ср. с решением задачи 7.82) найдется такое число  $\beta > 1$ , что

$$\eta = \beta \lambda + (1 - \beta)\mu \in \Lambda, \quad \eta > 0, \quad (III)$$

$$z^i = \beta \lambda_i \eta_i^{-1} x^i + (1 - \beta) \mu_i \eta_i^{-1} y^i \in X_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (IV)$$

и, значит,  $z = \sum_{i=1}^m \eta_i z^i \in X$ . Положим  $\alpha = 1 - 1/\beta$ . Тогда равенства из (III), (IV) можно переписать в виде равенств из (I), (II). При этом  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z \in \text{ri } X$ . Следовательно,  $Y \subset \text{ri } X$ , т. е.  $\text{ri } X = Y$ .

Пусть теперь  $\Lambda \cap \text{int } \mathbb{R}_+^m = \emptyset$ . Введем множество  $I \subset \{1, \dots, m\}$ , состоящее из таких индексов  $i$ , что  $\lambda_i > 0$  хотя бы при одном  $\lambda \in \Lambda$ . Положим

$$\mathbb{R}_+^I = \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_i \geq 0, \quad i \in I; \quad \lambda_i = 0, \quad i \notin I\}.$$

Заметим, что  $\text{ri } \mathbf{R}_+^I = \{\lambda \in \mathbf{R}^m \mid \lambda_i > 0, i \in I; \lambda_i = 0, i \notin I\}$ .

При этом, очевидно,  $\Lambda \subset \mathbf{R}_+^I$ ,  $\Lambda \cap \text{ri } \mathbf{R}_+^I \neq \emptyset$  и, значит,  $\text{ri } \Lambda \subset \text{ri } \mathbf{R}_+^I$  (см. 7.91). Таким образом, множества  $X_i$  ( $i \notin I$ ) можно просто исключить из рассмотрения, а для оставшихся множеств  $X_i$  ( $i \in I$ ) повторить приведенные выше рассуждения.

7.100. Применить 7.99 при

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbf{R}^m \mid \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$$

и  $\Lambda = \mathbf{R}_+^m$  соответственно.

7.101. Рассмотреть в 7.100 случай  $X_i = \{x^i\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

7.102. Пусть  $L_{x^0}^+ \subset \text{aff } X$  ( $h \neq 0$ ). Поскольку  $x \in \text{ri } X$ , то  $x + \alpha h \in X$  при достаточно малом  $\alpha > 0$ . Положим  $\alpha^* = \sup\{\alpha > 0 \mid x + \alpha h \in \bar{X}\}$ . Так как  $X$  ограничено, то  $\alpha^* < \infty$ . При этом  $x + \alpha^* h \in \bar{X} \setminus \text{ri } X = \text{gr } X$ . Если  $\alpha \in (0, \alpha^*)$ , то  $x + \alpha h \in \text{ri } X$  в силу теоремы 7.16. Если же  $\alpha > \alpha^*$ , то  $x + \alpha h \notin \bar{X}$  в силу выбора  $\alpha^*$ . Таким образом, луч  $L_{x^0}^+$  пересекает  $\text{gr } X$  в единственной точке  $x + \alpha^* h$ .

7.103. Сначала покажем, что  $\overline{\text{ri } X} = \bar{X}$ . Включение  $\overline{\text{ri } X} \subset \bar{X}$  очевидно. Пусть обратное включение неверно, т. е. существует такая точка  $x \in \bar{X}$ , что  $x \notin \overline{\text{ri } X}$ . Тогда  $x \in \text{gr } X$ . Рассмотрим любую точку  $x^0 \in \text{ri } X$ . Введем обозначение  $x(\lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)x^0$ . Положим

$$\lambda^* = \sup \{ \lambda \mid x(\lambda) \in \text{ri } X, 0 \leq \lambda \leq 1 \}, \quad x^* = x(\lambda^*).$$

Ясно, что  $x^* \notin \text{ri } X$  и в то же время  $x^* \in \overline{\text{ri } X} \subset \bar{X}$ , т. е.  $x^* \in \text{gr } X$ . При этом  $x^* \neq x$ , так как  $x \notin \overline{\text{ri } X}$ . Таким образом, на луче, выходящем из точки  $x^0$  и проходящем через точку  $x$ , лежат по крайней мере две точки из  $\text{gr } X$ , а это противоречит условию задачи. Формула  $\overline{\text{ri } X} = \bar{X}$  доказана. Остается доказать следующее: если  $x^1, x^2 \in \text{ri } X$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ , то точка  $\bar{x} = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$  принадлежит  $\bar{X}$ . Пусть это неверно. Тогда, очевидно, на каждом из интервалов  $(x^1, \bar{x})$  и  $(\bar{x}, x^2)$  лежит по крайней мере одна точка из  $\text{gr } X$ . Но это означает, что на луче, выходящем из точки  $x^1$  и проходящем через точку  $x^2$ , лежат по крайней мере две точки из  $\text{gr } X$ . Противоречие.

7.105. Поскольку  $\dim X = \dim(\text{aff } X)$ , то утверждение следует из равенств  $\text{aff}(\text{ri } X) = \text{aff } X = \text{aff } \bar{X}$  (см. 7.88).

7.107. Учитывая 7.106, можно считать, что  $0 \in X_1 \cap X_2$ . Тогда множества  $L_1 = \text{aff } X_1$  и  $L_2 = \text{aff } X_2$  являются линейными подпространствами. Используя 7.56, 7.97 и отмеченную теорему линейной алгебры, получаем

$$\begin{aligned} \dim(X_1 \cap X_2) &= \dim(\text{aff}(X_1 \cap X_2)) = \\ &= \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = \\ &= \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(\text{aff}(X_1 + X_2)) = \\ &= \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 + X_2). \end{aligned}$$

7.108.  $X_1 = [-1, 0]$ ,  $X_2 = [0, 1]$ .

7.109. Применить 7.92, 7.107 и теорему 7.19.

7.110. а)  $\dim X = 3$ . Множество  $X$  имеет внутреннюю точку  $(a, a, 0)$ , где  $1/2 < a < \sqrt{2}/2$ .

б) Обозначим через  $X_1$  и  $X_2$  множества, задаваемые ограничением-равенством и ограничениями-неравенствами соответственно. Ясно, что  $(1/3, 1/3, 1/3) \in X_1 \cap \text{int } X_2$ . Тогда, используя 7.109, получаем, что  $\dim X = \dim X_2 = 2$ .

в)  $\dim X = 1$ . Учесть, что сумма левых частей первых двух неравенств равна левой части третьего неравенства.

г)  $\dim X = 0$ .

7.111. 1) По условию существует такая последовательность  $\{x^k\}$ , что  $\|x^k\| \rightarrow \infty$ . Для любых  $x^0 \in X$ ,  $\alpha \geq 0$  и  $k = 1, 2, \dots$  положим

$$\bar{x}^k = x^0 + \alpha h^k, \text{ где } h^k = \frac{x^k - x^0}{\|x^k - x^0\|}.$$

Для всех достаточно больших  $k$  имеем  $\alpha \leq \|x^k - x^0\|$  и, значит,  $\bar{x}^k \in X$  в силу выпуклости  $X$ . Поскольку  $\|h^k\| = 1$ , то без ограничения общности можно считать, что  $h^k \rightarrow h \neq 0$ . Тогда  $\bar{x}^k \rightarrow x^0 + \alpha h$ . Таким образом,  $x^0 + \alpha h \in \bar{X} = X$ . Иными словами,  $l_{x^0 h}^+ \subset X$ .

2) Пусть  $l_{x^0 h}^+ \subset X$ . Для любых  $x \in X$ ,  $\alpha \geq 0$  и  $k = 1, 2, \dots$  положим

$$x^k = x + \alpha h + \frac{1}{k}(x^0 - x) = \frac{1}{k}(x^0 + \alpha k h) + \left(1 - \frac{1}{k}\right)x.$$

Поскольку  $x^0 + \alpha k h \in X$ , то и  $x^k \in X$ . При этом  $x^k \rightarrow x + \alpha h$ . Следовательно,  $x + \alpha h \in \bar{X} = X$ , т. е.  $l_{x h}^+ \subset X$ .

7.112. Например, для  $X$  из 7.3 и 7.4 соответственно имеем  $K(X) = \{h \in \mathbb{R}^2 \mid h_1 = 0, h_2 \geq 0\}$  и  $K(X) = \mathbb{R}_+^2$ .

7.113. Ясно, что  $X$  — замкнутое выпуклое множество и  $0 \in X$ . Тогда, согласно теореме 7.21, это множество неограничено в том и только том случае, если существует такой вектор  $h \in \mathbb{R}^n$ , что  $h \neq 0$  и  $\alpha h \in X$  при всех  $\alpha \geq 0$ , т. е.  $\|h\| + \langle c, h \rangle \leq 0$ . Отсюда с учетом неравенства Коши — Буняковского легко выводится, что искомыми являются все векторы  $c$ , удовлетворяющие условию  $\|c\| \geq 1$ .

7.114. Для открытой полосы с добавленной граничной точкой оба утверждения теоремы не выполняются.

7.115. По условию  $x + \alpha h \in \bar{X}$  при любом  $\alpha \geq 0$ . Но

$$x + \alpha h = \frac{1}{\alpha + 1}x + \frac{\alpha}{\alpha + 1}(x + (\alpha + 1)h),$$

где  $x \in \text{ri } X$ ,  $x + (\alpha + 1)h \in \bar{X}$ . Тогда из теоремы 7.16 следует, что  $x + \alpha h \in \text{ri } X$ , т. е.  $l_{x h}^+ \subset \text{ri } X$ .

7.116. Применить теорему 7.20 к множеству  $\bar{X}$ , а затем использовать 7.115.

7.117. Применить 7.116 и теорему 7.21.

7.119. Пусть  $h \in K(X)$ , т. е.  $l_{xh}^+ \subset X$  при некотором  $x \in X$ ; иными словами, точка  $x^h = x + kh$  принадлежит  $X$  при любом  $k = 1, 2, \dots$ . Положим  $\lambda_k = 1/k$ . Тогда, очевидно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k x^h = h$ .

Пусть, напротив,  $h = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k x^h$ , где  $x^h \in X$ ,  $\lambda_k \geq 0$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ . Рассмотрим любые  $x \in X$  и  $\alpha \geq 0$ . При всех доста-

точно больших  $k$  имеем  $\alpha \lambda_k < 1$ , и поэтому точка  $\bar{x}^h = (1 - \alpha \lambda_k)x + \alpha \lambda_k x^h$  лежит в  $X$ . Но  $\bar{x}^h \rightarrow x + \alpha h$ . Следовательно,  $x + \alpha h \in \bar{X}$ . Таким образом,  $h \in K(\bar{X}) = K(X)$  (см. 7.117).

7.122. Применить 7.58, 7.119.

7.123. Обозначим через  $A$  и  $B$  вышуклую оболочку и сумму соответственно. Сначала предположим, что  $0 \in X_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Тогда  $\lambda x \in X_i$  при всех  $x \in X_i$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . В таком случае из 7.58 следует, что  $A \subset B$ . Кроме того, ясно, что  $B \subset mA$ . Таким образом,

$$K(A) \subset K(B) \subset K(mA) = K(A),$$

т. е.  $K(A) = K(B)$ . Обратимся к общему случаю. Рассмотрим любые точки  $x^i \in X_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Тогда с учетом 7.122 получаем

$$K(A) = K\left(\text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^m (X_i - x^i)\right)\right) = K\left(\sum_{i=1}^m (X_i - x^i)\right) = K(B).$$

7.125.  $L(X) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ .

7.126.  $L(X) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 0\}$ .

7.128. а) Как известно,  $L^\perp + L = \mathbb{R}^n$ . Пусть  $x \in X$ . Тогда  $x = y + h$ , где  $y \in L^\perp$ ,  $h \in L \subset L(X)$ . При этом  $y = x - h \in X$  в силу 7.124 и теоремы 7.21. Таким образом,  $X \subset X \cap L^\perp + L$ . Обратное включение совсем очевидно:  $X \cap L^\perp + L \subset X + L \subset X$ .

б) Пусть  $l_{xh} \subset X \cap L^\perp$ . Тогда  $h \in L(X) \subset L$ , и поскольку  $L \cap L^\perp = \{0\}$ , то  $h = 0$ .

7.129. Включения

$$A(\bar{X}) \subset \overline{A(X)}, \quad A(K(X)) \subset K(A(X))$$

справедливы при любом  $X$ . Первое легко следует из непрерывности отображения  $A$ , второе — из его линейности и определения рецессивного конуса. В самом деле, пусть  $g \in A(K(X))$ , т. е.  $g = Ah$ , где  $h \in K(X)$ . Тогда  $x + \alpha h \in X$  при некотором  $x \in X$  и всех  $\alpha \geq 0$ . Отсюда  $Ax + \alpha Ah \in A(X)$ , т. е.  $g \in K(A(X))$ .

Далее, поскольку  $L \subset L(\bar{X})$ , то согласно 7.128 имеем  $X \subset \bar{X} \cap L^\perp + L$ . Отсюда с учетом вида  $L$  получаем

$$A(X) \subset A(\bar{X} \cap L^\perp). \quad (I)$$

Докажем теперь следующее вспомогательное утверждение:

если  $y^k = Ax^k$ ,  $x^k \in \bar{X} \cap L^\perp$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и

последовательность  $\{y^k\}$  ограничена, то (II)

$\{x^k\}$  также ограничена.

Допустим противное, т. е. при указанных условиях  $\|x^k\| \rightarrow \infty$ .

Положим  $h^k = \frac{x^k}{\|x^k\|}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Без ограничения общности можно считать, что  $h^k \rightarrow h \neq 0$ . Тогда  $h \in K(\bar{X}) = K(X)$  в силу 7.117, 7.119. Кроме того,  $Ah = 0$  и  $h \in L^\perp$ . Следовательно,  $h \in L \cap L^\perp$ , т. е.  $h = 0$ . Полученное противоречие доказывает утверждение (II). Отсюда легко выводится, что множество  $A(\bar{X} \cap L^\perp)$  замкнуто. Тогда с учетом (I) получаем

$$\overline{A(X)} \subset A(\bar{X} \cap L^\perp) \subset A(\bar{X}).$$

Первая формула доказана. Для доказательства второй напомним, что рецессивный конус не меняется при сдвигах множества, т. е.  $K(X + x^0) = K(X)$  (см. 7.122). Поэтому можно считать, что  $0 \in \text{ri } X$ . Пусть  $g \in K(A(X))$ . Тогда из 7.116 (или 7.117) следует, что  $kg \in A(X)$  при всех  $k = 1, 2, \dots$ . С учетом (I) имеем  $kg = Ah^k$ , где  $x^k \in \bar{X} \cap L^\perp$ . Положим  $h^k = \frac{1}{k}x^k$ . Поскольку  $0 \in \text{ri } X \subset \bar{X}$  и  $k \geq 1$ , то  $h^k \in \bar{X} \cap L^\perp$ . При этом  $g = Ah^k$ . Тогда в силу (II) последовательность  $\{h^k\}$  ограничена. Пусть без потери общности  $h^k \rightarrow h$ . Тогда  $g = Ah$  и  $h \in K(\bar{X}) = K(X)$  (см. 7.117, 7.119). Таким образом,  $g \in A(K(X))$ .

7.130. Рассмотрим оператор проектирования  $Ax = x_1$ , где  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Тогда для множества  $X$  из 7.4 не выполняется первая формула в 7.129, а для  $X$  из 7.3 — вторая формула. В обоих случаях множество  $L = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$  не является линейным подпространством.

7.131. Применить 7.120, 7.129 (ср. с 7.13, 7.95).

7.132. Конкретизировать 7.131.

7.133. Пусть  $h \in K(A^{-1}(Y))$ , т. е.  $x + \alpha h \in A^{-1}(Y)$  при некотором  $x \in X$  и всех  $\alpha \geq 0$ . Отсюда следует, что  $Ax + \alpha Ah \in Y$ , т. е.  $Ah \in K(Y)$ , и, значит,  $h \in A^{-1}(K(Y))$ .

Пусть, напротив,  $h \in A^{-1}(K(Y))$ , т. е.  $Ah \in K(Y)$ . Если выполняется условие 1), то выберем  $x \in A^{-1}(\text{ri } Y)$ . Тогда  $Ax \in \text{ri } Y$  и из 7.116 следует, что  $Ax + \alpha Ah \in Y$  при всех  $\alpha \geq 0$ . Иными словами,  $x + \alpha h \in A^{-1}(Y)$ , т. е.  $h \in K(A^{-1}(Y))$ . Если же выполняется условие 2), то с учетом теоремы 7.20 в приведенном рассуждении можно взять любую точку  $x \in A^{-1}(Y)$ .

7.134. Подходит пример, указанный в решении задачи 7.96.

7.135. Рассмотрим для простоты полиэдр  $X$  вида (4.1). Если трактовать  $A$  как линейное отображение, то  $X = A^{-1}(b - R_+^n)$ . При этом  $K(b - R_+^n) = -R_+^n$ .

## § 8

8.1. Пусть  $x^1$  и  $x^2$  — две проекции точки  $a$  на  $X$ , т. е.  $\|x^1 - a\| = \|x^2 - a\| = \inf_{x \in X} \|x - a\|$ . Тогда треугольник с вершинами  $a$ ,  $x^1$  и  $x^2$  является равнобедренным. Любая внутренняя точка  $x$  его основания  $[x^1, x^2]$  лежит на более близком расстоянии от вершины  $a$ , чем  $x^1$  и  $x^2$ ; в то же время  $x \in X$  в силу выпуклости  $X$ . Но это противоречит определению проекции.

8.2. Добавляя  $\pm a$  во второй член указанного скалярного произведения, а затем используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\|x^* - a\|^2 \leq \langle x^* - a, x - a \rangle \leq \|x^* - a\| \cdot \|x - a\|.$$

Следовательно,  $\|x^* - a\| \leq \|x - a\|$  при всех  $x \in X$ , т. е.  $x^*$  — проекция  $a$  на  $X$ .

8.3. Положим  $b = \pi_X(a^1) - \pi_X(a^2)$ . Из теоремы 8.1 следует, что

$$\langle a^1 - \pi_X(a^1), -b \rangle \leq 0, \quad \langle a^2 - \pi_X(a^2), b \rangle \leq 0.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\|b\|^2 \leq \langle a^1 - a^2, b \rangle \leq \|a^1 - a^2\| \cdot \|b\|.$$

8.4. Прежде всего отметим, что проекция  $\pi_X(a)$  существует в силу теоремы 1.6. Для краткости положим  $x^* = \pi_X(a)$ . Для любых  $x \in X$  и  $\lambda \in (0, 1]$ , используя выпуклость  $X$  и определение проекции, имеем

$$\begin{aligned} \|x^* - a\|^2 &\leq \|\lambda x + (1 - \lambda)x^* - a\|^2 = \|(x^* - a) + \lambda(x - x^*)\|^2 = \\ &= \|x^* - a\|^2 + 2\lambda \langle x^* - a, x - x^* \rangle + \lambda^2 \|x - x^*\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно,  $2\langle x^* - a, x - x^* \rangle + \lambda \|x - x^*\|^2 \geq 0$ . Переходя здесь к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ , получаем нужное неравенство.

8.5. По условию  $a \in \partial X$ . Но  $\partial X = \overline{\partial X}$  в силу теоремы 7.18. Следовательно, найдется такая последовательность  $\{a^k\}$ , что  $a^k \notin \overline{X}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и  $a^k \rightarrow a$ . Тогда по теореме 8.2 существуют такие векторы  $p^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), что

$$\langle p^k, x \rangle < \langle p^k, a^k \rangle \text{ при всех } x \in X. \quad (I)$$

Поскольку  $p^k \neq 0$ , то можно считать, что  $\|p^k\| = 1$ . Пусть без ограничения общности  $p^k \rightarrow p \neq 0$ . Переходя в (I) к пределу и полагая  $\beta = \langle p, a \rangle$ , получаем (8.1).

8.6. Поскольку  $a \in \text{гд } X = \text{гд } \overline{X}$  (теорема 7.18), то найдется такая последовательность  $\{a^k\}$ , что  $a^k \in \text{aff } \overline{X}$ ,  $a^k \notin \overline{X}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и  $a^k \rightarrow a$ . Введем векторы

$$p^k = \frac{a^k - \pi_{\overline{X}}(a^k)}{\|a^k - \pi_{\overline{X}}(a^k)\|}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Согласно теореме 8.2, для этих векторов выполнено соотношение (I) из решения предыдущей задачи. Поскольку  $\|p^k\| = 1$ , то без ограничения общности можно считать, что  $p^k \rightarrow p \neq 0$ . Тогда, как и выше, приходим к (8.1). Покажем теперь, что соотношение (8.2) выполнено для любой точки  $\bar{x} \in \text{гд } X$ . По определению  $\text{гд } X$  существует  $\varepsilon > 0$ , при котором  $U_\varepsilon(\bar{x}) \cap \text{aff } X \subset X$ . Введем точки  $x^k = \bar{x} + \varepsilon p^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Тогда, очевидно,  $x^k \in U_\varepsilon(\bar{x})$ .

Кроме того,  $x^k$  есть аффинная комбинация точек  $\bar{x}$ ,  $a^k$  и  $\pi_{\overline{X}}(a^k)$ , принадлежащих  $\text{aff } \overline{X} = \text{aff } X$ . Тогда и  $x^k \in \text{aff } X$  в силу теоремы 7.6. Итак,  $x^k \in U_\varepsilon(\bar{x}) \cap \text{aff } X \subset X$ . Но  $x^k \rightarrow \bar{x} + \varepsilon p$ . Поэтому  $\bar{x} + \varepsilon p \in X$ . Теперь из (8.1) получаем

$$\beta \geq \langle p, \bar{x} + \varepsilon p \rangle = \langle p, \bar{x} \rangle + \varepsilon \|p\|^2 > \langle p, \bar{x} \rangle.$$

8.7. Пусть  $\text{ri } X_1 \cap \text{ri } X_2 = \emptyset$ . Рассмотрим множество  $X = \text{ri } X_1 - \text{ri } X_2$ . Оно выпукло в силу следствия 7.3. При этом  $0 \notin X$ . Возможны два случая:  $0 \notin \bar{X}$  и  $0 \in \bar{X} \setminus X \subset \text{rd } X$ . Применяя в первом случае теорему 8.2, а во втором — теорему 8.4, получаем, что существует вектор  $p$ , для которого

$$\begin{aligned} \langle p, x \rangle &\leq \langle p, 0 \rangle = 0 \text{ при всех } x \in X, \\ \langle p, \bar{x} \rangle &< 0 \text{ при некотором } \bar{x} \in X. \end{aligned}$$

С учетом определения  $X$  это означает, что справедливо соотношение

$$\langle p, x^1 \rangle \leq \langle p, x^2 \rangle \text{ при всех } x^1 \in \text{ri } X_1, \quad x^2 \in \text{ri } X_2, \quad (I)$$

а также соотношение (8.4). Поскольку  $X_i \subset \bar{X}_i = \overline{\text{ri } X_i}$  ( $i = 1, 2$ ) в силу теоремы 7.17, то в (I) вместо  $\text{ri } X_i$  можно поставить  $X_i$ . Следовательно,

$$\sup_{X_1} \langle p, x^1 \rangle \leq \inf_{X_2} \langle p, x^2 \rangle.$$

При любом  $\beta$ , лежащем между этими двумя числами, получаем (8.3).

Пусть теперь выполняются соотношения (8.3), (8.4) и в то же время существует  $x \in \text{ri } X_1 \cap \text{ri } X_2$ . Рассмотрим столь малое по модулю  $\alpha < 0$ , что  $x^i = x + \alpha(\bar{x}^i - x) \in X_i$  ( $i = 1, 2$ ), где точки  $\bar{x}^1$  и  $\bar{x}^2$  взяты из (8.4). Тогда

$$\begin{aligned} \langle p, x^1 \rangle &= \langle p, x \rangle + \alpha(\langle p, \bar{x}^1 \rangle - \langle p, x \rangle) > \\ &> \langle p, x \rangle + \alpha(\langle p, \bar{x}^2 \rangle - \langle p, x \rangle) = \langle p, \bar{x}^2 \rangle, \end{aligned}$$

что противоречит (8.3).

8.8. Пусть  $\rho(X_1, X_2) > 0$ . Это равносильно тому, что множество  $X = \overline{X_1 - X_2}$  не содержит нуля. Поскольку  $X$  замкнуто и выпукло, то по теореме 8.2 существует такой вектор  $p$ , что  $\sup_X \langle p, x \rangle < 0$ . Отсюда легко приходим к (8.5).

Пусть, напротив, выполняется (8.5). Тогда число

$$\varepsilon = \inf_{X_2} \langle p, x^2 \rangle - \sup_{X_1} \langle p, x^1 \rangle = \inf_{\substack{x^1 \in X_1 \\ x^2 \in X_2}} \langle p, x^2 - x^1 \rangle$$

положительно. Для любых  $x^1 \in X_1, x^2 \in X_2$ , используя неравенство Коши — Буняковского, получаем, что  $\varepsilon \leq \langle p, x^2 - x^1 \rangle \leq \|p\| \|x^2 - x^1\|$ . Следовательно,  $\|x^1 - x^2\| \geq \varepsilon \|p\|^{-1}$ . Отсюда  $\rho(X_1, X_2) > 0$ . Теорема 8.7 доказана. Для вывода следствия 8.1 достаточно проверить, что при указанных там условиях  $\rho(X_1, X_2) > 0$ . Это утверждение можно доказать также путем непосредственного применения теоремы 8.2 к множеству  $X = X_1 - X_2$  с учетом леммы 7.1.

8.9. Достаточно среди неравенств, задающих  $X$ , найти то, которое не выполняется для точки  $x^0$ . В данном случае это — третье неравенство. В качестве искомой можно взять гиперплоскость

$$3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0.$$

8.10. Матрица квадратичной функции  $f$ , стоящей в левой части указанного неравенства, неотрицательно определена. Тогда

множество  $X$  выпукло в силу 7.9. Поскольку при этом  $f$  дифференцируема, то, очевидно, искомой опорной гиперплоскостью является касательная плоскость к границе  $\partial X = \{x | f(x) = 25\}$  в точке  $x^0$ . Уравнение этой плоскости имеет вид  $\langle f'(x^0), x - x^0 \rangle = 0$ . Конкретизируя его, получаем ответ:  $3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 25$ .

8.11. Согласно теореме 8.2, нужным свойством обладает гиперплоскость вида  $\langle p, x \rangle = \beta$ , где  $p = x^0 - \bar{x}$ ,  $\beta = \langle p, \bar{x} \rangle$ , а  $\bar{x}$  есть проекция точки  $x^0$  на  $X$ . Поскольку  $x^0 \notin X$ , то точка  $\bar{x}$  лежит на границе  $X$  и, значит, является решением задачи

$$\left(x_1 + \frac{5}{4}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{5}{16}\right)^2 + \left(x_3 - \frac{15}{16}\right)^2 \rightarrow \min, \quad x_3 = x_1^2 + x_2^2.$$

Отсюда находим  $\bar{x} = (-1, 1/4, 17/16)$ . Искомое уравнение имеет вид:  $-32x_1 + 8x_2 - 16x_3 = 17$ .

8.12. Число  $k$  обладает нужным свойством в том и только том случае, если точка  $x^0$  является решением задачи ЛП

$$\langle p, x \rangle \rightarrow \max, \quad x \in X.$$

Мы пришли к задаче типа 5.12. Применяя теорему 5.3, получаем, что  $36/23 \leq k \leq 84/37$ .

8.13. Искомые значения  $k$  идентифицируются так же, как и выше. Но в данном случае для их нахождения удобнее использовать теорию симплекс-метода (см. 6.4). Отсюда находим, что  $k \geq 1$ .

8.14. Согласно теореме 4.7, параметр  $k$  удовлетворяет условию задачи в том и только том случае, когда существует такой вектор  $q \in \mathbb{R}_+^6$ , что

$$\begin{aligned} -q_1 + q_2 - q_4 &= -3, \\ q_1 - q_3 - 2q_4 - 2q_5 + q_6 &= 3 - k, \end{aligned} \quad (I)$$

$$\begin{aligned} q_2 + q_3 - q_4 - 3q_6 &= k; \\ q_1 + 2q_2 + q_5 + 2q_6 &\leq 8. \end{aligned} \quad (II)$$

Общее решение системы уравнений (I) имеет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= q_4 + q_5 + q_6 + 3, \\ q_2 &= 2q_4 + q_5 + q_6, \\ q_3 &= -q_4 - q_5 + 2q_6 + k. \end{aligned}$$

Условие неотрицательности переменных вместе с (II) приводит к системе

$$\begin{aligned} 0 \leq q_4 &\leq -q_5 + 2q_6 + k, \\ 0 \leq q_4 &\leq \frac{5 - 4q_5 - 5q_6}{5}, \quad q_5 \geq 0, \quad q_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, система (I), (II) имеет неотрицательное решение в том и только том случае, если разрешима система

$$\begin{aligned} 0 \leq q_5 &\leq 2q_6 + k, \\ 0 \leq 4q_5 &\leq -5q_6 + 5, \quad q_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Аналогично данная система имеет решение, если только

$$-k/2 \leq q_6 \leq 1, \quad q_6 \geq 0.$$

Окончательно получаем, что условию задачи удовлетворяют все  $k \geq -2$  и только они.

8.15. Нетрудно убедиться, что множества  $X_1$  и  $X_2$  пересекаются (касаются) в единственной точке  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , где  $\bar{x}_1 = -1/2$ ,  $\bar{x}_2 = -2$ . В качестве разделяющей гиперплоскости можно взять касательную прямую к графику функции

$$f(x_1) = \frac{3}{x_1 - 1}$$

в точке  $\bar{x}_1$ , т. е. прямую  $4x_1 + 3x_2 = -8$ .

$$8.16. \quad 3x_1 + 2x_2 = 6\sqrt{2}.$$

8.17. Обозначим через  $A$  и  $B$  матрицы систем, задающих конусы  $X_1$  и  $X_2$  соответственно.

По определению множества  $P$  включение  $p \in P$  имеет место тогда и только тогда, когда выполнены одновременно импликации

$$Ax \leq 0 \rightarrow \langle p, x \rangle \leq 0, \quad Bx \leq 0 \rightarrow \langle -p, x \rangle \leq 0.$$

Согласно теореме 4.6, получаем, что  $p \in P$  в том и только том случае, когда имеют решения  $q \in \mathbb{R}^3$ ,  $r \in \mathbb{R}^3$  следующие системы:

$$qA = p, \quad q \geq 0; \quad rB = -p, \quad r \geq 0.$$

Заметим, что векторы  $q$  и  $r$  удовлетворяют системе

$$qA + rB = 0, \quad q \geq 0, \quad r \geq 0. \quad (I)$$

Наоборот, если  $(q, r)$  — решение (I), то  $p = qA = -rB \in P$ . Таким образом, для описания множества  $P$  достаточно найти все решения системы (I).

Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, из (I) находим

$$\begin{aligned} q_1 &= -3r_2 + 5r_3, & q_2 &= 2r_2 - r_3, \\ q_3 &= -r_2 + 3r_3, & r_1 &= 2r_2 - 3r_3. \end{aligned}$$

Учитывая условие неотрицательности на все переменные, получаем, что  $r_2$  и  $r_3$  должны удовлетворять соотношениям

$$\frac{3}{2} r_3 \leq r_2 \leq \frac{5}{3} r_3, \quad r_3 \geq 0.$$

При этом  $p = -rB = r_2 a + r_3 b$ , где  $a = (4, -8, 7, 1)$ ,  $b = (2, 5, -20, 2)$ .

Положив  $r_2 = 3$ ,  $r_3 = 2$  и  $r_2 = 5$ ,  $r_3 = 3$ , получаем образующие конуса  $P$ :

$$p^1 = (16, -14, -19, 7), \quad p^2 = (26, -25, -25, 7).$$

8.18. Пусть  $A_1 x \leq b^1$  и  $A_2 x \leq b^2$  — системы, задающие соответственно  $X_1$  и  $X_2$ ,  $\langle p, x \rangle = \beta$  — гиперплоскость, разделяющая эти множества, т. е.

$$\begin{aligned} \langle p, x \rangle &\leq \beta && \text{для всех } x \in X_1, \\ \langle -p, x \rangle &\leq \beta && \text{для всех } x \in X_2. \end{aligned}$$

Согласно теореме 4.7, вектор  $p$  и число  $\beta$  задают разделяющую гиперплоскость в том и только том случае, когда найдутся такие векторы  $q \in \mathbb{R}_+^4$  и  $r \in \mathbb{R}_+^4$ , что

$$\begin{aligned} qA_1 &= p, & rA_2 &= -p, \\ \langle q, b^1 \rangle &\leq \beta, & \langle r, b^2 \rangle &\leq -\beta. \end{aligned}$$

Достаточно, следовательно, найти решение  $(q, r)$  системы

$$qA_1 + rA_2 = 0, \quad q \geq 0, \quad r \geq 0, \quad (I)$$

$$\langle q, b^1 \rangle + \langle r, b^2 \rangle \leq 0. \quad (II)$$

Общее решение системы уравнений (I) имеет вид

$$q_1 = -r_1 + 2r_2 + 3r_3 - r_4,$$

$$q_2 = r_1 - r_2 - r_3 + 2r_4,$$

$$q_3 = 2r_1 + 5r_2 + 4r_3 + r_4,$$

$$q_4 = r_1 \quad + r_4.$$

Условия неотрицательности переменных  $q_1$  и  $q_2$  вместе с неравенством (II) дают систему

$$r_1 \leq 2r_2 + 3r_3 - r_4,$$

$$r_1 \geq r_2 + r_3 - 2r_4,$$

$$r_1 \geq 10r_2 + 6r_3 - 4r_4.$$

Эта система неравенств имеет решение в том и только том случае, если

$$r_2 + r_3 - 2r_4 \leq 2r_2 + 3r_3 - r_4,$$

$$10r_2 + 6r_3 - 4r_4 \leq 2r_2 + 3r_3 - r_4,$$

т. е. если

$$-r_2 - 2r_3 - r_4 \leq 0,$$

$$8r_2 + 3r_3 - 3r_4 \leq 0.$$

Таким образом, можно, например, положить  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 0$ ,  $r_3 = 1$ ,  $r_4 = 1$ . Тогда  $p = -rA_2 = (9, 9, -9, 6)$ ,  $\beta = -\langle r, b^2 \rangle = 0$ . Уравнение разделяющей гиперплоскости имеет вид

$$3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0.$$

8.19. Пусть выполняется условие (8.1), где, очевидно,  $X$  можно заменить на  $\bar{X}$ . Если предположить, что  $\langle p, x^i \rangle < \beta$  при некотором  $i$ , то приходим к противоречию:

$$\langle p, a \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle p, x^i \rangle < \beta \sum_{i=1}^m \lambda_i = \beta = \langle p, a \rangle.$$

8.20. Можно применить 8.19, представив точку  $a$ , через которую проходит опорная гиперплоскость, как полусумму точек  $0$  и  $2a$ .

8.23. Взять  $\beta = \sup_X \langle p, x \rangle$ .

8.24. Данное утверждение — иная форма теоремы 5.2.

8.25.  $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 1, x_1 > 0\}$ .

8.26. Применить 7.91. Отметим, что в доказательстве теоремы 8.4 (см. 8.6) этот факт был обоснован лишь для некоторой гиперплоскости, собственно опорной к  $X$  в данной точке.

8.28. Это непосредственно следует из теоремы 8.2.

8.30. Пусть  $X$  строго выпукло. Предположим, что существуют гиперплоскость  $H_{p\beta}$  и различные точки  $a^1, a^2 \in X$  такие, что  $X \subset \subseteq H_{p\beta}^-, a^1, a^2 \in H_{p\beta}$ . Тогда, с одной стороны,  $a = 0.5a^1 + 0.5a^2 \in \in H_{p\beta}$ , а с другой стороны,  $a \in \text{int } X \subset \text{int } H_{p\beta}^-$ . Противоречие.

Пусть теперь  $X$  не является строго выпуклым, т. е. существуют  $a^1, a^2 \in X, a^1 \neq a^2, \lambda \in (0, 1)$  такие, что  $a = \lambda a^1 + (1 - \lambda)a^2 \notin \notin \text{int } X$ , т. е.  $a \in \partial X$ . Тогда по теореме 8.3 существует гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , опорная к  $X$  в  $a$ . При этом  $a^1, a^2 \in H_{p\beta}$  в силу 8.19. Таким образом, пересечение  $X \cap H_{p\beta}$  содержит более одной точки.

8.31. Пусть  $x \in \text{conv } X \cap \partial(\text{conv } X)$ . Тогда по теореме Каратеодори точку  $x$  можно представить в виде

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i, \quad x^i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1,$$

где будем считать, что  $\lambda_i > 0$  при всех  $i = 0, 1, \dots, n$  (иначе утверждение доказано). Вместе с тем по теореме 8.3 существует гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , опорная к  $\text{conv } X$  в точке  $x$ . Тогда из 8.19 следует, что  $x^i \in H_{p\beta}$  при всех  $i = 0, 1, \dots, n$ . Отсюда заключаем, что  $n$  точек  $x^1 - x^0, \dots, x^n - x^0$  лежат в линейном подпространстве  $H_{p\beta}$  и поэтому они линейно зависимы. Но тогда точки  $x^0, x^1, \dots, x^n$  аффинно зависимы (см. 7.72). Следовательно, точку  $x$  можно представить в виде выпуклой комбинации не более  $n$  из этих точек (см. 7.74).

8.32. Положим  $P = \text{conv}\{x^1, \dots, x^k, \dots\}$ . Ясно, что  $x \in \bar{P}$ . Допустим, что  $x \notin \text{ri } P$ , т. е.  $x \in r\partial P$ . Тогда по теореме 8.4 существует гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , собственная опорная к  $P$  в точке  $x$ . Легко показывается (как в решении задачи 8.19), что  $x^k \in H_{p\beta}$  при всех  $k = 1, 2, \dots$ . Следовательно,  $P \subset H_{p\beta}$ . Но это противоречит тому, что гиперплоскость  $H_{p\beta}$  — собственная опорная к  $P$ . Таким образом,  $x \in \text{ri } P \subset P \subset X$ .

8.33. Пусть множества  $X_1$  и  $X_2$  отделимы и  $H_{p\beta}$  — разделяющая их гиперплоскость. Допустим, что  $\text{ri } X_1 \cap \text{ri } X_2 \neq \emptyset$ . Тогда по теореме 8.6 эти множества не могут быть собственно отделимы, т. е.  $X_1 \subset H_{p\beta}, X_2 \subset H_{p\beta}$ . Поэтому  $\text{aff}(X_1 \cup X_2) \subset H_{p\beta}$ . Следовательно,  $\text{aff}(X_1 \cup X_2) \neq \mathbb{R}^n$ . Обратное утверждение очевидно в силу следствия 7.1 и теоремы 8.6.

Если  $0 \in X_1, 0 \in X_2$ , то эквивалентность условий 2) и 2') непосредственно следует из 7.57.

8.34. Применить теорему 8.5 к множествам  $X$  и  $\text{int } \mathbb{R}_+^n$ .

8.35. Нет, не следует. Рассмотрим множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 1\}.$$

8.36. Обозначим  $Y = \mathbb{R}^n \setminus X$ . Согласно теореме 8.5, существует такая гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , что  $X \subset H_{p\beta}^-, Y \subset H_{p\beta}^+$ . Но  $Y$  — открытое множество. Поэтому  $Y = \text{int } Y \subset \text{int } H_{p\beta}^+$ . Тогда  $H_{p\beta}^- = \mathbb{R}^n \setminus \text{int } H_{p\beta}^+ \subset \mathbb{R}^n \setminus Y = X$ , т. е.  $X = H_{p\beta}^-$ .

8.37. Согласно теореме 8.6, существуют такие  $p$  и  $\beta$ , что выполнены условия (8.3), (8.4). Если  $X_1$  ограничено, то нужными свойствами обладает гиперплоскость  $H_{p\alpha}$ , где  $\alpha = \sup_{x \in X_1} \langle p, x \rangle$ .

Пусть  $X_1$  — конус. Тогда  $0 \leq \beta$ , так как  $0 \in X_1$ . В то же время для любого  $x \in X_1$  имеем  $\langle p, \lambda x \rangle \leq \beta$  при всех  $\lambda > 0$  и, значит,  $\langle p, x \rangle \leq 0$ . Отсюда ясно, что гиперплоскость  $H_{p0}$  искома.

Наконец, если  $X_1$  — полиэдр, то следует использовать 8.24.

8.38. Утверждение непосредственно следует из 8.21 и 8.37 с условием в), поскольку аффинное множество  $X_1$  является полиэдром и  $\text{ri } X_1 = X_1$  (см. 7.87). Можно также применить 8.37 с условием б) (это более простой факт) к линейному пространству  $Y_1 = X_1 - x$  и множеству  $Y_2 = X_2 - x$ , где  $x \in X_1$ .

8.39. Положим  $X = X_1 - X_2$ . Тогда  $0 \notin X$ , причем  $X$  замкнуто в силу 7.132. Остается применить теорему 8.2 к  $X$  и  $a = 0$ .

8.40. Пусть  $X_i = \{x \in \mathbb{R}^n | A_i x \leq b^i\}$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда условие  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  равносильно тому, что система

$$A_1 x \leq b^1, \quad A_2 x \leq b^2$$

несовместна. В этом случае, согласно 4.86, существуют такие векторы  $q^1 \geq 0$ ,  $q^2 \geq 0$ , что

$$q^1 A_1 + q^2 A_2 = 0, \quad \langle q^1, b^1 \rangle + \langle q^2, b^2 \rangle < 0.$$

Положим  $p = q^1 A_1 = -q^2 A_2$ ,  $\beta_1 = \langle q^1, b^1 \rangle$ ,  $\beta_2 = -\langle q^2, b^2 \rangle$ . Тогда при всех  $x \in X_1$  имеем

$$\langle p, x \rangle = \langle q^1 A_1, x \rangle = \langle q^1, A_1 x \rangle \leq \langle q^1, b^1 \rangle = \beta_1.$$

Аналогично показывается, что  $\langle p, x \rangle \geq \beta_2$  при всех  $x \in X_2$ . Следовательно,

$$\sup_{X_1} \langle p, x \rangle \leq \beta_1 < \beta_2 \leq \inf_{X_2} \langle p, x \rangle,$$

т. е.  $X_1$  и  $X_2$  сильно отделимы.

8.41. Последовательно применить 8.40, 8.37 и 8.24.

8.42. Нет, нельзя. Рассмотрим прямую  $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0, x_2 = 1\}$  и замкнутый выпуклый конус  $X$  из 7.10. Легко проверяется, что единственная гиперплоскость, проходящая через  $X_1$  и оставляющая  $X$  в одном из своих полупространств, задается уравнением  $x_1 = 0$ . Она пересекается с  $X$  по лучу  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 \geq 0$ .

8.43. Нет, не следует. Подходит указанный выше пример.

8.44. Пусть  $X_i = \{x \in \mathbb{R}^n | A_i x \leq b^i\}$  ( $i = 1, 2$ ). По условию задачи справедлива импликация

$$A_1 x \leq b^1, \quad A_2 x \leq b^2 \rightarrow \langle p, x \rangle \leq \beta,$$

причем система слева совместна. Тогда, согласно теореме 4.7, существуют такие неотрицательные векторы  $q^1, q^2$ , что

$$q^1 A_1 + q^2 A_2 = p, \quad \langle q^1, b^1 \rangle + \langle q^2, b^2 \rangle \leq \beta.$$

Ясно, что векторы  $p^1 = q^1 A_1$ ,  $p^2 = q^2 A_2$  и числа  $\beta_1 = \langle q^1, b^1 \rangle$ ,  $\beta_2 = \langle q^2, b^2 \rangle$  обладают нужным свойством.

8.45. Докажем утверждение индукцией по  $k = \dim X_1$ . Если  $k = 0$ , т. е.  $X_1$  — одноточечное множество, то утверждение следует из теорем 8.2, 8.4. Пусть оно уже доказано при  $k < m$ , и пусть  $\dim X_1 = m$ . Согласно теореме 8.6, существует гиперплоскость  $H_{p\beta}$ .

собственно разделяющая  $X_1$  и  $X_2$ , т. е.  $X_1 \subset H_{p\beta}^-$ ,  $X_2 \subset H_{p\beta}^+$  и либо  $X_1 \not\subset H_{p\beta}$ , либо  $X_2 \not\subset H_{p\beta}$ . Если  $X_2 \not\subset H_{p\beta}$ , то утверждение доказано. Поэтому будем считать, что  $X_2 \subset H_{p\beta}$  и, значит,  $X_1 \not\subset H_{p\beta}$ .

Далее, если  $X_1 \cap H_{p\beta} = \emptyset$ , то полиэдры  $X_1$  и  $H_{p\beta}$  сильно отделены с помощью некоторой гиперплоскости (см. 8.40). Эта гиперплоскость обладает нужным свойством, поскольку  $X_2 \subset H_{p\beta}$ .

Остается рассмотреть случай, когда множество  $\Gamma = X_1 \cap H_{p\beta}$  не пусто, т. е. гиперплоскость  $H_{p\beta}$  является собственной опорной к  $X_1$  (рис. 94). Ясно, что  $\Gamma$  — полиэдр. При этом  $\Gamma \cap \text{ri } X_2 = \emptyset$ , так как по условию  $X_1 \cap \text{ri } X_2 = \emptyset$ . Кроме того,  $\dim \Gamma < m$  (см. лемму 8.1). Тогда, согласно индуктивному предположению, существуют вектор  $q$  и число  $\alpha$  такие, что

$$\langle q, x \rangle \leq \alpha \quad \text{при всех } x \in \Gamma, \quad (\text{I})$$

$$\langle q, x \rangle \geq \alpha \quad \text{при всех } x \in X_2, \quad (\text{II})$$

$$\langle q, \bar{x} \rangle > \alpha \quad \text{при некотором } \bar{x} \in X_2$$

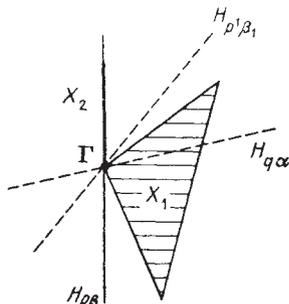


Рис. 94

(III)

(рис. 94). Из (I) и 8.44 следует, что существуют векторы  $p^1$ ,  $p^2$  и числа  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  такие, что

$$\langle p^1, x \rangle \leq \beta_1 \quad \text{при всех } x \in X_1, \quad (\text{IV})$$

$$\langle p^2, x \rangle \leq \beta_2 \quad \text{при всех } x \in H_{p\beta}, \quad (\text{V})$$

$$p^1 + p^2 = q, \quad \beta_1 + \beta_2 \leq \alpha. \quad (\text{VI})$$

Используя (II), (V), (VI), для любого  $x \in X_2 \subset H_{p\beta}$  получаем

$$\langle p^1, x \rangle = \langle q, x \rangle - \langle p^2, x \rangle \geq \alpha - \beta_2 \geq \beta_1.$$

При этом  $\langle p^1, \bar{x} \rangle > \beta_1$  для  $\bar{x}$  из (III). Отсюда и из (IV) заключаем, что гиперплоскость  $H_{p^1 \beta_1}$  искомая (рис. 94).

8.46. Нет, нельзя. Рассмотреть множества

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \quad X_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}.$$

8.48. Рассмотрим в  $\mathbb{R}^m$  множество  $X = X_1 \times \dots \times X_m$  и множество  $Y$  всех точек вида  $y = (z, \dots, z)$ , где  $z \in \mathbb{R}^n$ . Из условий задачи следует, что эти множества выпуклы и не пересекаются. Тогда по теореме 8.5 существует ненулевой вектор  $p = (p^1, \dots, p^m) \in \mathbb{R}^m$  такой, что для любых  $x = (x^1, \dots, x^m) \in X$ ,  $y = (z, \dots, z) \in Y$  справедливы соотношения

$$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^m \langle p^i, x^i \rangle \leq \langle p, y \rangle = \sum_{i=1}^m \langle p^i, z \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m p^i, z \right\rangle.$$

Поскольку  $z$  здесь может меняться произвольно в  $\mathbb{R}^n$ , то по необходимости  $\sum_{i=1}^m p^i = 0$  и, значит,  $\sum_{i=1}^m \langle p^i, x^i \rangle \leq 0$  при всех  $x^i \in X_i$ .

( $i = 1, \dots, m$ ). Отсюда следует, что при любом  $i = 1, \dots, m$  число  $\beta_i = \sup_{X_i} \langle p^i, x^i \rangle$  конечно и  $\sum_{i=1}^m \beta_i \leq 0$ . Таким образом, множества  $X_1, \dots, X_m$  отделимы.

8.49. Применить теорему 8.6 для множеств  $X$  и  $Y$  из решения задачи 8.48. При этом учесть 7.93.

8.50. Легко показывается, что указанное неравенство равносильно условию  $\rho(X, Y) > 0$ , где  $X$  и  $Y$  — множества из решения задачи 8.48. После этого остается применить теорему 8.7.

8.51. Проверить, что здесь выполнено неравенство из 8.50.

8.52. Повторить схему рассуждений из решения задачи 8.40.

8.53. Применить 8.48 к множествам  $X_1 \setminus \{0\}, X_2, \dots, X_m$  и учесть сказанное после задачи 8.47.

8.54. Утверждение непосредственно следует из 8.49.

8.55. Заметим, что условие  $\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} \text{int } X_i\right) \cap X_m = \emptyset$  равносильно условию  $\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} \text{int } X_i\right) \cap \text{ri } X_m = \emptyset$  (см. 7.92). Поэтому с учетом 8.54 достаточно доказать следующее: если векторы  $p^i \in X_i^*$  ( $t = 1, \dots, m$ ) не равны нулю одновременно и  $\sum_{i=1}^m p^i = 0$ , то  $\langle p^i, \bar{x}^i \rangle < 0$  при некоторых  $i$  и  $\bar{x}^i \in X_i$ . Пусть это неверно, т. е. для любого  $i = 1, \dots, m$  следует, что  $\langle p^i, x \rangle = 0$  при всех  $x \in X_i$ . Тогда для  $i = 1, \dots, m-1$  имеем  $p^i = 0$ , так как  $\text{int } X_i \neq \emptyset$ . Но в этом случае и  $p^m = 0$ . Противоречие.

8.56. Если выполняется условие 2), то утверждение доказывается по схеме, использованной при решении задачи 8.44.

Пусть выполнено условие 1). Если  $p = 0$ , то утверждение тривиально: подходят  $p^1 = \dots = p^m = 0$  и  $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$ . Поэтому будем считать, что  $p \neq 0$ . Тогда из условий задачи следует, что множества  $\text{int } H_{p\beta}^+, X_1, \dots, X_m$  не пересекаются. Применяя 8.49, получаем, что существуют векторы  $q, q^1, \dots, q^m$  и числа  $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ , для которых

$$\langle q, x \rangle \leq \gamma \quad \text{при всех } x \in H_{p\beta}^+, \quad (\text{I})$$

$$\langle q^i, x^i \rangle \leq \gamma_i \quad \text{при всех } x^i \in X_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{II})$$

$$q + \sum_{i=1}^m q^i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \gamma_i + \gamma \leq 0, \quad (\text{III})$$

причем либо

$$\langle q, \bar{x} \rangle < \gamma \quad \text{при некотором } \bar{x} \in H_{p\beta}^+, \quad (\text{IV})$$

либо

$$\langle q^i, \bar{x}^i \rangle < \gamma_i \quad \text{при некоторых } i \text{ и } \bar{x}^i \in X_i. \quad (\text{V})$$

Условие (I) означает, что имеет место импликация

$$\langle -p, x \rangle \leq -\beta \rightarrow \langle q, x \rangle \leq \gamma.$$

Тогда из теоремы 4.7 следует, что  $q = -\lambda p$ ,  $-\lambda\beta \leq \gamma$  при некотором  $\lambda \geq 0$ . Допустим, что  $\lambda = 0$  и, значит,  $q = 0$ ,  $\gamma \geq 0$ . Если при этом выполняется условие (IV), то  $\gamma > 0$ , и из (II), (III) заключаем, что множества  $X_1, \dots, X_m$  сильно, а поэтому и собственно отделимы. Но это противоречит 8.49. Если выполняется условие (V), то также получаем, что множества  $X_1, \dots, X_m$  собственно отделимы. Таким образом, возможен лишь случай  $\lambda > 0$ . Тогда из (II), (III) следует, что нужным свойством обладают  $p^i = \lambda^{-1}q^i$ ,  $\beta_i = \lambda^{-1}\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

8.57. Пусть  $m = 2$ ,  $X_{1,2} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 \pm 1)^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ,  $p = (0, 1)$ ,  $\beta = 0$ . Тогда первому и третьему из соотношений в 8.56 удовлетворяют лишь  $p^1 = (-\lambda, 0)$ ,  $p^2 = (\mu, 0)$ , где  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$ , и  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ . При этом  $p^1 + p^2 \neq p$ .

8.58. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  отделимы, т. е. существуют векторы  $p^1, \dots, p^m$ , не равные нулю одновременно, и числа  $\beta_1, \dots, \beta_m$ , удовлетворяющие условиям (8.12), (8.13). Если  $Y_i = \emptyset$  при некотором  $i$ , то утверждение в одну сторону доказано. В противном случае для любого  $i$  очевидно, что

$$\langle p^i, x \rangle \leq \beta_i \leq \langle p^i, y \rangle \text{ при всех } x \in X_i, y \in Y_i. \quad (I)$$

Для любого такого  $i$ , что  $p^i \neq 0$ , это означает отделимость множеств  $X_i$  и  $Y_i$ .

Докажем обратное утверждение. Если  $Y_i = \emptyset$  при некотором  $i$ , то множества  $X_j$  ( $j \neq i$ ) отделимы в силу 8.48. Тогда множества  $X_1, \dots, X_m$  также отделимы (достаточно дополнить соответствующую систему векторов и чисел элементами  $p^i = 0$ ,  $\beta_i = 0$ ). Пусть теперь при некотором  $i$  множества  $X_i$  и  $Y_i \neq \emptyset$  отделимы, т. е. существуют  $p^i \neq 0$  и  $\beta_i$ , удовлетворяющие условию (I). Если  $j \cap i$   $X_j = \emptyset$ , то, согласно 8.49, множества  $X_j$  ( $j \neq i$ ), а значит,  $X_i$  и множества  $X_1, \dots, X_m$  даже собственно отделимы. В противном случае, применяя 8.56 ко второму неравенству из (I), получаем, что существуют векторы  $p^j$  ( $j \neq i$ ) и числа  $\beta_j$  ( $j \neq i$ ), для которых

$$\langle p^j, x^j \rangle \leq \beta_j \text{ при всех } x^j \in X_j, j \neq i,$$

$$\sum_{j \neq i} p^j = -p^i, \quad \sum_{j \neq i} \beta_j \leq -\beta_i.$$

Вместе с первым неравенством из (I) это означает, что множества  $X_1, \dots, X_m$  отделимы.

8.59. Пусть  $X_1, \dots, X_m$  отделимы, но  $\bigcap_{i=1}^m X_i \neq \emptyset$ . Тогда для любого  $i = 1, \dots, m$  множество  $Y_i = \bigcap_{j \neq i} X_j$  непусто и, более того,  $X_i \cap Y_i \neq \emptyset$  в силу 7.97. Согласно 8.58, множества  $X_i$  и  $Y_i$  отделимы при некотором  $i$ . Тогда из 8.33 следует, что  $\text{aff}(X_i \cup Y_i) \neq \mathbb{R}^n$ . Обратное утверждение очевидно с учетом 8.33, 8.49 и 8.58.

Если  $0 \in \bigcap_{i=1}^m X_i$ , то возможность замены условия 2) на 2') следует из 7.57, 7.97.

8.60. Обозначим правую часть формулы (8.8) через  $Y$ . Пусть  $p \in X^*$ . Для любого  $i = 1, \dots, k$  имеем  $\langle p, x^i \rangle \leq 1$ , так как  $x^i \in X$ . Из аналогичных соображений для любых  $i = k+1, \dots, m$  и  $\lambda > 0$  следует, что  $\langle p, x^1 + \lambda x^i \rangle \leq 1$ . Поделив это соотношение на  $\lambda$  и перейдя к пределу при  $\lambda \rightarrow \infty$ , получаем, что  $\langle p, x^i \rangle \leq 0$ . Таким

образом,  $p \in Y$ . Пусть, напротив,  $p \in Y$ . Любую точку  $x \in X$  можно представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Следовательно,

$$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle p, x^i \rangle \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle p, x^i \rangle \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,$$

т. е.  $p \in X^*$ . Таким образом,  $X^* = Y$ .

8.61. Заметим, что множество  $X^*$  состоит из таких векторов  $p$ , для которых справедлива импликация

$$Ax \leq b \rightarrow \langle p, x \rangle \leq 1.$$

Поэтому формула (8.9) непосредственно следует из теоремы 4.7.

8.62. Обозначим правую часть формулы (8.10) через  $Y$ . Если  $x \in X$ , то по определению  $X^*$  имеем  $\langle p, x \rangle \leq 1$  при всех  $p \in X^*$ . Но это же означает, что  $x \in X^{**}$ . Таким образом,  $X \subset X^{**}$ . Тогда поскольку множество  $X^{**}$  замкнуто, выпукло и содержит нуль, то  $Y \subset X^{**}$ .

Допустим, что обратное включение не выполняется, т. е. существует  $a \in X^{**} \setminus Y$ . Тогда по теореме 8.2 найдутся такие  $p$  и  $\beta$ , что

$$\langle p, x \rangle < \beta < \langle p, a \rangle \quad \text{при всех } x \in Y.$$

Поскольку  $0 \in Y$ , то  $\beta > 0$ . Положим  $\bar{p} = \beta^{-1}p$ . Тогда

$$\langle \bar{p}, x \rangle < 1 < \langle \bar{p}, a \rangle \quad \text{при всех } x \in Y. \quad (I)$$

Напомним, что  $X \subset Y$ . Тогда из первого неравенства в (I) следует, что  $\bar{p} \in X^*$ . В таком случае  $\langle \bar{p}, a \rangle \leq 1$ , так как  $a \in X^{**}$ . Но это противоречит второму неравенству в (I). Таким образом,  $X^{**} \subset Y$  и, значит,  $X^{**} = Y$ .

8.63. Согласно теореме 8.8, имеем

$$X^* = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid -3p_1 + p_2 \leq 0, \quad 2p_1 + 3p_2 \leq 0, \quad 4p_1 + 5p_2 \leq 0\}.$$

Отсюда

$$X^* = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{3} p_2 \leq p_1 \leq -\frac{5}{4} p_2, \quad p_2 \leq 0 \right\},$$

или

$$X^* = \text{cone}\{(-3, -1), (5, -4)\}.$$

8.66. Применить теорему 8.9.

$$8.67. X^* = \text{conv} \left\{ \left( -\frac{3}{7}, \frac{2}{7} \right), \left( \frac{1}{9}, \frac{5}{9} \right), \left( \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right), (0, -1) \right\}.$$

Применить теорему 8.9 или теоремы 8.8, 8.10 с учетом того, что указанная выпуклая оболочка содержит нуль.

8.69. Применить теорему 8.10 и 8.68.

8.70. Последнее равенство следует из теоремы 8.10. Остальные очевидны.

8.71. Пусть  $X \neq \mathbb{R}^n$ , т. е. существует точка  $a \in \mathbb{R}^n$ , не лежащая в  $X$ . Тогда по теореме 8.5 найдется такой ненулевой вектор

$p \in \mathbb{R}^n$ , что  $\langle p, x \rangle \leq \langle p, a \rangle$  при всех  $x \in X$ . Если  $\langle p, a \rangle \leq 0$ , то  $p \in X^*$ . Если  $\langle p, a \rangle > 0$ , то  $q = \frac{1}{\langle p, a \rangle} p \in X^*$ . Таким образом,  $X^* \neq \{0\}$ . В обратную сторону утверждение очевидно.

8.72. С учетом (8.6) формула  $X \cap X^* = \{0\}$  очевидна, причем выпуклость  $X$  здесь не требуется. Допустим, что  $X + X^* \neq \mathbb{R}^n$ . Тогда, согласно 8.71, найдется такой вектор  $q \neq 0$ , что

$$\langle q, x + p \rangle \leq 0 \text{ при всех } x \in X, p \in X^*.$$

Полагая здесь  $p = 0$ , получаем, что  $q \in X^*$ . Аналогично при  $x = 0$  выводим, что  $q \in X^{**}$ . Но это противоречит формуле  $X^* \cap X^{**} = \{0\}$ .

8.73. Положим  $X = U_\varepsilon(0)$ ,  $Y = U_{1/\varepsilon}(0)$ . Пусть  $p \in X^*$ ,  $p \neq 0$ . Возьмем  $x = \varepsilon p / \|p\|$ . Тогда  $x \in X$  и, значит,  $\langle p, x \rangle = \varepsilon \|p\| \leq 1$ . Таким образом,  $p \in Y$ , т. е.  $X^* \subset Y$ . Пусть, напротив,  $p \in Y$ . Для любого  $x \in X$  имеем  $\langle p, x \rangle \leq \|p\| \cdot \|x\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$ . Следовательно,  $p \in X^*$ , т. е.  $Y \subset X^*$ . Итак,  $X^* = Y$ .

8.74. Пусть некоторое множество  $X$  удовлетворяет условию  $X^* = X$ . Тогда для любого  $x \in X = X^*$  имеем  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 \leq 1$ . Следовательно,  $X \subset U_1(0)$ . Отсюда с учетом 8.68, 8.73 получаем

$$U_1(0) = [U_1(0)]^* \subset X^* = X.$$

Таким образом,  $X = U_1(0)$ .

$$8.75. X^* = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \left| \sum_{j=1}^n \frac{p_j^2}{a_j^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \right. \right\}. \text{ Развить схему решения}$$

задачи 8.73.

8.76.  $[U_1(x^0)]^* = \{p \mid \|p\| + \langle p, x^0 \rangle \leq 1\}$ . Это множество ограничено в том и только том случае, если  $\|x^0\| < 1$  (см. 7.113 или 8.77).

8.77. а) Пусть  $X$  ограничено, т. е.  $X \subset U_r(0)$  при достаточно большом  $r > 0$ . Тогда с учетом 8.68, 8.73 имеем

$$U_\varepsilon(0) \subset X^*, \text{ где } \varepsilon = 1/r, \quad (I)$$

т. е.  $0 \in \text{int } X^*$ . Напротив, если выполняется (I), то  $X^{**} \subset U_r(0)$ . Но  $X \subset X^{**}$ . Следовательно,  $X$  ограничено.

б) Согласно утверждению а), множество  $X^*$  ограничено в том и только том случае, если  $0 \in \text{int } X^{**}$ . Но в силу теорем 7.17 и 8.10 имеем

$$\text{int } X^{**} = \overline{\text{int } (X \cup \{0\})} = \text{int } (\text{conv } (X \cup \{0\})).$$

Отсюда без труда выводится, что условия  $0 \in \text{int } X^{**}$  и  $0 \in \text{int } (\text{conv } X)$  эквивалентны.

8.78. а) Допустим, что  $\text{int } X^* = \emptyset$ . Тогда  $\text{aff } X^* \neq \mathbb{R}^n$  (в противном случае  $\text{int } X^* = \text{ri } X^*$ , и получаем противоречие с теоремой 7.14). Поэтому  $X^*$  содержится в некоторой гиперплоскости, т. е. существует такой вектор  $x \neq 0$ , что

$$\langle x, p \rangle = 0 \text{ при всех } p \in X^*.$$

Отсюда следует, что  $\pm x \in X^{**}$ . Но  $X^{**} = X$  в силу теоремы 8.10. Значит, конус  $X$  не является заостренным. Противоречие.

б) Пусть  $x \in X$ ,  $x \neq 0$ . По определению  $X^*$  имеем

$$\langle x, p \rangle \leq 0 \text{ при всех } p \in X^*,$$

т. е.  $X^* \subset H_{x0}^-$ . Следовательно,  $\text{int } X^* \subset \text{int } H_{x0}^-$ . Иными словами, для любого  $p \in \text{int } X^*$  справедливо  $\langle x, p \rangle < 0$ . Таким образом, если  $\text{int } X^* \neq \emptyset$ , то из условий  $x \in X$ ,  $x \neq 0$  следует  $-x \notin X$ , т. е. конус  $X$  заострен.

8.79. Конус  $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\} \cup \{0\}$  заострен. При этом  $X^* = l_{0h}^+$ , где  $h = (-1, 0)$ , и, значит,  $\text{int } X^* = \emptyset$ .

8.80. С учетом 8.78 ясно, что нужным свойством обладает любой вектор  $p \in \text{int } X_1^* \cap (-X_2^*)$ . Требуется лишь показать, что это пересечение непусто. Допустим противное. Тогда, согласно теореме 8.5, найдется такой вектор  $x \neq 0$ , что  $\langle x, p^1 \rangle \leq 0 \leq \langle x, -p^2 \rangle$  при всех  $p^1 \in X_1^*$ ,  $p^2 \in X_2^*$ . Отсюда и из теоремы 8.10 следует, что  $x \in X_1^{**} = X_1$ ,  $x \in X_2^{**} = X_2$ . Но это противоречит условию  $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ .

8.81. Рассмотрим конусы

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ или } x_1 = 0, x_2 \geq 0\},$$

$$X_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, x_2 \leq 0\},$$

а также конусы

$$X_1 = \mathbb{R}_+^n, \quad X_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < 0\} \cup \{0\}.$$

8.82. Применить 8.80 к конусам  $X_1 = -\mathbb{R}_+^n$  и  $X_2 = -X$ .

8.83. Первая формула легко выводится из 7.58 и теоремы 8.10. Обратимся ко второй формуле. Пусть  $x \in X^{**}$ . Тогда, согласно первой формуле,  $x = \lim_{h \rightarrow \infty} \lambda_h y^h$ , где  $\lambda_h \in [0, 1]$ ,  $y^h \in X$  ( $h = 1, 2, \dots$ ). Без ограничения общности можно считать, что  $\lambda_h \rightarrow \lambda \in [0, 1]$ . Возможны два случая:

1)  $\lambda > 0$ . Тогда последовательность  $\{y^h\}$  ограничена, и можно считать, что  $y^h \rightarrow y \in \bar{X}$ . При этом  $x = \lambda y$ .

2)  $\lambda = 0$ . Тогда  $x \in K(X)$  в силу 7.119.

Таким образом, включение  $\subset$  доказано. Обратное включение доказывается столь же просто.

8.84. Первая формула сразу следует из 7.117, 7.123 и теоремы 8.10. Ее можно вывести также из 8.83. Вторая формула с учетом 7.124 очевидна.

8.85. Пусть  $X$  содержит прямую  $l_{x^0 h}$  ( $h \neq 0$ ). Тогда  $\langle p, x^0 + \alpha h \rangle \leq 1$  при всех  $p \in X^*$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Отсюда следует, что  $\langle p, h \rangle = 0$ . Таким образом,  $X^* \subset H_{h0}$  и, значит,  $\text{int } X^* = \emptyset$ .

Пусть теперь  $\text{int } X^* = \emptyset$ . Тогда  $X^* \subset H_{h0}$  при некотором  $h \neq 0$ . Следовательно,  $l_{0h} = H_{h0}^* \subset X^{**}$ , т. е.  $h \in L(X^{**}) = L(X)$  (см. 8.84). Иными словами,  $l_{x^0 h} \subset X$  при некотором  $x^0 \in X$ .

8.86. Поскольку  $\text{cone } X$  — конус, то

$$(\text{cone } X)^* = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x \rangle \leq 0 \text{ при всех } x \in \text{cone } X\}.$$

Из теоремы 7.7 следует, что здесь справа символ cone можно опустить, т. е. справедливо второе из указанных равенств.

Далее, пусть  $p \in K(X^*)$ , т. е. существует такой вектор  $q \in X^*$ , что  $q + \alpha p \in X^*$  при всех  $\alpha \geq 0$ . Тогда по определению  $X^*$  для любого  $x \in X$  имеем  $\langle q + \alpha p, x \rangle \leq 1$  при всех  $\alpha \geq 0$ . Но это возможно лишь в том случае, если  $\langle p, x \rangle \leq 0$ . Таким образом,  $p \in (\text{cone } X)^*$ . Остается повторить эти рассуждения в обратном порядке.

8.87. Если  $0 \in X$ , то  $\text{aff } X$  есть линейное подпространство. С учетом этого доказательство аналогично решению задачи 8.86. Требуемый пример:  $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1\}$ . Здесь

$$X^* = (\text{aff } X)^* = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \leq 1, p_2 = 0\}, \quad L(X^*) = \{0\}.$$

8.88. Применяя 8.86 к множеству  $X^*$ , получаем, что  $K(X^{**}) = (\text{cone } X^*)^*$ . При этом  $K(X^{**}) = K(X)$  (см. 8.84). Тогда с учетом теоремы 8.10 имеем

$$[K(X)]^* = (\text{cone } X^*)^{**} = \overline{\text{cone } X^*}.$$

Аналогично с помощью 8.87 доказывается формула для  $[L(X)]^*$ . Необходимо лишь учесть, что  $\text{aff } X^*$  замкнуто.

Докажем формулу для  $\text{cone } X^*$ . Пусть  $p \in \text{cone } X^*$ , т. е.  $p = \lambda q$  при некоторых  $\lambda \geq 0$  и  $q \in X^*$  (см. 7.45). Требуется показать, что  $\sup_{x \in X} \langle p, x \rangle < \infty$ . Если  $\lambda = 0$ , то это очевидно. Пусть  $\lambda > 0$ .

Тогда  $p/\lambda = q \in X^*$  и, значит,  $\langle p/\lambda, x \rangle \leq 1$  при всех  $x \in X$ . Таким образом,  $\sup_{x \in X} \langle p, x \rangle \leq \lambda < \infty$ . Остается повторить эти рассуж-

дения в обратном порядке.

Формула для  $\text{aff } X^*$  следует из 7.47, 7.48.

8.89. а) Используя 8.88, имеем

$$\dim X^* = \dim (\text{aff } X^*) = \dim [L(X)]^* = n - \dim L(X),$$

поскольку  $[L(X)]^*$  есть подпространство, ортогональное к  $L(X)$  (см. (8.7)).

б) В данном случае  $L(X) = X \cap (-X)$  в силу 7.118, 7.124.

8.90. б) Докажем сначала вторую формулу. Пусть  $p \in V^*$ . Рассмотрим любую точку  $x \in X$ . Из выпуклости  $X$  следует, что  $h = x - a \in V$ . Тогда  $\langle p, h \rangle \leq 0$ . Таким образом,  $p \in P$ . Пусть, напротив,  $p \in P$ . Рассмотрим любой вектор  $h \in V$ . Тогда найдется такое  $\alpha > 0$ , что  $x = a + \alpha h \in X$ . При этом  $\langle p, x \rangle \leq \langle p, a \rangle$ . Отсюда  $\langle p, h \rangle \leq 0$ . Следовательно,  $p \in V^*$ . Итак,  $V^* = P$ . Тогда  $\bar{V} = P^*$  в силу теоремы 8.10.

в) Использовать б) и 8.89.

Требуемый пример:  $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ,  $a = (1, 0)$ .

8.91. Ограничимся рассуждениями для  $m = 2$ . Пусть  $p \in (X_1 + X_2)^*$ , т. е.

$$\langle p, x^1 + x^2 \rangle \leq 1 \text{ при всех } x^1 \in X_1, \quad x^2 \in X_2.$$

Полагая здесь  $x^1 = 0 \in X_1$ , получаем, что  $p \in X_2^*$ . Возьмем любые  $x^1 \in X_1$ ,  $x^2 \in X_2$ . Поскольку  $X_1$  — конус, то при любом  $\lambda \geq 0$  имеем  $\langle p, \lambda x^1 + x^2 \rangle \leq 1$ . Это возможно лишь в том случае, если  $\langle p, x^1 \rangle \leq 0$ , т. е.  $p \in X_1^*$ . Таким образом,  $p \in X_1^* \cap X_2^*$ . Пусть,

напротив,  $p \in X_1^* \cap X_2^*$ , т. е.

$$\langle p, x^1 \rangle \leq 0, \quad \langle p, x^2 \rangle \leq 1 \quad \text{при всех } x^1 \in X_1, \quad x^2 \in X_2.$$

Складывая эти неравенства, получаем, что  $p \in (X_1 + X_2)^*$ .

Требуемый пример:  $m = 2$ ,  $X_1 = X_2 = U_1(0)$ . Здесь  $(X_1 + X_2)^* = U_{1/2}(0)$ , но  $X_1^* \cap X_2^* = U_1(0)$  (см. 8.73).

8.92. Используя теорему 8.10 и 8.91 применительно к множествам  $X_1^*, \dots, X_m^*$ , имеем

$$\bigcap_{i=1}^m X_i = \bigcap_{i=1}^m X_i^{**} = \left( \sum_{i=1}^m X_i^* \right)^*.$$

Переходя к сопряженным множествам, получаем пужную формулу.

Требуемый пример:  $m = 2$ ,  $X_1 = \text{int } \mathbf{R}_+^2 \cup \{0\}$ ,  $X_2 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 = 0\}$ . Здесь  $(X_1 \cap X_2)^* = \mathbf{R}^2$ , но  $X_1^* + X_2^* = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 \leq 0\}$ .

8.93. Ограничимся рассуждениями для  $m = 2$ .

Если  $0 \in \text{int } X_1$ , то множество  $X_1^*$  ограничено (см. 8.77) и, значит, множество  $X_1^* + X_2^*$  замкнуто (см. лемму 7.4).

Пусть  $\text{ri } X_1 \cap \text{ri } X_2 \neq \emptyset$ . Учитывая 7.132, достаточно показать, что множество  $L = K(X_1^*) \cap (-K(X_2^*))$  является линейным подпространством, т. е. из условия  $h \in L$  следует  $-h \in L$ . Согласно 8.86, условие  $h \in L$  равносильно соотношениям

$$\langle h, x^1 \rangle \leq 0 \leq \langle h, x^2 \rangle \quad \text{при всех } x^1 \in X_1, \quad x^2 \in X_2. \quad (I)$$

Но в силу теоремы 8.6 множества  $X_1$  и  $X_2$  не могут быть собственно отделимыми. Поэтому неравенства в (I) обязаны выполняться как равенства. Иными словами, вектор  $h$  там можно заменить на  $-h$ , т. е.  $-h \in L$ .

Если  $X_1$  и  $X_2$  — полиэдры, то по теореме 8.15 множество  $X_1^* + X_2^*$  также является полиэдром и, значит, замкнуто.

8.94. Если выполняется условие 1), то

$$\left( \bigcap_{i=1}^m X_i \right)^* = \left( \overline{\bigcap_{i=1}^m X_i} \right)^* = \left( \bigcap_{i=1}^m \overline{X_i} \right)^* = \overline{\sum_{i=1}^m X_i^*} = \sum_{i=1}^m X_i^*,$$

где последовательно использованы утверждения задач 8.70, 7.97, 8.92 и 8.93.

Если выполняется условие 2), то нужная формула сразу следует из 8.92, 8.93.

Пусть выполняется условие 3). Положим

$$X = \bigcap_{i \in I} X_i, \quad Y = \bigcap_{i \notin I} X_i.$$

Согласно предположениям,  $X$  есть полиэдр,  $0 \in X$ ,  $Y$  — выпуклое множество,  $0 \in \bar{Y}$  и  $X \cap \text{ri } Y \neq \emptyset$  (см. 7.97); кроме того, если  $m \in I$ , то  $\bar{Y}$  — выпуклый копус; если же  $m \notin I$ , то  $X$  — выпуклый копус. Сначала допустим, что  $m \in I$ ,

С учетом уже доказанного достаточно убедиться в том, что

$$(X \cap Y)^* = X^* + Y^*. \quad (I)$$

Положим  $V = X \cap \text{aff } Y$ . Тогда, во-первых,

$$X \cap Y = V \cap Y. \quad (II)$$

Во-вторых,  $V$  есть выпуклое множество,  $0 \in V$ ,  $Y$  — выпуклый конус; при этом  $V \cap \text{ri } Y \neq \emptyset$ ,  $V \subset \text{aff } Y$  и, значит,  $\text{ri } V \cap \text{ri } Y \neq \emptyset$  (см. 7.92). Тогда в силу утверждения данной задачи с условием 1) имеем

$$(V \cap Y)^* = V^* + Y^*. \quad (III)$$

В-третьих,  $X$  и  $\text{aff } Y$  являются полиэдрами, причем  $\text{aff } Y$  — конус. Тогда из утверждения задачи с условием 2) следует

$$V^* = X^* + (\text{aff } Y)^*. \quad (IV)$$

В-четвертых,  $Y$  и  $\text{aff } Y$  тривиально удовлетворяют условию типа 1); поэтому

$$Y^* + (\text{aff } Y)^* = (Y \cap \text{aff } Y)^* = Y^*. \quad (V)$$

Соединяя формулы (II)–(V), приходим к (I).

Точно та же схема рассуждений проходит и в случае, когда  $m \notin I$ . Стоит лишь подчеркнуть, что формула (III) здесь будет по-прежнему справедлива, поскольку теперь уже  $V$  является выпуклым конусом.

8.95. а)  $X^* = U_1(0) - l_{0h}^+$ , где  $h = (1, 0, \dots, 0)$ ;

б)  $X^* = U_1(0) - R_+^n$ .

8.96. Утверждение следует из определения сопряженного множества.

8.97. Используя теорему 8.10 и 8.96 применительно к множествам  $X_i^*$  ( $i \in I$ ), имеем

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} X_i^{**} = \left( \text{conv} \left( \bigcup_{i \in I} X_i^* \right) \right)^*.$$

Переходя к сопряженным множествам, получаем пуклую формулу.

8.98. Имеем

$$\left( \bigcap_{i=1}^m X_i \right)^* = \left( \overline{\bigcap_{i=1}^m X_i} \right)^* = \left( \bigcap_{i=1}^m \overline{X_i} \right)^* = \overline{\text{conv} \left( \bigcup_{i=1}^m X_i^* \right)},$$

где использованы утверждения задач 8.70, 7.97 и 8.97.

8.99. Провести рассуждения, близкие к решению задачи 8.91.

8.100. Образ объединения любого числа множеств при произвольном отображении совпадает с объединением образов этих множеств. Тогда, используя 7.129, 8.83, получаем

$$\begin{aligned} A(X^{**}) &= A \left( \bigcup_{0 < \lambda < 1} (\lambda \overline{X}) \cup K(X) \right) = \\ &= \bigcup_{0 < \lambda < 1} (\lambda A(\overline{X})) \cup A(K(X)) = \\ &= \bigcup_{0 < \lambda < 1} (\lambda \overline{A(X)}) \cup K(A(X)) = [A(X)]^{**}. \end{aligned}$$

**8.101.** Прообраз объединения любого числа множеств при произвольном отображении совпадает с объединением прообразов этих множеств. Поэтому, если выполняется условие 1), то, используя 7.96, 7.133, 8.83, получаем

$$\begin{aligned} A^{-1}(Y^{**}) &= \bigcup_{0 < \lambda \leq 1} (\lambda A^{-1}(\bar{Y})) \cup A^{-1}(K(Y)) = \\ &= \bigcup_{0 < \lambda \leq 1} (\lambda A^{-1}(Y)) \cup K(A^{-1}(Y)) = [A^{-1}(Y)]^{**}. \end{aligned}$$

Если же выполняется условие 2), то множество  $A^{-1}(Y)$  является замкнутым в силу непрерывности отображения  $A$ . В этом случае достаточно использовать лишь 7.133 и 8.83.

**8.102.** Пусть  $(p, q) \in L^*$ . Тогда для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  имеем

$$0 = \langle p, x \rangle + \langle q, Ax \rangle = \langle p, x \rangle + \langle qA, x \rangle. \quad (I)$$

Это возможно лишь в том случае, если  $p = -qA$ . Напротив, если  $p = -qA$ , то (I) всегда выполнено и, значит,  $(p, q) \in L^*$ .

**8.103.** Пусть  $q \in [A(X)]^*$ , т. е.  $\langle q, y \rangle \leq 1$  при всех  $y \in A(X)$ . Тогда для любого  $x \in X$  имеем

$$\langle q, Ax \rangle = \langle qA, x \rangle \leq 1,$$

т. е.  $qA \in X^*$ . Таким образом,  $[A(X)]^* \subset (A^*)^{-1}(X^*)$ . Обратное включение доказывается столь же просто.

**8.104.** Используя 8.101, а затем 8.103 применительно к отображению  $A^*$  и множеству  $Y^*$ , получаем

$$[A^{-1}(Y)]^{**} = A^{-1}(Y^{**}) = [A^*(Y^*)]^*,$$

где, подчеркнем,  $0 \in A^*(Y^*)$ , так как  $0 \in Y^*$ . Переходя с учетом 8.70 к сопряженным множествам, выводим

$$[A^{-1}(Y)]^* = \overline{A^*(Y^*)}.$$

Остается показать, что множество  $A^*(Y^*)$  замкнуто.

Пусть выполнено условие 1). Учитывая 7.129, достаточно проверить, что из условий  $p \in K(Y^*)$ ,  $A^*p = 0$  следует  $-p \in K(Y^*)$ . Согласно 8.86, условие  $p \in K(Y^*)$  равносильно тому, что

$$\langle p, y \rangle \leq 0 \text{ при всех } y \in Y. \quad (I)$$

Допустим, что  $\langle p, \bar{y} \rangle < 0$  при некотором  $\bar{y} \in Y$ . Тогда  $\langle p, y \rangle < 0$  при всех  $y \in \text{ri } Y$  (см. 8.26). Но по условию  $A^{-1}(\text{ri } Y) \neq \emptyset$ , т. е.  $Ax \in \text{ri } Y$  при некотором  $x \in \mathbb{R}^n$ . Тогда  $\langle p, Ax \rangle = \langle A^*p, x \rangle = 0$ . Противоречие. Таким образом, в (I) стоит равенство для всех  $y \in Y$ . Поэтому вектор  $p$  там можно заменить на  $-p$ , т. е.  $-p \in K(Y^*)$ . Следовательно, множество  $A^*(Y^*)$  замкнуто.

Если выполнено условие 2), то в силу 7.53 и теорем 8.14, 8.15 множество  $A^*(Y^*)$  является полиэдром и, значит, замкнуто.

**8.105.** Если допустить, что одновременно существуют решение  $x$  первой системы и решение  $q$  второй, то приходим к противоречию:

$$1 < \langle p, x \rangle = \langle qA, x \rangle = \langle q, Ax \rangle \leq 1.$$

Пусть первая система не имеет решения, т. е. из условия  $Ax \in Y$  следует  $\langle p, x \rangle \leq 1$ . Это означает, что  $p \in [A^{-1}(Y)]^*$ . Применяя 8.104, получаем, что существует решение второй системы.

С точностью до обозначений теорема 4.6 получается отсюда при  $Y = -\mathbf{R}_+^n$ .

8.106. Утверждение сразу следует из 8.105 при  $Y = U_1(0)$ . (Отметим, впрочем, что данный конкретный факт нетрудно вывести и непосредственно из теоремы 8.2.)

8.107. Полиэдр  $X$  из теоремы 8.9 можно представить в виде  $X = A^{-1}(Y)$ , где  $Y = b - \mathbf{R}_+^m$ . При этом с учетом 8.91 имеем

$$Y^* = \{b\}^* \cap (-\mathbf{R}_+^m)^* = H_{b,1}^- \cap \mathbf{R}_+^m = \{q \in \mathbf{R}^m \mid \langle q, b \rangle \leq 1, q \geq 0\}.$$

8.108. Использовать 7.54, 7.96, 8.94 и 8.104.

8.109. Указанная теорема получается при  $X = -\mathbf{R}_+^n$ ,  $Y = \{0\}$ .

8.110. Проведем рассуждения для полиэдра  $X$  вида (4.1), используя введенные в § 4 обозначения. Пусть  $x^*$  — крайняя точка в  $X$ . Положим  $I = I(x^*)$ ,  $J = \{1, \dots, m\} \setminus I$ . Тогда  $A_I x^* = b_I$ ,  $A_J x^* < b_J$ . Допустим, что существует точка  $\bar{x} \neq x^*$ , удовлетворяющая условию  $A_I \bar{x} = b_I$ . Выберем столь малое  $\alpha > 0$ , что для точек  $x^1 = x^* + \alpha(\bar{x} - x^*)$  и  $x^2 = x^* - \alpha(\bar{x} - x^*)$  выполняются неравенства  $A_J x^1 < b_J$ ,  $A_J x^2 < b_J$ . При этом, очевидно,  $A_I x^1 = b_I$ ,  $A_I x^2 = b_I$ . Следовательно,  $A x^1 \leq b$ ,  $A x^2 \leq b$ , т. е.  $x^1, x^2 \in X$ . Но  $x^* = 0,5x^1 + 0,5x^2$  и  $x^1 \neq x^2$ . Это противоречит предположению, что  $x^*$  — крайняя точка в  $X$ . Таким образом,  $x^*$  — единственное решение системы  $A_I x = b_I$ . Тогда по определению  $x^*$  — вершина  $X$ .

Пусть, напротив,  $x^*$  — вершина  $X$ . Предположим, что  $x^*$  можно представить в виде

$$x^* = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, \quad x^1, x^2 \in X, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Тогда для  $I = I(x^*)$  имеем

$$b_I = A_I x^* = \lambda A_I x^1 + (1 - \lambda)A_I x^2 \leq \lambda b_I + (1 - \lambda)b_I = b_I.$$

Отсюда  $A_J x^1 = b_J$ ,  $A_J x^2 = b_J$ . Но это возможно лишь в том случае, если  $x^1 = x^2 = x^*$ , т. е.  $x^*$  — крайняя точка в  $X$ .

8.111. 1) Пусть  $x \in E(\Gamma)$ , но  $x \notin E(X)$ , т. е.  $x$  можно представить в виде (8.11). Тогда, используя (8.1), получаем

$$\beta = \langle p, x \rangle = \lambda \langle p, x^1 \rangle + (1 - \lambda) \langle p, x^2 \rangle \leq \lambda \beta + (1 - \lambda) \beta = \beta.$$

Отсюда  $\langle p, x^1 \rangle = \langle p, x^2 \rangle = \beta$ , т. е.  $x^1, x^2 \in X \cap H = \Gamma$ . Вместе с (8.11) это означает, что  $x \notin E(\Gamma)$ . Противоречие. Следовательно,  $x \in E(X)$ .

2) Ясно, что  $\text{aff } \Gamma \subset \text{aff } X$ . Допустим, что  $\text{aff } \Gamma = \text{aff } X$ . Тогда  $X \subset \text{aff } X = \text{aff } \Gamma \subset H$ . Но это противоречит (8.2). Таким образом,  $\text{aff } \Gamma \neq \text{aff } X$ . Отсюда следует (см. 4.14), что

$$\dim \Gamma = \dim(\text{aff } \Gamma) < \dim(\text{aff } X) = \dim X.$$

8.112. Пусть существует  $x \in E(X)$  и в то же время  $l_{x^0 h} \subset X$  при некоторых  $x^0$  и  $h \neq 0$ . Тогда из теоремы 7.20, примененной по отдельности к лучам  $l_{x^0 h}^+$  и  $l_{x^0, -h}^+$ , следует, что  $l_{xh} \subset X$ . В частности,  $x^1 = x + h \in X$  и  $x^2 = x - h \in X$ . При этом  $x = 0,5x^1 + 0,5x^2$  и  $x^1 \neq x^2$ , т. е.  $x \notin E(X)$ . Полученное противоречие доказывает теорему в одну сторону.

Предположим теперь, что  $X$  не содержит прямых. Покажем, что  $E(X) \neq \emptyset$  индукцией по размерности  $X$ . Если  $\dim X = 0$ , т. е.  $X$  — одноточечное множество, то утверждение тривиально. Пусть оно уже доказано при  $\dim X < m$ , и рассмотрим случай  $\dim X = m$ . Выберем какую-нибудь точку  $a \in \text{гд } X$ . (Ясно, что  $\text{гд } X \neq \emptyset$ , так как любая прямая, проходящая

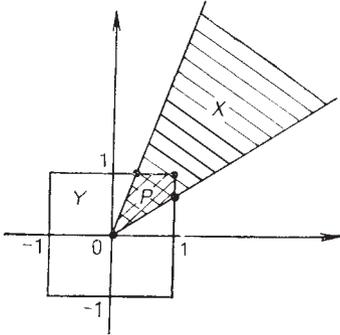


Рис. 95

через две различные точки множества  $X$ , пересекает  $\text{гд } X$ ; иначе бы эта прямая лежала в  $X$ .) Рассмотрим множество  $\Gamma$  из леммы 8.1. Оно замкнуто, выпукло и как подмножество  $X$  не содержит прямых. При этом  $\dim \Gamma < m$ . Тогда по индуктивному предположению  $E(\Gamma) \neq \emptyset$ . Но  $E(\Gamma) \subset E(X)$ . Поэтому  $E(X) \neq \emptyset$ .

**8.113.** Включение  $\text{conv } E(X) \subset X$  очевидно, так как  $E(X) \subset X$  и  $X$  выпукло. Включение  $X \subset \text{conv } E(X)$  докажем индукцией по  $\dim X$ . Если  $\dim X = 0$ , то утверждение очевидно. Пусть оно уже доказано при  $\dim X < m$ , и пусть  $\dim X = m$ . Для произвольной точки  $a \in \text{гд } X$  рассмотрим

множество  $\Gamma$  из леммы 8.1. Поскольку  $\Gamma$  — выпуклый компакт и  $\dim \Gamma < m$ , то, согласно индуктивному предположению,  $\Gamma \subset \text{conv } E(\Gamma)$ . Таким образом,  $a \in \Gamma \subset \text{conv } E(\Gamma) \subset \text{conv } E(X)$ . Мы показали, что  $\text{гд } X \subset \text{conv } E(X)$ .

Рассмотрим теперь любую точку  $x \in \text{гд } X$ . Поскольку  $X$  — компакт, то, очевидно, эта точка принадлежит некоторому отрезку с концами  $x^1, x^2$ , лежащими в  $\text{гд } X$ . Следовательно,

$$x \in \text{conv } \{x^1, x^2\} \subset \text{conv } (\text{гд } X) \subset \text{conv } (\text{conv } E(X)) = \text{conv } E(X).$$

Таким образом,  $\text{гд } X \subset \text{conv } E(X)$  и окончательно имеем  $X = \text{гд } X \cup \text{гд } X \subset \text{conv } E(X)$ .

**8.114.** Пусть  $X$  — ограниченный полиэдр. Из теорем 4.1 и 8.11 следует, что  $X$  имеет конечное число крайних точек. Тогда  $X$  — выпуклый многогранник в силу теоремы 8.13.

Пусть  $X$  — однородный полиэдр. Рассмотрим множества  $Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_j| \leq 1, j = 1, \dots, n\}$  и  $P = X \cap Y$  (рис. 95). Ясно, что  $P$  — ограниченный полиэдр. Тогда, согласно доказанному выше,  $P$  есть выпуклый многогранник, т. е.  $P = \text{conv } \{x^1, \dots, x^m\}$ , где  $x^1, \dots, x^m$  — некоторые точки из  $\mathbb{R}^n$ . Без труда показывается, что в таком случае  $X = \text{cone } \{x^1, \dots, x^m\}$ , т. е.  $X$  — многогранный конус.

Пусть дан полиэдр  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ , где  $A \in \mathcal{A}(s, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^s$ . Рассмотрим в  $\mathbb{R}^{n+1}$  однородный полиэдр

$$K = \{(x, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid Ax - \beta b \leq 0, \beta \geq 0\}. \quad (\text{I})$$

В силу доказанного выше  $K$  есть многогранный конус, т. е.

$$K = \text{cone } \{(x^1, \beta_1), \dots, (x^m, \beta_m)\}, \quad (\text{II})$$

где  $(x^1, \beta_1), \dots, (x^m, \beta_m)$  — некоторые точки из  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Заметим, что положительные числа  $\beta_i$  в (II) всегда можно заменить единицами. Это позволяет без ограничения общности считать, что

$\beta_1 = \dots = \beta_k = 1, \beta_{k+1} = \dots = \beta_m = 0$ . Тогда (II) приобретает вид

$$K = \text{cone} \{(x^1, 1), \dots, (x^k, 1), (x^{k+1}, 0), \dots, (x^m, 0)\}. \quad (\text{III})$$

Покажем, что в таком случае

$$X = \text{conv} \{x^1, \dots, x^k\} + \text{cone} \{x^{k+1}, \dots, x^m\}. \quad (\text{IV})$$

Обозначим правую часть этой формулы через  $Y$ . Пусть  $x \in X$ , т. е.  $(x, 1) \in K$  в силу (I). Тогда из (III) следует

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1. \quad (\text{V})$$

Но это в точности означает, что  $x \in Y$ . Итак,  $X \subset Y$ . Пусть  $x \in Y$ , т. е. справедливо представление (V). Из сопоставления (I) и (III) имеем

$$Ax^1 \leq b, \dots, Ax^k \leq b, \quad Ax^{k+1} \leq 0, \dots, Ax^m \leq 0.$$

Поэтому

$$Ax = \sum_{i=1}^m \lambda_i Ax^i \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i Ax^i \leq b \sum_{i=1}^k \lambda_i = b,$$

т. е.  $x \in X$ . Формула (IV) доказана. Следовательно,  $X$  — многогранное множество.

Таким образом, мы доказали в одну сторону каждое из трех утверждений 8.14.

Пусть теперь  $X$  — многогранное множество. Поскольку при сдвигах многогранное множество остается многогранным, а полиэдр — полиэдром, то можно считать, что  $0 \in X$ . В силу теоремы 8.8 сопряженное множество  $X^*$  является полиэдром. Тогда по доказанному выше  $X^*$  есть многогранное множество. Вновь применяя теорему 8.8, получаем, что  $X^{**}$  есть полиэдр. Но  $X = X^{**}$  в силу теорем 7.13 и 8.10. Следовательно,  $X$  — полиэдр. В частности, если  $X$  — выпуклый многогранник и, значит,  $X$  — компакт (см. теорему 7.13), то  $X$  — ограниченный полиэдр. Если  $X$  — многогранный конус и, значит,  $X^*$  — однородный полиэдр (см. теорему 8.8), то  $X$  — однородный полиэдр.

8.115. Согласно теореме 8.12, множество  $X$  не имеет крайних точек в том и только том случае, если оно содержит целиком какую-либо прямую. Пусть  $l_{x^0 h}$  — такая прямая. Поскольку  $0 \in X$ , то из теоремы 7.20 следует, что прямая  $l_{oh}$  также целиком лежит в  $X$ . В таком случае для вектора  $h = (h_1, \dots, h_4)$  должно выполняться неравенство

$$(h_1 - 2h_2)^2 + (h_2 + h_3)^2 + (h_3 + 2h_4)^2 \leq 8/\alpha^2$$

при любом  $\alpha \neq 0$ . Это возможно, лишь если

$$h_1 = 4t, \quad h_2 = 2t, \quad h_3 = -2t, \quad h_4 = t$$

при некотором  $t \neq 0$ . Подставляя эти числа во второе ограничение, задающее  $X$ , получаем, что  $k = 1$ .

Таким образом, множество  $X$  содержит прямую лишь в том случае, когда  $k = 1$ . Следовательно, при всех  $k \neq 1$  множество  $X$  имеет крайние точки.

8.116. Воспользуемся следующим очевидным соображением (см. 8.127): точка  $x(k)$  является крайней в  $X$  в том и только том случае, если ее можно сильно отделить от многогранника  $\text{conv}\{x^1, \dots, x^4\}$ , т. е. если существует такой вектор  $p = (p_1, p_2, p_3)$ , что

$$\langle p, x(k) \rangle < \langle p, x^j \rangle, \quad j = 1, \dots, 4.$$

В данном случае эта система имеет вид

$$\begin{aligned} 2p_1 - 3p_2 + (k-3)p_3 &< 0, \\ -4p_1 - 2p_2 + (k-4)p_3 &< 0, \\ 5p_2 + (k+1)p_3 &< 0, \\ p_2 + (k-4)p_3 &< 0. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Из (I) получаем равносильную систему неравенств

$$\begin{aligned} -2p_2 + (k-4)p_3 &< 4p_1 < 6p_2 - 2(k-3)p_3, \\ 5p_2 + (k+1)p_3 &< 0, \\ p_2 + (k-4)p_3 &< 0. \end{aligned}$$

Следовательно, система (I) совместна тогда и только тогда, когда совместна система

$$\begin{aligned} -2p_2 + (k-4)p_3 &< 6p_2 - 2(k-3)p_3, \\ 5p_2 &< -(k+1)p_3, \\ p_2 &< -(k-4)p_3 \end{aligned}$$

или система

$$\begin{aligned} (23k-42)p_3 &< 0, \\ (11k-42)p_3 &< 0. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Нетрудно видеть, что система (II), а значит, и система (I) совместны, если только  $k < 42/23$  или  $k > 42/11$ .

8.117. Согласно теореме 8.8, множество  $X^*$  задается системой неравенств

$$\begin{aligned} -2p_1 + p_2 &\leq 1, & -p_1 + 2p_2 &\leq 1, & p_1 + 3p_2 &\leq 1, \\ 3p_1 + 3p_2 &\leq 1, & 4p_1 - p_2 &\leq 1, & 3p_1 - 3p_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

С помощью геометрических построений находим крайние точки полиэдра  $X^*$  и представляем его в виде выпуклого многогранника:

$$X^* = \text{conv} \left\{ \left( -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3} \right), \left( -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left( 0, \frac{1}{3} \right), \left( \frac{4}{15}, \frac{1}{15} \right), \left( \frac{2}{9}, -\frac{1}{9} \right) \right\}.$$

По теореме 8.8 находим  $X^{**}$  как полиэдр, задаваемый системой неравенств

$$\begin{aligned} -4x_1 - 5x_2 &\leq 3, & -x_1 + x_2 &\leq 3, & x_2 &\leq 3, \\ 4x_1 + x_2 &\leq 15, & 2x_1 - x_2 &\leq 9. \end{aligned}$$

Поскольку  $0 \in X$ , то  $X = X^{**}$  по теореме 8.10; поэтому полученная система неравенств и определяет  $X$  как полиэдр.

8.118.  $X = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid -x_2 \leq 1, -x_1 + x_2 \leq 3, -x_1 + 2x_2 \leq 4\}$ .

8.119. Согласно теореме 8.8, множество  $X^*$  задается системой неравенств

$$\begin{aligned} -p_1 + 3p_2 + p_3 &\leq 1, \\ 2p_1 - p_2 + p_3 &\leq 1, \\ p_2 + p_3 &\leq 1, \\ -p_1 - 3p_2 - 3p_3 &\leq 1. \end{aligned}$$

Можно показать, что соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение. Это означает, что  $X^*$  — ограниченный полидр (см. 4.4). Используя теоремы 8.11, 8.13, получаем

$$X^* = \text{conv} \{(0, 0, 1), (8, 6, -9), (-4, -2, 3), (-4, -4, 5)\}.$$

Поскольку  $0 \in X$ , то из теорем 8.8, 8.10 выводим, что  $X = X^{**}$  можно задать следующей системой неравенств:

$$\begin{aligned} x_3 &\leq 1, \\ 8x_1 + 6x_2 - 9x_3 &\leq 1, \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\leq 1, \\ -4x_1 - 4x_2 + 5x_3 &\leq 1. \end{aligned}$$

8.120. Допустим, что в указанном представлении, например,  $x^1 \neq x$  и  $\lambda_1 > 0$ . Тогда  $\lambda_1 < 1$  и

$$x = \lambda_1 x^1 + (1 - \lambda_1) \bar{x}, \text{ где } \bar{x} = \sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x^i.$$

При этом  $\bar{x} \in X$  и  $\bar{x} \neq x^1$  (если  $\bar{x} = x^1$ , то  $x = x^1$ , что противоречит предположению). Следовательно, точка  $x$  не является крайней в  $X$ . В обратную сторону утверждение очевидно.

8.122. Использовать 8.120.

8.123. Если  $X$  имеет бесконечное число крайних точек, то утверждение доказано. Пусть  $x^1, \dots, x^k$  — все крайние точки  $X$ . Из теоремы 8.13 следует  $X = \text{conv} \{x^1, \dots, x^k\}$ . Поскольку  $\dim X = m$ , то, согласно 7.73, в  $X$  существуют  $m + 1$  аффинно независимых точек  $y^1, \dots, y^{m+1}$ . Так как все они являются выпуклыми комбинациями точек  $x^1, \dots, x^k$ , то точки  $(y^1, 1), \dots, (y^{m+1}, 1)$  представляют собой (неотрицательные) линейные комбинации точек  $(x^1, 1), \dots, (x^k, 1)$ . При этом точки  $(y^1, 1), \dots, (y^{m+1}, 1)$  линейно независимы (см. 7.72). Тогда  $k \geq m + 1$  в силу известного факта линейной алгебры (см., например, [12, с. 13]).

8.124. Использовать 8.122, 8.123.

8.126. Для доказательства основного утверждения использовать лемму 7.1 и теорему 8.12.

Пусть  $x = x^1 + x^2$ , где  $x \in E(X)$ ,  $x^1 \in X_1$ ,  $x^2 \in X_2$ . Предположим, что  $x^2 \neq 0$ . Поскольку  $0 \in X_2$ , то  $X_1 \subset X$  и, значит,  $x^1 \in X$ . Положим  $x^0 = x^1 + 2x^2 \in X$ . Тогда  $x = 0.5x^0 + 0.5x^1$  и  $x^0 \neq x^1$ . Но это противоречит условию  $x \in E(X)$ . Таким образом,  $x^2 = 0$ , т. е.  $x = x^1 \in X_1$ . Тогда  $x \in E(X_1)$  в силу 8.121.

8.127. а) Использовать 8.122, 8.126.

б) Для определенности будем считать, что  $i = 1$ . Пусть  $x^1 \notin E(X)$ , т. е.

$$x^1 = \lambda y + (1 - \lambda)z, \text{ где } y, z \in X, y \neq z, 0 < \lambda < 1. \quad (I)$$

Здесь

$$y = \sum_{i=1}^m \mu_i x^i, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^k \mu_i = 1,$$

$$z = \sum_{i=1}^m \eta_i x^i, \quad \eta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^k \eta_i = 1.$$

Тогда

$$x^1 = \sum_{i=1}^m \gamma_i x^i, \quad \gamma_i = \lambda \mu_i + (1 - \lambda) \eta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^k \gamma_i = 1. \quad (II)$$

Допустим, что  $\gamma_1 = 1$ . Тогда  $\gamma_i = 0$  и, значит,  $\mu_i = \eta_i = 0$  для любого  $i = 2, \dots, k$ ; кроме того,  $\sum_{i=k+1}^m \gamma_i x^i = 0$ . Отсюда с учетом заостренности конуса  $\text{cone}\{x^{k+1}, \dots, x^m\}$  легко выводится, что для любого  $i = k+1, \dots, m$  либо  $x^i = 0$ , либо  $\gamma_i = 0$  и поэтому  $\mu_i = \eta_i = 0$ . Таким образом,  $y = z = x^1$ , но это противоречит (I). Следовательно,  $\gamma_1 < 1$ . Тогда (II) можно переписать в виде

$$x^1 = \sum_{i=2}^m \frac{\gamma_i}{1 - \gamma_1} x^i, \quad \text{где } \sum_{i=2}^k \frac{\gamma_i}{1 - \gamma_1} = 1.$$

Иными словами,

$$x^1 \in \text{conv}\{x^2, \dots, x^k\} + \text{cone}\{x^{k+1}, \dots, x^m\}. \quad (III)$$

Пусть теперь  $x^1 \in E(X)$ , но формула (III) справедлива. Тогда из 8.126 следует, что  $x^1$  — крайняя точка множества  $\text{conv}\{x^1, \dots, x^k\}$ , и в то же время  $x^1 \in \text{conv}\{x^2, \dots, x^k\}$ . А это противоречит 8.120.

8.128. Примером служит выпуклая оболочка  $X$  окружности  $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$  и отрезка  $X_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1, x_2 = 0, -1 \leq x_3 \leq 1\}$ . Точка  $x = (1, 0, 0)$  принадлежит замыканию множества крайних точек  $X$ , но сама крайней не является.

8.130. Доказательство аналогично решению задачи 8.120.

8.131. Рассмотрим любые  $x \in \Gamma$  и  $\lambda \geq 0$ . Если  $\lambda > 1$ , то из представления

$$x = \frac{1}{\lambda} (\lambda x) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot 0,$$

где  $\lambda x \in X$ ,  $0 \in X$ , следует, что  $\lambda x \in \Gamma$ ,  $0 \in \Gamma$ . Если же  $0 \leq \lambda \leq 1$ , то  $\lambda x = \lambda x + (1 - \lambda) \cdot 0 \in \Gamma$  в силу выпуклости  $\Gamma$ . Таким образом,  $\Gamma$  — конус.

8.133. Применять 8.19.

8.134. Пусть  $\Gamma$  — крайнее подмножество полнэдра  $X$  вида (4.1). Положим

$$I = \{i, 1 \leq i \leq m \mid \langle a_i, x \rangle = b_i \text{ при всех } x \in \Gamma\},$$

$$J = \{1, \dots, m\} \setminus I$$

и покажем, что  $\Gamma$  совпадает с гранью  $X$  вида

$$Y = \{x \in X \mid A_J x = b_J\}.$$

Включение  $\Gamma \subset Y$  очевидно. Пусть  $x \in Y$ . Используя выпуклость  $\Gamma$ , нетрудно показать (ср. 4.22), что существует точка  $\bar{x} \in \Gamma$ , для которой  $A_J \bar{x} < b_J$  (если  $J = \emptyset$ , то это неравенство считается тривиально выполненным при любом  $\bar{x}$ ). Выберем столь малое  $\alpha > 0$ , что  $A_J y < b_J$ , где  $y = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x)$ . При этом, очевидно,  $A_I y = b_I$  и, значит,  $y \in X$ . Выразим  $\bar{x}$  через  $x$  и  $y$ :  $\bar{x} = \lambda x + (1 - \lambda)y$ , где  $\lambda = \alpha/(1 + \alpha)$ . Отсюда, поскольку  $\Gamma$  — крайнее подмножество  $X$ , заключаем, что  $x \in \Gamma$ . Таким образом,  $Y \subset \Gamma$ , т. е.  $\Gamma = Y$ . Мы показали, что из а) следует б). Импликация б)  $\Rightarrow$  в), по существу, совпадает с утверждением задачи 5.44. Импликация в)  $\Rightarrow$  а) носит общий характер (см. 8.133).

8.138. Пусть  $y \in Y$ . Рассмотрим любую точку  $x \in \Gamma \cap \text{ri } Y$ . Из теоремы 7.15 следует, что  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$  при некоторых  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $z \in Y \subset X$ . Тогда  $y \in \Gamma$ , так как  $\Gamma$  — крайнее подмножество  $X$ .

8.139. Применить 8.138 к множеству  $Y = X$ .

8.140. Пусть  $\Gamma$  — собственное крайнее подмножество  $X$ . Тогда  $\Gamma \subset \text{гд } X$  в силу 8.139. Поэтому заведомо  $\text{гд } X \neq \emptyset$ . Отсюда, согласно 7.104, множество  $X$  не является аффинным. Пусть, напротив,  $X$  — неаффинное множество и, значит,  $\text{гд } X \neq \emptyset$ . Рассмотрим гиперплоскость  $H_{p,b}$ , собственную опорную к  $X$  в точке  $a \in \text{гд } X$ . Тогда  $\Gamma = X \cap H_{p,b}$  — собственное крайнее подмножество  $X$  (см. 8.133).

8.141. Применить 8.138 к множеству  $Y = \bar{\Gamma}$ .

8.142. Применить 8.138 сначала к множествам  $\Gamma = \Gamma_1$ ,  $Y = \Gamma_2$ , а затем к множествам  $\Gamma = \Gamma_2$ ,  $Y = \Gamma_1$ .

8.143. Из 8.133, 8.138, 8.139 следует, что указанным условиям удовлетворяет множество  $\Gamma = X \cap H_{p,b}$ , где  $H_{p,b}$  — гиперплоскость, собственная опорная к  $X$  в произвольной точке  $a \in \text{ri } Y$ .

8.144. Ясно, что  $\Gamma = \Gamma_X(Y)$  — крайнее подмножество  $X$  (см. 8.137) и  $Y \subset \Gamma$ . Допустим, что  $Y \cap \text{ri } \Gamma = \emptyset$ , т. е.  $Y \subset \Gamma \cap \text{гд } \Gamma$ . Тогда, согласно 8.143, найдется такое крайнее подмножество  $\Gamma'$  множества  $\Gamma$ , что  $Y \subset \Gamma' \subset \text{гд } \Gamma$ . При этом  $\Gamma'$  — крайнее подмножество  $X$  (см. 8.135). Отсюда, поскольку  $\Gamma$  — крайний носитель  $Y$  в  $X$ , следует, что  $\Gamma \subset \Gamma'$ . Но это противоречит условию  $\Gamma' \subset \text{гд } \Gamma$ . Таким образом,  $Y \cap \text{ri } \Gamma \neq \emptyset$ . Единственность легко выводится из 8.138.

8.145. Пусть  $\Gamma$  — (непустое) крайнее подмножество  $X$ . Покажем, что  $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — крайние носители  $\Gamma$  в  $X_1$  и  $X_2$  соответственно, т. е. такие их крайние подмножества, что

$$\Gamma \subset \Gamma_1, \quad \Gamma \cap \text{ri } \Gamma_1 \neq \emptyset, \quad \Gamma \subset \Gamma_2, \quad \Gamma \cap \text{ri } \Gamma_2 \neq \emptyset$$

(см. 8.144). Имеем  $\Gamma \subset \Gamma_1 \cap \Gamma_2$  и, кроме того,  $\text{ri } \Gamma \subset \text{ri } \Gamma_1$ ,  $\text{ri } \Gamma \subset \text{ri } \Gamma_2$  (см. 7.91). Поэтому с учетом 7.97 получаем

$$\Gamma \cap \text{ri}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \Gamma \cap \text{ri } \Gamma_1 \cap \text{ri } \Gamma_2 \neq \emptyset.$$

Следовательно,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subset \Gamma$  в силу 8.138. Таким образом,  $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ .

В обратную сторону утверждение очевидно.  
8.146. Положим

$$\Gamma_1 = \{x \in X_1 | x + y \in \Gamma \text{ при некотором } y \in X_2\},$$

$$\Gamma_2 = \{x \in X_2 | y + x \in \Gamma \text{ при некотором } y \in X_1\}.$$

Ясно, что  $\Gamma \subset \Gamma_1 + \Gamma_2$ . Пусть  $x \in \Gamma_1 + \Gamma_2$ , т. е.  $x = x^1 + x^2$ , где  $x^1 \in \Gamma_1$ ,  $x^2 \in \Gamma_2$  и, значит,  $x^1 + y \in \Gamma$ ,  $z + x^2 \in \Gamma$  при некоторых  $y \in X_2$ ,  $z \in X_1$ . С учетом выпуклости  $\Gamma$  имеем

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(y + z) = \frac{1}{2}(x^1 + y) + \frac{1}{2}(z + x^2) \in \Gamma.$$

Отсюда, поскольку  $\Gamma$  — крайнее подмножество  $X$ , заключаем, что  $x \in \Gamma$ . Таким образом,  $\Gamma_1 + \Gamma_2 \subset \Gamma$ , т. е.  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ .

Покажем теперь, что  $\Gamma_1$  — крайнее подмножество  $X_1$ . Пусть

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z, \quad x \in \Gamma_1, \quad y, z \in X_1, \quad 0 < \lambda < 1.$$

По определению  $\Gamma_1$  при некотором  $u \in X_2$  справедливо

$$x + u \in \Gamma, \quad \text{т. е. } \lambda(y + u) + (1 - \lambda)(z + u) \in \Gamma.$$

Отсюда  $y + u \in \Gamma$ ,  $z + u \in \Gamma$  и, значит,  $y, z \in \Gamma_1$ . Это и требовалось показать. Аналогично доказывается, что  $\Gamma_2$  — крайнее подмножество  $X_2$ .

Требуемый пример:  $X_1 = X_2 = [0, 1]$ ,  $\Gamma_1 = \{0\}$ ,  $\Gamma_2 = \{1\}$ .

8.147. Пусть  $\Gamma$  — грань  $X$  и  $P$  — совокупность всех тех точек множества  $\{x^1, \dots, x^m\}$ , которые принадлежат  $\Gamma$ . Тогда  $\text{conv } P \subset \Gamma$ , так как  $\Gamma$  — выпуклое множество. В то же время из 8.130 очевидно, что  $\Gamma \subset \text{conv } P$ . Таким образом,  $\Gamma = \text{conv } P$ .

8.148. Положим  $Y = \text{conv } Q \subset X$ . Пусть  $\Gamma$  — грань  $X$ , по существу точка  $x \in \text{aff } \Gamma \cap Y$ . Рассмотрим любую точку  $y \in \text{ri } \Gamma$ . Так как  $x \in \text{aff } \Gamma$ , то найдется столь малое число  $\lambda \in (0, 1]$ , что точка  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  лежит в грани  $\Gamma$ . Тогда по определению грани  $x \in \Gamma$ . В то же время условие  $x \in Y$  говорит о том, что  $x$  есть выпуклая комбинация точек из  $Q$ . Тогда в силу 8.130 по крайней мере одна из этих точек принадлежит  $\Gamma$ , т. е.  $\Gamma \cap Q \neq \emptyset$ . Мы пришли к противоречию с определением  $Q$ .

Пусть теперь  $\text{aff } \Gamma \cap Y = \emptyset$ . Тогда в силу 8.41 существует такая гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , что

$$\text{aff } \Gamma \subset H_{p\beta}, \quad Y \subset \text{int } H_{p\beta}^-. \quad (I)$$

Поскольку  $\{x^1, \dots, x^m\} \subset \Gamma \cup Q \subset \Gamma \cup Y$ , то очевидно, что  $X = \text{conv}(\Gamma \cup Y)$ . Отсюда и из (I) легко выводится, что  $X \subset H_{p\beta}^-$  и  $\Gamma = X \cap H_{p\beta}$ . Таким образом,  $\Gamma$  — грань  $X$  (см. 8.133).

8.149. Использовать 8.131, 8.132 в схеме рассуждений, аналогичной решению задачи 8.147. Можно также представить  $X$  в виде

$$X = \sum_{i=1}^m t^+_{0x^i}$$

и применить утверждение задачи 8.146 (точнее, его очевидное обобщение на  $m$  множеств). При этом учесть, что гранями луча являются лишь начало координат и сам луч.

8.150. Положим  $Y = \text{cone } Q$ . Пусть  $\Gamma$  — грань  $X$ . Тогда, используя 8.132, нетрудно показать (по схеме из решения задачи 8.148), что

$$\text{aff } \Gamma \cap Y = \{0\}. \quad (I)$$

Предположим, что конус  $Y$  не заострен, т. е.  $\pm y \in Y$  при некотором  $y \neq 0$ . Для любой точки  $x \in \Gamma$  можем записать  $x = x + y + +(-y)$ . Отсюда, вновь используя 8.132, получаем, что  $y \in \Gamma$ . Но это противоречит (I).

Пусть, напротив, выполняется условие (I) и конус  $Y$  заострен. Тогда из 8.21, 8.80 следует, что существует гиперплоскость  $H_{p_0}$ , для которой

$$\text{aff } \Gamma \subset H_{p_0}, \quad Y \subset H_{p_0}^-, \quad Y \cap H_{p_0} = \{0\}.$$

Отсюда и из очевидной формулы  $X = \text{cone}(\Gamma \cup Y)$  заключаем, что  $X \subset H_{p_0}^-$  и  $\Gamma = X \cap H_{p_0}$ , т. е.  $\Gamma$  — грань  $X$ .

Требуемый пример:  $X = \text{cone}\{(1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$ ,  $P = = \{(1, 0)\}$ .

8.151. Это непосредственно следует из 8.146, 8.147 и 8.149.

8.153. Зафиксируем произвольные индексы  $j, k \in \{1, \dots, m\}$  и рассмотрим полином

$$f(t) = (t-j)^2(t-k)^2 = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4.$$

Имеем

$$f(j) = f(k) = 0, \quad f(t) > 0 \quad \text{при всех } t \neq j, k. \quad (I)$$

Введем гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , где  $p = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ,  $\beta = -\alpha_0$ . Из (I) следует, что  $x(j) \in H_{p\beta}$ ,  $x(k) \in H_{p\beta}$ ,  $x(i) \in \text{int } H_{p\beta}^+$  при всех  $i \neq j, k$ . Отсюда легко выводится, что  $[x(j), x(k)] = X \cap H_{p\beta}$  — грань многогранника  $X$ , а  $x(i)$  и  $x(k)$  — его вершины (см. 8.133, 8.135).

8.154. Поскольку множество  $X$  не содержит прямых, то его рецессивный конус  $K(X)$  заострен. Тогда, согласно 7.117, 8.78, существует вектор  $p \in \text{int}[K(X)]^*$ ; при этом для гиперплоскости  $H = H_{p_0}$  выполняется условие

$$K(X) \cap H = \{0\} \quad (I)$$

(рис. 96). Пусть  $L = \text{Lin}(\text{aff } X)$  — линейное подпространство, параллельное  $\text{aff } X$ . В силу известной теоремы линейной алгебры имеем

$$\dim(L \cap H) = \dim L + \dim H - \dim(L \cup H).$$

Здесь  $\dim L = \dim X > 1$ ,  $\dim H = n - 1$ ,  $\dim(L \cup H) \leq n$ . Следовательно,  $\dim(L \cap H) > 0$ . Иными словами, существует ненулевой вектор  $h \in L \cap H$ .

Рассмотрим теперь произвольную точку  $x \in X$  и прямую  $l_{xh}$  (рис. 96). Поскольку  $h \in L = \text{aff } X - x$ , то  $l_{xh} \subset \text{aff } X$ . Так как  $h \in H$ , то из (I) следует, что  $h \notin K(X)$  и  $-h \notin K(X)$ . Сказанное означает, что пересечение прямой  $l_{xh}$  с множеством  $X$  представляет собой отрезок, концы которого лежат в  $\text{rd } X$ . Поскольку  $x$  принадлежит этому отрезку, то утверждение доказано.

8.155. Ясно, что  $\text{conv } G(X) \subset X$ . Включение  $X \subset \text{conv } G(X)$  докажем индукцией по  $\dim X$ . Если  $\dim X \leq 1$ , то  $X$  является точкой, отрезком или лучом, для которых это включение очевидно. Пусть оно уже доказано при  $\dim X < m$ , где  $m > 1$ , и пусть  $\dim X = m$ . С учетом 8.154 достаточно показать, что  $\text{rd } X \subset \text{conv } G(X)$ . Для про-

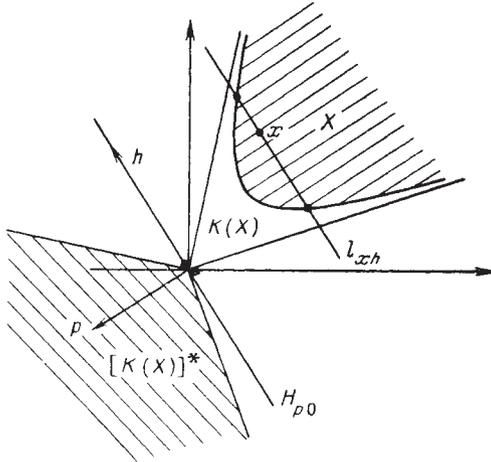


Рис. 96

извольной точки  $a \in \text{rd } X$  рассмотрим множество  $\Gamma$  из леммы 8.1. По индуктивному предположению  $\Gamma \subset \text{conv } G(\Gamma)$ . В частности,  $a \in \text{conv } G(\Gamma)$ . Заметим теперь, что  $\Gamma$  — крайнее подмножество  $X$  и, значит,  $G(\Gamma) \subset G(X)$  (см. 8.133, 8.135). Таким образом,  $a \in \text{conv } G(X)$ . Формула  $X = \text{conv } G(X)$  доказана.

Далее, если  $l_{xh}^+$  — крайний луч в  $X$ , то его начало  $x$  является крайней точкой в  $X$  (см. 8.135). Следовательно,

$$G(X) \subset E(X) + H(X) \subset \text{conv } E(X) + \text{cone } H(X)$$

и, значит,

$$X = \text{conv } G(X) \subset \text{conv } E(X) + \text{cone } H(X).$$

В то же время  $H(X)$  — это, прежде всего, подмножество рецессивного конуса  $K(X)$ . Поэтому с учетом 7.117 имеем

$$\text{conv } E(X) + \text{cone } H(X) \subset X + K(X) \subset X.$$

8.156. Использовать 8.125, 8.155.

8.157. Использовать 7.128, 8.155.

8.158. Использовать 7.118, 7.124, 8.125, 8.157.

8.159. Пусть  $X$  имеет конечное число крайних подмножеств. Используя 8.157, представим  $X$  в виде

$$X = \text{conv } E(Y) + \text{cone } H(Y) + L,$$

где  $L = L(X)$ ,  $Y = X \cap L^\perp$ . С учетом 8.145 ясно, что множество  $Y$  вслед за  $X$  имеет конечное число крайних подмножеств и, в

частности, крайних точек и крайних лучей. Таким образом,

$$E(Y) = \{x^1, \dots, x^k\}, \quad \text{cone } H(Y) = \text{cone} \{h^1, \dots, h^s\}.$$

В то же время подпространство  $L$  можно представить в виде  $L = \text{cone}\{\pm b^1, \dots, \pm b^r\}$ , где  $b^1, \dots, b^r$  — базис в  $L$ . Следовательно,

$$X = \text{conv}\{x^1, \dots, x^k\} + \text{cone}\{h^1, \dots, h^s, \pm b^1, \dots, \pm b^r\},$$

т. е.  $X$  — многогранное множество.

Обратное утверждение очевидно (см. 4.51, а также 8.151).

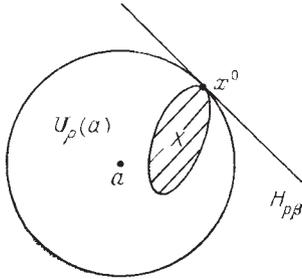


Рис. 97

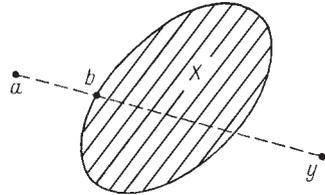


Рис. 98

8.160. Рассмотрим выпуклое множество  $X = \text{conv}(X_1 \cup X_2)$ , где  $X_{1,2} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 \pm 1)^2 + x_2^2 \leq 1\}$ . Четыре его крайние точки с координатами  $(\pm 1, \pm 1)$  не являются выступающими. Рассмотрим выпуклый конус

$$K = \text{cone}\{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in X\},$$

где  $X$  — указанное выше множество. Четыре луча вида  $l_{oh}^+$ , где  $h = (\pm 1, \pm 1, 1)$ , являются крайними, но не выступающими подмножествами  $K$ .

8.161. Пусть  $x^0$  — точка из  $X$ , наиболее удаленная от  $a$ , т. е.

$$\|x^0 - a\| = \max_{x \in X} \|x - a\| = \rho.$$

Это означает, что шар  $U_\rho(a)$ , будучи строго выпуклым множеством, содержит  $X$ , причем  $x^0$  лежит на его границе (рис. 97). Тогда  $x^0$  является выступающей точкой пара, а значит, и множества  $X$ .

8.162. Поскольку  $X$  — компакт, то число  $M = \sup_{x \in X} \|x - a\|$  конечно. Пусть  $b = \pi_X(a)$  — проекция точки  $a$  на  $X$  (рис. 98). Рассмотрим точку  $y = a + \alpha(b - a)$ , где

$$\alpha > \frac{M^2}{2 \|b - a\|^2}.$$

Рассмотрим любую точку  $x \in X$ . Добавляя  $\pm a$  во второй член скалярного произведения из теоремы 8.1, получаем

$$\langle b - a, x - a \rangle \geq \|b - a\|^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|(x - a) - \alpha(b - a)\|^2 = \\ &= \|x - a\|^2 - 2\alpha\langle x - a, b - a \rangle + \alpha^2\|b - a\|^2 \leq \\ &\leq M^2 - 2\alpha\|b - a\|^2 + \|a - y\|^2 < \|a - y\|^2. \end{aligned}$$

8.163. Положим  $Y = \overline{\text{conv } S(X)}$ . Ясно, что  $Y \subset X$ . Допустим, что обратное включение неверно, т. е. существует точка  $a \in X \setminus Y$ . Поскольку  $Y$  — выпуклый компакт, то, согласно 8.162, найдется такая точка  $y \in \mathbb{R}^n$ , что

$$\|a - y\| > \|x - y\| \quad \text{при всех } x \in Y. \quad (I)$$

Пусть  $x^0$  — точка из  $X$ , наиболее удаленная от  $y$ . Тогда  $x^0 \in S(X) \subset Y$  в силу 8.161. Подставляя  $x^0$  в (I), получаем

$$\|a - y\| > \|x^0 - y\|.$$

Но это противоречит выбору  $x^0$ . Таким образом,  $X = Y$ . Далее, множество  $\overline{\text{conv } S(X)}$  замкнуто в силу теоремы 7.12. Поэтому

$$X = Y = \overline{\text{conv } S(X)} \subset \overline{\text{conv } S(\bar{X})} \subset X$$

и, значит,  $X = \overline{\text{conv } S(X)}$ .

8.164. Применить 8.122, 8.163.

8.165. Пусть  $X$  не содержит прямых. Тогда  $E(X) \neq \emptyset$  в силу теоремы 8.12. Рассмотрим произвольную точку  $x^0 \in E(X)$ . Требуется показать, что при любом  $\varepsilon > 0$  шар  $U_\varepsilon(x^0)$  содержит хотя бы одну точку из  $S(X)$ . Рассмотрим выпуклый компакт  $Y = X \cap U_\rho(x^0) \cap U_\varepsilon(x^0)$ , где  $\rho > \varepsilon$ . Ясно, что  $x^0 \in E(Y)$  (см. 8.136). Поэтому, согласно 8.164, существует точка  $x \in S(Y) \cap U_\varepsilon(x^0)$  (рис. 99). Включение  $x \in S(Y)$  означает, что существует гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , для которой  $Y \subset H_{p\beta}^-$ ,  $Y \cap H_{p\beta} = \{x\}$ . Отсюда и из условия  $x \in U_\varepsilon(x^0) \subset \text{int } U_\rho(x^0)$  легко выводится, что  $X \subset H_{p\beta}^-$ ,  $X \cap H_{p\beta} = \{x\}$ , т. е.  $x \in S(X)$ . Таким образом,  $E(X) \subset \overline{S(X)}$ .

Обратное утверждение непосредственно следует из теоремы 8.12, поскольку любая выступающая точка является крайней.

8.167. Пусть полупространство  $H_{p1}^-$  является касательным к  $X$  в некоторой точке  $a \in X$ , т. е.

$$\langle p, x \rangle \leq 1 = \langle p, a \rangle \quad \text{при всех } x \in X \quad (I)$$

и из условия

$$\langle q, x \rangle \leq 1 = \langle q, a \rangle \quad \text{при всех } x \in X \quad (II)$$

следует, что  $q = p$  (поскольку  $0 \in \text{int } X$ , то при рассматривании гиперплоскости  $H_{qa}$ , опорной к  $X$ , всегда можно полагать  $\alpha = 1$ ). Рассмотрим гиперплоскость  $H_{a1}$ . Поскольку  $a \in X$ , то  $X^* \subset H_{a1}^-$  по определению  $X^*$ . При этом из (I) следует, что  $p \in X^* \cap H_{a1}$ , т. е. гиперплоскость  $H_{a1}$  является опорной к  $X^*$  в точке  $p$ . Пусть  $q \in$

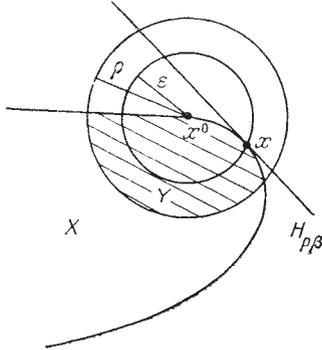


Рис. 99

$\in X^* \cap H_{a_1}$ . Тогда справедливо (II), и, значит,  $q = p$ . Таким образом,  $X^* \cap H_{a_1} = \{p\}$ , т. е.  $p$  — выступающая точка множества  $X^*$ .

Пусть, напротив,  $p \neq 0$  — выступающая точка  $X^*$ . Тогда, прежде всего,  $p \in X^*$ , и, значит,  $X \subset H_{p_1}^-$ . При этом по определению выступающей точки существует такой вектор  $b \in \mathbb{R}^n$ , что

$$\langle b, q \rangle < \langle b, p \rangle \text{ при всех } q \in X^*, q \neq p. \quad (\text{III})$$

Заметим, что  $\langle b, p \rangle > 0$ , так как  $0 \in X^*$ . Положим  $a = b/\langle b, p \rangle$ . Тогда  $\langle p, a \rangle = 1$ , и (III) можно переписать в виде

$$\langle q, a \rangle < 1 \text{ при всех } q \in X^*, q \neq p. \quad (\text{IV})$$

Отсюда заключаем, что  $a \in X^{**} = X$ . Таким образом, полупространство  $H_{p_1}^-$  является опорным к  $X$  в точке  $a$ . Допустим, что существует еще одно полупространство  $H_{q_1}^-$ , опорное к  $X$  в точке  $a$ , т. е.

$$\langle q, x \rangle \leq 1 = \langle q, a \rangle \text{ при всех } x \in X.$$

Отсюда следует, что  $q \in X^*$ . Тогда  $q = p$  в силу (IV). Таким образом, полупространство  $H_{p_1}^-$  является касательным к  $X$  в указанной точке  $a$ .

8.168. Без ограничения общности можно считать, что  $0 \in \text{int } X$ . Тогда  $X^*$  есть выпуклый компакт (см. 8.77). Поэтому, согласно 8.163, имеем

$$X^* = \overline{\text{conv } S(X^*)}.$$

Отсюда с учетом 8.70 получаем, что

$$X = X^{**} = [\overline{\text{conv } S(X^*)}]^* = [S(X^*)]^*.$$

При этом  $S(X^*) \neq \{0\}$ , так как  $X \neq \mathbb{R}^n$ . Следовательно,

$$X = \bigcap_{\substack{p \in S(X^*) \\ p \neq 0}} H_{p_1}^-,$$

где в силу 8.167 полупространства  $H_{p_1}^-$  ( $p \in S(X^*)$ ,  $p \neq 0$ ) являются касательными к  $X$ .

8.169. Доказательство проводится по схеме, близкой к решению задачи 8.167. Поэтому изложим его лишь вкратце.

Пусть полупространство  $H_{p_0}^-$  является касательным к конусу  $X$  в некоторой точке  $a \in X$ , т. е.

$$\langle p, x \rangle \leq 0 = \langle p, a \rangle \text{ при всех } x \in X \quad (\text{I})$$

и из условия

$$\langle q, x \rangle \leq 0 = \langle q, a \rangle \text{ при всех } x \in X \quad (\text{II})$$

следует, что

$$q = \lambda p \text{ при некотором } \lambda \geq 0. \quad (\text{III})$$

Ясно, что здесь можно считать  $a \neq 0$  (касательная гиперплоскость к конусу не может пересекаться с ним только в пуле). При этом из выписанных условий легко выводится, что

$$X^* \subset H_{a_0}^-, \quad X^* \cap H_{a_0} = l_{0p}^+, \quad (\text{IV})$$

т. е.  $l_{0p}^+$  — выступающий луч в  $X^*$ .

Пусть, напротив,  $l_{0p}^+$  — выступающий луч в  $X^*$ , т. е. при некотором ненулевом  $a \in \mathbb{R}^n$  выполнено (IV). Отсюда заключаем, что справедливо (I) и из условия (II) следует (III); при этом  $a \in \in X^{**} = X$ . Таким образом, полупространство  $H_{p\beta}^-$  является касательным к  $X$  в  $a$ .

8.170. С учетом теоремы 8.10 достаточно доказать, что  $X^* = [T(X)]^*$ . Поскольку  $T(X) \subset X$ , то  $X^* \subset [T(X)]^*$ . Пусть теперь  $p \notin X^*$ . Из условий задачи следует, что  $\text{int } X^* \neq \emptyset$  (см. 8.78) и  $X^* \neq \mathbb{R}^n$ . Тогда, согласно 8.20 и 8.168, найдется полупространство  $H_{x_0}^-$ , касательное к  $X^*$  и не содержащее  $p$ , т. е.  $\langle x, p \rangle > 0$ . Применяя 8.169, получаем, что  $l_{0x}^+$  — выступающий луч конуса  $X^{**} = X$  и, следовательно,  $x \in l_{0x}^+ \subset T(X)$ . Но тогда неравенство  $\langle p, x \rangle > 0$  означает, что  $p \notin [T(X)]^*$ . Таким образом,  $[T(X)]^* \subset X^*$ .

8.171. По условию имеет место импликация

$$\left. \begin{aligned} \langle p, x \rangle = \beta \\ \langle q, x \rangle = \alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow \langle r, x \rangle = \gamma,$$

причем система слева совместна. Тогда, согласно 4.84, существуют такие числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , что

$$r = \lambda_1 p + \lambda_2 q, \quad \gamma = \lambda_1 \beta + \lambda_2 \alpha. \quad (I)$$

При этом  $\lambda_2 \neq 0$ , так как  $H_{r\gamma} \neq H_{p\beta}$ . Пусть  $x \in H_{p\beta} \cap H_{r\gamma}$ , т. е.  $\langle p, x \rangle = \beta$ ,  $\langle r, x \rangle = \gamma$ . Тогда из (I) следует, что  $\langle q, x \rangle = \alpha$ , т. е.  $x \in H_{q\alpha}$ . Таким образом,  $H_{p\beta} \cap H_{r\gamma} \subset H_{p\beta} \cap H_{q\alpha}$ . Обратное включение очевидно.

8.172. По условию  $x^0$  допускает представление

$$x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, \quad \text{где } x^1, x^2 \in X, \quad x^1 \neq x^2, \quad 0 < \lambda < 1.$$

При этом  $x^1, x^2 \notin H_{p\beta}$ . Без ограничения общности предположим, что  $\langle p, x^1 \rangle < \beta$ . Тогда, очевидно,  $\langle p, x^2 \rangle > \beta$ . Обозначим через  $l$  прямую, проходящую через точки  $x^1$  и  $x^2$  ( $l = l_{x^1, x^2 - x^1}$ ). Покажем,

что  $X \subset l$ . Пусть существует точка  $x \in X \setminus l$  и без ограничения общности  $\langle p, x \rangle < \beta$ . Тогда найдется такое число  $\mu \in (0, 1)$ , что точка  $y = \mu x + (1 - \mu)x^2$  удовлетворяет условию  $\langle p, y \rangle = \beta$ , т. е.  $y \in X \cap H_{p\beta}$  (рис. 100). Поскольку  $y \notin l$ ,  $x^0 \in l$ , то  $y \neq x^0$ , но это противоречит условию задачи. Следовательно,  $X \subset l$ , и так как  $X \neq \{x^0\}$ , то  $\dim X = 1$ .

8.173. При  $\dim X \leq 1$  утверждение тривиально. Поэтому будем считать, что  $\dim X \geq 2$ . Примем обозначение  $Y = \text{conv } T(X)$ . Ясно, что  $Y \subset X$ . Предположим, что обратное включение неверно. Тогда, применяя теорему 8.2 к множеству  $Y$  и любой точке из

$X \setminus Y$ , получаем, что существует гиперплоскость  $H_{p\beta}$ , для которой

$$Z = X \cap H_{p\beta} \neq \emptyset, \quad (I)$$

$$Y \cap H_{p\beta} = \emptyset. \quad (II)$$

Множество  $Z$  замкнуто, выпукло и как подмножество  $X$  не содержит прямых. Тогда, согласно 8.165, это множество имеет выступающую точку  $x^0$ , т. е. существует такая гиперплоскость  $H_{q\alpha}$ , что

$$Z \subset H_{q\alpha}^-, \quad Z \cap H_{q\alpha} = \{x^0\}. \quad (III)$$

Из 8.165 следует также, что  $E(X) \subset \overline{S(X)} \subset Y$ . В то же время  $x^0 \in \in Z \subset H_{p\beta}$ . Тогда  $x^0 \notin E(X)$  в силу (II).

Допустим, что  $x^0 \in \text{ri } X$ . Тогда, используя 7.97, получаем, что

$$x^0 \in \text{ri } X \cap H_{p\beta} = \text{ri } (X \cap H_{p\beta}) = \text{ri } Z.$$

С учетом (III) это возможно лишь в том случае, если  $Z \subset H_{q\alpha}$  (см. 8.26). Тогда из (I), (III) выводим

$$X \cap H_{p\beta} = Z = Z \cap H_{q\alpha} = \{x^0\}.$$

Следовательно,  $\dim X = 1$  в силу 8.172, но это противоречит предположению.

Итак,  $x^0 \notin \text{ri } X$ . Введем аффинное множество  $M = H_{p\beta} \cap H_{q\alpha}$ . Из (I), (III) имеем  $X \cap M = \{x^0\}$ , и, значит,  $\text{ri } X \cap M = \emptyset$ . Тогда, применяя 8.38, получаем, что существует гиперплоскость  $H_{r\gamma}$ , удовлетворяющая условиям

$$X \subset H_{r\gamma}^-, \quad M \subset H_{r\gamma}. \quad (IV)$$

Эта гиперплоскость является опорной к  $X$  в точке  $x^0$ . Тогда по определению  $\Gamma = X \cap H_{r\gamma}$  есть выступающее подмножество  $X$ . При этом  $x^0 \notin E(\Gamma)$ , так как  $E(\Gamma) \subset E(X)$  (см. 8.135) и  $x^0 \notin E(X)$ . Допустим, что  $H_{r\gamma} = H_{p\beta}$ . Возьмем любую точку  $\bar{x} \in E(\Gamma)$ , существующую в силу теоремы 8.12. Тогда, с одной стороны,  $\bar{x} \in \Gamma \subset \subset H_{r\gamma} = H_{p\beta}$ , а с другой стороны,  $\bar{x} \in E(X) \subset Y$ . Но это противоречит (II). Таким образом,  $H_{r\gamma} \neq H_{p\beta}$ . Тогда из 8.171 и формул (I), (III), (IV) получаем

$$\Gamma \cap H_{p\beta} = X \cap H_{r\gamma} \cap H_{p\beta} = X \cap H_{q\alpha} \cap H_{p\beta} = Z \cap H_{q\alpha} = \{x^0\}.$$

Следовательно,  $\dim \Gamma = 1$  (см. 8.172). Поскольку  $X$  не содержит прямых, то  $\Gamma$  может быть лишь лучом или отрезком. Если  $\Gamma$  — луч, а значит, и выступающий луч множества  $X$ , то  $\Gamma \subset Y$  по определению  $Y$ . Если  $\Gamma = [x^1, x^2]$  — отрезок, то  $x^1, x^2 \in E(\Gamma) \subset \subset E(X) \subset Y$ , и поэтому также  $\Gamma \subset Y$ . Но это включение заведомо не выполняется, так как  $x^0 \in \Gamma \setminus Y$ . Таким образом, предположив, что  $X \not\subset Y$ , мы пришли к противоречию. Следовательно,  $X \subset Y$ , т. е.  $X = Y$ .

8.174. По условию  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$ , где  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ),

$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ . Включение  $U_\varepsilon(x) \subset U_r(y)$  равносильно тому, что  $\|x - y\| \leq r - \varepsilon$ . Таким образом, множество  $Y$  состоит из таких пар  $(y, r)$ , что

$$\left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i (x^i - y) \right\| \leq r - \varepsilon, \quad (I)$$

$$\|x^i - y\| > r, \quad i = 1, \dots, m. \quad (II)$$

Пусть  $(y, r) \in Y$ . Примем обозначения  $a^i = x^i - y$ ,  $d_{ij} = \|x^i - x^j\|^2$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ). Используя (II), получаем

$$d_{ij} = \|a^i - a^j\|^2 = \|a^i\|^2 + \|a^j\|^2 - 2\langle a^i, a^j \rangle \geq 2r^2 - 2\langle a^i, a^j \rangle.$$

Поэтому

$$\langle a^i, a^j \rangle \geq r^2 - d, \text{ где } d = \frac{1}{2} \max_{i,j} d_{ij}.$$

Тогда

$$\left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i a^i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j \langle a^i, a^j \rangle \geq (r^2 - d) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j = r^2 - d.$$

Таким образом, с учетом (I) имеем  $(r - \varepsilon)^2 \geq r^2 - d$ . Отсюда  $r \leq (\varepsilon^2 + d)/(2\varepsilon) = r_0$ , и, значит,  $\|x - y\| \leq r_0 - \varepsilon$ . Следовательно,  $Y$  ограничено.

**8.175.** Пусть утверждение неверно, т. е. существует последовательность чисел  $\alpha_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), сходящаяся к нулю и такая, что

$$X \cap (Y + \alpha_k(b - a)) \neq \emptyset,$$

т. е.

$$x^k = y^k + \alpha_k(b - a) \quad (\text{I})$$

при некоторых  $x^k \in X$ ,  $y^k \in Y$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Поскольку  $X \cap Y = \{a\}$ , то либо  $x^k \notin Y$ , либо  $x^k = a \in \partial Y$ . В любом случае согласно теоремам 8.2 и 8.3 существует такой вектор  $p^k$ , что  $\|p^k\| = 1$  и

$$\langle p^k, y \rangle \leq \langle p^k, x^k \rangle \text{ при всех } y \in Y. \quad (\text{II})$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$p^k \rightarrow p \neq 0 \text{ и } y^k \rightarrow \bar{y} \in Y,$$

так как  $Y$  — компакт. Тогда из (I) следует, что и  $x^k \rightarrow \bar{y}$ , причем  $\bar{y} \in X$  в силу замкнутости  $X$ . Поэтому  $\bar{y} = a$ . Переходим теперь в (II) к пределу, получаем

$$\langle p, y \rangle \leq \langle p, a \rangle = \beta \text{ при всех } y \in Y,$$

т. е. полупространство  $H_{p\beta}^-$  является опорным к  $Y$  в  $a$ . В то же время, если в (II) подставить точку  $y = y^k$ , то с учетом (I) получим, что  $\langle p^k, a \rangle \leq \langle p^k, b \rangle$ , и, значит,  $\langle p, a \rangle \leq \langle p, b \rangle$ . Таким образом,  $b \notin \text{int } H_{p\beta}^-$ , но это противоречит условию на  $b$ .

**8.176.** Применить 8.175, учитывая, что  $U_r(y)$  — строго выпуклый компакт.

**8.177.** Примем обозначения

$$X = \overline{\mathbb{R}^n \setminus U_r(y)}, \quad Y = U_\varepsilon(x), \quad Z = U_r(y).$$

Имеем  $X \cap Y = \{b\}$ ,  $b \in \partial Y$ . При этом полупространство, опорное к шару  $Y$  в точке  $b$ , единственно и одновременно является опорным к шару  $Z$  в той же точке. Поскольку  $a \in Z$ ,  $a \neq b$  и  $Z$  — строго выпуклое множество, то  $a$  принадлежит внутренности указанного полупространства. Тогда, согласно 8.175, при всех достаточно малых  $\alpha > 0$  имеем

$$X \cap (Y + \alpha(a - b)) = \emptyset.$$

Отсюда  $Y + \alpha(a - b) \subset Z$ , и, значит,  $Y \subset Z + \alpha(b - a)$ .

**8.178.** Предположим, что множество  $X$  невыпукло, т. е. существуют такие точки  $x^1, x^2 \in X$ ,  $x \in [x^1, x^2]$ , что  $x \notin X$ . Поскольку  $X$

замкнуто, то  $X \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset$  при некотором  $\varepsilon > 0$ . Обозначим через  $Z$  множество всех пар  $(z, \rho)$ , удовлетворяющих условиям

$$U_\varepsilon(x) \subset U_\rho(z), \quad X \cap U_\rho(z) = \emptyset. \quad (I)$$

Заметим, что  $Z \neq \emptyset$ , так как  $(x, \varepsilon) \in Z$ . Из (I) следует, что  $x^i \notin U_\rho(z)$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда в силу 8.174 множество  $Z$  ограничено. Пусть  $r = \sup_{(z, \rho) \in Z} \rho$ . Рассмотрим такие пары  $(z^k, \rho_k) \in Z$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), что  $\rho_k \rightarrow r$ . Без ограничения общности можно считать, что  $z^k \rightarrow y$ . Из выбора  $r$  и замкнутости  $X$  следует, что

$$U_\varepsilon(x) \subset U_r(y), \quad X \cap U_r(y) \neq \emptyset.$$

Пусть  $a \in X \cap U_r(y)$ . Для любой точки  $x \in X$  в силу (I) имеем  $\|x - z^k\| \geq \rho_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), и, значит,  $\|x - y\| \geq r \geq \|a - y\|$ . Следовательно, точка  $a$  есть проекция точки  $y$  на  $X$ , причем  $\|a - y\| = r$ . Но по условию задачи эта проекция единственна. Таким образом,  $X \cap U_r(y) = \{a\}$ , причем  $a$  лежит на границе шара  $U_r(y)$ . Возможны два случая.

1) Границы шаров  $U_\varepsilon(x)$  и  $U_r(y)$  имеют общую точку  $b$  (рис. 101). Заметим, что  $a \neq b$ , так как  $a \in X$ ,  $b \in U_\varepsilon(x)$  и  $X \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset$ . Тогда, согласно 8.176 и 8.177, существует такое  $\alpha > 0$ , что для точки  $z = y + \alpha(b - a)$  справедливы соотношения

$$U_\varepsilon(x) \subset U_r(z), \quad (II)$$

$$X \cap U_r(z) = \emptyset.$$

2) Шар  $U_\varepsilon(x)$  лежит во внутренней части шара  $U_r(y)$ . Тогда мы приходим к (II), применяя уже только 8.176 при произвольной точке  $b \in U_r(y)$ ,  $b \neq a$ .

Из (II) следует, что  $(z, r) \in Z$  и, более того, найдется число  $\rho > r$ , для которого  $(z, \rho) \in Z$ . Но это противоречит выбору  $r$ . Таким образом,  $X$  выпукло.

8.179. Проекция любой точки из  $\mathbb{R}^2$  на множество  $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 1, x_1 > 0\}$  относительно нормы  $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$  единственна, но  $X$  невыпукло (рис. 102).

8.180. Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $Y_\varepsilon = X \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ . Ясно, что проекции точки  $x$  на множества  $X$  и  $Y_\varepsilon$  совпадают. Следовательно, если множество  $Y_\varepsilon$  выпукло, то проекция  $x$  на  $X$  единственна (см. 8.1). Тогда  $X$  выпукло в силу 8.178.

8.181. Будем считать, что точки  $a, b$  и  $c$  не лежат на одной прямой, так как иначе утверждение тривиально. Введем множество

$$Y = \{x \mid x \in [b, c], [a, x] \subset X\}.$$

Это множество непусто и замкнуто, так как  $b \in Y$  и  $X$  замкнуто. Следовательно, в  $Y$  существует точка  $y$ , ближайшая к  $c$ . Если  $y = c$ , то утверждение доказано. Предположим, что  $y \neq c$  (рис. 103).

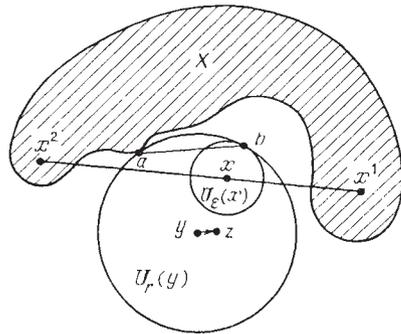


Рис. 101

Рассмотрим треугольник  $T = \text{conv}\{a, y, c\}$ . В силу выбора  $y$  для любого  $x \in (y, c]$  множество  $[a, x] \cap (T \setminus X)$  непусто. Тогда множество  $Z = [a, y] \cap \overline{(T \setminus X)}$  также непусто. Кроме того,  $Z$  замкнуто. Поэтому в  $Z$  существует точка  $z$ , ближайшая к  $y$ . По условию существует такая окрестность  $U$  точки  $z \in Z \subset [a, y] \subset X$ , что

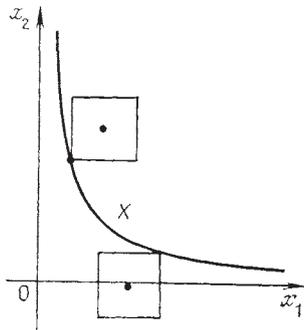


Рис. 102

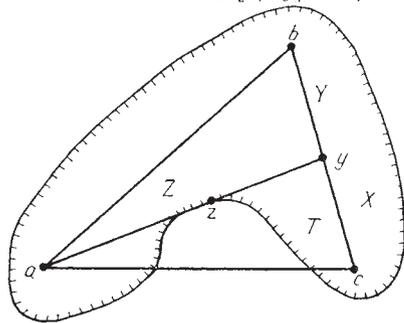


Рис. 103

множество  $X \cap U$  выпукло. При этом можно считать, что сама окрестность  $U$  также выпукла (в противном случае достаточно перейти к шару  $U_\varepsilon(z) \subset U$ ). Рассмотрим два случая.

1)  $z = y$  (рис. 104). Пусть  $[a, y] \cap U = [u, y]$ ,  $[c, y] \cap U = [v, y]$ . Отметим, что  $u \in [a, y] \subset X$  и  $v \in [c, y] \subset X$ . Таким образом, точки  $y, u, v$  лежат в выпуклом множестве  $(X \cap U) \cap T$ . Поэтому натянутый на них треугольник также лежит в этом множестве, а значит, и в множестве  $X \cap T$ . Но тогда, очевидно, точка  $z = y$  не может быть предельной для множества  $T \setminus X$ , т. е.  $z \notin Z$ .

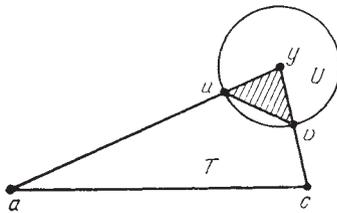


Рис. 104

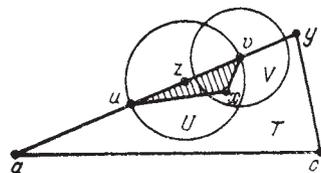


Рис. 105

2)  $z \neq y$  (рис. 105). Пусть  $[a, y] \cap U = [u, v]$ , причем  $v \in (z, y]$ . Тогда  $v \notin Z$  в силу выбора  $z$ . Иными словами, существует такая окрестность  $V$  точки  $v$ , что  $V \cap T \subset X$ . Ясно, что найдется точка  $x \in U \cap V$ , лежащая внутри треугольника  $T$ . При этом  $x \in U \cap V \cap T \subset (X \cap U) \cap T$ . Тогда, как и выше, заключаем, что треугольник, натянутый на точки  $x, u, v$ , лежит в  $X \cap T$ . Отсюда понятно, что  $z \notin Z$ .

Таким образом, в обоих случаях мы пришли к противоречию. Следовательно,  $y = c$ , т. е.  $[a, c] \subset X$ .

8.182. Для любой точки  $a \in X$  рассмотрим множество

$$S = \{x \mid [a, x] \subset X\}.$$

Это множество непусто и замкнуто в  $X$ , так как  $a \in S$  и  $X$  замкнуто в  $\mathbb{R}^n$ . Покажем, что  $S$  открыто в  $X$ . Пусть  $b \in S$ , т. е.  $[a, b] \subset X$ . По условию существует такая окрестность  $U$  точки  $b$ , что  $U$  множество  $X \cap U$  выпукло. Тогда для любой точки  $c \in X \cap U$  следует, что  $[b, c] \subset X \cap U \subset X$ , а поэтому  $[a, c] \subset X$  в силу 8.181. Таким образом,  $c \in S$ . Мы показали, что  $X \cap U \subset S$ . Это и означает, что  $S$  открыто в  $X$ . Итак, непустое множество  $S \subset X$  одновременно замкнуто и открыто в  $X$ . По определению связного множества  $X$  такое возможно лишь в том случае, если  $S = X$ . Следовательно,  $X$  выпукло.

8.184. Сопоставим каждой точке  $x \in X$  множества

$$S(x) = \{a \mid [a, x] \subset X\}, \quad V(x) = \text{conv } S(x).$$

Поскольку  $X$  — компакт, то  $S(x)$  также является компактом; поэтому  $V(x)$  — выпуклый компакт в силу теоремы 7.12. По условию задачи любые  $n + 1$  из множеств  $S(x)$  ( $x \in X$ ) имеют общую точку. Тогда множества  $V(x)$  ( $x \in X$ ) тем более обладают этим свойством. Следовательно, в силу 7.80 все множества  $V(x)$  ( $x \in X$ )

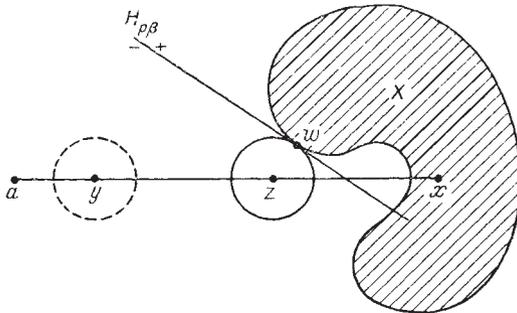


Рис. 106

имеют общую точку. Пусть  $a \in \bigcap_{x \in X} V(x)$ . Покажем, что  $a \in \bigcap_{x \in X} S(x)$ , т. е.  $X$  звездно относительно  $a$  (отметим, что сразу не очевидно даже включение  $a \in X$ ). Предположим, что  $a \notin \bigcap_{x \in X} S(x)$ , т. е. существуют такие точки  $x \in X$  и  $y \in [a, x]$ , что  $y \notin X$ . Поскольку  $X$  замкнуто, то  $X \cap U_r(y) = \emptyset$  при некотором  $r > 0$ . Примем обозначения  $z(\lambda) = y + \lambda(x - y)$  и

$$\bar{\lambda} = \sup\{\lambda \geq 0 \mid X \cap U_r(z(\lambda')) = \emptyset \text{ при всех } \lambda' \in [0, \lambda]\}.$$

Ясно, что  $\bar{\lambda} < 1 < \infty$ . Положим  $z = z(\bar{\lambda})$ . Тогда, очевидно,  $X \cap \partial U_r(z) \neq \emptyset$  и

$$X \cap U_r(z(\lambda)) = \emptyset \text{ при всех } \lambda \in [0, \bar{\lambda}). \quad (1)$$

Пусть  $H_{\rho\beta}$  — гиперплоскость, опорная к шару  $U_r(z)$  в некоторой

точке  $w \in X \cap \partial U_r(z)$ , т. е.  $w \in H_{p\beta}$ ,  $U_r(z) \subset H_{p\beta}^-$  (рис. 106). Допустим, что уже доказаны следующие утверждения:

- 1)  $a \in \text{int } H_{p\beta}^-$ ;
- 2)  $S(w) \subset H_{p\beta}^+$ .

Отсюда следует, что  $V(w) \subset H_{p\beta}^+$  и, значит,  $a \notin V(w)$ . Но это противоречит выбору  $a$ .

Итак, остается доказать 1) и 2). Гиперплоскость  $H_{p\beta}$  определяется параметрами  $p = w - z$ ,  $\beta = \langle p, w \rangle$  (см. 8.22). Следовательно, утверждение 1) равносильно тому, что  $\langle w - z, a - w \rangle < 0$ . Предположим, что это неравенство неверно. Тогда

$$0 \leq \langle w - z, a - w \rangle = \langle w - z, (a - z) + (z - w) \rangle < \langle w - z, a - z \rangle.$$

Но  $a - z = \mu(y - x)$  при некотором  $\mu > 0$ . Поэтому  $\langle w - z, x - y \rangle < 0$ . Заметим, что  $z(\bar{\lambda} - \varepsilon) = z - \varepsilon(x - y)$ . Тогда при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \|w - z(\bar{\lambda} - \varepsilon)\|^2 &= \|(w - z) + \varepsilon(x - y)\|^2 = \\ &= \|w - z\|^2 + 2\varepsilon\langle w - z, x - y \rangle + \varepsilon^2\|x - y\|^2 = \\ &= r^2 + \varepsilon(2\langle w - z, x - y \rangle + \varepsilon\|x - y\|^2) < r^2. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Таким образом,

$$X \cap U_r(z(\bar{\lambda} - \varepsilon)) \neq \emptyset. \quad (\text{III})$$

Но это противоречит (I). Утверждение 1) доказано.

Предположим, что утверждение 2) неверно, т. е. существует точка  $b \in \text{int } H_{p\beta}^-$ , при которой  $[b, w] \subset X$ . Используя выкладки, аналогичные (II), получаем, что  $\|w + \alpha(b - w) - z\|^2 < r^2$  при достаточно малом  $\alpha > 0$ . Это неравенство сохранится, если заменить  $z$  на  $z(\bar{\lambda} - \varepsilon)$  при достаточно малом  $\varepsilon > 0$ . Отсюда вновь приходим к (III).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах.— М.: Высш. шк., 1986.
2. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи.— М.: Наука, 1984.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление.— М.: Наука, 1979.
4. Астафьев Н. Н. Линейные неравенства и выпуклость.— М.: Наука, 1982.
5. Ашманов С. А. Линейное программирование.— М.: Наука, 1981.
6. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику.— М.: Наука, 1984.
7. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы.— М.: Мир, 1982.
8. Белоусов Е. Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование.— М.: Изд-во МГУ, 1977.
9. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства.— М.: ИЛ, 1959.
10. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. 1, 2.— М.: Мир, 1972—1973.
11. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1988.
12. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре.— М.: Наука, 1966.
13. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании.— М.: Сов. радио, 1966.
14. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли.— М.: Мир, 1968.
15. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и приложения.— М.: Прогресс, 1966.
16. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.— М.: Наука, 1977.
17. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация.— М.: Наука, 1981.
18. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников).— М.: Наука, 1981.
19. Еремин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.— М.: Наука, 1976.
20. Заславский Ю. Л. Сборник задач по линейному программированию.— М.: Наука, 1969.
21. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра.— М.: Наука, 1978.

22. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сепдов Бл. Х. Математический анализ.— М.: Наука, 1979.
23. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.— М.: Наука, 1974.
24. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию.— М.: Высш. шк., 1975.
25. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике.— М.: Мир, 1964.
26. Карманов В. Г. Математическое программирование.— М.: Наука, 1986.
27. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование.— М.: Высш. шк., 1980.
28. Лейхтвейс К. Выпуклые множества.— М.: Наука, 1985.
29. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия.— М.: Наука, 1973.
30. Моисеев Н. Н., Ивакилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации.— М.: Наука, 1978.
31. Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях.— М.: Высш. шк., 1986.
32. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.— М.: Мир, 1972.
33. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.— М.: Мир, 1988.
34. Оуэн Г. Теория игр.— М.: Мир, 1971.
35. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.— М.: Мир, 1985.
36. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию.— М.: Наука, 1983.
37. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи.— М.: Наука, 1980.
38. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.
39. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации.— М.: Наука, 1986.
40. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах.— М.: Наука, 1986.
41. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1.— М.: Наука, 1969.
42. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование.— М.: Мир, 1967.
43. Черников С. Н. Линейные неравенства.— М.: Наука, 1968.
44. Шикин Е. В. Линейные пространства и отображения.— М.: Изд-во МГУ, 1987.
45. Эльстер К.-Х., Рейнгаardt Р., Шойбле М., Донат Г. Введение в нелинейное программирование.— М.: Наука, 1985.
46. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование.— М.: Наука, 1969.
47. Линейные неравенства и смежные вопросы/Под ред. Г. У. Куна и А. У. Таккера.— М.: ИЛ, 1959.

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbf{R}$  — множество действительных чисел, числовая прямая.

$\mathbf{R}^n$  —  $n$ -мерное вещественное евклидово пространство.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  — стандартные обозначения элементов (точек, векторов) из  $\mathbf{R}^n$  при произвольном  $n$ ; для обозначения координат данного элемента используется тот же символ с индексом внизу; для обозначения различных элементов чаще всего применяется верхний индекс.

$(x, y)$ ,  $(x, y, z)$  — иногда используемые обозначения элементов из  $\mathbf{R}^2$  и  $\mathbf{R}^3$  соответственно.

$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$  — скалярное произведение элементов  $x$  и  $y$

из  $\mathbf{R}^n$ .

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  — норма элемента  $x \in \mathbf{R}^n$ .

$U_\varepsilon(x^*)$  — шар радиуса  $\varepsilon > 0$  с центром в точке  $x^* \in \mathbf{R}^n$ .

Для векторов  $x$  и  $y$  из  $\mathbf{R}^n$  пишем:

$x \geq y$ , если  $x_j \geq y_j$  при всех  $j = 1, \dots, n$ ;

$x > y$ , если  $x_j > y_j$  при всех  $j = 1, \dots, n$ ;

$x \geq y$ , если  $x \geq y$ , но  $x \neq y$ .

Вектор  $x$  называется *неотрицательным, положительным, полуположительным*, если  $x \geq 0$ ,  $x > 0$  и  $x \geq 0$  соответственно.

$\mathbf{R}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \geq 0\}$  — неотрицательный ортант в  $\mathbf{R}^n$ .

$A^T$  — матрица, транспонированная к матрице  $A$ .

$A^{-1}$  — матрица, обратная к квадратной матрице  $A$ .

$\det A$ ,  $|A|$  — определитель квадратной матрицы  $A$ .

$\text{rang } A$  — ранг матрицы  $A$ .

$E$  — единичная квадратная матрица (на диагонали стоят единицы, остальные элементы — нули).

Если даны матрица  $A = (a_{ij})$  размера  $m \times n$  и векторы  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $y \in \mathbf{R}^m$ , то:

$Ax$  — вектор из  $\mathbf{R}^m$  с координатами  $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ ;

$yA$  — вектор из  $\mathbf{R}^n$  с координатами  $(yA)_j = \sum_{i=1}^m y_i a_{ij}$ , т. е.

$yA = A^T y$ .

$\{x^k\} \subset X$  — последовательность точек  $x^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), принадлежащих множеству  $X$ .

$\overline{\lim}$ ,  $\underline{\lim}$  — символы верхнего и нижнего пределов числовой последовательности или функции.

$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$  — право- и левосторонние пределы функции  $f$  числового аргумента в точке  $a$ .

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Анализ данных 30  
Аффинно зависимые точки 189
- Базис вершины 146  
Базисная переменная 146
- Ведущий элемент 151  
Вектор полуположительный 78  
Вершина полиэдра 52  
— невырожденная 52  
Взвешенное среднее 48
- Гессиан функции 23  
Гиперплоскость 51  
— касательная 232  
— опорная 198  
— собственная 198  
— разделяющая 198  
Градиент 22  
Граница множества 175  
— относительная 175  
Грань множества 229  
— полиэдра 69  
— минимальная 73  
— невырожденная 70  
— собственная 69
- Двойственная переменная 96  
Двойственности соотношение 97  
Диффеоморфизм 32  
Доминируемая переменная 126
- Задача Архимеда 46  
— безусловной оптимизации 22  
— Герона 45  
— динамическая планирования  
производства 140  
— дробно-линейного програм-  
мирования 137  
— Евклида 45  
— конечномерная 9  
— кусочно-линейного програм-  
мирования 136
- Задача линейного программиро-  
вания (ЛП) 86  
— — — блочная 140  
— — — двойственная 95  
— — — допустимая 120  
— — — каноническая 87  
— — — общая 87  
— — — основная 87  
— — — прямая 95  
— — — разрешимая 120  
— — — стандартная 87  
— — — устойчивая 128  
— — — — по значению и по ре-  
шению 129, 132  
— — — — по направлению 133  
— на условный экстремум клас-  
сическая 35  
— о рационе 89  
— оптимального управления в  
дискретном времени 142  
— оптимизации 9  
— планирования производства  
88  
— регулярная 37  
— Снеллиуса 45  
— транспортная 90  
— экстремальная 10
- Заикливание симплекс-метода  
149  
Значение задачи 10
- Конус 174  
— возможных направлений 222  
— выпуклый 171  
— заостренный 220  
— крайних направляющих 231  
— многогранный 173  
— опорный 222  
— рецессивный 176
- Коэффициенты замещения 147  
Крайний посетитель множества  
229  
Критерий Сильвестра 11

Линейная комбинация аффинная 171  
— — выпуклая 171  
— — множеств 171  
— — неотрицательная 171  
Линейное многообразие 61  
Линейное программирование 51  
Линия уровня функции 12  
Луч 176  
— крайний 231

Маргинальное значение задачи ЛП 130

Матрица входных данных 31  
— кубическая симметрическая 28

— положительно определенная 11  
— Якоби 24

Метод исключения переменных 35

— искусственного базиса 152  
— наименьших квадратов 30

— полного перебора вершин 94  
Минор матрицы главный 11

— — — угловой 12  
Многогранник двухсмежностный 230

— выпуклый 173

Множества отделимые 199, 216  
— собственно отделимые 199, 216

— сильно отделимые 199, 216

Множество аффинное 61, 169  
— второе сопряженное 202

— выпуклое 170  
— — локально 235

— допустимое 9  
— звездное 235

— Лебега 18  
— многогранное 173

— относительно открытое 174  
— сопряженное 201

—  $H$ -выпуклое 188  
Множители Лагранжа 37

Наилучшее приближение в норме  $l_1$  30

— — равномерное (чебышевское) 30

Неравенство Адамара 50  
— Гельдера 49

— Коши — Буняковского 49  
— между взвешенными средними 49

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим 47

— — — — — квадратичным 48  
— Минковского 49

Нормаль к гиперплоскости 52  
— к поверхности 46

Оболочка аффинная 64, 172  
— выпуклая 172

— — замкнутая 188  
Ограничение активное 52

— двойственное 77  
— жесткое (нежесткое) 63

— закрепленное (свободное) 122  
Ограничения взаимодвойственные 125

Операция взятия оболочки 187  
Относительная внутренность

множества 174  
— граница множества 267

Отображение дифференцируемое 24

Оценки замещения 147

Поверхность гладкая 46  
Подмножество выступающее 231

— крайнее 227  
Подпространство, параллельное

аффинному множеству 61, 170

— рецессивное 195  
Полиэдр 52

— ограниченный 203  
— однородный 203

Полная тень множества 183  
Полупространство 52

— касательное 232  
— опорное 198

Полутень множества 183  
Поточечный супремум 17

Правила симплекс-метода 147, 148

Правило Блэнда 149  
— цепное 25

Принцип граничных решений Черникова 73

— — — — — для задач ЛП 122  
— Лагранжа 37

— максимума дискретный 143  
Проекция множества 182

— точки на множество 12

Размерность аффинного множества 62

— выпуклого множества 175  
— полиэдра 65

Разность множеств 171  
 Ребро полиэдра 70  
 Решение задачи глобальное 9  
 — — — строгое 10  
 — — — локальное 10  
 — — ЛП невырожденное 126  
  
 Связная компонента множества 190  
 Симплекс-метод 145  
 Симплекс-таблица 150  
 Симплекс  $m$ -мерный 189  
 — стандартный 69  
 Система неравенств неприводимо несовместная 76  
 — — и уравнений устойчивая 84  
 — — — — по правой части ограничений 85  
 Следствие системы неравенств 56  
 Соотношение двойственности 97  
 Соседние вершины полиэдра 71  
 Состояние управляемой системы 142  
 Среднее порядка  $p$  48  
 Сумма множеств 171  
 — — инверсная 183  
 — — частичная 183  
  
 Теорема Александра — Фана 75  
 — Бурбаки 235  
 — Вейерштрасса 10, 17  
 — Вилля 79  
 — Вороного — Карвера 78  
 — Гордана 79  
 — двойственности 97  
 — Дубовицкого — Милюткина 217  
 — Каратеодори 174, 189  
 — Кли 231  
 — Красносельского 235  
 — Кукушкина 22  
 — Люстерника 34  
 — Минковского о представлении выпуклого компакта 203  
 — — об отделимости 197  
 — Минковского — Вейля 203  
 — (лемма) Минковского — Фаркаша 55  
 — — о следствиях 56  
 — Моцкина о выпуклых множествах 235  
 — — о неравенствах 78  
 — о доминировании 126

Теорема о достаточном условии минимума второго порядка 23, 37  
 — — дополняющей нежесткости для системы линейных неравенств 77  
 — — — задачи ЛП 97  
 — — закрепленных и свободных ограничениях 125  
 — — касательных полупространствах 233  
 — — линейном минимаксе 137  
 — — маргинальных значениях задачи ЛП 130, 133  
 — — матричных играх основная 137  
 — — минимальной грани полиэдра 73  
 — — необходимом условии минимума второго порядка 23, 37  
 — — — — первого порядка 23, 36  
 — — — и достаточном условиях экстремума в задаче ЛП 93  
 — — неявной функции 24  
 — — регуляризации задач ЛП 130  
 — — соседних вершинах полиэдра 71  
 — — строгой дополняющей нежесткости для системы линейных неравенств 80  
 — — — — задачи ЛП 125  
 — об инвариантности решения задачи ЛП 134  
 — — очистке систем линейных неравенств 75  
 — — — задачи ЛП 122  
 — — устойчивости системы линейных неравенств 84  
 — — — задачи ЛП 128, 129, 132, 133, 134, 136  
 — Полтеровича — Спивака 183  
 — Радона 190  
 — Рокафеллара 216  
 — Страшевича 232  
 — Страшевича — Кли 233  
 — Таккера 79, 80  
 — Фенхеля 200  
 — Финслера 43  
 — Хана — Банаха 215  
 — — для полиэдров 215  
 — Хелли 190  
 — Хоффмана 83  
 — — для задачи ЛП 127

Теорема Штимке 79  
— Штимке — Фана 78  
Теория двойственности 94  
Точка выступающая 232  
— граничная 175  
— допустимая 9  
— крайняя 202  
— минимума 9  
— опорная 54  
— относительно внутренняя 174  
— — граничная 175  
— стационарная 23, 36  
— экстремума 10

Управление системой 142

Условие ортогональности 38

— регулярности 37

Условия дополняющей нежесткости для систем линейных неравенств 77

— — — — задач ЛП 97

Условия строгой дополняющей нежесткости для систем линейных неравенств 80  
— — — — задач ЛП 125

Функция бесконечно растущая (убывающая) 11

— возрастающая (неубывающая) 16

— Гамильтона 143

— квадратичная 11

— Кобба — Дугласа 31

— Лагранжа 35

— — регулярная 37

— полунепрерывная снизу (сверху) 16

— производственная 31

— целевая 9

Хаусдорфово расстояние 86

Элементарные операции в симплекс-методе 151

Станислав Александрович АШМАНОВ  
Александр Васильевич ТИМОХОВ

**ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ  
В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ**

*Учебное пособие*

Издание второе, стереотипное

Зав. редакцией  
физико-математической литературы *О. А. Митрофанова*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10  
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**  
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com  
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.  
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

**ГДЕ КУПИТЬ**

**ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:**

*Для того чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться  
в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

**по России и зарубежью**  
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13  
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93  
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967  
www.lanpbl.spb.ru/price.htm

**в Москве и в Московской области**  
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19  
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

**в Краснодаре и в Краснодарском крае**  
«ЛАНЬ-ЮГ». 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1  
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

**ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:**

*интернет-магазины:*

**Издательство «Лань»:** <http://www.lanbook.com>  
«Сова»: <http://www.symplex.ru>; «Ozon.ru»: <http://www.ozon.ru>  
«Библион»: <http://www.biblion.ru>

Подписано в печать 15.05.12.  
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 23,52. Тираж 1000 экз.

Заказ № \_\_\_\_\_

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных диапозитивов  
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».  
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.  
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru