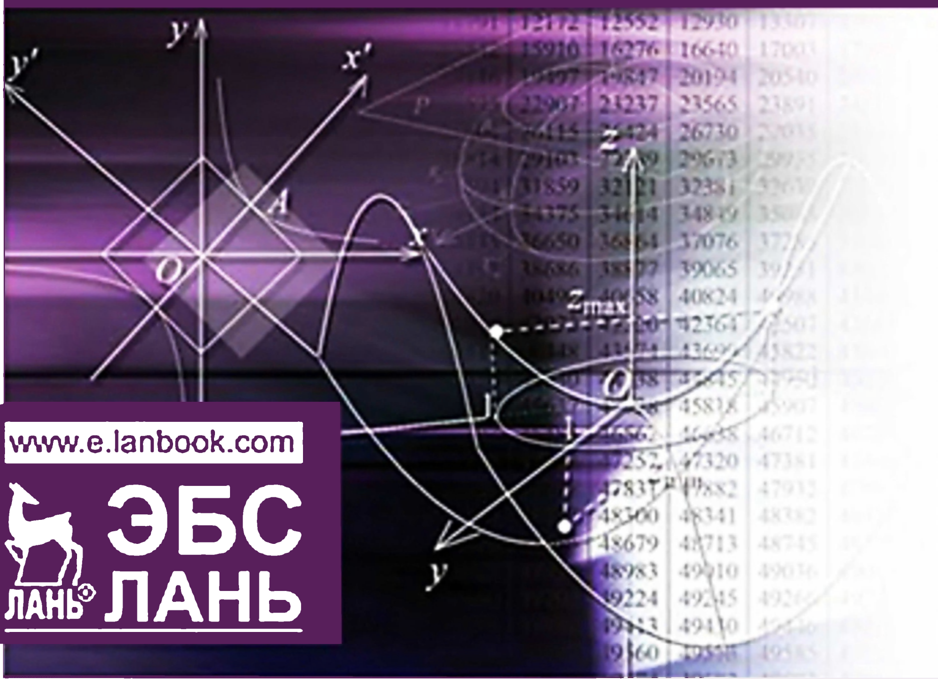
БАКАЛАВРИАТ И СПЕЦИАЛИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ И МЕНЕДЖЕРОВ

Н. И. Лобкова, Ю. Д. Максимов, Ю. А. Хватов



www.e.lanbook.com

ЭБС ЛАНЬ

Н. И. ЛОБКОВА,
Ю. Д. МАКСИМОВ,
Ю. А. ХВАТОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ И МЕНЕДЖЕРОВ

Учебное пособие

Под редакцией Ю. А. Хватова

ЛАНЬ®

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
МОСКВА
КРАСНОДАР
2018

ББК 22.1я73
Л 68

Лобкова Н. И., Максимов Ю. Д., Хватов Ю. А.

Л 68 Высшая математика для экономистов и менеджеров: Учебное пособие / Под ред. Ю. А. Хватова. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 520 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-3293-6

В пособии вводятся и разъясняются все базисные понятия и методы решения основных задач на примерах, как правило, задач, связанных с экономикой (управлением). Доказательства большей части теорем опущены. При этом основное внимание уделено разьяснению сути (смысла) определений, правил, теорем и их геометрической и экономической интерпретации.

Много внимания в пособии уделено изложению разделов «Теория вероятностей» и «Математическая статистика». Отдельная глава отведена знакомству с элементами теории массового обслуживания. По каждому разделу приводятся задачи, контрольные вопросы и тесты для оценки (самооценки) уровня сформированности математической компетенции учащегося.

Пособие предназначено для студентов бакалавриата и специалитета, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям, входящим в УГС: «Экономика и управление», «Сервис и туризм».

ББК 22.1я73

Рецензенты:

Е. А. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Петербургского государственного университета путей сообщения императора Александра I;
Д. А. ТАРХОВ — доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современных условиях требования к уровню подготовки по дисциплинам математического цикла в вузах экономического профиля существенно выросли.

Высшая школа должна обеспечить математическую подготовку (компетентность) на уровне, который позволяет использовать математические знания для решения различного рода прикладных, фундаментальных задач и с разработкой математических моделей, связанных с экономикой и с управлением (менеджментом).

При уменьшении числа часов, отводимых в учебных планах на изучение курса, необходимы новые подходы к отбору учебного материала, к увеличению обьёма самостоятельной работы с возможностью самоконтроля уровня усвоения полученных знаний.

Данное учебное пособие создано на основе серии опорных конспектов, изданных в Санкт-Петербургском политехническом университете в 2000 – 2015 годах и на материалах курсов лекций, читаемых авторами в СПбГПУ студентам направлений «Экономика» и «Менеджмент».

Учебное пособие содержит последовательное изложение разделов курса высшей математики для экономических направлений подготовки бакалавров.

В пособии вводятся и разъясняются все базисные понятия и методы решения основных задач, как правило, связанных с экономикой. Доказательства большей части теорем опущены. При этом основное внимание уделено разъяснению сути (смысла) определений, правил, теорем и их геометрической, физической и экономической интерпретации.

По каждому разделу приводятся задачи, контрольные вопросы и тесты для оценки (самооценки) уровня сформированности математической компетенции студентов – будущих экономистов (менеджеров). При этом часть задач имеет экономическое содержание. Разделы указаны в том порядке, который рекомендуется при изучении курса математики.

В пособии много внимания уделено (≈ 180 стр.) изложению разделов «Теория вероятностей» и «Математическая статистика». Это связано с тем, что указанные разделы являются базовыми, обеспечивающими приложения в задачах, связанных с экономикой и с управлением. Особенно велика роль статистики в решении задач управления производством и социальными группами людей, ибо без знания состояния управляемого объекта разумное управление этим объектом невозможно. Эти знания об объекте несут обработанные и осмысленные статистические данные.

Настоящий курс ориентирован на студентов, изучающих математику в объёме и на уровне, предназначенном для бакалавров экономических специальностей и направлений. Но содержание учебника несколько выходит за рамки программ для подготовки бакалавров экономических направлений в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта ФГОС-3+. Эти главы и параграфы помечены знаком * (но не всегда!). Такой подход связан с тем, что результативность современной системы образования не должна ограничиваться только объёмом приобретённых знаний, но должна также решать задачу формирования компетенций в области теории (знания) и компетенций как готовности и необходимости применять полученные знания (умения и навыки) для эффективного решения различных экономических и управленческих задач.

Учебное пособие может востребовано студентами старших курсов, магистрами, аспирантами для восстановления в памяти нужных понятий при изучении последующих разделов курса и других дисциплин, опирающихся на математику.

В пособие входят «Введение» и 11 разделов.

1. Основы линейной алгебры.
2. Аналитическая геометрия.
3. Введение в математический анализ.
4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.
5. Комплексные числа, многочлены, рациональные дроби.
6. Интегральное исчисление функций одной переменной.
7. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Двойные интегралы.
8. Дифференциальные уравнения.
9. Числовые и функциональные ряды.
10. Теория вероятностей.
11. Математическая статистика.

Нумерация формул, таблиц, рисунков в каждом параграфе двухпозиционная, отражает номер параграфа и порядковый номер по параграфу. Начало и конец доказательства, при выводе формулы или решения примера отмечаются знаками ►◄. Материал, необязательный для изучения помечен знаком *.

Разделы указаны в том порядке, который рекомендуется при изучении курса математики.

ВВЕДЕНИЕ К КУРСУ МАТЕМАТИКИ

1. Математика как наука, её предмет и метод. Определение математики как науки. Математика – это наука, исследующая пространственные формы, количественные отношения, аксиоматические структуры и вопросы доказательства путём построения абстрактных моделей реального мира.

Моделью реального объекта, процесса, явления называется описание его существенных свойств на каком-либо языке. *Математическая модель* – абстрактная модель, основанная на математических понятиях и математической символике, т. е. записанная на языке формул, функций, уравнений, неравенств, алгоритмов и т. д. Для решения своей основной задачи – построения математических моделей реального мира – математика использует *метод абстракции*, т. е. совершенно отвлекается от конкретных физических свойств явлений и предметов, исследует только сами количественные отношения, пространственные формы, теоретико-множественные структуры.

2. Роль математики в других науках. Математизация – характерная черта любой современной науки. В принципе область применения математических методов ничем не ограничена. Особенно велика роль математики в естествознании и технических науках. Математическая модель, в отличие от моделей в других науках, дающих лишь качественное описание явлений, позволяет получить количественный прогноз, т. е. описать явление более точно.

Функции математики:

1. Средство расчёта.
2. Универсальный язык науки.
3. Метод исследования.

3. Источники и критерии истинности математического знания. *Источником математического знания* является *практика*, т. е. математика строит свои абстрактные понятия на основе конкретных задач исследования природы, жизни, производства. Понятия длины, площади, объёма, производной, интеграла вошли в математику благодаря потребностям измерения, решения задач о скорости, о пути, о работе и т. д.

Критерием истинности всякой науки также является *практика*. Математика не является исключением. Математические знания, созданные для решения практических задач, практикой и проверяются.

4. Единство математики. Элементарная, высшая, вычислительная, чистая, прикладная, конструктивная и другие математики являются лишь ветвями, частями единой науки математики. Под элементарной математикой понимается математика, изучаемая в средней школе. Вся остальная математика условно называется высшей. Есть общие черты у всех ветвей математики, обеспечивающие единство математики:

1. Дедуктивный (доказательный) абстрактный метод построения знаний.
2. Общность математических понятий и символики. Наметившаяся тенденция аксиоматизации всех математических знаний.
3. Все части математики охватываются одним и тем же определением ма-

тематики.

5. Математика как дисциплина высшего технического учебного заведения. Математика как дисциплина отличается от математики как науки прежде всего наличием технологии преподавания, к которой относятся методика преподавания, учебно-методические пособия, вычислительные лаборатории, учебные планы и программы.

Основной целью изучения математики являтся формирование у учащегося компетенций (знаний) в области теории и компетенций как готовности и умենич применять полученные знания (математические методы) для эффективного решения различных экономических и управленческих задач.

Математика, как и всякая дисциплина, имеет свой базис. Его составляют *базисные понятия* (число, уравнение, множество, производная, интеграл и т. д.), *основные задачи*, возникающие на основе базисных понятий, и *базисные методы* решения основных задач.

6. Краткие сведения о развитии математики. Начало зарождения математики невозможно отметить. Счёт предметов появился вместе с человеком. *Элементарная геометрия* сложилась в YI – III веках до нашей эры в античной Греции. Зарождение *элементарной алгебры* как науки относится к началу IX века. *Тригонометрия*, как учение о тригонометрических функциях и их свойствах, сложилась в XYII – XYIII веках, хотя отдельные тригонометрические знания в связи с астрономическими наблюдениями имелись в древние времена в античной Греции, Вавилоне, Египте.

Аналитическая геометрия в основном была разработана французскими математиками Декартом и Ферма в XYII еке. Основоположниками *дифференциального и интегрального исчисления* являются английский математик Ньютон (1642 – 1727) и немецкий математик Лейбниц (1646 – 1716). Период *математики переменных величин* можно очертить рамками XVII – середины XIX века. Периодом *современной математики* условно считается промежуток с середины XIX века по настоящее время.

7. Развитие математики в России. Начало математических исследований в России связано с деятельностью Петербургской академии наук, Петербургского университета (1724), а также с именем Л. Эйлера (1707 – 1783), внёсшего огромный вклад в развитие мировой математики.

Большое значение для науки и преподавания математики имела деятельность отечественных учёных Н. И. Лобачевского (1799 – 1856), П. Л. Чебышёва (1821 – 1894), А. М. Ляпунова (1857 – 1918), А. Н. Колмогорова (1903 – 1987) и других.

Современные математики в России работают практически во всех областях этой науки.

Раздел 1. **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

Краткая характеристика раздела

1. Темы раздела. Матрицы. Определители 2-го, 3-го и n-го порядков. Системы линейных алгебраических уравнений.

2. Базисные понятия. Определитель. Матрица. Обратная матрица. Ранг матрицы. Система линейных алгебраических уравнений, ее совместность и методы решения. Модель межотраслевого баланса.

3. Основные задачи. Вычисление определителей 2-го, 3-го и высших порядков. Арифметические операции с матрицами. Вычисление обратной матрицы. Вычисление рангов матриц. Решение произвольных системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, Решение квадратных систем методом Крамера. Анализ совместности систем.

Глава 1. **Определители и системы линейных уравнений**

§ 1. Системы линейных уравнений. Основные понятия. Метод Гаусса

1. Основные понятия. Равносильные системы.

Определение 1.1. Система линейных алгебраических уравнений (или система линейных уравнений) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.1)$$

при этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *неизвестными*, a_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots,$ n– *коэффициентами при неизвестных* или *коэффициентами системы*, причем индекс i означает номер уравнения в системе (1.1), а индекс k – номер неизвестного. Величины $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются *свободными членами*. Иногда систему (1.1) будем называть *линейной системой*.

Замечание 1.1. Если система (1.1) содержит не более четырёх неизвестных, то они часто обозначаются буквами x, y, z, t без индексов.

Если $m = n$, т. е. число уравнений равно числу неизвестных, то систему (1.1) называют *квадратной*. При $b_1 = b_2 = \ldots = b_m$ система (1.1) называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Например, $\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ – неоднородная квадратная линейная система из двух уравнений с двумя неизвестными x и y.

Определение 1.2. *Решением системы* (1.1) называется такой упорядоченный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, который при подстановке в систему (1.1) вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ превращает её в систему верных тождеств:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n=b_1, \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n=b_2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\ldots+a_{mn}\alpha_n=b_m. \end{cases} \tag{1.2}$$

Решение системы (1.1) принято обозначать следующим образом: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ или $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$.

Определение 1.3. Система (1.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* в противном случае. Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой* в противном случае.

Пример 1.1. Система $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ имеет единственное решение $x=1$, $y = 1$, поэтому является совместной определённой системой.

Пример 1.2. Система $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ -6x+8y=2 \end{cases}$ имеет более одного решения, например, её решениями являются: $x = 1, y = 1$; $x = 2, y = 7/4$; $x = 5, y = 4$. Эта система является совместной неопределённой системой.

Пример 1.3. Система $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ -6x+8y=7 \end{cases}$ не имеет решений, т. е. является несовместной.

Решить систему (1.1) – это значит найти все её решения или доказать, что она не имеет решений. Для этого систему преобразуют в более простую, решения которой легко найти или доказать её несовместность. При этом центральным понятием является равносильность двух систем.

Определение 1.4. Две линейные системы с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *равносильными*, если они обе несовместны или они совместны и каждое решение одной системы является решением другой и наоборот.

Пример 1.4. Системы $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0 \end{cases}$ являются равносильными, так как $x = 1, y = 1$ является решением и той и другой системы, а других решений они не имеют.

Пример 1.5. Системы $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 3x-4y=7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=2, \\ x+y=0 \end{cases}$ также являются равносильными, поскольку обе они несовместны.

Число уравнений в равносильных совместных системах может быть различным, но они должны содержать одни и те же неизвестные.

2. Теорема об элементарных преобразованиях в системе линейных уравнений.

Определение 1.5. *Элементарными преобразованиями* над системой линейных уравнений вида (1.1) называются:

1) перестановка местами двух любых её уравнений;

2) умножение всех членов любого уравнения системы на любое отличное от нуля число;

3) почленное сложение любых двух её уравнений.

На практике обычно объединяют последние два элементарных преобразования в одно и рассматривают два основных типа:

1-й *тип* – перестановка местами уравнений системы;

2-й *тип* – почленное сложение двух любых её уравнений, все члены одного из которых предварительно умножены на одно и то же число.

Теорема 1.1. Конечное число последовательно выполненных элементарных преобразований первого и второго типов приводит систему (1.1) к равносильной ей системе.

Пример 1.6. Показать, что при помощи элементарных преобразований можно из системы $\begin{cases} 3x-4y=-1, \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ получить систему $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0. \end{cases}$

►Проведём следующие элементарные преобразования.

1. Умножим первое уравнение исходной системы на 3, а второе – на 7, получим равносильную систему $\begin{cases} 9x-12y=-3, \\ 14x+35y=49. \end{cases}$

2. К первому уравнению прибавим второе: $\begin{cases} 23x+23y=46, \\ 14x+35y=49. \end{cases}$

3. Первое уравнение умножим на 1/23, а второе – на 2/7: $\begin{cases} x+y=2, \\ 4x+10y=14. \end{cases}$

4. Второе уравнение сложим с первым, умноженным на (–7): $\begin{cases} x+y=2, \\ -3x+3y=0. \end{cases}$

5. Второе уравнение умножим на (–1/3): $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=0. \end{cases}$ ◄

3. Расширенная матрица системы. Ступенчатая матрица. Метод Гаусса. Коэффициенты a_{ik} системы (1.1) удобно объединить в прямоугольную таблицу, называемую *матрицей системы*. Для нее принято обозначение

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A содержит m горизонтальных рядов, называемых *строками*, и n вертикальных рядов, называемых *столбцами*, числа a_{ik}, $i=1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$, называются её *элементами*. Таким образом, первый индекс i элемента a_{ik} указывает номер строки (номер уравнения системы (1.1)), а второй индекс k – номер столбца (или номер неизвестного x_k, коэффициентом при котором является a_{ik} в i-м уравнении системы (1.1)).

Если $m = n$, то матрица A называется *квадратной* матрицей n-го (или m-го) порядка. У квадратной матрицы равно число строк и столбцов. Квадратная матрица называется *единичной*, если её элементы $a_{ii} = 1$, $I = 1, 2, \ldots, n$, а все остальные элементы равны нулю.

Так, матрица $A_3=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица 3-го порядка, а матрица

$E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – единичная матрица 2-го порядка. Нижние индексы в обозначениях квадратных матриц соответствуют их порядку.

Если к матрице A добавить $(n + 1)$ – й столбец из свободных членов, то получим так называемую расширенную матрицу A^* системы (1.1), содержащую всю информацию о системе: $A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n\end{array}\right)$.

Для системы из примера 1.1 матрицей системы является $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, а расширенной матрицей этой системы является матрица $A^*=\left(\begin{array}{cc|c}3 & -4 & -1\\ 2 & 5 & 7\end{array}\right)$.

На практике элементарным преобразованиям подвергают не саму систему, а её расширенную матрицу. Преобразованиям двух типов над системой (1.1) соответствуют два типа элементарных преобразований над строками матрицы A^*:

1-й тип – перестановка местами двух любых её строк;

2-й тип – сложение соответствующих элементов двух любых её строк, все элементы одной из которых предварительно умножены на одно и то же число.

Целью элементарных преобразований является приведение расширенной матрицы A^* системы (1.1) к так называемой ступенчатой форме.

Определение 1.6. Матрица называется *ступенчатой*, если для неё выполняются следующие условия:

1. если какая-либо строка данной матрицы состоит из нулей, то и все последующие строки также состоят из нулей;

2. если a_{ik} – первый ненулевой элемент i –й строки, а $a_{i+1,m}$ – первый ненулевой элемент $(i+1)$ – й строки, то $m > k$.

Так, например, матрица $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ – ступенчатая.

Матрица из одной строки считается ступенчатой по определению.

Теорема 1.2. Любую матрицу A конечным числом элементарных преобразований первого и второго типов можно преобразовать в ступенчатую матрицу.

Пример 1.7. Привести к ступенчатому виду матрицу $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 8\\ -1 & 3 & 0 & -5\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

►Выполним элементарные преобразования над матрицей A^*:

1) к элементам 2-й строки прибавим элементы 1-й строки и из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, в результате A^* преобразуется к виду:

$A^*\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 8\\ 0 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -4\end{array}\right)$;

2) переставим 2-ю и 3-ю строку: $A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$;

3) из последней строки полученной матрицы вычтем 2-ю строку, умноженную на 3:

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right). \blacktriangleleft$$

На приведении расширенной матрицы A^* системы (1.1) к ступенчатой матрице A_1^* основан *метод Гаусса*, или метод последовательного исключения неизвестных. Система линейных уравнений с расширенной ступенчатой матрицей A_1^* называется *ступенчатой*, по теореме 1.1 она будет равносильна системе (1.1). Приведение системы (1.1) к ступенчатой форме называется *прямым ходом* метода Гаусса. Решение полученной ступенчатой системы называется *обратным ходом* метода Гаусса. Он может быть выполнен как в форме последовательного определения неизвестных, начиная с последнего уравнения ступенчатой системы, так и в форме преобразования матрицы A_1^* к ступенчатой матрице B^* специального вида.

Пример 1.8. Решить методом Гаусса систему уравнений $\begin{cases} x+2z=8, \\ -x+3y=-5, \\ x+y+z=4. \end{cases}$

► $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$ – расширенная матрица системы.

Прямой ход метода Гаусса. В примере 1.7 матрица A^* элементарными преобразованиями приведена к ступенчатой матрице

$$A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right).$$

Теперь матрице A_1^* опоставим систему, для которой она будет расширенной матрицей: $\begin{cases} x+2z=8, \\ y-z=-4, \\ 5z=15. \end{cases}$

Обратный ход метода Гаусса.

1 – й способ. Имеем

$z = 3$; $y = -4 + z = -4 + 3 = -1$; $x = 8 - 2z = 8 - 6 = 2$.

2 – й способ.

Умножим последнюю строку матрицы A_1^* на 1/5, сложим со 2-й строкой, а к 1-й строке прибавим последнюю, умноженную на (–2), с целью получить нули в 3-м столбце:

$$A_1^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = B^*.$$

Напишем систему с расширенной матрицей B^*: $\begin{cases} x=2, \\ y=-1, \\ z=3. \end{cases}$

Ответ: система совместная и определенная, она имеет единственное решение $x=2,\ y=-1,\ z=3$.◄

Пример 1.9. Завод выпускает изделия трех видов: A, B, C. Для их изготовления требуются сырье трех типов: сталь алюмний и медь. Нормы расхода этих металлов на каждое изделие и допустимый объем расхода сырья на один день заданы таблицей.

Изделие	Нормы расхода сырья на одно изделие (кг)			Объём ресурса (кг/день)
	сталь	алюминий	медь	
A	2	4	4	100
B	3,5	3	3,5	102,5
C	1.5	4	4,5	102,5

Найти ежедневный объем выпуска каждого из изделий.

►Пусть ежедневно фабрика выпускает x_1 изделий вида A, x_2 изделий вида B, x_3 изделий вида C. В соответствии с расходом сырья каждого вида имеем систему: $\begin{cases} 2x_1+4x_2+4x_3=100, \\ 3.5x_1+3x_2+3.5x_3=102.5, \\ 1.5x_1+4x_2+4.5x_3=10.5. \end{cases}$

Решая систему, находим (10; 5; 15), т. е. завод выпускает в день 10 изделий вида A, 5 изделий вида B и 15 изделий вида C.◄

§ 2. Определители второго и третьего порядков

1. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Понятие определителя 2-го порядка. Метод Гаусса не даёт явных формул, выражающих решение системы линейных уравнений через элементы её расширенной матрицы. Проблема отыскания таких формул приводит к понятию определителя. Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

где x, y – неизвестные, а a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2– известные величины.

Если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то система (2.1) имеет единственное решение, выражаемое формулами:

$$\begin{cases} x_0=(c_1b_2-c_2b_1)/(a_1b_2-a_2b_1), \\ y_0=(a_1c_2-a_2c_1)/(a_1b_2-a_2b_1). \end{cases} \tag{2.2}$$

Это утверждение называется *теоремой Крамера* (1704 – 1752) для системы двух уравнений с двумя неизвестными. Далее эта теорема будет сформулирована в общем виде для системы из n линейных уравнений с n неизвестными.

При $a_1b_2-a_2b_1=0$ система (2.1) может быть совместной и неопределённой (при условии $c_1b_2-c_2b_1=a_1c_2-a_2c_1=0$) или несовместной (при условии $c_1b_2-c_2b_1\neq 0$ или $a_1c_2-a_2c_1\neq 0$).

Очевидно, что при решении системы (2.1) особую роль играют разности $a_1b_2-a_2b_1$, $c_1b_2-c_2b_1$, $a_1c_2-a_2c_1$ из элементов расширенной матрицы этой системы. Эти разности называются определителями 2-го порядка.

Определение 2.1. Пусть дана квадратная матрица 2-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Определителем 2-го порядка, соответствующим матрице A (или определителем A), называется число $a_1b_2-a_2b_1$, которое принято обозначать одним из символов: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\det A$, $|A|$, Δ. Итак, по определению

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1. \qquad (2.3)$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются *элементами* определителя; a_1, b_2 образуют *главную диагональ* определителя, а b_1, a_2 – *побочную диагональ*, следовательно, определитель 2-го порядка равен разности произведений его элементов, находящихся на главной и побочной диагоналях.

Пример 2.1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

► $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot(-1)-4\cdot 2=-11.$ ◄

Используя определение 2.1, формулы (2.2) можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_0=\Delta_x/\Delta, \\ y_0=\Delta_y/\Delta, \end{cases} \qquad (2.3а)$$

где Δ – определитель матрицы A системы (2.1), Δ_x, Δ_y определители матриц, полученных путем замены первого и второго столбца матрицы A соответственно на столбец свободных членов.

Пример 2.2. С помощью теоремы Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+4y=7, \\ 2x-y=1. \end{cases}$$

► $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ – матрица системы, $B=\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-11, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-11, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-11.$$

Теперь по формулам (2.3а) находим решение системы: $x=1$, $y=1$.◄

2. Свойства определителей 2-го порядка.

Свойство 1. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

Свойство 2. Определитель, в котором все элементы одной из строк являются суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей. Так,

$$\begin{vmatrix} a_1'+a_1'' & b_1'+b_1'' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1'' & b_1'' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Общий множитель элементов какой-либо строки определителя можно выносить за знак определителя. Например,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 4. При замене строк столбцами определитель не изменяется:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 2.1. Операция замены строк столбцами называется *транспонированием*. Благодаря свойству 4 все свойства определителя, справедливые для его строк, будут справедливы и для его столбцов.

Свойство 5. Определитель единичной матрицы 2-го порядка равен 1.

Свойство 6. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак, оставаясь неизменным по абсолютной величине. Так,

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 7. Определитель не изменяется при элементарных преобразованиях 2-го типа над его строками (столбцами). Например,

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda a_2 & b_1+\lambda b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 2.2. Все свойства определителей 2-го порядка доказываются с помощью определения 2.1. Но не все они являются независимыми. Так, свойства 6 – 7 следуют из свойств 1 – 5. Первые пять свойств далее будем называть основными.

3. Определитель 3-го порядка и его свойства. К понятию определителя 3-го порядка приводит процесс отыскания формул, выражающих решение системы из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными через её коэффициенты и свободные члены.

Определение 2.2. Пусть дана квадратная матрица 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Определителем 3-го порядка, соответствующим матрице A (или определителем A), называется число

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

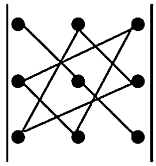
которое обозначается одним из следующих символов:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\det A, |\grave{A}|, \Delta_3, \Delta$. По определению $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{2.5}$$

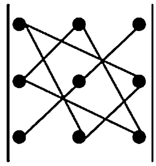
Элементы матрицы A из (2.4) называются также *элементами* $\det A$. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют *главную диагональ* этого определителя, а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} его *побочную диагональ*.

Правило Саррюса. Определитель 3-го порядка равен сумме произведений его элементов, находящихся на главной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали, минус сумма произведений элементов, находящихся на побочной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали (рис. 2.1а, б).



+

Рис. 2.1а



−

Рис. 2.1б

Пример 2.3. Вычислить по правилу Саррюса определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

$$\blacktriangleright \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-1) + 4\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot 5 - 3\cdot 0\cdot 4 -$$

$$-(-1)\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot 5 = 0 + 16 - 15 - 0 - 2 - 10 = -11. \blacktriangleleft$$

Сгруппировав слагаемые в правой части (2.5), это равенство, с учётом (2.3), можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \qquad (2.6)$$

Для исследования свойств определителя 3-го порядка введём новые понятия минора и алгебраического дополнения элемента матрицы A.

Определение 2.3. *Минором* M_{ik} (дополнительным минором) элемента a_{ik} квадратной матрицы 3-го порядка из (2.4) называется определитель матрицы 2-го порядка, полученной из матрицы (2.4) путем вычёркивания её i-й строки и k-го столбца, на пересечении которых находится a_{ik}.

Например, $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Используя три последних равенства, (2.6) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}. \qquad (2.7)$$

Определение 2.4. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} матрицы A называется число

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}. \qquad (2.8)$$

Так, $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$, $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21}$, $A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = M_{31}$.

Пример 2.4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найти A_{32} и M_{23}.

$\blacktriangleright$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$ (определение 2.3), а в силу (2.8) и определения 2.3,

$A_{32} = (-1)^{2+3}M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(4+3) = -7. \blacktriangleleft$

Заменяя в (2.7) миноры на алгебраические дополнения, в соответствии с определением 2.4 получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}. \qquad (2.9)$$

Каждое из равенств (2.6), (2.7), (2.9) называется разложением $\det A$ по элементам его первого столбца.

Теорема 2.1 (*теорема о разложении определителя по элементам какой-либо его строки или столбца*). Определитель квадратной матрицы A третьего порядка равен сумме произведений элементов какой-либо его строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Пример 2.5. Используя разложение определителя по строке или столбцу, вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

► Выберем строку или столбец, где есть нули. Разложим данный определитель, например, по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$= -2(1-8) + 0 - 3(4+3) = -7.$◄

Свойства определителей 3-го порядка

Свойство 1. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Свойство 2. Определитель, все элементы которого одной из строк (столбцов) есть суммы двух слагаемых, равен сумме двух определителей,

например, $\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Свойство 3. Общий множитель элементов какой-либо строки определителя можно выносить за знак определителя.

Свойство 4. При транспонировании квадратной матрицы 3-го порядка её определитель остается неизменным.

Свойство 5. Определитель единичной матрицы 3-го порядка равен 1.

Свойство 6. При перестановке местами двух любых строк или двух любых столбцов определителя его величина меняет знак.

Свойство 7. Определитель не изменяется при элементарных преобразованиях второго типа над его строками (столбцами).

Свойство 8. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Свойство 8 также называется *теоремой аннулирования*.

Применение свойств существенно упрощает вычисление определителя.

Пример 2.6. Используя свойства определителя, вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

► Выполним последовательно следующие преобразования.

1) Ко 2-й строке прибавим 1- ю, а из 3- ей вычтем 1-ю строку, умноженную

на 4, определитель при этом не меняется:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -5 & 3\\ 0 & -10 & 5\\ 0 & 26 & -13\end{vmatrix}.$$

2) Из 2-й строки вынесем общий множитель (–5), а из 3-й – множитель 13: $\Delta=-65\cdot\begin{vmatrix}1 & -5 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=0$, ибо имеем определитель с одинаковыми строками.◄

§ 3. Определители высших порядков

1. Понятие определителя *n*-го порядка. Обобщим рассуждения предыдущего параграфа на случай произвольного натурального n. Определители 2-го и 3-го порядков введены как числовые функции, ставящие в соответствие некоторое число квадратным матрицам 2-го и 3-го порядков. Эти функции обладают пятью основными свойствами (св. 1 – 5 из § 2, п. 2°, 3°), из них следуют свойства 6, 7 (см. § 2, п. 2°, 3°).

Рассуждая индуктивно, предположим, что введено понятие определителя для квадратной матрицы k-го порядка, $k \le n-1$, как функции, ставящей в соответствие этой матрице некоторое вещественное число и обладающей вышеупомянутыми пятью основными свойствами (а также свойствами 6, 7, следующими из них). Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Если из матрицы (3.1) удалить элементы i-й строки и j-го столбца, j, i= 1, 2,…, n, то получим квадратную матрицу (n − 1) -го порядка, существование определителя у которой предположено выше. По аналогии с определением 2.3 назовем этот определитель *минором* (дополнительным минором) элемента a_{ij} матрицы A, находящегося на пересечении i-й строки и j-го столбца. Минор элемента a_{ij}. будем обозначать M_{ij}, а произведение $(-1)^{i+k}M_{ij}$ будем называть алгебраическим дополнением элемента a_{ik} и обозначать A_{ij}.

Определение 3.1. *Определителем n-го порядка*, соответствующим матрице A из (3.1), называется число, равное $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}$ и обозначаемое одним из символов: $\det A, \Delta, \Delta_n, \begin{vmatrix}a_{11}\dots a_{1n}\\ \dots\dots\dots\\ a_{1n}\dots a_{nn}\end{vmatrix}$. По определению

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}. \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. При $n=3$ формула (3.2) совпадает с равенством (2.7) для определителя 3-го порядка, а при $n=2$ из (3.2) после некоторых преобразований можно получить равенство (2.3) для определителя 2-го порядка. Итак, формула (3.2) (и, следовательно, определение 3.1) обобщает на случай произвольного натурального n закономерности, вытекающие из способа построения определителей 2-го и 3-го порядков.

Свойства определителя n-го порядка аналогичны свойствам определителей 2-го и 3-го порядков из § 2, п. 2°, 3°.

Для определителя n-го порядка справедливы также теоремы, аналогичные теореме 2.1 и свойству 8 для определителя 3-го порядка (§ 2, п. 3).

Теорема 3.1 *(теорема о разложении определителя n-го порядка по элементам какого-либо столбца или строки).* Определитель матрицы A из (3.1) равен сумме произведений элементов его любого столбца (или строки) на их алгебраические дополнения.

Теорема 3.2 *(теорема аннулирования).* Сумма произведений элементов какого-либо столбца (или строки) матрицы A из (3.1) на алгебраические дополнения к элементам другого столбца (или строки) равна нулю.

2. Примеры вычисления определителей *n*-го порядка.

Пример 3.1. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

►Вынесем последовательно из 3- ей строки общий множитель 2 и из последнего столбца – общий множитель 3, по свойству 3 имеем

$$\Delta=2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь теоремой 3.1, разложим полученный определитель по элементам последней строки:

$$\Delta = 6\left(3\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. +1\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\right) = -18\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислив определители 3-го порядка, например, по правилу Саррюса, в результате получим $\Delta = -18(3 + 6 - 4) + 6(-3 + 4 + 4 + 6) = -24$. ◄

Пример 3.2. Вычислить определитель 4-го порядка от треугольной матрицы

(треугольный определитель) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix}.$

►Разложим определитель по элементам 1-го столбца (теорема 3.1):

$$\Delta = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -30 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель также разложим по элементам 1-го столбца (теорема 2.1) и вычислим полученный определитель 2-го порядка:

$$\Delta = 1\cdot 5\begin{vmatrix} -6 & 12 \\ 0 & -30 \end{vmatrix} 1\cdot 5\cdot(-6)\cdot(-30).$$ ◄

Показанное на примере свойство треугольного определителя 4-го порядка можно доказать [13] для определителя n-го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

В примере 3.2 рассмотрен треугольный определитель. Как было показано, он равен произведению элементов, находящихся на главной диагонали. При вычислении определителей высших порядков удобно с помощью свойств определителя привести его к определителю от треугольной матрицы.

Пример 3.3. Вычислить определитель из примера 3.1, приведя его к определителю от треугольной матрицы.

►Вычтем из второй строки определителя первую строку, к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на 2, а из последней строки вычтем первую, умноженную на 3. Определитель при этом не изменится,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \end{vmatrix}.$$

Из 3-й строки вынесем общий множитель 2, а из 4-й строки – вынесем множитель 3, после чего переставим местами 2-ю и 3-ю строки, при этом определитель изменит знак:

$$\Delta = -6\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Из последней строки вычтем 2-ю, а из 3-й строки вычтем 2-ю строку, умноженную на 3, после этого вынесем из последней строки общий множитель (-4) и переставим две последние строки, получим

$$\Delta = -24\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -21 \end{vmatrix}.$$

Чтобы получить определитель от треугольной матрицы, осталось к последней строке прибавить третью, умноженную на 11:

$$\Delta = -24\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -24. ◄$$

Глава 2. **Матрицы и действия с ними**

§ 1. Линейные операции с матрицами и их свойства

В главе 1 было введено понятие числовой матрицы A как прямоугольной таблицы чисел (см. гл.1, § 1, п. 3°). Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

содержит m строк и n столбцов. Говорят, что она имеет *размер* $m \times n$, для неё принято также обозначение $A_{m \times n}$. Элементы матрицы A обозначают малыми латинскими буквами с двумя индексами, первый из которых указывает номер строки, в которой расположен элемент, а второй – номер столбца. Например, элемент a_{ij} находится в i-й строке и в j-м столбце матрицы A.

Замечание 1.1. С помощью матриц удобно записывать различные наборы данных. Так, распределение населения по возрасту по трем регионам России приведено в виде таблицы (в % от общей численности населения в регионе).

Регион	Возраст ≤ 25 лет	25< возраст ≤ 60	Возраст > 60
A	20	40	30
B	35	30	35
C	15	40	45

Эта таблица может быть записана в компактной форме в виде матрицы распределения населения по возрасту:

$$A = A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 30 \\ 35 & 30 & 35 \\ 15 & 40 & 45 \end{pmatrix}.$$

В этой записи, например, матричный элемент a_{13} показывает, каков процент пенсионеров в регионе А, а матричный элемент a_{23} – в регионе В.

Определение 1.1. Две матрицы A и B называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и их соответствующие элементы равны, т. е.

$$A_{m\times n} = B_{k\times l} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k, \\ n = l, \\ a_{ij} = b_{ij}, \ i = 1,2,...,m, \ j = 1,2,...,n. \end{cases}$$

При $m = n$ матрица (1.1) называется *квадратной*. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы равны нулю, кроме стоящих на главной диагонали (т. е. кроме элементов a_{ii}, $i = 1,2,..., n$). *Единичные* матрицы – частный случай диагональных матриц, в них все элементы, находящиеся на главной диагонали, равны 1. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей* или *нуль-матрицей*.

Пример 1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ -5 & 0 \\ \pi & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -5 & \pi \\ \sqrt{7} & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

а) Указать размер каждой матрицы; б) какие матрицы являются квадратными, диагональными?

►а) Размеры матриц: A – 3×3, B – 3×2, C – 2×2, D – 2×3; б) квадратными являются матрицы A и C, а диагональной – только матрица A. ◄

Определение 1.2. *Суммой* двух матриц A и B одинакового размера $m\times n$ называется матрица C того же размера, элементы которой суть суммы соответствующих элементов матриц слагаемых, т. е.

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n.$$

Принято обозначение: $C = A + B$.

Таким образом, если $A=\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{m1} \cdots b_{mn} \end{pmatrix}$, то

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти их сумму.

► $A+B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+1 & 2+2 & 3+3 & -2+4 \\ 3+4 & -3+3 & 2+2 & 0+1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. ◄

Определение 1.3. *Произведением* матрицы A размера $m\times n$ на вещественное число λ называется матрица того же размера, обозначаемая λA, её элементы есть произведения соответствующих элементов матрицы A на это число λ. Таким образом, $\lambda A = \lambda\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} \cdots \lambda a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda a_{m1} \cdots \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$.

Пример 1.3. Дана матрица A из примера 1.2. Найти $3A$.

$$►\ 3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & -6 \\ 9 & -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}. ◄$$

Определение 1.4. Операции сложения матриц и умножения матрицы на вещественное число называются *линейными операциями* с матрицами.

Свойства линейных операций с матрицами

1. $A+B=B+A$ – коммутативность (переместительный закон) сложения.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ – ассоциативность (сочетательный закон) сложения.
3. Для любой матрицы A существует единственная матрица, равная нуль-матрице O, такая что $A+O=A$.
4. Для любой матрицы A существует единственная матрица $(–A)$, называемая *противоположной*, такая что $A–A) = O$, где O – нуль-матрица.
5. $1\cdot A = A$.
6. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
7. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
8. $\lambda(A+B)=\lambda A+ \lambda B$.

Замечание 1.2. Во всех перечисленных выше свойствах λ, μ – произвольные вещественные числа, а A, B, C, O – такие матрицы, для которых осуществимы указанные в этих свойствах операции. При этом все перечисленные выше равенства понимаются в том смысле, что если определена правая часть равенства, то определена и левая, и наоборот, при этом матрицы в левой и правой частях равенств равны между собой.

Замечание 1.3. Матрица $(-A)$ из свойства 4 равна $(-1)\,A$.

Пример 1.4. Для матрицы A из примера 1.2 найти противоположную, а также проверить, что $2A + 3A = 5A$.

$$\blacktriangleright -A=(-1)A=(-1)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 2\\ -3 & 3 & -2 & 0\end{pmatrix},$$

$$2A+3A=2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6 & -4\\ 6 & -6 & 4 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9 & -6\\ 9 & -9 & 6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 10 & 15 & -10\\ 15 & -15 & 10 & 0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}=5A.\blacktriangleleft$$

§ 2. Операция умножения матриц и её свойства

Для прямоугольных матриц A и B произведение существует, если длины строк первого сомножителя A равны длинам столбцов второго сомножителя B, т. е. если равны числа столбцов матрицы A и строк матрицы B.

Определение 2.1. *Произведением* матрицы A размера $m\times k$ на матрицу B размера $k\times n$ называется матрица C размера $m\times n$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-й строке и в j-м столбце, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{\mu=1}^{k}a_{i\mu}b_{\mu j}.$$

Принято обозначение $C = AB$.

Рассмотрим частный случай произведения матриц. Пусть даны матрица-строка $A_{1\times n}=\begin{pmatrix}a_1\ldots a_n\end{pmatrix}$ и матрица-столбец $B_{n\times 1}=\begin{pmatrix}b_1\\ \cdots\\ b_n\end{pmatrix}$. Матрица $C=AB$ имеет размер 1×1, причем её элемент $c_{11}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$, или

$$\begin{pmatrix}a_1\ldots a_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \cdots\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1+\ldots+a_nb_n\end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right).$$

Пример 2.1. Найти произведение матрицы-строки $A=(\sqrt{2}\ \ 0\ \ -3)$ на матрицу-столбец $B=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \pi & 1\end{pmatrix}^T$.

$$\blacktriangleright AB=(\sqrt{2}\ \ 0\ \ -3)\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \pi\\ 1\end{pmatrix}=(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+0\cdot\pi+(-3)\cdot 1)=(-1).\blacktriangleleft$$

Правило для вычисления произведения матриц схематично проиллюстрировано на рис. 2.1.

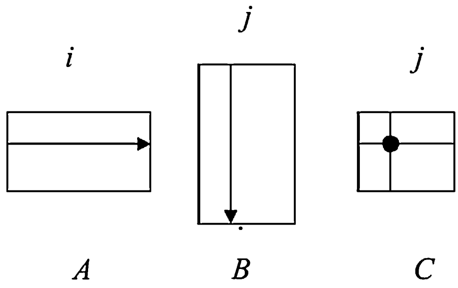


Рис. 2.1*. К определению произведения матриц*

Замечание 2.1. При умножении матриц обычно говорят, что элемент c_{ij} матрицы $C = AB$, находящийся в i-й строке и в j-м столбце является «произведением i-й строки мат-рицы A и j-го столбца матрицы B».

Пример 2.2. Даны матрицы A, B из примера 2.1, а также матрицы $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ и $F=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Установить, для каких матриц определена операция умножения, и найти эти произведения.

►Имеем: $A_{1\times4}$, $B_{4\times1}$, $C_{2\times2}$, $D_{2\times2}$, $F_{2\times3}$. Сравнивая размеры данных матриц, убеждаемся, что определены следующие произведения: AB, CD, DC, CF, DF. Произведение AB было найдено в примере 2.1.

$$BA=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \pi\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} & \sqrt{2}\cdot 0 & \sqrt{2}\cdot(-3)\\ \pi\cdot\sqrt{2} & \pi\cdot 0 & \pi\cdot(-3)\\ 1\cdot\sqrt{2} & 1\cdot 0 & 1\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\sqrt{2}\\ \pi\sqrt{2} & 0 & -3\pi\\ \sqrt{2} & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

$$CD=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot5 & 1\cdot2+2\cdot3\\ 3\cdot1+4\cdot5 & 3\cdot2+4\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 8\\ 23 & 18\end{pmatrix}.$$

$$DC=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot4\\ 5\cdot1+3\cdot3 & 5\cdot2+3\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 14 & 22\end{pmatrix}.$$

$$CF=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot(-1)+2\cdot0\\ 3\cdot1+4\cdot3 & 3\cdot0+4\cdot2 & 3\cdot(-1)+4\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 15 & 8 & -3\end{pmatrix}.$$

Произведение DF найдите самостоятельно.◄

Замечание 2.2. Как видно из примера 2.2, при перестановке матриц результат умножения может получиться различным (сравните AB и BA, CD и DC). Кроме того, легко заметить, что хотя определено произведение CF, произведение FC не определено. В общем случае свойство коммутативности при умножении матриц не имеет места.

Определение 2.2. Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *коммутирующими*.

Чтобы матрицы были коммутирующими, необходимо, чтобы они были квадратными матрицами одинакового порядка, однако, как показывают приведённые выше примеры, это условие не является достаточным, так матрицы C и D из примера 2.2 не коммутируют.

Пример 2.3. Показать, что матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & 4\\6 & 6\end{pmatrix}$ коммутируют.

$$\blacktriangleright\ AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 4\\6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+2\cdot6 & 1\cdot4+2\cdot6\\3\cdot0+4\cdot6 & 3\cdot4+4\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 16\\24 & 36\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 4\\6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1+4\cdot3 & 0\cdot2+4\cdot4\\6\cdot1+6\cdot3 & 6\cdot2+6\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 16\\24 & 36\end{pmatrix},$$

т. е. $AB = BA$, значит, матрицы A и B коммутируют.◀

Свойства действия умножения матриц

1. $(AB)C=A(BC)$ (ассоциативность умножения).
2. $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$.
3. $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$.
4. $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$.

Если матрица A имеет размер $m\times n$, то равенство $E_mA = AE_n = A$ справедливо только, если E_m, E_n единичные матрицы m-го и n-го порядка.

Все перечисленные свойства трактуются таким образом, что если одна из частей равенства имеет смысл, то имеет смысл и другая, и они равны.

Замечание 2.3. Для квадратных матриц можно определить возведение в степень с натуральным показателем, сведя это действие к поизведению равных матриц.

Теорема 2.1. Если A и B – квадратные матрицы n-го порядка, то

$$\det AB = \det A\cdot\det B. \tag{2.1}$$

§ 3. Операция транспонирования матриц и её свойства

Определение 3.1. Если в матрице A размера $m\times n$ заменить строки на столбцы, то получится матрица размера $n\times m$, называемая *транспонированной* по отношению к матрице A.

Транспонированная матрица обозначается A^T, таким образом, если

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\ \text{то}\ A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

б

Пример 3.1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -5 & \pi\\\sqrt{7} & 0 & 2\end{pmatrix}$. Найти матрицу A^T.

$$\blacktriangleright\text{Имеем } A^T=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{7}\\-5 & 0\\\pi & 2\end{pmatrix}.\ \blacktriangleleft$$

Диагональная матрица совпадает со своей транспонированной. Для двух матриц A и A^T всегда определена операция умножения.

Замечание 3.1. Для операции транспонирования матриц справедливы следующие соотношения:

1. $(A^T)^T=A$. **2.** $(A+B)^T=A^T+B^T$. **3.** $(\lambda A)^T=\lambda A^T$. **4.** $(AB)^T=B^TA^T$.

§ 4. Обратная матрица

Определение 4.1. Пусть A – квадратная матрица порядка n. Квадратная матрица B называется *обратной* для матрицы A, если $AB = BA$.

Для матрицы, обратной к матрице A, принято обозначение A^{-1}.

Определение 4.2. Квадратная матрица A называется *невырожденной* (*неособенной*), если $\det A \neq 0$. В противном случае матрица A называется *вырожденной* (*особенной*).

Теорема 4.1 (*о существовании и единственности обратной матрицы*). Всякая невырожденная квадратная матрица A n-го порядка имеет единственную обратную матрицу A^{-1}, для которой справедливо равенство

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Определение 4.3. Матрица $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ из правой части соотношения (4.1) называется *присоединённой* по отношению к матрице A и обозначается $A^{\vee}$.

Формулу (4.1) можно переписать в виде $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}A^{\vee}$.

Замечание 4.1. Вырожденная матрица не имеет обратной.

Пример 4.1. Найти матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

► $\det A = -5 \neq 0 \Rightarrow$ матрица A неособенная и имеет обратную. Вычислим алгебраические дополнения её элементов.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3,\; A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2,\; A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,\; A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\; A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-4,\; A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\; A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=3.$$

Обратной матрицей является матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку. Покажем, например, что $A^{-1}A = E$.

$$AA^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E. ◄$$

Свойства обратной матрицы

1. $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. **2.** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. **3.** $(A^{-1})^{-1} = A$. **4.** $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$.

§ 5. Понятие о ранге матрицы. Ранг ступенчатой матрицы

Определение 5.1. *Минором* M_k матрицы A разме ра $m\times n$ ($k \le \min(m, n)$ называется определитель k-го порядка, составленный из элементов этой матрицы, находящихся на пересечении любых её k строк с любыми k столбцами.

Пример 5.1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Определить число её миноров 2-го порядка и найти какой-нибудь один из них.

►Матрица A имеет несколько миноров данного порядка (определение 5.1). Число N миноров 2-го порядка M_2 равно $N= N_1N_2$, N_1 – число способов, которыми можно выбрать 2 строки из трёх, а N_2 – число способов, которыми можно выбрать 2 столбца из четырёх. Так как N_1=3, N_2=6, то N = 18. Одним из миноров M_2 будет определитель $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5$, составленный из элементов матрицы A, находящихся на пересечении её 1-й и 2-й строк с 3-м и 4-м столбцами.◄

Определение 5.2. *Базисным минором* матрицы A размера $m\times n$ называется любой её минор порядка r ($r \le \min(m, n)$), если он отличен от нуля, а все миноры порядка $(r+1)$ либо равны нулю, либо не существуют. Порядок r базисного минора называется *рангом* матрицы A, а её строки и столбцы, входящие в базисный минор, называются *базисными*.

Ранг нулевой матрицы принимается равным нулю.

Для ранга матрицы A приняты обозначения $\mathrm{rang}A$, $r(A)$.

Пример 5.2. Найти ранг матрицы A из примера 5.1.

►Ранг матрицы A равен 3, так как у нее есть минор $M_3 \neq 0$,

$$M_3=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10\neq 0,$$

а миноров 4-го порядка она не имеет.◄

Пример 5.3. Найти $\mathrm{rang}\,A$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

►$\exists M_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}A \ge 2$. Данная матрица имеет только один минор 3-го порядка: $M_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \mathrm{rang}\,A=2$. ◄

Теорема 5.1. Ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.

Пример 5.4. Найти $\mathrm{rang}A$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

► Матрица A – ступенчатая (см. определение 1.6, гл. 1), у нее три ненулевые строки, поэтому её ранг, в силу теоремы 5.1, равен 3. ◄

Можно доказать [1], что при элементарных преобразованиях над матрицей ранг не изменяется, т. е. ранг полученной матрицы равен рангу исходной. Это утверждение вместе с теоремой 5.1 положено в основу вычисления ранга матрицы методом элементарных преобразований, при этом матрицу A преобразуют к ступенчатой форме A_1. Такая операция всегда возможна согласно теореме 1.2 гл. 1. Ранг A_1 определяется по теореме 5.1, а ранг матрицы A получают из равенства rang. A = rang. A_1.

Пример 5.5. Методом элементарных преобразований найти rang$A$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

►Выполним следующие элементарные преобразования:

1) переставим 1-ю и 2-ю строки, после чего из 4-й строки вычтем 1-ю, а из 2-й – 1-ю, умноженную на 2, получим $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$

2) переставим 2-ю и 3-ю строки, затем из 3-й строки вычтем 2-ю, умноженную на 2, в полученной матрице переставим 3-ю и 4-ю строки:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix};$$

3) из 4-й строки вычтем 3-ю, умноженную на 2, $A \to A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Поскольку A_1 – ступенчатая матрица, имеющая три ненулевых строки, то по теореме 5.1 rangA_1 = 3. Но тогда rang$A$ = rangA_1 = 3.◄

§ 6. Линейная зависимость и независимость системы матриц-строк (столбцов). Теорема о базисном миноре

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Любую такую матрицу можно считать образованной из системы m матриц-строк длины n или из системы n матриц-столбцов длины m. Элементы системы матриц-строк или матриц столбцов будем называть *арифметическими векторами* или *векторами* и обозначать $\vec{x}$. Для элемента системы матриц-строк $\vec{x}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}), i = 1,2,...,n$. Для элемента системы матриц-столбцов $\vec{x}_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})^T, j = 1,2,...,m$. Введем для этих систем понятия линейной зависиости и независимости.

Определение 6.1. *Линейной комбинацией* k матриц-строк (столбцов) называется строка (столбец), равная сумме произведений данных матриц-строк на произвольные вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$..

Для линейной комбинации k матриц-строк $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_k$ можно записать равенство

$$\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_k\vec{x}_k=\vec{x}. \tag{6.1}$$

Определение 6.2. Линейная комбинация k матриц-строк (столбцов) называется *нетривиальной*, если не все числа λ_i, i=1,..., k, равны нулю, т. е. $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_k^2>0$. Если все $\lambda_i=0$, i = 1, 2, ..., k, то линейная комбинация (6.1) называется *тривиальной*.

Заметим, что тривиальная линейная комбинация любых k матриц-строк (столбцов) является нуль-строкой (столбцом). Действительно,
$0\cdot\bar{x}_1+0\cdot\bar{x}_2+\ldots+0\cdot\bar{x}_k=\overline{0},\ \overline{0}=(0,0,\ldots,0)$.

Определение 6.3. Система матриц-строк (столбцов) называются *линейно зависимой*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нуль-матрице, иначе данная система называется *линейно независимой*.

Итак, для линейно зависимых векторов имеет место равенство

$$\lambda_1\vec{x}_1+\ldots+\lambda_k\vec{x}_k=\vec{0} \tag{6.2}$$

при некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, удовлетворяющих условию $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_k^2>0$, а для линейно независимых векторов равенство (6.2) справедливо только при $\lambda_1 = = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Теорема 6.1 (*необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы матриц-строк* (*столбцов*)). Система матриц-строк (столбцов) линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы одна из строк (один из столбцов) является линейной комбинацией всех остальных.

►Утверждение «данные арифметические векторы $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_k$ линейно зависимы» означает, что в равенстве (6.2) не все $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.. Для определенности предположим, что $\lambda_k \neq 0$. После деления обеих частей равенства (6.2) на $(-\lambda_k)$ оно преобразуется к виду

$$\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_{k-1}\vec{x}_{k-1}-\vec{x}_k=\vec{0} \tag{6.3}$$

или

$$\vec{x}_k=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_{k-1}\vec{x}_{k-1}, \tag{6.4}$$

где $\alpha_i = -\lambda_i/\lambda_k$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Итак, показано, что вектор $\vec{x}_k$ является линейной комбинацией векторов $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_{k-1}$.

Наоборот, если имеет место равенство (6.4) и, следовательно, эквивалентное ему равенство (6.3), заключаем, что в этом случае система векторов $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_k$ линейно зависима в силу определения 1.5, ибо левая часть (6.3) представляет из себя нетривиальную линейную комбинацию этих векторов (коэффициент при $\bar{x}_k$ в (6.4) равен $(-1)\neq 0$).◄

Связь между максимально возможным числом линейно независимых элементов в этих системах и рангом матрицы A устанавливается нижеследующей теоремой.

Теорема 6.2 (*теорема о базисном миноре*). Любая строка (столбец) прямоугольной матрицы A является линейной комбинацией её базисных строк (столбцов).

Глава 3. **Общая теория линейных систем**

§ 1. Крамеровские системы линейных уравнений

1. Матричная форма записи системы линейных уравнений. Пусть дана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

С введением понятия матриц и операций над ними (см. разд. 1, гл. 2) появляется возможность записать систему (1.1) в более компактном виде, а именно, в виде так называемого матричного уравнения.

Сопоставим системе (1.1) следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица A – это *матрица коэффициентов системы* (см. разд. 1, гл. 1, § 1), матрица X называется *столбцом неизвестных*, а матрица B – *столбцом свободных членов*. Вычислим произведение матриц A и X:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Элементы столбца из правой части (1.2) – левые части уравнений системы (1.1). Используя определение равенства двух матриц (определение 1.1, гл. 2), перепишем эту систему в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Заменяя в последнем соотношении его левую часть в силу (1.2) на AX, а правую – на B, приходим к соотношению

$$AX = B. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) называется *матричным уравнением*, соответствующим системе (1.1). *Решением* матричного уравнения (1.3) называется столбец X, при подстановке в это уравнение обращающий его в матричное тождество. Решение матричного уравнения (1.3) эквивалентно решению системы (1.1).

2. Крамеровские системы. Теорема Крамера. Рассмотрим систему из n уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Система (1.4) называется *квадратной*. Матрица A этой системы – квадратная матрица n-го порядка, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы A называется *главным определителем* системы и обозначается Δ. Таким образом, $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Наряду с главным определителем системы Δ рассмотрим так называемые *вспомогательные определители* Δ_i, $i = 1, 2,\ldots, n$, которые получаются из главного путём замены его i-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} \cdots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \cdots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, i=1,\ldots,n.$$

Теорема 1.1 (*теорема Крамера*). Если главный определитель Δ системы (1.4) отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, определяемое равенствами

$$x_i = \Delta_i/\Delta,\ i=1, 2, \ldots, n \tag{1.5}$$

Равенства (1.5) называются *формулами Крамера*, а система (1.4) при $\Delta \neq 0$ называется *крамеровской системой.*

Пример 1.1. Используя формулы Крамера, решить систему

$$\begin{cases} x+2z=8, \\ -x+3y=-5, \\ x+y+z=4. \end{cases}$$

►Для отыскания решения системы по формулам (1.5) вычислим главный определитель системы Δ и вспомогательные определители Δ_x, Δ_y, Δ_z, получающиеся из Δ путем замены его первого, второго и третьего столбцов соответственно на столбец свободных членов:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3-2=-5,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=8\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=8\cdot 3+2(-5-12)=-10,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}=2(-4+5)+(-5+8)=5,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+8\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12+5+8(-1-3)=-15.$$

Теперь находим решение системы по формулам (1.5):

$$x=\Delta_x/\Delta=2,\ y=\Delta_y/\Delta=-1,\ z=\Delta_z/\Delta=3.◄$$

Замечание 1.1. При доказательстве теоремы Крамера [7] излагается метод обратной матрицы, позволяющий выразить решение крамеровской системы в матричной форме:

$$X = A^{-1}B, \tag{1.6}$$

где A^{-1} матрица, обратная к матрице системы A, а B – столбец свободных членов.

Пример 1.2. Используя матричную форму записи, решить систему уравнений из примера 1.1.

►Пусть A – матрица системы, B – столбец свободных членов, а X – столбец из неизвестных: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Рассматриваемой системе соответствует уравнение (1.3), где матрицы A и B имеют указанный смысл.

Матрица A имеет обратную (см. пр. 4.1 гл. 2), $A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. С помощью (1.6) найдём решение системы: $X=A^{-1}B=$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\cdot 8+2\cdot(-5)+(-6)\cdot 4 \\ 1\cdot 8+(-1)\cdot(-5)+(-2)\cdot 4 \\ -4\cdot 8+(-1)\cdot(-5)+3\cdot 4 \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итак, система имеет единственное решение $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.◄

Замечание 1.2. Таким образом, систему уравнений с квадратной неособенной матрицей (крамеровскую систему) можно решать тремя способами: методом Гаусса, по формулам Крамера, методом обратной матрицы.по формуле (1.6) настоящего параграфа).

§ 2. Решение произвольных систем линейных уравнений

1. Векторная форма записи системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Выше рассматривались, в основном, квадратные системы линейных уравнений, число неизвестных в которых совпадает с числом уравнений. Здесь исследуются системы, в которых число линейных уравнений и число неизвестных произвольны. Такие системы будем называть произвольными системами линейных уравнений.

Пусть дана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

где m и n – произвольные натуральные числа. Через A и A^* обозначим матрицу коэффициентов системы и ее расширенную матрицу,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{2.2}$$

Столбцы матрицы A^* будем считать арифметическми векторами и обозначать:

$$\vec{a}_i = (a_{1i}\ a_{2i} \ldots a_{mi})^T,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \vec{b} = (b_1\ b_2 \ldots b_m)^T.$$

Согласно правилам действий с матрицами и определению равных матриц система (2.1) записывается так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

или, используя вышевведенные векторы, в виде:

$$x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}. \qquad (2.3)$$

Равенство (2.3) называется *векторным видом* системы (2.1).

Теорема 2.1 (*теорема Кронекера – Капелли*, Кронекер Л. – немецкий математик (1823 – 1891), Капелли А. – итальянский математик (1855 – 1910)). Для того, чтобы система (2.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A системы (2.1) был равен рангу расширенной матрицы A^* этой системы: $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}A^*$.

►Испоьзуем векторный вид (2.3) системы (2.1), где под $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ понимаются столбцы матрицы A коэффицентов системы, а под $\vec{b}$ – столбец свободных членов.

Предположим, что система (2.1) совместна, т. е. имеет хотя бы одно решение $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$. Подставим это решение в (2.3):

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b}. \qquad (2.4)$$

Последнее равенство означает, что столбец $\vec{b}$ является линейной комбинацией стоблцов матрицы A и, следовательно, $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}A^*$.

Если ранги матриц A и A^* совпадают, то базисный минор матрицы A одновременно является и базисным минором ее расширенной матрицы A^*. Поэтому вектор $\vec{b}$ (столбец свободных членов) есть линейная комбинация базисных столцов матрицы A^* (теорема 6.2, гл. 2). Тогда найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие что будет выполняться равенство (2.4), а это и означает, что $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$ – рещение данной системы.◄

Следствие из теоремы 2.1. Если $\mathrm{rang}A \neq \mathrm{rang}A^*$, то система (2.1) несовместна.

Замечание 2.1. Теорема Кронекера – Капелли является так называемой теоремой существования, т. е. она гарантирует существование решения системы (2.1) при выполнении её условия, но не дает способа отыскания этого решения. Заметим, однако, что следствие из нее позволяет установить несовместность данной системы линейных уравнений.

2. Решение систем линейных уравнений методом Кронекера – Капелли. Выполнив конечное число элементарных преобразований, матрицу A^* всегда можно привести к ступенчатой матрице A_1^* (теорема 1.2 гл. 1):

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{cccccccc:c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{2.5}$$

Можно считать, что ни один из элементов $a'_{11}, \ldots, a'_{rr}$ матрицы A_1^* не равен нулю, в противном случае этого можно добиться перестановкой столбцов матрицы A^*, изменив при этом нумерацию неизвестных.

В силу теоремы 1.1 гл. 1 система уравнеий, соответсвующая матрице A_1^*, равносильна системе (2.1).

Первые n столбцов матрицы A_1^* соответствуют матрице A_1 получа-ющейся при указанных преобразованиях из матрицы A. При $r < m$ матрица A_1 имеет r ненулевых строк, а в матрице A_1^* число таких строк равно $(r + 1)$ или r, в зависимости от величины её элемента b'_{r+1}. При $r = m$ число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково и равно r.

Случай 1. $r < m$, $b'_{r+1} \neq 0$. Число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* различно и равно r и $(r + 1)$ соответственно. В силу теоремы 6.2 гл. 2 ранги матриц A_1 и A_1^* не совпадают и по теореме Кронекера – Капелли система (2.1) несовместна.

Пример 2.1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

► Рассмотрим расширенную матрицу этой системы

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Первые три столбца этой матрицы образуют матрицу A – матрицу коэффициентов системы. Подвергнем A^* следующим элементарным преобразованиям. Переставим 1-ю и 2-ю строки, затем последовательно умножим 1-ю строку на (–2) и на (–3) и сложим со 2-й и 3-строками, после чего из 3-й строки вычтем 2-ю:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A_1^*.$$

Матрица A при этом преобразуется в матрицу A_1, составленную из первых трёх столбцов матрицы A_1^*. Матрица A_1^* имеет 3 ненулевых строки, поэтому её рангравен 3. У матрицы A_1 только две ненулевых строки её ранг равен 2. Итак, $\mathrm{rang} A_1 \neq \mathrm{rang} A_1^*$. В соответствии со следствием из теоремы Кронекера – Капелли заключаем, что система несовместна. ◄

Случай 2. $r < m$, $b'_{r+1} = 0$ или $r = m$. Число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково и равно r. В силу теоремы Кронекера – Капелли система (2.1) является совместной, определенной или неопределенной.

В этом случае матрице A_1^* сопоставляется следующая система:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r, \end{cases} \tag{2.6}$$

равносильная системе (2.1), в силу теоремы 1.1 из главы 1.

Система (2.6) (а следовательно, и система (2.1)) будет иметь различное число решений в зависимости от соотношения между числами r и n.

1). Пусть $r = n$. Система (2.4) имеет вид

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n. \end{cases} \tag{2.7}$$

и является крамеровской (она квадратная и ее определитель $\Delta \neq 0$),

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ . & . & & / \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn} \neq 0. \tag{2.8}$$

Система (2.7) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера (1.5), но естественнее и проще выполнить обратный ход метода Гаусса, при этом сначала из последнего уравнения системы (2.7) находят $x_n = b'_n / a'_{nn}$, потом из предпоследнего уравнения находят x_{n-1} после подстановки в него найденного значения x_n. Аналогичные операции производят до тех пор, пока из первого уравнения не будет найдено x_1.

Пример 2.2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

►Выпишем расширенную матрицу этой системы:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

и подвергнем её элементарным преобразованиям. Умножим первую строку на числа 2, 1, 4 и вычтем её последовательно из второй, третьей и четвёртой строк, после чего поменяем местами вторую и третью строки:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right).$$

Умножим теперь вторую строку на числа 3, 2 и сложим её последовательно с третьей и четвёртой строками, получим:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right).$$

Наконец, умножим вторую строку на (–1), третью строку вычтем из четвёртой, после чего умножим третью строку на (–1/5), получим

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матрице $A_1{}^*$ соответствует система $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ \quad\ \ x_2 \qquad\ = 2, \\ \qquad\qquad x_3 = -1, \end{cases}$ которая является крамеровской, так как её главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Она имеет единственное решение $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$.◄

2). Пусть $r < n$. Перенесём члены с неизвестными $x_{r+1}, \ldots, x_n$ правые части уравнений системы (2.6), получим

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r = b'_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r = b'_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{2n}x_n, \\ . \qquad\qquad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad\quad a'_{rr}x_r = b'_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{nn}x_n. \end{cases} \tag{2.9}$$

Относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_r$ система (2.9) является крамеровской (число её уравнений равно числу неизвестных, и её определитель Δ отличен от нуля (см. (2.8)). Поэтому из системы (2.9) можно единственным образом выразить неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ через неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ по формулам Крамера или осуществив обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2,n-r}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \beta_r + \alpha_{r1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,n-r}x_n. \end{cases} \tag{2.10}$$

Числа β_i, α_{ij}, $i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, n - r$ получаются в результате арифметических операций над коэффициентами a'_{ik}, $i = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, n$, и свободными членами b'_i, $i = 1, \ldots, r$, системы (2.9) в процессе вычислений. Для них можно записать и явные выражения в виде:

$$\beta_i = \Delta_i/\Delta, \ \ \alpha_{ij} = -\Delta_{ij}/\Delta, \ \ i = 1, \ldots, r, \ j = 1, \ldots, n - r, \tag{2.11}$$

где Δ_i, Δ_{ij} – определители, полученные из Δ путём замены его i-го столбца на столбцы $(b'_1, \ldots, b'_r)^T$ и $(a'_{1j}, \ldots, a'_{rj})^T$, $j = 1, \ldots, n - r$. Равенства (2.11) являются следствием формул Крамера и свойств определителей.

В равенствах (2.10) неизвестные $x_{r+1}, \ \ldots, x_n$ принимают произвольные значения, поэтому их называют *свободными* неизвестными, а неизвестные $x_1,\ldots,x_r$ – *базисными*. Используя для свободных неизвестных традиционные обозначения $x_{r+1} = C_1, x_{r+2} = C_2, \ldots, x_n = C_{n-r}$, , перепишем (2.10) в виде

$$\begin{cases} x_1=\beta_1+\alpha_{11}C_1+\ldots+\alpha_{1,n-r}C_{n-r}, \\ x_2=\beta_2+\alpha_{21}C_1+\ldots+\alpha_{2,n-r}C_{n-r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r=\beta_r+\alpha_{r1}C_1+\ldots+\alpha_{r,n-r}C_{n-r} \\ x_{r+1}=C_1\in\mathbf{R}, \\ \ldots\ldots \\ x_n=C_{n-r}\in\mathbf{R} \end{cases} \tag{2.12}$$

При частных значениях $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ правые части равенств (2.12) определяют все решения системы (2.1).

Определение 2.1. Совокупность правых частей системы равенств (2.12) называется *общим решением* системы (2.1).

Пример 2.3. Найти все решения системы $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=2, \\ 2x_1-x_2+4x_3-3x_4=5, \\ 3x_1-2x_2+5x_3-4x_4=7, \\ x_2+2x_3-x_4=1. \end{cases}$

►Выпишем расширенную матрицу системы

$$A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Подвергнем матрицу A^* элементарным преобразованиям. Умножим первую строку на числа (–2) и (–3) и сложим последовательно со второй и третьей строкой, получим

$$A^*\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Вычтем теперь вторую строку из третьей и четвертой:

$$A^*\to A_1^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матрице A_1^* соответствует следующая система: $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=2, \\ x_2+2x_3-x_4=1, \end{cases}$

равносильная данной. Неизвестные x_1, x_2 примем за *базисные,* а неизвестные x_3, x_4 – за *свободные*. Перенесём члены со свободными неизвестными в правые части уравнений последней системы:

$$\begin{cases} x_1-x_2=2-x_3+x_4, \\ x_2=1-2x_3+x_4. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} x_2=1-2x_3+x_4, \\ x_1=2-x_3+x_4+x_2=3-3x_3+2x_4. \end{cases}$$

Приняв обозначения $x_3=C_1\in\mathbf{R}$, $x_4=C_2\in\mathbf{R}$, получаем совокупность всех решений данной системы в виде

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 3C_1 + 2C_2, \\ x_2 = 1 - 2C_1 + C_2, \\ x_3 = C_1 \in \mathbf{R}, \\ x_4 = C_2 \in \mathbf{R}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Замечание 2.2. Здесь под **R** понимается множество всех вещественных чисел (см. разд. 4, гл. 1, § 1).

Резюмируя вышеизложенное, заключаем, что при решении произвольной системы линейных уравнений (т. е. системы (2.1)) реализуется один из следующих случаев.

1) Система (2.1) не имеет решений (т. е. является несовместной), если не совпадает число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^*, полученных в результате приведения матрицы системы A и её расширенной матрицы A^* к ступенчатой форме.

2) Система (2.1) имеет единственное решение (т. е. является совместной и определённой), если число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково и равно числу неизвестных. В этом случае система (2.1) крамеровская или равносильна такой системе.

3) Система (2.1) имеет бесчисленное множество решений (т. е. является совместной и неопределённой), если число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково и меньше числа неизвестных.

Замечание 2.2. Множество решений системы (2.1) может быть либо пустым, либо состоять из одного элемента, либо быть бесконечным. Оно не может состоять из одного, двух, трёх и т. д. элементов.

Пример 2.4. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} (\lambda-2)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (\lambda-2)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (\lambda-2)x_3 = 1. \end{cases}$$

При каких значениях параметра λ она: а) не имеет решений? б) имеет единственное решение? в) имеет бесчисленное множество решений?

►Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix} \text{ и } A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 & 1 \end{array}\right).$$

Для приведения матрицы A^* (и тем самым матрицы A) к ступенчатой форме A_1^* выполним над A^* следующие элементарные преобразования.

1. Переставим местами первую и третью сроки:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 1 \\ \lambda-2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

2. Последовательно вычтем из второй строки первую и из третьей – первую, умноженную на $(\lambda - 2)$, получим:

$$A^* \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -\lambda^2+4\lambda-3 & 3-\lambda \end{array}\right).$$

3. К третьей строке прибавим вторую, имеем

$$A^* \to A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda & 3-\lambda \end{array}\right)$$

и, следовательно, $A \to A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-2 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}$.

При $-\lambda^2+3\lambda \neq 0$ (то есть $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 3$) матрицы A_1 и A_1^* имеют по три ненулевых строки, причем число ненулевых строк совпадает с числом неизвестных в системе. Таким образом, в этом случае рассматриваемая система является крамеровской и имеет единственное решение.

При $\lambda = 0$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$. Число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* различно, при $\lambda = 0$ система не имеет решений.

При $\lambda = 3$ имеем $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $A_1^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* одинаково, оно меньше числа неизвестных в системе. Система имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: а) $\lambda = 0$; б) $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 3$; в) $\lambda = 3$.◄

Замечание 2.3. Число ненулевых строк в матрицах A_1 и A_1^* совпадает с их рангами (разд.1, гл. 2, § 5) и, как было отмечено в § 5 гл. 2, справедливы равенства $\operatorname{rang} A_1 = \operatorname{rang} A_1^* = \operatorname{rang} A^*$, поэтому приведённое выше резюме о числе решений системы (2.1) можно перефразировать следующим образом:

1) если $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} A^*$, то система (2.1) несовместна;

2) если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^* = r$ и $r = n$, то система (2.1) имеет единственное решение;

3) если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^* = r$ и $r < n$, то система (2.1) имеет бесчисленное множество решений.

Замечание 2.4. Система (2.1) называется *однородной*, если все ее свободные члены b_1, $b_2, \ldots, b_m$ равны нулю. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, ибо при любых значениях её коэффициентов она всегда имеет так называемое *нулевое* (или *тривиальное*) решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Решение системы (2.1), не совпадающее с тривиальным, называется *ненулевым*. Если однородная система является крамеровской или равносильна такой системе, то ее нулевое решение единственно. В противном случае наряду с нулевым она имеет бесчисленное множество ненулевых решений.

Пример 2.5. Дана система: $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+\beta x_2+2x_3=0. \end{cases}$ Найти значения параметра β, при которых: а) нулевое решение этой системы единственно;

б) данная система имеет ненулевые решения.

►Данная система является квадратной. Вычислим её главный определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & \beta & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 5\\ 0 & \beta-6 & 5\end{vmatrix}=-25-5\beta+30=5(1-\beta).$$

Ответ;

а) Нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 =0$ единственно, если $\Delta\neq0$. Это условие выполняется в случае $\beta\neq1$.

б) Поскольку система имеет ненулевые решения при $\Delta=0$, то для параметра β получаем условие $\beta =1$.◄

§ 3. Модель межотраслевого баланса

Модель межотраслевого баланса (МОБ) – это метод анализа межотраслевых связей с привлечением аппарата линейной алгебры был применен впервые в 30-х гг. XX в. лауреатом Нобелевской премии американским экономистом русского происхождения В. В. Леонтьевым (1906—1999) для изучения макроструктуры экономики США. Первый МОБ был опубликован в США в 1936 г.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей. *Чистая отрасль* – это условное понятие – некоторая часть народного хозяйства, более или менее цельная (например, энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т. п.) [19].

Пусть x_i – общий объем продукции i-й отрасли (за данный промежуток времени, например за год, – *валовой продукт i-й отрасли*).

Пусть далее x_{ij} – объем продукции i-й отрасли, расходуемый в j-й отрасли, y_i – объём потребления продукции i-й отрасли в непроизводственной сфере (выплата зарплаты и налогов, предпринимательская прибыль, инвестиции и т. п.). Ясно, что

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+y_i,\ i=1,2,......n. \tag{3.1}$$

Равенства (3.1) называют *соотношениями баланса*.

Перейдем теперь к *стоимостному межотраслевому балансу*. Пусть $a_{ij}=x_{ij}/x_j$ – затраты продукции i-й отрасли, расходуемое на производство одной единицы продукции j-й отрасли. Числа a_{ij} называются *коэффициентами прямых затрат* j-й отрасли и характеризуют технологию этой отрасли. Число x_i/y_i есть доля продукции i-й отрасли, идущая на непроизводственное потребление. Введем в рассмотрение матрицу

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Назовем эту матрицу *матрицей прямых затрат*. Ее элементы пределяются используемой технологией производства, которую будем на данном промежутке времени считать неизменной (эту матрицу называют также и *технологиче-*

ской матрицей). Таким образом, элементы матрицы A постоянны. Но тогда, предполагая. что материальные издержки пропорциональны объему выпускаемой продукции (*линейность* используемой технологии), получаем

$$x_{ij} = a_{ij}x_j,\ i, j = 1,2,......n. \tag{3.3}$$

И соотношения баланса (3.1) принимают вид:

$$x_i = \sum_{J=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i \quad , i = 1,2,......n. \tag{3.4}$$

Полагая $X = (x_1\ x_2 ... x_n)^T$, $Y = (y_1\ y_2 ... y_n)^T$, равенства (3.4) запишем в матричном виде:

$$X = AX + Y. \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) называется *уравнением Леонтьева*.

Замечание 3.1. Все элементы матриц AX неотрицательны, что вытекает из их экономического смысла.

Замечании 3.2. Y – это матрица-столбец, каждый элемент которой равен доходу отрасли, т. е. разности обьема денежных средств, полученных от реализации выпущенной продукции, и средств, затраченных на ее производство. Из (3.5) находим $Y = X - AX$, или

$$Y = (E - A)X. \tag{3.6}$$

Соотношения (3.5) и (3.6) позволяют прогнозировать цены на продуцию отраслей и изменение цен вследствие изменений в одной (или нескольких) из отраслей. Приведем несколько примеров (объемы выпуска продукции и доходы приведены в млн. рублей).

Пример 3.1. Рассмотрим экономическую систему из 2 фирм. Пусть $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ – матрица выпуска продукции (за год) фирмами 1 и 2, $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$ матрица прямых затрат. Тогда доходы каждой фирмы описываются матрицей $Y = X - AX = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Пример 3.2. Перед каждой из фирм 1 и 2 была поставлена задача повышения прибыли, т. е. чтобы матрица доходов имела вид $Y = \begin{pmatrix} 180 \\ 60 \end{pmatrix}$. Как нужно увеличить (изменить) обьем выпускаемой продукции фирмами 1 и 2 для достижения такого результата?

►Соотношение (3.5) разрешим относительно матрицы X:

$$X = (E - A)^{-1}\ Y. \tag{3.7}$$

Находим последовательно:

$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$, $(E - A)^{-1} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$, отсюда

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310 \\ 170 \end{pmatrix}. ◄$$

Замечание 3.3. Модель Леонтьева *продуктивна* (применима), если уравнение $X = AX + Y$ имеет неотрицательное решение для любой матрицы–столбца Y, т. е. матрица A позволяет произвести любую неотрицательную матрицу доходов. Для этого необходимо и достаточно, чтобы матрица $E-A$ имела обратную, все элементы которой были бы неотрицательны.

Пример 3.3. Будет ли матрица $A=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\ 0,5 & 0,8\end{pmatrix}$ продуктивной? Нет, так как элементы матрицы $(E-A)^{-1}=\dfrac{100}{9}\begin{pmatrix}-0,2 & -0,3\\ -0,35 & -0,3\end{pmatrix}$ отрицательны.

Глава 4. **Задания для проверки качества усвоения раздела 1**

§ 1. Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислите определители: а) $\begin{vmatrix}1 & 2 & -7\\ -1 & 2 & -3\\ 0 & 7 & 1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & -4 & -1 & 2\\ 4 & 3 & -2 & -1\end{vmatrix}$.

2. Пусть даны две матрицы: $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 7 & 3\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Найдите матрицу C, удовлетворяющую уравнениям: а) $A\cdot B+\lambda C=A$, $\lambda\neq 0$; б) $A\cdot C=E$.

3. Решите систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=1,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1,\\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5.\end{cases}$$

4. Решите систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3=-1,\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4,\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2.\end{cases}$$

5. Найдите ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

6. Исследуйте на совместность систему уравнений (методом Гаусса или используя теорему Кронекеля –Капелли). Если она совместна, решите её:

а) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1,\\ 2x_1+x_2-2x_3=1,\\ x_1+x_2+x_3=3,\\ x_1+2x_2-3x_3=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3,\\ 3x_1+x_2-5x_3=0,\\ 4x_1-x_2+x_3=3,\\ x_1+3x_2-13x_3=-6.\end{cases}$

7. Завод выпускает изделия трех видов: A, B, C. Изделия производятся на токарных, фрезерных и шлифовальных станках. Нормы загрузки этих станков (в часах) на каждое изделие и допустимое время их эксплуатации на месяц работы заданы таблицей.

Изделие	Прибыль от каждого изделия (ден. ед.)	Нормы загрузки станков (в часах) на одно изделие			Допустимая нагрузка станков (час/месяц)
		токарные	фрезерные	шлифовальные	
A	30	60	80	120	4000
B	40	80	70	30	4700
C	60	6	10	12	520

Найдите объем выпуска каждого из изделий в месяц и прибыль от их реализации.

8. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из 2 фирм. Пусть $X=\begin{pmatrix}200\\300\end{pmatrix}$ – матрица выпуска продукции фирмами 1 и 2, $A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.4\\0.8 & 0.3\end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат. Найдите доходы каждой фирмы.

9. Перед каждой из фирм 1 и 2 была поставлена задача повышения прибыли, т. е. чтобы матрица доходов имела вид $Y=\begin{pmatrix}70\\120\end{pmatrix}$. Для достижения такого результата как надо увеличить выпуск продукции фирмами 1 и 2?

10. Будет ли матрица $A=\begin{pmatrix}0.2 & 0.6\\0.8 & 0.9\end{pmatrix}$ продуктивной?

Ответы к задачам для самостоятельной работы

1) а) 74; б) 900. **2)** а) $C = A(E-B)/\lambda$, б) $C=A^{-1}$. **3)** $x_1 = 2x_2$, x_2 – любое число, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. **4)** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. **5)** 2. **6)** а) Система несовместна; б) система совместна, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$. **7)** Объем выпуска: А – 30, В – 10, С – 20 шт. Прибыль 900 + 400 + 1200 = 2500 (ден. ед.).

8) $Y=\begin{pmatrix}60\\80\end{pmatrix}$. **9)** $X=(E-A)^{-1}\cdot Y=\begin{pmatrix}260\\410\end{pmatrix}$. **10)** Нет, так как матрица $(E-A)^{-1}=\dfrac{100}{9}\begin{pmatrix}-0.2 & -0.3\\-0.35 & -0.3\end{pmatrix}$ не будет положительной.

§ 2. Контрольные вопросы к разделу 1

1. Напишите расширенную матрицу системы $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=-2,\\2x_1+x_2-3x_3=7,\\x_1-2x_2+x_3=-4,\\4x_1-2x_2-x_3=1.\end{cases}$

2. Совместна ли система $x + y = 1$, $2x + 2y = 4$?

3. Какая система линейных уравнений называется квадратной?

4. Опишите метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

5. Дайте понятия определителей 2-го и 3-го порядков.

6. Напишите квадратную матрицу A третьего порядка в общем виде. Какие элементы находятся на главной диагонали $\det A$? На его побочной диагонали? Сформулируйте правило Саррюса для вычисления определителя 3-го порядка.

7. Дайте понятие определителя n-порядка и сформулируйте его свойства.

8. Какие две матрицы называются равными? Равны ли матрицы A и B, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$?

9. Дайте определение действия сложения матриц. Можно ли сложить две матрицы с размерами 2×3 и 3×2?

10. Даны матрицы $A_{k\times l}$ и $B_{m\times n}$. При каких соотношениях между числами k, l, m, n операции сложения и умножения определены для данных матриц одновременно?

11. Матрица A имеет размерность 3×4. Какой размерности должна быть матрица B, чтобы было определено произведение: а) AB? б) BA? в) B^2A? г) AB^2?

12. Дана матрица A. В каком случае справедливо равенство $A^T=A$?

13. Докажите, что всегда определены произведения AA^T и A^TA.

14. Известно, что для матрицы A выполняется равенство: $(1\ \ 2\ \ 3)\,A=(0\ \ 1)$. Каковы размеры матрицы A?

15. Дайте понятие единичной матрицы. Какая из матриц:

2. а) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ является единичной?

16. Известно, что $\det A_{5\times 5}=3$. Чему равен: а) $\det 2A$; б) $\det A^T$; в) $\det A^{-1}$?

17. Найдите $\det(ABC)$, если A, B, C – квадратные матрицы одного порядка, при этом одна из них вырожденная.

18. Докажите, что если $A^2=A$, то матрица $B=2A-E$ удовлетворяет условию $B2=E$.

19. Какими должны быть матрицы A, B, C, чтобы было определено выражение: а) $(AB)C$; б) $(A+B)C$; в) $A(B+C)$; г) $A^2(BC)$; д) $(A^2+2B)C$?

20. Пусть A и B – две квадратные матрицы. Докажите, что суммы элементов, находящихся на главной диагонали, для матриц AB и BA равны.

21. Какая матрица всегда имеет обратную? Сколько обратных матриц она имеет? Как найти обратную матрицу?

22. Решите в матричном виде уравнение $AXC+D=F$, где A, C, D, F – данные матрицы, X – искомая матрица.

23. При каких значениях параметра λ система $\begin{cases}x+\lambda y-4z=-1,\\ \lambda x+y-3z=0,\\ x-y+z=1,\end{cases}$

а) совместна и определённа? б) совместна и неопределённа? в) несовместна?

24. В каком случае однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решения? её нулевое решение единственно?

25. Линейная зависимость (независимость) системы матриц - строк.

26. Ранг матрицы. Определение.

27. Базисный минор матрицы. Теорема о базисном миноре.

§ 3. Тесты по разделу 1

Вар. № 1	**Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений**
1	Даны две матрицы A и B: $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Найдите элемент c_{32} матрицы $C=3A-4B-2E$, где E – единичная матрица.
2	Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$. Найдите элемент c_{22} матрицы $C=A^2$.
3	Укажите элемент a^T_{25} матрицы A^T, транспонированной по отношению к матрице $A=\begin{pmatrix}7 & -14 & 21 & -28\\ 14 & -27 & 41 & -57\\ 35 & -69 & 104 & -141\\ -7 & 13 & -20 & 29\\ -21 & 40 & -61 & 86\end{pmatrix}$.
4	Найдите определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 25\\ -4 & -95\end{pmatrix}$.
5	Найдите алгебраическое дополнение элемента a_{12} определителя $\begin{vmatrix}2 & 0 & -1 & 3\\ 2 & 3 & -9 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 0 & 6\end{vmatrix}$.
6	Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$ найдите элемент a^{-1}_{21} обратной матрицы A^{-1}.
7	При каком значении α матрица $B=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$ не имеет обратной?
8	Решите систему уравнений: $\begin{cases}29x-31y=178,\\ -2x+18y=-44.\end{cases}$ В ответе укажите сумму $x+y$.
9	Решите систему уравнений: $\begin{cases}-3x_1+5x_2+6x_3=-8,\\ 3x_1+x_2+x_3=-4,\\ x_1-4x_2-2x_3=-9.\end{cases}$ В ответе укажите x_3.
10	Решите систему уравнений: $\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3=0,\\ x_1+2x_2-3x_3=0,\\ 3x_1-x_2+2x_3=0.\end{cases}$ В ответе укажите значение отношения x_1 / x_2.

Вар. № 2	**Линейная алгебра: матрицы, определители, системы линейных уравнений**
1	Даны две матрицы A и B: $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 5\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$. Найдите элемент c_{21} матрицы $C=3A-4B-2E$, где E – единичная матрица.

2	Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$. Найдите элемент c_{33} матрицы $C=A^2$.
3	Укажите элемент $a^T{}_{53}$ матрицы A^T, транспонированной по отношению к матрице $A=\begin{pmatrix}-17 & -34 & -51 & -68 & -85\\ -17 & -33 & -52 & -69 & -86\\ 17 & 32 & 53 & 70 & 87\\ 51 & 101 & 154 & 205 & 256\end{pmatrix}$.
4	Найдите определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}30 & 37\\ -41 & -57\end{pmatrix}$.
5	Найдите алгебраическое дополнение элемента a_{12} определителя $\begin{vmatrix}2 & 0 & -1 & 3\\ 2 & 3 & -9 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 0 & 6\end{vmatrix}$.
6	Для матрицы $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$ найдите элемент $a^{-1}{}_{32}$ обратной матрицы A^{-1}.
7	При каком значении α матрица $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & \alpha & 3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$ не имеет обратной?
8	Решите систему уравнений: $\begin{cases}2x+23y=44,\\ -3x-90y=-177.\end{cases}$ В ответе укажите сумму $x+y$.
9	Решите систему уравнений: $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0,\\ 4x_1+x_2+4_3=6,\\ x_1+x_2+2x_3=4.\end{cases}$ В ответе укажите x_2.
10	Решите систему уравнений: $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=0,\\ x_1-3x_2+2x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3=0.\end{cases}$ В ответе укажите значение отношения x_1/x_2.

Ответы к заданиям тестов

№ вар	№ заданий									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	−7	7	40	−193	120	−2.5	0.8	2	−6	−1/13
2	−25	53	87	5	5	−6/19	Ни при каком	1	2	−7

Раздел 2. **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Краткая характеристика раздела

1. Темы раздела. Геометрические векторы и операции с ними. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Базис множества векторов. Прямоугольная система координат.

2. Базисные понятия. Геометрический вектор, линейные операции с векторами. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная система координат. Скалярное произведение векторов. Линии и поверхности 1-го и 2-го порядков. Уравнение поверхности в пространстве.

3. Основные задачи. Выполнение операций над векторами. Изучение взаимного расположения векторов. Построение уравнений прямых и плоскостей по различным данным. Исследование взаимного расположения прямых и плоскостей. Построение кривых второго порядка. Построение графиков функций спроса и предложения, нахождение равновесной цены.

Глава 1. **Геометрические векторы и операции с ними**

§ 1. Понятие вектора. Равные векторы. Коллинеарные и компланарные векторы

Определение 1.1. *Геометрическим вектором* (или *вектором*) называется направленный прямолинейный отрезок, для которого указано, какая из ограничивающих его точек считается началом, а какая концом. Начало вектора называют также точкой его приложения.

Если точки A и B – начало и конец данного вектора, то сам вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ (рис. 1.1).

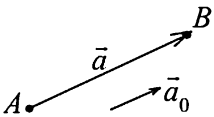


Рис. 1.1. *Изображение векторов*

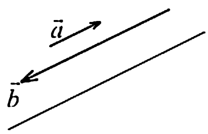


Рис. 1.2. *Изображение коллинеарных векторов*

Пусть выбрана какая-либо система измерения длин прямолинейных отрезков, иначе говоря, масштаб. *Длиной* вектора, или его *модулем*, называется длина отрезка, образующего вектор. Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Определение 1.2. Два вектора называются *равными*, если они лежат на параллельных прямых (или на одной прямой), одинаково направлены и имеют равные длины.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым*, или *нуль-вектором*. Нуль-вектор не имеет определённого направления, а его модуль равен нулю. Итак, можно считать все нуль-векторы равными и ввести для них единое обозначение: $\bar{0}$.

Определение 1.3. Векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Для обозначения коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используется символ параллельности: $\vec{a} \| \vec{b}$.

Определение 1.4. Векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ называются *компланарными*, если они расположены на прямых, параллельных одной и той же плоскости.

Определение 1.5. Вектор, коллинеарный данному вектору $\vec{a}$, одинаково направленный с ним и имеющий единичную длину, называется *ортом* $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}_0$ (рис. 1.1).

§ 2. Линейные операции с векторами

К линейым операциям с веторами относятся сложение векторов и умножене вектора на вещественное число.

Определение 2.1 (*сложение векторов по правилу треугольника*). Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Приложим вектор $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 2.1).

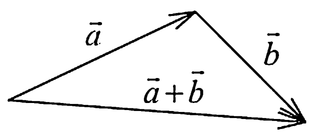


Рис. 2.1. Иллюстрация к понятию суммы векторов

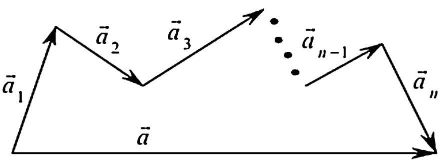


Рис. 2.2. Сложение векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$

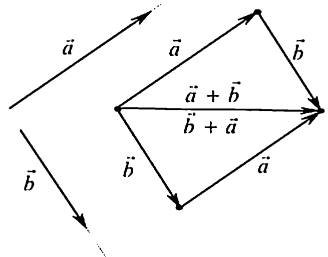
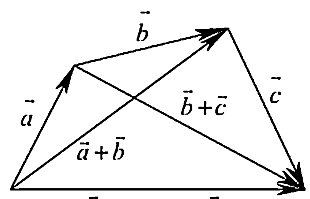


Рис. 2.3. Сложение векторов по правилу параллелограмма



$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$

Рис. 2.4. Иллюстрация ассоциативного свойства сложения векторов

Вектор $\vec{a}+\vec{b}$ можно также получить по *правилу параллелограмма*, построив на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, параллелограмм (рис. 2.3).

Понятие суммы двух векторов обобщается на случай сложения n векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ (рис. 2.2).

Определение 2.2. *Разностью* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ (рис. 2.5). Обозначение: $\vec{a}-\vec{b}$.

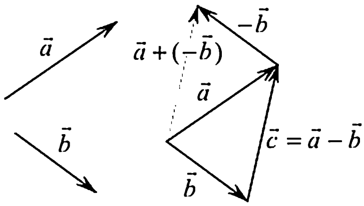


Рис. 2.5. *Разность векторов*

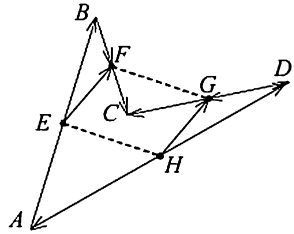


Рис. 2.6. *Иллюстрация к примеру* 2.1

Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разность существует и выражается формулой: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Из определений 2.1 и 2.2 следует, что разность $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведённых к общему началу, представляет собой вектор, идущий из конца вектора $\vec{b}$ (вычитаемого) в конец вектора $\vec{a}$ (уменьшаемого).

Определение 2.3. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на вещественное число λ называется вектор $\vec{b}$, определяемый следующими тремя условиями:

1) $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, если $\lambda>0$, и противонаправлены, если $\lambda<0$.

Для введённой операции применяется обозначение: $\lambda\vec{a}$, т. е. $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. При $\vec{a}=\vec{0}$ или $\lambda=0$ из условия 1 следует $|\lambda\vec{a}|=0$, т. е. $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

При $\lambda=\frac{1}{|\vec{a}|}$ получаем вектор $\vec{b}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a}_0$ – орт вектора $\vec{a}$. Противоположный вектор $(-\vec{a})=(-1)\cdot\vec{a}$.

Теорема 2.1 (*свойство коллинеарных векторов*). Для того чтобы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\vec{b}=\lambda\vec{a} \tag{2.1}$$

при некотором вещественном λ.

Число λ в (2.1) можно найти из соотношения $\lambda=\pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, где знак «+» выбирается в случае, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), и знак «–», если они противонаправлены ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$).

Замечание 2.1. Число λ в равенстве (2.1) определяется единственным образом.

Свойства линейных операций с векторами

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативное или переместительное свойство).

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативное или сочетательное свойство).

3. Существует единственный вектор, равный нуль-вектору $\vec{0}$, такой, что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

4. Для любого вектора $\vec{a}$ существует единственный вектор $(-\vec{a})$, называемый *противоположным*, такой, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

5. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

6. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ (свойство ассоциативности относительного скалярного множителя);

7. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (свойство дистрибутивности умножения вектора на сумму вещественных чисел);

8. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (свойство дистрибутивности умножения вещественного числа на сумму векторов).

Пример 2.1. Показать, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

►Обозначим середины сторон четырехугольника *ABCD* буквами *E*, *F*, *G*, *H* (рис. 2.6). Для вектора $\overline{EF}$ имеем равенство $\overline{EF}=\overline{EB}+\overline{BF}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC})$. Аналогично $\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$. Поскольку $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$, то $\overline{EF}-\overline{HG}=\vec{0}$, т. е. $\overline{EF}=\overline{HG}$. Последнее равенство означает равенство длин и параллельность двух противолежащих сторон четырехугольника *EFGH*. Поэтому, как известно из планиметрии, он является параллелограммом.◄

§ 3. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис множества векторов. Прямоугольная система координат

Для системы геометрических векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ вводятся понятия линейной зависимости и линейной назависмости аналогично тому, как это было сделано для арифметических векторов (разд. 1, гл. 2, § 6).

Определение 3.1. *Линейной комбинацией* векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ называется сумма произведений данных векторов на произвольные вещественные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Таким образом, линейная комбинация векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ имеет вид

$$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n, \tag{3.1}$$

где $\lambda_i\in\boldsymbol{R}$, $i=1,\ldots,n$. Здесь под $\boldsymbol{R}$ понимается множество всех вещественных чисел (разд. 3, гл. 1, § 1). Очевидно, линейная комбинация векторов также является вектором.

Определение 3.2. Линейная комбинация (3.1) векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ называется *нетривиальной*, если не все числа λ_i, $i=1,\ldots,n$, равны нулю, т. е. $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2>0$. Если все $\lambda_i=0$, $i=1,\ldots,n$, то линейная комбинация (3.1) называется *тривиальной*.

Заметим, что тривиальная линейная комбинация любых векторов является нуль-вектором. Действительно, $0\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+\ldots+0\cdot\vec{e}_n=\vec{0}$.

Определение 3.3. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нуль-вектору, иначе данные векторы называются *линейно независимыми*.

Для линейно зависимых векторов равенство

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0} \tag{3.2}$$

выполняется при некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, удовлетворяющих условию $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, а для линейно независимых векторов равенство (3.2) справедливо только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Теорема 3.1 Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация всех остальных.

►Утверждение «данные векторы линейно зависимы» означает, что в выражении (3.1) не все $\lambda_i = 0$, $i = 1,\dots,n$. Для определённости предположим, что $\lambda_n \neq 0$, при этом равенство (3.2) преобразуется к виду

$$\vec{e}_n = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\vec{e}_{n-1}, \tag{3.3}$$

где $\alpha_i = -\lambda_i/\lambda_n$, $i = 1, \dots, n-1$. А это и означает, что один из векторов (а именно $\vec{e}_n$) является линейной комбинацией векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$. Напротив, если имеет место равенство (3.3), то для векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ из (3.2) получаем

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\ \vec{e}_2 + \ \ldots + \alpha_{n-1}\ \vec{e}_{n-1} - \vec{e}_n = \vec{0}. \tag{3.4}$$

Левая часть равенства (3.4) – нетривиальная линейная комбинация данных векторов, так как коэффициент при векторе $\vec{e}_n$ равен –1. Следовательно, данные векторы линейно зависимы.◄

Замечание 3.1. Понятия линейной зависимости и линейной независимости, вообще говоря, отнесены к системе векторов. Для единства формул и формулировок любой ненулевой вектор целесообразно считать линейно независимым, а нуль-вектор – линейно зависимым. Действительно, равенство $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ при $\lambda \neq 0$ справедливо только при $\vec{a} = \vec{0}$.

Следствия из теоремы 3.1

1. Если хотя бы один из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – нулевой, то эти векторы линейно зависимы.

2. Если какие-то k ($k < n$) векторов из n векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейно зависимы, $2 \le k < n$, то и все векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейно зависимы.

3. Любые два неколлинеарных вектора линейно независимы.

4. Любые три некомпланарных вектора линейно независимы.

5. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Понятия вектора и линейных операций над векторами алгебраизируют геометрические высказывания, т. е. заменяют геометрические утверждения векторными равенствами. Используя результаты предыдущих параграфов, приведём теперь действия с векторами к действиям с числами, т. е. арифметизируем векторно-алгебраические соотношения. Для этого введём понятия базиса на данном множестве векторов, а также системы координат на прямой, плоскости и в пространстве.

Определение 3.4. *Базисом* множества векторов называется любой упорядоченный набор из n его линейно независимых векторов, где n равно максимально возможному числу линейно независимых векторов этого множества.

Пусть V_3 – множество всех векторов пространства. Любые четыре вектора из V_3 линейно зависимы по следствию 5 из теоремы 3.1, а три некомпланарных вектора из V_3 линейно независимы по следствию 4 из теоремы 3.1. Поэтому максимально возможное число линейно независимых векторов в V_3 равно 3.

Определение 3.5. Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ из множества V_3 всех векторов пространства называется *базисом* в V_3 и в пространстве.

Любой вектор $\vec{a}$ из V_3 единственным образом представим в виде

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3, \quad x, y, z\in \boldsymbol{R}. \tag{3.5}$$

Числа x, y, z называют *координатами* вектора $\vec{a}$ в данном базисе $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, а равенство (3.5) называется *разложением* вектора $\vec{a}$ по данному базису. Выбор базиса в V_3 устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами из V_3 и упорядоченными тройками (x, y, z) вещественных чисел.

Обобщая вышесказанное, заключаем, что на пути арифметизации векторно-алгебраических соотношений сделан важный шаг – установлено взаимно однозначное соответствие между векторами из множества V_3 и упорядоченными наборами вещественных чисел. Для достижения поставленной цели осталось установить правила выполнения линейных операций с векторами, заданными разложениями в некотором базисе.

Правило 3.1. При сложении векторов, заданных разложениями в некотором базисе, складываются их соответствующие координаты.

Правило 3.2. При умножении вектора, заданного разложением в некотором базисе, на вещественное число λ все его координаты умножаются на это число.

Свойство координат коллинеарных векторов.

Соответственные координаты коллинеарных векторов в любом базисе пропорциональны.

Поставленная в начале параграфа задача решена – линейные операции с векторами сведены к арифметическим операциям (сложению и умножению) над вещественными числами.

Особую роль в аналитической геометрии играет так называемый *прямоугольный базис*, в котором векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения: $\vec{e}_1=\vec{i}$, $\vec{e}_2=\vec{j}$, $\vec{e}_3=\vec{k}$. Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются ортами прямоугольного базиса. С прямоугольным базисом связано понятие о прямоугольной декартовой системе координат.

Определение 3.6. *Прямоугольной декартовой системой координат* в пространстве называется совокупность некоторой точки O и прямоугольного базиса. Точка O называется *началом координат*; прямые Ox, Oy, Oz, проходящие через начало координат в направлении ортов базиса, называются *координатными осями – абсцисс*, *ординат* и *аппликат* соответственно (рис. 3.1).

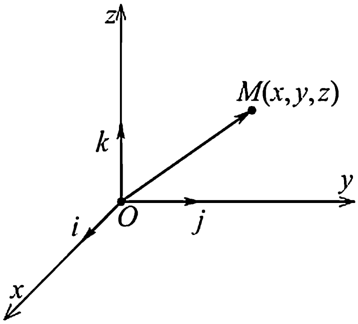


Рис. 3.1. *Прямоугольный базис и прямоугольная декартова система координат*

Плоскости, проходящие через какие-либо две координатные оси, называются *координатными плоскостями* Oxy, Oyz и Oxz. *Прямоугольными координатами произвольной точки* M пространства называются координаты её радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в данном прямоугольном базисе (рис. 3.1). Их пишут в скобках после обозначения точки $M(x, y, z)$; x называется *абсциссой*, y – *ординатой*, а z – *аппликатой* точки M.

Выбранное определение прямоугольных координат точки пространства устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками действительных чисел (x, y, z).

Пусть заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Для вектора $\overrightarrow{AB}$ имеем

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_1-z_2)\vec{k}\,. \tag{3.6}$$

Замечание 3.2. Координаты вектора в прямоугольном базисе часто пишут в скобках после обозначения вектора. Например, $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

§ 4. Скалярное произведение двух векторов

Определение 4.1. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол между ними не определён (т. е. может принимать любое значение между 0 и π). Однако косинус этого угла ограничен, и в соответствии с определением 4.1 скалярное произведение таких векторов существует и равно 0.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принято обозначать так: $\vec{a}\cdot\vec{b}$, иногда $(\vec{a},\vec{b})$. Таким образом, по определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}), \tag{4.1}$$

где $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (коммутативность);

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивность);

4) $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

5) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$;

6) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

Замечание 4.1. Свойства 3 – 4 называются *линейными свойствами* скалярного произведения.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложениями в прямоугольном базисе

$$\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\\ \vec{b}&=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},\end{aligned} \tag{4.2}$$

то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{4.3}$$

В частном случае, при $\vec{a}=\vec{b}$, имеем $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$, т. е.

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{4.4}$$

Равенство (4.4) дает выражение для длины вектора $\vec{a}$ через его координаты. В частности, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и, следовательно, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$ (см. формулу (3.5)), то

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{4.5}$$

Соотношение (4.5) – это формула для определения расстояния между точками A и B по известным прямоугольным координатам этих точек.

Из определения 4.1 с учетом (4.3) и (4.4) следует формула для косинуса угла между данными векторами:

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{4.6}$$

Полагая в (4.6) поочередно $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{k}$, получим формулы для *направляющих косинусов* вектора $\vec{a}$, под которыми понимают косинусы углов, образованных вектором $\vec{a}$ с векторами прямоугольного базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ или, что то же самое, с осями прямоугольной системы координат. Имеем

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|}=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|}=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{k})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|}=\frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

$$\cos^2(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i})+\cos^2(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j})+\cos^2(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{k})=1.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ – это координаты его орта $\vec{a}_0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Пример 4.1. Точки $A(1,-1,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(2,1,2)$– вершины треугольника. Найти его внутренний угол при вершине B.

►Угол ΔABC при вершине B образован векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ (рис. 4.1). Их координаты найдём, вычитая из координат их концов координаты начала (формула (3.5)): $\overrightarrow{BA}=(-2,2,-1)$, $\overrightarrow{BC}=(-1,4,1)$, а длины по формуле (4.5): $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=3$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2}=3\sqrt{2}$. Для $\cos\hat{B}$ в силу (4.6) имеем равенство

$$\cos\hat{B}=\frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{(-2)(-1)+2\cdot 4+(-1)\cdot 1}{3\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$
откуда заключаем, что $\hat{B}=\pi/4$.◄

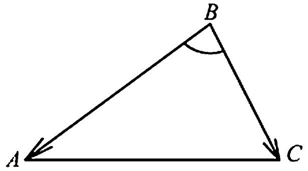


Рис. 4.1. *К примеру 4.1*

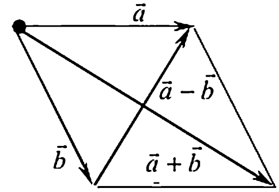


Рис. 4.2. *К примеру 4.2*

Пример 4.2. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=3$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=2\pi/3$ (рис. 4.2).

►Длины диагоналей параллелограмма равны $|\vec{a}+\vec{b}|=|5\vec{p}+\vec{q}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|=$ $=|\vec{p}+3\vec{q}|$(рис. 4.2). Так как $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}$, поэтому $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(5\vec{p}+\vec{q})^2}=$ $=\sqrt{25\vec{p}^2+10\vec{p}\vec{q}+\vec{q}^2}$. Так как $\vec{p}\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=12\cos(2\pi/3)=-6$, $\vec{p}^2=|\vec{p}|^2=16$, $\vec{q}^2=|\vec{q}|^2=9$, то $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{25\cdot 16-60+9}=\sqrt{349}$. Аналогично, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{p}+3\vec{q})^2}=$ $=\sqrt{\vec{p}^2+6\vec{p}\vec{q}+9\vec{q}^2}=\sqrt{16-36+9\cdot 9}=\sqrt{61}$.◄

Замечание 4.2. Скалярное произведение используется для нахождения углов между векторами, проекции одного вектора на направление другого, для установления факта ортогональности (перпендикулярности) векторов, для вычисления работы A, затрачиваемой при движении материальной точки из положения P_1 в положение P_2 в поле действия силы $\vec{F}$.

Глава 2. **Прямая на плоскости**

§ 1. Понятие об уравнении плоской линии. Алгебраические линии. Теорема об инвариантности порядка

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy и некоторая линия Г.

Определение 1.1. Уравнение
$$F(x,y)=0 \tag{1.1}$$
с двумя переменными x и y называется *уравнением плоской линии* Г, если ему удовлетворяют координаты x, y любой точки Г и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих Г.

Равенство $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ есть уравнение окружности с центром в точке $A(a, b)$ и радиусом r (рис. 1.1), ибо ему удовлетворяют координаты любой её точки и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих ей.

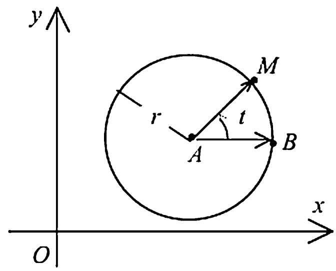


Рис. 1.1. Окружность с центром в точке А и радиусом r

Замечание 1.1. Уравнение вида (1.1) не всегда задаёт линию. Так, уравнению $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ удовлетворяют координаты единственной точки $A(a, b)$, а уравнению $(x-a)^2+(y-b)^2=-1$ не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости.

Определение 1.2. Плоская линия Г называется *алгебраической линией порядка n*, если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат Oxy она может быть задана уравнением вида

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}+\ldots+A_sx^{k_s}y^{l_s}=0, \tag{1.2}$$

где все показатели степени – неотрицательные целые числа, n – степень этого уравнения, равная наибольшей из сумм k_i+l_i, $i=1, \ldots, s$, при этом отличен от нуля хотя бы один коэффициент A_i, для которого $k_i+l_i=n$.

На плоскости можно выбрать бесчисленное множество прямоугольных декартовых систем координат, поэтому возникает вопрос о зависимости порядка данной алгебраической линии от выбора системы координат. Ответом на этот вопрос служит теорема об инвариантности порядка.

Теорема 1.1. Порядок алгебраической линии инвариантен по отношению к выбору прямоугольной декартовой системы координат.

Замечание 1.2. Все линии, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*. Таковыми будут, например, графики логарифмической, показательной, тригонометрических функций.

§ 2. Различные виды задания прямой на плоскости

1. Общее уравнение прямой на плоскости. Введём на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy и рассмотрим уравнение первой степени относительно x, y:

$$Ax+By+C=0,\ A^2+B^2\neq 0. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. Любая прямая на плоскости может быть задана в любой прямоугольной декартовой системе координат уравнением вида (2.1).

Теорема 2.2. Любое уравнение вида (2.1) определяет на плоскости прямую.

Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что прямая на плоскости, и только она, является линией первого порядка.

Уравнение (2.1) называется *общим уравнением* прямой на плоскости. Его коэффициенты A и B имеют определённый геометрический смысл, а именно они являются координатами вектора $\bar{n}$, перпендикулярного прямой, определяемой этим уравнением. Этот вектор называется *вектором нормали*, или *нормальным вектором* к данной прямой. Уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{2.2}$$

при различных значениях коэффициентов A, B задаёт все прямые плоскости, проходящие через точку $M_0(x_0,y_0)$. Оно называется *уравнением пучка прямых с центром в точке* M_0. Выбор конкретных значений A и B в (2.2) соответствует выбору той прямой пучка, которая проходит через точку M_0 перпендикулярно заданному вектору $\vec{n} = (A, B)$ (рис. 2.1).

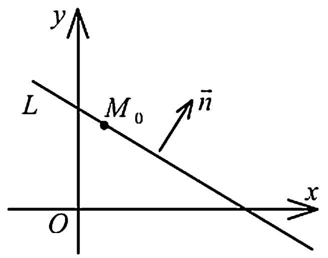


Рис. 2.1. *К уравнению пучка прямых*

Если один из коэффициентов A или B равен нулю, уравнение (2.1) задаёт прямую, параллельную одной из осей координат, а именно при $A = 0$ – прямую, параллельную оси Ox, а при $B = 0$ – оси Oy. При $C = 0$ уравнение (2.1) задаёт прямую, проходящую через начало координат.

Пример 2.1. Написать уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(-1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3, -2)$.

►Напишем уравнение пучка прямых с центром в точке $M_0(-1, 2)$:

$$A(x + 1) + B(y - 2) = 0. \tag{2.3}$$

Коэффициенты уравнения (2.3), как отмечено выше, есть координаты вектора нормали к прямой L, каковым здесь можно считать вектор $\vec{n} = (3, -2)$ из условия задачи. Подставив в (2.3) вместо A и B координаты вектора $\vec{n}$, после очевидных преобразований получаем уравнение прямой $L{:}3x - 2y + 7 = 0$.◄

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy и прямую L, задаваемую уравнением (2.1). Пусть в этом уравнении $B \neq 0$. При этом условии прямая L не параллельна оси Oy, а уравнение (2.1) приводится к виду

$$y = kx + b, \tag{2.4}$$

где $k = -A/B$, $b = -C/B$.

Коэффициент b из уравнения (3.1) называется *начальной ординатой* прямой L. Он равен ординате точки пересечения этой прямой с осью Oy ($y = b$ при $x = 0$). Для геометрической интерпретации коэффициента k введём понятие угла наклона данной прямой к оси Ox.

Определение 2.1. *Углом наклона* φ прямой L к оси Ox называется наименьший угол поворота этой оси, производимого вокруг точки пересечения Ox и прямой L в направлении против часовой стрелки до совмещения Ox с L (рис. 2.2).

При этом $\varphi = 0$, если прямая L и ось Ox параллельны или совпадают.

Коэффициент k из правой части уравнения (3.1) есть тангенс угла наклона φ прямой L к оси Ox. Он называется *угловым коэффициентом* этой прямой, а уравнение (2.4) – *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Замечание 2.1. Уравнением вида (2.4) не может быть задана прямая, параллельная оси Oy, так как она определяется уравнением вида (2.1) при $B = 0$, и поэтому не имеет углового коэффициента. Уравнение

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{2.5}$$

при всевозможных значениях k вместе с уравнением

$$x-x_0=0 \tag{2.6}$$

задаёт все прямые пучка с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Если известны координаты двух точек $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ прямой L, то её угловой коэффициент k определяется из равенства

$$k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, \tag{2.7}$$

которое можно получить из (2.5), подставив туда координаты точки M_1.

Пример 2.2. Найти угол между осью Ox и прямой $L: \sqrt{3}x+y-2=0$.

►Обозначим искомый угол через φ. Преобразуем уравнение L к виду (3.1): $y=-\sqrt{3}x+2$, отсюда $k=\operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3}$ и $\varphi=2\pi/3$.◄

Пример 2.3. Луч света проходит через точку $A(6, 2)$ и, отразившись от оси Ox в точке B, проходит через точку $C(-4, 3)$. Найти абсциссу точки B.

► Как известно из физики, угол падения равен углу отражения. Для угловых коэффициентов k_1 и k_2 прямых L_1 и L_2 (рис. 2.3) верно равенство

$$k_2=-k_1, \tag{2.8}$$

поскольку $\varphi_2=\pi-\varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2=-\operatorname{tg}\varphi_1$.Для k_1 и k_2 из (2.7) имеем

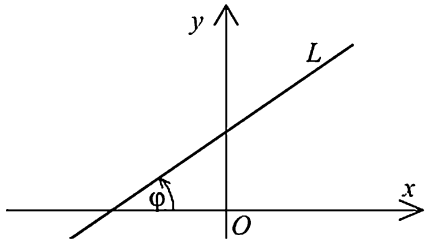


Рис. 2.2. *Угол наклона прямой к оси Ox*

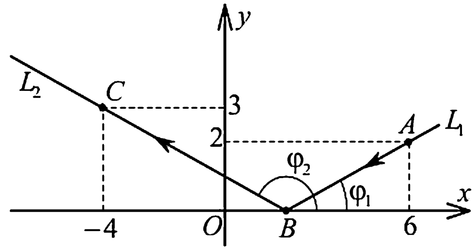


Рис.2.3. *К примеру 2.3*

$k_1=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{2}{6-x_B}$, $k_2=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{3}{-4-x_B}$, x_B – абсцисса точки B (рис. 2.3),

отсюда с учетом (2.8) получаем $\frac{2}{6-x_B}=\frac{3}{4+x_B} \Rightarrow x_B=2$.◄

3. Каноническое уравнение прямой на плоскости. Уравнение

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \tag{2.9}$$

называется *каноническим уравнением* прямой на плоскости. Оно определяет прямую L, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{q}(l,m)$, называемому её *направляющим вектором* (рис. 2.4, $M(x, y)$ – текущая точка прямой).

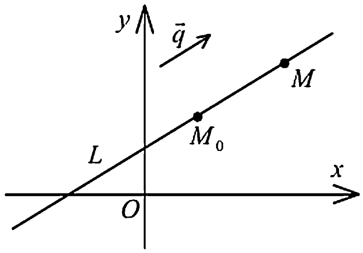


Рис. 2.4. К заданию прямой на плоскости каноническим уравнением

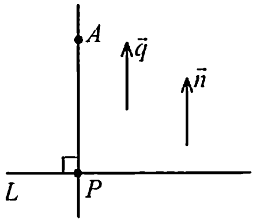


Рис. 2.5. К примеру 2.4.

Если заданы две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, принадлежащие данной прямой, то её уравнение записывается в виде

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \tag{2.10}$$

за направляющий вектор $\vec{q}$ можно принять вектор $\overrightarrow{M_0M_1}\ (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Уравнение (2.10) называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки.*

Пример 2.4. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(2, -1)$ на прямую L: $3x - 2y + 5 = 0$.

►За направляющий вектор $\vec{q}$ перпендикуляра AP примем $\vec{n}$ – вектор нормали к прямой L (рис. 2.5): $\vec{q} = \vec{n} = (3, -2)$, AP : $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2}$.◄

Пример 2.5. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(2, -1)$ и $B(1, 3)$.

►Подставим координаты точек A и B в уравнение (2.10), получим: $\frac{x-2}{1-2} = \frac{y+1}{3+1} \Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4}$.◄

§ 3. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Вычисление угла между двумя прямыми

Две прямые на плоскости могут либо совпадать, либо пересекаться в одной точке, либо не иметь ни одной общей точки, т. е. быть параллельными.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы следующими уравнениями с угловым коэффициентом: L_1: $y = k_1x + b_1$, L_2: $y = k_2x + b_2$.

Условие параллельности таких прямых следует из условия равенства углов наклона φ_1 и φ_2 этих прямых к оси Ox. Отсюда $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2$, приходим к следующему утверждению: $L_1 \| L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

Для угла φ между прямыми L_1 и L_2, понимаемого как угол поворота в направлении против часовой стрелки прямой L_1 до совмещения с прямой L_2 (рис. 3.1), имеем формулу

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}, \tag{3.1}$$

где $k_1=\operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2=\operatorname{tg}\varphi_2$.

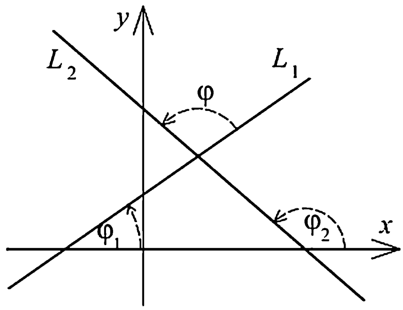


Рис. 3.1. *К формуле для тангенса угла между прямыми*

Если $1+k_1k_2=0$, то $\operatorname{ctg}\varphi=0$, поэтому угол $\varphi=\pi/2$ и данные прямые перпендикулярны. Итак, любое из равенств $k_1k_2+1=0$ или $k_1=-1/k_2$ есть условие перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.

Пример 3.1. Написать уравнение прямой L, проходящей через точку (2, 3), если она: а) параллельна прямой L_1: $y=-2x+5$; б) перпендикулярна прямой L_2: $y=x-1$; в) перпендикулярна прямой L_3: $y=1$; г) образует угол $\pi/4$ с прямой L_1: $y=3x+5$.

►Пусть k_1, k_2, k_3, k_4 – угловые коэффициенты прямых L_1, L_2, L_3, L_4, $k_1=-2$, $k_2=1$, $k_3=0$, $k_4=3$, а k – угловой коэффициент прямой L. Напишем уравнение пучка прямых с центром в точке (2, 3): $y-3=k(x-2)$, $x=2$ и определим k так, чтобы удовлетворить условиям а) – г).

а) $k=k_1=-2$, тогда L: $y-3=-2(x-2)\Rightarrow L$: $y=-2x+7$.

б) $k=-1/k_2=-1$, тогда: L: $y-3=-(x-2)\Rightarrow L$: $y=-x+5$.

в) Прямая L_3 параллельна оси Ox, следовательно, прямая L перпендикулярна этой оси и не имеет углового коэффициента. Данному условию удовлетворяет прямая L: $x=2$ из рассматриваемого пучка.

г) Из (3.1) имеем $\operatorname{tg}\varphi=1=\dfrac{k-3}{1+3k}$ или $\operatorname{tg}\varphi=1=\dfrac{3-k}{1+3k}$, для k получаем два уравнения: $\left[\begin{array}{l}1+3k=k-3,\\ 1+3k=3-k,\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=-2,\\ k=1/2.\end{array}\right.$ Данному условию удовлетворяют две прямые: L: $y-3=-2(x-2)\Rightarrow y=-2x+7$ и L: $y-3=-(x-2)/2\Rightarrow y=-x/2+2$.◄

§ 4. Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат и заданы прямая L: $Ax+By+C=0$, и точка $M_0(x_0, y_0,)$ не лежащая на L.

Расстоянием d от точки M_0 до прямой L называется длина отрезка M_0N, где $N(x_1, y_1)$ – проекция точки M_0 на данную прямую (рис. 4.1). Для d имеем формулу

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (4.1)$$

Пример 4.1. Найти длину стороны квадрата, если одна из его сторон расположена на прямой L: $y=-x+3$, а одна из вершин – в точке $A(3, 6)$.

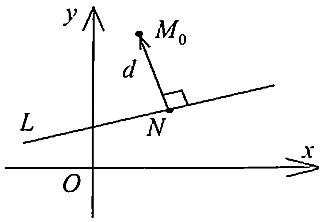


Рис. 4.1. К понятию расстояния от точки M_0 до прямой L

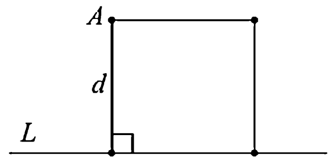


Рис. 4.2. К примеру 5.1

►Точка A не принадлежит L, ибо её координаты не удовлетворяют уравнению L. Поэтому длина стороны квадрата равна расстоянию d от точки A до прямой L (рис. 4.2). Преобразовав уравнение L к виду $x+y-3=0$, найдём это расстояние по формуле (4.1).

$$d=\frac{|3+6-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}.◄$$

Глава 3. **Плоскость и прямая в пространстве**

§ 1. Понятие об уравнении поверхности. Алгебраические поверхности. Теорема об инвариантности порядка

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ и задана некоторая поверхность (S), понимаемая как множество точек пространства, обладающих общим геометрическим свойством.

Определение 1.1. Уравнение

$$F(x, y, z)=0 \qquad (1.1)$$

с тремя переменными x, y, z называется уравнением данной поверхности (S), если ему удовлетворяют координаты x, y, z любой точки (S) и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих ей.

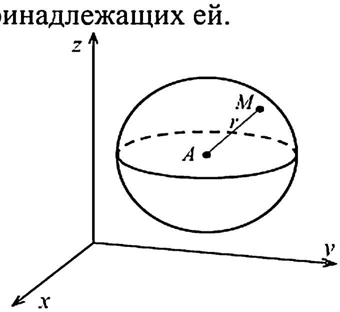


Рис. 1.1. Сфера с центром в точке A и радиусом r

Замечание 1.1. Уравнение вида (1.1) не всегда задаёт линию. Так, уравнению $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$ удовлетворяют координаты единственной точки $A(a, b, c)$, а уравнению $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=-1$ не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

Определение 1.2. Поверхность (S) называется *алгебраической поверхностью n-го порядка*, если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ она может быть задана уравнением вида

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}z^{m_1}+\ldots+A_sx^{k_s}y^{l_s}z^{m_s}=0,$$

где все показатели степени – неотрицательные числа, а n – степень этого уравнения, равная наибольшей из сумм $k_i+l_i+m_i$, $i=1, \ldots, s$, при этом отличен от нуля хотя бы один коэффициент A_i, для которого $k_i+l_i+m_i=n$.

Для алгебраической поверхности, также как и для алгебраической плоской линии, справедлива теорема об инвариантности порядка.

Теорема 1.1. Порядок алгебраической поверхности инвариантен по отношению к выбору прямоугольной декартовой системы координат.

Замечание 1.2. Все поверхности, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*.

§ 2. Плоскость как поверхность первого порядка. Общее уравнение плоскости

Введём в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и рассмотрим уравнение первой степени (или линейное уравнение) относительно x, y, z:

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2\neq 0. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. Любая плоскость может быть задана в произвольной прямоугольной декартовой системе координат уравнением вида (2.1).

Точно так же, как и в случае прямой на плоскости, справедлива теорема, обратная теореме 2.1.

Теорема 2.2. Любое уравнение вида (2.1) задаёт в пространстве плоскость.

Из теорем 2.1 и 2.2 следует, что плоскость, и только она, является поверхностью первого порядка.

Уравнение (2.1) называется *общим уравнением плоскости*. Его коэффициенты A, B, C геометрически трактуются как координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости, определяемой этим уравнением. Вектор $\vec{n}(A,B,C)$ называется вектором нормали к данной плоскости. Уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{2.2}$$

при всевозможных значениях коэффициентов A, B, C задаёт все плоскости, проходящие через точку $M(x_0, y_0, z_0)$. Оно называется *уравнением связки плоскостей*. Выбор конкретных значений A, B, C в (2.2) означает выбор плоскости P из связки, проходящей через точку M_0 перпендикулярно заданному вектору $\vec{n}(A,B,C)$ (рис. 2.1).

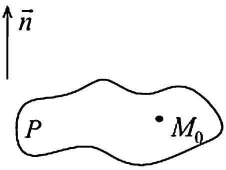


***Рис. 2.1**. К уравнению связки плоскостей*

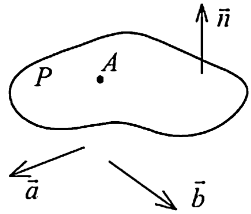


***Рис. 2.2**. К примеру 2.1*

Пример 2.1. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(1, 2, 0)$ параллельно векторам $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 0, 1)$.

►Вектор нормали $\vec{n}(A, B, C)$ к плоскости P ортогонален данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2.2), следовательно $\vec{n}\vec{a} = 0, \vec{n}\vec{b} = 0$. Для его координат получаем систему $\begin{cases} A + 2B - C = 0, \\ 2A + C = 0. \end{cases}$ Она имеет бесчисленное ингожество решений: $A = -C/2$, $B = -3C/4$, где C может принимать любые вещественные значения. Положим $C = -4$, получим: $A = 2$, $B = -3$, таким образом $\vec{n}(2, -3, -4)$. Подставим координаты точки M_0 и координаты вектора $\vec{n}$ в уравнение (2.2), получим уравнение плоскости P: $2(x-1) - 3(y-1) - 4z = 0$ или P: $2x - 3y - 4z + 4 = 0$.◄

Если два из коэффициентов A, B, C уравнения (2.1) равны нулю, оно задаёт плоскость, параллельную одной из координатных плоскостей. Так, при $A = B = 0$, $C \neq 0$ – плоскость P_1: $Cz + D = 0$ или P_1: $z = -D/C$. Она параллельна плоскости Oxy, поскольку её вектор нормали $\vec{n}_1(0, 0, C)$ перпендикулярен этой плоскости. При $A = C = 0$, $B \neq 0$ или $B = C = 0$, $A \neq 0$ уравнение (2.1) определяет плоскости P_2: $By + D = 0$ и P_3: $Ax + D = 0$, параллельные координатным плоскостям Oxz и Oyz, так как их векторы нормали $\vec{n}_2(0, B, 0)$ и $\vec{n}_3(A, 0, 0)$ им перпендикулярны (рис. 2.3). Если только один из коэффициентов A, B, C уравнения (2.1) равен нулю, то оно задаёт плоскость, параллельную одной из координатных осей. Так, плоскость P: $Ax + By + D = 0$ параллельна оси Oz, ибо её вектор нормали $\vec{n}(A, B, 0)$ перпендикулярен оси Oz. Заметим, что она проходит через прямую L: $Ax + By + D = 0$, лежащую в плоскости Oxy (рис. 2.4). При $D = 0$ уравнение (2.1) задаёт плоскость, проходящую через начало координат.

Пример 2.2. Найти значения параметра λ, при которых уравнение $\lambda x + (\lambda^2 + 2\lambda)y + (\lambda^2 + \lambda - 2)z + \lambda - 3 = 0$ определяет плоскость P:

а) параллельную одной из координатных плоскостей;

б) параллельную одной из координатных осей;

в) проходящую через начало координат.

►Запишем данное уравнение в виде

$$\lambda x + \lambda(\lambda + 2)y + (\lambda + 2)(\lambda - 1)z + \lambda - 3 = 0. \tag{2.3}$$

При любом значении λ уравнение (2.3) определяет некоторую плоскость, ибо коэффициенты при x, y, z в (2.3) не обращаются в нуль одновременно.

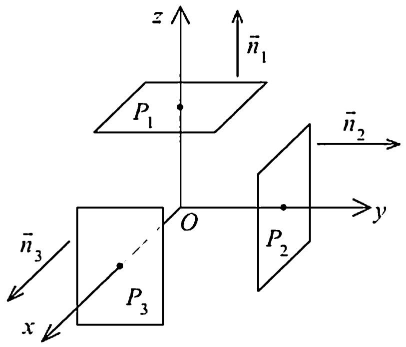


Рис. 2.3. *Плоскости, параллельные плоскостям координат*

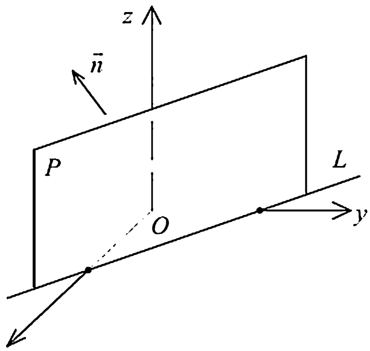


Рис. 2.4. *Плоскость P: Ax+By+D=0, параллельная оси Oz*

а) При $\lambda = 0$ уравнение (2.3) определяет плоскость P, параллельную плоскости Oxy, P: $z = -3/2$, а при $\lambda = -2$ оно определяет плоскость P, параллельную плоскости Oyz, P: $x = -5/2$. Ни при каких значениях λ плоскость P, определяемая уравнением (2.3), не параллельна плоскости Oxz, так как коэффициенты при x, z в (2.3) не обращаются в нуль одновременно.

б) При $\lambda = -1$ уравнение (2.3) задает плоскость P, параллельную оси Oz, P: $x + 3y - 2 = 0$. При остальных значениях параметра λ оно не определяет плоскости, параллельной только одной из координатных осей.

в) При $\lambda = 3$ уравнение (2.3) определяет плоскость P, проходящую через начало координат, P: $3x + 15y + 10z = -0$.◄

§ 3. Расстояние от точки до плоскости

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова система координат, задана плоскость P, определяемая уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.1}$$

и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не принадлежащая P.

Расстоянием d от точки M_0 до плоскости P называется, как известно, длина отрезка M_0N, где $N(x_1, y_1, z_1)$ – проекция точки M_0 на данную плоскость (рис. 3.1). Для величины d справедлива формула:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.2}$$

Пример 3.1. Найти длину ребра куба, если одна из его граней расположена в плоскости $P: x - 2y - 2z + 2 = 0$, а одна из его вершин – в точке $A(4, -1, -2)$ (рис. 3.2).

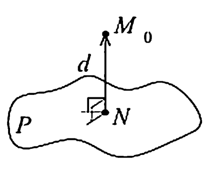


Рис. 3.1. *К понятию расстояния от точки M_0 до плоскости P*

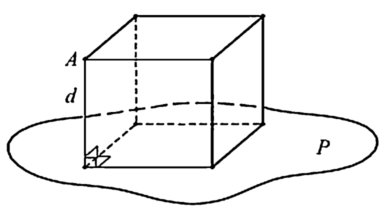


Рис. 3.2. *К примеру 3.1*

►Точка $A(4, -1, -2)$ не принадлежит плоскости P, ибо её координаты не удовлетворяют уравнению P. Поэтому длина d ребра куба равна расстоянию от точки A до плоскости P (рис. 3.2). Найдём это расстояние по формуле (3.2): $d = \dfrac{|4-2(-1)-2(-2)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{9}} = 4$.◄

§ 4. Уравнения линии в пространстве

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ и задана линия Г, понимаемая как множество точек пространства, обладающих некоторым общим геометрическим свойством. Им, например, может быть принадлежность любой её точки одновременно двум поверхностям, что соответствует заданию Г как линии пересечения этих поверхностей.

Определение 4.1. Система из двух уравнений с тремя переменными x, y, z

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{4.1}$$

называется *уравнениями линии* Г, если координаты любой её точки удовлетворяют этой системе, а координаты точек, не принадлежащих Г, ей не удовлетворяют.

Каждое из уравнений системы (4.1) задаёт некоторую поверхность, тогда Г – линия пересечения этих поверхностей. Так, система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2, \\ y=z \end{cases} \tag{4.2}$$

определяет в пространстве окружность как линию пересечения сферы (S) $x^2+y^2+z^2=r^2$ и плоскости P: $y = z$ (рис. 4.1).

Одна и та же линия может быть пересечением различных пар поверхностей. Поэтому её можно задавать различными системами уравнений вида (4.1). Так, вышеупомянутая окружность является также линией пересечения плоскости P: $y = z$ и поверхности (S_1): $x^2 + 2y^2 = r^2$, которая (разд. 2, гл. 5, § 6), называется цилиндром (рис. 4.2). Поэтому система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2y^2=r^2, \\ y=z \end{cases}$$

также, наряду с (4.2), является уравнениями данной окружности.

Для линии Г, определяемой системой (4.1), можно найти уравнение её проекции Г′ в ту или иную координатную плоскость. Пусть точка $M'(x,y,0)$ – проекция точки $M(x, y, z)$, принадлежащей Г, в плоскость Oxy (рис. 4.3).

Очевидно, что абсциссы и ординаты этих двух точек равны. Поэтому исключение координаты z из уравнений (4.1) даёт ту связь между x и y, характеризующую линию Г′ – проекцию Г в плоскость Oxy, т. е. приводит к уравнению Г′. Так, при исключении z из уравнений (4.2) приходим к уравнению $x^2+y^2=r^2$, определяющему проекцию Г′ данной окружности Г в плоскость Oxy, которая, как мы увидим ниже (разд. 2,гл. 4, § 2), является эллипсом (рис. 4.3). Аналогично может быть рассмотрен вопрос об уравнении проекции данной линии в другие координатные плоскости.

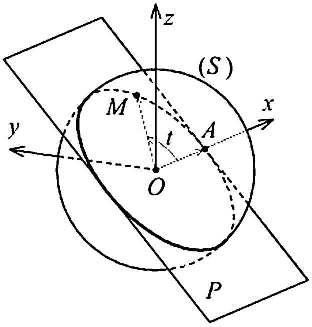


Рис. 4.1. Окружность Г как линия пересечения сферы (S) и плоскости P

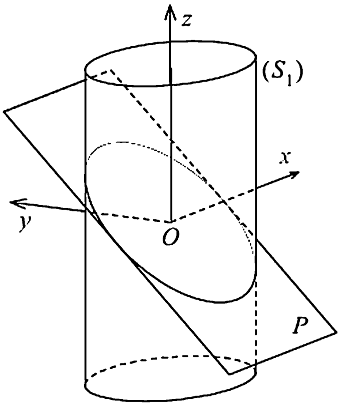


Рис. 4.2. Окружность Г как линия пересечения цилиндра и плоскости P

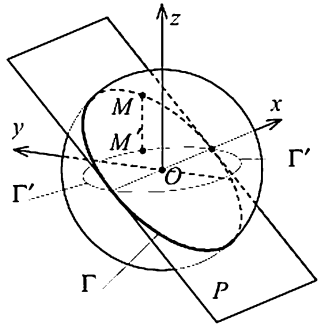


Рис. 4.3. Линия Г′ – проекция линии Г в плокость Oxy

§ 5. Различные виды уравнений прямой в пространстве

Введём в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$.

1. Общие уравнения прямой. Пусть прямая L есть линия пересечения двух непараллельных плоскостей P_1 и P_2, определяемых уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (5.1)$$

называется *общими уравнениями* прямой L. При этом равенства $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ не имеют места хотя бы для одной из пропорций, что следует из условия параллельности плоскостей.

2. Канонические уравнения прямой. Любую прямую L в пространстве можно задать принадлежащей ей точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевым вектором $\vec{q}(l,m,n)$, коллинеарным ей и называемым её *направляющим вектором* (рис. 5.1), причём и точка M_0, и вектор $\vec{q}$ выбираются произвольно. Уравнения

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (5.2)$$

называются *каноническими уравнениями* прямой в пространстве.

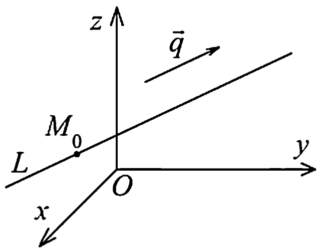


Рис. 5.1. *К заданию прямой в пространстве каноническими уравнениями*

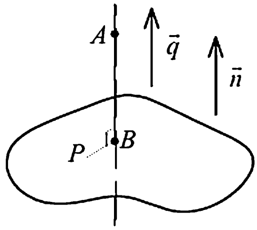


Рис. 5.2. *К примеру 5.1*

Замечание 5.1. Переход от общих уравнений прямой в пространстве к каноническим сводится к отысканию координат любой точки, принадлежащей данной прямой и направляющего вектора. Этот переход описан в [13].

Пример 5.1. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(1, -2, 1)$ на плоскость P: $x + 2y - z = 0$.

►За направляющий вектор $\vec{q}$ перпендикуляра AB к плоскости P можно взять вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости P (рис. 5.2): $\vec{q} = \vec{n} = (1, 2, -1)$. Уравнения AB имеют вид $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.◄

3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Задание прямой каноническими уравнениями позволяет легко установить их взаимное расположение в пространстве.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы следующими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \qquad L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Их направляющие векторы $\vec{q}_1(l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{q}_2(l_2, m_2, n_2)$ соответственно.

Условие параллельности прямых L_1 и L_2 равносильно коллинеарности векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, следовательно, пропорциональности их координат:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{5.3}$$

Условие перпендикулярности этих прямых эквивалентно условию перпендикулярности векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, которое в свою очередь приводит к условию выполнения равенства $\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = 0$, или $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Понимая угол φ между прямыми L_1 и L_2 как угол между их направляющими векторами, получаем для $\cos\varphi$ следующую формулу:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{5.4}$$

Условием совпадения прямых L_1 и L_2 является совместное выполнение равенств (5.3) и $\dfrac{x_2 - x_1}{l_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{m_1} = \dfrac{z_2 - z_1}{n_1}$, выражающего условие принадлежности точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$ прямой L_2 также и прямой L_1.

Пример 5.2. Найти значения параметров λ и μ так, чтобы прямые $L_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{1}$, $L_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{\lambda}=\frac{z}{\mu}$ были:

а) параллельны, б перпендикулярны.

►Обозначим через $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ направляющие векторы данных прямых, $\vec{q}_1=(2,-2,1)$, $\vec{q}_2=(3,\lambda,\mu)$. Тогда:

а) $L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1 \| \vec{q}_2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}=-\frac{2}{\lambda}=\frac{1}{\mu} \Rightarrow \lambda=-3, \mu=\frac{3}{2}$.

б) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1 \perp \vec{q}_2 \Leftrightarrow \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2=0 \Rightarrow 6-2\lambda+\mu=0 \Rightarrow \begin{cases}\mu=2\lambda-6,\\ \lambda\in \mathbf{R},\end{cases}$ например, $\lambda=1$, $\mu=-4$.◄

Пример 5.3. Найти угол φ между прямыми

$$L_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1},\quad L_2: \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{-1}.$$

►Обозначим через $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ направляющие векторы данных прямых: $\vec{q}_1=(2,-2,1)$, $\vec{q}_2=(1,-4,1)$. Из (5.4) имеем

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot 1-2(-4)+1\cdot 1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}.$$◄

§ 6. Взаимное расположение прямой и плоскости

Прямая и плоскость в пространстве могут быть параллельными, прямая может принадлежать плоскости, а также может пересекать её в некоторой точке. Пусть плоскость P задана общим уравнением

$$P: Ax+By+Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2\neq 0,$$

а прямая L – каноническими уравнениями:

$$L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Тогда $\vec{n}(A,B,C)$ – вектор нормали к P, $\vec{q}(l,m,n)$ – направляющий вектор прямой L, а точка $M(x_0, y_0, z_0)\in L$. Условие параллельности прямой L и плоскости P эквивалентно условию ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\vec{q}$ (рис. 6.1) или равенству нулю их скалярного произведения: $\vec{n}\cdot\vec{q}=0$, что приводит к равенству

$$Al+Bm+Cn=0. \tag{6.1}$$

Если к равенству (6.1) присоединить условие принадлежности точки $M(x_0, y_0, z_0)$ плоскости P, т. е. равенство

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \tag{6.2}$$

то система равенств (6.1) и (6.2) выражает условие принадлежности прямой L плоскости P.

Условие перпендикулярности прямой L и плоскости P ведёт к условию коллинеарности векторов $\vec{n}$ и $\vec{q}$ (рис. 6.2), выражаемому равенством

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \tag{6.3}$$

Пример 6.1. Найти значение параметра λ, при котором прямая $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{\lambda}$ и плоскость $P: 2x - y + z + 5 = 0$ параллельны.

►Обозначим через $\vec{q}$ направляющий вектор прямой L, $\vec{q} = (2, 3, \lambda)$, а через $\vec{n}$ – вектор нормали к плоскости P, $\vec{n} = (1, -1, 1)$. Прямая L и плоскость P будут параллельны, если векторы $\vec{q}$ и $\vec{n}$ будут перпендикулярны (рис. 6.1). Последнее условие эквивалентно равенству $(\vec{q}, \vec{n}) = 0$, поэтому для λ получаем уравнение $2\cdot 2 + 3\cdot(-1) + \lambda = 0$, откуда находим $\lambda = -1$.◄

Пример 6.2. Найти значения параметров λ и μ, при которых прямая $L: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2}$ и плоскость $P: 2x + \lambda y + \mu z + 5 = 0$ перпендикулярны.

►Пусть $\vec{q}$ – направляющий вектор прямой L, $\vec{q} = (1, 3, 2)$, а $\vec{n}$ – вектор нормали к плоскости P, $\vec{n} = (2, \lambda, \mu)$. Прямая L и плоскость P будут перпендикулярны, если векторы $\vec{q}$ и $\vec{n}$ будут коллинеарны (рис.6.2). Из (6.3) имеем соотношения $\frac{1}{2} = \frac{3}{\lambda} = \frac{2}{\mu}$, откуда находим: $\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = 4$.◄

За угол φ между прямой L и плоскостью P, неперпендикулярной L, примем, как в стереометрии, угол между L и её проекцией на плоскость P (рис. 6.3). Очевидно, $\varphi = 0$, если прямая L принадлежит плоскости P. В случае, когда L перпендикулярна P, будем считать $\varphi = \pi/2$. Имеем

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\vec{n},\vec{q}})| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{q}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{q}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{6.4}$$

Пример 6.3. Найти угол между прямой $L: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$ и плоскостью P: $4x + y - z - 5 = 0$.

► $\vec{n} = (4, 1, -1)$ – вектор нормали к плоскости P, а $\vec{q} = (2, -1, -2)$ – направляющий вектор прямой L. Понимая угол φ между L и P в вышеописанном

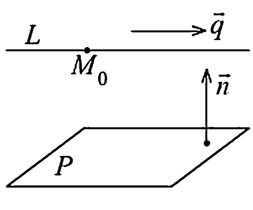


Рис. 6.1. Прямая L параллельна плоскости P

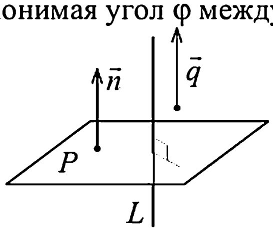


Рис. 6.2. Прямая L перпендикулярна

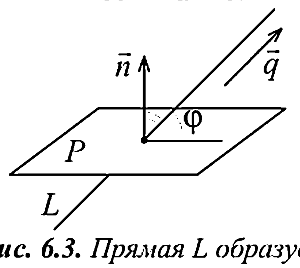


Рис. 6.3. Прямая L образует угол φ с плоскостью P

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\vec{n},\vec{q}})| = \frac{|4\cdot 2 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2)|}{\sqrt{(-4)^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$◄

Глава 4. **Кривые второго порядка**

§ 1. Общее уравнение линии второго порядка. Классификация линий второго порядка

Определение 1.1. Линия, определяемая в произвольной прямоугольной декартовой системе координат $O'x'y$ алгебраическим уравнением второй степени, т. е. уравнением вида

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+Dx'+E\ y'+F=0, \tag{1.1}$$

где $A^2+\ B^2+C^2\neq 0$, называется *линией второго порядка*.

При подходящем выборе системы координат уравнение (1.1) можно привести к одному из следующих 9 видов:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$	(1.2)	$y^2=2px;$	(1.7)
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1;$	(1.3)	$y^2-a^2=0;$	(1.8)
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0;$	`(1.4)	$y^2+a^2=0;$	(1.9)
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$	(1.5)	$y^2=0.$	(1.10)
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0;$	(1.6)		

Предполагается, что a, b, $p>0$ в каждом из уравнений (1.2) – (1.9). Уравнения (1.3) и (1.9) не задают никакого множества точек; говорят, что они определяют мнимые линии второго порядка. Уравнение (1.4) задаёт одну точку – начало координат. Уравнения (1.6), (1.8), (1.10) определяют пару пересекающихся прямых, пару параллельных и пару совпадающих прямых. Эти пары прямых называются *вырожденными линиями второго порядка*. Остальные три уравнения (1.2), (1.5) и (1.7) определяют *невырожденные линии второго порядка* (или *невырожденные кривые второго порядка*), называемые *эллипсом, гиперболой и параболой*. Именно они и будут изучаться в настоящей главе. Каждому из этих уравнений будет сопоставлена линия и будут изучены её свойства.

§ 2. Эллипс и его свойства

Определение 2.1. *Эллипсом* называется кривая второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a\geq b>0. \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) называется *каноническим уравнением* эллипса.

Свойства эллипса

1. *Эллипс – осесимметричная и центрально симметричная кривая.* Его оси симметрии – это оси координат, а центр симметрии – начало координат.

2. *Эллипс – ограниченная кривая. Построение эллипса.* Эллипс заключён внутри прямоугольника $D=\{(x,y)\colon |x|\leq a,\ |y|\leq b\}$, а также внутри окружности $x^2+y^2=a^2$ с центром в начале координат и радиусом a (рис. 2.1). На рис. 2.1

заштрихована та часть плоскости Oxy, в которой лежит эллипс.

Эллипс получается из рассматриваемой окружности путем её равномерного сжатия к оси Ox с коэффициентом b/a, при этом ордината каждой её точки $M_1(x, Y)$ умножается на одно и то же число b/a, получающаяся при этом точка $M_2(x, (b/a)Y)$ принадлежит данному эллипсу (рис. 2.2).

Построив дугу эллипса в первом квадранте ($x \ge 0, y \ge 0$), остальные его части получим, используя симметрию относительно осей координат (рис. 2.2).

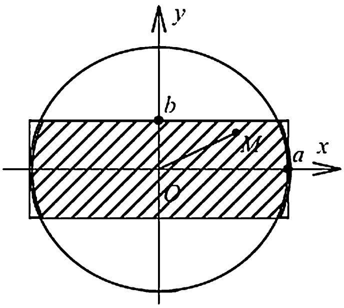


Рис. 2.1. *К расположению эллипса на координатной плоскости*

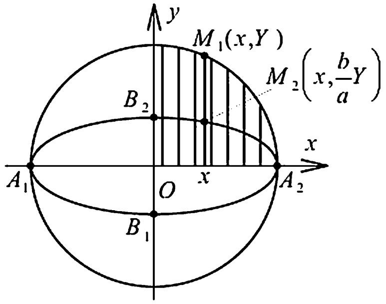


Рис. 2.2. *Эллипс как фигура, получаемая при сжатии окружности (b/a = 2/5)*

Из уравнения (2.1) следует, что точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ принадлежат эллипсу. Они называются его *вершинами*. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются *большой* и *малой осями* эллипса, а числа a и b – *большой* и *малой полуосями*.

3. *Фокусы эллипса. Свойство фокальных радиусов точки эллипса.* Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, находящиеся на большой оси эллипса, называются его *фокусами*, а расстояния r_1 и r_2 произвольной точки эллипса $M(x, y)$ до этих точек – *фокальными радиусами* точки M (рис. 2.3). При этом

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{2.2}$$

Пример 2.1. Эллипс задан уравнением $16x^2 + 25y^2 = 400$. Найти его полуоси и координаты фокусов. Изобразить этот эллипс на чертеже.

►Разделим обе части уравнения эллипса на 400, получим равенство $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, сравнив которое с уравнением (2.1), заключаем, что $a^2=25$, $b^2=16$, откуда $a=5$, $b=4$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$. Точки $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ – фокусы эллипса.

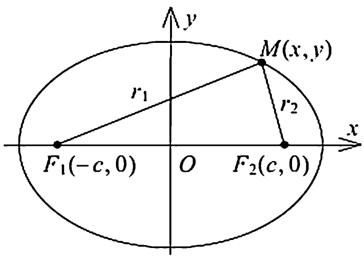


Рис. 2.3. *Точки F_1 и F_2 – фокусы эллипса, r_1, r_2 – фокальные радиусы его точки*

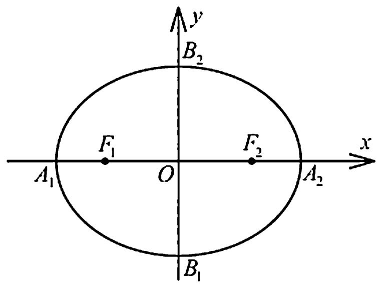


Рис. 2.4. *К примеру 2.1*

На рис. 2.4 изображен данный эллипс, A_1A_2 – его большая ось, $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, B_1B_2 – малая ось, $B_1(0, -4)$, $B_2(0, 4)$.◄

§ 3. Гипербола и её свойства

Определение 3.1. *Гиперболой* называется кривая, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;\ a, b > 0\,. \tag{3.1}$$

Равенство (3.1) называется *каноническим уравнением* гиперболы.

Свойства гиперболы

1. *Гипербола – осесимметричная* и *центрально симметричная кривая.* Ее оси симметрии – это оси координат, а центр симметрии – начало координат.

2. Точки гиперболы принадлежат множеству $G=\{(x, y)\colon |x|\geq a,\ |y|\geq a\}$. Гипербола – *неограниченная кривая.*

Гипербола имеет две бесконечные ветви, расположенные в левой и правой полуплоскостях координатной плоскости. На рис. 3.1 заштрихованы те части плоскости Oxy, в которых расположены ветви гиперболы.

Из уравнения (3.1) следует, что точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ принадлежат гиперболе. Отрезок A_1A_2, а также его длина $2a$ называются *действительной* осью гиперболы (рис. 3.2). Гипербола не пересекает ось Oy.

3. *Фокусы гиперболы. Свойство фокальных радиусов точки гиперболы.*

Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, находящиеся на действительной оси гиперболы, называются её *фокусами*, а расстояния r_1 и r_2 произвольной точки $M(x, y)$ до этих точек – *фокальными радиусами* точки M (рис. 3.1). При этом

$$|\,r_1 - r_2\,| = 2a.$$

4. *Асимптоты гиперболы. Построение гиперболы.* Прямые $L_1\colon\ y = \frac{b}{a}x$ и $L_2\colon y = -\frac{b}{a}x$ играют важную роль в исследовании и построении гиперболы. По мере удаления точки $M(x, y)$ от начала координат по гиперболе эта точка приближается сколь угодно близко к одной из этих прямых (но никогда не пересе-

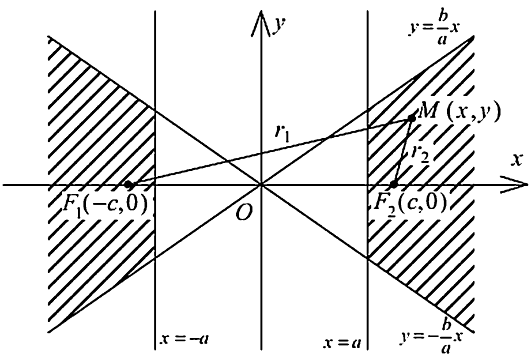


Рис. 3.1. К расположению гиперболы на координатной плоскости

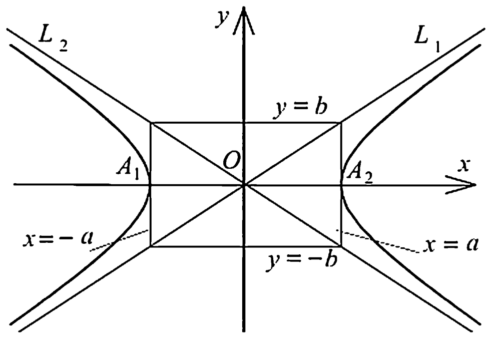


Рис. 3.2. Построение гиперболы, прямые L_1 и L_2 – асимптоты гиперболы

кает её – рис. 3.2 и свойство 2). Прямые L_1 и L_2 наываются *асимптотами* гиперболы. Они проходят через противолежащие вершины прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$, называемого *основным прямоугольником* гиперболы (рис. 3.2). Точки A_1, A_2 называются *вершинами* гиперболы.

Пример 3.1. Уравнение $9x^2 - 16y^2 = 144$ задаёт гиперболу. Найти её полуоси, уравнения асимптот. Изобразить гиперболу на чертеже.

►Разделим обе части данного уравнения на 144, получим равенство $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, сравнив которое с (3.1), заключаем, что $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, откуда $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$. Точки $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$ – фокусы гиперболы.

Асимптоты гиперболы L_1 и L_2 имеют уравнения $y = \pm\frac{3}{4}x$. Основной прямоугольник гиперболы образован прямыми $x = \pm 4$, $y = \pm 3$, прямые L_1 и L_2 проходят через вершины этого прямоугольника (рис. 3.3). На этом рисунке изображена данная гипербола, её действительная ось A_1A_2, $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, отрезок B_1B_2, называемый *мнимой осью*, $B_1(0, -4)$, $B_2(0, 4)$, точки F_1, F_2 – фокусы гиперболы.◄

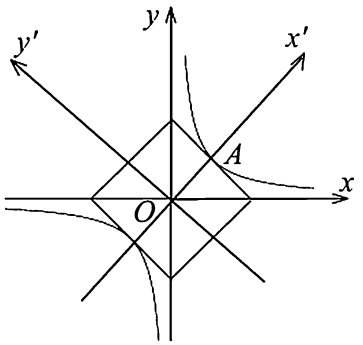


Рис. 3.3. *К примеру 3.1*

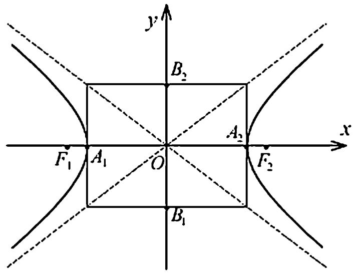


Рис. 3.4. *Равнобочная гипербола как график обратной пропорциональной зависимости $y = k/x$*

Замечание 3.1. Уравнение (3.1) при $a = b$ принимает вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ или

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{3.2}$$

и задает так называемую *равнобочную* гиперболу. Её асимптоты имют уравнения $y = \pm x$ и являются биссектрисами координатных углов, а основной прямоугольник – квадратом. С равнобочной гиперболой читатель уже встречался в курсе элементарной математики, а именно: при изучении обратно пропорциональной зависимости. График этой функции – равнобочная гипербола. Рассмотрим функцию $y = k/x$ в предположении $k > 0$ и преобразуем последнее равенство к виду:

$$xy = k. \tag{3.3}$$

С помощью преобразования координат [13] перейдем от системы Oxy к системе $O'x'y$, которая получается из системы Oxy поворотом на угол $\pi/4$ вокруг начала координат (рис. 3.4), уравнение (3.3) преобразуется к виду

$x'^2 - y'^2 = 2k$. Положив в последнем уравнении $2k = a^2$, приходим к уравнению

$$x'^2 - y'^2 = a^2. \tag{3.4}$$

Сравнив это равенство с уравнением (3.2), заключаем, что уравнение (3.4) определяет равнобочную гиперболу. Она изображена на рис. 3.4, $A(\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$.

§ 4. Парабола и её свойства

Определение 4.1. *Параболой* называется кривая второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \tag{4.1}$$

Равенство (4.1) называется *каноническим уравнением* параболы.

Свойства параболы

1. *Парабола – осесимметричная кривая.* Ось Ox – ось симметрии параболы. Других осей симметрии и центра симметрии парабола не имеет.

2. *Парабола* вся расположена в правой полуплоскости и является неограниченной кривой. Как следует из уравнения (4.1), начало координат $O(0, 0)$ принадлежит параболе. Эта точка называется *вершиной* параболы.

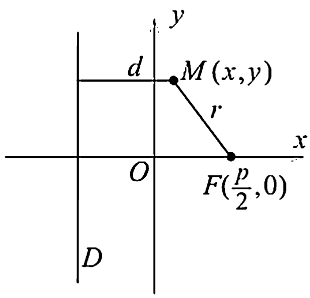


***Рис. 4.1**. Фокус и директриса параболы*

3. *Фокус и директриса параболы.* Точка $F(p/2, 0)$, находящаяся на оси параболы, называется *фокусом*, а прямая D: $x= p/2$ – *директрисой*. Расстояние r от любой точки параболы до фокуса F называется *фокальным радиусом* этой точки. Для фокального радиуса r верно равенство

$$r = x + p/2, \tag{4.2}$$

где x – абсцисса точки параболы. Отношение фокального радиуса r к расстоянию d от данной точки параболы до директрисы D (рис.4.1) равно 1, т. е. $r/d = 1$.

4. *Параметр параболы. Построение параболы.* Число p из уравнения (4.1) называется *параметром* параболы. Он равен фокальному радиусу точки параболы, расположенной на перпендикуляре, восставленном из её фокуса к оси Ox (при $x= p/2$ из (4.2) имеем $r = p$). Это свойство вместе с предыдущими позволяет построить параболу (рис. 4.2).

Пример 4.1. Парабола задана уравнением $y^2 = 8x$. Найти её параметр, координаты фокуса, уравнение директрисы. Изобразить эту параболу на чертеже.

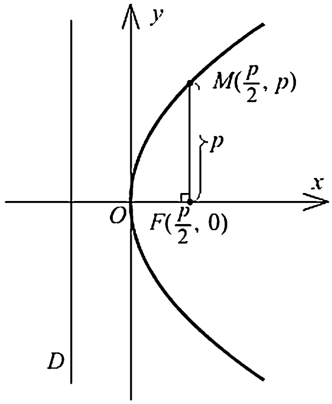


Рис. 4.2. *Построение параболы, параметр параболы*

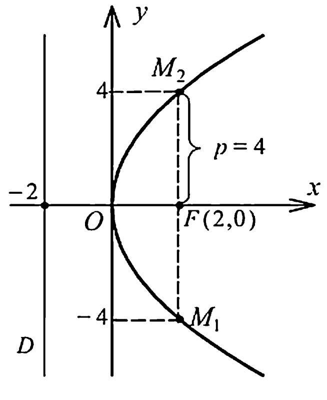


Рис. 4.3. *К примеру 4.1*

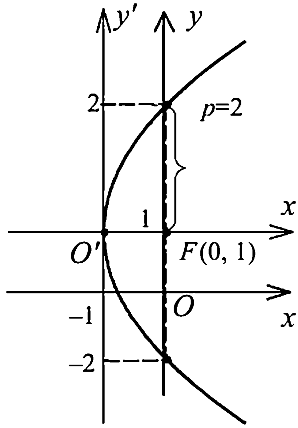


Рис. 4.4. *К примеру 4.2*

►Сравнив данное уравнение с (4.1), имеем $8 = 2p$, откуда $p = 4$. Точка $F(2, 0)$ – фокус параболы, а $x = -2$ – уравнение её директрисы D. Построим на чертеже точки $M_1(2, -4)$ и $M_1(2, 4)$. Теперь проведём параболу через эти точки и её вершину – начало координат (рис. 4.3).◄

Пример 4.2. Найдите координаты фокуса параболы $y^2 - 2y = 4x+3$ и постройте её.

►В левой части уравнения параболы выделим полный квадрат $(y-1)^2 = 4(x+1)$ и, перейдя к новым прямоугольным координатам x', y' по формулам: $x' = x + 1$, $y' = y - 1$, получим уравнение $y'^2 = 4x'$. В системе координат $O'x'y'$ оно является каноническим уравнением параболы вида (4.1). Имеем $4 = 2p$, откуда $p = 2$. В новой системе координат фокус параболы имеет координаты (1, 0), а его старые координаты можно найти из формул перехода: $F(0, 1)$. Вершина параболы находится в точке O', следовательно, в системе Oxy она имеет координаты (–1, 1). Далее строим параболу, используя свойство 4 (рис. 4.4).◄

Замечание 4.1. Наряду с параболой, определяемой уравнением (4.1), рассмотрим параболу, задаваемую следующим уравнением:

$$x^2 = 2py, p > 0. \tag{4.2}$$

Осью симметрии такой параболы является ось Oy, её фокус находится в точке $F(0, p/2)$, а директриса D имеет уравнение $y = -p/2$ (рис. 4.5). В этой параболе читатель, очевидно, узнает график квадратной функции $y = ax^2$ $(a > 0)$ из курса элементарной математики $(a = 1/(2p))$.

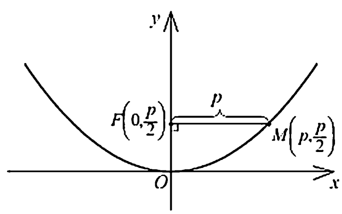


Рис. 4.5. *Парабола, определяемая уравнением* $x^2 = 2py$, $p > 0$

Замечание 4.2. Ветви парабол, определяемых уравнениями (4.1) и (4.3) направлены вправо и вверх соответственно. Параболы с противоположным направлением ветвей определяются уравнениями:

$$y^2 = -2px, \; p > 0, \tag{4.3}$$

$$x^2 = -2py, p > 0. \tag{4.4}$$

Осью симметрии параболы, определяемой уравнением (4.4) является ось Ox, её фокус находится в точке $F(-p/2, 0)$, а директриса D имеет уравнение $x = p/2$ (рис. 4.6). Ось симметрии параболы, определяемой уравнением (4.6), – ось Oy, её фокус находится в точке $F(0, -p/2)$, директриса D имеет уравнение $y = p/2$ (рис. 4.7).

Пример 4.3. Найти параметр, координаты фокуса и вершины, а также уравнение директрисы параболы $x^2 - 2x = -4y - 3$.

►В левой части уравнения выделим полный квадрат: $(x-1)^2 = -4(y+1)$. Перейдя к новым координатам x', y' по формулам $x' = x - 1$, $y' = y + 1$, получим уравнение: $x'^2 = -4y$, в системе координат $O'x'y'$ оно имеет вид (4.5). Поскольку $4 = 2p$, то $p = 2$. Координаты фокуса параболы в новой системе координат есть

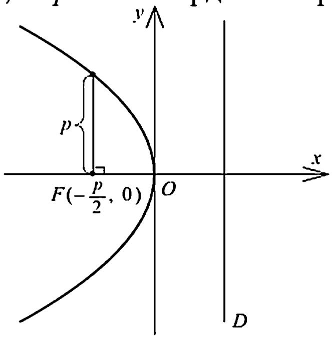


Рис. 4.6. *Парабола, определяемая уравнением $y^2 = -2px$, $p > 0$*

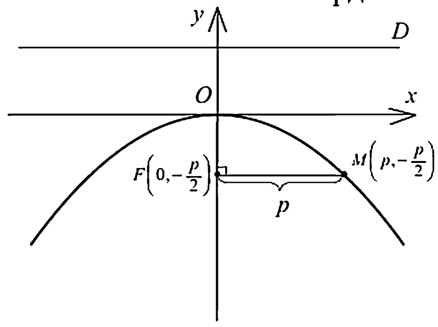


Рис. 4.7. *Парабола, определяемая уравнением $x^2 = -2py$, $p > 0$*

$(0, -1)$, а его старые координаты $F(1, -2)$ можно найти из формул перехода.

Вершина параболы находится в точке O', в системе Oxy она имеет координаты $(1, -1)$. Уравнение директрисы D: $y = 0$.◄

§ 5. Линейные и квадратичные зависимости в моделях экономики

1.Один из важнейших вопросов микроэкономики состоит в изучении взаимодействия спроса и предложения. Рассмотрим какой-нибудь товар. Пусть $D(p)$ – количество (число единиц) товара, которое покупатель на рынке желает купить при данной цене p за единицу. $D = D(p)$ называется *функцией спроса на товар*. Эта функция – убывающая. Она может быть достаточно сложной, но часто ее аппроксимируют (приближают) линейной функцией

$$D = ap + c, \text{ где } a < 0. \tag{5.1}$$

С другой стороны, пусть $S(p)$ – число единиц товара, предлагаемого продавцами на рынке по цене p. Очевидно, предложение растет с ростом цены. Поэтому *функция предложения* $S = S(p)$ – возрастающая функция. Она может быть достаточно сложной, но часто ее аппроксимируют линейной функцией

$$S = bp + d, \text{ где } b > 0. \qquad (5.2)$$

Для экономики представляет интерес условие, когда спрос равен предложению: $D(p) = S(p)$ или, используя соотношения (5.1) и (5.2),

$$ap + c = bp + d. \qquad (5.3)$$

Цена $p = p_0$, при которой выполняется равенство (5.3), называется *равновесной*. Точка пересечения графиков функций $D = D(p)$ и $S = S(p)$, в рассматриваемом случае – прямых, называется *точкой равновесия*.

Пример 5.1. Пусть функция спроса на товар $D(p) = 10 - p$, функция предложения $S(p) = 2p + 1$. Найдите:

1) равновесную цену;

2) насколько измениться доход предприятия (в процентах) при увеличении цены на 10% процентов?

►Равновесная цена p_0 определяется из условия $D(p) = S(p)$ или $10 - p = 2p + 1$. Откуда $p_0 = 3$.

При $p = p_0 = 3$ доход предприятия был равен $p_0 D(p_0) = 3 \cdot 7 = 21$ (ден. ед). При $p_0 = 3.3$ доход предприятия был равен $3.3D(3.3) = 3.3 \cdot (10 - 3.3) = 22.11$ (ден. ед.). Следовательно доход предприятия увеличился на $((22{,}11 - 21)/21) \cdot 100 = 5{,}2\%$.◄

2. В ряде случаев для построения математичеких моделей используют квадратичное приближение. Например. функции спроса и предложения записываются так:

$$D(p) = ap^2 + a_1 p + c, \; a < 0, \qquad (5.4)$$

$$S(p) = bp^2 + b_1 p + d, \; b > 0. \qquad (5.5)$$

Графики этих функций – параболы (см. § 4). При этом ветви параболы $D(p) = ap^2 + a_1 p + c$ направлены вниз, так как $a<0$, ветви параболы $S(p) = bp^2 + b_1 p + d$ вверх, так как $b>0$.

Нахождение равновесной цены сводится к решению квадратного уравнения

$$ap^2 + a_1 p + c = bp^2 + b_1 p + d \text{ или } (b - a)p^2 + (b_1 - a_1)p + (d - c) = 0,$$

которое при $\Delta = (b_1 - a_1)^2 - 4(b - a)(d - c) = 0$ имеет только одно решение, при $\Delta > 0$ – два решения, одно (а может и два) из них может оказаться отрицательным и не иметь экономической интерпретации.

Пример 5.2. Пусть функция спроса на товар $D(p) = -p^2 + p + 31$, функция предложения $S(p) = p - 5$. Найдите равновесную цену.

►Равновесная цена p_0 определяется из условия $D(p) = S(p)$ или $-p^2 + p + 31 = p - 5$. Отсюда $-p^2 + 36 = 0$ или $p = \pm 6$. Выбирая положительное решение, получаем $p_0 = 6$.◄

Глава 5. **Поверхности второго порядка**

§ 1. Общее уравнение поверхности второго порядка. Классификация поверхностей второго порядка

Определение 1.1. *Поверхностью второго порядка* называется множество точек, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \qquad (1.1)$$

где $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \boldsymbol{R}$, а $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2 \neq 0$.

Можно показать [1], что при надлежащем выборе прямоугольной системы координат множество точек, определяемое уравнением (1.1) будет описываться одним из ниже перечисленных уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad (1.2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1; \qquad (1.3)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1; \qquad (1.4)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0; \qquad (1.5)$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z; \qquad (1.6)$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z; \qquad (1.7)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad (1.8)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad (1.9)$$

$$y^2=2px; \qquad (1.10)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0; \qquad (1.11)$$

$$\frac{x^2}{a^2}=1; \qquad (1.12)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0; \qquad (1.13)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0; \qquad (1.14)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1; \qquad (1.15)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1; \qquad (1.16)$$

$$\frac{x^2}{a^2}=-1; \qquad (1.17)$$

$$x^2=0. \qquad (1.18)$$

Предполагается, что a, b, c, p, $q>0$ в каждом из уравнений (1.2) – (1.17). Уравнения (1.15) – (1.17) задают пустые множества точек, уравнение (1.13) задаёт ось Oz ($x = 0, y = 0, z\in \boldsymbol{R}$), уравнение (1.14) – начало координат ($x=0, y = 0, z = 0$). Уравнения (1.11) и (1.12) определяют пару пересекающихся и пару параллельных плоскостей, (1.18) – пару слипшихся плоскостей. Геометрические образы, задаваемые уравнениями (1.2) – (1.10), называются *невырожденными поверхностями второго порядка*, а уравнения (1.2) – (1.10) – их *каноническими уравнениями*. Форма и некоторые свойства этих поверхностей, следующие из их уравнений, изучаются далее с помощью так называемого *метода параллельных сечений*.

§ 2. Эллипсоид

Определение 2.1. *Эллипсоидом* называется поверхность второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a \geq b \geq c > 0. \qquad (2.1)$$

Уравнение (2.1) называется *каноническим уравнением* эллипсоида. Эллипсоид обладает центральной симметрией относительно начала координат и симметрией относительно координатных плоскостей.

Эллипсоид – *ограниченная* поверхность. Он находится внутри шара радиуса

a с центром в начале координат. В самом деле, для расстояния $|OM|$ любой точки $M(x, y, z)$ эллипсоида до начала координат с учётом (2.1)

$$|OM|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}\right) \le a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = a^2 \cdot 1 = a^2.$$

Произведём сечения эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям. В сечении плоскостью $P: z = z_0$, $|z_0| < c$, получим эллипс Γ_1, определяемый уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_0^2}{a^2}$ в прямоугольной декартовой системе координат O_1xy, введённой на этой плоскости так, что точка $O_1(0, 0, z_0)$ – начало координат, а оси O_1x и O_1y параллельны осям координат Ox и Oy системы координат $Oxyz$ (рис. 2.1, $z_0 \ne 0$). Полуоси Γ_1 равны $a\sqrt{1 - z_0^2/a^2}$ и $b\sqrt{1 - z_0^2/a^2}$. В сечении плоскостью $z = 0$ получается эллипс Γ_2 с наибольшими полуосями a и b (рис. 2.1).

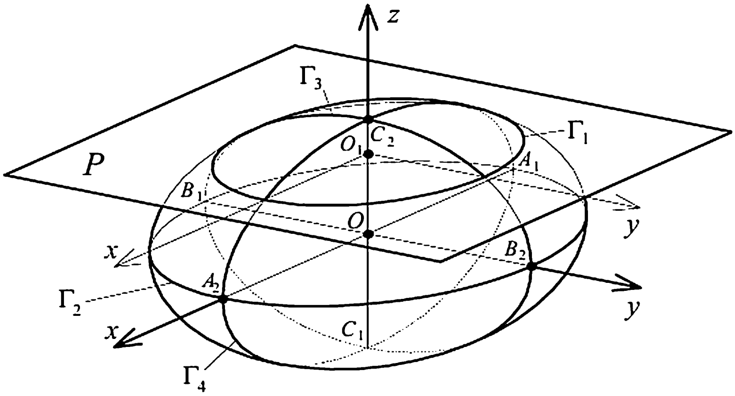


Рис. 2.1. Эллипсоид

Аналогичным образом можно убедиться, что сечения эллипсоида плоскостями $x = x_0$ ($|x_0| < a$) и $y = y_0$ ($|y_0| < b$) тоже эллипсы, полуоси которых не превосходят a, b, c. В сечении координатными плоскостями
$x = 0$, $y = 0$ полуоси этих эллипсов Γ_3 и Γ_4 наибольшие и равны b, c и a, c соответственно (рис. 2.1). Числа a, b, c называются *полуосями* эллипсоида, а точки $A_1(-a, 0, 0)$, $A_2(a, 0, 0)$, $B_1(0, -b, 0)$, $B_2(0, b, 0)$, $C_1(0, 0, -c)$, $C_2(0, 0, c)$ – его *вершинами* (рис. 2.1). Описанный эллипсоид иногда называют также *трёхосным эллипсоидом*.

§ 3. Гиперболоиды

Определение 3.1. Поверхности второго порядка, определяемые в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \ge b > 0, c > 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a \ge b > 0, c > 0, \tag{3.2}$$

называются *однополостным* и *двуполостным* гиперболоидами соответственно.

Характер симметрии этих поверхностей такой же, как у эллипсоида. Числа a, b, c называются их *полуосями*.

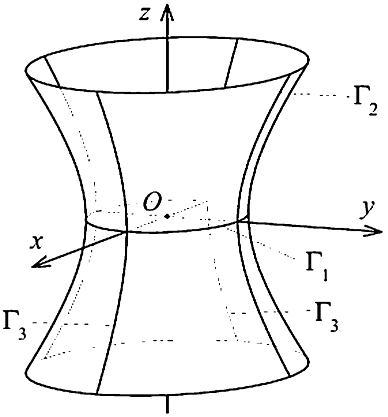


***Рис. 3.1.** Однополостный гиперболоид*

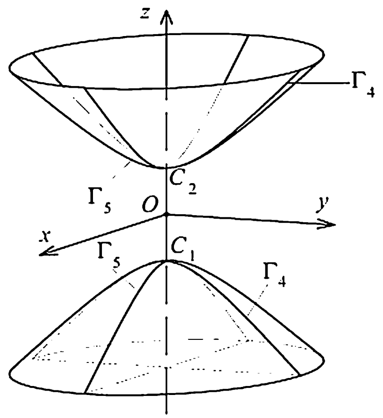


***Рис.3.2.** Двуполостный гиперболоид*

1. Однополостный гиперболоид. В сечении плоскостью $z = 0$ получаем *горловой эллипс* $\Gamma_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ с полуосями a и b (рис. 3.1), а в сечении плоскостями $x = 0, y = 0$ – гиперболы $\Gamma_2 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ и $\Gamma_3 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис.3.1).

2. Двуполостный гиперболоид. Эта поверхность расположена вне части пространства, лежащей между плоскостями $z = \pm c$, где $|z| < c$. Точки $C_1(0,0,-c)$ и $C_2(0,0,c)$ называются *вершинами* двуполостного гиперболоида (рис. 3.2). Сечения данной поверхности координатными плоскостями x=0 и y=0 являются гиперболами $\Gamma_4 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\Gamma_5 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 3.2). Сечения поверхности плоскостями $z = h$, $|h| > c$, есть эллипсы: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$.

§ 4. Конус второго порядка

Определение 4.1. Поверхность второго порядка, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \; a, b, c > 0, \tag{4.1}$$

называется *конусом второго порядка* (рис. 4.1).

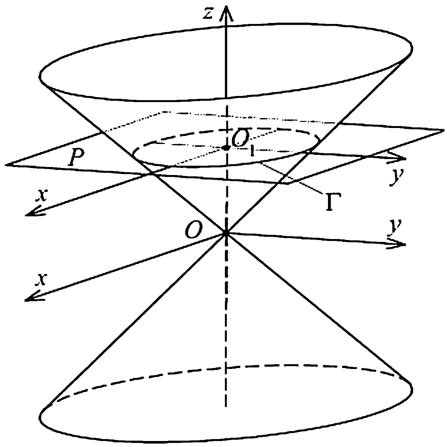


Рис. 4.1. *Конус второго порядка*

Характер симметрии этой поверхности такой же, как у эллипсоида. Её сечение плоскостью $P: z = z_0$ $(z_0 \neq 0)$ представляет собой эллипс Г (рис. 4.1).

Образующими конуса второго порядка, определяемого уравнением (4.1), являются прямые, проходящие через начало координат – *вершину* этого конуса и пересекающие эллипс Г, называемый его *направляющей*.

§ 5. Параболоиды

Определение 5.1. Поверхности второго порядка, определяемые в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнениями

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,\ p, q > 0, \tag{5.1}$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,\ p, q > 0, \tag{5.2}$$

называются *эллиптическим* и *гиперболическим* параболоидами соответственно.

Данные поверхности симметричны относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz. В отличие от ранее изученных поверхностей, эллиптические и гиперболические параболоиды не обладают ни центральной симметрией, ни симметрией относительно плоскости Oxy.

1. Эллиптический параболоид. При предположении p, $q>0$ вся поверхность расположена в полупространстве, где $z \geq 0$. Начало координат принадлежит эллиптическому параболоиду и называется его *вершиной*.

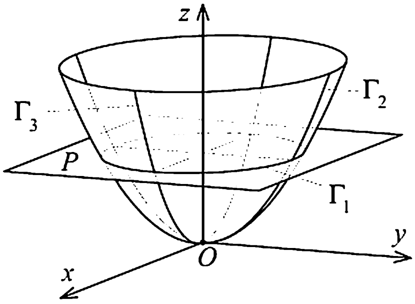


Рис. 5.1. *Эллиптический параболоид*

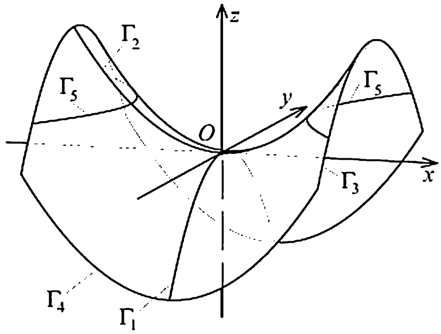


Рис. 5.2. *Гиперболический параболоид*

Сечение эллиптического параболоида плоскостью P: $z = z_0$ ($z_0 > 0$) – эллипс Γ_1 с полуосями $\sqrt{2pz_0}$ и $\sqrt{2qz_0}$, а в сечении координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ имеем параболы Γ_2: $y^2 = 2qz$ и Γ_3: $x^2 = 2pz$ (рис. 5.1).

2. Гиперболический параболоид. Сечениями этой поверхности плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ являются параболы Γ_1: $y^2 = -2qz$ и Γ_2: $x^2 = 2pz$ (рис. 5.2). Сечение плоскостью $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) есть парабола Γ_3 с вершиной на параболе Γ_2, а сечение плоскостью $y = y_0$ ($y_0 \neq 0$) – парабола Γ_4 с вершиной на параболе Γ_1 (рис. 5.2). Параболы Γ_3 и Γ_4 можно получить путём параллельного переноса парабол Γ_1 и Γ_2 соответственно. Название *гиперболический параболоид* объясняется тем, что в сечении этой поверхности плоскостью $z = z_0$ ($z_0 \neq 0$) образуется гипербола Γ_5 (рис. 5.2).

§ 6. Цилиндры второго порядка

Определение 6.1. Алгебраическая поверхность n-го порядка называется *цилиндрической поверхностью* (или *цилиндром*), если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ она может быть задана уравнением вида

$$F(x, y) = 0, \qquad (6.1)$$

где $F(x, y)$ – многочлен n-й степени относительно переменных x, y, не содержащий переменной z. Кривая Γ, определяемая уравнением (6.1) в плоскости Oxy, называется *направляющей* этого цилиндра (рис. 6.1).

Если точка $M(x, y, 0)$ принадлежит Γ (значит, и данному цилиндру), то все точки $M'(x, y, z)$, где z – любое вещественное число, тоже ему принадлежат, ибо координаты M' удовлетворяют уравнению (6.1). Они расположены на прямой L, проходящей через точку $M(x, y, 0)$ параллельно оси Oz (рис. 6.1). Итак, данный цилиндр образован прямыми, параллельными оси Oz и пересекающими его направляющую Γ. Эти прямые называются его *образующими*.

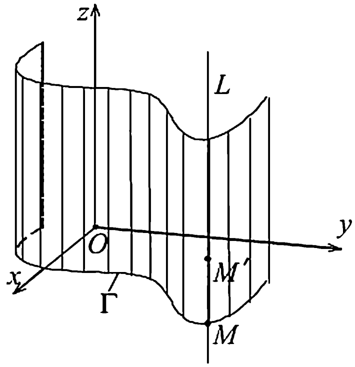


Рис. 6.1. К понятию цилиндрической поверхности

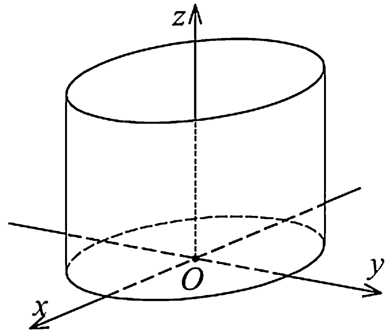


Рис. 6.2. Эллиптический цилиндр

Замечание 6.1. Цилиндры с образующими, параллельными осям Ox и Oy, определяются уравнениями вида $G(y, z) = 0$ и $H(x, z) = 0$.

Определение 6.2. Поверхности второго порядка, определяемые в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнениями вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a, b>0, \tag{6.2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a, b>0, \tag{6.3}$$

$$y^2=2px, \quad p>0 \tag{6.4}$$

называются *цилиндрами второго порядка*.

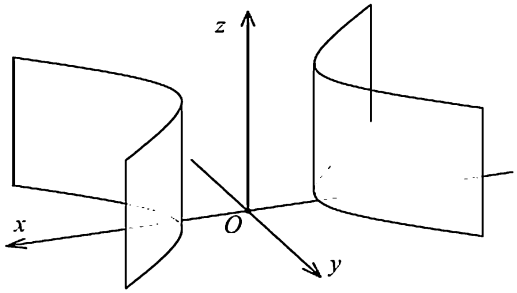


Рис. 6.3. Гиперболический цилиндр

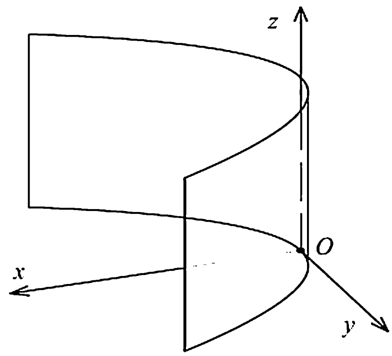


Рис. 6.4. Параболический цилиндр

Направляющими этих цилиндров служат эллипс, гипербола и парабола, определяемые уравнениями (6.2) – (6.4) в плоскости Oxy. Их образующие, как было установлено выше, параллельны оси Oz (рис. 6.2 – 6.4).

§ 7. Поверхности вращения второго порядка

Определение 7.1. Алгебраическая поверхность называется *поверхностью вращения*, если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат она может быть задана уравнением вида

$$F(x^2+y^2, z)=0, \tag{7.1}$$

где $F(x^2+y^2, z)$ – многочлен от x^2+y^2, z.

Замечание 7.1. Данное определение является конструктивным в том смысле, что позволяет выделить поверхности вращения по виду их уравнений из множества всех алгебраических поверхностей. Так, например, в соответствии с этим определением уравнения $2(x^2+y^2)+z=0$ и $(x^2+y^2)^2+4z^2=1$ задают алгебраические поверхности вращения.

Теорема 7.1. Поверхность (S), определяемая уравнением (7.1), образуется при вращении вокруг оси Oz кривой Г, являющейся линией пересечения (S) с плоскостью Oyz.

►Пусть $M_0(0,y_0,z_0)$ – любая точка Г (рис. 7.1). В силу (7.1) имеем

$$F(y_0^2,z_0)=0. \qquad (7.2)$$

Проведём через M_0 плоскость $P{:}\,z=z_0$, перпендикулярную оси Oz, и рассмотрим в ней окружность с центром в точке $O_1(0,0,z_0)$ и радиусом $|y_0|$ (рис. 7.1). Пусть точка $M(x,y,z_0)$ – произвольная точка этой окружности.

Так как $|O_1M|^2=|O_1M_0|^2$, то $x^2+y^2=y_0^2$. Подставляя координаты точки M в

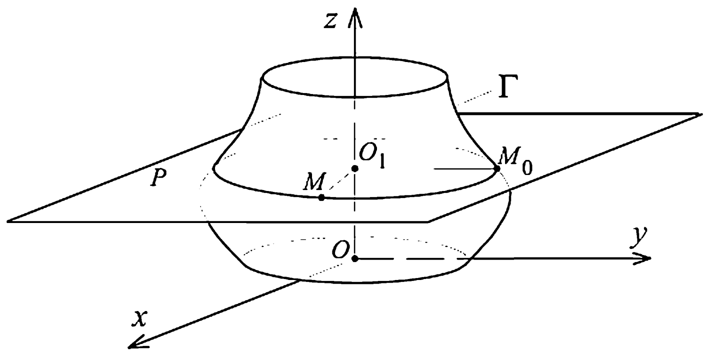


Рис. 7.1. *Поверхность вращения*

уравнение (7.1), с учетом последнего равенства и равенства (2) имеем

$$F(x^2+y^2,z_0)=F(y_0^2,z_0)=0.$$

Таким образом, показано, что координаты произвольной точки M упомянутой окружности удовлетворяют уравнению (7.1). Следовательно, эта точка принадлежит (S). Тем самым установлено, что поверхность (S) образуется при вращении линии Г вокруг оси Oz (рис. 7.1).◄

Следствие из теоремы 7.1. Алгебраические поверхности, определяемые уравнениями $G(x,y^2+z^2)=0$ и $H(x^2+z^2,y)=0$, образуются при вращении некоторых кривых вокруг оси Ox и оси Oy соответственно.

Из вышеприведённого определения следует, что уравнение поверхности вращения второго порядка в некоторой прямоугольной декартовой ситеме координат имеет вид

$$A(x^2+y^2)+Bz^2+Cz+D=0. \qquad (7.3)$$

Сопоставив уравнение (7.3) с уравнениями эллипсоида, гиперболоидов, конуса 2-го порядка, эллиптического параболоида и эллиптического цилиндра из

§ 2 – 6, приходим к выводу, что эти поверхности будут поверхностями вращения при условии $p = q$ для эллиптического параболоида и $a = b$ для всех остальных поверхностей. Сопоставление этого уравнения с уравнениями гиперболического параболоида из § 5, гиперболического и параболического цилиндров из § 6 приводит к заключению, что эти поверхности не могут быть поверхностями вращения ни при каких значениях констант. Итак, уравнения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\quad \frac{x^2+y^2}{p}=2z \quad \text{и} \quad \frac{x^2+y^2}{a^2}=1$$

определяют алгебраические поверхности вращения второго порядка, а именно: эллипсоид вращения, гиперболоиды вращения, конус вращения второго порядка (или прямой круговой конус), параболоид вращения (или круговой параболоид) и цилиндр вращения второго порядка (или прямой круговой цилиндр) соответственно. Каждая из этих поверхностей образуется при вращении вокруг оси Oz кривой, являющейся пересечением данной поверхности с плоскостью Oyz. Например, вышеуказанный эллипсоид вращения образуется при вращении вокруг оси Oz линии Γ_3 (рис. 2.1).

Глава 6. **Задания для проверки качества усвоения раздела 2**

§ 1. Задачи для самостоятельной работы

1. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы. При каких значениях параметра α векторы $3\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{a}+2\vec{b}$ образуют базис в множестве V_2?

2. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, если $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=\sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=3\pi/4$.

3. Дана прямая L: $x-2y+2=0$ и точка $M(2, -1)$. Найдите: а) проекцию точки M на эту прямую; б) уравнение прямой, проходящей через точку M, параллельно заданной прямой; в) расстояние от точки M до заданной прямой.

4. Дана плоскость $3x-2y+7=0$ и точка $M(2, -1, 3)$. Найдите проекцию точки M на плоскость.

5. Дана прямая L: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z}{1}$ и точка $M(1, 2, -3)$. Найдите: а) уравнение плоскости, проходящей через точку M, параллельно прямой L; б) уравнение плоскости, проходящей через точку M, перпендикулярно прямой L.

6. Постройте кривую $4x^2 - 8x + y^2 = 0$.

7. Пусть функция спроса на товар $D(p)=16-p$, функция предложения: $S(p)=2p+1$. Найдите: а) равновесную цену; б) изменение дохода предприятия (%) при увеличении цены на 20%. Постройте графики функций спроса и предложения.

8. Пусть функция спроса на товар $D(p) = -p^2 + p + 3$, функция предложения $S(p) = 4p^2 + 2p + 6$. Найдите равновесную цену. Постройте графики заданных функций спроса и предложения.

Ответы к задачам для самостоятельной работы

1. а) $-24/\sqrt{11}$; **б)** $-24/(\sqrt{78}\cdot\sqrt{11})$; **в)** $\sqrt{282}$.
2. 101; 9. **3. а)** $(4/5;7/5)$; **б)** $x-2y-4=0$; **в)** $6/\sqrt{5}$. **4.** $(-19/13;17/13;3)$.
5. а) $13x + 6y - 8z - 49 = 0$; **б)** $2x - 3y + z + 7 = 0$.
6. Эллипс с центром $C(1/4;0)$. Оси симметрии эллипса параллельны координатным осям. Длины полуосей: $\sqrt{5}/4$, $\sqrt{5}/2$.
7. $p_0 = 5$; 7,4%. **8.** Уравнения спроса и предложения несовместны.

§ 2. Контрольные вопросы к разделу 2

1. Что такое вектор? его длина? орт вектора?

2. Сформулируйте свойства операции сложения векторов.

3. При каких условиях: 1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$? 2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$?

4. Какие несколько векторов называются линейно зависимыми? линейно независимыми?

5. Как геометрически располагаются пара или тройка векторов линейно зависимых векторов? линейно независимых векторов?

6. Что такое базис некоторого множества векторов? координаты вектора в выбранном базисе?

7. Сформулируйте правило сложения двух векторов, заданных разложениями в некотором базисе.

8. Сформулируйте понятие прямоугольного базиса и прямоугольной декартовой системы координат.

9. Что такое скалярное произведение двух векторов? Перечислите свойства скалярного произведения.

10. Что такое алгебраическая линия? Сформулируйте теорему об инвариантности порядка алгебраической линии.

11. Напишите равенства, выражающие условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.

12. Почему плоскости и, только они, называются поверхностями 1-го порядка?

13. Что такое эллипс? Сформулируйте свойство фокальных радиусов точки эллипса. Найдите координаты центра симметрии, полуоси.

14. Какие прямые называются асимптотами гиперболы? Напишите уравнения асимптот гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$.

15. Прямая L задана уравнением с угловым коэффициентом $y = кx + в$. Поясните геометрический смысл $к$ и $в$.

16. Прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями L_1: $y = k_1x + l_1$, L_2: $y = k_2x + l_2$. Напишите условия параллельности и перпендикулярности этих прямых.

17. Как геометрически объяснить, что система уравнений $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$ является неопределённой? определенной?

18. При каком условии плоскость и прямая в пространстве параллельны?перпендикулярны?

19. Напишите условие перпендикулярности прямых в пространстве.

20. Напишите общее уравнение плоскости. Каков геометрический смысл коэффициентов уравнения?

21. Напишите уравнение плоскости, проходящей через 3 заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2), M_3(x_3,y_3,z_3)$.

22. Запишите уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, перпендикулярно вектору $\overline{n}=(A,B,C)$.

23. Дайте определения понятиям: функция спроса, функция предложения, равновесная цена, а также линейная и квадратичная аппроксимации.

§ 3. Тесты по разделу 2

Вар. № 1	**Раздел 2. Аналитическая геометрия**
1	В треугольнике ABC сторона BC разделена точкой M в отношении 5:3, считая от точки B. Найдите разложение вектора $\overline{AM}$ по векторам $\overline{b}=\overline{AC}$ и $\overline{c}=\overline{AB}$.
2	Даны векторы $\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{c}=5\overline{i}+4\overline{j}+3\overline{k}$. Найдите проекцию вектора $\overline{b}+\overline{c}$ на ось вектора $\overline{a}-\overline{b}$.
3	Даны вершины треугольника: A(0, 0); B(1, 3); C(5, 1). Найдите длину высоты треугольника, опущенной из вершины A.
4	Прямые на плоскости заданы уравнениями: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{8}$ и $x+4y-1=0$. Они: а) параллельны; б) перпендикулярны; в) совпадают; г) пересекаются под острым углом, отсчитываемом от первой прямой против часовой стрелки; д) пересекаются под тупым углом, отсчитываемом от первой прямой против часовой стрелки?
5	Укажите координаты центра кривой (вершины параболы, если кривая – парабола) $2x^2+y^2+16x=0$ Постройте эту кривую.
6	Дано уравнение: $x^2-2+y=0$. На плоскости оно задает: а) окружность; б) гиперболу; в) параболу; г) эллипс; д) пару прямых; е) точку; ж) никакой кривой и никакой точки.
7	Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2; 0; -5)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$, соединяющему точки $B(2; 7; -3)$ и $C(110; -1)$.
8	Даны координаты вершин пирамиды: $A_1(0,-1,-1)$, $A_2(-2,3,5)$, $A_3(1,-5,-9)$, $A_4(-1,-6,3)$. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

9	Прямая и плоскость заданы соответственно уравнениями: $\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{2}$ и $x+2y-5z-15=0$. Каково их взаимное расположение: а) прямая лежит в плоскости; б) прямая перпендикулярна плоскости; в) прямая пересекает плоскость под углом $\alpha < 60°$; г) прямая пересекает плоскость под углом $\alpha > 60°$; д) прямая параллельна плоскости.
10	Даны координаты вершин пирамиды: $A_1(2{,}3{,}1)$, $A_2(4{,}1{,}-2)$, $A_3(6{,}3{,}7)$, (7,5, 3). Найдите уравнение плоскости, проходящей через вершину A_2 параллельно грани $A_1\ A_3\ A_4$.

Вар. № 2	**Раздел 2. Аналитическая геометрия**
1	В треугольнике ABC сторона AB разделена точкой M в отношении 2:1, считая от точки A. Найдите разложение вектора $\overline{CM}$ по векторам $\bar{a}=\overline{CB}$ и $\bar{b}=\overline{CA}$.
2	Даны векторы $\bar{a}=-2\bar{i}+8\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=-3\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$ и $\bar{c}=2\bar{i}-3\bar{j}+3\bar{k}$. Найдите проекцию вектора $\bar{c}$ на ось вектора $2\bar{b}-\bar{a}$.
3	Даны вершины треугольника: $A(0,\ 1\ )$; $B(2,\ 1)$; $C(-1,\ 4\ )$. Найдите длину высоты треугольника, опущенной из вершины A.
4	Прямые на плоскости заданы уравнениями $x-3y-16=0$ и $2x-6y+8=0$. Они: а) параллельны; б) перпендикулярны; в) совпадают; г) пересекаются под острым углом, отсчитываемом от первой прямой против часовой стрелки; д) пересекаются под тупым углом, отсчитываемом от первой прямой против часовой стрелки.
5	Укажите координаты центра кривой (вершины параболы, если кривая – парабола) $2x-x^2-4y^2+2=0$ Постройте кривую.
6	Дано уравнение: $x^2+y^2-10x+8y=0$. На плоскости оно задает: а) окружность; б) гиперболу; в) параболу; г) эллипс; д) пару прямых; е) точку; ж) никакой кривой и никакой точки.
7	Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1;\ 3;\ 4)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$, соединяющему точки $B(-1;\ 5;\ 0)$ и $C(2;\ 6;\ 1)$.
8	Даны координаты вершин пирамиды: $A_1(1{,}2{,}0)$, $A_2(2{,}0{,}-3)$, $A_3(5{,}2{,}6)$, $A_4(8{,}4{,}-9)$. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.
9	Прямая и плоскость заданных соответственно уравнениями: $\frac{x-5}{-3}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z-1}{5}$ и $3x+7y-5z-11=0$. Каково их взаимное расположение: а) прямая лежит в плоскости; б) прямая перпендикулярна плоскости; в) прямая пересекает плоскость под углом $\alpha < 60°$; г) прямая пересекает плоскость под углом $\alpha\ \geq 60°$; д) прямая параллельна плоскости
10	Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4: $A_1(-1{,}-5{,}2)$, $A_2(-6{,}0{,}-3)$, $A_3(3{,}6{,}-3)$, $A_4(-10{,}6{,}7)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через вершину A_2 параллельно грани $A_1\ A_3\ A_4$.

Ответы к заданиям тестов

Вариант 1

1) $\frac{3}{8}\bar{c}+\frac{5}{8}\bar{b}$. **2)** 7. **3)** $7/\sqrt{5}$. **4)** Параллельны. **5)** $(-4, 0)$. **6.** Парабола.
7) $x-3y-2z-8=0$. **8)** $37/3\sqrt{5}$. **9)** Прямая лежит в плоскости.
10) $6x-23y-4z-9=0$.

Вариант 2

1) $\frac{2}{3}\bar{a}+\frac{1}{3}\bar{b}$. **2)** $5/3$. **3)** $\sqrt{2}$. **4)** Параллельны. **5)** $(1, 0)$. **6)** Окружность.
7) $3x+y+z-4=0$. **8)** $5\,1/7$. **9)** Прямая перпендикулярна плоскости.
10) $110x+25y+143z+1089=0$.

Раздел 3. **ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

Краткая характеристика раздела

1.Темы раздела. Числовые множества. Элементы алгебры логики. Функция одной переменной. Предел числовой последовательности. Предел функции. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Непрерывность функции. Функции в экономике.

2. Базисные понятия. Множество. Функция. Предел. Непрерывность.

3. Основные задачи. Простейшее исследование функций. Вычисление пределов. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Исследование непрерывности функций.

Глава 1. **Множества и функции**

§ 1. Множества и операции над ними

Понятие *множества* – одно из основных в математике. Оно относится к так называемым первичным, классификационно неопределяемым понятиям. Термины «совокупность», «семейство», «система», «набор» и т. п. – синонимы слова «множество». Примерами множеств могут служить множество граждан, живущих в данном городе, множество натуральных чисел и т. д. Приведённые примеры показывают, что множество может содержать конечное или бесконечное число произвольных объектов.

Объекты, составляющие множество, называются его *элементами*. Множества обычно обозначаются прописными буквами, а их элементы – строчными.

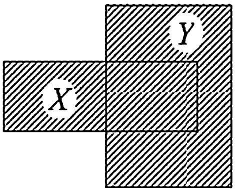
Если x – элемент множества X, то пишут: $x \in X$ (x принадлежит X). Запись $x \notin X$ следует читать так: «x не принадлежит X». Запись $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ означает, что множество X состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Аналогичный смысл имеет запись $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Пусть X и Y – два множества. Если всякий элемент множества X принадлежит и множеству Y, то X называют *подмножеством* множества Y, при этом записывают: $X \subset Y$. Множества X и Y, состоящие из одних и тех же элементов, называют равными и пишут $X = Y$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым множеством* и обозначают символом $\varnothing$. Очевидно, что $\varnothing \subset X$, X – любое множество.

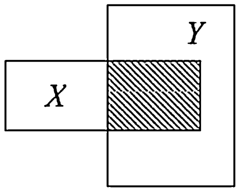
Объединением множеств X и Y называют множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из данных множеств X или Y. Объединение множеств X и Y обозначают так: $X \cup Y$. *Пересечением* множеств X и Y называют множество, каждый элемент которого принадлежит одновременно и множеству X, и множеству Y. Пересечение множеств X и Y обозначают следующим образом: $X \cap Y$. *Разностью* множеств X и Y называют множество, состоящее из тех элементов множества X, которые не принадлежат Y; обозначают разность множеств X и Y символом $X \setminus Y$.

На рис. 1.1 – 1.3 заштрихованные фигуры изображают объединение, пересечение и разность множеств X и Y, представленных прямоугольниками



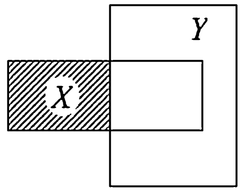
$X \cup Y$

***Рис. 1.1**. Объединение множеств X и Y*



$X \cap Y$

***Рис. 1.2**. Пересечение множеств X и Y*



$X \setminus Y$

***Рис. 1.3**. Разность множеств X и Y*

Пример 1.1. Найти $X \cup Y$, $X \cap Y$ и $X \setminus Y$, если $X=\{2,4,5,7\}$, $Y=\{1,3,4,5,8\}$.

►$X \cup Y=\{1,2,3,4,5,7,8\}$, $X \cap Y=\{4,5\}$, $X \setminus Y=\{2,7\}$.◄

Пример 1.2. Найти $X \cup Y$, $X \cap Y$ и $X \setminus Y$, если X, Y – множества решений неравенств: $x^2-4<0$ и $x^2-4x-5<0$.

► $x^2-4<0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)<0$. Решим последнее неравенство, например, методом интервалов: $-2<x<2$. Итак, множество X состоит из чисел x, удовлетворяющих полученному неравенству (рис. 1.4). Это утверждение можно записать так: $X=\{x: -2<x<2\}$, где знак двоеточия имеет смысл «такой, что».

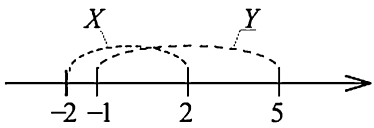


***Рис. 1.4**. К примеру 1.2*

Решив второе из данных неравенств, получим: $Y=\{x: -1<x<5\}$ (рис. 1.4). Имеем: $X \cup Y=\{x: -2<x<5\}$, $X \cap Y=\{x: -1<x<2\}$, $X \setminus Y=\{x: -2<x\le -1\}$.◄

Множество X, состоящее из одного элемента, из двух элементов, вообще из n элементов, где n – любое натуральное число, называют *конечным множеством*. Пустое множество $\varnothing$ также относят к конечным множествам. Множества, не относящиеся к конечным, называют *бесконечными*. Бесконечным является, например, множество $\boldsymbol{N}$, состоящее из всевозможных натуральных чисел.

Всякое бесконечное множество является либо *счётным*, либо *несчётным*. Бесконечное множество называют *счётным*, если между его элементами и натуральными числами можно установить взаимно однозначное соответствие, т. е. если можно перенумеровать все его элементы. Существуют множества, для которых такая процедура неосуществима: при любом способе приписывания его элементам натуральных номеров, всегда часть элементов остаётся непронумерованной. Такие множества называют *несчётными*. Простейшим примером счётного множества является множество $\boldsymbol{N}$ всевозможных натуральных чисел. Совокупность всех точек отрезка прямой есть несчётное множество.

§ 2. Логические символы. Прямая, обратная и противоположная теоремы. Необходимые и достаточные условия

При записи математических предложений (определений, формулировок теорем и т. п.) вместо часто повторяющихся слов и целых выражений удобно использовать экономную символику из математической логики. Ниже приводятся наиболее простые и употребительные символы.

Пусть α, β, … – некоторые высказывания или утверждения, относительно каждого из которых можно сказать истинно оно или ложно.

Запись $\overline{\alpha}$ означает «не α», т. е. отрицание утверждения α.

Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает «из утверждения α следует утверждение β» (символ $\Rightarrow$ – символ *импликации*).

Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает «утверждение α эквивалентно утверждению β», т. е. из α следует β и наоборот: из β следует α ($\Leftrightarrow$ – символ *эквивалентности*).

Запись $\exists x \in X : \alpha(x)$ означает: существует элемент $x \in X$, для которого справедливо утверждение $\alpha(x)$ (символ $\exists$ – квантор существования, $\exists$ – перевёрнутая первая буква английского слова Existence – существование).

Теорема – математическое предложение, истинность которого доказывается. Она записывается в виде: «если α, то β» (или $\alpha \Rightarrow \beta$), где α – условие, а β – заключение теоремы. Поменяв местами условие и заключение, получим *обратную* теорему «если β, то α» (или $\beta \Rightarrow \alpha$), теорема «если α, то β» называется в таком контексте *прямой*. Так, в теореме «если четырёхугольник – параллелограмм, то его противоположные стороны попарно равны» условие α: четырёхугольник – параллелограмм, а заключение β: его противоположные стороны попарно равны. Обратная теорема: «если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм». Здесь верны обе теоремы: прямая и обратная, однако так бывает не всегда. Для теоремы «если два угла вертикальные, то они равны» обратная теорема неверна.

Теорема «если не α, то не β» (или $\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}$) называется *противоположной* по отношению к теореме «если α, то β» (или $\alpha \Rightarrow \beta$). Противоположная теорема всегда верна, если верна обратная теорема.

Пусть верна теорема «если α, то β» (или $\alpha \Rightarrow \beta$), тогда α называется *достаточным условием* β, а β – *необходимым условием* α в том смысле, что выполнение α достаточно для выполнения β, а β всегда (т. е. необходимо) справедливо при выполнении α. Когда верна обратная теорема «если β, то α» (или $\beta \Rightarrow \alpha$), β оказывается достаточным условием α, а α – необходимым условием β. Необходимые и достаточные условия иначе называют признаками. Если верны обе теоремы – прямая и обратная, их формулировки можно объединить: «для того чтобы выполнялось α, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось β» (или «α выполняется в том и только том случае, если выполняется β», «α выполняется тогда и только тогда, когда выполняется β», $\alpha \Leftrightarrow \beta$). Например, объединим формулировки теорем о параллелограмме: «для того чтобы данный четырёхугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его противоположные стороны были попарно равны». Понятно, что при такой формулировке надо доказывать две теоремы: прямую и обратную.

§ 3. Множество вещественных чисел *R* и его свойства

Будем пользоваться общепринятыми обозначениями:

$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ – множество целых чисел;

$\boldsymbol{Q}$ – множество рациональных чисел, т. е. чисел вида p/q, где $q \in \boldsymbol{N}$, а $p \in \boldsymbol{Z}$; множество $\boldsymbol{Q}$ можно рассматривать также как совокупность всевозможных конечных или бесконечных периодических десятичных дробей.

Можно показать, что множество $\boldsymbol{Q}$ – счётное множество.

Бесконечные десятичные непериодические дроби не принадлежат множеству $\boldsymbol{Q}$. Эти числа называются *иррациональными*. Рациональные и иррациональны е числа называют *вещественными* или *действительными* числами; совокупность всех вещественных чисел обычно обозначают через $\boldsymbol{R}$.

Основные свойства множества R

1. *Упорядоченность*. Пусть x_1, x_2 – вещественные числа; справедливо одно и только одно из следующих утверждений: $x_1 < x_2$, $x_1 > x_2$, $x_1 = x_2$.

2. *Плотность*. Пусть x_1, x_2 – вещественные числа, причем $x_1 < x_2$. Всегда существует вещественное число x, лежащее между x_1, x_2: $x_1 < x < x_2$.

3. *Неограниченность*. Для любого положительного числа A существует вещественное число x, большее, чем A: $A < x$. Для любого отрицательного числа A существует вещественное число x, меньшее, чем A: $x < A$.

4. *Непрерывность*. Пусть X, Y – множества из $\boldsymbol{R}$. Если неравенство $x \le y$ справедливо для $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, то существует хотя бы одно вещественное число c: $x \le c \le y$.

Замечание 3.1. Множество $\boldsymbol{Q}$ обладает свойством плотности, но не обладает свойством непрерывности. Пусть X, Y – множества всех рациональных чисел, меньших и больших $\sqrt{2}$ соответственно. Очевидно, неравенство $x \le y$ выполняется для $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, а неравенство $x \le c \le y$ – только при $c = \sqrt{2}$, которое не является рациональным числом.

5. *Множество **R** несчётно.*

6. *Геометрическая интерпретация множества **R***. Геометрически вещественные числа интерпретируются точками так называемой *числовой прямой*, – направленной прямой, на которой выбран масштаб и начало отсчёта (рис. 3.1).

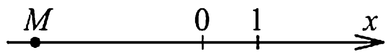


Рис. 3.1. *Числовая прямая*

При этом вещественному числу x ставится в соответствие единственная точка M числовой прямой, для которой число x является координатой, и, обратно каждой точке M числовой прямой – единственное вещественное число x – координата точки M. Началу отсчёта соответствует число 0.

§ 4. Некоторые подмножества из $\boldsymbol{R}$

Пусть a и b – заданные вещественные числа, причем $a < b$. Далее будем использовать следующие обозначения и терминологию:

1. $\{x\ \boldsymbol{R}: a < x < b\} = (a, b)$ – интервал или открытый промежуток.

2. $\{x \in \boldsymbol{R}: a \le x \le b\} = [a, b]$ – отрезок (сегмент, замкнутый промежуток).

3. $\{x \in \boldsymbol{R}: a < x \le b\} = (a, b]$ и $\{x \in \boldsymbol{R}: a \le x < b\} = [a, b)$ – полуинтервалы.

Множества 1 – 3 относятся к конечным промежуткам.

4. $\{x \in \boldsymbol{R}: x \le a\} = (-\infty, a]$ и $\{x \in \boldsymbol{R}: x \ge a\} = [a, +\infty)$ – бесконечные полуинтервалы.

5. $\{x \in \boldsymbol{R}: x < a\} = (-\infty, a)$ и $\{x \in \boldsymbol{R}: x > a\} = (a, +\infty)$ – бесконечные интервалы.

6. $\{x \in \boldsymbol{R}: -\infty < x < +\infty\} = (-\infty, \infty)$ – бесконечный интервал или числовая прямая.

7. $U(a)$ – окрестность точки a – любой интервал (a_1, a_2), содержащий эту точку (рис. 4.1).

8. $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ – ε - окрестность точки a (рис. 4.2).

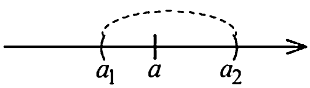


Рис. 4.1. *Окрестность точки а*

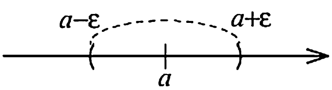


Рис. 4.2. *ε – окрестность точки а*

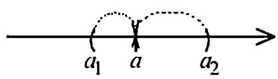


Рис. 4.3. *Проколотая окрестность точки а*

9. $\mathring{U}(a)$ – проколотая окрестность точки a – объединение интервалов $(a_1, a) \cup (a, a_2)$, a_1, a_2 – любые вещественные числа (рис. 4.3).

10. $\mathring{U}_\varepsilon(a)$ – проколотая ε - окрестность точки a – объединение интервалов $(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$ (рис. 4.4).

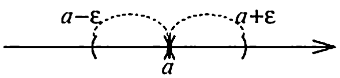


Рис. 4.4. *Проколотая ε – окрестность точки а*

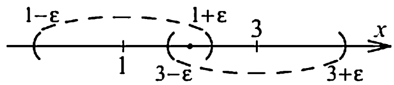


Рис. 4.5. *К примеру 4.1*

Пример 4.1. Записать в виде промежутков множества $U_\varepsilon(1) \cup U_\varepsilon(3)$, $U_\varepsilon(1) \cap U_\varepsilon(3)$ при $\varepsilon \in (1, 2)$.

► $U_\varepsilon(1) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, $U_\varepsilon(3) = (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$. $U_\varepsilon(1) \cup U_\varepsilon(3) = (1 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$, $U_\varepsilon(1) \cap U_\varepsilon(3) = (3 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ (рис. 4.5).◄

§ 5. Модуль вещественного числа и его свойства

Определение 5.1. *Абсолютной величиной* (*модулем*) вещественного числа x называется число, обозначаемое через $|x|$ и определяемое формулой:
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \ge 0; \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Замечание 5.1. Геометрически $|x|$ интерпретируется как расстояние от точки x числовой прямой до точки O (начала отсчёта) (рис. 5.1, 5.2).

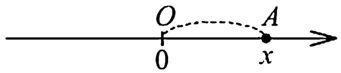


Рис. 5.1. *К замечанию 5.1,* $x>0$, $|x| = |OA|$

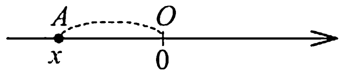


Рис. 5.2. *К замечанию 5.1,* $x<0$, $|x| = |AO|$

Свойства абсолютной величины

1. Неравенство $|x| \geq 0$ выполняется для $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $|x| = 0$ только для $x = 0$.

2. Для $\forall x \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство: $|x| = |-x|$.

3. Для $\forall x \in \boldsymbol{R}$ справедливо неравенство: $-|x| \leq x \leq |x|$.

4. Неравенства $|x| \leq a$ и $-a \leq x \leq a$ равносильны для $\forall a > 0$ и $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

5. Неравенство $|x| \geq a$ и объединение двух неравенств: $x \leq -a \vee x \geq a$ равносильны для $\forall a > 0$ и $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ для $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $\forall y \in \boldsymbol{R}$, если $y \neq 0$, то $|x/y| = |x|/|y|$.

7. Неравенство $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ справедливо для $\forall x, y \in \boldsymbol{R}$.

Замечание 5.2. Из свойства 4 следует, что число x находится в данном случае на числовой прямой на отрезке длиной $2a$ между точками $-a$, a и на расстоянии от точки 0, не большем, чем a (рис. 5.3), а из свойства 5 – число x находится от точки 0 на расстоянии, не меньшем, чем a (рис. 5.4).

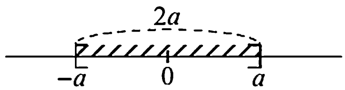


Рис. 5.3. *К замечанию 5.2 (свойство 4)*

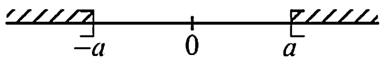


Рис. 5.4. *К замечанию 5.2 (свойство 5)*

Замечание 5.3. Неравенство $|x + y| \leq |x| + |y|$ называют *неравенством треугольника*. Можно доказать и более общее утверждение: пусть n – заданное натуральное число, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – заданные вещественные числа, тогда справедливо неравенство $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.

Замечание 5.4. Доказательства всех свойств основаны на определении 5.1 и на использовании свойств действии с вещественными числами. Докажем, например, свойство 4.

► Пусть $|x| \leq a$, отсюда имеем: $-|x| \geq -a$. Эти два неравенства и свойство 3 приводят к соотношению: $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$ или $-a \leq x \leq a$.

Предположим теперь, что $-a \leq x \leq a$. Для x: $0 \leq x \leq a$ имеем $|x| = x$ (определение 5.1), поэтому приходим к неравенству: $|x| \leq a$. Для x: $-a \leq x \leq 0$ имеем $|x| = -x$ (определение 5.1), откуда следует, что $-a \leq -|x|$ или $|x| \leq a$.◄

Пример 5.1. Решить неравенства:

а) $|x-1| \leq 3$,

б) $|x+2| \geq 2$,

в) $|x+2| \geq -2$.

► а) В силу свойства 4 имеем $-3 \leq x - 1 \leq 3$. Прибавив ко всем частям неравенства по 1, получим: $-2 \leq x \leq 4$ или $x \in [-2, 4]$.

б) Из свойства 5 имеем: $x+2 \leq -2 \vee x + 2 \geq 2$. Прибавив ко всем частям этих неравенств по -2: $x \leq -4 \vee x \geq 0$, или $x \in (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$.

в) В силу свойства 1 решением данного неравенства является $x \in \boldsymbol{R}$.◄

§ 6. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Точные грани числовых множеств

Определение 6.1. Непустое множество $X \subset \boldsymbol{R}$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если найдётся некоторое число A такое, что для $\forall x \in X$ будет выполняться неравенство $x \leq A$ ($x \geq A$). Число A при этом называется *верхней* (*нижней*) *гранью множества* X. Множество X, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным*. Множества, не относящиеся к ограниченным, называют *неограниченными множествами*.

Множество X является ограниченным тогда и только тогда, если существует число $M > 0$ такое, что для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|x| \leq M$.

Определение 6.2. Пусть X – ограниченное сверху (снизу) множество. *Точной верхней* (*нижней*) *гранью* множества X называется наименьшая из его верхних граней (наибольшая из его нижних граней). Обозначается это число символами $\sup X$ и $\sup\limits_{x \in X} x$ ($\inf X$ и $\inf\limits_{x \in X} x$).

Точные грани множества могут как принадлежать ему, так и не принадлежать. Если $X = (0, 2]$, то $\inf X = 0$, а $\sup X = 2$, $\inf X \notin X$, а $\sup X \in X$.

§ 7. Понятие числовой функции. График функции. Способы задания функции. Классификация функций

1. Понятие числовой функции. График функции.

Определение 7.1. Пусть $D \subset \boldsymbol{R}$ – некоторое непустое множество. Если каждому значению переменной $x \in D$ поставлено в соответствие по некоторому закону единственное число $y \in E \subset \boldsymbol{R}$, то говорят, что на множестве D задана *числовая функция* (или просто *функция*) и пишут $y = f(x)$. Переменная x называется *аргументом*, а множество D – *областью определения функции*, для неё приняты обозначения $D(f)$, $D(y)$. Число y называется *частным значением функции* в точке x, а совокупность всех частных значений – *множеством значений функции* и обозначается $E(f)$, $E(y)$.

Замечание 7.1. Буква f в обозначении функции $y = f(x)$ символизирует вышеуказанный закон. Для обозначения функции могут употребляться и другие буквы, например, $s = g(t)$ и т. д.

Замечание 7.2. Наряду с термином «функция» применяется термин «отображение» и пишут $f: x \to y$ или $f: x \in D \to y \in Y$.

Определение 7.2. *Графиком функции* $y = f(x)$, $x \in D$, называется множество Γ всех точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$ (рис. 7.1, Γ – график функции $y = f(x)$).

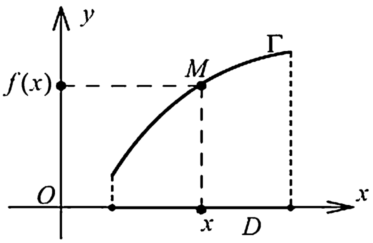


Рис. 7.1. *К определению 7.2*

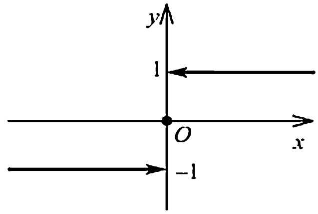


Рис. 7.2. *График функции y = sgnx*

2. Способы задания функции. 1. *Аналитический способ* – задание закона, устанавливающего связь между переменными x и y, с помощью формулы.

В школьном курсе математики так были введены обратно пропорциональная зависимость $y=k/x$, квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$ и т. д. Функции могут задаваться разными формулами на различных участках области определения. Например, функция

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{если } x < 0, \\ 0, \text{если } x = 0, \\ 1, \text{если } x < 0 \end{cases}$$

задана аналитически на всей вещественной оси (рис. 7.2, стрелки в точках (0, –1) и (0,1) означают, что при $x = 0$ функция не принимает значений –1 и 1, символ sgn$x$ читается как сигнум x, по латыни signum – знак).

1. *Табличный способ* – задание таблицы отдельных значений аргумента и соответствующих им значений функции.

2. *Графический способ* – соответствие между аргументом и функцией задаётся посредством графика (например, получаемого с помощью прибора).

3. *Алгоритмический способ* – задание функции с помощью алгоритма (программы). Он используются при вычислениях на компьютерах.

4. *Задание функции словесным описанием.* Так, функция $y=[x]$, называемая целой частью числа x, определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x.

3. Классификация функций.

Определение 7.3. Функция $y = f(x)$ называется *чётной* (*нечётной*), если её область определения $D(f)$ симметрична относительно точки $x = 0$ и для $\forall x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Так, функция $y = x^2$ – чётная, ибо $y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(x)$ для $\forall x \in \boldsymbol{R}$, а функция $y=x^3$ – нечётная, так как $y(-x)=(-x)^3=-x^3=-y(x)$ для $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

График чётной функции обладает симметрией относительно оси Oy, а нечётной – симметрией относительно начала координат (рис. 7.3, 7.4).

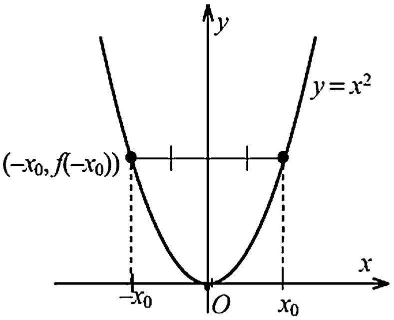


Рис. 7.3. График функции $y = x^2$

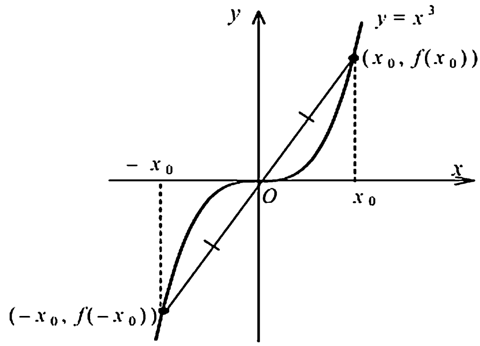


Рис. 7.4. График функции $y = x^3$

Определение 7.4. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T>0$, называемое *периодом* функции, такое, что для $x\in D(f)$ справедливы равенства $x\pm T\in D(f)$ и $f(x\pm T)=f(x)$.

Замечание 7.3. Если число $T > 0$ – период данной функции, то и число Tn – период этой функции при $\forall n\in \mathbf{N}$. Поэтому под T обычно понимают наименьший положительный период (если он существует).

Замечание 7.4. Любую часть графика периодической функции можно получить путём параллельного переноса вдоль оси Ox его части, соответствующей промежутку, длина которого равна периоду.

Из школьного курса математики известно, что тригонометрические фунции $y = \sin x$, $y = \cos x$ имеют наименьший положительный период $T = 2\pi$, а для функций $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ – $T = \pi$.

Пример 7.1. Найти период функции $y = |\sin x|$.

►Найдём наименьшее положительное число T такое, что для $\forall x\in \mathbf{R}$ справедливо равенство $|\sin(x+T)| = |\sin x|$. В частности, оно должно выполняться при $x=0$: $|\sin T| =|\sin 0|$. Отсюда $\sin T = 0$ и $T=\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$. Поскольку T – наименьший положительный период, то $T= \pi$. Проверим, что для $\forall x\in \mathbf{R}$ справедливо равенство $|\sin(x+\pi)| =|\sin x|$. Действительно, по формулам приведения $\sin(x+\pi)= -\sin x$, но тогда $|\sin(x+\pi)| = |\sin x|$.◄

Определение 7.5. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве $X\subset D(f)$, если для $\forall x_1, x_2\in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1)\leq f(x_2)$ $(f(x_1)\geq f(x_2))$. Если из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, то функцию $f(x)$ называют строго возрастающей (строго убывающей) на множестве X.

Возрастающие и убывающие функции объединяют общим термином *монотонные* функции.

Пример 7.2. Показать, что функция $y=(x-1)^2$ строго убывает на промежутке $(-\infty, 2)$.

►Возьмём $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 2): x_1 < x_2$. Имеем $y(x_1) - y(x_2) = (x_2-1)^2 - (x_1-1)^2 =$ $= (x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$. Поскольку $x_2 - x_1 > 0$ и $x_2 + x_1 - 2 > 0$ для любых выше выбранных x_1, x_2, то $y(x_1) - y(x_2) > 0$ или $y(x_1) > y(x_2)$ и по определению 7.5 заключаем, что данная функция убывает на $(-\infty, 2)$.◄

Определение 7.6. Пусть $E(f)$ – множество значений функции $y=f(x)$ при $x\in X\subset D(f)$. Если $E(f)$ ограничено сверху (ограничено снизу, ограничено), то функция называется *ограниченной сверху (ограниченной снизу, ограниченной) на множестве X*. Точная верхняя (нижняя) грань множества $E(f)$ называется *точной верхней (нижней) гранью данной функции на множестве X* и обозначается $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ $(\inf\limits_{x\in X} f(x))$. Если $\sup\limits_{x\in X} f(x)\in E(f)$ $(\inf\limits_{x\in X} f(x)\in E(f))$, то его называют также *наибольшим* (*наименьшим*) *значением функции на множестве X* и обозначают $\max\limits_{x\in X} f(x)$ $(\min\limits_{x\in X} f(x))$.

Пример 7.3. Найти $\sup\limits_{x\in X} f(x)$, $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ и $\max\limits_{x\in X} f(x)$, $\min\limits_{x\in X} f(x)$, если $f(x)=1/(|x|+1)$ и $X=\boldsymbol{R}$.

►Неравенство $0<1/(|x|+1)\le 1$ верно для $\forall x\in\boldsymbol{R}$, при этом $1=f(0)$. Поэтому $\sup\limits_{x\in X} f(x)=\max\limits_{x\in X} f(x)=1$, $\inf\limits_{x\in X} f(x)=0$, а $\min\limits_{x\in X} f(x)$ не существует.◄

Определение 7.7. Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$, при этом $E(f)\subset D(g)$. Функция $z = g(f(x))$, $x\in D(f)$ называется *сложной функцией* (*композицией* или *суперпозицией* функций f и g).

Определение 7.8. Пусть дана функция $y = f(x)$, $D(f)$ – её область определения, а $E(f)$ – множество значений. Если каждому значению $y\in E(f)$ сопоставляется единственное значение $x\in D(f)$, для которого $f(x) = y$, то говорят, что на $E(f)$ задана функция $x = f^{-1}(y)$, называемая *обратной* по отношению к данной функции $y = f^{-1}(x)$.

Замечание 7.5. Обозначая, как обычно, аргумент обратной функции x, а значение y, её записывают в виде $y = f^{-1}(x)$. Графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$. симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (т. е. относительно прямой $y = x$).

Теорема 7.1. Если функция $y = f(x)$ определена и строго возрастает (строго убывает) на $[a, b]$, а отрезок $[\alpha, \beta]$ является множеством значений этой функции, то на $[\alpha, \beta]$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, строго возрастающая (строго убывающая) на $[\alpha, \beta]$. Её множеством значений служит отрезок $[a, b]$.

Пример 7.4. Для функции $y = (x-1)^2$, $x\in [1, 3]$ найти обратную.

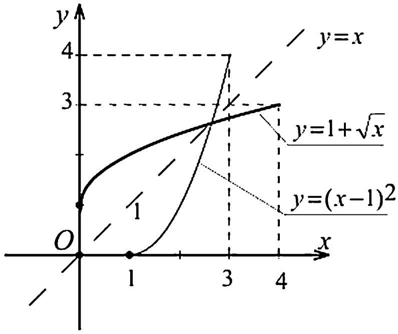


Рис. 7.5. *К примеру 7.4*

►График функции приведён на рис. 7.5. Выразив x через y, получаем обратную функцию: $x = 1 + \sqrt{y}$ (перед радикалом взят знак плюс, ибо $x\ge 1$ на

[1, 3]). Перейдём к традиционным обозначениям аргумента и функции: $y = 1+\sqrt{x}$, $D(y) = [0, 4]$, $E(y) = [1, 3]$. Отобразив дугу параболы $y = (x-1)^2$, $x \in [1, 3]$, симметрично относительно прямой $y = x$, имеем график обратной функции (рис. 7.5, график обратной функции выделен жирной линией). Обратная функция $y = 1+\sqrt{x}$ строго возрастает на отрезке [0, 4], ибо прямая функция $y = (x-1)^2$ строго возрастает на [1, 3] (теорема 7.1).◄

§ 8. Элементарные функции

Перечисленные ниже функции называют *основными элементарными функциями*; они наиболее употребительны в приложениях математики.

1. $\boldsymbol{y = C}$ – const для $\forall x \in X$, где X – промежуток числовой прямой, её график при $C \neq 0$ – отрезок прямой, параллельной оси абсцисс.

2. Показательная функция $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$. Основные её свойства известны из курса элементарной математики: а) $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = (0, +\infty)$; б) при $a>1$ показательная функция возрастает, при $0 < a < 1$ она убывает. На рис. 8.1 изображены графики $y = a^x$ при $a > 1$ и $0 < a < 1$.

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a \neq 0$, $a > 0$. Эта функция обратная по отношению к показательной функции $y = a^x$, в силу теоремы 7.1, её основные свойства следуют из свойств последней: а) $D(y) = (0, +\infty)$, $E(y) = \boldsymbol{R}$; б) при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает, при $0 < a < 1$ она убывает; в) график данной функции симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$. Графики $y = \log_a x$ при $a > 1$ и $0 < a < 1$ приведены на рис. 8.2.

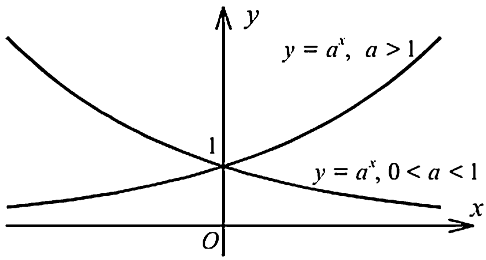


Рис. 8.1. *Графики показательной Функции*

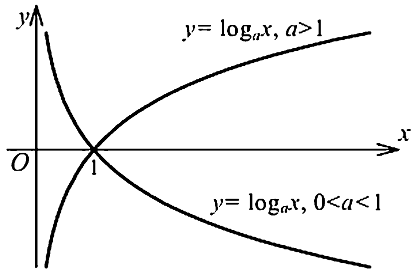


Рис. 8.2. *Графики логарифмической функции*

4. Степенная функция $y = x^a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$. При $x > 0$ эту функцию рассмотрим как суперпозицию показательной и логарифмической функций: $x^a = 10^{a \lg x}$, $\lg x = \log_{10} x$. Функции 10^x и $\lg x$ возрастают на $(0, +\infty)$; тогда и $y = x^a$, $a \neq 0$,

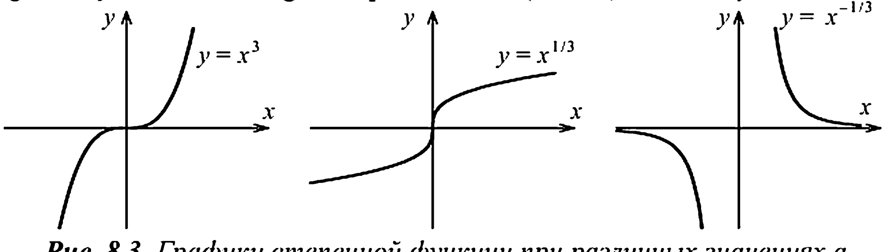


Рис. 8.3. *Графики степенной функции при различных значениях а*

строго монотонна на $(0, +\infty)$: возрастает при $a > 0$ и убывает при $a < 0$. При $a > 0$ она определена в нуле: $y(0) = 0$. При некоторых значениях a (например, при $a \in N$) она определена на всей числовой оси. На рис. 8.3 приведены графики степенной функции при $a=3$, 1/3 и –1/3.

5. Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.

Эти функции подробно рассмотрены в школьном курсе математики. Их графики приведены на рис. 8.4, 8.5.

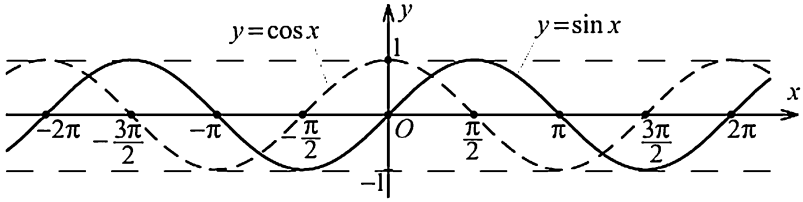


Рис. 8.4. *Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$*

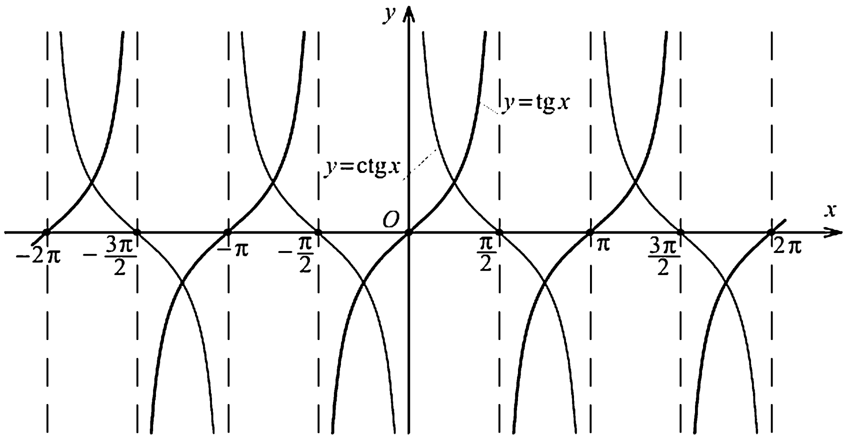


Рис. 8.5. *Графики функций $y = \operatorname{tg}x$ и $y = \operatorname{ctg}x$*

6. Обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arcctg}x$.

1. Функция $y = \arcsin x$. По определению $y=\arcsin x$ – это угол (или дуга) из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$, синус которого равен x. Итак, $y=\arcsin x$ – функция, обратная функции $y=\sin x$, $x\in[-\pi/2, \pi/2]$, основные её свойства следуют из свойств функции $y=\sin x$, $x\in[-\pi/2, \pi/2]$, и теоремы 7.1.

а) $D(y) = [-1, 1]$, $E(y) = [-\pi/2, \pi/2]$;

б) $y=\arcsin x$ возрастает на $D(y)$ от $-\pi/2$ до $\pi/2$;

в) $y=\arcsin x$ – нечётная функция: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ при $\forall x \in [-1, 1]$;

г) график функции $y=\arcsin x$ симметричен графику функции $y=\sin x$, $x\in[-\pi/2, \pi/2]$, относительно прямой $y=x$ (рис. 8.6);

д) $\sin(\arcsin x) = x$ при $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin(\sin x) = x$ при $\forall x\in[-\pi/2, \pi/2]$.

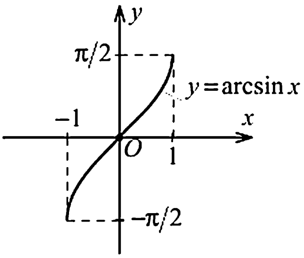


Рис. 8.6. *График функции y = arcsinx*

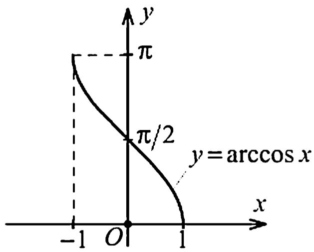


Рис. 8.7. *График функции y = arcccosx*

2. Функция y = arccosx. По определению y= arccos$x$ – это угол (или дуга) из промежутка $[0, \pi]$, косинус которого равен x. Таким образом, y= arccos$x$ – функция, обратная функции y=cos$x$, $x \in [0, \pi]$, поэтому основные её свойства следуют из свойств функции y= cos$x$, $x \in [0, \pi]$ и теоремы 7.1.

а) $D(y) = [-1, 1]$, $E(y) = [0, \pi]$;

б) y= arccos$x$ убывает на $D(y)$ от π до 0;

в) y= arccos$x$ не обладает свойствами чётности или нечётности: $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$; $x \in [0, \pi]$;

г) график функции y= arccos$x$ симметричен графику функции y=cos$x$, $x \in [0, \pi]$; относительно прямой $y=x$ (рис. 8.7);

д) $\cos(\arccos x) = x$ при $\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos(\cos x) = x$ при $x \in [0, \pi]$.

3. Функция y = arctgx. По определению y=arctg$x$ – это угол (или дуга) из промежутка $(-\pi/2, \pi/2)$, тангенс которого равен x. Итак, y=arctg$x$ – функция, обратная функции y=tg$x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, поэтому её основные свойства можно вывести из свойств этой функции и теоремы 7.1:

а) $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = (-\pi/2, \pi/2)$;

б) y=arctg$x$ возрастает на $D(y)$;

в) y=arctg$x$ – нечётная функция: $\mathrm{arctg}(-x) = -\,\mathrm{arctg}\,x$ при $\forall x \in \boldsymbol{R}$;

г) график функции y=arctg$x$ симметричен графику функции y = tg$x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, относительно прямой $y=x$ (рис. 8.8);

д) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x) = x$ при $\forall x \in \boldsymbol{R}$; $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x) = x$ при $\forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

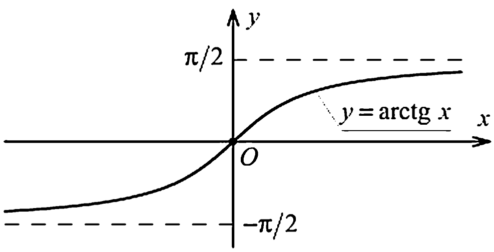


Рис. 8.8. *График функции y = arctgx*

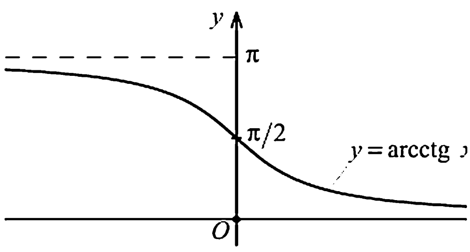


Рис. 8.9. *График функции y= arcctgx*

4. Функция y = arcctgx. По определению y=arcctg$x$ – это угол (или дуга) из промежутка $(0, \pi)$, котангенс которого равен x. Таким образом, y=arctg$x$ – функция, обратная функции y=ctg$x$, $x \in (0, \pi)$, поэтому основные её свойства можно вывести из свойств этой функции и теоремы 7.1:

а) $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = (0, \pi)$;

б) y=arcctg$x$ убывает на $D(y)$;

в) функция $y=\operatorname{arcctg} x$ не обладает свойствами чётности или нечётности, $\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg}x$; $x\in \boldsymbol{R}$;

г) график функции $y=\operatorname{arcctg}x$ симметричен графику функции $y=\operatorname{ctg}x$, $x\in(0,\pi)$, относительно прямой $y=x$ (рис. 8.9);

д) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)=x$ при $\forall x\in\boldsymbol{R}$; $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x)=x$ при $x\in(0,\pi)$.

Определение 8.1. Функция, которая может быть задана одним аналитическим выражением с помощью конечного числа суперпозиций и арифметических операций над основными элементарными функциями, называется *элементарной функцией*.

Элементарная функция называется *алгебраической*, если её можно задать с помощью конечного числа алгебраических действий (сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональным показателем). Все другие элементарные функции называются *трансцендентными*. Например, $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-2}{\sqrt{x+5}+x^{2/5}}$ – алгебраическая функция, а $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{e^x-1}+\ln\cos(3x+1)}{\sin(1/x)+\operatorname{ctg}\sqrt[3]{2x-5}}$ – элементарная трансцентдентная функция.

Пример 8.1. Найти область определения функции $y=\sqrt{\log_{1/2}(4-x^2)}$.

►$D(y)$: $\log_{1/2}(4-x^2)\ge 0$ или, в силу свойств логарифмической функции, $D(y)$: $0<4-x^2\le 1$. Это неравенство равносильно системе из двух неравенств: $0<4-x^2 \wedge 4-x^2\le 1$. Для первого из них имеем: $4-x^2>0 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2<x<2$. Решение второго выполним по аналогии: $4-x^2\le 1\Leftrightarrow x^2\ge 3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |x|\ge\sqrt{3} \Leftrightarrow x\le-\sqrt{3} \vee x\ge\sqrt{3}$. Пересечение найденных решений приводит к соотношению $D(y)=(-2,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},2)$ (рис. 8.10).◄

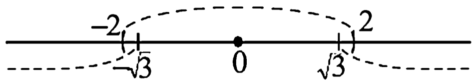


Рис. 8.10. К примеру 8.1

Пример 8.2. Является ли функция $y=(e^x-e^{-x})/2$ чётной? нечётной?

► $D(y)=\boldsymbol{R}$, $y(-x)=(e^{-x}-e^{-(-x)})/2=-(e^x-e^{-x})/2=-y(x)$ при $\forall x\in\boldsymbol{R}$, поэтому данная функция нечётная.◄

Пример 8.3. Найти $\sup\limits_{x\in X} f(x)$, $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ и $\max\limits_{x\in X} f(x)$, $\min\limits_{x\in X} f(x)$, если $f(x)=\operatorname{arctg}|x|$ и $X=\boldsymbol{R}$.

►Данная функция является чётной, следовательно, ограничимся рассмотрением только неотрицательных значений x, при этом $0\le\operatorname{arctg}|x|<\pi/2$. Поэтому $\inf\limits_{x\in X} f(x)=\min\limits_{x\in X} f(x)=0$, $\sup\limits_{x\in X} f(x)=\pi/2$, а $\max\limits_{x\in X} f(x)$ не существует.◄

Пример 8.4. Дана функция $y=1-3|\sin 5x|$. Найти её период и $E(y)$.

►$D(y)=\boldsymbol{R}$. Период функции $y=|\sin x|$ равен π (пример 7.1), поэтому $1-$ $-3|\sin 5x|=1-3|\sin(5x+\pi)$, отсюда $1-3|\sin 5x|=1-3|\sin 5(x+\pi/5)|$ для $\forall x\in\boldsymbol{R}$ и период данной функции $T=\pi/5$. Для отыскания $E(y)$ рассмотрим неравенство $0\le|\sin 5x|\le 1$, верное при $\forall x\in\boldsymbol{R}$. Умножим все его члены на (-3), при этом знак неравенства изменится на противоположный: $0 \ge -3|\sin 5x| \ge -3$. Прибавив ко всем членам неравенства по 1, получим $1 \ge 1-3|\sin 5x| \ge -2$. Из последнего неравенства следует, что $E(y)=[-2, 1]$.◄

Пример 8.5. Построить график функции $y=\dfrac{x}{x-1}$.

►Имеем $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{(x-1)+1}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$, следовательно, $y=1+\dfrac{1}{x-1}$. График данной функции построим путём параллельного переноса центра симметрии $O(0, 0)$ графика функции $y = 1/x$ в точку $A(1, 1)$.

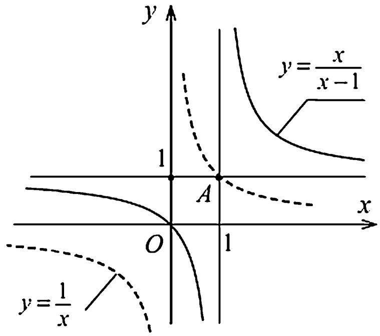


***Рис. 8.11.** К примеру 8.5.*
График функции $f(x)=1/(x-1)$

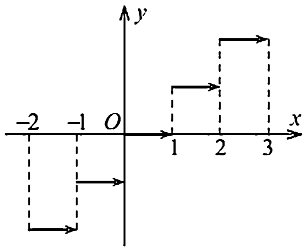


***Рис. 8.12.** К примеру 8.6.*
График функции $y=[x]$

На рисунке 8.11 график функции $y=1/x$ изображён пунктирной линией.

◄**Пример 8.6.** Построить график целой части числа x: $y=[x]$, $x\in \boldsymbol{R}$.

►$y=k$, $x\in [k, k+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, график данной функции является объединением тех частей прямых $y = k$, абсциссы точек которых удовлетворяют неравенству $k\le x<k+1$(рис. 8.12).◄

§ 9. Функции в экономике

Функции широко применяются в экономической теории и при решении экономических (и производственных) задач. Приведем наиболее часто применяемые функции.

Функция полезности – зависимость полезности (эффекта, результата) некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

Производственная функция – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших ее факторов.

Функция выпуска определяет зависимость объема выпускаемой продукции от объема перерабатываемого ресурса. Функция выпуска является частным видом производственной функции.

Функция издержек – зависимость издержек производства от объема продукции. Функция издержек также есть частный вид производственной функции.

Функции спроса (потребления) и предложения – зависимость объема спроса (потребления) D и предложения S от различных факторов, например, от цены p (разд. 2, гл. 4, § 5).

Эти функции, как правило, функции нескольких переменных. Но в ряде случаев можно выделить одну переменную (фактор), которая оказывает наибольшее влияние на значения рассматриваемой функции.

Пример 9.1. Спрос и предложение некоторого товара (услуги) определяются главным образом ценой p товара (услуги). Они могут задаваться функциями:

$$D(p)=ap+c, \text{ где } a<0 \text{ или } D(p)=ap^2+a_1p+c,\ a<0; \qquad (9.1)$$

$$S(p)=bp+d, \text{ где } b>0 \text{ или } S(p)=bp^2+b_1p+d,\ b>0. \qquad (9.2)$$

Прмер 9.2. Зависимость спроса на различные товары от дохода (функции Торнквиста):

$$y=\frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1},(x>a_1) \text{ товары первой небходимости}); \qquad (9.3)$$

$$y=\frac{b_2(x-a_2)}{x-c_{12}},(x>a_2)(\text{товары второй небходимости}); \qquad (9.4)$$

$$y=\frac{b_3x(x-a_3)}{x-c_3},(x>a_3)(\text{товары роскоши}). \qquad (9.5)$$

В (9.3) – (9.5) $a_1<a_2<a_3$ – уровни доходов, b_1,b_2-точки насышения групп товаров 1-й и 2-й необходимости.

Глава 2. **Предел функции**

§ 1. Числовая последовательность. Классификация последовательностей

Определение 1.1. Если любому натуральному числу 1, 2, … , n, ..., поставлено в соответствие по определённому закону некоторое вещественное число x_n, то множество занумерованных чисел x_1, x_2, …, x_n, … называется *числовой последовательностью* или просто *последовательностью*. Числа x_1, x_2, …, x_n, … называются *членами последовательности*, x_n – n-м членом последовательности или её *общим членом*.

Заметим, что x_n есть $f(n)$– числовая функция номера члена последовательности. Последовательность обозначается символом $\{x_n\}$ или $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Из элементарной алгебры известны две последовательности – *арифметическая* и *геометрическая прогрессии*, общие члены которых задаются равенствами: $x_n = a_1 + d(n-1)$ и $x_n = a_1q^{n-1}$, при этом a_1 называется *первым членом*, d – *разностью* арифметической, а q – *знаменателем* геометрической прогрессии.

Классификация числовых последовательностей

Определение 1.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если неравенство $x_n\le x_{n+1}$ ($x_n\ge x_{n+1}$) выполняется для $\forall n\in N$. Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями.

Определение 1.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если $\exists M>0: |x_n|\le M$ для $\forall n\in N$.

Замечание 1.1. Из определения 1.3 следует ограниченность последовательности $\{x_n\}$ в случае, если для $\forall n \in N$ выполняется неравенство $M_1 < x < M_2$, где M_1, M_2 – некоторые вещественные числа. В самом деле, тогда за число M из определения 1.3 можно взять $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$. Например, последовательность $x_n = n/(n+1)$ ограничена, ибо неравенство $0 < n/(n+1) < 1$ выполняется для $\forall n \in N$.

Пример 1.1. Показать, что последовательность $x_n = (3n-1)/(2n+1)$ является возрастающей и ограниченной.

►Определим знак разности $x_{n+1} - x_n$. Имеем
$x_{n+1} - x_n = \dfrac{3(n+1)-1}{2(n+1)+1} - \dfrac{3n-1}{2n+1} = \dfrac{5}{(2n+3)(2n+1)} > 0$ для $\forall n \in N$, поэтому неравенство $x_n > x_{n+1}$ верно для $\forall n \in N$ и, следовательно, данная последовательность возрастающая (определение 1.2). Отсюда следует, что любой член последовательности не меньше x_1 : $x_n \geq x_1 = 2/3$, $\forall n \in N$. В то же время $x_n = \dfrac{3n-1}{2n+3} < \dfrac{3n}{2n+3} < \dfrac{3n}{2n} = \dfrac{3}{2}$ для $\forall n \in N$. Итак, неравенство $2/3 \leq x_n < 3/2$ справедливо для $\forall n \in N$, а это и означает, что данная последовательность ограничена (замечание 1.1).◄

Пример 1.2. Является ли последовательность $x_n = (-1)^{n-1}(n+1)/n$ монотонной? ограниченной?

►$x_1 = 2$, $x_2 = -3/2$, $x_3 = 4/3$, $x_4 = -5/4, \ldots$. Эта последовательность не монотонная, ибо ни одно из неравенств $x_n \leq x_{n+1}$ и $x_n \geq x_{n+1}$ не выполняется для $\forall n \in N$. Первое из них не выполняется для $n=1, 3, \ldots$, т. е. для всех нечётных n, а второе – для всех чётных n. Данная последовательность ограниченная, так как $x_n =$ $= (-1)^{n-1}(1+1/n)$, и поэтому $|x_n| \leq 2$ для $\forall n \in N$.◄

Пример 1.3. Найти наибольший член последовательности $x_n = 11 + 10n - n^2$.

►$x_n = 11 - (n^2 - 10n) = 11 - (n^2 - 10n + 25) + 25 = 36 - (n-5)^2 \leq 36$ для $\forall \in N$, причём равенство достигается только при $n = 5$, поэтому заключаем, что наибольшим членом последовательности является $x_5 = 36$.◄

§ 2. Предел числовой последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности

Определение 2.1. Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Последовательности, имеющие предел, называются сходящимися, не имеющие предела – расходящимися. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится или стремится к a при n, стремящемся в бесконечность ($x_n \to a$ при $n \to \infty$).

Замечание 2.1. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно утверждению $x_n \in U_\varepsilon(a)$. В символической форме определение 2.1 можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \text{для } \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in N\text{: } n > N(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Замечание 2.2. Геометрически определение 2.1 трактуется так: если число a – предел данной последовательности, то в любой $U_\varepsilon(a)$ находятся все её члены, начиная с некоторого номера, зависящего от ε.

Замечание 2.3. Если все члены последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу a, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, так как в этом случае неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ из определения 2.1 выполняется для $\forall n \in \boldsymbol{N}$ и $\forall\varepsilon > 0$.

Пример 2.1. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ для $|q|<1$.

►Зададим $\forall\, \varepsilon > 0$. Найдём номер $N(\varepsilon)$: для $n > N(\varepsilon)$ верно неравенство $|\, q^n - 0\,| < \varepsilon$ или $|q|^n < \varepsilon$. Разрешим последнее неравенство относительно n: $n\lg|q| < \lg\varepsilon \Rightarrow n > \lg\varepsilon/\lg|q|$. Тогда $N(\varepsilon) = [\lg\varepsilon/\lg|q|]$– целая часть числа $\lg\varepsilon/\lg|q|$.◄

Пример 2.2. Показать, что последовательность $\{x_n\}: x_n = (-1)^n$ расходится.

►$\{x_n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots$. Очевидно, любая ε – окрестность точек 1 и –1 содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$, но при $0 < \varepsilon < 1$ она содержит не все члены, начиная с некоторого номера. Если какой-то член последовательности принадлежит $U_\varepsilon(1)$, то последующий член принадлежит уже $U_\varepsilon(-1)$, и т. д. Для любых других точек числовой прямой можно указать ε – окрестности, не содержащие членов этой последовательности. Приходим к выводу, что она не имеет предела.◄

Теорема 2.1 (теорема Вейерштрасса – *достаточный признак существования предела числовой последовательности*). Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс К., (1815 – 1897) – немецкий математик) – типичная теорема существования, т. е. она гарантирует существование предела последовательности, но не даёт способа его отыскания.

Теорема 2.2. Последовательность $\{(1+1/n)^n\}$ сходится при $n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$, где e –иррациональное число, равное 2,71828… .

Замечание 2.4. Число e служит основанием так называемых *натуральных логарифмов*: $\ln a = \log_e a$. Для показательной функции $y = e^x$ и логарифмической функции $y = \ln x$ многие формулы из последующих разделов курса математики имеют более простой вид, чем для функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ с произвольным основанием $a \neq e$.

Замечание 2.5. К необходимости ычисления пределов вида $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ приводят некоторые задачи финансовой математики, например задача о непрерывном начислении сложных процентов [5].

§ 3. Определение предела функции в точке. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности

Понятие предела функции в точке – одно из основных понятий математического анализа. С его помощью исследуется поведение функции в проколотой окрестности данной точки, результаты такого исследования применяются, например, при построении графика функции.

Определение 3.1 (*по Коши или на языке* $\varepsilon - \delta$, Коши О. (1789 – 1857) – французский математик). Пусть функция $f(x)$ определена на $\overset{\circ}{U}(a)$ – некоторой проколотой окрестности точки a. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для x: $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Замечание 3.1. Неравенство $0<|x-a|<\delta)$ равносильно утверждению $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$, а неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ – утверждению $f(x) \in U_\varepsilon(A)$. В символической форме определение 3.1 записывается так:

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \text{для } \forall\, \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0\text{: } \forall \overset{\circ}{x} \in U_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Замечание 3.2. Предел функции $f(x)$ в точке a – характеристика поведения функции в некоторой проколотой окрестности точки a. Значение функции $f(a)$, если оно существует, не влияет ни на существование, ни на величину $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Пример 3.1. Используя определение 3.1, показать, что $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

►Неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ здесь имеет вид $|\cos x-1|<\varepsilon$ или $2\sin^2(x/2)<\varepsilon$. По $\forall \varepsilon > 0$ найдём число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x : 0 < |x - 0| = |x| < \delta(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство $2\sin^2(x/2)<\varepsilon$. Неравенство $|\sin x|<|x|$ верно для $\forall x \neq 0$, потому и неравенство $2\sin^2(x/2) < 2(x/2)^2 = x^2/2$ верно для $\forall x \neq 0$. Пусть x: $x^2/2 < \varepsilon$ $\Leftrightarrow x : |x| < \sqrt{2\varepsilon}$. Для таких x верно неравенство $2\sin^2(x/2) < \varepsilon \Leftrightarrow |\cos x-1| < \varepsilon$, поэтому $\delta(\varepsilon)=\sqrt{2\varepsilon}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ (определение 3.1).◄

Замечание 3.3. Нетрудно показать [13], что для того, чтобы число A было пределом функции в точке a, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\} \subset U(a)$, сходящейся к a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходилась бы к A.

Пример 3.2. Если функция $f(x) = C$ –const. на некоторой проколотой окрестности точки $\overset{\circ}{U}(a)$, то её предел равен C при $x \to a$.

►Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ из определения 3.1 выполняется при $A=C$ для $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$ и $\forall \varepsilon > 0$.◄

Пример 3.3. Используя замечание 3.3, показать, что $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x)$.

►Пусть $f(x) = \sin(1/x)$, а последовательность $x_n = 1/(\pi/2+\pi n) \to 0$ при $n \to \infty$. Имеем: $f(x_n) = \sin(\pi/2 + \pi n) = \begin{cases} 1, \text{если } n - \text{четное число}, \\ -1, \text{если } n - \text{нечетное число}. \end{cases}$ Так как $\nexists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$, то $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x)$ (замечание 3.3).◄

Определение 3.2. Число A называется левым пределом функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a-0$), если $f(x)$ задана на некотором промежутке (a_1, a) и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для x: $a_1 < a - \delta(\varepsilon) < x < a$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначение: $A=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $A=f(a-0)$.

Аналогично определяется правый предел функции $f(x)$ в точке a (или при $x\to a+0$), если $f(x)$ задана на некотором промежутке (a, a_2).

Обозначение: $A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $A=f(a+0)$.

Теорема 3.1. Для того чтобы $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены два условия:

1. $\exists\, f(a-0)$ и $f(a+0)$;

2. $f(a-0)=f(a+0)$.

Следствие из теоремы 3.1. Если $f(a-0)\neq f(a+0)$, то функция $f(x)$ не имеет предела в точке a. Доказательство от противного.

Пример 3.4. Показать, что $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$, если $f(x)=|x-1|$.

►$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ x-1, & x\ge 1\end{cases}$ (определение модуля). Для $\forall\,\{x_n\}\subset(0,1)$: $x_n\to 1\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_n)=1-x_n\to 0$ при $n\to\infty$, потому $f(1-0)=0$ (определение 3.2 и замечание 3.3), а $f(x_n)=x_n-1\to 0$ при $n\to\infty$ для $\forall\,\{x_n\}\subset(1,2)$: $x\to 1$ отсюда $f(1+0)=0$. Так как $f(1-0)=f(1+0)=0$, то $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$ (теорема 3.1).

Пример 3.5. Показать, что $\nexists\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, если $f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 2-x, & x\ge 1.\end{cases}$

►Для $\forall\,\{x_n\}\subset(0,1)$: $x_n\to 1\Rightarrow f(x_n)=0\to 0$ при $n\to\infty$ отсюда $f(1-0)=0$ (замечание 3.3), а для $\forall\,\{x_n\}\subset(1,2)$: $x_n\to 1\Rightarrow f(x_n)\to 1$ при $n\to\infty$, поэтому $f(1+0)=1$. Итак, $f(1-0)\neq f(1+0)=1\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (следствие из теоремы 3.1).◄

Определение 3.3. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to\infty$, если $f(x)$ определена на множестве $X=(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$, где a – некоторое положительное число, и по $\forall\varepsilon>0$ можно найти число $M(\varepsilon)>0$: для $\forall x: |x|>M(\varepsilon)$ верно неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначение: $A=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Пример 3.6. Показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^p=0$ для $\forall p>0$ и $\forall x>0$.

►Возьмём $\forall\varepsilon>0$. Неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ здесь имеет вид: $|1/x^p|<\varepsilon$. Отсюда $|x^p|>1/\varepsilon\Rightarrow|x|>1/\varepsilon^p$, поэтому для x: $|x|>M(\varepsilon)=1/\varepsilon^p\Rightarrow|1/x^p|<\varepsilon$, следовательно $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^p=0$ (определение 3.3, $A=0$).◄

Замечание 3.4. Точно также формулируются определения, соответствующие следующим обозначениям: $A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $A=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

§ 4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 4.1. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$, если $\exists\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ (под a может пониматься и один из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$).

Так, функция $1/x^p$ – бесконечно малая при $x\to+\infty$ и $\forall p>0$, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}1/x^p=0$ для $\forall p>0$ (пример 3.6).

Свойства бесконечно малых функций

Теорема 4.1. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ есть бесконечно малые функции при $x\to a$.

Теорема 4.2. Произведение функции $\alpha(x)$, бесконечно малой при $x\to a$, на функцию $f(x)$, ограниченную на $\overset{\circ}{U}(a)$ – некоторой проколотой окрестности точки a, есть бесконечно малая функция при $x\to a$.

Пример 4.1. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}x\sin(1/x)=0$.

► $\nexists\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ (пример 3.3), но функция $x\sin(1/x)$ ограничена в своей области определения ($|\sin(1/x)|\le 1$ при $\forall x$: $x\ne 0$). Функция $x\sin(1/x)$ является бесконечно малой при $x\to 0$ в силу теоремы 4.2.◄

Теорема 4.3. Для того, чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$f(x)=A+\alpha(x), \tag{4.1}$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$.

Определение 4.2. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$ если она определена на $\overset{\circ}{U}(a)$ – некоторой проколотой окрестности точки a и для любого числа $M>0$ можно найти число $\delta(M)>0$: $x\in\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ справедливо неравенство $|f(x)|>M$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

Замечание 4.2. Определение 4.2 можно переформулировать на случай: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$. Это определение и теорему 4.2 можно переформулировать и на случай, когда под a понимают один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Пример 4.2. Показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ при $a>1$.

►Функция a^x определена на всей вещественной оси. Возьмём любое число $M>0$ и покажем, что существует число $K(M)>0$ такое, что если $x>K(M)$, то $a^x>M$. Разрешим последнее неравенство относительно x: $x>\log_a M$. Если $K(M)=$ $=\log_a M$, то $a^x>M$, что и требовалось доказать.◄

Теорема 4.4 (*о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций*).

Пусть дана функция $f(x)$, отличная от нуля на $\overset{\circ}{U}(a)$. Тогда:

1) если $f(x)\to 0$ при $x\to a$, то $1/f(x)\to\infty$ при $x\to a$;

2) если $f(x)\to\infty$ при $x\to a$, то $1/f(x)\to 0$ при $x\to a$.

Пример 4.3. Показать, что функция $f(x)=x^p$ – бесконечно большая при $x\to+\infty$ для $\forall p>0$.

►Функция $g(x)=1/x^p$ – бесконечно малая при $x\to+\infty$ для $\forall p>0$ (пример 3.6 и определение 4.1). Поскольку $f(x)=1/g(x)$, то $f(x)=x^p$ – бесконечно большая функция при $x\to+\infty$ для $\forall p>0$ (теорема 4.4).◄

Арифметические операции над бесконечно большими функциями

Теорема 4.5. Если $f(x) \to \pm\infty$ и $g(x) \to \pm\infty$ при $x \to a$, либо функция $g(x)$ ограничена на $\mathring{U}(a)$, то и $f(x) + g(x) \to \pm\infty$ при $x \to a$ (здесь нужно брать либо везде знак «+», либо везде знак «–»).

Теорема 4.6. Если $f(x) \to \infty$, а $g(x) \to \infty$ или $g(x) \to A \neq 0$ при $x \to a$, то и $f(x) \cdot g(x) \to \infty$ при $x \to a$.

§ 5. Свойства функций, имеющих предел

Теорема 5.1 (*теорема об арифметических операциях над функциями, имеющими предел*). Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то

1. $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
2. $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$,
3. $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ при условии, что функция $g(x) \neq 0$ на $\mathring{U}(a)$ и $B \neq 0$.

Теорема 5.2. Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, то он единственный.

►Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = B$. Но $f(x) - f(x) = 0 \to A - B$ при $x \to a$ (теорема 5.1). Предел постоянной равен самой постоянной (пример 3.2), поэтому приходим к выводу, что $A=B$.◄

Теорема 5.3 (*о сжатой функции*). Если функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены на $\mathring{U}(a)$ и для $\forall x \in \mathring{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, а также $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x)=A$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)=A$.

Замечание 5.1. Теоремы 5.1 – 5.3 верны и в случае, ко гда под a понимается один из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Их можно также переформулировать на случай числовых последовательностей, являющихся частными случаями числовых функций, заданных на множестве натуральных чисел.

Теорема 5.4 (*об ограниченности функции, имеющей предел в точке*). Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то существует достаточно малая проколотая окрестность точки a, в которой эта функция ограничена.

Теорема 5.5 (*о сохранении знака функции, имеющей предел в точке*). Если функция $f(x)$ имеет отличный от нуля предел в точке a, то существует некоторая достаточно малая проколотая окрестность точки a, в которой значения функции сохраняют знак её предела.

Теорема 5.6 (*о замене переменной при вычислении пределов или о пределе сложной функции*). Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$ и $\lim\limits_{y\to b} f(y) = A$, при этом $\varphi(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a, то на $\mathring{U}(a)$ определена сложная функция $f(\varphi(x))$, имеющая предел при $x \to a$, при этом справедливо равенство: $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{y\to b} f(y) = A$.

Пример 5.1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x)$, $P_n = a_0x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$.

►Имеем $P_n(x) = x^n(a_0 + a_1x^{-1} + \ldots + a_{n-1}x^{1-n} + a_nx^{-n})$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_0 + a_1x^{-1} + \ldots + a_nx^{-n}) = a_0$ (примеры 3.3, 4.3 и теоремы 5.1, 4.6), то $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = \pm\infty$ (теорема 4.6, знаки a_0 и бесконечности совпадают).◄

Замечание 5.2. При вычислении пределов полезна теорема: «Любая элементарная функция $f(x)$, определённая на некоторой окрестности точки x_0, имеет в этой точке предел, равный $f(x_0)$ (т. е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$)». Она выражает свойство непрерывности элементарной функции, определённой на некотором промежутке (теорема 5.1, гл. 3).

Пример 5.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to4} (x^2 - 8)/\log_2 x$.

►Пусть $f(x) = x^2 - 8$, $g(x) = \log_2 x$. Данные функции элементарные, определённые в некоторой окрестности точки $x = 4$, поэтому в силу замечания 2.2, $\lim\limits_{x\to4} f(x) = f(4) = 8$, $\lim\limits_{x\to4} g(x) = g(4) = \log_2 4 = 2$. Отсюда $\lim\limits_{x\to4} f(x)/g(x) = 8/2 = 4$ (теорема 5.1).◄

§ 6. Замечательные пределы

1. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство данной формулы приведено в [11, 13].

Замечание 6.1. В процессе доказательства первого замечательного предела доказано неравенство $\sin x/2 < x/2$ или $\sin x < x$ для $0 < x < \pi/2$. Его можно записать в виде: $|\sin x| < |x|$. Легко убедиться в том, что последнее неравенство верно и для $-\pi/2 < x < 0$. Для $|x| \geq \pi/2$ оно очевидно, так как $|\sin x| \leq 1$, а $\pi/2 > 1$. Итак, $|\sin x| < |x|$ для $\forall x \neq 0$.

Следствия из первого замечательного предела.

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},\quad \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Первые два из этих пределов будут вычислены ниже в примерах 3.1, 3.2, а последние два – в гл. 3.

Пример 6.1. Показать, что $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

► $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \dfrac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} \cdot \dfrac{1}{2}$. Имеем $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} = |x/2 = u| = \lim\limits_{u\to0} \dfrac{\sin^2 u}{u^2} = 1$ (первый замечательный предел), потому $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.◄

Пример 6.2. Показать, что $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

▶ $\frac{\text{tg}x}{x} = \frac{\sin x}{x}\Big/\cos x$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел) и $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ (пример 1.2), то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg}x}{x} = 1$ по теореме 5.1.◀

Пример 6.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\text{tg}3x}$.

▶ $\frac{\sin 2x}{\text{tg}3x} = \frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\text{tg}3x}\cdot\frac{2x}{3x}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = |2x = u| = \lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$ (первый замечательный предел). Аналогично получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\text{tg}3x} = 1$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\text{tg}3x} = \frac{2}{3}$ (теорема 5.1).◀

2. Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

Доказательство этих соотношений приведено в [11, 13].

Следствия из второго замечательного предела

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$, $\mu \in \boldsymbol{R}$.

Эти пределы будут вычислены в гл. 3.

Замечание 6.1. Во всех вышеприведённых пределах x можно заменить любой функцией, стремящейся к нулю.

Пример 6.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x+1}$.

▶ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-\frac{2(x+1)}{x}} = \left[\begin{matrix} y = -2x \to x = -2y \\ x\to\infty \Rightarrow y\to\infty \end{matrix}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}}\right]^{\frac{-2y+1}{y}} = e^{-2}$, ибо $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right] = e$, а $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{-2y+1}{y} = \lim\limits_{y\to\infty}\left(-2+\frac{1}{y}\right) = -2$.◀

Пример 6.5. Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{\ln(1-3x)}$.

▶ $\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{\ln(1-3x)} = 2\cdot\frac{(1+x/8)^{1/3}-1}{\ln(1-3x)} = 2\cdot\frac{(1+x/8)^{1/3}-1}{x/8}\cdot\frac{-3x}{\ln(1-3x)}\cdot\frac{x/8}{-3x}$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x/8)^{1/3}-1}{x/8} = \frac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3x}{\ln(1-3x)} = 1$ и $A = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{-24} = = -\frac{1}{36}$ (следствия из 2-го замечательного предела и теорема 5.1). ◀

§ 7. Раскрытие неопределённостей. Примеры

Арифметические действия с бесконечно малыми и бесконечно большими функциями могут привести к так называемым *неопределённостям*, когда неприменимы теоремы 5.1 и 4.5. Например, при вычислении $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x))$, если $f(x),\ g(x) \to +\infty$ при $x \to a$, неприменима теорема 4.5. В этом случае говорят, что выражение $f(x)-g(x)$ при $x \to a$ приводит к неопределённости вида $\infty-\infty$, а отыскание его предела называют *раскрытием неопределённости*. Если $f(x)\to 0,\ g(x)\to 0$ или $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$ при $x\to a$, то при вычислении $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)/g(x)\right)$ неприменима теорема 5.1, говорят, что частное $f(x)\,/\,g(x)$ при $x\to a$ приводит к неопределённости $0/0$ или ∞/∞. Ниже рассматриваются методы для раскрытия некоторых неопределённостей.

1. Неопределённость ∞/∞ в отношении многочленов при $x\to\infty$. Пусть $\dfrac{P_k(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}$, $a_0\neq 0,\ b_0\neq 0$. В членах дроби вынесем за скобки старшие степени x:

$$\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}=\frac{x^k(a_0+a_1x^{-1}+\ldots+a_{k-1}x^{1-k}+a_kx^{-k})}{x^n(b_0+b_1x^{-1}+\ldots+b_{n-1}x^{1-n}+b_nx^{-n})}=$$

$$=x^{k-n}\frac{a_0+a_1x^{-1}+\ldots+a_{k-1}x^{1-k}+a_kx^{-k}}{b_0+b_1x^{-1}+\ldots+b_{n-1}x^{1-n}+b_nx^{-n}}.$$

Предел второго сомножителя полученного произведения равен $a_0/b_0\neq 0$ (пример 3.6, теорема 5.1), а $\lim\limits_{x\to\infty}x^{k-n}=\begin{cases}0 & \text{при } k<n,\\ 1 & \text{при } k=n,\\ \infty & \text{при } k>n,\end{cases}$ (примеры 3.6, 4.3). Тогда, в силу теорем 5.1 и 4.6,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}=\begin{cases}0 & \text{при } k<n,\\ a_0/b_0 & \text{при } k=n,\\ \infty & \text{при } k>n.\end{cases}$$

Так, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5x}{3x^3-x+2}=\dfrac{2}{3}$ $(k=n=3,\ \ a_0=2,\ b_0=3)$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+5}{2x^3-x^2+1}=0$, так как здесь $k=2,\ n=3$, и, следовательно, $k<n$.

2. Неопределённость ∞/∞ в отношении алгебраических функций, содержащих иррациональности, $x\to+\infty$. Неопределённость раскрывается в результате выделения в обоих членах дроби старшей степени x.

Пример 7.1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+x}+x}{\sqrt{x^2-3x}+5x}$.

► Вынесем из-под знака радикала старшие степени x, после чего вынесем их за скобку в обоих членах дроби:

$$\frac{\sqrt{x^3+x}+x}{\sqrt{x^2-3x}+5x}=\frac{x^{3/2}\sqrt{1+1/x^2}+x}{x\sqrt{1-3/x}+5x}=\frac{x^{3/2}(\sqrt{1+1/x^2}+x^{-1/2})}{x(\sqrt{1-3/x}+5)}=x^{1/2}\frac{\sqrt{1+1/x^2}+x^{-1/2}}{\sqrt{1-3/x}+5}.$$

В силу теоремы 4.6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+x}+x}{\sqrt{x^2-3x}+5x}=\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/2}\dfrac{\sqrt{1+1/x^2}+x^{-1/2}}{\sqrt{1-3/x}+5}=+\infty$, так как $x^{1/2}\to+\infty$ при $x\to+\infty$ (пример 4.3), а второй сомножитель стремится к 1/6 (теоремы 5.1, 5.6 и пример 3.3).◄

3. Неопределённость 0/0 в отношении многочленов, $x\to a,\ a\in\boldsymbol{R}$. Метод раскрытия таких неопределённостей состоит в разложении на множители обеих членов дроби и последующего сокращения на разность $x-a$. При этом используется следующая теорема: «если число $x=a$ является корнем многочлена $P_n(x)$, то этот многочлен делится на разность $x-a$ без остатка».

Пример 7.2. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-5x+6}$.

►Многочлен $P_3(x)=x^3-3x^2+4$ делится на разность $x-2$, ибо $x=2$ – его корень, имеем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{P_3(x)}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$.

При вычислении предела x принадлежит проколотой окрестности точки $x=2$ (т. е. $x\neq 2$), поэтому оба члена дроби под знаком предела можно разделить на $x-2$. Дробь из правой части последнего равенства не даёт неопределённости при $x\to 2$, её предел вычисляем по теореме 5.1. Окончательно получаем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-5x+6}=\dfrac{0}{-1}=0$.◄

4. Неопределённость 0/0 **в отношении алгебраических функций, содержащих иррациональности,** $x\to a,\ a\in \boldsymbol{R}$. Надо перенести иррациональность из одного члена дроби в другой и далее разложить полученные многочлены на множители с целью сокращения на разность $x-a$.

Пример 7.3. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3}}{x^2-4x+4}$.

►Перенесём иррациональность из числителя дроби в знаменатель:

$$\frac{\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3}}{x^2-4x+4}=\frac{(\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3})(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})}=\frac{x^3-3x^2+4}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{(x^2-x-2)(x-2)}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})}=\frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})},$$

многочлен x^3-3x^2+4 разложен на множители как в примере 7.2. Имеем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3}}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2(\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3})}$. Сократим оба члена дроби в правой части последнего равенства на $(x-2)^2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3}}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{\sqrt{x^3+4}+x\sqrt{3}}.$$

Используя теоремы 5.1, 5.6, получаем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+4}-x\sqrt{3}}{x^2-4x+4}=\dfrac{3}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.◄

5. Неопределённость $\infty-\infty$. Общий принцип – трансформация данной неопределённости в неопределённость ∞/∞ или $0/0$.

Пример 7.4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4})$.

►Выражение под знаком предела умножим и разделим на сопряженное:

$$\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4}=\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-4})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-4}}=$$

$$=\frac{(x^2+3x)-(x^2-4)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-4}}=\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-4}}.$$

При $x\to\infty$ имеем неопределённость ∞/∞. Аналогично примеру 7.1:

$$\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-4}}=\frac{x(3+4/x)}{x(\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1-4/x})}=\frac{3+4/x}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1-4/x}}\quad \text{и}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4})=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+4/x}{\sqrt{1+3/x}+\sqrt{1-4/x}}=\frac{3}{2}.◄$$

§ 8. Сравнение бесконечно малых функций. Символ «*o*» и его свойства

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to a$.

Определение 8.1. Если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0,\infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x\to a$.

Пример 8.1. Показать, что функции $\sin^2 2x$ и x^2 – бесконечно малые одного порядка при $x\to 0$.

►Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot 4=4\neq 0,\infty$, то по определению 8.1 заключаем, что $\sin^2 2x$ и x^2 величины одного порядка при $x\to 0$.◄

Определение 8.2. Если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется величиной более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$ при $x\to a$.

Обозначение: $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to a$ ($\alpha(x)$ есть «*o*» малое от $\beta(x)$).

Так, $\sin^2 2x$ имеет более высокий порядок малости, чем x при $x\to 0$ (или $\sin^2 2x=o(x)$ при $x\to 0$), поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot 4x=0$.

Свойства символа «o»

Пусть $\beta(x)\to 0$ при $x\to a$.

1. $o(\beta)\pm o(\beta)=o(\beta)$;

2. $o(c\beta)=o(\beta)$, $co(\beta)=o(\beta)$ для $\forall c\neq 0$;

3. $\beta^n o(\beta)=o(\beta^n)$ при $\forall n\in \boldsymbol{N}$.

Так, для $\beta(x)=x\to 0$ имеем равенства: 1) $o(x)\pm o(x)=o(x)$; 2) $o(2x)=o(x)$, $2o(x)=o(x)$ и $o(2x+o(x))=o(x)$; 3) $x^3 o(x)=o(x^4)$.

Замечание 8.1. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то по теореме 4.2 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$. Тогда $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to a$ (определение 8.2).

Определение 8.3. Если $\nexists\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x)/\beta(x))$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми при $x\to a$.

Бесконечно малые $\alpha(x)=x\sin(1/x)$ и $\beta(x)=x$ несравнимы при $x\to 0$, ибо $\alpha(x)/\beta(x)=(x\sin(1/x))/x=\sin(1/x)$, $\nexists\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ (пример 1.3).◄

Замечание 8.2. Сравнить две бесконечно малые функции – значит установить, что они либо бесконечно малые одного порядка, либо одна из них более высокого порядка, чем другая, либо они несравнимы. При этом вычисляется предел отношения данных функций в случае, если он существует.

Пример 8.2. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)=e^{x^2-2x}-e^{-1}$, $\beta(x)=x-1$, $x\to 1$.

▶ $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{e^{x^2-2x}-e^{-1}}{x-1}=\dfrac{e^{-1}(e^{(x-1)^2}-1)}{x-1}=e^{-1}\cdot\dfrac{e^{(x-1)^2}-1}{(x-1)^2}\cdot(x-1)$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{(x-1)^2}-1}{(x-1)^2}=1$,
поэтому $\lim\limits_{x\to 1}(\alpha(x)/\beta(x))=0$ и $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to 1$ (определение 8.2).◀

Определение 8.4. Пусть функции $\alpha(x)$, $\beta(x)\to 0$ при $x\to a$. Тогда $\alpha(x)$ называется бесконечно малой k-го порядка по отношению к $\beta(x)$ при $x\to a$, если $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C\neq 0,\infty$.

Так, функция $\alpha(x)=\sin^2 2x$ имеет 2-й порядок малости относительно $\beta(x)=x$ (k=2) при $x\to 0$, ибо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}=4\neq 0,\infty$ (пример 8.1).

Пример 8.3. Определить порядок бесконечно малой $\alpha(x)=\ln(x^3-3x^2+3x)$ относительно бесконечно малой $\beta(x)=x-1$ при $x\to 1$.

▶ $\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=\dfrac{\ln(x^3-3x^2+3x)}{(x-1)^k}=\dfrac{\ln((x-1)^3+1)}{(x-1)^k}=\dfrac{\ln((x-1)^3+1)}{(x-1)^3}\cdot\dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^k}$. Так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln((x-1)^3+1)}{(x-1)^3}=1$, то $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^k}=1\neq 0,\infty$ при k=3. Поэтому порядок малости $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$ при $x\to 1$ равен 3.◀

§ 9. Эквивалентные бесконечно малые функции, их свойства. Главная часть бесконечно малой функции

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ − бесконечно малые при $x\to a$, где a может быть не только числом, но и одним из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Определение 9.1. Если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x\to a$.

Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

Так, $\ln(x^3-3x^2+3x)\sim(x-1)^3$ при $x\to 1$, ибо $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3-3x^2+3x)}{(x-1)^3}=1$ (пример 8.3).

Замечание 9.1. Эквивалентные бесконечно малые функции – частный случай бесконечно малых одного порядка (см. определение 8.1).

Свойства эквивалентных бесконечно малых

Теорема 9.1 (*теорема о замене эквивалентными в отношении*). Если $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ являются бесконечно малыми и $\alpha_1(x)\sim\beta_1(x)$, $\alpha_2(x)\sim\beta_2(x)$ при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a}(\alpha_1(x)/\alpha_2(x))=\lim\limits_{x\to a}(\beta_1(x)/\beta_2(x))$.

Теорема 9.2. Для того чтобы бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными при $x\to a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x\to a$ выполнялось одно из равенств $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$ или $\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x))$.

Замечательные пределы, следствия из них (§ 6) и замечание 6.2 позволяют найти эквивалентные для некоторых элементарных функций.

Таблица 9.1

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть функция $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Тогда:

$\sin\alpha \sim \alpha$,	(9.1)	$1-\cos\alpha \sim \alpha^2/2$,	(9.2)
$\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha$,	(9.3)	$\arcsin\alpha \sim \alpha$,	(9.4)
$\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha$,	(9.5)	$e^{\alpha}-1 \sim \alpha$,	(9.6)
$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$,	(9.7)	$(1+\alpha)^{\mu}-1 \sim \mu\alpha$.	(9.8)

Пример 9.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

►Дробь под знаком предела при $x\to 0$ даёт неопределённость 0/0. Имеем $\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{(1+x^2)^{1/3}-1}$. Из таблицы 9.1 при $x\to 0$ следуют соотношения

$$\ln(1+\cos x-1)\sim \cos x-1\sim -x^2/2 \ \ ((9.7),\ \alpha=\cos x-1 \ \text{ и } (9.2),\ \alpha=x),$$

$$(1+x^2)^{1/3}-1\sim x^2/3 \ \ ((9.8),\ \alpha=x^2, \mu=1/3).$$

Поэтому из теоремы 9.1 получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2/2}{x^2/3}=-\dfrac{3}{2}$.◄

Пример 9.2. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x^2-2x)}{e^{\operatorname{tg}\pi x}-1}$.

►Дробь под знаком предела при $x\to 2$ – неопределённость 0/0. Сделаем замену переменной под знаком предела (теорема 5.6):

$$\lim_{x\to 2}\frac{\arcsin(x^2-2x)}{e^{\operatorname{tg}\pi x}-1}=\begin{bmatrix} u=x-2, \\ x\to 2\Rightarrow u\to 0, \\ x=u+2 \end{bmatrix}=\lim_{x\to 2}\frac{\arcsin((u+2)^2-2(u+2))}{e^{\operatorname{tg}\pi(u+2)}-1}=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\arcsin(u^2+2u)}{e^{\operatorname{tg}(\pi u+2\pi)}-1}=\lim_{u\to 0}\frac{u^2+2u}{e^{\operatorname{tg}(\pi u)}-1}=\lim_{u\to 0}\frac{u(u+2)}{\operatorname{tg}(\pi u)}=\lim_{u\to 0}\frac{u(u+2)}{\pi u}=\frac{2}{\pi}.$$

Здесь использовано свойство периодичности тангенса, теорема 9.1 и применены формулы (9.4), (9.6) и (9.3): $\arcsin\alpha\sim\alpha$, $e^{\alpha}-1\sim\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$.◄

Замечание 9.2. При решении примеров 9.1 – 9.2 выполнена замена эквивалентными в отношении двух бесконечно малых функций (теорема 9.1). Замена эквивалентными в сумме или разности двух бесконечно малых может привести к функции, не эквивалентной данной сумме. Так,

$$2-2\cos x\sim x^2+x^4, \text{ а } \sin^2 x\sim x^2+2x^3 \text{ при } x\to 0,$$

но функция $2-2\cos x-\sin^2 x$ не эквивалентна функции $x^2+x^4-(x^2+2x^3)$ при $x\to 0$. В самом деле,

$$2-2\cos x-\sin^2 x=1-2\cos x+\cos^2 x=(1-\cos x)^2\sim x^4/4, \text{ а}$$

$$x^2+x^4-(x^2+2x^3)=-2x^3+x^4\sim -2x^3 \text{ при } x\to 0.$$

Определение 9.2. Пусть даны функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, являющиеся бесконечно малыми при $x\to a$. Функция $\beta(x)$ называется главной частью функции $\alpha(x)$ при $x\to a$, если $\alpha(x)$ при $x\to a$ можно представить в виде

$$\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x)). \qquad (9.9)$$

Замечание 9.3. Из теоремы 9.2 и определения 9.2 следует утверждение: «функция $\beta(x)$ есть главная часть бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x\to a$ тогда и только тогда, когда эти функции эквивалентны при $x\to a$». Бесконечно малая функция $\alpha(x)$ при $x \to a$ может иметь бесчисленное множество главных частей, ибо любую бесконечно малую функцию $\beta(x)$, эквивалентную $\alpha(x)$, можно считать её главной частью. Так, функции x, $\mathrm{tg}x$ – главные части $\sin x$ при $x \to 0$, ибо $\sin x \sim x$, $\sin x \sim \mathrm{tg}x$ при $x \to 0$.

Главную часть бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to a$ обычно находят в виде степенной функции $\beta(x) = C(x-a)^k$ при $a \in \boldsymbol{R}$ или $\beta(x) = C(1/x)^k$ при $a=\infty$, $k>0$. Найти для $\alpha(x)$ такую главную часть – значит найти константу C и её порядок k относительно разности $x-a$ или дроби $1/x$.

Пример 9.3. Выделить главную часть вида $C(x-2)^k$ из бесконечно малой $\alpha(x) = \mathrm{arctg}(x^3 - 3x^2 + 4)$ при $x \to 2$.

► $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha(x)}{C(x-2)^k} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{arctg}(x^3-3x^2+4)}{C(x-2)^k} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{C(x-2)^k}$ (функцию $\alpha(x)$ заменили на эквивалентную). Разложим числитель на множители: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha(x)}{C(x-2)^k} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{C(x-2)^k} = \dfrac{3}{C} = 1$ при $k=2$ и $C=3$. Поскольку $\alpha(x) \sim (x-2)$, $x \to 2$, то функция $3(x-2)^2$ – главная часть бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to 2$.◄

Пример 9.4. Выделить главную часть вида $C(1/x)^k$ из бесконечно малой $\alpha(x) = \sin\dfrac{3x^2+x}{5x^4-2}$ при $x \to \infty$.

► $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x}{5x^4-2} = 0$ (§ 7, п. 1), $\alpha(x) = \sin\dfrac{3x^2+x}{5x^4-2} \sim \dfrac{3x^2+x}{5x^4-2}$ при $x \to \infty$ ((9.1), $\alpha = \dfrac{3x^2+x}{5x^4-2}$). Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{C(1/x)^k} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left((3x^2+x)/(5x^4-2)\right)}{C(1/x)^k} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2+x)\cdot x^k}{C(5x^4-2)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2+k}(3+1/x)}{Cx^4(5-1/x^4)} = \dfrac{3}{5C} = 1$ при $C = 3/5$, $k = 2$. Отсюда следует: $\alpha(x) \sim \dfrac{3}{5x^2}$ при $x \to \infty$ и $\dfrac{3}{5x^2}$ – главная часть $\alpha(x)$ при $x \to \infty$.◄

В настоящей главе в процессе изложения теории пределов функций рассмотрен ряд примеров, иллюстрирующих различные способы отыскания пределов функций. Эти способы можно резюмировать в виде следующих правил.

Правила вычисления пределов

1. В отсутствии неопределённости предел вычисляется с помощью теорем о пределах и непрерывности функций (теоремы 5.1, 4.3 – 4.5, замечание 5.2).

2. Предел выражения, представляющего неопределённость $0/0$, вычисляется с помощью теоремы о замене эквивалентными бесконечно малыми (теорема 9.1), при этом применяется таблица эквивалентных бесконечно малых функций (таблица 9.1).

3. Для вычисления пределов выражений, представляющих другие виды неопределённостей (например $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$ и т. д.), рекомендуется их преобразовать (свести) к неопределенности $0/0$.

4. Если $x \to a \neq 0$, то целесообразно сделать замену $u = x - a$. Тогда $u \to 0$.

Например, предел из примера 5.1 вычисляется с помощью правила 1, предел из примера 9.2 с помощью правил 2 и 4, а в примере 7.4 применено правило 3.

Глава 3. **Непрерывность функции**

§ 1. Понятие функции, непрерывной в точке. Односторонняя непрерывность. Непрерывность функции на промежутке

С понятием предела функции в точке тесно связано другое важнейшее понятие математического анализа – непрерывность функции, отражающее свойство непрерывности многих процессов и явлений, происходящих в природе и обществе. Непрерывные функции обладают многими важными свойствами, чем и объясняется большое значение этих функций в математике и её приложениях.

Определение 1.1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если выполнены следующие три условия:

1) она определена на $U(x_0)$ – некоторой окрестности точки x_0;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Так, функция $f(x) = |x - 1|$ непрерывна в точке $x_0 = 1$, ибо она определена на любой $U(1)$ и $\lim\limits_{x \to 1} |x - 1| = f(1) = 0$ (пример 3.4, гл. 2).

Замечание 1.1. Поскольку $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то равенство из третьего условия в определении 1.1 можно переписать в виде $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$. Таким образом, для непрерывной функции знак функциональной зависимости f и знак предельного перехода можно переставлять местами.

Определение 1.2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 справа (слева), если она определена на промежутке $[x_0, x_0 + \delta)$ ($(x_0 - \delta, x_0]$), где δ – некоторое положительное число, и $f(x_0+0) = f(x_0)$, ($f(x_0-0) = f(x_0)$).

Например, функция $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ 2 - x & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$ непрерывна в точке $x = 1$ справа, так как $f(1+0) = f(1) = 1$ (пример 3.5 гл. 2).

Определение 1.3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в любой точке $x_0 \in (a, b)$. а также непрерывна в точке a справа и в точке b слева.

Замечание 1.2. Из теоремы 3.2, гл. 2, следует, что необходимым и достаточным условием непрерывности функции $f(x)$ в данной точке является её непрерывность в этой точке как справа, так и слева.

Определение 1.4. Пусть дана функция $y = f(x)$ и x, $x_0 \in D(f)$. Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* x в точке x_0 и обозначается Δx. Разность f

$(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* в точке x_0, отвечающим данному приращению аргумента, и обозначается $\Delta f(x_0)$, Δy.

Итак, по определению, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ Из первого равенства выразим x и подставим во второе, получим

$$x = x_0 + \Delta x,\ \Delta f(x_0) = f(x+\Delta x) - f(x_0) \text{ или } \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x_0).$$

Пример 1.1. Найти $\Delta f(1)$, если $f(x) = x^3 - x$.

►$\Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^3 - (1+\Delta x) - 0 = 1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 1 - \Delta x =$ $= 2\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.◄

Теорема 1.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Функция непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (т. е. справедливо утверждение $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$).

►Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и, таким образом, существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$, что означает справедливость утверждения: $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$.

Предположим, что верно утверждение $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$. Так как $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, а из $\Delta x \to 0$ следует $x \to x_0$, то заключаем, что $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, и поэтому существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. В силу определения 1.1 заключаем, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.◄

Пример 1.2. Показать, что функция $f(x) = x^3 - x$ непрерывна при $x=1$.

►$\Delta f(1) = 2\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ (пример 1.1). Поскольку $\Delta f(1) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то данная функция непрерывна в точке $x=1$ в силу теоремы 1.1.◄

Пример 1.3. Показать, что функция $y = \sin x$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$.

►Возьмём $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$ и рассмотрим $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$. По формуле разности синусов двух углов имеем: $\Delta y = 2\sin(\Delta x/2)\cos(x_0 + \Delta x/2)$ или $\Delta y = \dfrac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \Delta x \cdot \cos(x_0 + \Delta x/2)$. Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = 1$ (первый замечательный предел (§ 6, гл. 2), $\Delta x \to 0$, а $|\cos(x_0 + \Delta x/2)| \le 1$ для $\forall\,(x_0 + \Delta x/2) \in \boldsymbol{R}$, то Δy – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ как произведение бесконечно малой функции на ограниченную. В силу теоремы 1.1 заключаем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке $x = x_0 \in \boldsymbol{R}$, и поэтому непрерывна на $\boldsymbol{R}$.◄

§ 2. Классификация точек разрыва непрерывности

Исследование функции в окрестности точки, где она не является непрерывной, играет важную роль в изучении функции. Оно особенно важно для построения графика функции.

Определение 2.1. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в ней нарушено хотя бы одно из трёх условий определения функции, непрерывной в точке (определение 1.1).

При этом различают следующие случаи.

1. Существует конечный предел функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, но либо $f(x)$ не определена при $x = x_0$, либо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. В этом случае x_0 называют точкой *устранимого разрыва* данной функции.

Пример 2.1. Показать, что функция $f(x) = (\sin x)/x$ имеет в точке $x = 0$ устранимый разрыв.

► $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}((\sin x)/x) = 1$, но функция не определена при $x = 0$, поэтому $x = 0$ – точка устранимого разрыва данной функции.◄

Пример 2.2. Показать, что функция $f(x) = \begin{cases}(x^2+x)/(x+1) & \text{при } x \neq -1, \\ -2 & \text{при } x = -1\end{cases}$ имеет в точке $x = -1$ устранимый разрыв, и построить её график.

► $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} x = -1$, но $f(-1) = -2 \neq -1$, поэтому $x = -1$ – точка устранимого разрыва. Для построения графика $f(x)$ преобразуем задающее её выражение:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \neq -1, \\ -2, & \text{при } x = -1. \end{cases}$$

График функции приведён на рис. 2.1, точка $(-1, -2)$ принадлежит графику.◄

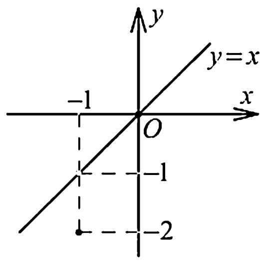


Рис. 2.1. *График функции f(x) из примера 2.2*

Замечание 2.1. Функцию $f(x)$ с устранимым разрывом в точке x_0 можно доопределить или переопределить, приняв за её значение в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Построенная таким образом функция $f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x = x_0 \end{cases}$ будет непрерывной в точке x_0. Поэтому точку x_0 и называют точкой устранимого разрыва. Для функции $f(x)$ из примера 2.2

$$f^*(x) = \begin{cases} (x^2+x)/(x+1), & \text{при } x \neq -1, \\ -1, & \text{при } x = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad f^*(x) = x.$$

Эта функция непрерывна в точке $x = -1$.

2. $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но существуют оба конечных односторонних конечных предела $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, очевидно, не равные друг другу. Точка x_0 называется точкой *разрыва 1–го рода*, а разность $f(x_0-0)-f(x_0+0)$ – *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Пример 2.3. Показать, что функция $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<1,\\ 2-x, & \text{при } x\geq 1,\end{cases}$ имеет в точке $x=1$ разрыв 1-го рода, и построить её график.

► $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (пример 3.5, гл. 2), но существуют $f(1-0)=0$, $f(1+0)=1$. Скачок функции $f(x)$ в данной точке равен $f(1+0)-f(1-0)=1$. График $f(x)$ приведён на рис. 2.2.◄

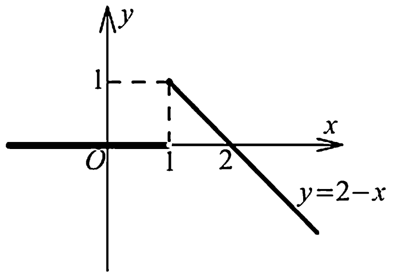


Рис. 2.2. *График функции f(x) из примера 2.3*

3. В точке x_0 функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен. Точка x_0 называется точкой *разрыва 2-го рода*.

Пример 2.4. Показать, что функция $f(x)=e^{2/(x-2)}$ имеет в точке $x=2$ разрыв 2-го рода.

►$f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} e^{2/(x-2)}=|z=-2/(x-2)|=\lim\limits_{z\to+\infty} e^{-z}=0$ (пример 4.2 и теорема 4.4, гл. 2), $f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} e^{2/(x-2)}=|z=2/(x-2)|=\lim\limits_{z\to+\infty} e^{z}=+\infty$ (пример 4.2, гл. 2). График данной функции приведён на рис. 2.3.◄

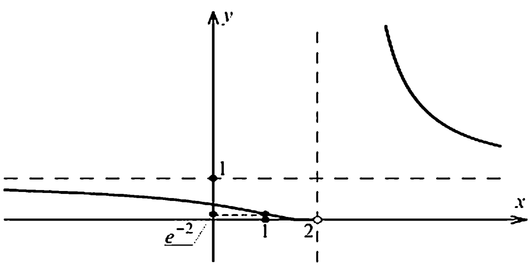


Рис. 2.3. *К примеру 2.4. График функции* $f(x)=e^{2/(x-2)}$

§ 3. Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 3.1 (*об арифметических операциях над непрерывными функциями*). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны также их сумма $f(x)+g(x)$, произведение $f(x)\cdot g(x)$ и частное $f(x)/g(x)$ при условии, что в случае частного $g(x_0)\neq 0$.

Эта теорема является следствием теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел (теорема 2.2, гл. 3) и определения функции, непрерывной в точке (определение 1.1).

Пример 3.1. Показать, что многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ непрерывен на $\boldsymbol{R}$.

►Функция $f(x) = x$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$ ($\Delta f(x_0) = \Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$ для $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$), потому функция $g(x) = x^n$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$ как произведение n непрерывных функций, а многочлен $P_n(x)$ непрерывен на $\boldsymbol{R}$ (теорема 3.1).◄

Пример 3.2. Показать, что рациональная алгебраическая дробь $R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \dfrac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$ непрерывна на области определения.

►Поскольку функция $R(x)$ является отношением двух многочленов, то она непрерывна на своей области определения в силу теоремы 3.1, как частное двух непрерывных функций: многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.◄

Теорема 3.2 (*об ограниченности непрерывной функции*). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой достаточно малой окрестности этой точки.

Теорема 3.3 (*о сохранении знака непрерывной функции*). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 значения $f(x)$ отличны от нуля и имеют такой же знак, как $f(x_0)$.

Теорема 3.4 (*о непрерывности сложной функции*). Если функция $z = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(z)$ непрерывна в точке z_0: $z_0 = = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теоремы 3.2 – 3.4 следуют из теорем об ограниченности функции, имеющей предел (теорема 5.4, гл. 2), о сохранении знака функции, имеющей предел (теорема 2.5, гл. 3) и теоремы о пределе сложной функции (теорема 5.6, гл. 2), а также из определения функции, непрерывной в точке (определение 1.1).

§ 4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 4.1 (*первая теорема Вейерштрасса*). Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Непрерывность функции именно на отрезке существенна для вывода об её ограниченности. Например, функция $f(x) = 1/(1 - x^2)$, непрерывная на интервале $(-1, 1)$, не является ограниченной на нём (рис. 4.1).

Ограниченность функции на отрезке является только необходимым, но не достаточным условием непрерывности, т. е. не любая функция, ограниченная на отрезке, непрерывна на этом отрезке. Так, функция из примера 2.3, ограниченная на отрезке $[0, 2]$, не является непрерывной на нём.

Теорема 4.2. (*вторая теорема Вейерштрасса*). Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на этом отрезке свои наименьшее и наибольшее значения.

Непрерывность функции именно на отрезке существенна для заключения теоремы 4.2. Функция $f(x) = 1/(1 - x^2)$, непрерывная на интервале $(-1, 1)$, принимает на нём наименьшее значение: $f(0) = 1$, но не принимает на нём наибольшего значения (рис. 4.1).

Теорема 4.3. (*первая теорема Больцано – Коши*, Больцано Б. (1781 – 1848) – чешский математик, философ, логик). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка c, в которой функция обращается в нуль, т. е. $f(c) = 0$.

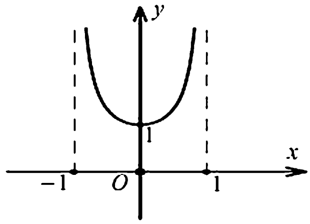


Рис. 4.1. *График функции $f(x) = 1/(1-x^2)$ на интервале $(-1, 1)$*

Замечание 4.1. Теорема 4.3 позволяет построить алгоритм вычисления корней уравнения $f(x) = 0$, причём на функцию $f(x)$ накладывается только одно условие: её непрерывности на некотором промежутке.

Теорема 4.4. (*вторая теорема Больцано-Коши*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то она принимает на $[a, b]$ все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Поэтому для любого числа μ, расположенного между $f(a)$ и $f(b)$, на $[a, b]$ найдётся хотя бы одна точка c такая, что $f(c) = \mu$ (рис. 4.3).

Следствие из теоремы 4.4. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке, то множество её значений $E(f)$ также представляет собой некоторый промежуток.

Так, функция $f(x) = \sin x$, непрерывная на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, принимает на нём все промежуточные значения между $f(-\pi/2) = \sin(-\pi/2) = -1$ и $f(\pi/2) = = \sin(\pi/2) = 1$ (рис. 4.4), т. е. любое число из отрезка $[-1, 1]$ будет значением этой функции для некоторой точки из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$.

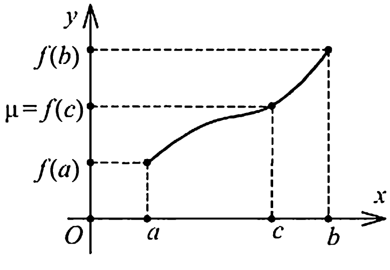


Рис. 4.2. *К теореме 4.4*

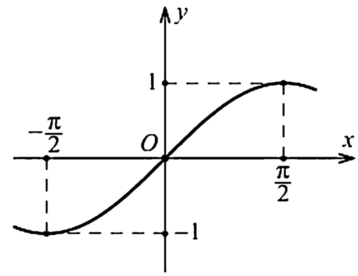


Рис. 4.3. *График функции $f(x) = \sin x$*

Теорема 4.5 (*теорема существования и непрерывности обратной функции*). Если функция $y = f(x)$ определена, строго возрастает (строго убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на отрезке $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$) существует обратная функция $f^{-1}(y)$, строго возрастающая (строго убывающая) и непрерывная на этом промежутке.

Например, функция $y = (x-1)^2$ определена, строго возрастает на отрезке $[1, 3]$ (пример 7.4, гл. 1) и непрерывна на этом промежутке в силу теоремы 1.1, так как $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = (x+\Delta x-1)^2 - (x-1)^2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$ для $\forall x \in [1,3]$. Она имеет обратную функцию $y = 1+\sqrt{x}$ (см. упомянутый пример), строго возрастающую и непрерывную на отрезке [0, 4].

§ 5. Непрерывность элементарных функций

Рассмотрим сначала основные элементарные и некоторые простейшие элементарные функции.

1. $y=C=\text{const.}$ для $\forall x \in X$, где $X-$ промежуток числовой прямой.

Очевидно, данная функция непрерывна на X по теореме 1.1, так как $\Delta y = 0 \to 0$ при $\Delta x \to 0$ для $\forall x_0 \in X$.

2. Многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ непрерывен на $\boldsymbol{R}$ (пример 3.1).

3. $R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \dfrac{b_0x^m + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n} -$ рациональная алгебраическая дробь непрерывна на своей области определения (пример 3.2).

4. Показательная функция $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$. Имеем $a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1)$. С помощью определения предела функции в точке(определения 3.1, гл. 2) можно доказать равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = 1$, потому для показательной функции $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ для $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$, следовательно, она непрерывна на $\boldsymbol{R}$ по теореме 1.1.

5. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$.

Эта функция непрерывна на своей области определения – промежутке $(0, +\infty)$ по теореме существования и непрерывности обратной функции (теорема 4.5), как обратная по отношению к показательной функции.

6. Степенная функция $y = x^a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, $D(y) = (0, +\infty)$.

При $x > 0$ эту функцию можно рассматривать как суперпозицию показательной и логарифмической функций: $x^a = e^{a\ln x}$, поэтому степенная функция непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$ по теореме 3.4 как суперпозиция непрерывных функций.

7. Тригонометрические функции: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\text{tg}x$, $y=\text{ctg}x$.

Непрерывность функции $y=\sin x$ на $\boldsymbol{R}$ показана в примере 1.3, непрерывность функции $y=\cos x$ на $\boldsymbol{R}$ обосновывается аналогично. Непрерывность функций $y=\text{tg}x$ и $y=\text{ctg}x$ на их областях определения следует из теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями (теорема 3.1), поскольку эти функции являются отношениями непрерывных функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

8. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y =$
$= \text{arctg}x$, $y = \text{arcctg}x$.

Эти функции описаны в § 8, гл. 1. Они непрерывны на своих областях определения как функции, обратные по отношению к соответствующим тригонометрическим функциям, в силу теоремы о существовании и непрерывности обратной функции (теорема 4.5).

Итак, непрерывность основных элементарных функций обоснована.

Теорема 5.1. Любая элементарная функция, определённая на некотором промежутке вещественной оси, конечном или бесконечном, непрерывна на этом промежутке.

Доказательство теоремы 5.1 следует из определения элементарной функции (определение 8.1, гл. 1), из непрерывности основных элементарных функций, из теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями (теорема 3.1), из теоремы о непрерывности сложной функции (теорема 3.4).

Замечание 5.1. Условие теоремы 5.1, требующее, чтобы элементарная функция была определена на некотором промежутке, существенно для заключения об её непрерывности. Так, элементарная функция $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$ имеет разрывы в любой точке своей области определения $D(y)$, состоящей из отдельных точек ($D(y)=\{x=\pi k,\, k\in Z\}$).

Пример 5.1. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$.

►Положим $z=\arcsin x$, тогда $z\to 0$ при $x\to 0$ в силу непрерывности функции $\arcsin x$. Поскольку $x=\sin z$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\sin z}=1$ в силу первого замечательного предела и теоремы 5.1, гл. 2.◄

Упражнение 5.1. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

Пример 5.2. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

►Имеем: $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{1/x}$ (свойства логарифмов), $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ (второй замечательный предел, § 6, гл. 2). В силу непрерывности логарифмической функции,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x})=\ln e=1\,.◄$$

Пример 5.3. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

►Пусть $z=e^x-1$, тогда $z\to 0$ при $x\to 0$ в силу непрерывности показательной функции. Так как $x=\ln(1+z)$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\ln(1+z)}=1$ (пример 5.2 и теорема 5.1, гл. 2).◄

Пример 5.4. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$.

►Пусть $1+x=e^z$, тогда $z=\ln(1+x)\to 0$ при $x\to 0$ в силу непрерывности логарифмической функции. Имеем $\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\dfrac{e^{\mu z}-1}{e^z-1}=\dfrac{e^{\mu z}-1}{\mu z}\cdot\dfrac{z}{e^z-1}\cdot\mu$. Поскольку $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{\mu z}-1}{\mu z}=1$ и $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{e^z-1}=1$ (пример 5.3), $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$ по теореме 5.1, гл. 3.◄

Глава 4. **Задания для проверки качества усвоения раздела 3**

§ 1. Задачи для самостоятельной работы

1. Даны два множества: $A=\{1,3,9,11\}$ и $B=\{1,3,4,9,10\}$. Постройте множества: $A\bigcup B$; $A\bigcap B$; $A\setminus B$.

2. Постройте графики функций:

а) $y=|\log_2 x|$;

б) $y=|\log_2(x+1)|$;

в) $y=\log_2(x+1)+5$;

г) $y=\begin{cases} -6, & x<-2, \\ 2x-2, & -2\le x\le 4, \\ 6, & x>4. \end{cases}$

3. Пусть $f(x)=2\sin(x/2)-x+x^3$. Является ли эта функция нечётной?

4. Представьте функцию $y=\cos^2(\ln x/2)$ как суперпозицию простейших элементарных функций.

5. Будут ли элементарными функции: а) из п. 2(в); б) из п. 2(г)?

6. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

7. Исследуйте на непрерывность функции: а) $y=x^2\sin(1/x)$; б) $y=e^{1/(x+1)}$.

8. $f(3-0)=3$, $f(3+0)=-3$. Какое утверждение справедливо:

а) $\exists\lim\limits_{x\to 3}f(x)=3$; б) $\exists\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-3$; в) $\nexists\lim\limits_{x\to 3}f(x)$?

9. Функция $f(x)=(e^x+e^{-x})/2$: а) чётная; б) нечетная; в) общего вида.

10. Функции спроса и предложения определяются соотношениями $D(p)=-6p+10$, $S(p)=-p^2-8p+13$:

1. постройте графики этих функций (на одном чертеже);
2. найдите равновесную цену.

11. Постройте график функции Тарнквиста $y=\dfrac{5(x-1)}{x-2}, (x>2)$ (товары первой необходимости).

Ответы к задачам для самостоятельной работы

1. $A\bigcup B=\{1,3,4,9,10,11\}$; $A\bigcap B=\{1,3,9\}$; $A\setminus B=\{11\}$. **3.** Нечетная. **4.** $y=u^2$; $u=$ $=\cos v$; $v=w/2$; $w=\ln x$. **5.** а) Элементарная; б) неэлементарная. **6.** а) 2; б) –1/3; в) 1/4; г) $1/e$. **7.** а) $x=0$ – точка устранимого разрыва; б) $x=-0\,x=-1$ – точка разрыва 2-го рода. **8.** в). **9.** а).

§ 2. Контрольные вопросы к разделу 3

1. Какое числовое множество называется ограниченным сверху?
2. Какое числовое множество называется ограниченным снизу?
3. Какое числовое множество называется ограниченным?

4. Что называется точной верхней границей числового множества?

5. Что называется точной нижней границей числового множества?

6. Что называется модулем вещественного числа?

7. При каких условиях $|x+y|=|x|+|y|$?

8. При каких условиях $|x+y|=|y|-|x|$?

9. Напишите неравенства, связывающие модуль суммы и разности двух чисел с суммой и разностью их модулей.

10. Изобразите график функции $y = \mathrm{sign}x$.

11. Дайте понятие числовой функции, её графика, способов задания.

12. Какой симметрией обладает график чётной и нечетной функций?

13. Сформулируйте теорему о пределе ограниченной монотонной числовой последовательности.

14. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ на языке $\delta - \varepsilon$.

15. Сформулируйте теорему о сжатой фннкции.

16. Сформулируйте теорему о предельном переходе в неравенстве.

17. Сформулируйте теорему об ограниченности функции, имеющей предел при $x \to a$.

18. Сформулируйте теоремы о пределах суммы , произведения и частного двух функций.

19. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

20. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

21. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

22. Напишите первый замечательный предел и пределы, связанные с ним.

23. Напишите второй замечательный предел и пределы, связанные с ним.

24. Дайте определение понятия $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

25. Непрерывность функции в точке и на промежутке.

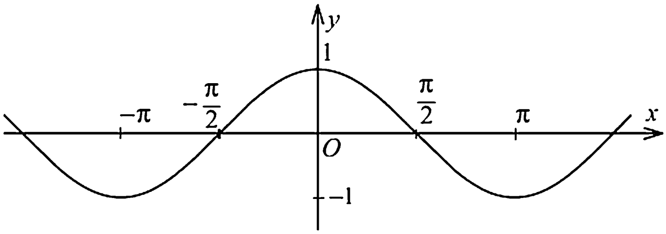
26. Свойства функций непрерывных на отрезке.

27. Точки разрыва функций и их классификация.

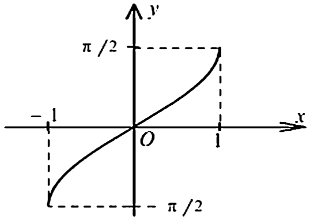
28. Покажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$.

§ 3. Тесты по разделу 3

Вар. № 1	**Раздел 3. Введение в математический анализ**
1	Найдите множество $C \cup D$, если $C=[-1,3)$, $D=[2,4]$.
2	Найдите область определения функции $y=\sqrt{x^2(x-3)}$.
3	Будет ли функция $y=\sqrt{\sin^2 3x+3}$ периодической? Если да, то укажите ее наименьший период.
4	Будет ли функция $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$: а) чётной? б) нечётной? в) общего вида?

5	 Представленная кривая есть график функции: **A** $y=\mathrm{ctg}\,x$ **B** $y=\sin x$ **C** $y=\mathrm{arctg}\,x$ **D** $y=\cos x$ **E** $y=\mathrm{tg}\,x$ **F** $y=\arccos x$ **G** $y=\arcsin x$ **H** $y=\mathrm{arcctg}\,x$ **I** Нет правильного ответа
6	Вычислите $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$.
7	Вычислите $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x^2-11x+2}{3x^2-x-10}$.
8	Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$.
9	Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{\mathrm{tg}\,5x}$.
10	При каком значении a функция $y=f(x)$ будет непрерывной, если $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le 2;\\ 4-ax^2, & x>2\end{cases}$?
11	Найдите правый предел функции $f(x)=3^{\frac{x}{x-2}}$ в точке ее разрыва.
12	Найдите точки разрыва функции $y=\frac{x+1}{x^2+3x-4}$, если они существуют, и исследуйте характер разрыва.

Вар. № 2	**Раздел 3. Введение в математический анализ**
1	Найдите множество $C\cup D$, если $C=\{1,3,5\}$, $D=\{2,3,6\}$.
2	Найдите область определения функции $y=\frac{1}{x+\lvert x\rvert}$.
3	Будет ли функция $y=\lg(3-\cos x)$ периодической?. Если да, то укажите ее наименьший период.
4	Будет ли функция $y=\frac{x}{x^2+1}$: а) чётной? б) нечётной? в) общего вида?

5	 Представленная кривая есть график функции: **A** $y=\mathrm{ctg}\,x$ **B** $y=\mathrm{arcctg}\,x$ **C** $y=\sin x$ **D** $y=\arcsin x$ **E** $y=\mathrm{tg}\,x$ **F** $y=\arccos x$ **G** $y=\cos x$ **H** $y=\mathrm{arctg}\,x$ **I** Нет правильного ответа
6	Вычислитет $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$.
7	Вычислите $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$.
8	Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$.
9	Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{arctg}\,2x}$.
10	При каком значении a функция $y=f(x)$ будет непрерывной, если $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{tg\,5x}, & x\neq 0;\\ a, & x=0\end{cases}$?
11	Найдите левый предел функции $f(x)=4^{\frac{x^2}{x-3}}$ в точке ее разрыва.
12	Найдите точки разрыва функции $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$, если они существуют, и исследуйте характер разрыва.

Ответы к заданиям теста

Вариант 1

1) $[-1,4]$. **2)** $\{0\}\cup[3,+\infty)$. **3)** $T=\dfrac{\pi}{3}$. **4)** Общего вида. **5)** $y=\cos x$ **6)** 0. **7)** 9/11. **8)** 15. **9)** 0,8. **10)** 0. **11)** $+\infty$. **12)** $x=-4, x=1$ – точки бесконечного разрыва.

Вариант 2

1) $\{1, 2, 3, 5, 6\}$. **2)** $(0,+\infty)$. **3)** $T=2\pi$. **4)** Нечётная. **5)** $y=\arcsin x$ **6)** $+\infty$.

7. 22/5. **8)** e^3. **9)** 2,5. **10)** 0. **11)** 0. **12.** $x=-1$ – точка устранимого разрыва.

Раздел 4. **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Краткая характеристика раздела

1. Темы раздела. Производная и дифференциал. Основные теоремы дифференциального исчисления. Исследование функций и построение графиков.

2. Базисные понятия. Производная и дифференциал функции. Правила вычисления. Экстремумы функции. Наибольшие и наименьшие значения функции. Точки перегиба графика функции. Асимптоты графика. Эластичность функций в экономике.

3. Основные задачи. Вычисление производных и дифференциалов функций. Исследование функций. Вычисление пределов функций по правилу Лопиталя. Построение графиков.

Глава 1. **Производная и дифференциал**

§ 1. Производная функции в точке. Односторонние и бесконечные производные

Определение 1.1. Пусть функция $y=f(x)$ определена на некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$, если он существует и конечен, называется её *производной* в точке x_0 и обозначается символами: $f'(x_0), \dfrac{df(x_0)}{dx}, y'(x_0), \dfrac{dy}{dx}_{|x=x_0}, \dot{y}$. Итак,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

Замечание 1.1. Символы $\dfrac{df(x_0)}{dx}, \dfrac{dy}{dx}_{|x=x_0}, \dfrac{df}{dx}, \dfrac{dy}{dx}$ были введены немецким математиком, философом и физиком Г. В. Лейбницем (1646 – 1716), а символы $f'(x_0)$, $y'(x_0)$ – французским математиком и механиком Ж. Л. Лагранжем (1736 – 1813). Символ $\dot{y}$ ввёл И. Ньютон (1643 – 1727), сейчас он употребляется только в случае, когда под независимой переменной понимается время.

Пример 1.1. Найти $f'(1)$ по определению, если $f(x)=x^3-x$.

► $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$ (выражение для $\Delta f(1)$ приведено в примере 1.1, гл. 3, разд. 3). Сократив оба члена дроби под знаком предела на Δx, получим $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+3\Delta x+(\Delta x)^2)=2$.◄

Определение 1.2. Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(x_0-\delta, \delta]$ ($[x_0, x_0+\delta)$), δ – некоторое положительное число. Если существует предел отношения $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to -0$ ($\Delta x\to +0$), то он называется *левой* (*правой*) *производной* этой функции в точке x_0 и обозначается символом $f'_-(x_0)$ ($f'_+(x_0)$). Таким образом,

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1.2}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1.3}$$

Замечание 1.2. Левая и правая производные объединяются термином *односторонние производные*.

Замечание 1.3. Из существования производной $f'(x_0)$ следует существование односторонних производных $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ и равенство

$$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0) \tag{1.4}$$

(теорема 1.2 гл. 3 разд. 3). Обратно, если существуют равные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, то $\exists f'(x_0)$ и верно равенство (1.4). Если $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ существуют, но не равны, то функция $f(x)$ не имеет производной в точке x_0.

Пример 1.2. Показать, что не существует $f'(-1)$, если $f(x)=x|x+1|$.

► $\Delta f(-1)=f(-1+\Delta x)-f(-1)=(-1+\Delta x)|\Delta x|$ Из (1.2) и (1.3) имеем:

$$f'_-(-1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{(-1+\Delta x)(-\Delta x)}{\Delta x}=1,\quad f'_+(-1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{(-1+\Delta x)(\Delta x)}{\Delta x}=-1.$$

Поскольку $f'_-(-1)\neq f'_+(-1)$, то не существует $f'(-1)$ (замечание 1.3).◄

Определение 1.3. Если существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\pm\infty$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет *бесконечную производную*.

Пример 1.3. Показать по определению, что $f'(1)=+\infty$, если $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

$$►\ f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\Delta x-1}-\sqrt[3]{1-1}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=+\infty.◄$$

Аналогично вводится понятие *односторонних бесконечных производных.*

Пример 1.4. Показать по определению, что $f'_-(1)=-\infty$, а $f'_+(1)=+\infty$, если $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

$$►\ f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt[3]{(1+\Delta x-1)^2}-\sqrt[3]{(1-1)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=-\infty,$$

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=+\infty.◄$$

§ 2. Геометрический и механический смысл производной. Задача о производительности труда

1. Геометрический смысл производной. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, а Γ – график этой функции. Прямая L, проходящая через точки $M_0(x_0, f(x_0))$, $M_1(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))\in\Gamma$, называется *секущей* по отношению к Г (рис. 2.1).

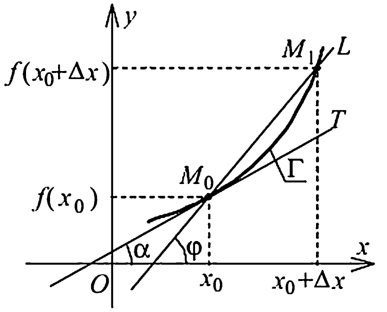


Рис. 2.1. *К понятию касательной к графику функции*

Уравнение:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{2.1}$$

где $y_0 = f(x_0)$, задаёт все прямые, проходящие через точку M_0 с данным угловым коэффициентом k, кроме прямой $x = x_0$ (§ 3, гл. 1, разд. 2). Подставим в (2.1) координаты точки M_1: $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = = k_1(x_0 + \Delta x - x_0)$, отсюда $\Delta y = k_1\Delta x$, где $\Delta y = = f(x+\Delta x) - f(x_0)$, а $k_1 = \text{tg}\varphi$ – угловой коэффициент L (рис. 2.1). Имеем $k_1 = \Delta y/\Delta x$. Если $\Delta x \to 0$, то
$\Delta y \to 0$ как приращение непрерывной функции, при этом точка $M_1 \in \Gamma$ приближается к точке $M_0 \in \Gamma$. Пусть данная функция имеет в точке $x = x_0$ производную $y'(x_0)$, тогда секущая L при $\Delta x \to 0$ имеет предельное положение, характеризуемое угловым коэффициентом $k_0 = \text{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = = y'(x_0)$, которое называется *касательной* T к графику Γ в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 2.1). Уравнение касательной T получим из (2.1), взяв нужный угловой коэффициент:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \tag{2.2}$$

Итак, *геометрически* производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 интерпретируется как *угловой коэффициент касательной*, проведённой к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$.

Пример 2.1. Написать уравнение касательной T к графику функции
$f(x) = x^3 - x$ в точке (1, 0).

►$f'(1) = 2$ (пример 1.1). Уравнение касательной T получим из равенства 2.2): $y - 0 = 2(x - 1)$ ($x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $y'(x_0) = 2$ (пример 1.1)), T: $y = 2x - 2$.◄

Если односторонние производные функции $y = f(x)$ в точке x_0 не равны, т. е. $y'_-(x_0) \neq y'_+(x_0)$, то её график Γ не имеет касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Но в этом случае в точке M_0 есть *односторонние касательные* T_1 и T_2 (левая и правая), являющиеся предельным положением секущей L при $\Delta x \to -0$ или при $\Delta x \to +0$, их угловыми коэффициентами служат $y'_-(x_0)$, $y'_+(x_0)$. Касательные T_1 и T_2 определяются уравнениями

$$T_1: \; y - y_0 = y'_-(x_0)(x - x_0), \tag{2.3}$$

$$T_2: \; y - y_0 = y'_+(x_0)(x - x_0). \tag{2.4}$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ при этом называется *угловой точкой* графика Γ. Так, функция $f(x) = x|x+1| = \begin{cases} -(x^2+x), & x < -1, \\ (x^2+x), & x \geq -1, \end{cases}$ в точке $x = -1$ имеет производные:

$f'_-(-1)=1$, $f'_+(-1)=-1$ (пример 1.2), её график имеет в точке (–1, 0) односторонние касательные T_1: $y = x + 1$ и T_2: $y = -x - 1$ (рис. 2.2).

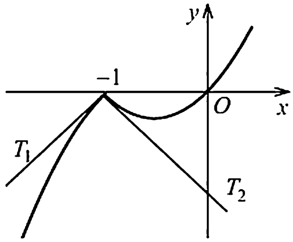


***Рис. 2.2.** График функции $f(x) = x|x+1|$*

Их уравнения можно получить из (2.3) и (2.4). Точка (–1, 0) – угловая точка графика.

График Г функции $y=f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0=f(x_0)$, вертикальную касательную, определяемую уравнением $x = x_0$, если $f'(x_0) = \pm\infty$.Так, график функции $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ имеет в точке (1, 0) вертикальную касательную Т: $x = 1$ (рис. 2.3), поскольку $f'(1)=+\infty$ (пример 1.3). Если $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ – бесконечные производные разных знаков, график имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ так называемое *остриё*, через которое проходит вертикальная касательная.

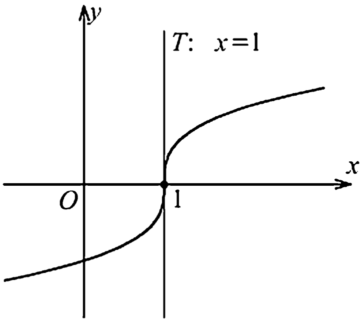


***Рис. 2.3.** График функции $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$*

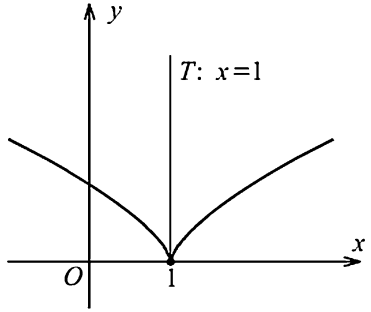


***Рис. 2.4.** График функции $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$*

Например, график функции $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ имеет в точке (1, 0) остриё, через него проходит вертикальная касательная $x = 1$ (рис. 2.4), ибо $f'_-(1)=-\infty$, а $f'_+(1)=+\infty$ (пример 1.4, рис. 2.4).

2. Механический смысл производной. Пусть $s = s(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t при движении по прямой, тогда $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ – путь, пройденный за время Δt, а отношение $\Delta s/\Delta t$ – средняя скорость движения за это время. Если существует конечный $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dot{s}(t)$, то он является мгновенной скоростью v точки в момент времени t, т. е. $\dot{s}(t)=v(t)$.

Итак, *механически* производная интерпретируется как *мгновенная скорость движения*, если данная функция определяет путь, проходимый материальной точкой в прямолинейном движении.

3. Задача о производительности труда. Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t, и необходимо найти производительность труда в момент t_0. За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$; тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{ср} = \Delta u/\Delta t$. Очевидно, что производительность труда в момент t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}. \qquad (2.5)$$

Пример 2.2. Объем продукции, произведенный бригадой рабочих, можно описать уравнением $u = -5t^3/6 + 15t^2/2 + 100t + 50$ (единиц), $1 < t < 8$, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

►Производительность труда $z(t)$ выражается производной

$$z(t) = u'(t) = -5t^2/2 + 15t + 100 \text{ (ед/ час)},$$

а скорость и темп изменения производительности соответственно производной $z'(t)$ и логарифмической производной $T_z(t) = [\ln z(t)]'$:

$$z'(t) = -5t + 15 \text{ (ед/ч}^2\text{)},$$

$$T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t+15}{-5t^2/2 + 15t + 100} = \frac{2t-6}{t^2 - 6t - 40} \text{ (ед/ч)}.$$

В заданные моменты времени соответственно имеем: $z(1) = 112{,}5$ (ед./ч),

$$z'(1) = 10 \text{ (ед./ч}^2\text{)}, \ T_z(1) = 0{,}09 \text{ (ед./ч)},$$

$$z(8-1) = z(7) = 82{,}5 \text{ (ед./ч)}, \ z'(7) = -20 \text{ (ед./ч}^2\text{)}, \ T_z(7) = -0{,}24 \text{ (ед./ч)}.$$

Итак, к концу рабочего дня производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $z'(t)$ и $T_z(t)$ с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы.◄

§ 3. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал

Определение 3.1. Пусть функция $y=f(x)$ определена на некоторой окрестности точки x_0. Если её приращение $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ представимо в виде

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x), \qquad (3.1)$$

где множитель A зависит от x_0, но не зависит от Δx, а $o(\Delta x)$ – величина более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$, то данная функция называется *дифференцируемой* в точке x_0, а слагаемое $A\cdot\Delta x$ из (3.1) называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается следующим образом: $df(x_0)$, $dy(x_0)$, $dy_{|x=x_0}$, dy. Итак, по определению $dy = A\cdot\Delta x$.

В силу равенства (3.1) дифференциал $dy = A\cdot\Delta x$ при $A \neq 0$ есть главная часть приращения функции $y = f(x)$, линейной относительно Δx (определение 9.2, гл. 2, разд. 3), при этом Δy и dy эквивалентные бесконечно малые при $\Delta x \to 0$. Если $A = 0$, то $dy = 0$ при любых значениях Δx, а $\Delta y = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, в этом случае Δy является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Для линейной функции $y = kx + b$ приращение функции в любой точке x_0 совпадает с её дифференциалом в этой точке. В самом деле, $\Delta y(x_0) = k(x_0 + \Delta y) +$

$+ b - (kx_0 + b) = k\,\Delta x$. В этом случае, $o(\Delta x) = 0$, а $dy = k \cdot \Delta x = \Delta y$.

Пример 3.1. Показать, что функция $f(x) = x^3 - x$ дифференцируема в точке $x = 1$ и найти её дифференциал в этой точке.

►$\Delta f(1) = 2\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ (пример 1.1, гл. 3, разд. 3). Так как $3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = (\Delta x)^2(3+\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то $\Delta f(1) = 2\Delta x + o(\Delta x)$. Данная функция дифференцируема в точке $x = 1$ по определению 3.1, $dy = 2\Delta x$.◄

Теорема 3.1 (*необходимое и достаточное условие дифференцируемости*). Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную $y'(x_0)$.

Следствие из теоремы 3.1. Для функции $y = f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, множитель A в равенстве (3.1) определяется единственным образом, а именно: $A = y'(x_0)$.

В силу определения 3.1 и следствия из теоремы 3.1 имеем

$$dy = y'(x_0)\,\Delta x. \tag{3.2}$$

Из формулы (3.2), в частности, при $y \equiv x$ следует, что $dx = (x)'\Delta x = \Delta x$, т. е. дифференциал аргумента равен его приращению

$$dx = \Delta x. \tag{3.3}$$

Поэтому равенство (3.2) можно переписать в виде

$$dy = y'(x_0)\,dx. \tag{3.4}$$

Замечание 3.1. Вычисление производной и дифференциала функции в данной точке принято называть одним термином – *дифференцирование*.

Пример 3.2. Найти дифференциал функции $f(x) = x^3 - x$ в точке $x = 1$.

►*1–й способ.* $\Delta f(x) = 2\Delta x + o(\Delta x)$ (пример 3.1), следовательно, $df(1) = 2\Delta x$ (определение 3.1) или $df(1) = 2dx$.

2–й способ. $f'(1) = 2$ (пример 1.1), в силу (3.4) $df(1) = 2dx$.◄

Замечание 3.2. Из (3.4) имеем $y'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$, и потому символ Лейбница $\dfrac{dy}{dx}$ можно трактовать как отношение дифференциалов dy и dx.

Теорема 3.2 (*необходимое условие дифференцируемости*). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

►Действительно, из формулы (3.1) имеем $\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$, где $A = y'(x_0)$ (следствие из теоремы 3.1). Данная функция непрерывна в точке x_0, так как $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ (теорема 1.1, гл. 3, разд. 3).◄

Замечание 3.3. Непрерывность функции в данной точке не является достаточным условием её дифференцируемости в этой точке, т. е. теорема, обратная теореме 3.2, неверна.

Пример 3.3. Показать, что функция $f(x) = x\,|x+1|$ непрерывна в точке $x = -1$, но не дифференцируема в этой точке.

►$\Delta f(-1) = (-1+\Delta x)|\Delta x|$ (пример 1.2), $\Delta f(-1) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое приращение функции – функция непрерывна в точке $x = -1$ (теорема 1.1, гл. 3, разд. 3), но она не дифференцируема в этой точке, так как $\nexists f'(-1)$ (пример 1.2).◄

Замечание 3.4. Дифференциал можно использовать для вычисления приближённого значения функции в точке. Из равенства (3.1) следует, что $\Delta y \approx dx$ при малых значениях Δx, т. е. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$ или

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{3.5}$$

При вычислениях приближённого значения $f(x_0+\Delta x)$ по формуле (3.5) погрешность тем меньше, чем меньше Δx. Эта погрешность при $\Delta x\to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

§ 4. Геометрический и механический смысл дифференциала

1. Пусть функция $y=f(x)$ имеет конечную производную $y'(x_0)$, а точка $M_1(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ принадлежит её графику Г (рис. 4.1). В точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0=f(x_0)$, проведём к Г касательную T, $B(x_B, y_B)$ – точка пересечения прямых L: $x=x_0+\Delta x$ и T: ($x_0+\Delta x=x_B$). Подставим координаты точки B в уравнение касательной (2.2), получим: $y_B-y_0=y'(x_0)\Delta x$ или $y_B-y_0=df(x_0)$ (см. (3.3) и (3.4)).

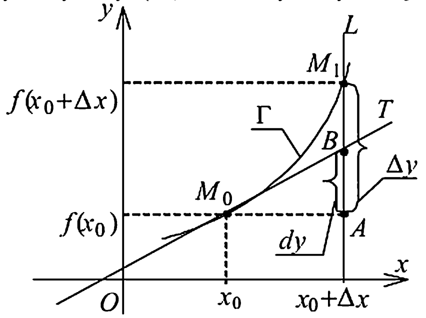


Рис. ***4.1.*** *К геометрической интерпретации понятия дифференциала*

На рис. 4.1 длина отрезка AM_1 – приращение функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, а длина отрезка AB – дифференциал $df(x_0)$ этой функции в точке $x=x_0$. Заменить Δy на $df(x_0)$ – значит заменить часть графика функции (рис. 4.1, дуга $M_0M_1\subset Г$) на отрезок касательной, т. е. на отрезок прямой (рис. 4.1, отрезок $M_0B\subset T$).

Дифференциал функции $y=f(x)$ в точке x_0 *геометрически* интерпретируется как *приращение y_B-y_0 ординаты касательной T* к графику этой функции, проведённой в точке $M_0(x_0, y_0)$, при перемещении из точки M_0 в точку $B(x_B, y_B)$ или при изменении аргумента x от x_0 до $x_0+\Delta x$.

2. Пусть $s=s(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t при движении по прямой, тогда $s(t+\Delta t)-s(t)=\Delta s$ – путь, пройденный материальной точкой за время Δt. По формуле (3.2) имеем $ds=\dot{s}(t_0)\Delta t$.

Дифференциал функции $s=s(t)$ *механически* можно трактовать как *путь, который прошла бы материальная точка за время Δt, если бы она двигалась всё это время с постоянной скоростью $v=\dot{s}(t_0)$*. При замене приращения этой функции Δs дифференциалом ds реальное движение за время Δt заменяется равномерным со скоростью $\dot{s}(t_0)$.

При свободном падении материальной точки $s(t)=gt^2/2$ (g – ускорение земного тяготения). За промежуток времени Δt она пройдёт путь

$\Delta s=g(t+\Delta t)^2/2-gt^2/2=gt\Delta t+g(\Delta t)^2/2$, при этом $ds=gt\Delta t$. Замена Δs

на ds означает замену реального движения равномерным со скоростью $v = gt$.

§ 5. Правила дифференцирования

Правилами дифференцирования называют формулы, по которым вычисляются производная функции, являющейся постоянной на некотором множестве, производная от произведения постоянного множителя на функцию, производные от суммы, произведения и частного двух функций.

Теорема 5.1. Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x, а C – некоторое постоянное число, то справедливы следующие формулы:

$$(C)' = 0,\ (Cu(x))' = Cu'(x). \tag{5.1}$$

► Пусть $y = C$, тогда $\Delta y=0$ и $(C)' = y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Если $y = Cu(x)$, то $\Delta y = Cu(x+\Delta x) - Cu(x) = C(u(x+\Delta x) - u(x)) = C\Delta u$, а

$$(Cu(x))' = y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C\Delta u}{\Delta x} = C\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = Cu'(x).◄$$

Замечание 5.1. Вторая из формул (5.1) эквивалентна следующему утверждению: *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

Теорема 5.2. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то:

1. Функции $u(x) + v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$ дифференцируемы в этой точке и справедливы формулы:

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x); \tag{5.2}$$
$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\cdot v'(x). \tag{5.3}$$

2. Функция $u(x)/v(x)$ дифференцируема в этой точке при условии $v(x) \neq 0$ и справедлива формула:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}. \tag{5.4}$$

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции x. Из равенств (5.1) – (5.4), (3.4) следуют правила вычисления дифференциалов:

$$dC = 0, \text{ где } C - \text{const}, \tag{5.6}$$
$$dCu = Cdu, \text{ где } C - \text{const}, \tag{5.7}$$
$$d(u+v) = du+dv, \tag{5.8}$$
$$d(u\cdot v) = v\cdot du + u\cdot dv, \tag{5.9}$$
$$d\frac{u}{v} = \frac{v\cdot du - u\cdot dv}{v^2}. \tag{5.10}$$

Получим, например, формулу (5.8). Имеем

$$d(u+v) = (u+v)'dx = (u'+v')dx = u'dx + v'dx.$$

§ 6. Производная сложной и обратной функции. Свойство инвариантности формы дифференциала

Теорема 6.1. Если функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0, а функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, причём $u_0 = g(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $y = f(g(x))$, дифференцируемая в этой точке, при этом справедливо равенство

$$y'_x(x_0) = y'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0). \tag{6.1}$$

►По определению 3.1 функции, дифференцируемой в точке, и в силу следствия из теоремы 3.1 для приращения функции $y = f(u)$ в точке u_0 имеем соотношение

$$\Delta y = y'_u(u_0) \cdot \Delta u + o(\Delta u).$$

Поделим все члены последнего равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u(u_0) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{o(\Delta u)}{\Delta x} \tag{6.2}$$

и устремим Δx к нулю. При $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0)$, а $\Delta u \to 0$ как приращение дифференцируемой и потому непрерывной функции. Заметим, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta u)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = 0$, ибо $\frac{o(\Delta u)}{\Delta u} \to 0$ по определению символа «o» (определение 8.2, гл. 2, разд. 3), а второй множитель под знаком предела ограничен, ибо он имеет предел, равный $u'_x(x_0)$ (теорема 5.4, гл. 2, разд. 3). Приходим к выводу, что правая часть (6.2) при $\Delta x \to 0$ стремится к правой части равенства (6.1). Поэтому при этом условии имеет тот же предел и левая часть (6.2), значит, формула (6.1) справедлива.◄

Теорема 6.2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна, строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в ней, причём $y'(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки y_0, $y_0 = f(x_0)$, определена непрерывная, строго монотонная функция $x = f^{-1}(y)$, обратная по отношению к данной. Эта функция дифференцируема в точке y_0, при этом верна формула

$$x'(y_0) = 1/y'(x_0)\,. \tag{6.3}$$

Свойство инвариантности формы дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$, где x – независимая переменная, дифференцируема в точке x, при этом, как установлено в § 3, справедливо равенство

$$dy = y'_x dx. \tag{6.4}$$

Введём в рассмотрение функцию $x = g(t)$, дифференцируемую в точке t, x – теперь зависимая переменная. В силу теоремы 6.1 сложная функция $y = f(g(t))$ дифференцируема в точке t. Имеем

$$dy = y'_t dt = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x dx.$$

(использованы формулы (6.4) и (6.1) и равенство $dx = x'_t dt$,, вытекающее из (6.4)). Последнее равенство вместе с равенством (6.5) позволяет сделать следующий вывод.

Форма записи дифференциала $dy = y'_x dx$ в случае, когда переменная x является независимой, остаётся справедливой и для случая, когда x – функция (например, переменной t). Это свойство дифференциала называется *свойством инвариантности формы*.

Пример 6.1. Пусть $y = \sin x$, $x = \cos t$. Какие из следующих равенств справедливы: $a)\ dy|_{t=\pi/2} = 0, b)\ dy|_{t=\pi/2} = dx,\ c)\ dy|_{t=\pi/2} = -dt$?

►В силу инвариантности формы дифференциала имеем $dy = \cos x dx$. Так как $x = 0$ при $t = \pi/2$, то $dy = dx$ и потому равенство *b*) верно. Равенство *c*) верно, поскольку $dx = -\sin t dt$ и $dx = -dt$ при $t = \pi/2$. Р авенство *a*) неверно.◄

§ 7. Производные основных элементарных функций. Таблица производных

1. Производная показательной функции $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.

$$(a^x)' = a^x \ln a, \ \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

►По определению производной (определение 1.1) имеем

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} \text{ или } (a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x}$$

($a^{\Delta x} = e^{\Delta x \ln a}$ в силу основного логарифмического тождества). Заменив разность $e^{\Delta x \ln a} - 1$ на эквивалентную ей при $\Delta x \to 0$ функцию $\Delta x \ln a$ (формула (9.6) и теорема 9.1, гл. 2, разд. 3), приходим к равенству

$$(a^x)' = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a. ◄$$

2. Производная логарифмической функции $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ x > 0.$$

►Логарифмическая функция $y = \log_a x$ – обратная по отношению к показательной функции $x = a^y$, $a > 0, a \neq 1$, $y \in \boldsymbol{R}$. В силу формулы (6.4) для производной обратной функции имеем $y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$.◄

3. Производная степенной функции $y = x^a, a \in \boldsymbol{R}$.

$$(x^a)' = a x^{a-1}, \ x \in D(y).$$

Область определения $D(y)$ зависит от показателя степени *a*. Если *a* целое или дробное с нечётным знаменателем, то $D(y) = \boldsymbol{R} \setminus x = 0$, $x=0$ принадлежит $D(y)$ только при $a>0$. Во всех других случаях полагаем, что $D(y) = (0, +\infty)$.

►Функцию $y=x^a$ с помощью основного логарифмического тождества представим в виде: $x^a = e^{a\ln x}$. Имеем $(x^a)' = (e^{a\ln x})' = e^{a\ln x} \cdot (a\ln x)'$ (использованы формула для производной показательной функции и формула (6.1) для производной сложной функции). Так как $(a\ln x)' = a/x$, то

$$(x^a)' = (e^{a\ln x})' = e^{a\ln x} \cdot (a\ln x)' = e^{a\ln x} \cdot (a/x) = x^a \cdot (a/x) = a\, x^{a-1}. ◄$$

4. Производные тригонометрических функций.

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \ x \neq \pi n, n \in \boldsymbol{Z}.$$

► $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x}$. Заменив множитель $\sin(\Delta x/2)$ в числителе на эквивалентную бесконечно малую, получим:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+\Delta x/2).$$

Поскольку $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2) = \cos x$ в силу непрерывности функции косинус (разд. 3, гл.3, § 5), приходим к равенству $(\sin x)' = \cos x$.◄

Замечание 7.1. Поступая аналогичным образом и используя правила дифференцирования (§ 5 и § 6) находят производные и других основных элементарных функций.

Сводка вышеприведённых формул для производных основных элементарных функций вместе с правилами дифференцирования, формулой для производной сложной функции составляет так называемую таблицу производных. На основе формул для производных основных элементарных функций, входящих в эту таблицу, и правил дифференцирования можно прийти к следующему важному выводу: *производная любой элементарной функции также является элементарной функцией.*

Таблица производных

$$(x^a)' = a x^{a-1}, \quad x > 0, \ \forall a \in \boldsymbol{R}, \tag{7.1}$$

в частности,

$$(1/x)' = -1/x^2, \ a = -1, \tag{7.2}$$

$$(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x}), \ a = 1/2. \tag{7.3}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \boldsymbol{R}, \ a > 0, a \neq 1, \tag{7.4}$$

в частности,

$$(e^x)' = e^x. \tag{7.5}$$

$$(\log_a x)' = 1/(x \ln a), \ x > 0, \ a > 0, a \neq 1, \tag{7.6}$$

в частности,

$$(\ln x)' = 1/x. \tag{7.7}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \ x \in \boldsymbol{R}. \tag{7.8}$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \ x \in \boldsymbol{R}. \tag{7.9}$$

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}. \tag{7.10}$$

$$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, n \in \boldsymbol{Z}. \tag{7.11}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \tag{7.12}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1). \tag{7.13}$$

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \boldsymbol{R}. \tag{7.14}$$

$$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \ x \in \boldsymbol{R}. \tag{7.15}$$

Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции x.

$$(C)' = 0, \text{ где } C - \mathrm{const}. \tag{7.16}$$

$$(Cu)' = Cu', \text{ где } C - \mathrm{const}. \tag{7.17}$$

$$(u+v)' = u' + v'. \tag{7.18}$$

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{7.19}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \qquad (7.20)$$

Если $y = y(u)$, а $u = u(x)$, то $y'_x(u(x)) = y'_u(u) \cdot u'_x(x)$. (7.21)

Замечание 7.2. Производные некоторых трансцентдентных элементарных функций являются алгебраическими функциями. Так, производные обратных тригонометрических функций y=arcsin x, y=arccos x, y=arctg x, y=arcctg x, производная логарифмической функции $y = \log_a x$– алгебраические функции, причём для трёх последних они являются дробно-рациональными. Это обстоятельство используется при вычислении интегралов.

Пример 7.1. Вычислить y'_x, если $y = \log_2 \sqrt{x} - \frac{2}{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$.

►Используя правило дифференцирования суммы (формула (7.18) получаем $y'_x = (\log_2 \sqrt{x} - \frac{2}{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x})' = (\log_2 \sqrt{x})' - (2/x)' + \left(\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right)'$. Далее находим $(\log_2 \sqrt{x})' = (\frac{1}{2}\log_2 x)' = \frac{1}{2}(\log_2 x)' = \frac{1}{2x\ln 2}$ (здесь использованы свойство логарифмов и формулы (7.17), (7.6)), $(2/x)' = 2(1/x)' = -2/x^2$ (использованы формулы (7.17), (7.2)), $(\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x})' = \frac{3}{4}(x^{4/3})' = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ (использованы формулы (7.17), (7.1)). Итак, окончательно имеем:

$y'_x = \frac{1}{2x\ln 2} + \frac{2}{x^2} + \sqrt[3]{x}$.◄

Пример 7.2. Вычислить y'_x, если $y = e^x\text{ctg}x$.

► $y'_x = (e^x\text{ctg}x)'$. Имеем $y'_x = (e^x)'\text{ctg}\,x + e^x(\text{ctg}\,x)'$ (правило дифференцирования произведения (формула (7.19)). Вычислив производные: $(e^x)'$и $(\text{ctg}\,x)'$ по формулам (7.5) и (7.11), получим $y'_x = e^x\text{ctg}x - e^x\sin^{-2}x$.◄

Пример 7.3. Вычислить y'_x, если $y = \frac{(1+x^2)\text{arctg}x}{x} - \ln x$.

$$► y'_x = \left(\frac{(1+x^2)\,\text{arctg}\,x}{x}\right)' - \frac{1}{x} = \frac{((1+x^2)\text{arctg}x)'x - (1+x^2)\text{arctg}x}{x^2} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{(2x\,\text{arctg}x + 1)x - (1+x^2)\text{arctg}x}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{(x^2-1)\text{arctg}x}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{(x^2-1)\text{arctg}x}{x^2}$$

(использованы формулы (7.18), (7.7), (7.20) и (7.19) для производной дроби и произведения, формулы (7.18), (7.1), (7.14)).◄

Пример 7.4. Вычислить y'_x, если $y = x^3\arccos x - \frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

► $y'_x = (x^3\arccos x)' - ((x^2+2)/3)\sqrt{1-x^2})'$. Имеем $(x^3\arccos x)' =$
$3x^2\arccos x - -x^3\sqrt{1-x^2}$ (использованы формулы (7.18), (7.1) и (7.13)). Вычисляя производную

$$((x^2+2)/3)\sqrt{1-x^2})' = (2x)/3)\sqrt{1-x^2} - ((x^2+2)/3)\cdot x/\sqrt{1-x^2},$$

заметим, что $((x^2+2)/3)'=(2x)/3$, а $(\sqrt{1-x^2})'=((1-x^2)^{1/2})'=$ $\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ (использована формула (7.21) для вычисления производной сложной функции). После приведения к общему знаменателю и приведения подобных членов имеем: $(\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2})'=-\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$. Для y'_x получаем равенство $y'_x = 3x^2 \arccos x$.◄

Пример 7.5. При каком значении параметра α парабола $y = \alpha x^2$ касается логарифмической кривой $y = \ln x$?

►Надо найти значение α, при котором эти кривые имеют общую касательную T в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$. Их производные в точке x_0 должны быть равны, так обе они трактуются как тангенс одного и того же угла. Для α, x_0, y_0 получаем систему $\begin{cases} y_0=\alpha x_0^2, \\ y_0=\ln x_0, \\ 2\alpha x_0=1/x_0. \end{cases}$ Из последнего уравнения системы следует: $\alpha x_0^2=1/2$, поэтому y_0=1/2 в силу первого уравнения системы. Из второго уравнения имеем $x_0=e^{1/2}=\sqrt{e}$, а из третьего – $\alpha=1/(2x_0^2)=1/(2e)$. На рис. 7.1 изображены данные кривые и их общая касательная T.◄

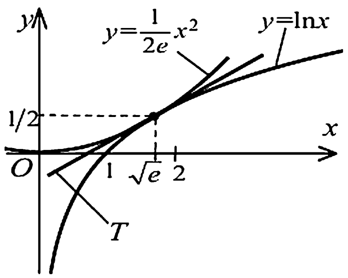


***Рис. 7.1.** К примеру 7.6*

§ 8. Производные неявных функций одной переменной

Определение 8.1. Пусть дано уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{8.1}$$

связывающее две переменные x и y. Если каждому значению x из некоторого множества X это уравнение ставит в соответствие одно значение y так, что упорядоченная пара (x, y) является его решением, то говорят, что уравнение (8.1) на множестве X задаёт y как *неявную функцию* x.

Не всегда уравнение вида (8.1) задаёт какую-либо неявную функцию, уравнение $x^2+y^2=-1$ не задаёт никакой функции. Иногда уравнение вида (8.1) задаёт две и более неявных функций. Так, уравнение $x^2+y^2 = 1$ на промежутке (–1, 1) задаёт неявно две функции: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Вопрос об условиях, при которых уравнение (8.1) задаёт однозначную неявную функцию, достаточно сложен и рассматривается далее в разделе 8 вместе с условиями существования производной неявной функции. В данном параграфе приводятся примеры вычисления производной неявной функции.

Пример 8.1. Найти y'_x, если $y = x + \operatorname{arctg} y$.

►Считая, что равенство из условия задачи задаёт y как неявную функцию x, продифференцируем обе его части по x, рассматривая $\operatorname{arctg} y$ как сложную функцию x: $y'_x = 1 + \frac{1}{1+y^2} \cdot y'_x$. Перенесём в левую часть члены с y'_x и вынесем из них y'_x за скобки: $y'_x(1 - \frac{1}{1+y^2}) = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1+y^2}{y^2}$.◄

Пример 8.2. Найти y'_x, если: $y - x\operatorname{tg}\ln(x^2 + y^2) = 0$.

►Из условия примера имеем: $y/x = \operatorname{tg}\ln(x^2 + y^2)$. Считая y неявной функцией x, возьмём производные по x от обеих частей этого равенства:

$$\frac{x \cdot y'_x - y}{x^2} = \frac{1}{\cos^2 \ln(x^2 + y^2)} \cdot \frac{2x + 2y \cdot y'_x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{x \cdot y'_x - y}{x^2} = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot \frac{2x + 2y \cdot y'_x}{x^2 + y^2}$$

(дробь $\frac{1}{\cos^2 \ln(x^2 + y^2)}$ заменена на $1 + \operatorname{tg}^2 \ln(x^2 + y^2) = 1 + y^2/x^2$). После упрощений имеем $xy'_x - y = 2x + 2yy'_x$, отсюда $y'_x = (2x + y)/(x - 2y)$.◄

Замечание 8.1. С помощью производной неявной функции можно получить уравнения касательных к некоторым кривым, например к кривым 2-го порядка.

§ 9. Производные высших порядков

Определение 9.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y'_x = g(x),\ x \in X$. Если существует производная $g'_x,\ x \in X$, то она называется *производной второго порядка* от функции $y = f(x)$ и обозначается следующими символами: y'', y''_{x^2}, $f''(x)$, $f''_{x^2}(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Итак, $y'' = (y')'$.

Пример 9.1. Найти $y''(2)$, если $y = \ln(x-1)$.

►$y' = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1}$, $y'' = ((x-1)^{-1})' = -(x-1)^{-2}$, $y'''(2) = -(2-1)^{-2} = -1$.◄

Механический смысл второй производной. Пусть $s = s(t)$ – путь, пройденный материальной точкой за время t при движении по прямой, тогда, как было установлено в § 2, $\dot{s}(t) = v(t)$ – скорость движения точки в момент времени t. Для второй производной от пути по времени справедливо равенство $\ddot{s}(t) = \dot{v}(t)$, поэтому вторая производная от пути по времени в прямолинейном движении интерпретируется как *ускорение*.

Пример 9.2. Показать, что если скорость $v(t)$ прямолинейного движения материальной точки пропорциональна корню кубическому из пути $s(t)$, пройдённому за время t, то ускорение материальной точки обратно пропорционально корню кубическому из пути $s(t)$.

►По условию $v(t) = k\sqrt[3]{s(t)}$ или $\dot{s}(t) = k\sqrt[3]{s(t)}$, где k – коэффициент пропорциональности. Возьмём производные по t от обеих частей последнего равенства: $\ddot{s}(t) = k(\sqrt[3]{s(t)})'_t = k_1 s^{-2/3}(t) \cdot \dot{s}(t)$, $k_1 = k/3$. Заменим в последнем равенстве множитель $\dot{s}(t)$ на равное ему выражение $k\sqrt[3]{s(t)}$:

$$\ddot{s}(t) = k_1 s^{-2/3}(t)\cdot k\sqrt[3]{s(t)} = k_2/\sqrt[3]{s(t)}\text{, где } k_2 = k_1\cdot k = k^2/3\text{.} ◄$$

Определение 9.2. Производная от производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется *производной третьего порядка* и обозначается y''', $y''' = (y'')'$ и т. д. Для обозначения производных более высоких порядков используют римские цифры или арабские в круглых скобках: $y^{IV}, y^{V}, \ldots, y^{X}, \ldots$, или $y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots, y^{(10)}, \ldots$.

Производной n - го порядка $y^{(n)}$ (или $\dfrac{d^n y}{dx^n}$) данной функции в точке x называется производная от её производной $(n$-1) – го порядка. Итак,

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \tag{9.1}$$

Пример 9.3. Найти $y^{IY}(2)$, если $y = x\ln x$.

► Имеем $y' = \ln x + x(1/x) = \ln x + 1$, $y'' = 1/x$, $y''' = -1/x^2$, $y^{IV} = 2/x^3$.◄

Замечание 9.1. Все производные от многочлена второй степени порядка выше 2- го равны нулю. Действительно,

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b,\ (ax^2 + bx + c)'' = 2a,\ (ax^2 + bx + c)''' = 0,$$

а все его производные порядка выше 2-го равны нулю. Этот результат обобщается на случай многочлена n-ой степени, имеющий производные любого порядка при $\forall x \in \boldsymbol{R}$, все его производные, начиная с $(n+1)$-го порядка, равны нулю.

Замечание 9.2. При вычислении производной 2-го порядка от функции, заданной неявно, сначала вычисляют её производную y'_x, а затем дифференцируют по x обе части полученного равенства с последующей подстановкой выражения для y'_x.

§ 10. Дифференциалы высших порядков. Нарушение свойства инвариантности

Определение 10.1. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве X. *Дифференциалом второго порядка* d^2y, или *вторым дифференциалом* данной функции в точке $x \in X$, называется дифференциал, взятый в этой точке (если это возможно) от её дифференциала dy, который в этом контексте называют первым дифференциалом. Итак,

$$d^2y = d(dy).$$

Дифференциал dy можно вычислить по формуле (3.4): $dy = y'(x)\mathrm{d}x$. В этой формуле $y'(x)$ – функция точки $x \in X$, а $dx = \Delta x$ не зависит от аргумента x, тогда $d^2y = d(y'(x))dx = (y''(x)dx)dx = y''(x)dx^2$. Под обозначением dx^2 всегда подразумевают степень дифференциала: $dx^2 = (dx)^2$, дифференциал от степени обозначается так: $d(x^2)$. Таким образом, для d^2y имеем

$$d^2y = y''(x)dx^2. \tag{10.1}$$

Пример 10.1. Найти d^2y, если $y = x\ln x$.

► Имеем $y'' = \dfrac{1}{x}$ (пример 9.3), $d^2y = \dfrac{1}{x}dx^2$ (формула (10.1).◄

Определение 10.2. *Дифференциалом третьего порядка* d^3y, или *третьим дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$, называется дифференциал, взятый в этой точке от её второго дифференциала d^2y, $d^3y = d(d^2y)$, и т. д. *Дифференциалом n – го порядка* d^ny функции $y = f(x)$ в точке $x \in X$ называется дифференциал, взятый в этой точке от её дифференциала $(n-1)$-го порядка $d^{n-1}y$, т. е. $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Замечание 10.1. В математическом анализе принято, что при каждой операции дифференцирования в определениях 10.1, 10.2 приращение (дифференциал) аргумента берётся одним и тем же.

Для d^ny справедлива формула

$$d^ny = y^{(n)}\,dx^n. \qquad (10.2)$$

Из равенства (10.2) следует, что символ производной n – го порядка $\dfrac{d^nx}{dx^n}$ можно рассматривать как дробь.

Пример 10.2. Найти d^4y, если $y = x\ln x$.

►Из (10.2) при $n = 4$ следует равенство $d^4y = y^{\mathrm{IV}}dx^4$. Так как $y^{\mathrm{IV}} = \dfrac{2}{x^3}$ (пример 9.2), то $d^4y = \dfrac{2}{x^3}dx^4$.◄

Первый дифференциал dy обладает свойством инвариантности формы, т. е. его можно вычислять по формуле (3.4) независимо от того, является x независимой или зависимой переменной (см. § 6). Покажем на примере, что дифференциалы высших порядков этим свойством не обладают.

Пример 10.3. Найти d^2y, если $y = \cos 2x$, если: а) x – независимая переменная; б) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – дважды дифференцируемая функция независимой переменной t.

►а) $y'_x = -2\sin 2x$, $y''_{x^2} = -4\cos 2x$. В силу равенства (10.1) имеем $d^2y = y''(x)dx^2 = -4\cos 2x\,dx^2$; б) $d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx)$. Для dy'_x в силу инвариантности формы первого дифференциала имеем равенство $d(y'_x) = (y'_x)'_x = y''_{x^2}dx$, а $d(dx) = d^2x$. Следовательно для d^2y получаем $d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2 + y'_x \cdot d^2x = -4\cos 2x dx^2 - 2\sin 2x d^2x$. В формуле для d^2y в случае б) появляется еще одно слагаемое, отсюда заключаем, что второй дифференциал в общем случае не обладает инвариантностью формы.◄

§ 11. Эластичность функций

1. Эластичность функции.

Определение 11.1 *Эластичностью* $E_x(y)$ функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения относительного приращения функции $\Delta f(x)\,/\,f(x)$ к относительному приращению аргумента $\Delta x\,/\,x$. Таким образом,

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{f(x)}\bigg/\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{x}{f(x)}f'(x). \qquad (11.1)$$

Эластичность функции характеризует чувствительность функции к изменению значения аргумента: она показывает, на сколько процентов изменится значение функции при изменении значения аргумента на 1%.

Замечание 11.1. Так как $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y} = T_y$ (T_y называется *темпом изменения функции*), то $E_x(y)$ можно записать в следующем виде $E_x(y) = xT_y$.

Свойства эластичности

1. Эластичность – *безразмерная* величина. Ее значение не зависит от того, в каких величинах измеряются y и x.

2. Эластичность произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того аргумента, равна сумме эластичностей функций $u(x)$ и $v(x)$:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v).$$

3. Эластичность частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того аргумента, равна разности эластичностей функций $u(x)$ и $v(x)$:

$$E_x(u/v) = E_x(u) - E_x(v).$$

4. Эластичность взаимно обратных функций – взаимно обратные величины:

$$E_x(y) = 1/E_y(x).$$

►Докажем, например, что $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$:

$$E_x(uv) = \frac{x}{uv}(uv)' = \frac{x}{uv}(u'v + uv'). = \frac{x}{uv}u'v + \frac{x}{uv}uv'. = E_x(u) + E_x(v). ◄$$

Пример 11.1. Найдем эластичность линейной функции $y = ax + b$.

► $E_x(y) = \dfrac{x}{ax+b}(ax+b)' = \dfrac{ax}{ax+b}$.◄

2. Эластичность спроса (предложения) по цене. Спрос и предложение некоторого товара (услуги) определяются главным образом ценой p товара (услуги).

Пусть функция спроса (пример 9.1, гл. 1, разд. 3) имеет вид $D(p) = ap+c$, где $a < 0$. Тогда $E_p(D) = \dfrac{ap}{ap+c}$. Если $|E_p(D)| > 1$, то спрос считают эластичным; если $|E_p(D)| < 1$, то неэластичным относительно цены (совершенно неэластичным при нулевой эластичности); если $|E_p(D)| = 1$, то говорят о спросе с единичной эластичностью.

Пример 11.2. Пусть $D(p) = -0{,}4p + 60$. Найдите эластичность спроса при цене $p = 100$ (руб/кг).

► $E_p(D) = \dfrac{ap}{ap+c} = \dfrac{-0{,}4 \cdot 100}{-0{,}4 \cdot 100 + 60} = -2$. Итак, повышение цены на 1% приведет к падению спроса (к падению объема продаж) на 2%.◄

Замечание 11.2. Понятие эластичности часто используется при построении различного рода моделей и при решении прикладных задач. При этом вводятся понятия перекрестной эластичности спроса по цене, ценовой эластичности ресурсов, эластичности замещения одного ресурса другим и т. д., значения которых учитываются при принятии ценовых решений различными экономическими субъектами.

Глава 2. **Основные теоремы дифференциального исчисления**

Основные теоремы дифференциального исчисления служат теоретической базой для приложения дифференциального исчисления к изучению функций. Они связаны с именами французских математиков П. Ферма (1601 – 1665), М. Ролля (1652 – 1719), Ж. Л. Лагранжа (1736 – 1813), Г. Лопиталя (1661 – 1704), О. Коши (1789 – 1857) и английского математика Б. Тейлора (1685 – 1731).

§ 1. Определение экстремума. Теорема Ферма

Определение 1.1. Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $y=f(x)$, если $f(x)$ определена на некоторой окрестности $U(x_0)$ и для $\forall x \in U(x_0)$ справедливо неравенство $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$). Значение $f(x_0)$ называют *максимумом (минимумом)* данной функции.

Если для всех x на некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ верно строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), то точка x_0 называется *точкой строгого максимума (строгого минимума)* функции $y=f(x)$.

Функцию $y=f(x)$ обычно предполагают непрерывной в точке x_0.

Точки максимума и минимума объединяют общим термином – *точки экстремума*.

Замечание 1.1. Утверждение «функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий экстремум» равносильно следующему: приращение $\Delta f(x_0)$ сохраняет знак на некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$, а именно: $\Delta f(x_0)<0$ для $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ в случае строгого максимума, и $\Delta f(x_0) > 0$ в случае строгого минимума.

Замечание 1.2. Понятие экстремума функции $f(x)$ в определении 1.1 отнесено к окрестности точки x_0, поэтому его называют *локальным экстремумом*. На промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ может иметь несколько локальных экстремумов (рис.1.1, x_0, x_2 – точки *локального максимума*, а x_1 – *локального минимума*).

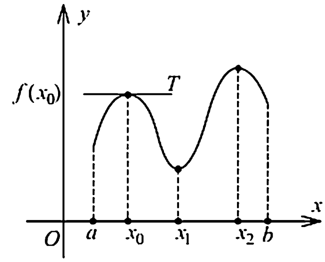


Рис. 1.1. *К понятию экстремума функции*

Теорема Ферма. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то её производная $f'(x_0) = 0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма

Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ дифференцируема и имеет экстремум. Из геометрического смысла производной (§ 2, гл. 1) и теоремы Ферма следует, что в точке $(x_0, f(x_0))$ *касательная* T к графику Г этой функции *параллельна оси Ох* (рис. 1.1).

§ 2. Теорема Ролля

Если функция $y = f(x)$

1) определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$,
2) дифференцируема на интервале (a, b),
3) $f(a) = f(b)$,

то на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка c, в которой $f'(c) = 0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля

Пусть функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда на интервале (a, b) в соответствии с теоремой Ролля и геометрическим смыслом производной найдётся хотя бы одна точка c такая, что *касательная T* к графику Г этой функции, проведённая в точке $(c, f(c))$, будет *параллельна оси Ox* (рис. 2.1).

Пример 2.1. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ на отрезке $[0, 2]$.

►Данная функция непрерывна как элементарная на отрезке $[0, 2]$ и на его концах принимает равные значения: $f(0) = f(2) = 1$, дифференцируема в любой точке интервала $(0, 2)$, $f'(x) = -2x + 2$. Итак, для $f(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля и на интервале $(0, 2)$ должна существовать точка c, в которой $f'(c) = 0$. Действительно, из равенства $f'(c) = -2c + 2 = 0$ имеем $c = 1 \in (0, 2)$.◄

Замечание 2.1. Все условия теоремы Ролля существенны для справедливости её заключения. Например, рассмотрим функцию $f(x) = 1/x^2$, заданную и непрерывную во всех точках отрезка $[-1, 1]$, кроме точки $x = 0$, где она имеет разрыв 2-го рода, $f(-1) = f(1) = 1$. На интервале $(-1, 1)$ нет точки, где её производная $f'(x) = -2/x^3$ обратилась бы в нуль (рис. 2.2).

Следствие из теоремы Ролля. Между двумя нулями дифференцируемой функции $y = f(x)$ всегда есть хотя бы один нуль её производной.

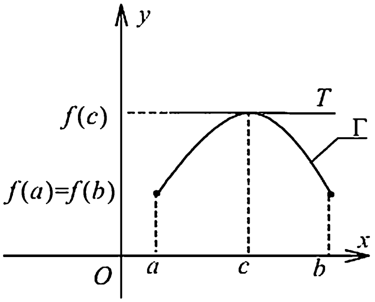


Рис. 2.1. *К геометрической интерпретации теоремы Ролля*

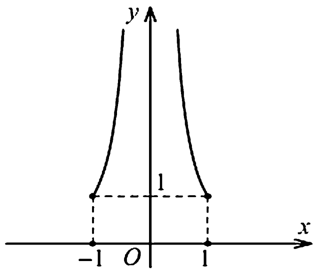


Рис. 2.2. *График функции $f(x)=1/x^2$ на отрезке $[-1, 1]$*

►Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), при этом $f(a)=f(b)=0$. Тогда по теореме Ролля на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка c, в которой $f'(x) = 0$.◄

§ 3. Теорема Коши

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$

1) определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$,

2) дифференцируемы на интервале (a, b),

3) $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b),

то на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка c, для которой будет справедливо равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}, \tag{3.1}$$

называемое *формулой Коши*.

Пример 3.1. Проверить справедливость теоремы Коши для функций $f(x)=x^3-8x$ и $g(x)=x^2/2-2x$, заданных на отрезке $[2, 4]$.

►Для $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[2, 4]$ выполнены все условия теоремы Коши. Поэтому на интервале $(2, 4)$ есть хотя бы одна точка c, для которой справедлива формула Коши, принимающая в данном случае вид $\frac{f(4)-f(2)}{g(4)-g(2)}=\frac{3c^2-8}{c-2}$ или $\frac{40}{2}=\frac{3c^2-8}{c-2}$. Для c получаем уравнение: $3c^2-20c+32=0$, имеющее два корня: $c_1=4$, $c_2=8/3$. Так как $c_1=4 \notin (2, 4)$, а $c_2=8/3 \in (2, 4)$, то заключаем, что $c_2=8/3$.◄

Замечание 3.1. Как и в случае теоремы Ролля, можно привести примеры, показывающие, что условия теоремы Коши существенны для её заключения.

§ 4. Теорема Лагранжа

1. Формулировка теоремы Лагранжа.

Теорема Лагранжа. Если функция $y=f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$,

2) диффференцируема на интервале (a, b),

то на интервале (a, b) найдётся хотя бы одна точка c, для которой будет справедливо равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \tag{4.1}$$

Равенство (4.1) называется *формулой Лагранжа*.

Теорема Лагранжа не требует специального доказательства. Она следует из теоремы Коши при $g(x)=x$.

Замечание 4.1. Формулу Лагранжа (4.1) можно переписать в виде

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \tag{4.2}$$

Пример 4.1. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x)=-x^2-2x$, заданной на отрезке $[1, 3]$.

►Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[1, 3]$ как элементарная и дифференцируема на интервале $(1, 3)$, $f'(c)=-2x+2$, поэтому на интервале $(1, 3)$ есть точка c, для которой будет справедлива формула (4.1), имеющая в данном случае вид $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$ или $\frac{-3-1}{2}=f'(c)$, откуда следует равенство $f'(c)=$ $=-2$. Сравнив его с выражением для производной $f'(c)$ получаем уравнение $-2c+2=-2$, отсюда имеем $c=2 \in (1, 3)$.◄

2. Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условиям теоремы Лагранжа, AB – хорда, соединяющая точки $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ графика Γ этой функции (рис. 4.1). Отношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ из равенства (4.1) есть угловой коэффициент хорды AB, а производная $f'(c)$ является угловым коэффициентом касательной T, проведённой к Γ в точке $C(c, f(c))$. Итак, заключаем, что на графике данной функции есть хотя бы одна точка $C(c, f(c))$, *касательная* T в которой к ее графику Γ *параллельна* его хорде AB (рис. 4.1).

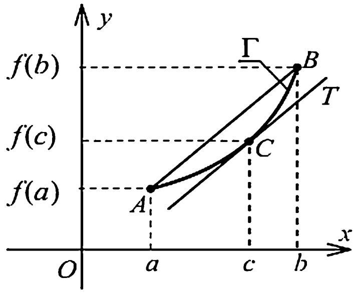


Рис. 4.1. *К геометрической интерпретации теоремы Лагранжа*

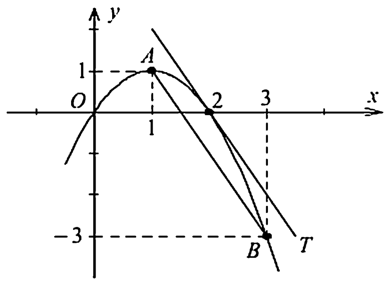


Рис. 4.2. *К примеру 4.2 (парабола $y = -x^2 + 2x$ на отрезке [1,3])*

Пример 4.2. На дуге параболы $y = -x^2 + 2x$ между точками $A(1, 1)$, $B(3, -3)$ найти точку $C(c, y(c))$, касательная T в которой параллельна хорде AB. Написать уравнение этой касательной.

►В примере 4.1 показано, что функция $y = -x^2 + 2x$ на отрезке $[1, 3]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа и найдена точка $c = 2$. Так как $y(c) = y(2) = 0$, то $C(2, 0)$ (рис. 4.2). Уравнение T получим, подставив в равенство (2.2) из гл. 1 координаты точки C и $y'(c) = -2$: $y - 0 = -2(x-2)$. После очевидных преобразований приходим к уравнению T: $x+y-2= 0$.◄

3. Физическая интерпретация теоремы Лагранжа. Пусть функция $s = s(t)$, описывающая прямолинейное движение точки на промежутке $[t_1, t_2]$, удовлетворяет на нём условиям теоремы Лагранжа, тогда из (4.1) следует равенство:

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = s'(t^*), \tag{4.3}$$

где $t^* \in (t_1, t_2)$. Итак, на интервале (t_1, t_2) есть момент времени t^*, в который *мгновенная скорость* движения $s'(t^*)$ равна *средней скорости* движения на отрезке $[t_1, t_2]$.

Пример 4.3. Прямолинейное движение точки на промежутке времени $[0, 2]$ задано уравнением $s(t) = 2t^2 - t + 1$. Найти момент времени t^*, в который мгновенная скорость движения равна средней скорости движения на отрезке $[0, 2]$.

►По формуле (4.3) для данной функции имеем $\dfrac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = 4t^* - 1$, отсюда получаем уравнение для t^*: $3 = 4t^* - 1$. Следовательно, $t^* = 1$.◄

4. Формула конечных приращений. Формула Лагранжа (4.2) справедлива как для случая $a < b$, так и для случая $a > b$. Запишем её в другой форме. Возьмём любое значение $x_0 \in (a, b)$ и придадим ему приращение Δx такое, чтобы

$x_0+\Delta x \in (a, b)$. Напишем формулу (4.2) для промежутка $[x_0, x_0+\Delta x]$ при $\Delta x > 0$ или для промежутка $[x_0+\Delta x, x_0]$ при $\Delta x < 0$:

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = f'(c)\Delta x, \qquad (4.4)$$

c – число, заключённое между x_0 и $x_0+\Delta x$. Положим $c=x_0+\theta\Delta x$, $\theta \in (0, 1)$ при этом равенство (4.4) принимает вид

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x. \qquad (4.5)$$

Соотношения (4.4) и (4.5) являются точными равенствами и справедливы для конечных значений Δx. Каждое из них называется *формулой конечных приращений* в отличие от приближённого равенства

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x, \qquad (4.6)$$

называемого *формулой бесконечно малых приращений*. Формулы (4.5) и (4.6) можно переписать в виде

$$\Delta f(x_0) = df(x_0+\theta\Delta x), \qquad (4.7)$$

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0). \qquad (4.8)$$

Пример 4.4. Используя формулу конечных приращений, для функции $f(x) = x^2 - 2x$ на отрезке $[1, 5]$ найти точку c, в которой дифференциал совпадает с приращением функции на этом отрезке.

►Напишем формулу (4.4) для данной функции: $f(5) - f(1) = (2c - 2)\cdot 4$, отсюда находим c: $16 = 8(c-1) \Rightarrow c = 3$.◄

§ 5. Правило Лопиталя

Правилом Лопиталя называют теоремы, сводящие вычисление предела отношения двух функций в случае неопределённости $0/0$ или ∞/∞ к вычислению предела отношения производных этих функций.

Теорема 5.1 (*правило Лопиталя для раскрытия неопределённости* $0/0$). Если функции $f(x)$ и $g(x)$

1) определены и дифференцируемы на некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a, при этом $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,

2) производная $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности точки a,

3) существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, при этом выполняется равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (5.1)$$

Пример 5.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{3x^2-5x-2}$ с помощью правила Лопиталя.

►Функции $f(x) = \ln(x^2-3)$ и $g(x) = 3x^2-5x-2$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы 5.1 в некоторой проколотой окрестности точки $x=2$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x/(x^2-3)}{6x-5} = \dfrac{4}{7}$, то выполнено и третье условие этой теоремы и поэтому $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{3x^2-5x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x/(x^2-3)}{6x-5} = \dfrac{4}{7}$.◄

Пример 5.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\sin^2 x}$ с помощью правила Лопиталя.

►Функции $f(x)=e^x-1-x$ и $g(x)=\sin^2 x$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы 5.1 в некоторой проколотой окрестности точки $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2\sin x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}=[\frac{0}{0}]$. Первое применение теоремы 5.1 не избавляет от неопределённости. Поскольку $f'(x)$ и $g'(x)$ также удовлетворяют первым двум условиям теоремы 5.1, можно применить её ещё один раз: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)'}{(\sin 2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2\cos 2x}=\dfrac{1}{2}$. Итак, двукратное применение теоремы 5.1 приводит к равенству $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}$.◄

Теорема 5.2 (*правило Лопиталя для раскрытия неопределённости* ∞/∞). Если функции $f(x)$ и $g(x)$

1) определены и дифференцируемы на некоторой проколотой окрестности точки a, при этом $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$,

2) производная $g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности точки a,

3) существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, при этом справедливо равенство (5.1).

Пример 5.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x}$ с помощью правила Лопиталя.

►Функции $f(x)=\ln\sin x$ и $g(x)=\operatorname{ctg} x$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы 5.2 на промежутке $(0,\delta]$, где δ – некоторое положительное число, $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\cos x/\sin x}{-1/\sin^2 x}=-\lim\limits_{x\to +0}\cos x\cdot\sin x=0$, поэтому выполняется и третье условие. Поэтому

$$\lim_{x\to +0}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to +0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/\sin^2 x}=-\lim_{x\to +0}\cos x\cdot\sin x=0.◄$$

Замечание 5.1. Теоремы 5.1, 5.2 остаются справедливыми и в случае, когда под a понимается один из символов $-\infty$, $+\infty$, ∞, при этом первые два условия этих теорем должны выполняться для значений x, удовлетворяющих соответственно одному из неравенств: $x<-\delta$, $x>\delta$, $|x|>\delta$, где δ – некоторое положительное число.

Замечание 5.2. Условие существования предела отношения производных в теоремах 5.1 – 5.2 является существенным. Если оно не выполняется, т. е. указанный предел не существует, эти теоремы применять нельзя. Предел отношения функций может в этом случае как существовать, так и не существовать, и находить его следует методами, рассмотренными в гл. 2, разд. 3.

Пример 5.4. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-\cos x}{3x+\sin x}$.

►Функции $f(x)=2x-\cos x$ и $g(x)=3x+\sin x$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы 5.2 (с учётом замечания 5.1), но $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\sin x}{3+\cos x}$, (это можно доказать с помощью теоремы 3.1, гл. 2, разд. 3). Итак, в данном случае теорема 5.2 не применима, но искомый предел существует и конечен. В самом деле, разделив оба члена дроби под знаком предела на x и применив теорему об арифметических операциях над функциями, имеющими предел (теорема 5.1, гл. 2, разд. 3), получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\cos x}{3x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-1/x\cdot\cos x}{3+1/x\cdot\sin x} = \frac{2}{3},$$

так как функции $\frac{1}{x}\cdot\cos x, \frac{1}{x}\cdot\sin x$ – бесконечно малые при $x\to+\infty$ как произведение бесконечно малой функции $1/x$ на ограниченные функции $\cos x$, $\sin x$.◄

Замечание 5.3. Правило Лопиталя применяется также для раскрытия неопределённостей $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0. С помощью некоторых тождественных преобразований задача сводится к раскрытию неопределённости $0/0$ или ∞/∞, после чего и применяется правило Лопиталя.

§ 6. Формула Тейлора для многочлена

Пусть дан многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k, \tag{6.1}$$

a_k, $k=0, 1, \ldots, n$, – коэффициенты многочлена. Положим $x = (x - x_0) + x_0$, где x_0 – любое фиксированное число, получим $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k[(x-x_0)+x_0]^k$. Возведя сумму $(x - x_0) + x_0$ в степень k, после приведения подобных членов имеем равенство

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots + b_n(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k, \tag{6.2}$$

называемое *разложением многочлена* $P_n(x)$ *по степеням разности* $x - x_0$. Коэффициенты b_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, этого разложения зависят от x_0 и коэффициентов a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, например, $b_0 = a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_nx_0^n$. Продифференцируем равенство (6.2) почленно n раз:

$$P_n'(x) = b_1 + 2b_2(x-x_0)\ldots + nb_n(x-x_0)^{n-1},$$
$$P_n''(x) = 2\cdot1b_2 + 3\cdot2b_3(x-x_0) + \ldots + n(n-1)b_n(x-x_0)^{n-2},$$

. . . .

$$P_n^{(k)}(x) = k(k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1b_k + (k+1)k\cdot\ldots\cdot2(x-x_0) + \ldots +$$
$$+ n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)b_n(x-x_0)^{n-k},$$

. . . .

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot b_n,$$

прозводные многочлена $P_n(x)$ порядка выше n равны нулю. Положим в этих равенствах и в формуле (6.2) $x = x_0$:

$P_n(x_0) = b_0$, $P_n'(x_0) = b_1$, $P_n''(x_0) = 1\cdot2b_2$, …, $P_n^{(k)}(x_0) = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot k\cdot b_k = k!b_k$, …, $P_n^{(n)}(x_0) = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot n\cdot b_n = n!b_n$ или

$$b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0,1, \ldots, n, \tag{6.3}$$

где по определению принимаем 0!=1, 1!=1 и $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$. Итак, показано, что разложение (6.2) единственно, так как его коэффициенты b_k, $k = 0,1, \ldots, n$, всегда определяются формулой (6.3). Подставим (6.3) в (6.2):

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{6.4}$$

Равенство (6.4) называется *формулой Тейлора* для многочлена $P_n(x)$.

Пример 6.1. Многочлен $P_3(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 13$ разложить по степеням разности $x - 2$.

►Запишем для данного многочлена формулу (6.4) при $x_0 = 2$:

$$P_3(x) = P_3(2) + \frac{P_3'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P_3''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P_3'''(2)}{3!}(x-2)^3. \tag{6.5}$$

Имеем $P_3'(x) = 3x^2 - 14x + 18$, $P_3''(x) = 6x - 14$, $P_3'''(x) = 6$ и $P_3(2) = 3$, $P_3'(2) = 2$, $P_3''(2) = -2$, $P_3'''(2) = 6$. Подставив в (6.5) четыре последних равенства, приходим к соотношению $P_3(x) = 3 + 2(x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3$.◄

Пример 6.2. Пусть $P_3(x)$ – многочлен третьей степени, $P_3(1) = 0$, $P_3'(1) = -4$, $P_3''(1) = 2$, $P_3'''(1) = 6$. Написать его разложение по степеням x.

►Напишем для данного многочлена формулу (6.4) при $n = 3$, $x_0 = 1$:

$$P_3(x) = P_3(1) + \frac{P_3'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P_3''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P_3'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Подставим в это равенство значение многочлена и его производных в точке $x = 1$, получим $P_3(x) = 0 - 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-3)^3$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, приходим к равенству $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$.◄

§ 7. Формула Тейлора для произвольной функции $f(x)$

1. Формула Тейлора.

Определение 7.1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 до n-го порядка включительно. Многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{7.1}$$

называется *многочленом Тейлора* функции $f(x)$.

Пример 7.1. Для функции $f(x) = (x - 1)/(x - 2)$ написать многочлен Тейлора $T_3(x)$ при $x_0 = 3$.

► $f'(x) = \dfrac{x-2-(x-1)}{(x-2)^2} = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3}$, $f'''(x) = -\dfrac{6}{(x-2)^4}$,

$f(3) = 2, f'(3) = -1, f''(3) = 2, f'''(3) = -6$. В силу формулы (6.6) получаем $T_3(x) = 2 - (x-3) + (x-3)^2 - (x-3)^3$.◄

Равенство (7.1) является разложением многочлена $T_n(x)$ по степеням разности $x - x_0$. Ввиду единственности такого разложения (§ 6) имеем

$$\frac{T_n^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{f_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0,1, \ldots, n.$$

Отсюда следует равенство

$$T_n^{(k)}(x_0) = f_n^{(k)}(x_0),\ k = 0,1,\dots,n, \tag{7.2}$$

выражающее свойство многочлена Тейлора. При этом в случае $k = 0$ подразумевается равенство $T_n(x_0) = f(x_0)$.

Итак, в точке x_0 функция $f(x)$, её многочлен Тейлора $T_n(x)$ и их производные до n – го порядка включительно совпадают. Но на проколотой окрестности $\overset{o}{U}(x_0)$ функция $f(x)$ совпадает со своим многочленом Тейлора тогда и только тогда, когда она сама на $U(x_0)$ есть многочлен n–ой степени.

Далее предполагаем, что функция $f(x)$ не является многочленом на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Разность между $f(x)$ и её многочленом Тейлора $T_n(x)$ обозначим через $R_n(x)$: т. е. $f(x) - T_n(x) = R_n(x)$, $R_n(x)$ есть погрешность представления функции $f(x)$ её многочленом Тейлора $T_n(x)$ на $U(x_0)$. Преобразуем последнее равенство к виду:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x). \tag{7.3}$$

Заменив в (7.3) $T_n(x)$ на правую часть равенства (6.6), получим:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x). \tag{7.4}$$

Равенство (7.4) называется *формулой Тейлора* функции $f(x)$, а $R_n(x)$ называется *остаточным членом*.

2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

В математическом анализе используются различные формы остаточного члена формулы Тейлора в зависимости от свойств фунции $f(x)$ в окрестности точки x_0. Если функция дифференцируема в точке x_0 до n – го порядка включительно, то можно доказать, что в этом случае остаточный член $R_n(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем разность $x - x_0$ при $x \to x_0$. Формула Тейлора тогда записывается так:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \tag{7.5}$$

где под $o((x–x_0)^n)$ понимается бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x–x_0)^n$ при $x \to x_0$.

Равенство (7.5) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано* (Д. Пеано (1858 – 1932) – итальянский математик).

Пример 7.2. Написать для функции $f(x)=(x–1)/(x–2)$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано при $x_0 = 3$ и $n = 3$.

►Из формулы (6.8) следует равенство $f(x) = T_3(x) + R_3(x)$. Заменяя в нём $T_3(x)$ на $2 - (x - 3) + (x - 3)^2 - (x - 3)^3$ (см. пример 6.3), а $R_3(x)$ на $o((x - 3)^3$, имеем $f(x) = 2 - (x - 3) + (x - 3)^2 - (x - 3)^3 + o((x - 3)^3$.◄

При $x_0 = 0$ формула (6.10) принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{7.6}$$

и называется *формулой Маклорена* с остаточным членом в форме Пеано (К. Маклорен (1698 – 1746) – шотландский математик).

Напишем формулы Маклорена для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$, имеющих при $x = 0$ производные любого порядка. С помощью метода математической индукции можно получить формулы для производных n – го порядка от этих функций в точке $x = 0$:

$f(x) = e^x, \qquad f^{(n)}(0) = 1,$

$f(x) = \sin x, \qquad f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k \in \boldsymbol{N},$

$f(x) = \cos x, \qquad f^{(n)}(0) = \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ (-1)^{k}, & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \boldsymbol{N},$

$f(x) = \ln(1+x), \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$f(x) = (1+x)^{\alpha}, \qquad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1)).$

Подставляя в формулу (7.6) поочередно указанные выражения для $f^{(n)}(0)$ каждой из пяти данных функций, приходим к следующим равенствам:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \tag{7.7}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \tag{7.8}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \tag{7.9}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \tag{7.10}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n). \tag{7.11}$$

Замечание 7.1. Равенства (7.7) – (7.11) – асимптотические разложения для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}$. Они служат источником таких разложений рода для некоторого класса элементарных функций. Полученные разложения используются при вычислении пределов.

Замечание 7.2. Формула Тейлора (7.6) аппроксимирует (т. е. приближает) функцию $f(x)$ её многочленом Тейлора на некоторой окрестности точки x_0, это приближение тем точнее, чем меньше модуль разности $x - x_0$.

3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Если функция $f(x)$ на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 имеет производную $f^{(n+1)}(x)$, то для $f(x)$ справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{7.12}$$

где θ – некоторое число из промежутка (0, 1).

Равенство (7.12) называется *формулой Тейлора* функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Замечание 7.3. При $x_0 = 0$ равенство (712) принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{7.13}$$

и называется *формулой Маклорена* с остаточным членом в форме Лагранжа.

Перенесём в формуле (7.12) $f(x_0)$ в левую часть, получим

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1. \quad (7.14)$$

Левая часть соотношения (7.14) является приращением функции $f(x)$: $f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$. Поскольку $x-x_0=\Delta x=dx$, то произведения производных на степени разности $x-x_0$ в правой части равенства (7.14) можно рассматривать как дифференциалы соответствующих порядков. В результате формула (7.12) записывается в следующей модификации:

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0)+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}f(x_0+\theta(x-x_0)), \quad (7.15)$$

где $0<\theta<1$.

Замечание 7.4. Формула (7.15) является разложением функции $f(x)$ по ее дифференциалам, причем они вычисляются в точке x_0 до n – го порядка включительно, а дифференциал $(n+1)$ – го порядка – в точке из некоторой окрестности точки x_0.

Глава 3. **Исследование функций и построение графиков**

§ 1. Условие постоянства функции на промежутке

В § 5, гл. 1 было установлено, что производная функции, являющейся постоянной на некотором промежутке X, равна нулю. Здесь рассматривается обратное утверждение.

Теорема 1.1 (*достаточное условие постоянства функции на промежутке*). Если производная функции $f(x)$ равна нулю в любой точке некоторого промежутка X, то функция $f(x)$ является постоянной на этом промежутке.

►Из условия теоремы имеем $f'(x)=0$ для $\forall x\in X$. Фиксируем некоторую точку x_0 из промежутка X и рассмотрим любую другую его точку x. На отрезке $[x_0, x]$ или $[x, x_0]$ для функции $f(x)$ выполнены все условия теоремы Лагранжа (см. § 4, гл. 2), поэтому справедливо равенство:

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0), \quad (1.1)$$

где c – некоторая точка между x_0 и x. Поскольку c принадлежит промежутку X, то $f'(c)=0$, так что для $\forall x\in X$ в силу (1.1) верно равенство или $f(x)-f(x_0)=0$ или $f(x)=f(x_0)$. Итак, все значения данной функции на промежутке X равны одному и тому же числу $f(x_0)$, поэтому заключаем, что она постоянна на X.◄

Замечание 1.1. Равенство нулю производной функции на промежутке X – необходимое и достаточное условие её постоянства на этом промежутке.

§ 2. Достаточный признак строгой монотонности функции на промежутке

Понятие монотонной функции было рассмотрено в разд. 3, гл. 1, § 7.

Теорема 2.1 (*достаточный признак строгой монотонности функции*). Если производная функции $f(x)$ положительна (отрицательна) на интервале (a, b), то данная функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

►Пусть $f(x)>0$ для $\forall x\in(a,b)$. Возьмём две любые точки x_1 и x_2 этого интервала такие, что $x_1 < x_2$ тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ для функции $f(x)$ выполнены все условия теоремы Лагранжа (§ 4, гл. 2), в силу которой имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1),\ c \in (x_1, x_2). \tag{2.1}$$

Поскольку $f'(c) > 0$, а разность $x_2 - x_1$ положительна, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, следовательно, $f(x)$ возрастает на интервале (a, b). Аналогично проводится доказательство для случая $f'(x) < 0$.◄

Замечание 2.1. Теорема 2.1 позволяет найти так называемые *промежутки монотонности* дифференцируемой функции, на каждом из кото рых она только возрастает или только убывает.

Пример 2.1. Найти промежутки монотонности функции $f(x) = x^2 - 4x$.

► $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$, $f'(x) < 0$ при $x < 2$ и $f'(x) > 0$ при $x > 2$, поэтому в силу теоремы 2.1 данная функция убывает на промежутке $(-\infty, 2)$ и возрастает на промежутке $(2, +\infty)$.◄

§ 3. Необходимые условия существования экстремума. Критические точки

Понятие экстремума функции введено в § 1 предыдущей главы. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она непрерывна.

Теорема 3.1 (*необходимые условия существования экстремума*). Если функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 \in (a, b)$ экстремум, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0) = \infty$, либо $f'(x_0)$ не существует.

►Пусть x_0 – точка экстремума функции $f(x)$. Возможны только два случая: либо $f'(x_0)$ существует, либо не существует. Если $f'(x_0)$ существует, то также возможны только два случая: либо $f'(x_0)$ конечна, либо $f'(x_0) = \infty$. Если $f'(x_0)$ конечна, то $f'(x_0) = 0$ по теореме Ферма из § 1.◄

Определение 3.1. Точки из области определения функции $f(x)$, в которых её производная равна нулю, бесконечности или не существует, называются *критическими точками* данной функции (иначе *точками, подозрительными на экстремум*). Точки, где производная $f'(x)$ равна нулю, называют также *стационарными точками*.

Пример 3.1. Найти критические точки функции $f(x) = x|x+1|$.

► $D(f) = \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < -1, \\ x^2 + x, & x \geq -1, \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x < -1, \\ 2x + 1, & x > -1, \end{cases}$ $f'(x) = 0$ при $x = -1/2$ и $\nexists f'(-1)$ (пример 1.2, гл. 1). Итак, точки $x = -1$ и $x = -1/2$ – критические, а $x = -1/2$ является также стационарной точкой.◄

Пример 3.2. Найти критические точки функции $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

► $D(f) = \boldsymbol{R}$, $f'(x) = ((x-1)^{2/3})' = \frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$, $f'(x)$ не обращается в нуль на $D(f)$, но $f'(1) = \infty$. Точка $x = 1$ – критическая точка $f(x)$.◄

Определение 3.2. Экстремум функции $f(x)$, достигаемый в стационарной точке, называется *гладким экстремумом*. Если в точке экстремума не существует $f'(x)$, но существуют неравные между собой односторонние производные, то такой экстремум называется *угловым*. Если в точке экстремума производная бесконечна, то он называется *острым*.

Например, функция $f(x) = x\,|x+1|$ в точке $x = -1/2$ имеет гладкий минимум, а в точке $x = -1$ – угловой максимум (рис. 2.2, гл. 1). Функция $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ имеет в точке $x = 1$ острый минимум (рис. 2.4, гл. 1).

Замечание 3.1. Характер экстремума определяет положение касательной к графику функции в точке экстремума. В точке гладкого экстремума функции $f(x)$ касательная к её графику Г параллельна оси Ox. В точке углового экстремума график Г имеет различные односторонние касательные, а в точке острого экстремума – вертикальную касательную. Например, график функции $f(x) = x|x+1|$ в точке гладкого минимума $(-1/2, -1/4)$ имеет горизонтальную касательную, а в точке углового максимума $(-1, 0)$ – односторонние касательные (рис. 3.1). График функции $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ в точке $(1, 0)$ острого экстремума имеет вертикальную касательную (рис. 2.4, гл. 1).

Замечание 3.2. Необходимые условия существования экстремума (теорема 3.1) не являются достаточными, ибо не в любой критической точке функция имеет экстремум. Например, для функций $y = x^2$ и $y = x^3$ точка $x = 0$ является критической $((x^2)' = 2x = 0$ и $(x^3)' = 3x^2 = 0$ при $x = 0)$, однако первая из них имеет в этой точке экстремум (гладкий минимум), а вторая функция не имеет экстремума в этой точке (рис. 3.2, 3.3). Для функций $y = \sqrt[3]{x-1}$ и $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ точка $x = 1$ является критической $(y'(1) = \infty)$, при этом первая функция не имеет в ней экстремума, а вторая имеет острый минимум (рис. 2.3, 2.4 гл. 1).

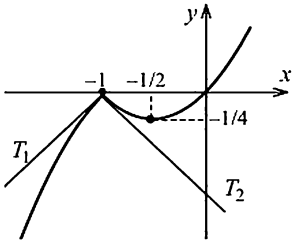


Рис. 3.1. График функции $f(x) = x|x+1$

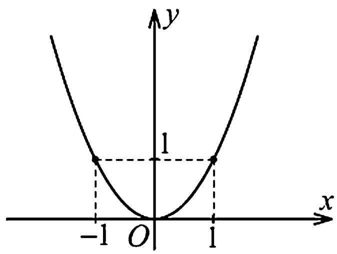


Рис. 3.2. График функции $f(x) = x^2$

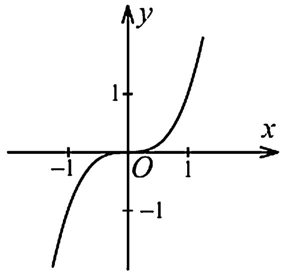


Рис. 3.3. График функции $f(x) = x^3$

§ 4. Достаточные условия существования экстремума

С помощью теоремы 3.1 можно найти критические точки данной функции (или точки, подозрительные на экстремум). Однако не в каждой критической точке функция имеет экстремум (замечание 3.2). Вопрос о наличии экстремума в критических точках решается путём применения достаточных условий или достаточных признаков существования экстремума.

1. Достаточный признак существования экстремума, связанный с первой производной.

Теорема 4.1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0)$ критической точки x_0 и дифференцируема во всех точках этой окрестности за исключением, быть может, самой точки x_0. Если при переходе аргумента

x через эту точку слева направо производная $f'(x)$ меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум (при изменении знака $f'(x)$ с плюса на минус – максимум, с минуса на плюс – минимум).

►Рассмотрим $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. Для функции $f(x)$ на отрезке $[x, x_0]$ $(x < x_0)$ или на отрезке $[x_0, x]$ $(x > x_0)$ выполнены все условия теоремы Лагранжа, поэтому для неё справедлива формула (4.4) из гл. 2, имеющая здесь вид

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \tag{4.1}$$

где c – некоторое число, заключённое между x_0 и x. Пусть $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, тогда $f'(c)$ и $x - x_0$ имеют разные знаки для $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. В самом деле, $f'(c) > 0$ и $x - x_0 < 0$ при $x < x_0$, $f'(c) < 0$ и $x - x_0 > 0$ при $x > x_0$. Итак, на проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ приращение функции $\Delta f(x_0) < 0$ в силу (4.1), поэтому в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум (замечание 1.1, гл. 2). Случай изменения знака $f'(x_0)$ с минуса на плюс рассматривается аналогично.◄

Таблица 4.1

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	$2+e \approx 4{,}7$ гладкий максимум	↘

Пример 4.1. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x) = (2 - x)e^x + 2$.

►$D(f)=\mathbf{R}$, $f'(x) = ((2 - x)e^x + 2)' = (1 - x)e^x$, $x = 1$– единственная критическая точка, $f'(1) = 0$. Она делит ось Ox на два интервала: $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$. Знак $f'(x)$ на них приведён в табл. 4.1.

Таблица 4.1

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	$2+e \approx 4{,}7$ Гладкий максимум	↘

В силу теоремы 2.1 на первом из указанных интервалов $f(x)$ возрастает, а на втором – убывает (направление стрелок в таблице 4.1 указывает характер изменения функции). В точке $x = 1$ функция имеет гладкий максимум (теорема 4.1), $f(1) = 2 + e \approx 4.7$ (рис. 5.5).◄

§ 5. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда в любой точке $M(x, f(x))$ графика $f(x)$ функции существует невертикальная касательная.

Определение 5.1. График Г функции $f(x)$, дифференцируемой на интервале (a, b), называется *выпуклым вниз* (*вверх*) на этом промежутке, если он расположен выше (ниже) касательной, проведённой к Г в любой его точке $M(x, f(x))$, где $x \in (a, b)$.

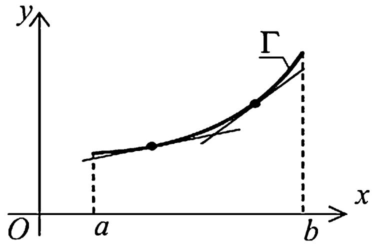


Рис. 5.1а. График функции выпукл вниз

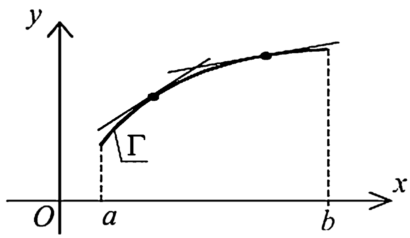


Рис. 5.1б. График функции выпукл вверх

На рис. 5.1а изображён график Г функции $f(x)$, направленный на интервале (a, b) выпуклостью вниз, а на рис. 5.1б – выпуклостью вверх.

Теорема 5.1. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) < 0(f''(x) > 0)$ всюду на этом интервале, то график этой функции на интервале (a, b) является выпуклым вверх (вниз).

Пример 5.1. Найти интервалы выпуклости графика функции $f(x) = x^2/(x^2+3)$.

► $D(f)=\boldsymbol{R}$, $f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2+3)^2}$, $f''(x) = \dfrac{18(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$. Так как $f''(x)<0$ на интервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ и $f''(x)>0$ на интервале $(-1, 1)$, то в силу теоремы 5.1 заключаем, что на промежутках $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ график функции направлен выпуклостью вверх, а на промежутке $(-1, 1)$ – выпуклостью вниз (рис. 5.3).◄

Определение 5.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и дифференцируема на $U(x_0)$ за исключением, быть может, самой точки x_0. Если при переходе аргумента x через эту точку меняется направление выпуклости графика Г этой функции, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика Г (рис. 5.2).

Так, $(\pm 1,\ 1/4)$– точки перегиба графика функции $f(x) = x^2/(x^2 + 3)$ (рис. 5.3).

Замечание 5.1. Пусть в точке перегиба $M_0(x_0, f(x_0))$ график функции $f(x)$ имеет касательную T. Из определения 5.2 следует, что при переходе x через точку x_0 график переходит с одной стороны касательной T на другую и «перегибается через неё» (рис. 5.2), отсюда и произошло название «точка перегиба».

Теорема 5.2 (*необходимое условие существования точки перегиба графика функции*). Если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $f(x)$, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0) = \infty$, либо $f''(x_0)$ не существует.

►Возможны только два случая: $f''(x_0)$ существует либо не существует. Если $f''(x_0)$ существует, то также возможны только два случая: либо $f''(x_0)$ конечна, либо $f''(x_0) = \infty$. Если $f''(x_0)$ конечна, то докажем, что $f''(x_0) = 0$.

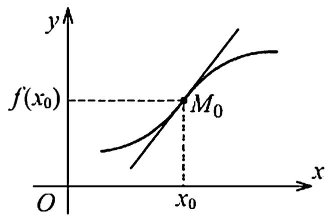


Рис. 5.2. К определению 5.2

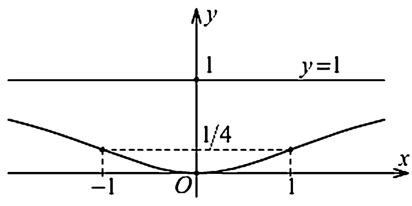


Рис. 5.3. График функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$

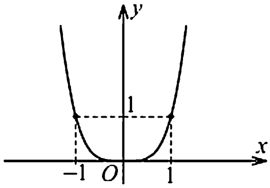


Рис. 5.4. *График функции* $f(x) = x^4$

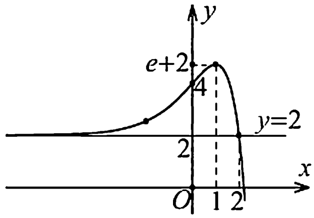


Рис. 5.5. *График функции* $f(x) = (2 - x)e^x + 2$

Для упрощения доказательства ограничимся случаем, когда $f''(x)$ непрерывна в точке x_0. Предположим противное, что $f''(x_0) \neq 0$. В силу непрерывности второй производной в точке x_0 и теоремы о сохранении знака функции, непрерывной в точке (теорема 3.3, гл. 4, разд. 4) найдётся окрестность $U(x_0)$ точки x_0, в которой $f''(x)$ не меняет знака. Тогда график функции $f(x)$ в пределах этой окрестности имеет одно и то же направление выпуклости. Это противоречит наличию перегиба в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, остаётся принять то, что требовалось доказать.◄

Определение 5.3. Точки из области определения функции $f(x)$, в которых её вторая производная равна нулю, бесконечности или не существует, называются *точками, подозрительными на перегиб.*

При исследовании функции $f(x)$ на направление выпуклости её графика и существование точек перегиба из области определения этой функции выделяют точки (определение 5.3), где график может иметь перегиб.

Замечание 5.2. Не в любой точке, подозрительной на перегиб, график функции имеет перегиб. Для функций $y = x^3$ и $y = x^4$ точка $x = 0$ подозрительна на перегиб: $(x^3)'' = 6x = 0$ и $(x^4)'' = 12x^2 = 0$ при $x = 0$, но для графика первой из них она точка перегиба, а для графика второй – нет (рис. 3.2, 5.4).

Теорема 5.3 (*достаточное условие существования точки перегиба графика функции*). Пусть x_0 – точка, подозрительная на перегиб графика функции $f(x)$, и данная функция имеет вторую производную на некоторой проколотой окрестности точки x_0. Если при переходе аргумента x через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то x_0 является абсциссой точки перегиба $M_0(x_0, f(x_0))$ графика данной функции.

►В самом деле, в точке M_0 меняется направление выпуклости графика (теоремы 5.1), что и означает, что M_0 – точка перегиба (определение 5.2).◄

Пример 5.2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = (2 - x)e^x + 2$.

►$D(f)=\boldsymbol{R}$, $f'(x) = (1-x)e^x$ (пример 4.1), $f''(x)=((1-x)e^x)' = -xe^x$ $f''(x) = 0$ при $x = 0$ – в точке $(0, f(0))$ график может иметь перегиб. Так как $f''(x) > 0$ при $x < 0$ и $f''(x) < 0$ при $x > 0$, поэтому при $x < 0$ в силу теоремы 5.1 график направлен выпуклостью вниз, а при $x > 0$ – выпуклостью вверх, а $(0, f(0))$ – точка перегиба графика по определению 5.2 (рис. 5.5, $f(0) = 4$).◄

§ 6. Асимптоты графика функции

Определение 6.1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 бесконечен, то прямая L: $y = x+\pi/2$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$.

Прямая L: $x = 1$ – вертикальная асимптота графиков функций $f(x) = 1/(x-1)$ и $g(x) = 1/(x-1)^2$, ибо односторонние пределы этих функций в точке $x = 1$ бесконечны: $f(1\pm 0) = \pm\infty$, $g(1\pm 0) = +\infty$ (рис. 6.1, 6.2).

Замечание 6.1. Вертикальные асимптоты графика данной функции проходят через её точки разрыва 2-го рода, ибо точка x_0 из определения 6.1 есть точка разрыва 2-го рода функции $f(x)$ (§ 2, гл. 3, разд. 3).

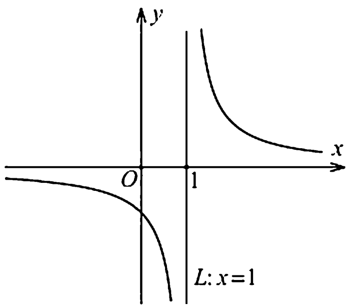


Рис. 6.1. График функции f(x) = 1/(x–1)

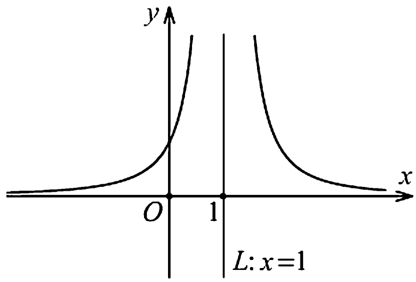


Рис. 6.2. График функции f(x) = /(x–1)²

Пример 6.1. Найти вертикальные асимптоты графика функции $f(x) = x/\ln|x|$.

► $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $f(x)$ – нечётная функция, ибо $f(-x) = -f(x)$, её график симметричен относительно начала координат. На $D(f)$ функция непрерывна как элементарная, $x = 0$, $x = \pm 1$– точки разрыва непрерывности. Прямая $x=1$ – вертикальная асимптота графика функции, так как $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x}{\ln|x|} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x}{\ln|x|} = +\infty$. В силу симметрии графика прямая $x = -1$ – также вертикальная асимптота графика. В точке $x = 0$ данная функция имеет устранимый разрыв, ибо $\lim\limits_{x\to\pm 0} \dfrac{x}{\ln|x|} = 0$, поэтому через эту точку не проходит вертикальная асимптота (7.2). ◄

Определение 6.2. Пусть функция $f(x)$ определена для сколь угодно больших по модулю значений x. Прямая L: $y = kx+b$ называется *асимптотой графика* функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = kx+b + \alpha(x), \tag{6.1}$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

Замечание 6.2. Если угловой коэффициент k асимптоты L: $y = kx+b$ равен нулю, то она называется *горизонтальной*, если же $k \neq 0$, то асимптота называется *наклонной*.

Замечание 6.3. Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$ (теорема 4.3, гл. 3, разд. 4). Тогда из определения 6.2 следует, что прямая L: $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика $f(x)$.

Например, прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота графика функции $f(x) = 1/(x-1)$ (рис. 6.1), ибо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1/(x-1) = 0$, а прямая $y=1$ – горизонтальная асимптота графика функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$ (рис. 5.3), ибо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2+3} = 1$.

График функции $f(x)$ может иметь различные горизонтальные асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Так, прямая L: $y=2$ – горизонтальная асимптота графика функции $f(x) = (2-x)e^x + 2$ при $x \to -\infty$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$)), однако она не является асимптотой этого графика при $x \to +\infty$ (рис. 5.5).

Пример 6.2. Используя определение 6.2, найти наклонные асимптоты графика функции $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$.

► $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$, поэтому $\operatorname{arctg} x = \pi/2 + \alpha(x)$, $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (теорема 4.3, гл. 3, разд. 4). Отсюда имеем: $f(x) = x + \pi/2 + \alpha(x)$. Из определения 6.2 следует, что прямая L: $y = x + \pi/2$ – наклонная асимптота графика $f(x)$ при $x \to +\infty$. Аналогично можно показать, что прямая L: $y = x - \pi/2$ – наклонная асимптота графика $f(x)$ при $x \to -\infty$. ◄

Теорема 6.1. Для того чтобы прямая L: $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{6.2}$$

Замечание 6.4. Теорема 6.1 остаётся справедливой и для случая $x \to -\infty$. График функции $f(x)$ может иметь различные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, пределы из равенств (6.2) отдельно рассматриваются для каждого из этих случаев.

Пример 6.3. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

► График $f(x)$ не имеет вертикальных асимптот, ибо функция не имеет точек разрыва 2-го рода. Вычислим для $f(x)$ пределы из равенств (6.2). Имеем

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1/x^2+1}}{x} =$$

$$= \begin{cases} -1, & x \to -\infty, \\ +1, & x \to +\infty. \end{cases}$$

Получили два значения k: $k_1 = -1$ (при $x \to -\infty$) и $k_2 = 1$ (при $x \to +\infty$). С каждым из них вычислим второй из пределов (6.2):

а) $k_1 = -1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{1+x^2} + x) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0 \Rightarrow b_1 = 0$;

б) $k_2 = +1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0 \Rightarrow b_2 = 0$.

Заключаем, что график данной функции имеет две наклонных асимптоты L_1: $y = -x$ при $x \to -\infty$ и L_2: $y = x$ при $x \to +\infty$ (рис. 6.3). ◄

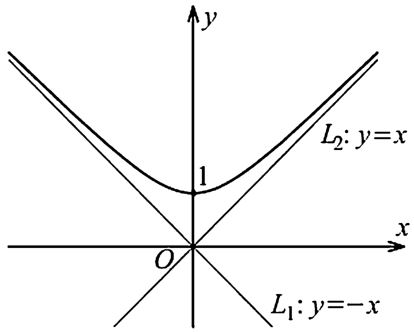


Рис. 6.3. *График функции* $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

Геометрическая интерпретация понятия асимптоты

Каждое из определений 6.1 и 6.2 допускает одну и ту же геометрическую трактовку: расстояние d точки $M(x, f(x))$ графика Г функции $f(x)$ до прямой L, являющейся асимптотой графика Г, стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат.

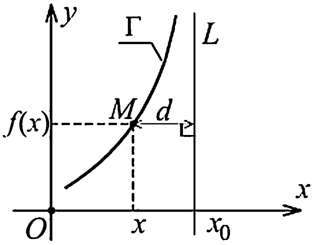


Рис. 6.4. *К геометрической интерпретации понятия вертикальной асимптоты*

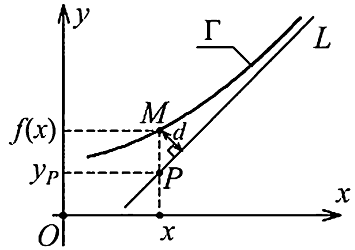


Рис. 6.5. *К геометрической интерпретации понятия наклонной асимптоты*

В самом деле, пусть прямая L: $x=x_0$ – вертикальная асимптота графика функции $f(x)$, тогда $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0-0$ или при $x\to x_0+0$, поэтому точка $M(x,f(x))$ неограниченно удаляется от начала координат, и в то же время $d=|x-x_0|\to 0$ (рис. 6.4).

Пусть прямая L: $y=kx+b$ – наклонная асимптота графика Г данной функции при $x\to+\infty$. Опустим из точки $M\,(x,f(x))\in$ Г перпендикуляр на ось Ox и через $P(x, y_p)$ обозначим точку его пересечения с асимптотой L (рис. 6.5), при этом $y_p = kx+b$. При $x\to+\infty$ точка $M(x,f(x))$ неограниченно удаляется от начала координат, а $MP=|f(x)-y_P|=|f(x)-kx-b|\to 0$ (определение 6.2). Так как $0\le d\le MP$ (рис. 6.5), то заключаем, что $d\to 0$ при $x\to+\infty$.

Замечание 6.5. Геометрическая интерпретация понятия асимптоты используется при построении математических эскизов графиков функций.

Замечание 6.6. Формула (6.1) является асимптотическим разложением функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ (§ 9, гл. 2, разд. 3). Линейная функция $g(x)=kx+b$ из этой формулы может служить аппроксимацией $f(x)$ при достаточно больших по модулю значениях аргумента x.

§ 7. Общий план исследования функции и построение её графика

План-схема исследования функции обобщает результаты, изложенные в предыдущих параграфах. Исследование функции по этому плану позволит построить обоснованный математический эскиз графика функции.

План исследования функции

1. Отыскание области определения данной функции $y=f(x)$, установление свойств чётности (нечётности) и периодичности.

2. Отыскание точек пересечения графика функции с осями координат и промежутков знакопостоянства.

3. Исследование функции на непрерывность и существование асимптот.

4. Отыскание промежутков монотонности и точек экстремума.

5. Отыскание промежутков одинаковой направленности выпуклости графика функции и точек перегиба.

6. Построение математического эскиза графика функции и отыскание множества её значений.

Пример 7.1. Построить график функции $f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{2(x-1)^2}$.

►**1.** $D(f)=(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

2. График пересекает оси координат в точках (2, 0) и (0, –4), $f(x)<0$ при $x<2, f(x)>0$ при $x>2$.

3. На $D(f)$ функция непрерывна как элементарная, $x=1$ – точка разрыва 2-го рода ($\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{(x-2)^3}{2(x-1)^2}=-\infty$), прямая $x=1$ – вертикальная асимптота графика функции (замечание 6.1). Вычисляя пределы (6.2), имеем

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-2)^3}{2x(x-1)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow k=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-2)^3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^2+11x-8}{2(x-1)^2}=$$

$=-2\Rightarrow b=-2$. Прямая L: $y=x/2-2$ – наклонная асимптота графика (теорема 6.1).

4. $f'(x)=\left(\dfrac{(x-1)^3}{2(x-1)^2}\right)'=\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{2(x-1)^3}$, на $D(f)$ две критические точки: $x=-1$, $x=2$, $f'(-1)=f'(2)=0$. Вместе с точкой $x=1$ они делят ось Ox на 4 промежутка: $(-\infty,-1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$. Знак $f'(x)$ в каждом из них приведён в табл. 7.1. Характер изменения функции указан стрелками, $\nexists$ – символ несуществования, $x=-1$ – точка гладкого максимума, а в точке $x=2$ нет экстремума, ибо $f'(x)$ не меняет знака при переходе аргумента x через эту точку.

Таблица 7.1

x		-1		1		2	
$f'(x)$	+	0	–	$\nexists$	+	0	
$f(x)$	$\nearrow$	$-27/8$ max	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

5. $f''(x)=\left(\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{2(x-1)^3}\right)'=\dfrac{3(x-2)}{(x-1)^4}$, $x=2$ – единственная точка, подозрительная на перегиб, $f''(2)=0$. Вместе с точкой $x=1$ она делит ось Ox на три промежутка: $(-\infty,1)$, $(1, 2)$, $(2,+\infty)$ указано направление выпуклости графика функции, (2, 0) – точка перегиба графика. Знак $f''(x)$ в каждом из них приведён в табл 7.2. В ней дугами указано направление выпуклости графика, (2, 0) – точка перегиба.

Таблица 7.2

x		1		2	
$f''(x)$	–	$\nexists$	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	$\nexists$	$\cap$	0	$\cup$

6. Результаты исследований используем для построения графика данной функции. Сначала строим асимптоты, точку максимума и точку перегиба, затем строим график функции с учётом характера поведения функции на $D(f)$ (табл. 7.1) и направления выпуклости графика (таблица 7.2). График функции приве-

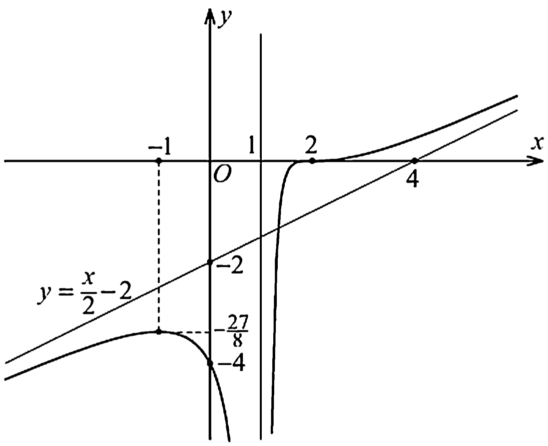


Рис. 7.1. *График функции* $f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{2(x-1)^2}$

дён на рис. 7.1, $E(y)=\boldsymbol{R}$.◄

Пример 7.2. Построить график функции $f(x)=\dfrac{x}{\ln|x|}$.

►**1.** $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1, 0)\cup(0, 1)\cup(1,+\infty)$, $f(x)$ – нечётная функция, ибо $f(-x)=-f(x)$, её график симметричен относительно начала координат. Исследование функции и построение графика проведём на промежутке $(0, +\infty)$, потом, используя симметрию графика, построим его и на промежутке $(-\infty, 0)$.

2. График не имеет точек пересечения с осями координат, $f(x)<0$ при $0<x<1$, $f(x)>0$ при $x>1$.

3. Данная функция непрерывна как элементарная в любой точке промежутка $(0, +\infty)$, кроме точки $x = 1$, где она имеет разрыв. Прямая $x = 1$– вертикальная асимптота графика функции, ибо $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x}{\ln|x|}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x}{\ln|x|}=+\infty$. В точке $x=0$ данная функция имеет правосторонний устранимый разрыв, так как $\lim\limits_{x\to +0}\frac{x}{\ln x}=0$, поэтому через эту точку не проходит вертикальная асимптота.

Вычисляя пределы (6.2), имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0\Rightarrow k=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=[\frac{\infty}{\infty}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$. В соответствии с теоремой 6.1 заключаем, что график функции при $x\to+\infty$ не имеет наклонных и горизонтальных асимптот.

Таблица 7.3

x	0		1		e	
$f'(x)$	∄	–	∄	–	0	+
$f(x)$	∄	↘	∄	↘	e min	↗

4. $f'(x)=(x/\ln x)'=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$, на промежутке (0б $+\infty$) есть только одна критическая точка: $x=e$, $f'(e)=0$. Вместе с точкой $x=1$ она разбивает его на три промежутка: (0,1), (1, e), (e, $+\infty$). Определив в каждом из них знак $f'(x)$, результаты сведём в табл. 7.3. В ней стрелками указан характер изменения функции на данном промежутке, ∄ – символ несуществования. В точке $x=e$ функция имеет гладкий минимум.

Таблица 7.3

x	0		1		e	
$f'(x)$	∄	–	∄	–	0	+
$f(x)$	∄	↘	∄	↘	e min	↗

5. $f''(x)=\left(\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\right)'=\frac{-\ln x+2}{\ln^3 x}$, $f''(x)=0$ при $x=e^2$, в этой точке график функции может иметь перегиб. Вместе с точкой $x=1$ она разбивает промежуток $(0,+\infty)$ на три промежутка: (0, 1), (1, e^2), (e^2, $+\infty$). Знак $f''(x)$ в каждом из них приведён в табл. 7.4, в ней дугами указан характер направления выпуклости графика функции, $(e^2, e^2/2)$ – точка перегиба графика.

Таблица 7.4

x		1		e^2	
$f''(x)$	–	∄	+	0	–
$f(x)$	∩	∄	∪	$e^2/2$	∩

6. Используя результаты выполненных исследований, построим график функции на промежутке (0, $+\infty$). Сначала строим асимптоты, точку минимума и точку перегиба, затем график функции с учётом характера поведения функции (таблица 7.3) и направления выпуклости графика (таблица 7.4). Часть графика данной функции, отвечающую отрицательным значениям x, получим, используя центральную симметрию. График функции приведён на рис. 7.2, $E(y)=\boldsymbol{R}$.◄

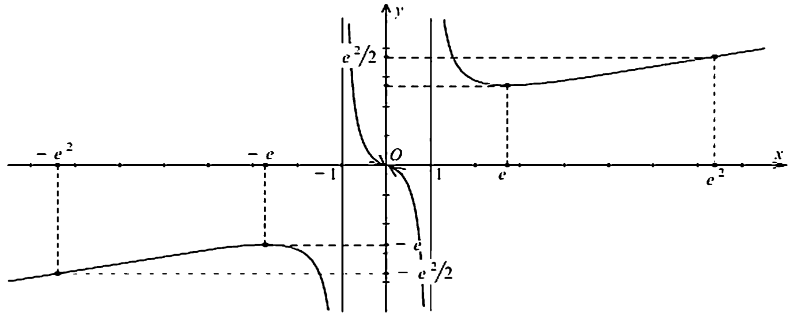


Рис. 7.2. *График функции* $f(x)=\dfrac{x}{\ln|x|}$

§ 8. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на промежутке

Понятие наибольшего и наименьшего значения функции на некотором множестве X было введено в разд. 3, гл. 1, § 7.

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, в силу теоремы Вейерштрасса (теорема 4.2, гл. 4, разд. 3), принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения ($M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), за исключением, быть может, конечного числа точек, то отыскание M и m производится по следующему алгоритму.

1. На интервале (a, b) находим критические точки (подозрительные на экстремум): $x_1, x_2, \ldots x_n$.

2. Вычисляем значения функции $f(x)$ в этих точках и на концах отрезка $[a, b]$:

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b). \tag{8.1}$$

3. Среди чисел (8.1) находим наименьшее и наибольшее. Наименьшее из этих чисел равно m, а наибольшее – M.

Пример 8.1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^4/4 - x^3/3 - 2x^2 + 4x + 5$ на отрезке $[-3, 3]$.

►$D(f) = \boldsymbol{R}$, $f'(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4)$, $f'(1) = f'(\pm 2) = 0$, $x = 1$ и $x = \pm 2$ – стационарные точки $f(x)$. Вычислим значения функции в стационарных точках и на концах отрезка $[-3, 3]$: $f(-2) = -13/3$, $f(2) = 19/3$, $f(1) = 83/12$, $f(2)=19/3$, $f(-3)=17/4$, $f(3)=41/4$. Теперь среди выделенных значений функции найдём наименьшее $f(-2)=-13/3$ и наибольшее $f(3)=41/4$. Итак, приходим к выводу, что $\max\limits_{x\in[-3,3]} f(x)=41/4$, а $\min\limits_{x\in[-3,3]} f(x)=-13/3$.◄

Замечание 8.1. Существование наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на интервале (a, b) не является обязательным. В прикладных задачах часто встречается случай, когда функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и имеет на нём единственную стационарную точку x_0: $f'(x_0) = 0$. Если в этой точке $f(x)$ имеет минимум, то число $f(x_0)$ является не только локальным минимумом данной функции, но и её наименьшим значением на этом интервале, наибольшего значения на рассматриваемом промежутке функция может и не иметь. Аналогично рассматривается случай, когда в точке x_0 функция имеет локальный максимум.

Глава 4. **Задания для проверки качества усвоения раздела 4**

§ 1. Задачи для самостоятельной работы

1. Найдите производные $\frac{dy}{dx}$ заданных функций:
а) $y=\mathrm{ctg}(3x^2+2\cos x)$; б) $y=e^{x^2-3\arcsin x}$; в) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$;
г) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции y = arctg$x$ в точке $x = 1$.

3. Найдите дифференциал функции а) $y=4\sqrt{7x+6}$; б) $y = (x^2 + 1)^3$.

4. Найдите y'', если $y=x^2e^{3x}$.

5. Найдите $y^{(3)}$, если $y=x\ln x$.

6. Вычислите, используя правило Лопиталя
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$.

7. С помощью формулы Маклорена или канонических разложений получите приближённую формулу (ограничиваясь членами порядка x^2) для функций:
а) $y=\sqrt{1+x}$, $|x|<1$; б) $y=\ln(1+3x)$, $|x|<1/3$.

8. Зависимость объёма продукции, выпускаемой предприятием (в тоннах в день), от численности персонала x определяется соотношением $Q(x) = 60x^2 - 5x^3/3$. Найдите наиболее оптимальную численность персонала предприятия.

9. Исследуйте функции и постройте их графики:
а) $y=\frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$; б) $y=\frac{x}{x^2-4}$.

10. Исследуйте функцию, описывающую зависимость спроса на товары первой необходимости от уровня дохода (*функция Тарнквиста*): $y=\frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1}$, $x > a_1 > c_1 > 0$, и постройте ее график (a_1 – уровень дохода, x – цена товара).

11. Найдите эластичность функции предложения $E_p(S)$, если $S(p)=bp^2+b_1p+d, b>0$.

Ответы к задачам для самостоятельной работы

1. а) $y'=-\frac{1}{\sin^2(3x^2+2\cos x)}*(6x-2\sin x)$; б) $y_x'=(2x-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}})e^{x^2-3\arcsin x}$;

в) $y' = -\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$; г) $y'_x = 1/\sqrt{a^2 + x^2}$.

2. $2x - 4y + \pi - 2 = 0$.

3. а) $dy = \dfrac{14}{\sqrt{7x+6}}dx$; б) $dy = y'dx = 6(x^2 + 1)xdx$.

4. $y'' = (9x^2 + 12x + 2)e^{3x}$.

5. $y^{(3)} = -1/x^2$.

6. а) $-1/3$; б) 1.

7. а) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$, $|x| < 1$; б) $\ln(1+3x) \approx 3x - \dfrac{9}{2}x^2$, $|x| < \dfrac{1}{3}$.

8. 24.

9. а) Максимум при $x = -2$, минимум при $x = 2$; $x = 0$ – точка перегиба; б) экстремумов нет, функция убывает на области определения; $x = 0$ – точка перегиба; прямые $x = \pm 2$ – вертикальные асимптоты, прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

10. Экстремумов нет, прямая $x = c_1$ – вертикальная асимптота, прямая $y = b_1$ – горизонтальная асимптота.

11. $E_p(S) = \dfrac{2bp^2 + b_1p}{bp^2 + b_1p + d}$.

§ 2. Контрольные вопросы к разделу 4

1. Производная функции $f(x)$ в точке x_0. Определение. Механический и геометрический смысл.

2. Напишите таблицу производных основных элементарных функций.

3. Какая функция называется дифференцируемой в точке?

4. Напишите правило для вычисления производной сложной функции $y = f(u(x))$.

5. Напишите правила для вычисления производных суммы, произведения и частного функций $u(x)$ и $v(x)$.

6. Пусть $u'(x) = -v'(x)$. Как связаны между собой функции $u(x)$ и $v(x)$?

7. Пусть $u'(x) = v'(x)$. Как связаны между собой функции $u(x)$ и $v(x)$?

8. Функция $f(x)$ имеет производную точке x_0. Напишите уравнение касательной к графику функции в этой точке.

9. Сформулируйте определение производной n – го порядка функции $y = f(x)$.

10. Сформулируйте понятие дифференциала функции $y = f(x)$?

11. Раскройте содержание понятия *«инвариантность формы дифференциала первого порядка сложной функции»*.

12. Дифференциал второго порядка. Определение.

13. Пусть $df(x) \neq 0$. Как связаны между собой дифференциал функции и ее приращение в этой точке?

14. Напишите выражение для $d^5f(x)$, если x – независимая переменная.

15. Пусть $f(x) = u(x)\cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции. Выра-

зите дифференциал $f(x)$ через дифференциалы функций $u(x)$ и $v(x)$.

16. Приведите пример функции, непрерывной в некоторой точке, но не имеющей в этой точке производной.

17. Как соотносятся понятия непрерывность и дифференцируемость функции?

18. Функция, определенная в некоторой окрестности точки $x = a$, имеет в этой точке строгий максимум. Что это означает?

19. Функция, определенная в некоторой окрестности точки $x = a$, имеет в этой точке строгий минимум. Что это означает?

20. Сформулируйте достаточное условие существования экстремум функции $f(x)$ в точке $x = a$, связанное с первой производной.

21. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, при этом $f'(x_0) = 0$. Тогда, если $f''(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет: а) максимум; б) минимум; в) ничего определенного сказать нельзя.

22. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, при этом $f'(x_0) = 0$. Тогда, если $f''(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет: а) максимум; б) минимум; в) ничего определенного сказать нельзя.

23. Раскройте содержание понятия «график функции $f(x)$ на интервале (a, b) направлен выпуклостью вверх». Сделайте чертеж.

24. Раскройте содержание понятия «график функции $f(x)$ на интервале (a, b) направлен выпуклостью вниз». Сделайте чертеж.

25. Функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$. Раскройте содержание понятия «точка $x = a$ является точкой перегиба графика функции».

26. Сформулируйте достаточное условие для того, чтобы график дважды дифференцируемой функции имел в точке $x = a$ перегиб? Каково необходимое условие того, чтобы дважды дифференцируемая в окрестности точки $x = a$ функция имела в этой точке перегиб?

27. При каком условии прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$?

28. При каком условии прямая $y = b$ является: а) правой горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$? б) левой горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$?

29. Пусть прямая $y = kx + b$ является левой наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$. Напишите выражения для коэффициентов k и b.

30. Пусть прямая $y = kx + b$ является правой наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$. Напишите выражения для коэффициентов k и b.

31. Напишите разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = e^x$.

32. Напишите разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \sin x$.

33. Напишите разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \cos x$.

34. Напишите разложение по формуле Маклорена функции $f(x) = \ln(1 + x)$.

35. Функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ производные до n - го порядка включительно. Напишите многочлен Тейлора для этой функции.

36. Напишите остаточный член в формуле Тейлора в форме Лагранжа.

37. Эластичность функции.

38. Эластичность произведения и частного функций.

§ 3. Тесты по разделу 4

Вар. № 1	**Дифференциальное исчисление функций одной переменной**
1	Найдите производную первого порядка от функции $y = e^{4x}\,\mathrm{tg}\,x$.
2	Найдите производную первого порядка от функции $y = \dfrac{x^5+5}{x^3-3}$.
3	При каком значении A выражение $A\,dx$ будет дифференциалом функции $y = 2\sin 3x + 9\arccos x + \sqrt{13}$ в точке $x = 0$?
4	Найдите производную первого порядка от функции $y = 3^{6-x} - 4$.
5	Найдите производную первого порядка от функции $y = \ln(2x^3 + x)$.
6	Найдите производную второго порядка от функции $y = \ln(e^{2x} + 1)$.
7	Найдите эластичность функции спроса $E_p(D)$ при p=10, если $D(p) = -0{,}1p^2 + 0{,}2p + 24$.
8	Найдите точки экстремума функции $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$. В ответе укажите сумму значений функции в точках минимума.
9	Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$ на отрезке $[-3; 4]$.
10	Найдите интервалы убывания функции $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$.
11	Найдите наклонные асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.
12	Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\ln(1-x)+x}$.

Вар. № 2	**Дифференциальное исчисление функций одной переменной**
1	Найдите производную первого порядка от функции $y = \sin x \cdot \ln 3x$.
2	Найдите производную первого порядка от функции $y = \dfrac{-8x}{x^2+4}$.
3	При каком значении A выражение $A\,dx$ будет дифференциалом функции $y = 3\,\mathrm{tg}\,x + \cos x - 4\sin 2x$ в точке $x = 0$?
4	Найдите производную первого порядка от функции $y = e^{\sqrt{x}} + 2$.
5	Найдите производную первого порядка от функции $y = \ln(10x^3 + 7)$.
6	Найдите производную второго порядка от функции $y = \ln(x^2 + 5)$.
7	Найдите эластичность функции предложения $E_p(S)$ при p=10, если $S(p) = 0{,}5p + 15$.
8	Найдите точки экстремума функции $y = 2 - 3x^2 - x^3$. В ответе укажите сумму значений функции в точках минимума.

9	Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)}+3$ на отрезке $[-4;\ 2]$.
10	Найдите интервалы убывания функции $y=2x^3+3x^2-5$.
11	Найдите наклонные асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$.
12	Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+x-1}{e^{2x}+x^2-1}$.

Ответы к заданиям тестов

Вариант 1

1) $y'=4e^{4x}\operatorname{tg}x+\dfrac{e^{4x}}{\cos^2 x}$. **2)** $y'=\dfrac{2x^7-15x^4-15x^2}{(x^3-3)^2}$. **3)** -5. **4)** $y'=-3^{6-x}\ln 3$.

5) $y'=\dfrac{6x^2+1}{2x^3+x}$. **6)** $y''=\dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$. **7)** -0,5%. **8)** –2. **9)** –6.

10) $(1/2;1)$. **11.** $y=x$. **12)** 0.

Вариант 2

1) $y'=\cos x\cdot\ln 3x+\dfrac{\sin x}{x}$. **2)** $y'=\dfrac{8x^2-32}{(x^2+4)^2}$. **3)** -5. **4)** $y'=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

5) $y'=\dfrac{30x^2}{10x^3+7}$. **6)** $y''=\dfrac{10-2x^2}{(x^2+5)^2}$. **7)** 0,25% . **8)** –2. **9)** –1. **10)** (–1; 0).

11) $y=x-2$. **12)** 1.

Раздел 5. **КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ**

Краткая характеристика раздела

В первой части раздела построена система $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел, по отношению к которой множество вещественных чисел $\boldsymbol{R}$ является её подмножеством: $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$. Во второй части рассматриваются вопросы, связанные с общими свойствами многочленов и с разложением рациональной дроби на целую часть и простейшие дроби.

1. Темы раздела. Комплексные числа. Многочлены. Рациональные дроби.

2. Базисные понятия. Комплексное число. Многочлен. Рациональная дробь.

3. Основные задачи. Действия с комплексными числами. Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на неприводимые множители. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби.

Глава 1. **Комплексные числа**

§ 1. Понятие комплексного числа. Действия с комплексными числами, представленными в алгебраической форме

Определение 1.1. *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара (x, y) вещественных чисел. Первое число этой пары x называют *вещественной частью* комплексного числа $z = (x, y)$ и обозначают через $\mathrm{Re}z$: $x = \mathrm{Re}z$. Второе число y называют *мнимой частью* числа z и обозначают через $\mathrm{Im}z$: $y = \mathrm{Im}z$. Множество всевозможных упорядоченных пар $z = (x, y)$ вещественных чисел называют *множеством комплексных чисел* и обозначают буквой $\boldsymbol{C}$.

Определение 1.2. Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются *равными* в том и только том случае, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число, мнимая часть которого равна нулю, т. е. комплексное число вида $z = (x, 0)$, отождествляют с вещественным числом x, при этом записывают: $(x, 0) = x$. В частности, пару $(0, 0)$ отождествляют с числом 0: $0 = (0, 0)$. Итак, множество вещественных чисел является подмножеством $\boldsymbol{C}$: $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

Комплексное число, вещественная часть которого равна нулю, т. е. комплексное число вида $z = (0, y)$, называют *чисто мнимым* числом.

На множестве комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ вводят операции сложения и умножения в соответствии со следующим определением.

Определение 1.3. *Суммой* двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число, обозначаемое $z_1 + z_2$ и определяемое равенством

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{1.1}$$

а *произведением* этих чисел – комплексное число, обозначаемое $z_1 \cdot z_2$ и определяемое равенством

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1). \tag{1.2}$$

Для произведения комплексных чисел принято также обозначение: z_1z_2.

Среди комплексных чисел особую роль играет число (0, 1). Его называют *мнимой единицей* и обозначают i: i = (0, 1). Своим названием число i обязано равенству $i^2 = -1$. Действительно, из (1.2) при $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = y_2 = 1$ получим $i^2 = i \cdot i = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1$.

Пусть $z = (x, y)$ – некоторое комплексное число. Опираясь на (1.1) и (1.2), нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0).$$

Так как $(x, 0) = x$, $(y, 0) = y$, а $(0, 1) = i$, то отсюда вытекает следующее представление числа z:

$$z = x + iy.$$

Его называют *алгебраической формой* комплексного числа $z = (x, y)$.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ – два комплексных числа, записанные в алгебраической форме. Из равенств (1.1) и (1.2) следует:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{1.3}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{1.4}$$

Свойства действий сложения и умножения

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (коммутативность).

2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$; $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (ассоциативность).

3. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ (дистрибутивность).

4. Для всякого $z \in \boldsymbol{C}$ справедливы равенства: $z + 0 = z$, $0 \cdot z = 0$, $1 \cdot z = z$.

Свойства 1 – 4 следуют из равенств (1.1) – (1.4). Очевидно, что они аналогичны свойствам действий сложения и умножения вещественных чисел, знакомых читателю по школьным учебникам.

Пусть z – некоторое комплексное число. Число $(-1) \cdot z$ обозначают через $-z$ и называют *противоположным* по отношению к z. Заметим, что

$$z + (-z) = z + (-1) \cdot z = (1-1) \cdot z = 0 \cdot z = 0.$$

Если $z = x + iy$, то $-z = (-1) \cdot (x + iy) = -x - iy$.

Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называют число $z_1 + (-z_2)$; его обозначают через $z_1 - z_2$. Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) + \big((-x_2) + i(-y_2)\big) = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2). \tag{1.5}$$

Пусть z_1 и z_2 – комплексные числа, причем $z_2 \neq 0$. *Частным* чисел z_1 и z_2 называют комплексное число z такое, что $z_1 = zz_2$. Его обозначают через $z_1 : z_2$ или через $\dfrac{z_1}{z_2}$. Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, а $z = x + iy$, то из равенства

$z_1 = zz_2$ следует: $x_2x - y_2y = x_1$, $y_2x + x_2y = y_1$. Отсюда: $x = \dfrac{x_1x_2 + y_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$, $y = \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$. Итак,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad (1.6)$$

Замечание 1.1. Из (1.3), (1.4) и (1.5) вытекает, что арифметические выкладки с комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно производить руководствуясь правилами из элементарной алгебры и учитывая значения степеней числа i:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \ldots .$$

Частное двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ можно найти, умножив числитель и знаменатель дроби z_1/z_2 на число $x_2 - iy_2$, называемое *сопряжённым* знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 - y_1y_2i^2 + x_2y_1i - x_1y_2i}{(x_2)^2 - (iy_2)^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример 1.1. Найти произведение чисел $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 3 - i$.

►Имеем $z_1z_2 = (2 + i)(3 - i) = 2 \cdot 3 + 3i - 2i - i^2 = 7 + i$.◄

Пример 1.2. Вычислить $z = (1 - 2i)^3$.

►Надо получить алгебраическую форму числа z. Воспользуемся формулой сокращенного умножения:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

положив в ней $a = 1$, $b = 2i$:

$$z = 1 - 3 \cdot (2i) + 3 \cdot (2i)^2 - (2i)^3 = 1 - 6i - 12 - 8(-i) = -11 + 2i. ◄$$

Пример 1.3. Вычислить $\dfrac{5(2+3i)}{1-2i}$ и записать в алгебраической форме.

►Умножим член дроби на число $1 + 2i$, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{5(2+3i)}{1-2i} = \frac{5(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5(2+7i+6i^2)}{1^2-(2i)^2} = \frac{5(-4+7i)}{5} = -4 + 7i. ◄$$

Замечание 1.2. Неравенства $z_1 > z_2$ или $z_1 < z_2$ можно записывать только в том случае, когда оба эти числа вещественные; в противном случае эти записи лишены смысла. Например, если $z_1 = 1$, а $z_2 = 2 - 3i$, то справедливы неравенства $\mathrm{Re}z_1 < \mathrm{Re}z_2$ $(1<2)$ и $\mathrm{Re}z_1 > \mathrm{Im}z_2$ $(1> -3)$, но неравенства $1<2 - 3i$ или $1>2 - 3i$ смысла не имеют.

Геометрической интерпретацией множества $\boldsymbol{C}$ является *комплексная плоскость*. Так называют плоскость, на которой введена декартова прямоугольная система координат. Точку z этой плоскости с абсциссой x и ординатой y считают изображением комплексного числа $z = (x, y)$ (рис. 1.1). Итак, каждая точка этой плоскости изображает одно из комплексных чисел, и, обратно, каждое комплексное число можно представить точкой этой плоскости, причём два раз-

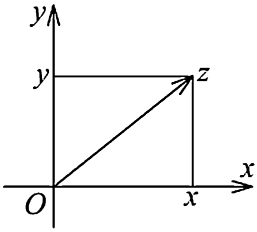


***Рис. 1.1.** К изображению комплексного числа на комплексной плоскости*

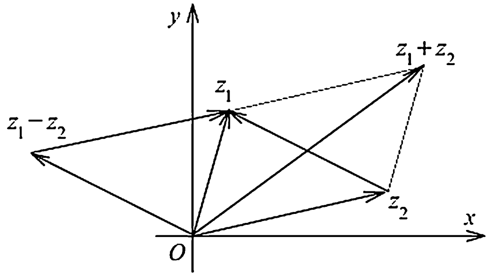


***Рис. 1.2.** Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел*

личных между собой комплексных числа изображаются двумя несовпадающими точками.

Вещественные числа $z = (x, 0)$ представлены точками оси абсцисс (в частности, числу $0 = (0, 0)$ соответствует начало координат), поэтому ось абсцисс называют *вещественной осью* комплек-сной плоскости. Ось ординат называют *мнимой осью*; её точки изображают чисто мнимые числа $z = (0, y)$, $y \neq 0$.

Другая интерпретация комплексного числа $z = (x, y)$ состоит в сопоставлении числу z радиуса-вектора точки, его изображающей (рис. 1.1). Она удобна в ряде случаев, например, при геометрической интерпретации действий сложения и вычитания комплексных чисел. В приложениях число $z = (x, y)$ изображают также свободным вектором с координатами x, y. Пусть числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ представлены радиусами-векторами точек z_1 и z_2 на комплексной плоскости (рис. 1.2). Тогда число $z_1 + z_2$ представляется вектором, совпадающим с диагональю параллелограма, построенного на векторах z_1 и z_2 (рис. 1.2). Другая диагональ этого параллелограмма совпадает с вектором, являющемся разностью радиусов-векторов точек z_1 и z_2. Равный ему вектор, построенный в начале координат, есть радиус-вектор точки, соответствующей числу $z_1 - z_2$ (рис. 1.2).

§ 2. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа

На комплексной плоскости наряду с прямоугольной декартовой системой координат введём также полярную систему координат, приняв за полюс начало декартовой системы и направив полярную ось по оси Ox. Пусть точка $z = (x, y)$ имеет полярные координаты (r, φ).

Число $r = | Oz |$ называется *модулем* числа z и обозначается символом $| z |$. Число φ, т. е. полярный угол точки, изображающей число z, называется *аргументом* числа z и обозначается $\arg z$ (рис. 2.1).

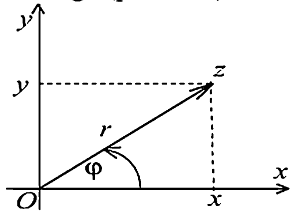


***Рис. 2.1.** К понятию модуля и аргумента комплексного числа*

Модуль комплексного числа всегда неотрицателен и определяется однозначно, аргумент определён с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$, кроме числа $z = 0$, за аргумент которого можно взять любое вещественное число. Для модуля и аргумента числа $z=(x,y)$ выполняются равенства:

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\,, \tag{2.1}$$

$$\cos\varphi=x/r,\ \sin\varphi=y/r. \tag{2.2}$$

Значение аргумента φ: $0\le \varphi<2\pi$ (или φ: $-\pi< \varphi\le \pi$) называют *главным значением* аргумента.

Замечание 2.1. При отыскании угла $\varphi = \arg z$ с помощью формул (2.2) надо удовлетворить обоим равенствам из этих формул. Комбинация знаков $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ указывает четверть, в которой расположен угол φ. В соответствии с этим расположением и определяется значение $\varphi = \arg z$.

Пример 2.1. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z=-3+i\sqrt{3}$.

► Из (2.1) имеем $r=|z|=\sqrt{(-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3}$. В силу (2.2) получаем $\cos\varphi=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$, угол φ расположен во второй четверти. Отсюда $\varphi=\arg z=5\pi/6+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{Z}$.◄

Замечание 2.2. Расстояние между точками комплексной плоскости z_1 и z_2 равно $|z_1-z_2|$ – модулю разности чисел z_1 и z_2 (рис. 1.2).

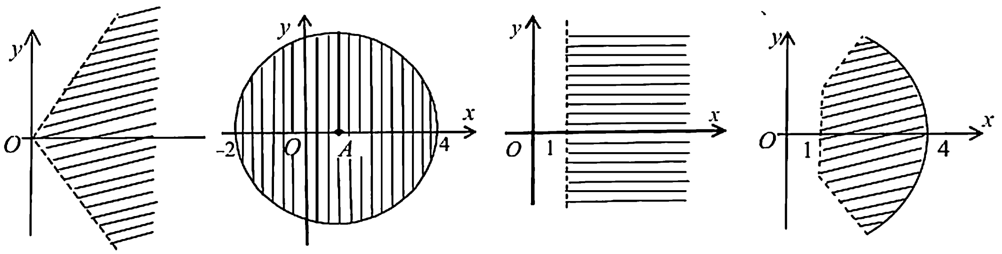
Замечание 2.3. Для любых комплексных z_1 и z_2 верно неравенство

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|,$$

называемое *неравенством треугольника*, ибо на него можно смотреть, как на неравенство, связывающее длины сторон треугольника, лежащего на комплексной плоскости, вершины которого есть точки O, z_1 и z_1+z_2 (рис. 1.2).

Пример 2.2. Изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям: $-\pi/3< \varphi < \pi/3$, $|z-1|\le 3$, $\mathrm{Re}z > 1$.

►Множество, описываемое первым неравенством, есть часть комплексной плоскости, покрываемая лучами, исходящими из точки O и имеющими всевозможные углы наклона к оси Ox из промежутка $(-\pi/3,\ \pi/3)$ (рис. 2.2а). Левая часть второго неравенства есть расстояние между точками комплексной плоскости, изображающими числа $z = x + iy$ и 1. Оно не должно быть больше 3, поэтому описываемое множество есть часть комплексной плоскости, находящаяся внутри круга радиуса 3 и с центром в точке $A(1, 0)$ (рис. 2.2б).



а) б) в) г)

Рис. 2.2. К примеру 2.2

Множество, описываемое третьим неравенством, состоит из тех точек комплексной плоскости, абсциссы которых больше 1 (рис. 2.2в). Итак, искомое множество состоит из тех и только тех точек плоскости, которые принадлежат одновременно трём построенным областям (рис. 2.3г).◄

Пусть $z = (x, y) = x + iy$ – отличное от нуля комплексное число, $\varphi = \arg z$, $r = |z|$. Учитывая равенство (2.2), можем записать

$$z = x + iy = r\big(x/r + i(y/r)\big) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Выражение $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют *тригонометрической формой* числа z; здесь $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ (одно из значений аргумента z, любое), при этом имеется в виду, что задано именно φ, а не $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Пример 2.3. Представить в тригонометрической форме число $z = -3 + i\sqrt{3}$.

► $r = 2\sqrt{3}$, $\varphi = 5\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (пример 2.1). Положив $\arg z = 5\pi/6$, получим $z = 2\sqrt{3}\big(\cos 5\pi/6 + i\sin 5\pi/6\big)$.◄

§ 3. Действия с комплексными числами, представленными в тригонометрической форме

1. Умножение комплексных чисел. Пусть отличные от нуля комплексные числа z_1 и z_2 записаны в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2). \tag{3.1}$$

Найдем тригонометрическую форму произведения $z_1 z_2$. Имеем:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\ (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \text{ Отсюда:}$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big). \tag{3.2}$$

Правая часть равенства (3.2) является тригонометрической формой числа $z_1 z_2$. Из (3.2) следует:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = r_1 r_2; \quad \arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

При умножении комплексных чисел z_1, z_2 их модули перемножаются, а аргументы складываются (точнее: сложив аргументы сомножителей, получаем одно из значений $\arg(z_1 z_2)$). Геометрически умножение z_1 на z_2 сводится к повороту вектора z_1 на угол $\arg z_2$ и к изменению длины вектора z_1 в $|z_2|$ раз.

2. Деление комплексных чисел. Найдём частное z_1/z_2, где z_1 и z_2 заданы равенствами (3.1). Имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \text{ Значит,}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \qquad (3.3)$$

причём правая часть этого равенства является тригонометрической формой числа $z_1\,/\,z_2$. Таким образом, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются (точнее: при вычитании из аргумента числителя аргумента знаменателя получается одно из значений аргумента частного).

Пример 3.1. $z_1=1-i$, $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Записать z_1z_2 и $\frac{z_1}{z_3}$ в тригонометрической форме.

► Найдём модули и аргументы данных чисел по формулам (2.1), (2.2) и представим их в тригонометрической форме:

$$|z_1|=\sqrt{2},\ \arg z_1=-\pi/4;\ |z_2|=|z_3|=1;\ \arg z_2=\pi/4;\ \arg z_3=\pi/3,$$

$$z_1=\sqrt{2}\cdot(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4);\ z_2=\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4);$$

$$z_3=\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3).$$

Теперь выполним умножение и деление:

$$z_1z_2=\sqrt{2}\cdot1\cdot(\cos(-\pi/4+\pi/4)+i\sin(-\pi/4+\pi/4))=\sqrt{2}(\cos0+i\sin0);$$

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{\sqrt{2}}{1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{7}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{12}\pi\right)\right).$$ ◄

3. Формула Муавра. Пусть $z\neq0$, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, n – натуральное число. Степень z^n представляет собой произведение n одинаковых множителей, поэтому z^n можно вычислить по формуле (3.2):

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (3.4)$$

Определим целые неположительные степени комплексного числа z, $z\neq0$. По определению положим $z^0=1$ и $z^{-n}=1/z^n$ для всякого $n\in\boldsymbol{N}$. Заметим: если $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, а $n\in\boldsymbol{N}$, то, используя формулу (1.6), получим

$$z^{-n}=\frac{1}{r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}=\frac{1}{r^n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)=r^{-n}(\cos(-n)\varphi+i\sin(-n)\varphi).$$

Итак, равенство (3.4) верно при любых целых n. Это равенство называют *формулой Муавра*; его правая часть представляет собой тригонометрическую форму числа z^n, $n\in\boldsymbol{Z}$. Заметим, что $|z^n|$ равен $|z|^n$. Если $\varphi=\arg z$, то $n\varphi$ есть одно из значений $\arg(z^n)$. В частности, при $r=1$ из (3.4) имеем

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \qquad (3.5)$$

4. Извлечение корня из комплексного числа.

Определение 3.1. Пусть $n\in\boldsymbol{N}$, $n\geq2$. *Корнем n – й степени* из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее равенству

$$w^n=z. \qquad (3.6)$$

Обозначение: $w=\sqrt[n]{z}$.

Покажем, что корень n – й степени из любого комплексного числа существует и имеет ровно n различных значений, за исключением случая $z=0$. Положим: $w=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Равенство (3.6) в силу формулы Муавра эквивалентно следующему:

$$\rho^n(\cos n\psi+in\sin\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (3.7)$$

Два комплексных числа равны только в том случае, когда равны их модули, а аргументы отличаются на слагаемое, кратное 2π, поэтому из (3.7) имеем: $\rho^n = r$, $n\psi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Отсюда получаем:

$$\rho = \sqrt[n]{r} \text{ (корень арифметический)}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Итак, корень n – й степени из числа z существует и имеет значения:

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \mathbf{Z}. \tag{3.8}$$

В случае $z = 0$, очевидно, $\rho = 0$ и $w = 0$ – единственное значение $\sqrt[n]{0}$. Покажем, что при $z \neq 0$ среди чисел, определяемых (3.8), ровно n различных. Положив в (3.8) $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, получим n различных значений $\sqrt[n]{z}$:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.9}$$

Если k не совпадает ни с одним из чисел 0, 1, 2, …, n –1, то соответствующее ему значение $\sqrt[n]{z}$ в силу периодичности синуса и косинуса будет совпадать с одним из чисел в (3.9). Например, $w_n = w_0$, $w_{n+1} = w_1$ и т. д. Таким образом, показано, что все различные значения корня n – ой степени из числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ содержатся в формуле (3.9). Модуль любого из них равен $\sqrt[n]{r}$ (имеется в виду арифмети-ческий корень), а аргументы соседних значений отличаются на одно и то же число $2\pi/n$, так что все они лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке z = 0 и делят эту окружность на n равных дуг (рис. 3.1).

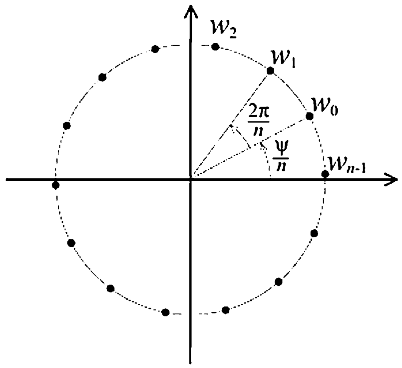


***Рис. 3.1**. Расположение корней степени n из числа z*

Пример 3.2. Найти все значения $\sqrt[n]{1}$.

►Обозначим $w = \sqrt[n]{1}$ и представим число 1 в тригонометрической форме $1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$. Так как $r = 1$; $\varphi = \arg 1 = 0$, то в силу (3.9) имеем

$$w_k = \sqrt[n]{1}\cdot\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{n}\right) = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

При $n = 2$ и $k = 0, 1$, получаем два значения корня квадратного из единицы: $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$; $z_1 = \cos 2\pi/2 + i\sin 2\pi/2 = -1$.

При $n = 3$ и $k = 0, 1, 2$, имеем три значения корня кубического из единицы:

$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$
$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Эти три точки делят единичную окружность на три равные дуги.◄

Пример 3.3. Найти значения $\sqrt{-1}$.

►Эти значения можно было бы найти из формулы (3.9), но проще использовать определение 3.1. Поскольку $i^2 = (-i)^2 = -1$, то $\sqrt{-1} = \pm i$.◄

Замечание 3.1. Квадратное уравнение $x^2 + a^2 = 0$, где $a > 0$, имеет корни $x = \pm ai$. Действительно, $x = \sqrt{-a^2} = \sqrt{(-1)a^2} = a\sqrt{-1} = \pm ai$. Отметим, что на множестве вещественных чисел это уравнение не имеет корней.

Замечание 3.2. На множестве комплексных чисел любое квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (3.9)$$

имеет корни. При $D = b^2 - 4ac \geq 0$ они вещественные, а при $D = b^2 - 4ac < 0$ – комплексные. Найдем корни уравнения (3.9) в случае $D < 0$. Используем известную формулу для корней квадратного уравнения и пример 3.3:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)|D|}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Пример 3.4. Найти корни уравнения $x^2 + 2x + 5 = 0$.

► $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm \sqrt{(-1)\cdot 4} = -1 \pm i\sqrt{4} = -1 \pm 2i.$◄

§ 4*. Комплексная степень числа *e*. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа

Определение 4.1. Пусть $z = x + iy$. Число $e^x(\cos y + i\sin y)$ называют *комплексной степенью* числа e или *экспонентой* от z и обозначают через $\exp z$ или e^z. Таким образом, операция возведения числа e в комплексную степень $z = x + iy$ определяется формулой:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (4.1)$$

Например,

$$e^{2+3i} = e^2(\cos 3 + i\sin 3),\ e^{\pi i/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i,\ e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

При $z = i\varphi$ из (4.1) следует равенство:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (4.2)$$

которое называется *формулой Эйлера*.

Свойства комплексной степени числа е

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, $e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}$.

2. Если $z = x + 0\cdot i$, то $e^z = e^{x+0\cdot i} = e^x$, т. е. для вещественных значений z комплексная степень числа e есть степень с вещественным показателем;

3. Для любого комплексного числа z справедливо равенство:

$$e^{z+2\pi ni}=e^{z}, \quad n\in \boldsymbol{Z}.$$

Эти свойства можно доказать с помощью определения 4.1.

Пусть $z\in \boldsymbol{C}$, $z\neq 0$. Запишем это число в тригонометрической форме: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r=|z|$, $\varphi=\arg z$. Отсюда и из формулы Эйлера (4.2) вытекает следующее представление числа z:

$$z=re^{i\varphi},$$

которое называют *показательной формой* комплексного числа z.

Глава 2. **Алгебраические многочлены и рациональные алгебраические дроби**

§ 1. Условие тождественного равенства двух многочленов

Пусть n – заданное натуральное число, а $p_0, p_1, \ldots, p_n$ – заданные комплексные числа, при этом $p_0\neq 0$. Функция

$$p_0z^n + p_1z^{n-1} +\ldots+ p_{n-1}z + p_n,$$

где z – любое комплексное число, называется *алгебраическим многочленом степени n* и обозначается через $P_n(z)$:

$$P_n(z)=p_0z^n+p_1z^{n-1}+\ldots+p_{n-1}z+p_n=\sum_{k=0}^{n}p_kz^{n-k}.$$

Числа p_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ называются *коэффициентами* многочлена $P_n(z)$, а p_0– его *старшим коэффициентом*. Если $p_0=p_1=\ldots=p_{n-1}=0$, то $P_n(z)$ называется многочленом нулевой степени, в этом случае $P_n(z)\equiv p_n$ при всех $z\in \boldsymbol{C}$.

Теорема 1.1. Многочлен $P_n(z)=p_0z^n+p_1z^{n-1}+\ldots+p_{n-1}z+p_n$ равен нулю для $\forall z\in \boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда равны нулю все его коэффициенты.

►Очевидно, если $p_0=p_1=\ldots=p_{n-1}=p_n=0$, то $P_n(z)\equiv 0$ на $\boldsymbol{C}$.

Обратное утверждение доказано, например, в [13].◄

Теорема 1.2 (*о тождественном равенстве двух многочленов*). Два многочлена

$$P_n(z)=p_0z^n+p_1z^{n-1}+\ldots+p_{n-1}z+p_n \text{ и } Q_n(z)=q_0z^n+q_1z^{n-1}+\ldots+q_{n-1}z+q_n$$

равны при $\forall z\in \boldsymbol{C}$ тогда и только тогда, когда равны все их коэффициенты при соответствующих степенях z, т. е. $p_k=q_k$, $k=0,1,\ldots,n$.

►Очевидно, если $p_k=q_k$, $k=0,1,\ldots,n$, то $P_n(z)\equiv Q_n(z)$ на $\boldsymbol{C}$.

Пусть теперь $P_n(z)\equiv Q_n(z)$ на $\boldsymbol{C}$. Рассмотрим многочлен

$$T_n(z)=P_n(z)-Q_n(z)=$$
$$=(p_0-q_0)z^n+(p_1-q_1)z^{n-1}+\ldots+(p_{n-1}-q_{n-1})z+(p_n-q_n).$$

Так как $T_n(z)\equiv 0$, то $p_k-q_k=0$, $k=0, 1, \ldots, n$ (теорема 1.1), отсюда $p_k=q_k$, $k=0, 1, \ldots, n$.◄

Теорема 1.2 является теоретической базой для *метода сравнения коэффициентов*, который будет рассмотрен далее.

§ 2. Разложение алгебраического многочлена на линейные множители. Число корней многочлена

Пусть $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} p_k z^{n-k}$ – многочлен степени не выше n, а a – некоторое комплексное число.

Определение 2.1. Число a, $a\in \boldsymbol{C}$, называют *корнем* алгебраического многочлена $P_n(z)$, если $P_n(a)=0$, т. е. если $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k a^{n-k}=0$.

Теорема 2.1 (*теорема Гаусса*, К. Гаусс (1777 – 1855) – немецкий математик, астроном, физик). Всякий алгебраический многочлен степени n, $n\geq 1$, на множестве комплексных чисел имеет хотя бы один корень.

Доказательство теоремы Гаусса проводится методами теории функций комплексной переменной.

Теорема 2.2. Для любого многочлена $P_n(z)$ и числа $a\in \boldsymbol{C}$ найдутся многочлен $Q_{n-1}(z)$ и число $c\in \boldsymbol{C}$ такие, что будет выполняться равенство

$$P_n(z)=(z-a)\,Q_{n-1}(z)+c. \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) означает, что любой многочлен $P_n(z)$ можно разделить на разность $z-a$. Число c называется *остатком*.

Теорема 2.3 (*теорема Безу*, Э. Безу (1730 – 1783) – французский математик). Для того чтобы многочлен $P_n(z)$ делился на разность $z-a$ без остатка, необходимо и достаточно, чтобы число a было корнем многочлена $P_n(z)$.

►*Необходимость.* Пусть $P_n(z)$ делится на на разность $z-a$ без остатка, т. е. в (2.1) $c=0$. Тогда из (2.1) следует равенство $P_n(z)=(z-a)\,Q_{n-1}(z)$, положив в нем $z=a$, получаем $P_n(a)=0$. Приходим к выводу, что $z=a$ – корень $P_n(z)$.

Достаточность. Пусть $z=a$ – корень $P_n(z)$, т. е. $P_n(a)=0$. Положив в (2.1) $z=a$, получим т. е. $0=c$. Заключаем, что $P_n(z)$ делится на разность $z-a$ без остатка.◄

Теорема 2.4. Любой многочлен $P_n(z)$ степени $n\geq 1$ можно представить в виде

$$P_n(z)=p_0(z-a_1)\,(z-a_2)\ldots(z-a_n), \tag{2.2}$$

где a_1, $a_1,\ldots,$ a_n – корни многочлена, p_0 – коэффициент при старшей степени z. Равенство (2.2) называется *разложением многочлена $P_n(z)$ на линейные множители.*

Следствие из теоремы 2.3. Алгебраический многочлен степени n, $n\geq 1$, имеет не более чем n попарно различных корней.

►Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что, кроме a_1, a_1, …, a_n, многочлен $P_n(z)$ имеет ещё один корень a_{n+1}, причём

$$a_{n+1}\neq a_k,\ \ k=1,\ldots,n. \tag{2.3}$$

Подставим $z=a_{n+1}$ в разложение (2.2):

$$P_n(a_{n+1})=p_0(a_{n+1}-a_1)\,(a_{n+1}-a_1)\ldots((a_{n+1}-a_n).$$

Отсюда в силу (2.3) приходим к выводу: $P_n(a_{n+1})\neq 0$. Полученное противоречие с предположением a_{n+1}– корень $P_n(z)$ доказывает теорему.◄

Пример 2.1. Многочлен $P_5(z) = z^5 + z^4 +2z^3 + 2z^2 + 1$ разложить на $\boldsymbol{C}$ на произведение линейных множителей.

►Как нетрудно убедиться, число $z = -1$ является корнем $P_5(z)$, поэтому $P_5(z)$ делится на разность $z - (-1) = z + 1$. Произведя деление, получим

$$P_5(z) = (z^4 + 2z^2 + 1)(z+1) = (z^2+1)^2(z+1) = (z+1)\big((z-i)(z+i)\big)^2 =$$
$$= (z+1)(z-i)^2(z+i)^2. ◄$$

Пример 2.2. Многочлен $P_6(z) = z^6 + 64$ разложить на $\boldsymbol{C}$ на произведение линейных множителей.

►Корни данного многочлена совпадают со значениями $\sqrt[6]{-64}$. В силу формулы (3.9) гл. 1 имеем:

$$w_k = \sqrt[6]{-64} = = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right) =$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, 5. \text{ Отсюда}$$
$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}+i, \quad w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$
$$w_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}+i, \quad w_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}-i,$$
$$w_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i, \quad w_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11}{6}\right) = \sqrt{3}-i.$$

В силу формулы (2.2) получаем разложение:

$$P_6 z) = z^6+64 = (z-2i)(z+2i)(z-\sqrt{3}-i)(z-\sqrt{3}+i)(z+\sqrt{3}-i)(z+\sqrt{3}+i). ◄$$

§ 3. Понятие кратного корня. Признак кратности корня

В разложении (2.1) некоторые множители могут оказаться равными (пример 2.1). В этом случае говорят, что многочлен имеет кратные корни.

Определение 3.1. Число a называется *кратным корнем* многочлена $P_n(z)$, если этот многочлен представим в виде

$$P_n(z) = (z-a)^k Q_{n-k}(a), \tag{3.1}$$

где $Q_{n-k}(z)$ – многочлен степени $n-k$, при этом $Q_{n-k}(a) \neq 0$. Число k называют *кратностью корня*. Если кратность корня a равна единице, то число a называют *простым корнем* многочлена $P_n(z)$.

Например, для многочлена $P_3(z) = z^3 - 3z^2 + 4$ число (-1) является простым корнем, а число 2 – корнем кратности 2, ибо этот многочлен представляется в виде $P_3(z) = (z+1)(z-2)^2$.

Пусть числа $a_1, \ldots, a_m$ – корни многочлена $P_n(z)$ с кратностями $k_1, \ldots, k_m$, при этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Разложение (2.2) в этом случае принимает вид

$$P_n(z) = p_0(z-a_1)^{k_1}(z-a_2)^{k_2}\ldots(z-a_m)^{k_m}. \tag{3.2}$$

§ 4. Разложение вещественных алгебраических многочленов на неприводимые множители на множестве вещественных чисел

Алгебраический многочлен $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} p_k z^{n-k}$ называют *вещественным многочленом*, если все его коэффициенты – вещественные числа: $p_k \in \boldsymbol{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Значения, принимаемые вещественным многочленом в точках вещественной оси, являются вещественными числами:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} x^k \in \boldsymbol{R}, \quad \forall\, x \in \boldsymbol{R}.$$

Важная особенность таких многочленов отражена следующей теоремой.

Теорема 4.1. Если число $z=\alpha+i\beta$ является корнем кратности k алгебраического вещественного многочлена $P_n(z)$ с вещественными коэффициентами, то сопряженное число $\bar{z}=\alpha-i\beta$ также является корнем $P_n(z)$ той же кратности.

Рассмотрим $P_n(z)$ – вещественный многочлен степени n, $n \geq 1$; $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $m \leq n$, – все его попарно различные корни, а $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – кратности этих корней.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_l$ – все вещественные числа в ряду $a_1, a_2, \ldots, a_m$ попарно различных корней данного многочлена $P_n(z)$, k_j – кратность x_j, $j=1, 2, \ldots, l$. Остальные числа этого ряда – комплексные с ненулевой мнимой частью. Поскольку их чётное количество (теорема 4.1), то они разбиваются на некоторое количество пар сопряжённых друг другу корней: z_1 и $\bar{z}_1$, z_2 и $\bar{z}_2$, … , z_s и $\bar{z}_s$, q_j – кратность каждого из корней z_j и $\bar{z}_j$, $j=1,2,\ldots,s$. Тогда из (3.2) получим

$$P_n(z)=p_0(z-x_1)^{k_1}\ldots(z-x_l)^{k_l}\left((z-z_1)(z-\bar{z}_1)\right)^{q_1}\ldots\left((z-z_s)(z-\bar{z}_s)\right)^{q_s},$$
$$k_1+\ldots+k_l+2q_1+\ldots+2q_s=n.$$

Отсюда, перемножив скобки с сопряженными корнями, получим

$$P_n(z)=p_0(z-x_1)^{k_1}\ldots(z-x_l)^{k_l}(z^2+b_1z+c_1)^{q_1}\ldots(z^2+b_sz+c_s)^{q_s}, \qquad (4.1)$$
$$k_1+\ldots+k_l+2q_1+\ldots+2q_s=n.$$

Это представление вещественного многочлена называют его разложением на вещественные множители, линейные и квадратные. Квадратные множители – квадратные трехчлены с вещественными коэффициентами и отрицательными дискриминантами; каждый из них имеет пару комплексных сопряженных корней с ненулевыми мнимыми частями. Разложение (4.1) называют разложением на *неприводимые множители на множестве вещественных чисел* в том смысле, что квадратные трёхчлены в (4.1) не раскладываются на линейные множители с вещественными коэффициентами.

Пример 4.1. Многочлен $P_5(z)$ из примера 2.1 является вещественным многочленом, имеет простой вещественный корень $z_1=-1$ и пару комплексных сопряженных корней $z_2=i$, $z_3=-i$ кратности 2. Следовательно

$$P_5(z)=(z+1)(z-i)^2(z+i)^2=(z+1)\left((z-i)(z+i)\right)^2=(z+1)(z^2+1)^2, \ \forall z \in \boldsymbol{C},$$

так что разложение вида (4.1) для $P_5(z)$ выглядит так: $P_5(z)=(z+1)(z^2+1)^2$.

Пример 4.2. Многочлен $P_6(z)=z^6+64$ – вещественный многочлен, у него 3 пары комплексных сопряженных корней: $z_{1,2}=\pm 2i$, $z_{3,4}=\sqrt{3}\pm i$, $z_{5,6}=-\sqrt{3}\pm i$ (пример 2.2). Объединив в разложении этого многочлена множители, соответствующие сопряжённым корням, получаем разложение вида (4.1): $P_6(z)=z^6+64=(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$.

§ 5. Рациональные алгебраические дроби. Основные понятия

В этом и следующем параграфах рассматриваются только вещественные многочлены. Вещественный многочлен $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} p_k x^{n-k}$, $p_k\in \boldsymbol{R}$, при вещественных x принимает вещественные значения. В предыдущем параграфе показано, что такой многочлен может иметь попарно сопряжённые комплексные корни с ненулевыми мнимыми частями.

Определение 5.1. Отношение $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ алгебраических многочленов $Q_m(z)$ и $P_n(z)$ степени m и n соответственно называют *рациональной функцией*.

Если степень знаменателя $n\geq 1$, то рациональную функцию называют *рациональной алгебраической дробью*, или, короче, *рациональной дробью*. В противном случае, т. е. при $n=0$, рациональная функция представляет собой многочлен (ибо $P_0(z)\equiv p_0$, где $p_0\neq 0$).

Далее рассматриваются рациональные дроби $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, $n\geq 1$. Областью определения X такой функции является вся числовая ось, за вычетом конечного множества точек – вещественных корней знаменателя $P_n(x)$.

Рациональную дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ называют *правильной*, если $m<n$ и *неправильной* в противном случае, т. е. при $m\geq n$. Неправильную рациональную дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, поделив «уголком» многочлен $Q_m(x)$ на многочлен $P_n(x)$ (в общем случае с остатком), можно представить в виде суммы алгебраического многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=T_{m-n}(x)+\frac{S_l(x)}{P_n(x)}.$$

Здесь $T_{m-n}(x)$ и $S_l(x)$ – алгебраические многочлены, причем степень l многочлена $S_l(x)$ меньше n.

Элементарными (*простейшими*) рациональными дробями называют рациональные дроби следующих четырех видов:

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Bx+C}{x^2+bx+c},\ \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k},$$

где A, B, C, a, b, c – вещественные числа, причем $b^2-4c<0$, так что трехчлен x^2+bx+c имеет комплексные корни с ненулевой мнимой частью; k – натуральное число, $k\geq 2$.

§ 6. Теорема о разложении правильной рациональной алгебраической дроби на простейшие дроби

Пусть $P_n(x)$, $n \geq 1$, – вещественный многочлен степени n, старший коэффициент которого $p_0 = 1$, и пусть получено его разложение на вещественные множители:

$$P_n(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_l)^{k_l} \times$$
$$\times(x^2+b_1x+c_1)^{q_1}(x^2+b_2x+c_2)^{q_2},...,(x^2+b_lx+c_l)^{q_l}. \tag{6.1}$$

Таким образом, $P_n(x)$ имеет l попарно различных вещественных корней x_j кратности k_j, $j=1, 2, \ldots, l$, и s пар комплексных сопряженных корней z_m, кратности q_m, $m=1, 2, \ldots, s$, при этом $k_1+k_2+\ldots+k_l+2q_1+2q_2+\ldots+2q_s=n$.

Теорема 6.1. Пусть задана правильная рациональная дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, $m < n$, знаменатель $P_n(x)$ которой представлен разложением (2.1). Существуют наборы вещественных чисел $\left\{A_{j\alpha}\right\}$, где $j=1, 2, \ldots, l$, и при каждом j индекс $\alpha=1, 2, \ldots, k_j$, а также наборы $\left\{B_{j\alpha}\right\}$ и $\left\{C_{j\alpha}\right\}$, где $j=1, 2, \ldots, s$, и при каждом j индекс $\alpha=1, 2, \ldots, q_j$, такие, что при всех x, $x\in \boldsymbol{R}$, $x \neq x_j$, справедливо равенство

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-x_1}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+$$
$$+\frac{A_{21}}{x-x_2}+\frac{A_{22}}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{A_{l1}}{x-x_l}+\frac{A_{l2}}{(x-x_l)^2}+\ldots+\frac{A_{lk_l}}{(x-x_l)^{k_l}}+$$
$$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^2}+\ldots+\frac{B_{1q_1}x+C_{1q_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{q_1}}+$$
$$+\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+b_2x+c_2}+\frac{B_{22}x+C_{22}}{(x^2+b_2x+c_2)^2}+\ldots+\frac{B_{2q_2}x+C_{2q_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{q_2}}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{B_{s1}x+C_{s1}}{x^2+b_sx+c_s}+\frac{B_{s2}x+C_{s2}}{(x^2+b_sx+c_s)^2}+\ldots+\frac{B_{sq_s}x+C_{sq_s}}{(x^2+b_sx+c_s)^{q_s}}. \tag{6.2}$$

Здесь каждому вещественному корню знаменателя $P_n(x)$ дроби соответствует строка (сумма) простейших дробей первого и второго вида с количеством слагаемых, равным кратности этого корня; каждой паре комплексно сопряженных корней $P_n(x)$, т. е. каждому квадратному множителю в формуле (4.1) соответствует строка (сумма) простейших дробей третьего и четвёртого вида с числом слагаемых, равным кратности этих корней.

Пример 6.1. Получить разложение (6.2) для дроби $1/P_5(x)$, где:
$P_5(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^5+\mathrm{x}^4+2x^3+2x^2+1$.

►Имеем (см. пример 4.1): $P_5(x)=(x+1)(x^2+1)^2$. Значит (см. (2.2)),

$$\frac{1}{P_5(x)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

где A, B, C, D, E – константы, значения которых предстоит найти. После приведения дробей в правой части к общему знаменателю получим

$$\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+1)+(Dx+E)(x+1)}{P_5(x)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^4+(B+C)x^3+(2A+B+C+D)x^2+(B+C+D+E)x+A+C+E}{P_5(x)}=\frac{T_4(x)}{P_5(x)}.$$

Приравняв коэффициенты $T_4(x)$ к соответствующим коэффициентам многочлена $Q_0(x)\equiv 1$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B & =0, \\ \quad B+C & =0, \\ 2A+B+C+D & =0, \\ \quad B+C+D+E & =0, \\ A\quad +C\quad +E & =1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем: $A = 1/4$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{4}$, $D=-\frac{1}{2}$, $E=\frac{1}{2}$. Итак,

$$\frac{1}{P_5(x)}=\frac{1}{4(x+1)}-\frac{x-1}{4(x^2+1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)^2}.$$ ◄

Глава 3. **Задания для проверки качества усвоения раздела 5**

§ 1. Задачи для самостоятельной работы

1. Пусть $z_1=1+i$, $z_2=-4+3i$. Найти z_1+z_2, z_1-z_2, $(z_1+z_2)(z_1-z_2)$, z_1/z_2.

2. Числа $z_1=1-i\sqrt{3}$, $z_2=\frac{1-i}{1+i}$, $z_3=1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$ записать в тригонометрической форме.

3. Записать в алгебраической форме числа $z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$, $z_2=\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ (использовать формулу Муавра).

4. Найти все значения следующих выражений: а) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$.

5. $z_1=1-i\sqrt{3}$, $z_2=\sqrt{3}+i$. Записать в алгебраической форме числа $z_1\cdot\bar{z}_2$; $(\bar{z}_1/z_2)^2$.

6. Числа z_1, z_2 и z_3 из п. 5 записать в показательной форме.

7. Определите кратность корня $a=1$ многочлена $P_4(z)=z^4-(2+i)z^3+(3+2i)z^2-(4+i)z+2$.

8. Числа $a_1=1$, $a_2=-i$, $a_3=2i$ – все попарно различные корни многочлена $P(z)$, причем a_1 – корень кратности 2, а a_2 и a_3 – простые корни. Запишите разложение $P(z)$ на линейные множители, если его старший коэффициент $p_0=1$; найдите его другие коэффициенты.

9. Число $a_1 = -1 + i$ является корнем многочлена $P_4(z) = z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10$; найти остальные корни $P_4(z)$, записать его разложение на вещественные множители первой и второй степени.

10. Дробь $\dfrac{z^5}{z^4 + 5z^2 + 4}$ представьте в виде суммы алгебраического многочлена и правильной дроби.

11. Дробь $1/(x^3 + 1)$ разложите в сумму элементарных дробей.

Ответы к задачам для самостоятельной работы

1. $z_1 + z_2 = -3 + 4i$; $z_1 - z_2 = 5 - 2i$; $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = -7 + 26i$; $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{1}{25} - i\dfrac{7}{25}$.

2. $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$, $z_2 = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}$, $z_3 = 2\cos\dfrac{\pi}{14}\left(\cos\dfrac{\pi}{14} + i\sin\dfrac{\pi}{14}\right)$.

3. $z_1 = 512 - 512\sqrt{3}i$; $z_2 = 2$.

4. а) $\pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i\right)$; б) $\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi}{2}k\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi}{2}k\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

5. $z_1\bar{z}_2 = -4i$; $\left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. **6.** $z_1 = 2e^{\frac{5\pi}{3}}$; $z_2 = e^{\frac{3\pi}{2}}$; $z_3 = 2\cos\dfrac{\pi}{14}e^{i\frac{\pi}{14}}$. **7.** 2.

8. $P(z) = (z-1)^2(z+i)(z-2i) = z^4 - (2+i)z^3 + (3+2i)z^2 - (4+i)z + 2$.

9. $P_4(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 + 2z + 5)$.

10. $z - \dfrac{5x^3 + 4z}{z^4 + 5z^2 + 4}$. **11.** $\dfrac{1/3}{x+1} + \dfrac{-(1/3)x + 2/3}{x^2 - x + 1}$.

§ 2. Контрольные вопросы к разделу 5

1. Дайте определение множества $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел. Какие геометрические интерпретации этого множества вам известны?

2. Что называют модулем комплексного числа $z = x + iy$?

3. Какие числа называются комплексно-сопряженными? Изобразите их на комплексной плоскости.

4. Выразите произведение $z\bar{z}$ через модуль комплексного числа $z = x + iy$.

5. Запишите условия равенства двух комплексных чисел, записанных в алгебраической форме.

6. Что называют аргументом комплексного числа $z = x + iy$, $z \neq 0$? Что такое тригонометрическая форма этого числа?

7. Запишите условия равенства двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.

8. Что происходит с модулями и аргументами комплексных чисел при их перемножении? при их делении?

9. Напишите формулу, содержащую все различные значения корня n – й степени из z.

10. Что такое корень алгебраического многочлена $P_n(z)$? Что называют кратностью корня?

11. Сформулируйте основную теорему алгебры (теорема Гаусса).

12. Сформулируйте теорему Безу и её следствие.

13. Сформулируйте теорему о комплексно-сопряженных корнях многочлена с вещественными коэффициентами.

14. Запишите разложение многочлена $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$ с корнями $z_1, \ldots, z_n$ на линейные множители.

15. Запишите разложение многочлена $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ с вещественными коэффициентами на неприводимые множители.

16. Пусть x_0 – корень многочлена $P(x)$ кратности k. Чему равна $P^{(k-1)}(x)$?

17. Что называют рациональной алгебраической дробью?

18. Какую рациональную дробь называют правильной? неправильной?

19. Какие дроби называют элементарными рациональными алгебраическими дробями?

20. Напишите формулу, связывающую неправильную алгебраическую дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ с ее целой частью $T(x)$ и правильной рациональной дробью.

§ 3. Тесты по разделу 5

Вар. № 1	**Раздел 5. Комплексные числа, многочлены, рациональные дроби**
1	Даны два комплексных числа $z_1 = \sqrt{3} - 3i$ и $z_2 = -1 + i$. Найдите $\operatorname{Im}(z_1 - 3z_2)$.
2	Даны два комплексных числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -\sqrt{3} - 3i$. Найдите $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$.
3	Вычислите $\operatorname{Re} z$, если $z = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$.
4	Выделите целую часть дроби $\dfrac{x^4 + 3x^2 - 1}{x^3 + x}$.
5	Укажите вид разложения рациональной дроби на сумму простых, не вычисляя коэффициентов разложения: $\dfrac{2x-1}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$.

Вар. № 2	**Раздел 5. Комплексные числа, многочлены, рациональные дроби**
1	Даны два комплексных числа $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ и $z_2 = -1 - i$. Найдите $\operatorname{Im}(z_1 - 3z_2)$.
2	Даны два комплексных числа $z_1 = -1 + 2i$ и $z_2 = i$. Найдите $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$.
3	Вычислите $\operatorname{Im} z$, если $z = \dfrac{(1+i)^2}{1+2i}$.
4	Выделите целую часть дроби $\dfrac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x^3 - x}$.
5	Укажите вид разложения рациональной дроби на сумму простых, не вычисляя коэффициентов разложения: $\dfrac{5x+2}{(x+1)(x+2)^2(x^2+16)}$.

Вар. № 3	**Раздел 5. Комплексные числа, многочлены, рациональные дроби**
1	Даны два комплексных числа $z_1=-1+i\sqrt{3}$ и $z_2=-\sqrt{3}-i$. Найдите $\mathrm{Im}(z_1-3z_2)$.
2	Даны два комплексных числа $z_1=-\sqrt{3}+i$ и $z_2=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. Найдите $\mathrm{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$.
3	Вычислите $\mathrm{Re}\,z$, если $z=\dfrac{(1-i)^4}{2+i}$.
4	Выделите целую часть дроби $\dfrac{2x^3-2}{x^2+x+2}$.
5	Укажите вид разложения рациональной дроби на сумму простых, не вычисляя коэффициентов разложения: $\dfrac{x+1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)^2}$.

Вар. № 4	**Раздел 5. Комплексные числа, многочлены, рациональные дроби**
1	Даны два комплексных числа $z_1=1-2i$ и $z_2=-i\sqrt{5}$. Найдите $\mathrm{Im}(z_1-3z_2)$.
2	Даны два комплексных числа $z_1=3-i\sqrt{3}$ и $z_2=-\sqrt{3}+3i$. Найдите $\mathrm{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$.
3	Вычислите $\mathrm{Re}\,z$, если $z=\dfrac{(1-i)^3}{(2+i)^2}$.
4	Выделите целую часть дроби $\dfrac{4x^3+x^2+2}{x^3+3x^2-7x+2}$.
5	Укажите вид разложения рациональной дроби на сумму простых, не вычисляя коэффициентов разложения: $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)}$.

Ответы к заданиям тестов

Вариант 1

1) -6; **2.** $\dfrac{\sqrt{3}-3}{12}$; **3)** $-1/2$; **4)** x; **5)** $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}$.

Вариант 2

1) $3+\sqrt{3}$; **2)** 2; **3)** $2/5$; **4)** $4x$; **5)** $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}+\dfrac{Dx+E}{x^2+16}$.

Вариант 3

1) $3+\sqrt{3}$; **2)** $\dfrac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}$; **3)** $-8/5$; **4)** $2x-2$; **5)** $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{Dx+E}{x^2+x+1}+\dfrac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$.

Вариант 4

1) $3\sqrt{5}-2$; **2)** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **3)** $-14/25$; **4)** 4; **5)** $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}+\dfrac{Dx+E}{x^2+x+1}$.

Раздел 6. **ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Краткая характеристика раздела

1. Темы раздела. Неопределённый интеграл. Основные методы интегрирования. Некоторые классы интегрируемых в конечном виде функций. Определённый интеграл. Приложения определённого интеграла. Определённый интеграл в задачах экономики. Несобственные интегралы.

2. Базисные понятия. Неопределённый интеграл. Таблица основных неопределенных интегралов. Замена переменной. Интегрирование по частям. Неберущиеся интегралы. Интегральная сумма по отрезку. Определённый интеграл. Несобственные интегралы.

3. Основные задачи. Непосредственное интегрирование. Подведение множителя под знак дифференциала. Замена переменной. Интегрирование по частям. Вычисление определённых интегралов. Исследование сходимости и вычисление несобственных интегралов. Вычисление аддитивных величин геометрического характера (площадь, объём, длина дуги). Вычисление аддитивных величин экономики.

Глава 1. **Первообразная и неопределённый интеграл**

§ 1. Первообразная. Неопределённый интеграл

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если во всех точках этого промежутка производная $F(x)$ равна $f(x)$ (или дифференциал $F(x)$ равен $f(x)dx$):

$$F'(x) = f(x), \tag{1.1}$$

$$dF(x) = f(x)dx. \tag{1.2}$$

Пример 1.1. $f(x) = x^2$. Тогда $F(x) = x^3/3$, так как $(x^3/3)' = (3x^3/3) = x^2$, или $d(x^3/3) = 3x^2\,dx/3 = x^2\,dx$ на всей вещественной оси.

Первообразная для заданной функции находится неоднозначно – с точностью до постоянной C, так как $(F(x)+C)' = F(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x)$.

Теорема 1.1. Множество всех первообразных для заданной функции $f(x)$ заключено в выражении

$$F(x) + C, \tag{1.3}$$

где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$, а C – произвольная постоянная.

Теорема 1.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X, то на этом промежутке для нее первообразная $F(x)$ существует.

Определение 1.2. Множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* от $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Операция отыскания неопределённого интеграла от функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции (неопределённым интегрированием). Из теоремы 1.1 и определения 1.2 следует формула

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \qquad (1.4)$$

Пример 1.2. $\int x^2dx = x^3/3+C$.

Функция $f(x)$ под знаком интеграла называется *подынтегральной функцией*, а выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*. Переменная x называется *переменной интегрирования* (*интеграции*).

Из определения неопределённого интеграла (определение 1.2) непосредственно следуют формулы:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \qquad (1.5)$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \qquad (1.6)$$

Из (1.5) – (1.6) следует, что действия «интегрирование» и «дифференцирование» взаимно обратны. Обе формулы (1.5) и (1.6), с другой стороны, означают, что правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

Пример 1.3. Показать, что $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

►Правильность результата проверим дифференцированием, отдельно рассмотрев случаи а) $x < 0$; б) $x > 0$. В случае а) $\ln|x| = \ln(-x)$, по правилу дифференцирования сложной функции получаем: $\ln(-x))'=(1/(-x))(-1)=1/x$. В случае б) из таблицы производных имеем $(\ln x)' = 1/x$.◄

Пример 1.4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)+C$, $\alpha \neq 0$. Правильность результата в этой формуле можно проверить дифференцированием:

►$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)\right]' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)' =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+\alpha}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+\alpha}}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}.◄$$

Таблица основных интегралов

1) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $n\in \boldsymbol{R}$, $n \neq -1$.
2) $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$.
3) $\int e^x dx=e^x+C$.
4) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$, $a>0$, $a\neq 1$.
5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.
6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.
7) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x+C$.
8) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}\,x+C$.
9) $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left\lvert\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\rvert+C$.

10) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}(x/2 + \pi/4)\right| + C$.
11) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.
12) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.
13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $a > 0$.
14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$, $\alpha \neq 0$.
15) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$, $a > 0$.
16) $\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$, $\alpha \neq 0$.

Первичная таблица интегралов есть непосредственное обращение таблицы дифференциалов. Обычно её записывают в несколько более общей форме. Основная таблица содержит ещё и несколько наиболее часто встречающихся интегралов. Все формулы проверяются дифференцированием.

§ 2. Свойство линейности неопределённого интеграла

Для любых произвольных постоянных C_1 и C_2 справедливо равенство

$$\int [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]dx = C_1 \int f_1(x)dx + C_2 \int f_2(x)dx. \tag{2.1}$$

Частные случаи:

а) $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$ – постоянный множитель можно вынести за знак неопределённого интеграла;

б) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$ – неопределённый интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности неопределённых интегралов от слагаемых.

► Формула (2.1) проверяется дифференцированием. Производная выражения, стоящего слева, равна $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$. Найдём производную выражения, стоящего справа:

$$\left[C_1 \int f_1(x)dx + C_2 \int f_2(x)dx\right]' = C_1\left(\int f_1(x)dx\right)' + C_2\left(\int f_2(x)dx\right)' = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x).$$

Здесь применена формула (1.5). Совпадение результатов и означает истинность доказываемой формулы (2.1).◄

Непосредственное интегрирование состоит в применении основной таблицы и свойств интегралов.

Пример 2.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C$. Применена формула (13) из таблицы интегралов.

Пример 2.2. $\int \left(3\cos x - 1/\sqrt{x}\right)dx = 3\int \cos x\,dx - \int x^{-1/2}dx = 3\sin x - 2x^{1/2} + C =$ $= 3\sin x - 2\sqrt{x} + C$. Применены свойство линейности и формулы (1), $n \neq -1$ и (6) из таблицы интегралов.

§ 3. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Этот метод интегрирования состоит в применении формулы

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{3.1}$$

Здесь $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции. Предполагается, что участвующие в формуле интегралы существуют.

Название «по частям» объясняется тем, что (сложный) интеграл $\int u dv$ берётся двумя (более простыми) частями $\int dv = v$ и $\int v du$.

►Формула (3.1) следует из формулы для дифференциала произведения двух функций $d(uv) = vdu + udv$. Интегрируя это соотношение, получаем $\int d(uv) = \int vdu + \int udv$. Но $\int d(uv) = uv + C$, отсюда $uv + C = \int vdu + \int udv$; $\int udv = uv - \int vdu + C$. Каждый из интегралов в этом равенстве содержит произвольную постоянную, явно не выписанную, потому постоянную C можно присоединить к интегралу справа. Приходим к формуле (3.1).◄

Пример 3.1. Вычислить интеграл $\int xe^x dx$.

$$► \int xe^x dx = \int x de^x = \left[\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = de^x & v = e^x \end{array}\right] = uv - \int vdu =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C. ◄$$

Пример 3.2. Вычислить интеграл $\int x \ln x dx$.

$$► \int x \ln x dx = \left[\begin{array}{c|c} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C. ◄$$

Метод интегрирования по частям целесообразен для произведения степенной и трансцентдентной функций, а также во многих других случаях.

§ 4. Замена переменной в неопределённом интеграле

Обычно замена переменной в неопределённом интеграле выполняется в двух вариантах. Цель – взять данный интеграл, который после введения новой переменной станет известным или даже табличным.

Теорема 4.1 (*об интегрировании подведением под знак дифференциала*).

Если:

1) существуют дифференцируемая функция $u=u(x)$ и функция $g(u)$ такие, что функция представима в виде $f(x) = g(u(x))\, u'(x)$,

2) существует функция $G(u)$: $G'(u) = g(u)$, то

$$\int f(x)dx = \int g(u(x))u'(x)dx = \int g(u(x))du = G(u(x)) + C. \tag{4.1}$$

►Достаточно показать, что $G(u(x))$ – первообразная для $f(x)$:

$$G'(u(x)) = G_u' \cdot u_x' = g(u(x))u'(x) = f(x). ◄$$

Замечание 4.1. При вычислении неопределённого интеграла с помощью теоремы 4.1 выписывают следующую цепочку равенств:

$$\int f(x)dx = \int g(u(x))u'(x)dx = \int g(u)du = G(u) + C = |u = u(x)| = G(u(x)) + C.$$

При этом множитель $u'(x)$ подводится под знак дифференциала. Поэтому и метод называется интегрированием подведением под знак дифференциала.

Пример 4.1.

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d\sin x = |u = \sin x| = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Здесь множитель $\cos x$ подведён под дифференциал и произведена замена переменной – $u = \sin x$. Новый интеграл – табличный.

Пример 4.2.

$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = |u = \ln x| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + \text{C}$. Здесь под дифференциал подведён множитель $1/x$, так как $dx/x = d\ln x$. Получившийся после подстановки интеграл – табличный.

Теорема 4.2 (*об общей формуле замены переменной в неопределённом интеграле*).

Если:

1) функция $f(x)$ имеет первобразную на некотором промежутке X;

2) функция $x = \varphi(t)$ строго монотонна и дифференцируема на промежутке T: $X = E(\varphi(t))$, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt. \tag{4.2}$$

Замечание **4.2.** В условиях теоремы 4.2 функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, $x \in X$. Вычисление интеграла $\int f(x)dx$ с помощью формулы (4.2) сводится к вычислению интеграла из правой части этой формулы, который может оказаться проще исходного и последующей подстановке $t = \varphi^{-1}(x)$.

Пример 4.3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left[\begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix}\middle| t = \sqrt{x}\right] = \int \frac{2tdt}{t+1} = 2\int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt =$

$$= 2\int\left(\frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2(t - \ln|t+1|) + C = 2(\sqrt{x} - \ln|\sqrt{x}+1|) + C.$$

Пример 4.4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \left[x = \frac{1}{t},\ t = \frac{1}{x},\ dx = -\frac{dt}{t^2}\right] = -\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{4-1/t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(2t)}{\sqrt{(2t)^2-1}} = -\frac{1}{2}\ln\left|2t + \sqrt{(2t)^2-1}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x} + \sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x} + \frac{1}{|x|}\sqrt{4-x^2}\right| + C. \blacktriangleleft$$

Глава 2. **Интегрирование основных классов элементарных функций**

§ 1. Интегрирование рациональных функций

1. Всякая рациональная функция после преобразований может быть представлена как сумма многочлена и конечного числа элементарных (простейших) дробей четырёх типов:

$$1)\ \frac{A}{x-a},\qquad 2)\ \frac{A}{(x-a)^n},\qquad 3)\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\qquad 4)\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}.$$

Здесь A, B, a, p, q – вещественные числа, n – натуральное ($n \geq 2$), $p^2–4q < 0$, т. е. корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ – комплексные. Итак, интеграл от любой рациональной функции может быть сведён к интегралам от многочлена и элементарных дробей. Заметим, что интеграл от многочлена равен линейной комбинации табличных интегралов от степенных функций. Задача интегрирования любой рациональной дроби сводится к вычислению интегралов от элементарных дробей.

2. Интегралы от элементарных дробей.

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}\,d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C =$

$= \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$, $(n \geq 2)$.

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

►Выделим в квадратном трёхчлене из знаменателя полный квадрат:

$$x^2+px+q = \left(x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)+q-\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}.$$

Теперь сделаем подстановку:

$$x+\frac{p}{2}=t;\quad x=t-\frac{p}{2};\quad \frac{4q-p^2}{4}=a^2,\ \text{так как}\ 4q-p^2>0.$$

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int\frac{A(t-p/2)+B}{t^2+a^2}dt = \frac{A}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+a^2)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Далее нужно возвратиться к старым величинам. ◄

Замечание 1.1. Аналогично находятся интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Замечание 1.2. Вычисление интеграла $\int\frac{Ax+B}{(x^2+hx+q)^n}dx$, где $p^2-4q<0$,

производится путём вывода для него так называемой *реккурентой* формулы. Далее примеры с такими интегралами не рассматриваются.

Пример 1.1. Вычислить интеграл $J = \int\frac{4x+1}{x^2+6x+10}dx$.

► $x^2+6x+10 = (x^2+2x\cdot 3+9)+1 = (x+3)^2+1$; $x+3=t$; $dx=dt$.

$$J = \int\frac{4(t-3)+1}{t^2+1}dt = 2\int\frac{2t\,dt}{t^2+1} - 11\int\frac{dt}{1+t^2} = 2\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - 11\operatorname{arctg} t =$$

$$= 2\ln(t^2+1) - 11\,\mathrm{arctg}\,t + C = 2\ln(x^2+6x+10) - 11\,\mathrm{arctg}(x+3) + C. \blacktriangleleft$$

3. Интегралы от правильных рациональных дробей. Правильная рациональная дробь (степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя) разлагается на сумму элементарных дробей (гл. разд. 5). Предполагается, что многочлен знаменателя разложен на произведение линейных и квадратичных множителей, порождающих соответствующие элементарные дроби. Принципы разложения правильной рациональной дроби на элементарные рассмотрены в нижеследующих примерах.

Пример 1.2. Вычислить интеграл $J = \int \frac{x}{(x-1)(x+2)}dx$.

$\blacktriangleright$Запишем разложение подынтегральной дроби на простейшие с буквенными коэффициентами: $\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$. Неизвестные коэффициенты A, B находим *методом частных значений*. Приводим дроби к одному знаменателю и приравниваем числители:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \quad \Rightarrow \quad x \equiv A(x+2)+B(x-1).$$

Полагаем в этом тождестве последовательно $x = 1$ и $x = -2$:

$$\begin{array}{r|lcl} x=1 & 1=3A & \Rightarrow & A=1/3; \\ x=-2 & -2=-3B & \Rightarrow & B=2/3. \end{array}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{2/3}{x+2}.$$

$$J = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{2}{3}\int\frac{d(x+2)}{x+2} = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|x+2| + C. \blacktriangleleft$$

Пример 1.3. Вычислить интеграл $J = \int \frac{dx}{x(x^2+4x+10)}$.

$\blacktriangleright$Запишем разложение подынтегральной дроби на простейшие с буквенными коэффициентами: $\frac{1}{x(x^2+4x+10)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+10}$. Приводим дроби к одному знаменателю и приравниваем числители:

$$1 = A(x^2+4x+10) + x(Bx+C) = (A+B)x^2 + (4A+C)x + 10A.$$

Применим *метод сравнения коэффициентов*: если два многочлена тождественно равны, то равны их коэффициенты при степенях с одинаковыми показателями. Если соответствующей степени в многочлене нет, то это означает, что коэффициент при ней равен нулю. Имеем:

$$\begin{array}{c|lcl} x^2 & 0=A+B & \Rightarrow & B=-A; \\ x & 0=4A+C & \Rightarrow & C=-4A; \text{ отсюда } B=-A=-\frac{1}{10};\ C=-4A=-\frac{4}{10}. \\ x^0 & 1=10A & \Rightarrow & A=1/10; \end{array}$$

$$J = \frac{1}{10}\int\frac{dx}{x} + \int\frac{(-1/10)x-4/10}{x^2+4x+10}dx = \frac{1}{10}\ln|x| - \frac{1}{10}\int\frac{x+4}{(x+2)^2+6}dx =$$

$$= \frac{1}{10}\ln|x| - \frac{1}{10}\int\frac{x+2}{(x+2)^2+6}d(x+2) - \frac{1}{10}\int\frac{2}{(x+2)^2+6}d(x+2) = |x+2=t| =$$

$$= \frac{1}{10}\ln|x| - \frac{1}{10}\int\frac{t}{t^2+6}dt - \frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2+6} = \frac{1}{10}\ln|x| - \frac{1}{5\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}} - \frac{1}{20}\int\frac{d(t^2+6)}{t^2+6} =$$

$$=\frac{1}{10}\ln|x|-\frac{1}{5\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}}-\frac{1}{20}\ln(t^2+6)+C=$$

$$=\frac{1}{10}\ln|x|-\frac{1}{5\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}-\frac{1}{20}\ln(x^2+4x+10)+C. ◄$$

4. Интегрирование неправильной рациональной дроби. Сначала *неправильную рациональную дробь* представляют в виде суммы многочлена (одночлена) и правильной рациональной дроби. Этот процесс называется *выделением из дроби целой части*. В любом случае он выполняется делением числителя на знаменатель «углом». Далее правильная рациональная дробь разлагается на сумму элементарных дробей (см. п. 3°).

Пример 1.4. Вычислить интеграл $J=\int\frac{x^4+1}{x(x^2+1)}dx$.

►Выделим из неправильной дроби целую часть делением «углом»:

$$\begin{array}{r|l} x^4+1 & x^3+x \\ \cline{2-2} -\;x^4+x^2 & x \\ \cline{1-1} -x^2+1 & \end{array} \quad\Rightarrow\quad \frac{x^4+1}{x^3+x}=\frac{x(x^3+x)+(-x^2+1)}{x^3+x}=x+\frac{-x^2+1}{x(x^2+1)}.$$

Теперь запишем разложение полученной правильной дроби на простейшие с буквенными коэффициентами:

$$\frac{-x^2+1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1};\quad -x^2+1=A(x^2+1)+(Bx+C)x.$$

Числа A, B, С находим с помощью метода сравнения коэффициентов:

$$\begin{array}{c|lcl} x^2 & -1=A+B & \Rightarrow & B=-1-A; \\ x & 0=C & \Rightarrow & C=0; \\ x^0 & 1=A & \Rightarrow & A=1;\ B=-1-1=-2. \end{array}$$

$$\frac{x^4+1}{x(x^2+1)}=x+\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+1}.$$

$$J=\int xdx+\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}+\ln|x|-\ln(1+x^2)+C. ◄$$

§ 2. Интегрирование функций, зависящих рационально от синуса и косинуса

В этом параграфе рассматриваются интегралы вида

$$\int R(\sin x,\cos x)\ dx. \tag{2.1}$$

Здесь $R(u, v)$ – функция, рационально зависящая от аргументов u, v. Это означает, что для нахождения значения функции над аргументами производятся только 4 арифметических действия.

1. Основные тригонометрические подстановки. Для отыскания интегралов вида (2.1) можно применить 4 типа подстановок, которые сводят интеграл (2.1) к интегралу от рациональной функции нового аргумента z.

Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$z=\operatorname{tg}(x/2). \tag{2.2}$$

Имеем $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{1-z^2}{1+z^2}$.

Из (2.2) следует равенство $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg} z$ или $x = 2\operatorname{arctg}\ z$. Отсюда $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$.

Сведём все формулы вместе:

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2};\ \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2};\ dx=\frac{2dz}{1+z^2}. \tag{2.3}$$

Пример 2.1. ► $\int\frac{dx}{2+\cos x}=\left[z=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2},\ dx=\frac{2dz}{1+z^2}\right]=$

$=\int\frac{2dz/(1+z^2)}{2+(1-z^2)/(1+z^2)}=2\int\frac{dz}{3+z^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}+C$.◄

Универсальная подстановка иногда может привести к громоздким преобразованиям. В некоторых случаях полезны другие подстановки.

Подстановка

$$z=\sin x. \tag{2.4}$$

Подынтегральная функция должна обладать свойством: $R(\sin x,-\cos x)=$ $=-R(\sin x,\cos x)$, т. е. являться нечётной относительно косинуса.

Определение 2.1. Если в результате выполненной подстановки данный интеграл становится интегралом от рациональной функции, то говорят, что данный интеграл *рационализировался*.

Пример 2.2. ► $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=[\sin x=z;dz=\cos x dx]=\int\frac{d\sin x}{\sin^3 x}=$

$$=\int\frac{dz}{z^3}=\int z^{-3}dz=\frac{z^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2\sin^2 x}+C. ◄$$

Подстановка

$$z=\cos x. \tag{2.5}$$

Она целесообразна, когда подынтегральная функция обладает свойством $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, т. е. является нечётной относительно синуса. Выполнение подстановки (2.5) аналогично случаю (2.4). Подстановка (2.5) в примере (2.2) тоже может быть выполнена, но приведет к более сложному интегралу $-\int\frac{zdz}{(1-z^2)^2}$.

Подстановка

$$z=\operatorname{tg}x. \tag{2.6}$$

Она может быть применена, когда подынтегральная функция обладает свойством $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ или рационально зависит от $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, т. е. рассматривается интеграл $\int R(\operatorname{tg}x)dx$.

Рассмотрим сначала последний случай. Из (2.6) следуют равенства:

$$x=\operatorname{arctg}z;\ dx=\frac{dz}{1+z^2}. \tag{2.7}$$

Пример 2.3. Вычислить $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$.

► $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}=\left[z=\operatorname{tg}x,\ dz=\frac{dx}{\cos^2 x}\right]=\int\frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x\cos^6 x}=\int\frac{(\sec^2 x)^2}{\operatorname{tg}^3 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=$

$=\int\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^3 x}d\operatorname{tg}x=\int\frac{(1+z^2)^2}{z^3}dz=\int\left(z^{-3}+\frac{2}{z}+z\right)dz=\frac{z^{-2}}{-2}+2\ln|z|+\frac{z^2}{2}+C=$

$$= -\frac{1}{2z^2} + 2\ln|z| + \frac{z^2}{2} + C = -\frac{1}{2}\text{ctg}^2 x + 2\ln|\text{tg}\, x| + \frac{1}{2}\text{tg}^2 x + C. \blacktriangleleft$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, m, n – натуральные числа. Эти интегралы – частный случай общего вида интегралов (2.1). Если хотя бы одно из чисел m или n – нечётное, то выполняется подстановка (2.4) или (2.5).

Пример 2.4. Вычислить $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$.

$\blacktriangleright \int \sin^4 x\cos^3 x dx = \int \sin^4 x(1-\sin^2 x)\, d\sin x = [z = \sin x] =$

$= \int z^4 (1-z^2) dz = z^5/5 - z^7/7 + C = \sin^5 x/5 - \sin^7 x/7 + C. \blacktriangleleft$

Если же оба числа m, n – чётные, то в принципе может быть выполнена подстановка (2.6), но она здесь нецелесообразна, так как приводит к громоздким преобразованиям. Лучше понижать степени синуса и косинуса, повышая кратность аргументов, с помощью формул:

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x). \qquad (2.8)$$

Пример 2.5. Вычислить $\int \sin^2 x\cos^2 x dx$.

$$\blacktriangleright \int \sin^2 x\cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C. \blacktriangleleft$$

§ 3. Интегрирование иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+q}}, \ldots, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+q}}\right) dx$. Здесь $R(x, u, \ldots, v)$ – рациональная функция своих аргументов. Дробно-линейная функция $\frac{ax+b}{cx+d}$, в частности, может быть линейной $ax+b$ или просто аргументом x. Интеграл рационализируется подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+q} = z^k, \qquad (3.1)$$

где k – наименьшее общее кратное всех показателей радикалов: $k = \text{НОК}(m, \ldots, n)$.

Пример 3.1. Вычислить интеграл $J = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$.

$\blacktriangleright$Сделаем подстановку: $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t;\ \frac{1+x}{1-x} = t^2;\ x = \frac{t^2-1}{t^2+1};\ dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$,

получим: $J = \int \frac{t^2+1}{t^2-1}\cdot t\cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt = 4\int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt$, интеграл рационализировался. Подынтегральную функцию разложим на элементарные дроби, полагая $t^2 = z$. Имеем

$$\frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} = \frac{z}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1};\quad z = A(z+1) + B(z-1).$$

Применяем метод частных значений: $\begin{array}{r|lcl} z=1 & 1=2A & \Rightarrow & A=1/2; \\ z=-1 & -1=-2B & \Rightarrow & B=1/2. \end{array}$

$$\frac{z}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}\right); \qquad \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right).$$

$$J=4\cdot\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2-1}+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\operatorname{arctg} t\right)+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C. \blacktriangleleft$$

Пример 3.2. Вычислить интеграл $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

$\blacktriangleright k=$ НОК(2, 3) = 6. Выполним подстановку $x=z^6$: $z=\sqrt[6]{x}$; $\sqrt{x}=z^3$; $\sqrt[3]{x}=z^2$; $dx=6z^5dz$. $J=\int\frac{6z^5dz}{z^3+z^2}=6\int\frac{z^3}{z+1}dz=6\int\left(z^2-z+1-\frac{1}{z+1}\right)dz=$
$=6\left(z^3/3-z^2/2+z-\ln|z+1|\right)+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C. \blacktriangleleft$

§ 4. Понятие о неберущихся интегралах

Определение 4.1. Интеграл называется *неберущимся*, если он не выражается через конечное число элементарных функций, т. е. если сам не является элементарной функцией.

Примеры неберущихся интегралов:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int\frac{e^x}{x}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\sin x^2dx,\ \int\cos x^2dx,\ \int\frac{dx}{\sqrt{P_n(x)}},$$

где $P_n(x)$ – многочлен выше второй степени. Интегралы последнего типа берутся только в частных случаях.

Глава 3. **Определённый интеграл, его свойства и методы вычисления**

§ 1. Понятие определённого интеграла

1. Понятие определённого интеграла. Рассматривается функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$.

1) Отрезок $[a, b]$ разбивается на n произвольных частичных отрезков точками $x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$. При этом $a<x_1,<x_2<\ldots, x_{n-1}<x_n=b$ (рис. 1.1).

2) В каждом частичном промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ выбирается произвольная точка ξ_k $(x_{k-1}\le\xi_k\le x_k)$.

3) Значение функции $f(\xi_k)$ в точке ξ_k умножается на длину k-го частичного промежутка: $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, т. е. вычисляется произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$.

4) Составляется сумма всех этих произведений $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$, называемая *интегральной суммой* или *суммой Римана*.

5) Величина $\lambda = \max\limits_k \Delta x_k$ называется *рангом дробления* промежутка $[a, b]$ на части. При $\lambda \to 0$ длина каждого частичного промежутка стремится к нулю.

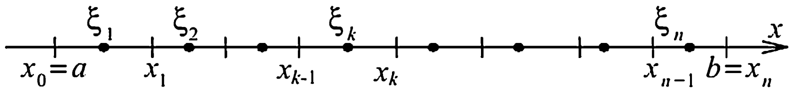


Рис. 1.1. *Разбиение промежутка $[a, b]$ на частичные промежутки $[x_{k-1}, x_k]$ с точками ξ_k, $k=1, 2, \ldots, n$*

Определение 1.1. Если при $\lambda \to 0$ существует конечный предел интегральной суммы σ_n, не зависящий ни от способов дробления промежутка $[a, b]$ на частичные, ни от способов выбора точек ξ_k, то он называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Итак,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1.1}$$

Переменная x называется *переменной интегрирования* (*интеграции*), $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, числа a, b – *пределами интеграла* (*нижним и верхним*), произведение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*.

Функция, для которой существует определённый интеграл по заданному промежутку, называется *интегрируемой* по этому промежутку.

Классы интегрируемых функций указываются следующими теоремами.

Теорема 1.1 (*необходимое условие интегрируемости*). Если функция интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом промежутке.

Теорема 1.2 (*1-е достаточное условие интегрируемости*). Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$, то она интегрируема на этом промежутке.

Теорема 1.3 (*2-е достаточное условие интегрируемости*). Если определённая и ограниченная на замкнутом промежутке $[a, b]$ функция непрерывна на нем, за исключением, быть может, конечного числа точек, то она интегрируема на этом промежутке.

Указанные в теоремах 1.2 и 1.3 два класса функций практически исчерпывают все функции, встречающиеся в приложениях. В дальнейшем будет предполагаться, что рассматриваются только эти классы функций.

2. Физический смысл интеграла. Укажем несколько вариантов физической интерпретации интеграла.

1) Путь, пройденный материальной точкой со скоростью $v(t)$ за время от момента T_1 до момента T_2, равен определенному интегралу от скорости по промежутку времени движения:

$$s = \int\limits_{T_1}^{T_2} v(t)\,dt. \tag{1.2}$$

2) Масса m прямолинейного стержня, расположенного на промежутке $[a, b]$ оси Ox и имеющего линейную плотность распределения массы $\rho(x)$, равна

определенному интегралу от плотности по промежутку $[a, b]$:

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dx \cdot \qquad (1.3)$$

3) Работа A переменной силы $F(x)$, действующей вдоль пути и перемещающей материальную точку в пределах отрезка $[a, b]$ оси Ox, равна определённому интегралу от силы по отрезку пути:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx \cdot \qquad (1.4)$$

3. Геометрический смысл определенного интеграла. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1.2).

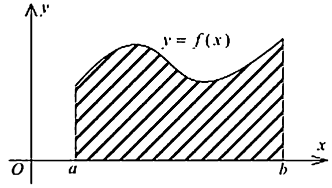


Рис. 1.2*. Криволинейная трапеция*

Если функция $y=f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком этой функции и опирающейся на отрезок $[a, b]$, определяется формулой:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \qquad (1.5)$$

4. Определенный интеграл в экономике. Пусть функция $y=y(t)$ – производительность труда в зависимости от времени t. Тогда объём v продукции, произведенной за промежуток времени с момента $t = t_0$ до момента $t = T$, выражается интегралом от $y(t)$ по отрезку $[t_0, T]$:

$$v = \int_{t_0}^{T} y(t)dt.$$

Замечание 1.1. Применение определенного интеграла в экономических задачах более подробно будет рассмотрено далее в § 3 гл. 5.

§ 2. Свойства определённого интеграла

Изучаемые далее свойства определённого интеграла позволяют вывести формулу для его вычисления (формула Ньютона – Лейбница), а также облегчают действия с интегралами. Будем считать, что все ниже фигурирующие функции интегрируемы на своих промежутках.

Прежде всего, заметим, что определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt \cdot \qquad (2.1)$$

Свойство 1 (*об интеграле с равными пределами*). По определению примем

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \cdot \qquad (2.2)$$

Свойство 2 (*о перемене местами пределов интегрирования*)**.** По определению примем

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \cdot \qquad (2.3)$$

Эти два свойства распространяют применение понятия определённого интеграла на случаи, не охваченные его первичным определением.

Свойство 3 (*линейность интеграла*).

$$\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]dx = C_1 \int_a^b f_1(x)dx + C_2 \int_a^b f_2(x)dx. \qquad (2.4)$$

Частные случаи:

$$1)\ \int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.5)$$

(Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла).

$$2)\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx. \qquad (2.6)$$

(Определённый интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности определённых интегралов от слагаемых).

Свойство 4 (*аддитивность интеграла по промежутку*). Если промежуток $[a, b]$ точкой c разбит на два промежутка $[a, c]$ и $[c, b]$, то определённый интеграл от функции $f(x)$ по всему промежутку равен сумме интегралов от этой функции по частичным промежуткам:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (2.7)$$

Замечание 2.1. Свойство 4 остается справедливым, если точка c совпадает с концами промежутка или находится вне промежутка $[a, b]$.

Свойство 5 (*о знаке интеграла*). Определённый интеграл от функции $f(x)$, неотрицательной на промежутке интегрирования $[a, b]$, также неотрицателен:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \qquad (2.8)$$

Свойство 6 (*об интегрировании неравенства*). Если на отрезке $[a, b]$ для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ справедливо неравенство $f(x) \leq \varphi(x)$, то и для интегралов от этих функций верно неравенство

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (2.9)$$

Геометрически при $f(x) \geq 0$ это означает, что для площадей S_1 и S_2 криволинейных трапеций, ограниченных графиками функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, выполняется неравенство $S_1 \leq S_2$, при этом обе трапеции опираются на отрезок $[a, b]$ (рис. 2.1).

Свойство 7 (*об оценках интеграла*). Если на промежутке интегрирования $[a, b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $m \le f(x) \le M$, то для интеграла от этой фунцкии справедливо неравенство

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \qquad (2.10)$$

Геометрически при $m > 0$ это свойство означает, что площадь криволинейной трапеции, выраженная данным интегралом, не меньше площади входящего прямоугольника и не больше площади выходящего прямоугольника (рис. 2.2).

Замечание 2.2. Неравенство (2.9) дает оценки интеграла сверху и снизу.

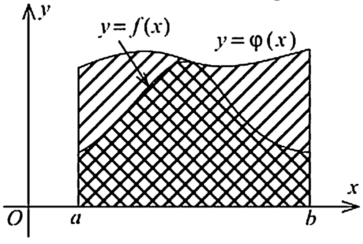


Рис. 2.1. *Иллюстрация свойства 6 об интегрировании неравенства*

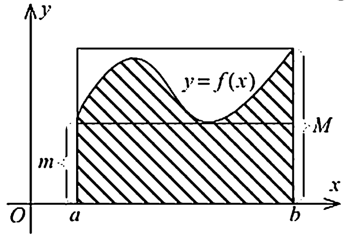


Рис. 2.2. *Иллюстрация свойства 7 об оценках определённого интеграла*

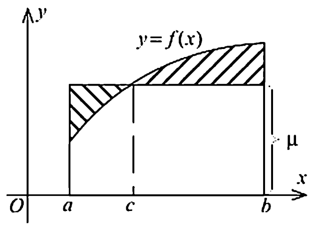


Рис. 2.3. *К теореме о среднем*

Свойство 8 (*об оценке модуля интеграла*). Модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \qquad a < b. \qquad (2.11)$$

§ 3. Теорема о среднем для определённого интеграла

Теорема 3.1 (*теорема о среднем*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то в нем существует точка c такая, что выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \qquad (3.1)$$

Геометрический смысл равенства (3.1). Если $f(x) \ge 0$ на отрезке $[a, b]$, то площадь криволинейной трапеции, выраженная данным интегралом, равна площади прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой $f(c)$ (рис. 3.1).

►Ввиду непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ она, в силу теоремы Вейерштрасса, принимает на этом отрезке свои наименьшее и наибольшее значения: m и M. Отсюда $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$. Тогда верна формула (3.1): $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, где μ – число, находящееся между значениями функции m и M. По теореме Больцано – Коши функция $f(x)$ принимает это промежуточное значение в некоторой точке c отрезка $[a,b]$: $\mu = f(c)$ и формула (3.1) переходит в формулу (3.2).◄

Определение 3.1. Число μ, определяемое равенством

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{3.2}$$

называется *средним* значением функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ (точнее: *интегральным средним* функции на промежутке).

Пример 3.1. Найти среднее значение функции $y = x^2$ на отрезке $[0, 2]$.

► $\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\cdot 8 = \frac{4}{3}$. ◄

§ 4. Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. Формула Ньютона – Лейбница

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{4.1}$$

Он является функцией верхнего предела x.

Теорема 4.1 (*о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом*). Если функция $f(x)$ интегрируема по промежутку $[a, b]$, то функция $\Phi(x)$, $x \in [a, b]$, из (4.1) непрерывна на промежутке $[a, b]$.

Теорема 4.2 (*теорема Барроу*, Барроу И. (1630–1677) – английский математик, учитель Ньютона). Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, то для любого x из промежутка $[a, b]$ справедливо равенство $\Phi'(x) = f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \tag{4.2}$$

Итак, производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции равна подынтегральной функции, взятой на верхнем пределе интегрирования.

Замечание 4.1*. В общем случае, когда подынтегральная функция не является везде непрерывной в промежутке интегрирования, равенство (4.2) сохраняется во всех точках непрерывности подынтегральной функции.

Следствие из теоремы Барроу. Для всякой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ существует в этом промежутке первообразная. Одна из первообразных для $f(x)$ – интеграл (4.1) с переменным верхним пределом.

Теорема 4.3 (*формула Ньютона – Лейбница*, Г Лейбниц (1646 – 1716) – немецкий математик, физик, философ). Определённый интеграл от функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, равен разности значений любой её первообразной, взятых на верхнем и нижнем пределах интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{4.3}$$

Здесь $F'(x) = f(x)$.

► Интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ в силу теоремы Барроу есть одна из первообразных для подынтегральной функции $f(x)$. Пусть $F(x)$ – ещё одна из первообразных. Тогда $\Phi(x) = F(x) + C$, ибо две любые первообразные для одной и той же функции $f(x)$ отличаются лишь на постоянную. Найдём эту постоянную, положив в последнем равенстве $x = a$ получаем $\Phi(a) = F(a) + C$, поэтому $C = \Phi(a) - F(a) = -F(a)$. И, следовательно, $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + C = F(x) - F(a)$.

При $x = b$ имеем $\Phi(b) = \int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Это есть иной вид записи формулы (4.3).◄

Пример 4.1. $\int\limits_0^1 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$.

Пример 4.2. $\int\limits_1^2 e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_1^2 = e^{-1} - e^{-2}$.

§ 5. Интегрирование по частям в определённом интеграле

Формула интегрирования по частям в определённом интеграле аналогична такой же формуле для неопределённого интеграла:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{5.1}$$

Здесь $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции, непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$.

Пример 5.1. $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x dx = \left[\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array}\right] = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx =$

$$= -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0\cdot\cos 0 + \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Пример 5.2.

$$\int\limits_1^e \ln x\,dx = \left[\begin{array}{c|c} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right] = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x\frac{1}{x}dx = e\ln e - \ln 1 - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

§ 6. Замена переменной в определённом интеграле

Теорема 6.1. Пусть:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) функция $x = \varphi(t)$ определена на промежутке $[\alpha, \beta]$ и имеет там непрерывную производную $\varphi'(t)$ (следовательно, и сама функция $\varphi(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$);

3) $\varphi(t)$ – строго монотонная функция на $[\alpha, \beta]$; при этом

$$a = \varphi(\alpha);\ b = \varphi(\beta). \tag{6.1}$$

Тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{6.2}$$

Замечание 6.1. Вместе с заменой переменной интегрирования по формуле $x = \varphi(t)$ меняются и пределы интеграла по формуле (6.2). Возвращение к старой переменной не требуется.

Пример. 6.1. Вычислить интеграл $J = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

► Подстановка $x = a\sin t,\ 0 \le t \le \pi/2$; $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$; $dx = a\cos t dt$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = a \Rightarrow t = \pi/2$. Имеем:

$$J = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}. \blacktriangleleft$$

Пример 6.2. Вычислить интеграл $J = \int\limits_0^2 x^3 e^{x^2} dx = \int\limits_0^2 x^2 \cdot x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2 e^{x^2} dx^2$.

► Подстановка $x^2 = z$; $x = 0 \Rightarrow z = 0$; $x = 2 \Rightarrow z = 4$; $J = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 z e^z dz$. Далее интегрируем по частям: $u = z$; $dv = e^z dz$; $du = dz$; $v = e^z$.

$$J = \frac{1}{2}\left(z e^z\Big|_0^4 - \int\limits_0^4 e^z dz\right) = \frac{1}{2}\left(4e^4 - e^z\Big|_0^4\right) = \frac{1}{2}\left(4e^4 - e^4 + 1\right) = \frac{3}{2}e^4 + \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Замечание 6.2 (*об интегралах по промежутку, симметричному относительно начала координат*). Для функции $f(x)$, интегрируемой и чётной на промежутке $[-a, a]$, симметричном относительно точки $x = 0$, справедливо равенство

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx, \qquad (6.3)$$

а для нечётной – равенство

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \cdot \qquad (6.4)$$

Пример 6.3. Не вычисляя интеграл $J = \int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} e^{-x^2}\sin 3x dx$, показать, что $J = 0$.

►Подынтегральная функция является нечётной, а промежуток интегрирования симметричным относительно точки $x = 0$, поэтому $J = 0$ в силу формулы (6.4).◄

Глава 4. **Несобственные интегралы**

§ 1. Интегралы по бесконечному промежутку (Несобственные интегралы первого рода)

Эти интегралы называются также *интегралами с бесконечными пределами*. Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на всяком конечном промежутке $[a, b] \subset [a, +\infty)$. Если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то он называется *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ и обозначается символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Итак, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,. \qquad (1.1)$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,, \qquad (1.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (1.3)$$

В формуле (1.3) переменные a и b стремятся к своим пределам независимо. В формулах (1.2), (1.3) полагается, что функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном промежутке, входящем в соответствующий бесконечный промежуток, и существуют указанные конечные или бесконечные пределы, которые и называются *несобственными интегралами первого рода*. В случае конечных пределов (1.1) – (1.3) говорят, что данный интеграл *сходится*. Если предел не существует или бесконечен, то рассматриваемый интеграл называется *расходящимся*. В случае, когда пределы (1.1) – (1.3) не существуют (ни как конечные, ни как бесконечные), соответствующий несобственный интеграл понимается лишь как символ. Далее для простоты полагается, что подынтегральная функция непрерывна в данном бесконечном промежутке. Этого достаточно для большинства приложений.

Геометрический смысл несобственного интеграла первого рода. Если $f(x) \geq 0$, то несобственный интеграл первого рода численно равен площади бесконечной криволинейной трапеции, опирающейся на промежуток интегрирования. Для интеграла по промежутку $[a, +\infty)$ такая криволинейная трапеция изображена на рис. 1.1.

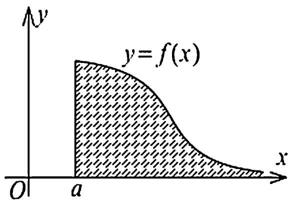


Рис. 1.1. *Бесконечная криволинейная трапеция с основанием $[a, +\infty)$*

Пример 1.1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1$. Интеграл сходится.

Пример 1.2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{x}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right) = +\infty$. Интеграл расходится.

Пример 1.3.
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_a^b\right) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. Интеграл сходится.

Замечание 1.1. Интеграл (1.3) можно рассматривать как сумму интегралов по промежуткам $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, a – любое число. Несобственный интеграл

(1.3) сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба слагаемых интеграла.

§ 2. Простейшие свойства несобственных интегралов первого рода

Теорема 2.1 (*свойство аддитивности*). Пусть $a < A$. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, то сходится интеграл $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$, и наоборот. При этом

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^A f(x)\,dx + \int_A^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (2.1)$$

Теорема 2.2 (*свойство линейности*). Если сходятся интегралы $\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]dx$, и справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty}[C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]dx = C_1 \int_a^{+\infty} f_1(x)dx + C_2 \int_a^{+\infty} f_2(x)dx. \qquad (2.2)$$

Теорема 2.3. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то

$$\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(x)\,dx = 0. \qquad (2.3)$$

Аналогичные теоремы имеют место и для других интегралов с бесконечными пределами.

Формула Ньютона – Лейбница для несобственного интеграла первого рода. Подынтегральная функция $f(x)$ предполагается непрерывной на промежутке интегрирования, а потому она на этом промежутке имеет первообразную $F(x)$. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty)$, то имеют место формулы:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \qquad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty), \qquad (2.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty). \qquad (2.6)$$

Пример 2.1. Вычислить интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$.

► $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^{b} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left(-\frac{1}{x} - \text{arctg}x\right)\Big|_1^{+\infty} = 0 + 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$. ◄

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^2}$.

► $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = -2\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty} = 0 + 2 = 2$. ◄

На сходящиеся несобственные интегралы распространяются формулы интегрирования по частям и замены переменной.

Пример 2.3. Вычислить интеграл $\int_a^{+\infty} xe^{-x}dx$.

►$\int\limits_a^{+\infty} xe^{-x}dx = \left[\begin{matrix} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{matrix}\middle| \begin{matrix} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{matrix}\right] = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = 0 - e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$◄

Пример 2.4. Вычислить интеграл $J = \int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}$.

►Сделаем подстановку: $\sqrt{x} = z$; $x = z^2$; $dx = 2zdz$; $x = 4 \Rightarrow z = 2$; $x \to +\infty \Rightarrow z \to +\infty$. Имеем:

$$J = 2\int\limits_2^{+\infty} \frac{zdz}{(1+z)^3} = 2\int\limits_2^{+\infty} \frac{(z+1)-1}{(z+1)^3}dz = 2\int\limits_2^{+\infty}\left(\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(z+1)^3}\right)dz =$$

$$= \left(-2/(z+1) + 1/(z+1)^2\right)\Big|_2^{+\infty} = 2/3 - 1/9 = 5/9.$$◄

§ 3. Интегралы от неограниченных функций (Несобственные интегралы второго рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полусегменте $[a, b)$ и $f(x) \to \infty$ при $x \to b - 0$. Тогда по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \cdot \tag{3.1}$$

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $(a, b]$ и $f(x) \to \infty$ при $x \to a + 0$, то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \cdot \tag{3.2}$$

Если пределы (5.1), (5.2) существуют (как конечные или как бесконечные), то они называются *несобственными интегралами второго рода* от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$. Если эти пределы конечны, говорят, что данный несобственный интеграл *сходится*, в противном случае – *расходится*. Когда пределы (5.1), (5.2) не существуют (ни как конечные, ни как бесконечные), соответствующий несобственный интеграл понимается лишь как символ.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ за исключением точки c, $a < c < b$, и при этом $f(x) \to \infty$ при $x \to c$, то по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx\,. \tag{3.3}$$

Интеграл по промежутку $[a, b]$ по определению считается сходящимся тогда и только тогда, когда сходятся оба слагаемых интеграла в формуле (5.3) по промежуткам $[a, c]$ и $[c, b]$.

Пример 3.1. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} x^{-2/3}dx = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} 3x^{1/3}\Big|_{-1}^{-\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0}\left(-3\sqrt[3]{\varepsilon} + 3\right) = 3.$

Пример 3.2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim\limits_{\varepsilon \to +0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = +\infty$. Интеграл расходится.

Пример 3.3.

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} + \int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-1/3}dx + \lim_{\theta \to +0} \int\limits_{1+\theta}^{3} (1-x)^{-1/3}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{3}{2}\varepsilon^{2/3}+\frac{3}{2}\right)+\lim_{\theta\to+0}\left(-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{\theta^2}\right)=\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{4}\right).$$

На несобственные интегралы второго рода (5.1) и (5.2) переносится формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\,. \tag{3.4}$$

Здесь $F(x)$ – первообразная функция, непрерывная в точке a справа, а в точке b – слева. Её существование предполагается. При этом по определению

$$F(b)=\lim_{x\to b-0}F(x);\ F(a)=\lim_{x\to a+0}F(x)\,. \tag{3.5}$$

Пример 3.4. Вычисление интеграла в примере 3.1 может быть записано следующим образом:

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=3x^{1/3}\Big|_{-1}^{0}=0-(-3)=3\,.$$

Геометрический смысл несобственного интеграла второго рода. Рассмотрим сходящийся интеграл вида (3.1) при условии, что функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на полусегменте $[a, b)$.

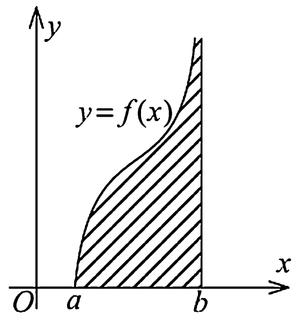


Рис. 3.1. *Бесконечная криволинейная трапеция, соответствующая несобственному интегралу второго рода вида (3.1)*

Этот интеграл равен площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной промежутком $[a, b]$, графиком функции $f(x)$ и вертикальной асимптотой графика $x = b$ (рис. 3.1).

§ 4. Свойства несобственных интегралов второго рода

Эти свойства аналогичны свойствам несобственных интегралов первого рода. В этом случае $f(x)$ непрерывна на полусегменте $[a, b)$ и $f(x)\to\infty$ при $x\to b-0$.

Теорема 4.1 (*свойство аддитивности*). Пусть $a < c < b$. Если сходится интеграл по промежутку $[a, b]$, то сходится и интеграл по отрезку $[c, b]$, и наоборот. При этом выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\,. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2 (*свойство линейности*). Если сходятся интегралы $\int_a^b f_1(x)\,dx$ и

$\int_a^b f_2(x)\, dx$, то сходится интеграл $\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]\, dx$ и верно равенство

$$\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)] dx = C_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + C_2 \int_a^b f_2(x)\, dx \cdot \tag{4.2}$$

Теорема 4.3. Если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$, то подавно сходится интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$.

Определение 4.1. Если сходится интеграл от модуля подынтегральной функции, то несобственный интеграл от данной функции называется *абсолютно сходящимся*. Если данный несобственный интеграл сходится, а интеграл от модуля подынтегральной функции расходится, то данный интеграл называется *неабсолютно сходящимся* или *условно сходящимся*.

Замечание 4.1. На несобственные интегралы второго рода распространяются методы интегрирования по частям и замены переменной.

Пример 4.1. $\int_0^1 \ln x dx = \left[\begin{array}{c|c} u = \ln x & du = (1/x)\, dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] = x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 dx =$

$= \ln 1 - \lim\limits_{x \to +0} x \ln x - 1 = -1$, так как по правилу Лопиталя $x \ln x \underset{x \to +0}{\longrightarrow} 0$.

Замечание 4.2. Точки, в которых подынтегральная функция терпит разрыв, обращаясь в бесконечность, называют *особыми*. К особым точкам относят также несобственные числа $\pm\infty$ в случае несобственных интегралов первого рода.

Глава 5. **Приложения определённого интеграла**

§ 1. Вычисление площади фигуры в прямоугольных декартовых координатах

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то площадь S криволинейной трапеции (рис. 1.1), ограниченной графиком этой функции и опирающейся на отрезок $[a, b]$, определяется формулой (§ 1, гл. 3):

$$S = \int_a^b f(x)\, dx \cdot \tag{1.1}$$

Пример 1.1. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \tag{1.2}$$

► Ввиду симметрии эллипса относительно осей координат (рис. 1.2) достаточно вычислить площадь одной четверти фигуры, а затем учетверит результ-

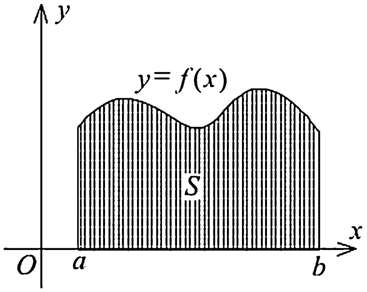


Рис. 1.1. Криволинейная трапеция

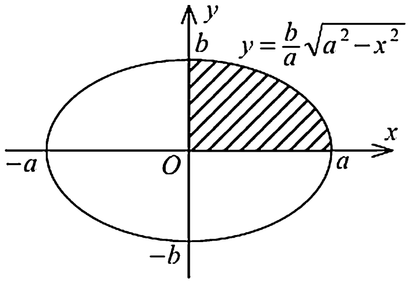


Рис. 1.2. Эллипс

тат. Из (1.2) находим $y=b\sqrt{a^2-x^2}/a$. Тогда в силу (1.1) получаем $S=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$. Сделав подстановку $x=a\sin t$, получаем $dx=a\cos t dt$; $x=0 \Rightarrow t=0, x=a \Rightarrow t=\pi/2$. Поэтому

$$S=4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=2ab\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\pi ab.$$

Итак, площадь, ограниченная эллипсом с полуосями a и b, равна πab .◄

§ 2. Вычисление объёма тела через площади его сечений

Рассмотрим некоторое тело (V), содержащееся между плоскостями $x=a$ и $x=b$, и станем рассекать его плоскостями, перпендикулярными к оси Ox (рис. 2.1). Если $S(x)$ – площадь сечения тела плоскостью в точке с абсциссой x, то объём V этого тела равен

$$V=\int_a^b S(x)dx. \tag{2.1}$$

Пример 2.1. Найти объём тела, ограниченного эллипсоидом с полуосями a, b, c (рис. 2.2):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{2.2}$$

► В сечении эллипсоида (2.2) плоскостью, параллельной плоскости Oyz, в

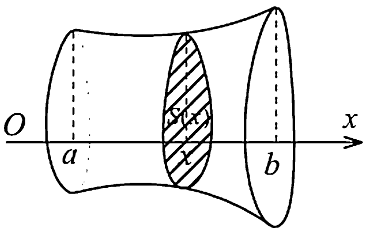


Рис. 2.1. Тело (V) и его сечение плоскостью, перпендикулярной оси Ox

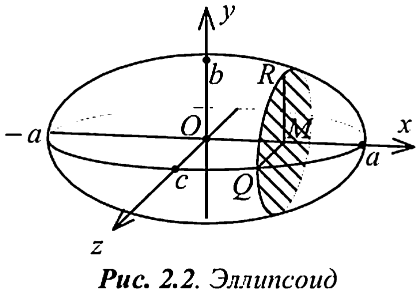


Рис. 2.2. Эллипсоид

► В сечении эллипсоида (2.2) плоскостью, параллельной плоскости Oyz, в точке M с абсциссой x получится эллипс $\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}=1$ с полуосями $MQ = b(1 - x^2/a^2)$ и $MR = c(1 - x^2/a^2)$. Фигура, ограниченная этим эллипсом, на рис. 2.2 заштрихована.

Площадь $S(x)$, ограниченная эллипсом с полуосями MQ и MR, как следует из примера 1.1, равна $S(x) = \pi\cdot MQ\cdot MR = \pi bc(1 - x^2/a^2)$. Отсюда в соответствии с (2.1) имеем $V=\int\limits_{-a}^{a} S(x)\,dx=\int\limits_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\dfrac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \pi bc(a - a/3 + a - a/3) = 4\pi abc/3$.◄

Частный случай – объём тела вращения. Пусть фигура, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ (рис. 2.3), вращается вокруг оси Ox. Найти объём V получающегося при этом тела вращения.

►Это легко сделать при помощи формулы (2.1), если учесть, что сечение тела вращения (V) плоскостью, пересекающей ось Ox в точке x, есть круг радиуса $y = f(x)$. Отсюда $S(x) = \pi y^2$, и, следовательно,

$$V=\pi\int\limits_a^b y^2dx. \tag{2.3}$$

При использовании формулы (2.3) надо заменить y функцией $f(x)$, входящей в уравнение $y=f(x)$.◄

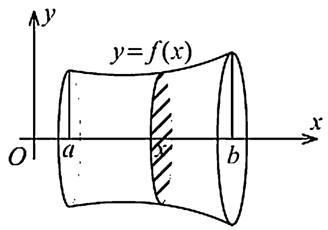


Рис. 2.3. Тело вращения вокруг оси Ox

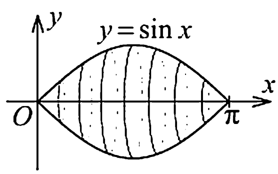


Рис. 2.4. Иллюстрация к примеру 2.2

Пример 2.2. Найти объем V тела, образованного вращением фигуры, ограниченной осью Ox и полуволной синусоиды $y=\sin x$ (рис. 2.4).

► $V=\pi\int\limits_0^\pi y^2dx=\pi\int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx=\pi\int\limits_0^\pi\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\dfrac{\pi^2}{2}$. ◄

§ 3. Вычисление длины дуги кривой

Наряду с вычислением площадей плоских фигур и объёмов тел одной из важнейших геометрических задач, решаемых методами интегрального исчисления, является нахождение длины дуги кривой.

Рассмотрим дугу AB плоской кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, имеющей на промежутке $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$. Дуга AB, определяемая уравнением $y = f(x)$, в этом случае называется *гладкой*.

Функция $\sqrt{1+f_x'^2(x)}$ непрерывна на $[a,b]$, это следует из непрерывности $f'(x)$. Для длины L дуги гладкой кривой $y=f(x)$, содержащейся между точками с абсциссами $x=a$ и $x=b$, справедлива формула

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{3.1}$$

При использовании формулы (3.1) надо заменить y функцией $f(x)$, входящей в уравнение $y=f(x)$.

Пример 3.1. Найти длину дуги кривой $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\ln x}{4}$, $1\le x\le 3$.

► $1+y'^2=1+\left(x-\dfrac{1}{4x}\right)^2=1+x^2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{16x^2}=x^2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{16x^2}=\left(x+\dfrac{1}{4x}\right)^2.$

В силу формулы (3.1) получаем:

$$L=\int_1^3\sqrt{1+y'}\,dx=\int_1^3\sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}dx=\int_1^3\left(x+\frac{1}{4x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\ln x\right)\Bigg|_1^3=4+\frac{1}{4}\ln 3. ◄$$

§ 4. Приложения определённого интеграла к экономическим задачам

Рассмотрим следующую типовую задачу. Предприятие выпускает однородную продукцию. Производительность труда с течением времени от момента t_0 меняется по некоторому закону, задаваемому функцией $f(t)$. Требуется найти объём продукции, произведённой за промежуток времени $[t_1,\ t_2]$. Функию $f(t)$ будем предполагать непрерывной на этом промежутке.

Пусть Q – искомый объём продукции, а ΔQ – объём продукции, выпущенной за промежуток времени $[t,\ t+\Delta t]$. Если бы производительность труда $ft)$ за этот малый промежуток времени не менялась, то $\Delta Q=f(t)\Delta t$. Если она меняется, то это произведение есть лишь главная часть ΔQ, пропорциональной Δt, что можно записать в виде

$$\Delta Q=f(t)\Delta t+o(\Delta t). \tag{4.1}$$

Здесь $o(\Delta t)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δt: $o(\Delta t)/\Delta t\to 0$ при $\Delta t\to 0$. Действительно, за бесконечно малое время Δt функция $f(t)$ изменится на бесконечно малую величину Δf, что в произведении с Δt даст бесконечно малую высшего порядка, чем Δt. Эта бесконечно малая отнесена в $o(\Delta t)$. Итак, первое слагаемое $f(t)\Delta t$ в формуле (4.1) есть главная часть ΔQ, обьёма выпушеной продукции за промежуток времени $[t,\ t+\Delta t]$, пропорциональная Δt, т. е. по определению – это дифференциал функции $dQ(t)=f(t)\Delta t$. Интегрируя дифференциал в пределах T_1 и T_2, находим

$$Q=\int_{t_1}^{t_2}dQ(t)=\int_{t_1}^{t_2}f(t)dt. \tag{4.2}$$

Пример 4.1. Изменение производительности труда с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задаётся функцией

$z(t).=1+0{,}25\sqrt[3]{t}$, где t – время в месяцах. Найти объём продукции, произведённой за восьмой месяц года, считая от начала внедрения рассматриваемого нового технологического процесса.

►По формуле (4.2) получаем

$$Q(8)=\int_0^8(1+0.25\sqrt[3]{t}))dt=\left(t+\frac{3}{16}t^{4/3}\right)_{t=8}=11.◄$$

Пример 4.2. Задана функция предельных издержек

$$MS=3x^2-30x+100,\, x\in[0,40].$$

Найти функцию издержек $S(x)$ и вычислить издержки при производстве 10 единиц продукции, если известно, что издержки для производства первой единицы продукции составляют 50 денежных единиц.

►Функцию издержек находим интегрированием

$$S(x)=\int(3x^2-30x+100)dx=x^3-15x^2+100x+C.$$

Константа C определяется условием $S(1)=50$, так что $C=50$, ибо $S(0)=0$. Получаем функцию издержек $S(x)=x^3-15x^2+100x+50$. Подставляя $x=10$, находим $S(10)=550$ (ден. ед.).◄

Пример 4.3. Определить величину начального вклада П, если выплаты по вкладу равны $S=150$ ден. ед. ежегодно в течении пяти лет, а процентная ставка равна $p=5\%$ в год.

►Используя формулу из [5], получаем

$$П=\int_0^5 Se^{-pt/100}dx=\int_0^5 150e^{-3t/100}dt=657 \text{ (ден. ед.)}.◄$$

Глава 6. **Задания для проверки качества усвоения раздела 6**

§ 1. Задачи для самостоятельной работы

Вычислите интегралы:

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$; **2.** $\int\frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}}dx$; **3.** $\int x\sin(3x+5)\,dx$;

4. $\int\frac{\mathrm{tg}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$; **5.** $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; **6.** $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;

7. $\int\frac{(x^3-1)\,dx}{4x^3-x}$; **8.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$; **9.** $\int\frac{(x+1)}{x\sqrt{x-2}}dx$;

10. $\int\sin^3x\cos^2x\,dx$; **11.** $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$; **12.** $\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

13. $\int\frac{(2x-8)\,dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$; **14.** $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$·; **15.** $\int\frac{dx}{1+\sin^2x}$.

16. Вычислите определённые интегралы:

а) $\int\limits_0^x (4-3x)e^{-3x}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x\, dx$; в) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

17. Вычислите или установите расходимость несобственных интегралов:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx$; в) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x-1}$; г) $\int\limits_1^2 \frac{(1+\ln x)dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

18. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=(x-2)^2$, $y=4x-8$.

19. Вычислите объём тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной дугами парабол $y^2=x$, $x^2=y$.

20. Вычислите длину дуги кривой $y=\ln x$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

21. Изменение производительности труда с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задаётся функцией $z(t).=\sqrt{4+0{,}5t}$ где t – время в месяцах. Найти объём продукции, произведённой: за десятый месяц года, считая от начала внедрения рассматриваемого нового технологического процесса.

22. Задана функция предельных издержек: $MS = 6x^2 - 40x + 100$, $x\in[0, 40]$. Найти функцию издержек S(x) и вычислить издержки при производстве 10 единиц продукции, если известно, что издержки для производства первой единицы продукции составляют 150 денежных единиц.

23. Определить величину начального вклада П, если выплаты по вкладу $S =$ $= 100$ тыс. руб. ежегодно в течении $T = 4$ лет, а процентная ставка $p = 7$ % в год.

Ответы к задачам для самостоятельной работы

1. $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{7}}+C$. **2.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}+C$. **3.** $-\frac{x\cos(3x+5)}{3}+\frac{\sin(3x+5)}{9}+C$.

4. $-2\ln\left|\cos\sqrt{x-1}\right|+C$. **5.** $-0.5x\sqrt{1-x^2}+0.5\arcsin x+C$.

6. $2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{e^x-1}+C$. **7.** $\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|$.

8. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$. **9.** $12\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}\right)+C$.

10. $\frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x-5)+C$. **11.** $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **12.** $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{2}+C$.

13. $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C$. **14.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$.

15. $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\cdot\mathrm{tg}\,x)+C$. **16. а)** $(x+1/3)e^{-3x}-1/3$; **б)** 2/15; **в)** $\pi/4$.

17. а) расходится; **б)** 1; **в)** расходится; **г)** $2\sqrt{\ln 2}+(2/3)\ln 2\cdot\sqrt{\ln 2}$.

18. 32/3. **19.** $3\pi/10$. **20.** $1+0.5\ln(3/2)$. **21.** 36. **22.** 1150. **23.** 348 тыс. руб.

§ 2. Контрольные вопросы к разделу 6

1. Какая функция называется первообразной по отношению к функции $f(x)$, заданной на данном промежутке?

2. В чем состоит свойство линейности для неопределенного интеграла?

3. Запишите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

4. Какую подстановку нужно выполнить для рационализации интегралов $\int R\left(\sqrt[3]{x},\sqrt[4]{x}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$.

5. Какой интеграл называется неберущимся?

6. Сформулируйте достаточное условие существования первообразной.

7. Чему равен $\int F'(x)dx$? , $\int dF(x)$?

8. Покажите, что функции $F_1(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$; $F_2(x)=\sin^2 x$ являются первообразными одной и той же функции на числовой оси.

9. Докажите справедливость формулы для табличного интеграла $\int x^n dx;(n\neq -1.)$.

10. Докажите справедливость формулы для табличного интеграла $\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}$.

11. Вычислите интеграл $\int\dfrac{dx}{x^2+px+q};\left(q-\dfrac{p^2}{4}<0\right)$, сведя его к табличному.

12. Вычислите интеграл $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$, сведя его к табличному.

13. Вычислите с помощью интегрирования по частям $\int x\sin axdx$.

14. Запишите формулу, определяющую определенный интеграл как предел интегральной суммы. Объясните смысл величин, входящих в формулу.

15. Запишите интегральную сумму, составленную для функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$. Объясните смысл величин, входящих в формулу.

16. Какой геометрический смысл имеет определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывная неотрицательная функция?

17. Сформулируйте достаточные условия интегрируемости функции $f(x)$ на конечном промежутке $[a,b]$.

18. Чему равен $\int_a^b F'(x)dx$? $\int_a^b dF(x)$?

19. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции на промежутке $[a,b]$.

20. Чему равен определенный интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку $[-a;a]$?

21. Если пределы интегрирования поменять местами, то как изменится величина интеграла? Выразите это свойство формулой.

22. Сформулируйте свойство линейности определенного интеграла.

23. Сформулируйте свойство, связывающее знаки функции и определенного интеграла на промежутке $[a,b]$.

24. Сформулируйте свойство об интегрировании неравенства между функциями на промежутке $[a,b]$.

25. Сформулируйте свойство об оценке модуля определенного интеграла.

26. Сформулируйте теорему о среднем для определенного интеграла от непрерывной функции.

27. Приведите геометрическую интерпретацию теоремы о среднем для определенного интеграла.

28. Что такое среднее (интегральное) значение функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$?

§ 3. Тесты по разделу 6

Вар. № 1	**Раздел 6. Интегральное исчисление функций одной переменной**
1	Выделите целую часть дроби $\dfrac{x^4+3x^2-1}{x^3+x}$.
2	Вычислите интеграл $\int\dfrac{7x}{\sqrt{5x^2-4}}dx$.
3	Вычислите интеграл $\int\dfrac{\sin x+2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$.
4	Вычислите интеграл $\int x\sin x\,dx$.
5	Вычислите неопределенный интеграл $\int\dfrac{x-5}{2x^2+x-4}dx$.
6	Вычислите неопределенный интеграл $\int\dfrac{2x^3+3}{x-1}dx$.
7	Вычислите интеграл $\int\cos^4 3x\sin^2 3x\,dx$.
8	Вычислите неопределенный интеграл $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}+3}$.
9	Вычислите определенный интеграл $\int\limits_1^e\sqrt{x}\ln x\,dx$.
10	Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2=2x+3$, $y=x$.
11	Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.
12	Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=0$, $y^2=4x$, $x=1$.

Вар. № 2	**Раздел 6. Интегральное исчисление функций одной переменной**
1	Выделите целую часть дроби $\dfrac{4x^4+2x^2-x-3}{x^3-x}$.

2	Вычислите интеграл $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^5+3}}dx$.
3	Вычислите интеграл $\int \frac{x+5}{\sqrt{1+x^2}}dx$.
4	Вычислите интеграл $\int (2x+1)\cos x\,dx$.
5	Вычислите неопределенный интеграл $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx$.
6	Вычислите неопределенный интеграл $\int \frac{2x^3-3}{x-2}dx$.
7	Вычислите интеграл $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.
8	Вычислите неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}dx$.
9	Вычислите определенный интеграл $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.
10	Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\sqrt{x+1}$, $y=1-x$, $y=0$.
11	Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $y=2-x^2$.
12	Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

Ответы к заданиям тестов

Вариант 1

1) x. **2)** $\frac{7}{5}\sqrt{5x^2-4}+c$. **3)** $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos^2 x}+C$. **4)** $x\cos x+\sin x+C$.

5) $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+x-4\right|+\frac{21}{4\sqrt{33}}\ln\left|\frac{4x+1-\sqrt{33}}{4x+1+\sqrt{33}}\right|+C$.

6) $\frac{2}{3}x^3+x^2+2x+5\ln|x-1|+C$. **7)** $\frac{1}{16}x-\frac{1}{192}\sin 12x+\frac{1}{144}\sin^3 6x+C$.

8) $2\sqrt{x}-6\ln\left|\sqrt{x}+3\right|+C$. **9)** $2\left(e^{3/2}+2\right)/9$. **10)** $16/3$. **11)** $1/3$. **12)** 2π.

Вариант 2

1) $4x$. **2)** $\frac{2}{5}\sqrt{x^5+3}+C$. **3)** $\sqrt{1+x^2}+5\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$.

4) $(2x+1)\sin x+2\cos x+C$. **5)** $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2-2x-3\right|+\frac{2}{3\sqrt{10}}\ln\left|\frac{3x-1-\sqrt{10}}{3x-1+\sqrt{10}}\right|+C$.

6) $\frac{2}{3}x^3+2x^2+8x+13\ln|x-2|+C$. **7)** $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C$.

8) $2\sqrt{x+2}+\sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}\right|+C$. **9)** $4-2\sqrt{e}$. **10)** $16/3$. **11)** $1/3$. **12)** $\frac{3\pi}{10}$.

Раздел 7. **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

Краткая характеристика раздела

1. Темы раздела. Точечные множества в конечномерном пространстве. Функции нескольких переменных. Предел. Непрерывность. Частные производные и дифференциалы. Производная по направлению, градиент. Экстремумы, наибольшее и наименьшее значения функции. Двойной интеграл.

2. Базисные понятия. n-мерная точка и n-мерное пространство. Функция нескольких переменных как функция точки. Непрерывность функции нескольких переменных. Частная производная. Полный дифференциал. Частные производные в экономике. Экстремум. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции. Интегральная сумма по плоской области. Двойной интеграл.

3. Основные задачи. Отыскание области определения функции нескольких переменных. Нахождение частных производных и полных дифференциалов первого и высших порядков. Отыскание экстремумов, наибольших и наименьших значений функций.

Глава 1. **Понятие функции нескольких переменных. Предел. Непрерывность**

§ 1. Пространство $\boldsymbol{R}_m$ и некоторые его подмножества

Определение 1.1. Множество $\{(x_1, \ldots, x_m), x_i \in \boldsymbol{R}, i = 1, \ldots, m\}$ всевозможных упорядоченных наборов из m вещественных чисел называется *m-мерным координатным пространством*. Элементы этого множества называются *точками* и обозначаются $M(x_1, \ldots, x_m)$, а числа $x_1, \ldots, x_m$ – их *координатами*. Точку, все координаты которой равны нулю, называют *началом координат*.

Расстоянием между двумя точками m-мерного координатного пространства $M_1(x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})$ и $M_2(x_1^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)})$ назовём вещественное число $\rho(M_1, M_2)$, определяемое равенством

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})^2 + \ldots + (x_m^{(1)} - x_m^{(2)})^2}. \tag{1.1}$$

Определение 1.2. m-мерное координатное пространство с расстоянием между его точками, определяемым по формуле (1.1), называется *m-мерным евклидовым пространством* и обозначается $\boldsymbol{R}_m$.

Пространство $\boldsymbol{R}_1$ совпадает со множеством вещественных чисел $\boldsymbol{R}$ и геометрически интерпретируется с помощью числовой прямой. Пространства $\boldsymbol{R}_2$ и $\boldsymbol{R}_3$ интерпретируются как плоскость и трёхмерное пространство, в которых введены прямоугольные декартовы системы координат. Формула (1.1) обобщает известную из аналитической геометрии формулу расстояния между двумя точками на случай m-мерного пространства.

Определение 1.3. *Шаром* (*открытым шаром*) в $\boldsymbol{R}_m$ (или m-мерным шаром) с центром в точке $A(a_1, \ldots, a_m)$ и радиусом r называется множество точек M из $\boldsymbol{R}_m$, удовлетворяющих условию $\rho(M, A) \leq r$ ($\rho(M, A) < r$).

Приведём примеры m-мерных шаров. При $m=1$ это отрезок $[a-r, a+r]$, двумерный шар ($m = 2$) – это круг с центром в точке $A(a_1, a_2)$ и радиусом r, при $m = 3$ получаем шар, известный из стереометрии, с центром в точке $A(a_1, a_2, a_3)$ и радиусом r.

Определение 1.4. Открытый шар в $\boldsymbol{R}_m$ с центром в точке $A(a_1, \ldots, a_m)$ и радиусом δ называют δ – *окрестностью* точки A и обозначают $U_\delta(A)$.

Определение 1.5. *m – мерным параллелепипедом* в пространстве $\boldsymbol{R}_m$ с центром в точке $A(a_1, \ldots, a_m)$ называется множество точек $M(x_1, \ldots, x_m)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $| x_i - a_i| \leq d_i$, $i=1, \ldots, m$ где d_i – некоторые положительные числа.

Одномерный параллелепипед – отрезок $[a_1 - d_1, a_1 + d_1]$, двумерный параллелепипед – прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, и с центром в точке $A(a_1, a_2)$ (рис. 1.1), трёхмерный параллелепипед – это прямоугольный параллелепипед, рёбра которого параллельны осям координат, а центр находится в точке $A(a_1, a_2, a_3)$ (рис. 1.2).

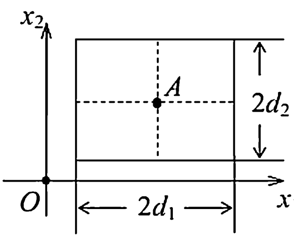


Рис. 1.1. Двумерный параллелепипед

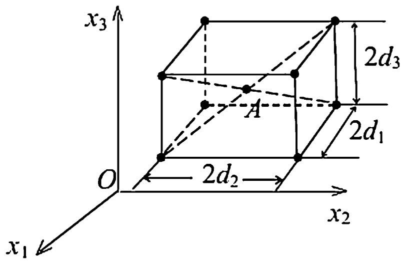


Рис. 1.2. Трёхмерный параллелепипед

Определение 1.6. *Непрерывной кривой* в пространстве $\boldsymbol{R}_m$ называется множество точек $M(x_1, \ldots, x_m)$ из $\boldsymbol{R}_m$, координаты которых заданы как непрерывные функции вспомогательного параметра t, изменяющегося на некотором отрезке: $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

§ 2. Открытые, связные, замкнутые, ограниченные множества в пространстве $\boldsymbol{R}_m$

Определение 2.1. Точка $A(a_1, \ldots, a_m)$ множества $E \subset \boldsymbol{R}_m$ называется *внутренней точкой* этого множества, если существует δ-окрестность точки A, любая точка которой принадлежит данному множеству (рис. 2.1).

Определение 2.2. Точка $A(a_1, \ldots, a_m)$ принадлежащая или не принадлежащая множеству $E \subset \boldsymbol{R}_m$, называется *граничной точкой* этого множества, если любая её δ-окрестность содержит как точки, принадлежащие этому множеству, так и точки, не принадлежащие ему (рис. 2.2). Совокупность всех граничных точек множества E называется его *границей.*

Определение 2.3. Множество $E \subset \boldsymbol{R}_m$ называется *открытым*, если все его

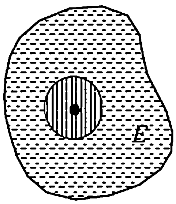


Рис. 2.1. *К понятию внутренней точки множества (определение 2.1)*

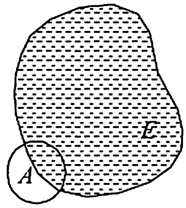


Рис. 2.2. *К понятию граничной точки множества (определение 2.2)*

точки внутренние. Множество $E \subset \boldsymbol{R}_m$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки.

Определение 2.4. Множество $E \subset \boldsymbol{R}_m$ называется *связным*, если две любые его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой будут принадлежать E. Открытое связное множество называют также *областью*, а объединение области с её границей называют *замкнутой областью.*

Например, δ – окрестность точки A (определение 1.4) – область, а m-мерный шар (определение 1.3) – замкнутая область.

Определение 2.5. Любая область, содержащая точку $A \in \boldsymbol{R}_m$, называется *окрестностью* этой точки. Для окрестности точки A принято обозначение: $U(A)$.

Проколотая окрестность точки A получается из области $U(A)$ удалением точки A, она обозначается как $\overset{\circ}{U}(A)$.

Определение 2.6. Множество $E \subset \boldsymbol{R}_m$ называется *ограниченным*, если все его точки принадлежат некоторому m-мерному шару. В противном случае множество E называется *неограниченным.*

Так, m- мерный параллелепипед – ограниченное множество точек из $\boldsymbol{R}_m$, так как все его точки принадлежат m - мерному шару с центром в точке $A(a_1, \dots, a_m)$ и радиусом $r = \sqrt{d_1^2 + \dots + d_m^2}$.

Определение 2.7. *Диаметром* множества $E \subset \boldsymbol{R}_m$ называется точная верхняя грань расстояний между двумя любыми точками этого множества.

Например, диаметром m - мерного параллелепипеда (определение 1.5) является число $d = 2\sqrt{d_1^2 + \dots + d_m^2}$.

§ 3. Понятие функции нескольких переменных

Определение 3.1. Если каждой точке $M(x_1, \dots, x_m) \in D \subset \boldsymbol{R}_m$ поставлено в соответствие некоторое вещественное число u, то говорят, что на множестве D задана *функция m переменных*. Для неё принято обозначение: $u = f(M)$ или $u= = f(x_1, \dots, x_m)$. Величины $x_1, \dots, x_m$ называют *независимыми переменными*, или *аргументами*, а•u – *зависимой переменной*, или *функцией*. Множество D называют *областью определения* функции и обозначают $D(u)$, $D(f)$.

Замечание 3.1. Функции двух и трёх переменных часто обозначают так: $u = f(x, y)$, $u = f(x, y, z)$.

Замечание 3.2. Понятие области определения (задания) функции не следует путать с понятием области, как множества точек из $\boldsymbol{R}_m$, введённым в предыдущем параграфе (определение 2.4). Область определения функции может быть произвольным множеством, в то время как область в смысле определения 2.4 есть множество, удовлетворяющее некоторым условиям.

Пример 3.1. Найти область определения функции $u = \ln(1-x^2-y^2) + \sqrt{y}$. Является ли эта область замкнутой? ограниченной?

►Область определения функции $D(u)$ определяется неравенствами: $1-x^2-y^2>0$, т. е. $x^2+y^2<1$ (открытый круг) и $y\geq 0$ (верхняя полуплоскость). Поэтому $D(u)$ есть множество точек плоскости Oxy, имеющее форму полукруга, изображенного на рис. 3.1. Граничные точки этой области, находящиеся на оси Ox, принадлежат ей, а точки окружности $x^2+y^2=1$ не принадлежат, поэтому $D(u)$ незамкнутое множество. Она является ограниченной, так все её точки принадлежат кругу: $x^2+y^2\leq 4$ (рис. 3.1).◄

Пример 3.2. Найти область определения функции $u=\sqrt{y-x^2}$. Является ли эта область замкнутой? ограниченной?

►Координаты точек области определения функции $D(u)$ удовлетворяют неравенству $y-x^2\geq 0$, т. е. $y\geq x^2$. Таким образом, $D(u)$ – множество точек плоскости Oxy, показанное штриховкой на рис. 3.2. Оно содержит все свои граничные точки, поэтому оно замкнутое. Но $D(u)$ не является ограниченным множеством, ибо на плоскости Oxy нельзя построить круг, которому бы принадлежали все точки рассматриваемого множества.◄

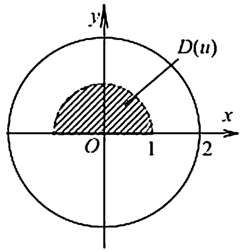


Рис. 3.1. Область определения функции в примере 3.1

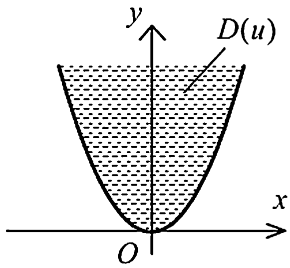


Рис. 3.2. Область определения функции в примере 3.2

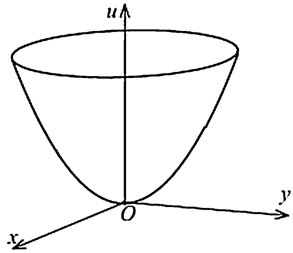


Рис. 3.3. Круговой параболоид – график функции $u = x^2 + y^2$

Для функции одной переменной $y = f(x)$ рассмотрено геометрическое представление в виде графика на плоскости Oxy (разд. 3), под ним понималось множество точек этой плоскости, определяемое уравнением, задающим эту функцию. Функция нескольких переменных геометрически интерпретируется только в случае функции двух переменных $u = f(x, y)$. Её графиком естественно считать поверхность в пространстве $Oxyu$, определяемую уравнением, задающим данную функцию. Так, график функции $u = x^2 + y^2$, заданной на всей плоскости Oxy, есть круговой параболоид (рис. 3.3).

Примеры функций нескольких переменных в экономике

Пример 3.3. *Функция спроса* в реальных условиях – функция нескольких переменных. Обычно спрос на некоторый товар зависит от его цены p_1, доходов потребителей Y и цены альтернативного товара p_2. Т. е. в этом случае функция спроса – функция трех переменных $Q = Q(p_1, p_2, Y)$.

Пример 3.4. *Производственная функция* (ПФ) нескольких переменных определяет зависимость объема Q выпуска продукции (блага) от объема затрачиваемых ресурсов $(x_1, x_2,\dots, x_k)$:

$$Q = f(x_1, x_2,\dots, x_k). \qquad (3.1)$$

В общем случае ПФ – функция нескольких (многих) переменных. Часто используется ПФ вида $Q = a_0 x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$, где a_0, α, β положительны (ПФ Кобба – Дугласа).

Замечание 3.3. В приложениях обычно $x_1 = K$ − объему используемых основных фондов, $x_2 = L$ − затратам живого труда. ПФ принимает вид $Q = A{\cdot}K^{\alpha}L^{\beta}$ (здесь A − параметр производительности конкретно взятой технологии, α − доля капитала в доходе ($0 < \alpha < 1$).

Пример 3.5. *Функция полезности* (ФП) определена на множестве потребительских наборов $(x_1, x_2,\dots, x_k)$ товаров (услуг). Значение ФП на наборе $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ равно потребительской оценке индивидуума для этого набора. Каждый потребитель имеет, вообще говоря, свою функцию полезности $U = U(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Функция полезности определяет оценку полезности того или иного набора продуктов (благ) с точки зрения потребителя.

Определение 3.2. *Поверхностью уровня* (*изоповерхностью*) функции $u = f(x, y, z)$ называется множество точек, в которых функция принимает одинаковые значения. Уравнение поверхности уровня: $f(x, y, z) = C$, где C – значение функции в точках изоповерхности.

Для функции двух переменных $u = f(x, y)$ поверхности уровня «превращаются» в линии уровня $f(x, y) = C$ (вспомните изотермы, изобары и т. д.). Линии уровня функции полезности $U = U(x_1, x_2) = C$ называются *кривыми безразличия*, линии уровня производственной функции $Q = f(x_1, x_2) = C$ называются *изоквантами* или *кривыми безразличия производства.*

§ 4. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Определение 4.1. Пусть функция $u = f(M)$ определена на $U(A)$ – некоторой окрестности точки A из $\boldsymbol{R}_m$ кроме, быть может, самой этой точки. Число b называется *пределом* функции $u = f(M)$ в точке A (или при $M \to A$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для $M \in U_\delta(A) \subset U(A)$ выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Обозначение: $b = \lim\limits_{M \to A} f(M)$ или $b = \lim\limits_{x_1 \to a_1, \dots, x_m \to a_m} f(x_1, \dots, x_m)$.

Здесь $a_1, a_2, \dots, a_m, b$ – все или некоторые из них – могут быть и символами $\infty, +\infty, -\infty$.

Функции нескольких переменных, имеющие предел в данной точке, обладают свойствами, аналогичными свойствам функции одной переменной, имеющими предел (§ 2, гл. 3, разд. 3). Справедливы теоремы о пределах суммы, произведения и частного двух функций. Для функций нескольких переменных также вводятся понятие бесконечно малой и бесконечно большой функции при $M \to A$, понятие о сравнении таких функций и т. п.

Определение 4.2. Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если выполнены следующие три условия:

1) она определена на $U(M_0)$ – некоторой окрестности точки M_0;

2) существует $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$; 3) справедливо равенство

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0). \tag{4.1}$$

Определение 4.3. Разность значений функции $u=f(M)$ в точках M и M_0 называется *приращением функции* в точке M_0 и обозначается Δu. Итак,

$$\Delta u=f(M)-f(M_0). \tag{4.2}$$

Перепишем (4.1) в виде: $\lim\limits_{M\to M_0}(f(M)-f(M_0))=0$. Отсюда имеем

$$\lim_{M\to M_0}\Delta u=0. \tag{4.3}$$

Пусть даны координаты точек M и M_0: $M(x_1, \ldots, x_m)$, $M_0(x_1^{(0)},\ldots,x_m^{(0)})$. Разности координат этих точек назовём *приращениями аргументов* функции $u=f(x_1,\ldots,x_m)$ в точке M_0 и введём обозначения: $\Delta x_i=x_i-x_i^{(0)}$, $i=1,2,\ldots,m$. Из последнего равенства имеем $x_i=x_i^{(0)}+\Delta x_i$, $i=1,2,\ldots,m$. Теперь приращение функции Δu можно записать в виде

$$\Delta u=f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,\ldots,x_m^{(0)}+\Delta x_m)-f(x_1^{(0)},\ldots,x_m^{(0)}),$$

а равенство (4.3) в виде

$$\lim_{\Delta x_1\to 0,\ldots,\Delta x_m\to 0}\Delta u=0. \tag{4.4}$$

Равенство (4.4) следует из соотношения (4.3) и, следовательно, из (4.1). Обратно, если выполняется (4.4), то выполняется и (4.1). Итак, обоснована следующая теорема.

Теорема 4.1 (*необходимое и достаточное условие непрерывности*). Функция $u=f(M)$, заданная в области $D\subset \boldsymbol{R}_m$, непрерывна в точке $M_0\in D$ тогда и только тогда, когда бесконечно малым приращениям аргументов в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример 4.1. Показать, что функция $u=\sqrt{|x|\cdot|y|}$ непрерывна в точке (0, 0).

►$\Delta u = u(0+\Delta x, 0+\Delta y)-u(0, 0)=\sqrt{|\Delta x|\cdot|\Delta y|}\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, поэтому данная функция непрерывна в точке (0, 0) в силу теоремы 4.1◄.

Замечание 4.1. Если ввести обозначение $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_n^2}$, то равенство (4.4) можно записать так: $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta u=0$.

Определение 4.4. Функция $u=f(M)$, заданная в области $D\subset \boldsymbol{R}_m$, называется *непрерывной* в D, если она непрерывна во всех точках этой области.

Легко показать, как и в случае функции одной переменной, что сумма, разность, произведение, частное и суперпозиция непрерывных в области D функций нескольких переменных суть функции непрерывные в этой области (в случае частного знаменатель предполагают не равным нулю).

Из высказанных утверждений следует теорема.

Теорема 4.2. Все элементарные функции нескольких переменных непрерывны в любой области, содержащейся в области их определения.

Основные теоремы о функциях одной переменной, непрерывных на отрезке, распространяются на функции нескольких переменных, непрерывных в замкнутой ограниченной области, являющейся в пространстве $\boldsymbol{R}_m$ аналогом отрезка числовой прямой.

Теорема 4.3 (*первая теорема Вейерштрасса*). Если функция $u=f(M)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $D\subset\boldsymbol{R}_m$, то она ограничена в ней, т. е. существует такое вещественное число L, что $|f(M)|\leq L$, $\forall M \in D$.

Теорема 4.4 (*вторая теорема Вейерштрасса*). Функция $u=f(M)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области $D\subset\boldsymbol{R}_m$, принимает в ней свои наибольшее и наименьшее значения.

Теорема 4.5 (*первая теорема Больцано – Коши*). Пусть функция $u=f(M)$ непрерывна в области $D\subset\boldsymbol{R}_m$ и в некоторых двух точках этой области принимает значения разных знаков. Тогда внутри этой области найдётся хотя бы одна точка C такая, что $f(C)=0$.

Определение 4.5. Если для функции $u=f(M)$ в точке M_0 не выполняется хотя бы одно из условий 1) – 3) из определения 5.1, то точка M_0 называется *точкой разрыва* функции $f(M)$.

Пример 4.2. Функция $f(x, y)=1/(x^2+y^2)$ непрерывна как элементарная во всех точках плоскости Oxy, кроме точки (0, 0), где знаменатель обращается в нуль.

С приближением точки $M(x, y)$ к точке (0, 0) функция неограченно возрастает: $\lim\limits_{M\to(0,0)} f(M)=+\infty$. Точка (0, 0) – точка разрыва данной функции. Поведение этой функции вблизи точки (0, 0) показано на рис. 4.1.

Замечание 4.2. Для функции нескольких переменных невозможна такая простая классификация точек разрыва, как для функции одной переменной (§ 2, гл. 3, разд. 3). Точки разрыва функции нескольких переменных могут быть не только изолированными (пример 4.2), но составлять линии, поверхности и т. д.

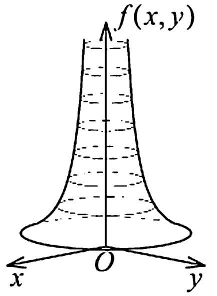


Рис. 4.1. *Иллюстрация к примеру 4.2*

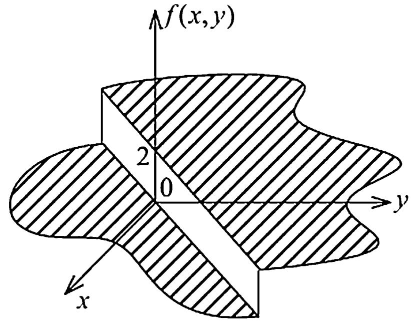


Рис. 4.2. *Иллюстрация к примеру 4.3*

Пример 4.3. Функция двух переменных $f(x,y)=\dfrac{|x-y|}{y-x}+1$ имеет конечные разрывы-скачки вдоль прямой $y-x=0$ (рис. 5.2), а функция трёх переменных $f(x,y,z)=\dfrac{|x+y+z-1|}{x+y+z-1}$ имеет разрывы на плоскости $x+y+z-1=0$.

Глава 2. **Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных, их приложения**

§ 1. Частные производные

1. Понятие частной производной. Ограничимся рассмотрением функций двух переменных, однако все результаты с очевидными изменениями переносятся на случай функций любого числа переменных.

Пусть $M(x, y)$ – внутренняя точка области определения функции $u=f(x,y)$. Придадим аргументу x приращение Δx, данная функция получит приращение $f(x+\Delta x, y)-f(x,y)$, которое называется её *частным приращением* и обозначается $\Delta_x u$. Итак,

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x, y)-f(x,y).$$

Определение 1.1. Если существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x}$, то он называется частной производной функции $u=f(x,y)$ в точке $M(x, y)$ по аргументу x и обозначается одним из символов: u'_x, f'_x, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная от функции $u=f(x,y)$ по аргументу y, её принято обозначать одним из символов: u'_y, f'_y, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. По определению имеем $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y u}{\Delta y}$.

При вычислении частных производных функции нескольких переменных все её аргументы фиксированы, кроме одного, поэтому частные производные вычисляются по формулам и правилам, приведённым в разделе 4 для функции одной переменной.

Пример 1.1. Найти частные производные функцци $u=x^y$ в любой допустимой точке (x,y).

► При вычислении частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ данную функцию считаем функцией одной переменной x, в этом предположении функция $u=x^y$ является степенной функцией аргумента x. По формуле для производной степенной функции имеем $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$. Вычисляя $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, фиксируем аргумент x и функцию $u=x^y$ считаем показательной функцией аргумента y. По правилу дифференцирования показательной функции получим $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x$.◄

2. Частные производные в экономике. Рассмотрим в качестве примера производственную функцию Кобба – Дугласа $Q=A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}$. Скорость изменения объема продукции Q при изменении одного из факторов – затрат капитала K или величины трудовых ресурсов L – и дают частные производные функции $\frac{\partial Q}{\partial K}$ и $\frac{\partial Q}{\partial L}$.

Напомним (разд. 4, гл. 1, § 11), что под *эластичностью функции* $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения относительного приращения функции $\Delta f(x)/f(x)$ к относительному приращению аргумента $\Delta x/x$ т. е.

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{f(x)}\Big/\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{f(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{x}{f(x)}f'(x).$$

Эластичность функции характеризует чувствительность функции к изменению значения аргумента. Она показывает насколько процентов изменится значение функции при изменении значения аргумента на 1%.

Для функции нескольких переменных обычная производная заменяется частной производной. Для производственной функции Кобба – Дугласа $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ эластичность выпуска продукции по затратам капитала $E_K(Q)$ и затратам труда $E_L(Q)$ определяется так:

$$E_K(Q)=\frac{K}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial K},\qquad E_L(Q)=\frac{L}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Эластичность выпуска продукции по затратам капитала $E_K(Q)$ показывает, насколько процентов изменится объем выпуска продукции при изменении затрат капитала на 1%. Эластичность выпуска продукции по затратам труда $E_L(Q)$ показывает, насколько процентов изменится объем выпуска продукции при изменении затрат труда на 1%.

§ 2. Частные производные высших порядков

Пусть функция $u=f(x, y)$ задана в области D и имеет в ней частные производные (они называются также *частными производными первого порядка*). Они являются функциями переменных x, y (вообще говоря, в новой области $D_1 \subset D$), и можно поставить задачу вычисления их частных производных. Эти частные производные (от функций f'_x, f'_y) называются *частными производными второго порядка* (*вторыми частными производными*) исходной функции и обозначаются следующими символами:

$$f''_{xx}(x,y), f''_{x^2}(x,y),\ f''_{xy}(x,y),\ f''_{yx}(x,y),\ f''_{yy}(x,y),\ f''_{y^2}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

Порядок расположения букв в нижнем индексе первой группы символов и в знаменателях второй группы указывает порядок вычисления производных. Так,

$$f''_{xy}(x,y)=(f'_x)'_y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \text{ и т. д.}$$

Частные производные $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ называют *смешанными*.

Пример 2.1. $u = x^{y}$. Найти вторые смешанные частные производные в любой допустимой точке (x,y).

► $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ были вычислены в примере 1.1: $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$. Имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^y \ln x) = yx^{y-1}\ln x + x^y \frac{1}{x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x. ◄$$

Смешанные производные второго порядка от функции из примера 2.1 удовлетворяют равенству $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Этот результат не случаен, такое равенство всегда будет иметь место при выполнении некоторых условий.

Теорема 2.1 (*о равенстве вторых смешанных производных*). Если функция $f(x, y)$ имеет в некоторой области D непрерывные смешанные частные производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$, то во всех точках этой области $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

Аналогично вводятся частные производные третьего и т. д. порядков; обозначения аналогичны: так, u'''_{xy^2} – частная производная третьего порядка, при этом функция u дифференцируется 1 раз по x и далее 2 раза по y.

Определение 2.1. *Частной производной n-го порядка* (*n-й частной производной*) называется частная производная от частной производной (n – 1) – го порядка. Частная производная n – го порядка от функции $u = f(x, y)$, взятая r раз по x и s раз по y ($r + s = n$), обозначается символом $\frac{\partial^n u}{\partial x^r \partial y^s}$.

Теорема 2.1 очевидным образом обобщается на случай любого числа переменных для смешанных производных любого порядка.

Теорема 2.2. Если частные производные n – го порядка функции нескольких переменных отличаются только порядком дифференцирования и непрерывны в рассматриваемой точке, то они равны в этой точке.

§ 3. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал

Пусть функция $u = f(x, y)$ задана в области D, а точка $(x, y) \in D$. Придадим аргументам x и y приращения Δx и Δy такие, чтобы точка $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$, и рассмотрим *полное приращение* функции

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

т. е. приращение функции по всем аргументам в отличие от частного приращения по одному аргументу.

Определение 3.1. Функция $u = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x, y), если существуют числа A и B такие, что полное приращение Δu в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \tag{3.1}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – расстояние между точками (x, y) и $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, $o(\rho)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем ρ, при $\rho \to 0$. Главная часть приращения Δu, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, называется *дифференциалом* (*полным дифференциалом*) данной функции и обозначается du, df. Таким образом,

$$du = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (3.2)$$

Пример 3.1. Показать по определению, что функция $u = x^2 + y^2$ дифференцируема в точке (3, 4) и найти её дифференциал.

►$\Delta u = ((3 + \Delta x)^2 + (4 + \Delta y)^2) - (3^2 + 4^2) = 6\Delta x + 8\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2$. Сравним полученное выражение с (3.1): $A = 6$, $B = 8$, $\Delta x^2 + \Delta y^2 = \rho^2 = o(\rho)$ при $\rho_{\to 0}$. Итак, полное приращение функции в данной точке представлено в форме (3.1), а это и означает, что функция дифференцируема в этой точке, $du = 6\Delta x + 8\Delta y$.◄

Замечание 3.1. Формулу (3.1) с учётом (3.2) можно записать так:

$$\Delta u = du + o(\rho). \qquad (3.3)$$

Необходимые условия дифференцируемости в точке.

Теорема 3.1 (*первое необходимое условие дифференцируемости*). Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то она непрерывна в этой точке.

►Из дифференцируемости функции $u = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ следует, что полное приращение Δu представимо в этой точке в виде (3.1). Пусть $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, тогда $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$. Из (3.1) получаем $\Delta u \to 0$, поэтому функция $u = f(x, y)$ непрерывна в точке M_0 (теорема 4.1, гл. 1).◄

Теорема 3.2 (*второе необходимое условие дифференцируемости*). Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные.

Замечание 3.2. При доказательстве теоремы 3.2 выяснен аналитический смысл коэффициентов A и B в формулах (3.1) и (3.2), а именно: они равны частным производным данной функции. Формулу (3.2) для дифференциала функции двух переменных теперь можно переписать так:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y \cdot \qquad (3.4)$$

Справедливы равенства: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Действительно, пусть $u \equiv x$. В силу (3.4) получаем: $du = dx = 1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y = \Delta x$. Аналогично обосновывается равенство $\Delta y = dy$. Соотношение (3.4) теперь можно записать в виде

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \cdot \qquad (3.5)$$

Дифференциал функции двух переменных обычно вычисляют по формуле (3.5).

Пример 3.2. Найти дифференциал функции $u = x^y$.

► $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ были вычислены в примере 1.1: $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$. В силу формулы (3.6) имеем $du = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$.◄

Для полного приращения Δu функции $u = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ из равенств (3.3), (3.5) получаем формулу:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + o(\rho)\cdot \qquad (3.6)$$

Замечание 3.3. Непрерывность и существование частных производных функции в данной точке необходимые, но не достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных в данной точке. Можно привести пример функции, непрерывной в данной точке, имеющнй в ней частные производные, но не дифференцируемой в этой точке [13, т. 1].

Следствие из теорем 3.1, 3.2. Если функция $u = f(x, y)$ не является непрерывной в данной точке или не имеет в ней частных производных, то она не дифференцируема в данной точке.

Достаточное условие дифференцируемости в точке.

Теорема 3.3. Если в некоторой окрестности точки (x, y) функция $u = f(x, y)$ имеет конечные частные производные f'_x и f'_y, непрерывные в этой точке, то она дифференцируема в этой точке.

Замечание 3.4. Произведения $f'_x(x,y)dx$ и $f'_y(x, y)dy$ называют *частными дифференциалами.*

Замечание 3.5. Понятие полного дифференциала для функции двух переменных $u = f(x, y)$ и формула (3.5) обобщаются на случай любого числа переменных. Так, если $u = f(x, y, z)$, то формула для его вычисления имеет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \cdot \tag{3.7}$$

Формула (3.6) также обобщается на случай функции любого числа переменных. Например, для функции трёх переменных $u = f(x, y, z)$ имеем:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + o(\rho) \cdot \tag{3.8}$$

Пример 3.3. Найти полный дифференциал функции $u = xy/z$.

► $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}$, $du = \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz$ ·◄

§ 4. Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ задана в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Из точки M_0 проведём луч l, направление которого определяется вектором $\vec{l}$ (рис. 4.1).

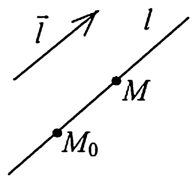


Рис. 4.1. *К определению 4.1*

На луче возьмём точку $M \neq M_0$ (рис. 4.1) и составим отношение $\frac{u(M) - u(M_0)}{|M_0M|}$, которое можно рассматривать как среднюю скорость изменения функции на отрезке M_0M. Устремим точку M вдоль луча к точке M_0.

Определение 4.1. Если существует конечный $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{|M_0M|}$, то он называется *производной по направлению* $\vec{l}$ функции $u = f(M)$ в точке M_0 и обозначается $\frac{\partial u}{\partial l}$. Таким образом, по определению имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{M\to M_0}\frac{u(M)-u(M_0)}{|M_0M|}. \tag{4.1}$$

Эту производную можно трактовать как скорость изменения функции в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$. При $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}>0$ в достаточно малой окрестности точки M_0 функция возрастает в направлении вектора $\vec{l}$. Вычисление производной по направлению основано на следующей теореме.

Теорема 4.1. Если функция $u=f(x,y,z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ из области определения функции, то в точке M_0 для любого направления $\vec{l}$ справедлива формула

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{4.2}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$, являющиеся координатами его орта $\vec{l}^{\,0}$: $\vec{l}^{\,0}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma$, а частные производные функции $u=f(x,y,z)$ вычислены в точке M_0.

В частности, если вектор $\vec{l}$ сонаправлен с одной из координатных осей, то производная по направлению $\vec{l}$ совпадает с соответствующей частной производной. Например, если $\vec{l}=(1,0,0)$, то $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot 1=\frac{\partial u}{\partial x}$.

Определение 4.2. *Градиентом* функции $u=f(x,y,z)$ в точке M_0 называется вектор, обозначаемый $\operatorname{grad}u$ и определяемый равенством:

$$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{j},$$

где частные производные вычислены в точке M_0.

Свойства градиента

1. Производную функции $u=f(x,y,z)$ в направлении вектора $\vec{l}$ можно записать как скалярное произведение $\operatorname{grad}u$ на орт вектора $\vec{l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=(\operatorname{grad}u,\vec{l}^{\,0}),\ \vec{l}^{\,0}\text{– орт вектора } \vec{l}. \tag{4.3}$$

2. Производная функции $u=f(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{l}$ принимает наибольшее значение в направлении $\operatorname{grad}u$, т. е. когда векторы $\vec{l}$ и $\operatorname{grad}u$ сонаправлены, при этом наибольшее значение $\frac{\partial u}{\partial l}$ равно $|\operatorname{grad}u|$.

3. В любой точке M_0 из области определения функции $u=f(x,y,z)$ $\operatorname{grad}u(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня данной функции, проходящей через точку M_0, т. е. к поверхности, задаваемой уравнением $f(x,y,z)=u(M_0)$ в сторону возрастания функции.

4. $\operatorname{grad}C=0$, C – постоянная.

5. $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$.

6. $\operatorname{grad}(uv)=v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v$.

7. $\operatorname{grad}\frac{u}{v}=\frac{v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v}{v^2},\quad v\neq 0.$

8. Градиент сложной функции: $\operatorname{grad}(u(v))=u'(v)\operatorname{grad}v$.

Пример 4.1. Для функции $u(x, y, z) = \ln(3 - x^2) + xy^2z$ найти градиент в точке $M_0(1, 1, 0)$ и производную в этой точке по направлению вектора $\vec{l}\,(2,-2,1)$.

$$\blacktriangleright\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2x}{3-x^2} + y^2 z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = 1.$$

В соответствии с определением 4.2 имеем $\operatorname{grad} u = -\vec{i} + \vec{j}$. Координаты орта направления определим с помощью равенства $\vec{l}^{\,0} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}\,|} = \frac{1}{3}(2,-2,1)$. Из (4.3) получаем $\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \vec{l}^{\,0}) = \frac{1}{3}(-1\cdot 2 + 0\cdot(-2) + 1\cdot 1) = -\frac{1}{3}$.◀

§ 5. Производные сложной функции. Инвариантность формы полного дифференциала. Формулы для вычисления дифференциалов

1. Производные сложной функции. Рассмотрим функцию $u = f(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$. Пусть функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ определены в некоторой окрестности $U(t_0)$ точки t_0, а точка $(x(t), y(t)) \in D(f)$ для $\forall t \in U(t_0)$, тогда говорят, что в $U(t_0)$ определена сложная функция $u = f(x(t), y(t))$. Здесь она является функцией одной переменной t.

Теорема 5.1. Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функции $x(t), y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, причём $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, то в $U(t_0)$ определена сложная функция $u = f(x(t), y(t))$ и имеет место равенство

$$\frac{du(t_0)}{dt} = f'_x(M_0)\frac{dx(t_0)}{dt} + f'_y(M_0)\frac{dy(t_0)}{dt}. \tag{5.1}$$

Замечание 5.1. Формула (5.1) переписывается в других обозначениях:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}, \tag{5.2}$$

при этом считаем, что все производные в (5.2) вычисляются в соответствующих точках.

Формулы (5.1) и (5.2) обобщаются на случай большего числа зависимых и независимых переменных. Пусть дана функция $u = f(x, y)$, где $x = x(t, v)$, $y = y(t, v)$. При аналогичных условиях можно говорить о сложной функции $u = f(x(t, v), y(t, v))$ переменных t, v; здесь x, y – промежуточные переменные. При вычислении производных $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial v}$ одна из независимых переменных фиксирована, в такой ситуации u становится функцией одной переменной. Для этих производных из формулы (5.2) следуют равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}, \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{5.4}$$

2. Инвариантность формы полного дифференциала первого порядка. Используя формулы (5.3), (5.4), вычислим полный дифференциал функции $u = f(x(t, v), y(t, v))$. Следуя (3.5), имеем

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial v}dv.$$

Подставим в это равенство выражения для производных $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial v}$ из (5.3), (5.4):

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv.$$

В правой части последнего соотношения перегруппируем слагаемые:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right). \tag{5.5}$$

Выражения в скобках в формуле (5.5) в силу (3.6) − дифференциалы dx, dy промежуточных переменных x, y, поэтому (5.5) записывается в виде

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{5.6}$$

Сравнение равенств (3.6) и (5.6) показывает, что дифференциал сложной функции $u = f(x(t, v), y(t, v))$ выражается через промежуточные переменные x и y точно так же, как если бы x и y были независимыми переменными. Итак, заключаем, что, как и в случае функции одной переменной, полный дифференциал функции нескольких переменных обладает свойством инвариантности формы.

Это свойство позволяет обобщить правило получения дифференциалов суммы, произведения и частного на случай функций многих переменных:

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = vdu + udv, \quad d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Действительно, используя только что доказанное свойство инвариантности полного дифференциала, можем написать, например,

$$d\frac{u}{v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right)du + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)dv = \frac{1}{v}du - \frac{u}{v^2}dv = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Пример 5.1. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = u - v$, $y = u + v$, $u = 7/2$, $v = 1/2$. Какое из равенств верно:

а) $dz = \frac{3dx - 4dy}{5}$; б) $dz = \frac{3dx + 4dy}{5}$; в) $dz = \frac{du + 7dv}{5}$; г) $dz = \frac{7du + dv}{5}$?

►Из условия задачи получаем: $x = 3$, $y = 4$. Найдём dz, используя свойство инвариантности полного дифференциала сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{5}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4}{5}, \; dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{3dx + 4dy}{5}.$$

Следвательно, формула б) справедлива. Вычислим $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{3}{5}\cdot 1 + \frac{4}{5}\cdot 1 = \frac{7}{5}, \; \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{3}{5}\cdot(-1) + \frac{4}{5}\cdot 1 = \frac{1}{5}.$$

Отсюда $dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{7du + dv}{5}$. Итак, справедлива и формула г).◄

§ 6. Дифференциалы высших порядков. Нарушение свойства инвариантности формы

Пусть $u=f(x, y)$ имеет непрывные частные производные до n – го порядка включительно на некоторой плоской области. Ёе полный дифференциал в любой точке (x, y) этой области определяется по формуле (3.6), причём в этой формуле $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ – произвольные приращения независимых переменных, т. е. произвольные числа, никак не зависящие от x и y. Поэтому можем изменять x и y, оставив dx и dy постоянными. В силу теоремы 3.3 du является дифференцируемой функцией двух переменных x и y; дифференциал от этой функции $d(du)$ называется *полным дифференциалом второго порядка* и обозначается d^2u. Итак, по определению $d^2u = d(du)$.

Аналогично $d^3u = d(d^2u)$ называется *полным дифференциалом третьего порядка* функции $u=f(x, y)$ и т. д. Полный дифференциал n – го порядка есть дифференциал от полного дифференциала $(n-1)$ – го порядка: $d^n u = d(d^n u)$, при этом дифференциалы независимых переменных полагаются постоянными.

Найдём явные выражения для введённых дифференциалов. Имеем

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)dy$$

или $$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2. \qquad (6.1)$$

Далее $$d^3u = d(d^2u) = d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2\right) =$$

$$=\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^2 + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dxdy + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}dy^2\right)dx + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2 + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dxdy + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^2\right)dy \Rightarrow$$

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3. \qquad (6.2)$$

Здесь предполагается, что все смешанные производные непрерывны в рассматриваемых точках. Тогда производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, будут равны между собой.

Пример 6.1. Найти d^2u и d^3u, если $u=\cos(2x-3y)$.

►Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = -2\sin(2x-3y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3\sin(2x-3y)$. Продифференцировав производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ по x и y, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\cos(2x-3y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -9\cos(2x-3y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6\cos(2x-3y).$$

Подставим выражения для производных второго порядка в (6.1):

$$d^2u = -4\cos(2x-3y)dx^2 + 12\cos(2x-3y)dxdy - 9\cos(2x-3y)dy^2 \text{ или}$$

$$d^2u = -\cos(2x-3y)(2dx-3dy)^2.$$

Найдём все 4 частные производные третьего порядка данной функции, для этого продифференцируем её вторые производные:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=8\sin(2x-3y),\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=-27\sin(2x-3y),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=-12\sin(2x-3y),\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=18\sin(2x-3y).$$

Подставив выражения для производных третьего порядка в (6.2), получим $d^3u = 8\sin(2x-3y)\,d^3x - 36\sin(2x-3y)d^2xdy + 54\sin(2x-3y)dxd^2y - 27d^3y$ или

$$d^3u = \sin(2x-3y)\,(2dx-3dy)^3.◄$$

Формулы (6.1) и (6.2) напоминают разложения для квадрата и куба суммы двух величин соответственно. Методом математической индукции можно доказать, что это сходство сохраняется и для дифференциала n-го порядка, т. е.

$$d^n u=\frac{\partial^n u}{\partial x^n}dx^n+C_n^1\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy+C_n^2\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2+\ldots+\frac{\partial^n u}{\partial y^n}dy^n. \qquad (6.3)$$

Формулу (6.3) можно записать в символическом виде:

$$d^n u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u. \qquad (6.4)$$

При переходе от (6.4) к (6.3) выражение в скобках возводят в степень n по формуле бинома Ньютона, при этом степени символов частных производных считают их порядком. После этого в числителях этих символов приписывают u. Таким способом формулы (6.1) и (6.2) могут быть получены из (6.4).

Замечание 6.1. В случае функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от m переменных понятие полного дифференциала второго, третьего и т. д. порядков вводится аналогично. При этом имеет место следующая символическая формула:

$$d^n u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u.$$

Можно показать, что в общем случае для сложной функции нескольких переменных свойство инвариантности, вообще говоря, не имеет места для дифференциалов второго и более высоких порядков [13]. В некоторых частных случаях дифференциалы любого порядка сложной функции нескольких переменных обладают свойством инвариантности формы. Так, если x и y – линейные функции независимых переменных t и v: $x = a_1t + b_1v + c_1$, $y = a_2t + b_2v + c_2$, то формула для d^2u имеет вид (6.1), как и в случае, когда и x, и y являются независимыми переменными.

Всё сказанное приложимо и к сложной функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ от k промежуточных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ($k > 2$), зависящих от независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$.

§ 7. Неявные функции, определяемые одним уравнением. Теорема существования. Вычисление производных

1. Теорема существования неявной функции. Для математики и её приложений представляет интерес выяснение условий, при которых уравнение с несколькими переменными определяет одну из них как функцию остальных.

Для простоты и наглядности рассмотрим случай, когда задано уравнение с тремя переменными.

Определение 7.1. Пусть каждой точке $M(x, y) \in D \subset \boldsymbol{R}_2$ уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (7.1)$$

ставит в соответствие число $z \in \boldsymbol{R}$ такое, что упорядоченный набор чисел (x, y, z) является решением этого уравнения. В этом случае говорят, что на множестве D уравнение (7.1) задаёт z как неявную функцию x, y: $z = f(x, y)$.

Пример 7.1. Дано уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и точка $(x, y) \in D$, где D – открытый круг с центром в начале координат и радиусом 1. На D это уравнение задаёт две неявные функции: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Пример 7.2. Уравнение $z^3 - xyz + y^2 = 16$ в некоторой окрестности точки $(1, 4)$ определяет единственную неявную функцию $z = f(x, y)$, причём $f(1, 4) = 2$. Это утверждение будет обосновано ниже.

Пример 7.3. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ не задаёт никакой функции.

Теорема 7.1 (*существования и дифференцируемости неявной функции*). Пусть функция $F(x, y, z)$ дифференцируема в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \boldsymbol{R}_3$, причём $F'_z(M)$ непрерывна в точке M_0. Если $F(M_0) = 0$, а $F'_z(M_0) \neq 0$, то в $U(M_0)$ уравнение (7.1) задаёт единственным образом z как неявную функцию x, y: $z = f(x, y)$, определённую и дифференцируемую в некоторой окрестности точки $N_0(x_0, y_0) \in \boldsymbol{R}_2$, при этом $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Покажем, что уравнение $z^3 - xyz + y^2 = 16$ (пример 7.2) задаёт z как неявную функцию x, y: $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности $U(M_0)$, $M_0(1, 4, 2)$. Функция $F(x, y, z) = z^3 - xyz + y^2 - 16$ непрерывно дифференцируема на $\boldsymbol{R}_3$, и тем самым в окрестности точки M_0, $F(M_0) = 0$, $F'_z(M_0) \neq 0$, т. е. выполнены все условия теоремы 7.1. Поэтому найдётся окрестность $U(M_0)$, в которой данное уравнение задаёт единственную неявную функцию $z = f(x, y)$, определённую и дифференцируемую в некоторой окрестности точки $N_0(1, 4)$, причём $f(1, 4) = 2$.

2. Вычисление частных производных неявной функции, заданной одним уравнением. Пусть для функции $F(x, y, z)$ из уравнения (7.1) выполнены условия теоремы 7.1 в окрестности произвольной точки $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}_3$. Тогда в окрестности точки $(x, y) \in \boldsymbol{R}_2$ уравнение (7.1) задаёт неявную функцию $z = f(x, y)$, при этом существуют z'_x и z'_y. В этих предположениях левая часть уравнения (7.1) есть сложная функция от x, y, она зависит от них непосредственно и через посредство z.

Пример 7.4. Найти частные производные неявной функции вида $z = f(x, y)$, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

►Возьмём производные по x, y от обеих частей данного уравнения, считая z функцией x, y: $2x + 2z \cdot z'_x = 0$, $2y + 2z \cdot z'_y = 0$. Отсюда:

$$z'_x = -\frac{x}{z}, \quad z'_y = -\frac{y}{z}, \quad z \neq 0. \blacktriangleleft \qquad (7.2)$$

Частные производные второго порядка от неявной функции, определяемой уравнением (7.1), вычисляют почленным дифференцированием равенств, полученных для производных первого порядка.

Пример 7.5. Найти вторые частные производные неявной функции, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

►Первые производные по x, y от этой функции были получены в примере 7.4 (формулы (7.3)). Возьмём производные по x от обеих частей первого из равенств (1.3), считая z функцией x, получим:

$$z''_{x^2} = -(x/z)'_x = -\frac{z - x \cdot z'_x}{z^2}.$$

Вместо производной z'_x подставим равную её величину из (7.3):

$$z''_{x^2} = -\frac{z - x \cdot (-x/z)}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3}.$$

Используя симметрию данного уравнения относительно x, y, имеем:

$$z''_{y^2} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3}.$$

Возьмём производные по y от обеих частей первого из равенств (7.3):

$$z''_{xy} = -(x/z)'_y = \frac{x \cdot z'_y}{z^2} = -\frac{xy}{z^3}.$$

Производную z'_y заменили равным ей выражением из формул (7.3).◄

Замечание 1.2. Определение (7.1) и теорему (7.1) можно переформулировать на случай задания неявной функции одной переменной уравнением $F(x, y) = 0$, а также и на случай задания неявной функции нескольких переменных уравненим вида $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$, $m>3$.

Глава 3. **Экстремумы функции нескольких переменных**

§ 1. Понятие экстремума функции нескольких переменных. Необходимые условия существования экстремума

Определение 1.1. Точка $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ называется *точкой максимума (минимума)* функции $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, если $u = f(M)$ определена на некоторой окрестности $U(M_0)$ и для любой точки M из этой окрестности справедливо неравенство $f(M) \le f(M_0)$ $(f(M) \ge f(M_0))$. Значение $f(M_0)$ называют *максимумом (минимумом)* данной функции.

Если для любой точки M на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(M_0)$ верно строгое неравенство $f(M) < f(M_0)$ $(f(M) > f(M_0)$, то точка M_0 называется *точкой строгого максимума (строгого минимума)* функции $u = f(M)$.

Точки максимума и минимума функции $u = f(M)$ называются *точками экстремума* этой функции.

Замечание 1.1. Так же, как и в случае функции одной переменной, утверждение: функция $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ имеет в точке M_0 строгий экстремум эквивалентно следующему утверждению: приращение функции $\Delta f(M_0)$ сохра-

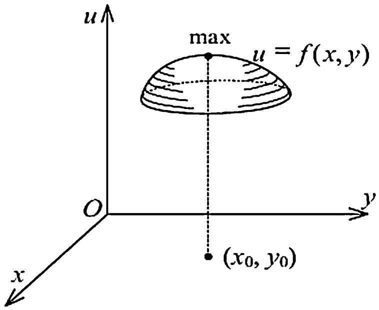


Рис. 1.1. *Иллюстрация к определению максимума функции*

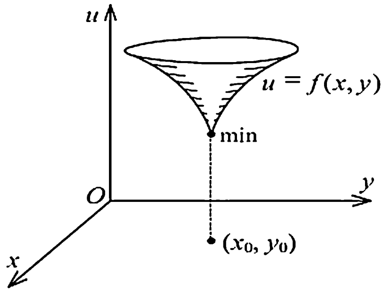


Рис. 1.2. *Иллюстрация к определению минимума функции*

няет знак на некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(M_0)$, а именно: $\Delta f(M_0) < 0$ для любой точки M из $\mathring{U}(M_0)$, если M_0 – точка максимума и $\Delta f(M_0) > 0$, если M_0 – точка минимума.

На рисунках 1.1, 1.2 приведена геометрическая иллюстрация понятия экстремума для случая функции двух переменных.

Теорема 1.1 (*необходимые условия существования экстремума*)**.** Если функция $u = f(x_1,\dots,x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^{(0)},\dots,x_m^{(0)})$ экстремум, то каждая из её частных производных $f'_{x_1},\dots,f'_{x_m}$ в этой точке либо равна нулю, либо ∞, либо не существует.

►Пусть функция $u = f(x_1,\dots,x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^{(0)},\dots,x_m^{(0)})$ экстремум. Возможны только два случая: либо $f'_{x_i}(M_0)$, $i=1,2,\dots,m$, либо существует, либо не существует. Если $f'_{x_i}(M_0)$ существует, то также возможны только два случая: либо $f'_{x_i}(M_0)$ конечна, либо $f'_{x_i}(M_0)=\infty$. Если $f'_{x_i}(M_0)$ конечна, то по теореме Ферма (§ 1, гл. 2, разд. 4) $f'_{x_i}(M_0)=0$, так как при вычислении $f'_{x_i}(M_0)$ все аргументы, кроме x_i, фиксированы, поэтому данная функция становится функцией одной переменной x_i: $u=f(x_1^{(0)},\dots,x_i,\dots,x_m^{(0)})$.◄

Определение 1.2. Точки из области определения функции $u=f(x_1, \dots, x_m)$, в которых её частные производные равны нулю, бесконечности, или не существует, называются *критическими точками* данной функции (иначе: *точками, подозрительными на экстремум)*. Точки, где все частные производные этой функции равны нулю, называют также *стационарными точками*.

Например, для функции $u = f(x, y)$ двух переменных x, y критические точки следует искать среди точек, где либо одновременно $f'_x(x,y)=0$, $f'_y(x,y)=0$, либо хотя бы одна из частных производных не существует или бесконечна.

Не всякая критическая точка будет точкой экстремума. Например, для функции $f(x,y)=x^3-y^3$ точка (0, 0) будет стационарной, так как $f'_x=3x^2$ и $f'_y=-3y^2$ равны нулю при $x=y=0$. Однако экстремума в этой точке нет. В самом деле, $f(0, 0) = 0$, а в любой окрестности точки (0, 0) найдутся значения функции разных знаков.

§ 2. Квадратичные формы

При решении различных прикладных задач часто приходится исследовать квадратичные формы.

Определение 2.1. *Квадратичной формой* $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j. \tag{2.1}$$

Предполагаем, что коэффициенты квадратичной формы a_{ij} – вещественные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из этих коэффициентов, называется матрицей квадратичной формы (2.1). Она является симметрической.

Определение 2.2. Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если при всех значениях переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ ($L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$).

Определение 2.3. Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, называется *неопределенной.*

Теорема 2.1 (*критерий Сильвестра*). Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны, т. е. $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n > 0$, где

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix}, i = 1, \ldots, n.$$

Следует отметить, что для отрицательно определенных квадратичных форм знаки главных миноров чередуются, начиная со знака «минус» для минора первого порядка [1].

Пример 2.1. Доказать, что квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ является положительно определенной.

►Напишем матрицу квадратичной формы. Ее диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных, т. е. 13 и 5, а другие элементы равны половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы, т. е. (–3): $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Главные миноры матрицы A $\Delta_1 = |a_{11}| = 13$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 56$ положительны, поэтому по критерию Сильвестра данная квадратичная форма L положительно определенная.◄

§ 3. Достаточные условия существования экстремума. Случай функции трёх переменных

Для простоты рассмотрим случай функции трёх переменных.

Теорема 3.1. Пусть функция $u = f(M)$, $M(x, y, z)$, дважды дифференцируема в некоторой окрестности $U(M_0)$ стационарной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Если квадратичная форма для d^2u в точке M_0 положительна определена (отрицательна определена), то в точке M_0 данная функция имеет строгий максимум (строгий минимум). Если в точки M_0 квадратичная форма для d^2u неопределенна, то в точке M_0 функция $u = f(M)$ не имеет экстремума.

Замечание 3.1. Теорема 2.1 остаётся справедливой и для функции двух переменных, а также для функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ где $m > 3$.

Пример 3.1. Исследовать на экстремум функцию
$u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$.

►Составим систему: $\begin{cases} u'_x = 4x - 2y - 1 = 0, \\ u'_y = 2y - 2x = 0, \\ u'_z = 2z + 4 = 0. \end{cases}$ Из неё находим единственную критическую точку: $x = y = 1/2$, $z = -2$. Для вторых производных имеем

$$u''_{xx} = 4,\ u''_{yy} = 2,\ u''_{zz} = 2,\ u''_{xy} = -2,\ u''_{xz} = u''_{yz} = 0,$$

следовательно,

$$d^2u = 4dx^2 - 4dxdy + 2dy^2 + 2dz^2.$$

Второй дифференциал d^2u является квадратичной формой относительно дифференциалов независимых переменных dx, dy, dz. Напишем матрицу квадратичной формы. Ее диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных, т. е. 4, 2, 2, а другие элементы – половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее главные миноры:

$$\Delta_1 = |4| = 4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 8 = 8\ .$$

Так как они положительны, то по критерию Сильвестра квадратичная форма для d^2u положительно определенная и $d^2u > 0$ в любой окрестности точки $(1/2, 1/2, -2)$, т. е. при любых dx, dy, dz. В силу теоремы 3.1 и замечания 3.1 заключаем, что в точке $(1/2, 1/2, -2)$ функция имеет минимум, $u_{\min} = -17/4$.◄

Замечание 3.2. Если $d^2u = 0$ в стационарной точке, то существование экстремума в ней нельзя установить с помощью теоремы 3.1. В этом случае требуется дополнительное исследование, например, с помощью производных более высоких порядков. В стационарной точке при $d^2u = 0$ экстремум может быть, а может и не быть. Так, для функций $f(x, y) = x^3 - y^3$ и $g(x, y) = x^4 + y^4$ точка (0, 0) является стационарной. Однако для первой из этих функций она не является точкой экстремума (пример 1.1). Для второй функции (0, 0) – точка минимума, так как $g(x, y) \geq 0$ в любой точке, не совпадающей с точкой (0, 0).

В случае функции двух переменных $u = f(x, y)$ дважды дифференцируемой в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ второй дифференциал имеет вид

$$d^2u = f''_{x^2}(M_0)d^2x + 2f''_{xy}(M_0)dxdy + f''_{y^2}(M_0)d^2y$$

и является квадратичной формой относительно dx, dy с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{y^2}(M_0) \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее главные миноры:

$$\Delta_1 = f''_{x^2}(M_0), \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{y^2}(M_0) \end{vmatrix} = f''_{x^2}(M_0) \cdot f''_{y^2}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0)\right)^2.$$

В соответствии с критерием Сильвестра (§ 2) и теоремой 3.1 приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.2. Пусть функция $u = f(x, y)$ дважды дифференцируемой в некоторой окрестности стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$. Если

$$\Delta = f''_{x^2}(M_0) \cdot f''_{y^2}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0)\right)^2 > 0, \qquad (3.1)$$

то в точке M_0 данная функция имеет экстремум, а именно: при $f''_{x^2}(M_0) > 0$ минимум, при $f''_{x^2}(M_0) < 0$ максимум.

Пример 3.2. Фирма производит в месяц x (тыс. шт.) первого товара и y (тыс. шт.) второго. Прибыль $z(x,y)$ (млн. руб.), получаемая при этом, описывается соотношением $z(x,y) = -2x^2 + 2xy - 3y^2 + 2x + 4y$. При каких объемах выпуска изделий 1-го и 2-го типов прибыль фирмы будет наибольшей?

► Согласно необходимым условиям экстремума находим первые частные производные функции и приравниваем их нулю. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2 = 0 \\ 2x - 6y + 4 = 0 \end{cases}.$$

Решением этой системы является пара чисел (1,1), определяющая стационарную точку $M(1,\ 1)$. Для выяснения, есть ли в этой точке экстремум, а если есть, то какого вида, находим вторые частные производные функции и составляем величину

$$\Delta = z''_{x^2}(1,1) \cdot z''_{y^2}(1,1) - (z''_{xy}(1,1))^2 = (-4) \cdot (-6) - 2^2 = 24 - 4 = 20 > 0.$$

Из полученного результата заключаем, что в стационарной точке экстремум есть и он является максимумом, так как $z''_{x^2}(1,1) = -4 < 0$ (теорема 3.2). При этом $z_{\max} = z(1,1) = 3$ (млн. руб.).◄

§ 4. Условные экстремумы

1. Понятие условного экстремума. Задача на отыскание экстремумов функций многих переменных часто возникает в форме, отличной от выше изложенной. Пусть, например, требуется найти экстремальные значения функции

$f(x,y) = x^2 - y^2$ на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Эта функция определена на всей плоскости Oxy и не имеет экстремумов на области определения, поскольку на любой окрестности единственной стационарной точки $(0,0)$ она принимает как положительные, так и отрицательные значения, в то время как $f(0,0)=0$. Однако на множестве точек данной окружности у неё есть экстремальные значения (рис. 4.1).

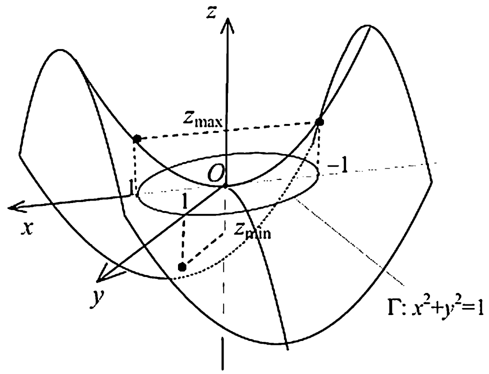


Рис. 4.1. *Условные экстремумы функции $z = x^2 - y^2$ при условии $x^2 + y^2 = 1$*

В данной задаче координаты x, y уже не являются независимыми переменными, а связаны между собой дополнительным условием: они должны удовлетворять уравнению окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Задачи такого рода называются задачами на отыскание *условного экстремума.*

Введём понятие условного экстремума в общем случае. Пусть дана функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и k ($k<m$) дополнительных условий

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0, \\ \varphi_2(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0, \end{cases} \tag{4.1}$$

называемых *уравнениями связи.*

Определение 4.1. Точка $M_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_m^{(0)})$, координаты которой удовлетворяют уравнениям связи (4.1), называется *точкой условного максимума* (*минимума*) функции $u=f(M) = f(x_1, x_2,\ldots, x_m)$ при наличии связей (4.1), если $u=f(M)$ определена на некоторой окрестности $U(M_0)$ и для любой точки M из этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям связи (4.1), выполняется неравенство: $f(M) \le f(M_0)$ ($f(M) \ge f(M_0)$). Значение $f(M_0)$ называют *условным максимумом* (*минимумом*) данной функции. Точки условного максимума и минимума функции $u=f(M)$ называются её *точками условного экстремума* при наличии связей (4.1). В отличие от них экстремумы, рассматривавшиеся ранее без дополнительных условий, называются *безусловными экстремумами.*

2. Отыскание точек возможного условного экстремума.

1-й способ. *Сведение к отысканию безусловного экстремума функции одной или нескольких переменных.*

Пример 4.1. Найти точки возможного условного экстремума функции $u = x + y + z^2$ при наличии связей: $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$

►Из уравнений связи выразим y и z через x:

$$z = 1+x, \quad y = 1 + zx = 1 + x(1+x) = 1 + x + x^2. \tag{4.2}$$

Подставим полученные выражения в уравнение для функции:

$$u=x+y+z^2$$

Получили функцию *одной* переменной x: $u=2+4x+2x^2$. Найдем ее точки возможного экстремума: $u_x' = 4 + 4x = 0 \Rightarrow x = -1$. А теперь из (4.2) найдем значения y и z: $y = 1, z = 0$, таким образом (–1, 1, 0) – точка условного экстремума (минимума) данной функции.◄

***2-й способ**. Метод неопределённых множителей Лагранжа.* В первом способе переменные x, y и z играют различные роли: x – независимая переменная, а y и z зависят от x. Лагранж предложил метод отыскания точек возможного условного экстремума, в котором никакой переменной не отдаётся предпочтение. Рассмотрим его на примере отыскания условного экстремума функции $u = f(x, y, z)$ при наличии уравнений связи

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Введём так называемую *функцию Лагранжа*: $\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$ с *неопределёнными множителями* λ_1, λ_2:

$$\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) + \lambda_2\varphi_2 x, y, z). \tag{4.4}$$

Для этой функции выпишем необходимые условия безусловного экстремума и из полученной системы находим координаты точек возможного условного экстремума функции $f(x, y, z)$ при наличии связей (4.2) и значения λ_1 и λ_2.

Пример 4.2. Найти точки возможного условного экстремума функции $u = x + y + z^2$ при наличии связей: $\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases}$

►Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$$

и напишем для неё систему необходимые условия безусловного экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1} = z - x - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda_2} = y - xz - 1 = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Имеем: $x = -1, y = 1, z = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.◄

Вопрос о наличии экстремума в точке возможного условного экстремума решается с помощью достаточных условий. При этом изучается *второй диф-*

ференциал функции Лагранжа [13].

Найдём вторые производные функции Лагранжа

$$\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1),$$

для этого продифференцируем её первые производные (см. систему (4.4):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 2,\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} = 0,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} = -\lambda_2 = 1,$$

$$d^2\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2dz^2 + 2dxdz.$$

Найдём связи между dx, dy, dz продифференцировав уравнения связи:

$$\begin{cases} dz - dx = 0, \\ dy - zdx - xdz = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz - dx = 0, \\ dy + dz = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz = dx, \\ dy = -dz. \end{cases}$$

С учётом установленных связей между dx, dy, dz имеем:

$$d^2\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2dz^2 + 2dxdz = 4dx^2.$$

Поскольку $d^2\Phi > 0$ в любой точке $M(x, y, z)$ и для любых значений dx, не равных нулю, то приходим к выводу, что в точке $M_0(-1, 1, 0)$ данная функция имеет условный минимум.◄

***Замечание 4.1.*.** Метод Лагранжа, рассмотренный выше для частного случая, обобщается на случай отыскания условного экстремума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m,)$ при наличии k $(1 \le k < m)$ связей (4.1). Функция Лагранжа здесь имеет вид

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Пример 4.3. Исследовать функцию $u = x - 2y + 2z$ на экстремум при наличии связи: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

►Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9),$$

для нее выпишем необходимые условия безусловного экстремума и из полученной системы получим координаты точек возможного условного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{1}{\lambda}, \\ z = -\dfrac{1}{\lambda}, \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Имеем $\lambda_1 = -1/2$, $x_1 = 1, y_1 = -2, z_2 = 2$; $\lambda_2 = 1/2$, $x_2 = -1, y_2 = 2, z_2 = -2$; $M_1(1, -2, 2)$, $M_2(-1, 2, -2)$ – точки возможного условного экстремума.

В точках M_1 и M_2 второй дифференциал функции Лагранжа равен:

$$d^2\Phi(M_1) = d^2x + d^2y + d^2z < 0,$$

$$d^2\Phi(M_2) = -(d^2x + d^2y + d^2z) > 0.$$

Следовательно, функция $u = x - 2y + 2z$ при наличии связи $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в точке $M_1(1, -2, 2)$ имеет условный максимум, а в точке $M_2(-1, 2, -2)$ – условный минимум◄.

Пример 4.4. Предприятие в двух цехах выпускает одну и ту же продукцию x (тыс. ед.) в месяц в первом цеху и y (тыс. ед.) в месяц во втором, но так что $x + y = 3$. При этом затраты на изготовление описываются соотношением

$z(x, y) = 3x^2 + xy - y^2 - 14x - y + 100$. При каком распределении работы между цехами затраты будут минимальными?

►Разрешим уравнение связи относительно переменной y: $y = 3 - x$ и полученное выражение подставим в данную функцию:

$$z(x, y) = x^2 - 4x + 88 = \Gamma.$$

Получили функцию одной переменной, для которой правила отыскания экстремумов были изучены ранее. Из уравнения $z' = 2x - 4 = 0$ находим точку $x = 2$, подозрительную на экстремум. Так как $z'' = 2 > 0$, то в этой точке имеем минимум. Для этого значения абсциссы находим соответствующую ординату $y = 1$. Получаем одну стационарную точку $M(2, 1)$, в которой имеем условный минимум $z_{\min} = 84$.

§ 5. Отыскание наибольших и наименьших значений функции

Пусть функция $f(N)$, $N(x_1, x_2,\dots, x_m)$, задана и непрерывна в некоторой замкнутой ограниченной области $D\subset \boldsymbol{R}_m$. В соответствие со второй теоремой Вейерштрасса (теорема 5.1, гл. 1) эта функция принимает на области D наименьшее и наибольшее значения $\left(m = \min\limits_{(\cdot)N\in D} f(N),\ \ M = \max\limits_{(\cdot)N\in D} f(N)\right)$. Отыскание этих значений поизводится по следующему алгоритму.

1. Находим критические точки $N_1,\dots, N_k$ функции $f(N)$ внутри области D и вычисляем в них значения функции

$$f(N_1), \dots ,f(N_k). \tag{5.1}$$

2. Находим точки $N_{k+1}, \dots , N_{k+r}$ возможного условного экстремума функции $f(N)$ на границе области D и вычисляем в них значения функции

$$f(N_{k+1}), \dots,f(N_{k+r}). \tag{5.2}$$

3. Среди чисел (5.1) и (5.2) находим наименьшее и наибольшее. Наименьшее из них равно m, а наибольшее – M.

Пример 5.1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u= x^2 + y^2 +2x - 2y$ в области D, определяемой неравенством $x^2 + y^2 \le 4$.

►1) Найдём критические точки внутри области D: $u'_x = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$; $u'_y = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$. Итак, $(-1, 1)$ – критическая точка, $u(-1, 1) = -2$.

2) Найдём точки возможного условного экстремума данной функции при условии: $x^2 + y^2 = 4$. Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + 2x - 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

и выпишем для неё систему (3.13) при $m = 2$, $k = 1$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x + 2 + 2\lambda x = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2y - 2 + 2\lambda y = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Сложив почленно первых два уравнения, после очевидных преобразований имеем $2(x+y) + 2\lambda(x+y) = 0 \Rightarrow 2(x+y)(1+\lambda) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -y, \\ \lambda = -1. \end{array}\right.$

Подставим равенство $x=-y$ в третье уравнение системы

$$2y^2=4 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}.$$

Отсюда с учётом равенства $x=-y$ находим две критические точки данной функции внутри области D: $(-\sqrt{2},\sqrt{2}),(\sqrt{2},-\sqrt{2})$. Вычислим в них значения функции $u(-\sqrt{2},\sqrt{2})=4-4\sqrt{2}$, $u(\sqrt{2},-\sqrt{2})=4+4\sqrt{2}$.

3) Среди вышевыделенных значений функции найдём наименьшее и наибольшее: $m=\min\limits_{D} u=-2$, $M=\max\limits_{D} u=4(1+\sqrt{2})$.◄

Глава 4. **Двойной интеграл**

К двойным интегралам (к интегралам по плоским областям) приводят задачи вычисления аддитивных физических, механических (массы, моментов инерции, статических моментов, зарядов и т. п.), геометрических величин (площадей плоских фигур и криволинейных поверхностей, объемов цилиндрических брусов и т. п.) и ряда величин, характеризующих экономику, связанных с кусочно непрерывным распределением этой величины по плоской области. Двойной интеграл также находит свое применение в задачах экономики, решаемых методами теории вероятностей.

§ 1. Понятие двойного интеграла

Пусть $D\subset \boldsymbol{R}_2$ – замкнутая область, ограниченная кусочно-гладкой кривой, и в этой области задана функция $f(M)$, где $M(x, y)\in D$ (рис. 1.1). Кусочно-гладкими кривыми разобьём область D на n частичных областей $D_1,\ldots D_n$, не имеющих общих внутренних точек, с площадями ΔS_1, …, ΔS_n. В каждой из областей D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$, вычислим в ней значение функции $f(M_i)$ и составим сумму

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i, \qquad (1.1)$$

называемую *интегральной суммой* функции $f(M)$ по области D. Значение σ_n зависит от n, от способа разбиения области D на части и от способа выбора точки M_i в каждой из областей D_i.

Назовём диаметром d_i области D_i наибольшее из расстояний между граничными точками этой области.

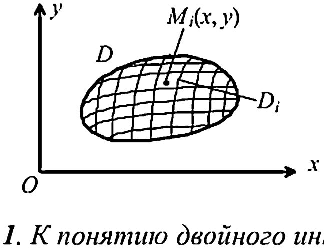


Рис 1.1. *К понятию двойного интеграла*

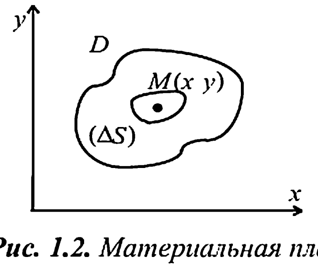


Рис. 1.2. *Материальная пластина*

Обозначим через λ ранг разбиения, равный наибольшему из диаметров d_i частичных областей: $\lambda = \max_i \{d_i\}$. Если устремить λ к нулю, то число n частичных областей будет неограниченно увеличиваться.

Определение 1.1. Если существует конечный предел интегральной суммы (1.1) при $\lambda \to 0$, понимаемый в смысле определения 1.1 (гл. 3, разд. 6), то он называется двойным интегралом от функции $f(M)$ по области D и обозначается одним из символов: $\iint\limits_D f(M)dS$ или $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$. Функция $f(x, y)$ при этом называется интегрируемой (по Риману) по области D. Итак, по определению имеем $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$.

Классы интегрируемых функций устанавливают следующие теоремы.

Теорема 1.1 (*необходимое условие интегрируемости*). Если функция $f(M)$ интегрируема по области D, то она ограничена в области D.

Теорема 1.2 (достаточное условие интегрируемости). Если функция $f(M)$ ограничена в замкнутой ограниченной области D с кусочно-гладкой границей и непрерывна в D за исключением, быть может, конечного числа гладких кривых, то она интегрируема по этой области.

Указанные в теоремах 1.1, 1.2 классы функций практически исчерпывают все функции, встречающиеся в приложениях. В дальнейшем предполагается, что рассматриваются только такие функции.

§ 2. Геометрический и механический смысл двойного интеграла

1. Геометрический смысл. Рассмотрим тело (рис. 2.1), ограниченное плоскостью Oxy, цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, и поверхностью (S): $z = f(x, y)$.

Такое тело назовём цилиндрическим брусом, ориентированным по оси Oz. Основанием его служит некоторая область D на плоскости Oxy. Если функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в области D, то объём V этого бруса равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области D:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy. \tag{2.1}$$

Итак, двойной интеграл от непрерывной неотрицательной функции можно рассматривать как объём некоторого цилиндрического бруса.

2. Механический смысл. Пусть дана плоская пластина D, на которой распределена масса m (рис. 2.2). Возьмём на пластине точку M и некоторую частичную область (ΔS), содержащую эту точку, ΔS и Δm – площадь и масса (ΔS). Отношение $\Delta m / \Delta S$ называют *средней поверхностной плотностью* пластины D в точке $M(x, y)$. Если $\exists \lim\limits_{(\Delta S) \to M} \dfrac{\Delta m}{\Delta S} = \mu(M)$, то его называют *поверхностной плотностью* пластины в точке $M(x, y)$ (запись $(\Delta S) \to M$ означает, что элемент (ΔS), уменьшаясь, стягивается в точку M). Масса распределена по пластине, как правило, неоднородно, поэтому поверхностная плотность есть функция точки M на области D.

Предположим теперь, что масса m распределена на плоской пластине D с поверхностной плотностью $\mu = f(x, y)$, непрерывной на области D. Тогда для массы материальной пластины, имеющей форму области D (рис. 2.2), справедливо равенство

$$m = \iint_D f(x, y)dxdy. \tag{2.2}$$

Итак, если подынтегральную функцию трактовать как поверхностную плотность в точке $M(x, y)$ пластины, имеющей форму области D, то двойной интеграл выражает массу этой пластины. Такая трактовка двойного интеграла возможна для любой непрерывной и неотрицательной функции. Заметим, что вместо плотности вещества можно говорить о плотности распределения электрического заряда $q(x,y)$ в данной точке пластины, о плотности распределения $q(x, y)$) семян в данной точке засеянного пшеницей поля. В этом случае заряд всей пластины и количество (стоимость) израсходованного при посеве зерна выразится двойным интегралом вида (2.2).

§ 3. Свойства двойных интегралов

Свойства двойного интеграла во многом аналогичны свойствам определённого интеграла. Сформулируем их, предполагая рассматриваемые функции таковыми, что интегралы от них имеют смысл.

1. $\iint_D f(x, y)dxdy = S$, где S – площадь области D.

2. *Аддитивность.* Если область D с помощью кусочно-гладкой кривой разбита на области D_1 и D_2, не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

3. *Линейность.* Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – константы, то

$$\iint_D \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \iint_D f_i(x,y)\,dxdy.$$

4. *Интегрирование неравенств.* Если $f(M) \le g(M)$ на области D, то

$$\iint_D f(M)\,dS \le \iint_D g(M)\,dS.$$

5. *Оценка модуля интеграла*:

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_D \left| f(x,y)\right| dxdy.$$

6. *Теорема о среднем.* Если $f(M)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то в этой области существует такая точка (ξ, η), что

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)S,$$

где S – площадь области D.

Замечание 3.1. Доказательства первых пяти свойств основаны на определении двойного интеграла как предела интегральной суммы, последнее, как и в случае определённого интеграла, обосновывается с помощью свойства 4 и теоремы о функции, непрерывной в замкнутой ограниченной области, принимающей все промежуточные значения между двумя любыми своими значениями. Докажем, например, свойство 1. Здесь подынтегральная функция $f(x, y) = 1$ для любой точки области D, поэтому имеем

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = S \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \iint_D dxdy = S .$$

§ 4. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных координатах

В § 2 рассмотрено тело, названное цилиндрическим брусом. Оно ограничено плоскостью Oxy, цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz и сверху поверхностью (S): $z = f(x, y)$ (рис. 4.1). Пусть основание тела есть область D, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми с уравнениями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $x \in [a, b]$, $a < b$ (D – область 1-го типа, рис. 4.2а). Объём данного тела определяется равенством (2.1). Рассечём рассматриваемое тело плоскостями, параллельными плоскости Oyz, a и b – абсциссы крайних сечений. Площадь сечения $ABCE$ тела плоскостью, проведённой на расстоянии x от Oyz (рис. 4.1), зависит от x. Обозначим её через $S(x)$. Для объема V данного тела имеем:

$$V = \int_a^b S(x)dx . \tag{4.1}$$

Найдём выражение для функции $S(x)$ – площади фигуры $ABCE$. Она равна площади трапеции $A'B'C'E'$ – проекции $ABCE$ на плоскость Oyz (рис. 4.1).

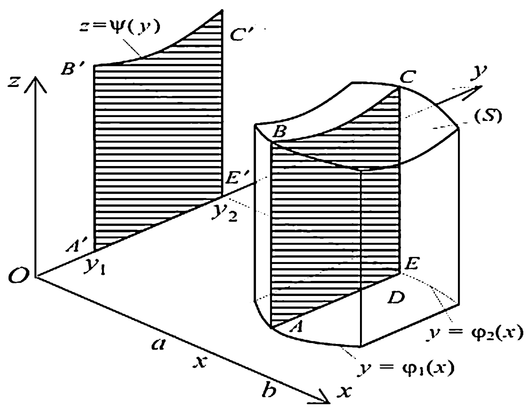


Рис. 4.1. *К вычислению двойного интеграла в прямоугольных координатах*

Трапеция $A'B'C'E'$ ограничена кривой $z = f(x, y) = \psi(y)$, прямыми $y_1 = \varphi_1(x)$,

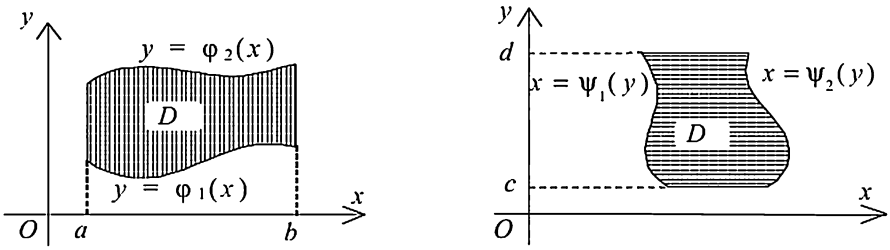
$y_2 = \varphi_2(x)$ и осью Oy (x фиксировано для выбранного сечения). Но тогда $S_{A'B'C'E'} = S(x) = \int\limits_{y_1}^{y_2} \psi(y)dy = \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dy$ и в силу (4.1):

$$V = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dy \right) = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dy. \qquad (4.2)$$

Итак, объём данного тела выражен через *повторный интеграл*, в котором интегрирование выполняется сначала по y (при фиксированном x), а затем полученный результат интегрируется по x. Сравнение (4.1) и (4.2) для области (области 1-го типа, рис. 42*а*) приводит к равенству:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \quad , \qquad (4.3)$$

которое остаётся справедливым и в общем случае, когда значения функции $f(x,y)$ могут иметь любой знак в области D.



а) область 1-го типа *б) область 2-го типа*

***Рис. 4.2.** Типы стандартных областей*

Замечание 4.1. Если в предыдущих рассуждениях поменять роли переменных x и y, то для области D, определяемой неравенствами $c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$ (область 2-го типа, рис. 4.2б), получим формулу:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx. \qquad (4.4)$$

Пример 4.1. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (2y-x)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $y = x$, $y = x^2$.

►Область D (рис. 4.3), определяемая неравенствами: $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le x$, является областью 1-го типа, поэтому по формуле (4.3) имеем:

$$\iint\limits_D (2y-x)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (2y-x)\,dy = \int\limits_0^1 (y^2-xy)\Big|_{y=x^2}^{y=x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.◄$$

Замечание 4.2. Если область более сложного вида, чем рассмотренные выше, то её следует разбить на такие части, по которым функция $f(x,y)$ может быть проинтегрирована при помощи вышеполученных формул, а затем воспользоваться аддитивностью двойного интеграла по отно шению к области интегрирования. Так, для вычисления $\iint\limits_D f(x,y)dS$ в случае области D, изображенной на рис. 4.4, надо область D разбить на три части D_1, D_2, и D_3, вычислить интегралы $\iint\limits_{D_1} f(x,y)dS$, $\iint\limits_{D_2} f(x,y)dS$, $\iint\limits_{D_3} f(x,y)dS$ по формуле (4.3) и полученные результаты сложить:

:

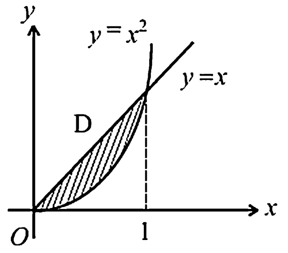


Рис. 4.3. К примеру 4.1

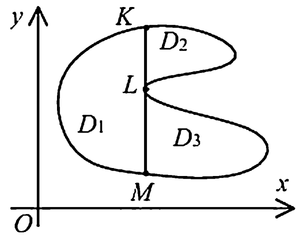


Рис. 4.4. Разбиение произвольной на области 1-го типа

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_3} f(x,y)dS.$$

Пример 4.2. Изменить порядок интегрирования в следующем выражении:
$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{(x-2)^2} f(x,y)dy$.

►Данное выражение есть сумма двух повторных интегралов: $I=I_1+I_2$. Первый из них взят по области D_1: $0\le x\le 1$, $0\le y\le x$; второй – по области D_2: $1\le x \le 2$, $0\le y\le (x-2)^2$ (рис. 4.5). Рассмотрим область $D=D_1\cup D_2$, ордината любой её точки заключена в пределах от 0 до 1 (рис. 4.5). Чтобы найти пределы по абсциссе x, из уравнения параболы $y=(x-2)^2$ найдём x как функцию y: $x=2\pm\sqrt{y}$ уравнение $x=2-\sqrt{y}$ задаёт левую ветвь параболы, а уравнение $x=2+\sqrt{y}$ – её правую ветвь. Для координат точек области D имеем неравенства: $0\le y\le 1$; $y\le x\le 2-\sqrt{y}$. Из формулы (4.4) следует: $I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-\sqrt{y}} f(x,y)dx$.◄

§ 5. Примеры использования двойного интеграла

1. Площадь плоской области. Из свойства 1 двойного интеграла (§ 3) следует, что площадь S плоской области D может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле

$$S=\iint\limits_D dxdy. \tag{5.1}$$

Пример 5.1. Найти площадь области D, ограниченной линиями $y=x$, $y=x^2$.

► Область D изображена на рис. 4.3, её площадь вычислим, используя формулу (5.1):

$$S=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy=\int_0^1 (x-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}\text{ ед. пл.} ◄$$

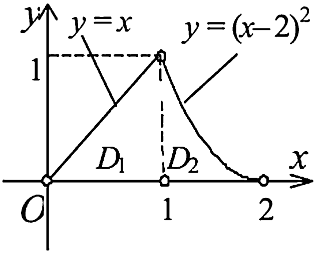


Рис. 4.5. К примеру 4.2

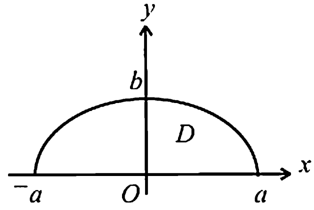


Рис. 5.1. К примеру 5.2

Замечание 5.1. Двойной интеграл используется для нахождения объемов цилиндрических брусов и площадей криволинейных поверхностей.

2. Масса пластины. Масса плоской области D с поверхностной плотностью $\mu(M)$, где функция $\mu(M)$ непрерывна на D, может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле:

$$m=\iint_D \mu(x,y)dxdy. \tag{5.2}$$

Пример 5.2. Найти массу пластины, ограниченной линиями: $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $y=0$, $(y\geq 0)$, если поверхностная плотность задана равенством $\mu(x,y)=y$.

► Массу m пластины вычислим по формуле (5.2):

$$m=\iint_D \mu(x,y)dxdy=\iint_D ydxdy.$$

Для перехода от двойного интеграла к повторному интегралу зададим область D неравенствами: $-a\leq x\leq a$, $0\leq y\leq b\sqrt{1-x^2/a^2}$ и сделаем чертёж области D (рис. 5.1).

$$m=\iint_D ydxdy=\int_{-a}^{a} dx\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} ydy=\frac{b^2}{2}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{ab^2}{6}. ◄$$

3. Технология решения задач, сводящихся к двойному интегралу.

К вычислению двойного интеграла сводятся все задачи, связанные с непрерывным распределением некоторой величины в пределах плоской фигуры D. Технологию получения соответствующих формул покажем на примере.

Пример 5.3. Требуется очистить от мусора территорию, имеющую форму области D из плоскости Oxy. Стоимость уборки, отнесённая к единице площади, задана равенством: $c_p=c_p(x,y)$ тыс. руб. Определить полную стоимость работы Q по очистке всей территории.

► Выделим бесконечно малый элемент (dS) области D, содержащий точку $M(x,y)$, и сделаем упрощающее предположение – стоимость уборки в пределах (dS) постоянна и равна её значению в точке M, т. е. $c_p(x,y)$. Тогда для элемента

dQ искомой величины Q имеем приближённое выражение вида: $dQ = c_p(x, y)dS$, справедливое точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем dS. Тогда точное значение Q выразится формулой $Q=\iint\limits_D c_p(x, y)dS$. ◄

Глава 5. **Задания для проверки качества усвоения раздела 7**

§ 1. Задачи для самостоятельной работы

1. Найдите область определения функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}+\sqrt{x}$; изобразите ее на чертеже.

2. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если а) $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; б) $z=\arcsin(x^2+y^2)$.

3. $z=e^{-x/y}$. Найдите dz в точке $M(1, 1)$.

4. $z=\sin(xy)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=?$

5. $x^2-y^2+2z^2-3xy+x+z-1=0$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=?$

6. Найдите $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ по направлению $\bar{l}^0=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ в точке $M(1, 1, 1)$, если $u=xy+xz^2+yz^3$.

7. Найдите градиент функции $z=x^3+xy+y^3$ в точке $M(1, 1, 1)$.

8. $z^3+3xyz=a^3$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

9. Найдите экстремумы функции z:

а) $z=3x^2+xy+2y^2-7x-5y$;

б) $z=2x^2+2xy+3y^2-8x-14y$.

10. Найдите экстремумы функции $u=x^2-xy+y^2-4z^2+9x-6y-8z+16$.

11. Найдите минимум функции $z=2x^2+xy$ при условии $x+y=1$.

12. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2-y^2+x+y$ в треугольнике с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.

13. Фирма, производящая продукцию на трех заводах, решила выпускать в месяц 210 единиц продукции при наименьших суммарных затратах, x_i – число единиц продукции, произведённой на i– том заводе, $i=1, 2, 3$. Сколько продукции ежемесячно следует выпускать на каждом заводе, если функции издержек заводов имеют вид: $C_1(x_1)=x_1+\dfrac{1}{20}x_1{}^2$ – для первого завода; $C_2(x_2)=$ $=2x_2+\dfrac{1}{40}x_2{}^2$ – для второго завода; $C_3(x_3)=x_3+\dfrac{1}{60}x_3{}^2$ – для третьего завода?

Указание. Рекомендуется использовать метод множителей Лагранжа.

14. Фирма производит в месяц x (тысяч штук) первого товара и y (тысяч штук) второго. Прибыль $z(x, y)$ (млн. руб.), получаемая при этом, описывается соотношением $z(x, y) = -2x^2 - xy - 2y^2 + 6x + 6y$. При каких объемах выпуска изделий 1-го 2-го типов прибыль фирмы будет наибольшей?

15. Определить полную стоимость работы Q по очистке территории, представляющей собой квадрат: $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$, если стоимость уборки, отнесённая к единице площади, задана равенством $c_p = 100(1-(x-1)^2-(y-1)^2)$ тыс. руб.

16. Вычислите повторные интегралы:

а) $\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + y)dy$; б) $\int_{-3}^{8} dx \int_{y^2-4}^{5} (x + 2y)dy$.

17. Вычислите двойные интегралы: а) $\iint_D (x^2 + y)dxdy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$ и $x = y^2$; б) $\iint_D x^3y^2dxdy$, если область D ограничена линией $x^2 + y^2 = 9$.

18. Вычислите площади фигур, ограниченных следующими линиями:

а) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$; б) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$;

Ответы к задачам для самостоятельной работы

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \\ x \ge 0 \end{cases}$ – замкнутый правый полукруг радиуса 1.

2. а) $\dfrac{4xy^2}{(x^2 + xy^2)^2}$; б) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}$. **3.** $e^{-1}(-dx + dy)$. **4.** $\cos(xy) - xy\sin(xy)$.

5. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2x+1}{3z-3y+1}$. **6.** $3\sqrt{3}$. **7.** $4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. **8.** $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{xz}{z^2+xy}$.

9. а) $z_{\min} = z(1,1) = -6$; б) $z_{\min} = z(1,2) = -18$. **10.** $u_{\max} = -1$.

11. $z_{\min} = z\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$. **12.** $z_{\text{наим}} = z(0,0) = 0$; $z_{\text{наиб}} = z\left(1, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$.

13. (40; 80; 90). **14.** $z_{\text{наиб}} = z(1,1) = 6$. **15.** 400/3т.р. **16.** а) 14/3; б) 50,4.

17. а) 33/140; б) 0. **18.** а) 16/3; б) $16\sqrt{15}/3$.

§ 2. Контрольные вопросы к разделу 7

1. Что такое полный дифференциал функции $z = f(x, y)$?

2. Запишите формулу, определяющую частную производную функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0, y_0)$.

3. Какая функция двух аргументов называется дифференцируемой?

4. Запишите формулу, выражающую полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ через её частные производные.

5. Как соотносятся между собой свойства непрерывности и дифференцируемости функции двух переменных?

6. Какая функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$?

7. Как определяется евклидово расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между двумя точками $M(x_1^{(1)},...,x_m^{(1)})$ и $M(x_1^{(2)},...,x_m^{(2)})$ m-мерного пространства?

8. Какая точка множества E называется внутренней? граничной?

9. Что такое δ-окрестность точки $M_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_m^{(0)})$?

10. Какое множество E называется ограниченным? замкнутым? связным?

11. Сформулируйте определение предела функции $f(M) = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

12. Сформулируйте теорему о равенстве вторых смешанных производных функции $z = f(x, y)$.

13. Как соотносятся между собой свойства дифференцируемости и существования первых частных производных функции $z = f(x, y)$?

14. Сформулируйте определение производной функции

15. $u = f(M) = f(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{l}$.

16. Запишите формулу, выражающую производную функции $u= f(x, y, z)$ по направлению вектора $\overline{l^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ через частные производные функции u.

17. Запишите формулу, связывающую $\mathrm{grad}u$ и производную $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ в заданной точке скалярного поля u.

18. Что такое поверхность уровня скалярного поля $u= f(x, y, z)$?

19. Как направлен $\mathrm{grad}u$ по отношению к поверхности уровня скалярного поля $u= f(x, y, z)$?

20. Как связаны направления наибольшего роста функции $u= f(x, y, z)$ с вектором $\mathrm{grad}u$ в рассматриваемой точке $M(x, y, z)$?

21. Выразите $\max\dfrac{\partial u}{\partial l}$ и $\min\dfrac{\partial u}{\partial l}$ через $\mathrm{grad}u$ в заданной точке скалярного поля.

22. Запишите формулу для производной $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z= z(u, v)$, $u= u(x, y)$, $v= v(x, y)$.

23. Запишите формулу для производной $\dfrac{dy}{dx}$ неявной функции, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

24. Запишите формулу для производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции, заданной уравнением: $F(x, y, z) = 0$.

25. Сформулируйте определение локального максимума (локального минимума) функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

26. Сформулируйте правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области.

27. Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции $z = f(x, y)$.

28. Что такое стационарная точка функции $z = f(x, y)$?

29. Сформулируйте определение условного максимума функции $u = f(M)$ при связи $\varphi(M) = 0$ (рассмотрите случай двух или трех переменных).

30. Сформулируйте необходимые условия условного экстремума функции $u = f(M)$ при связи $\varphi(M) = 0$ по методу Лагранжа (рассмотрите случай двух и трех переменных).

31. Сформулируйте теорему Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной в замкнутой ограниченной области.

32. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о существовании наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной в замкнутой ограниченной области.

33. Что называется диаметром области? Чему равен диаметр прямоугольного треугольника с катетами a и b?

34. Что понимается под двойным интегралом?

35. Каков физический смысл двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$? Его геометрический смысл?

36. Как вычислить площадь области с помощью двойного интеграла в декартовых координатах?

37. Запишите формулу сведения двойного интеграла к повторному в декартовых координатах и объясните с помощью чертежа смысл входящих в формулу величин. *Указание.* Рассмотрите 2 случая: 1) внешний интеграл берется по переменной x, а внутренний – по переменной y; 2) внешний интеграл берется по переменной y, а внутренний – по переменной x.

38. Сформулируйте теорему существования двойного интеграла.

39. Сформулируйте свойства аддитивности и линейности двойного интеграла.

40. Дайте определение среднего значения функции $f(x, y)$ в области D.

§ 3. Тесты по разделу 7

Вар. № 1	**Раздел 7. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Двойные интегралы.**
1	Вычислите значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ в точке $M(-1, 1)$.
2	Вычислите значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = 2\sqrt{x^3 + 2y^2 - 2xy}$ в точке $M(-1, 1)$.
3	Найдите градиент скалярного поля $u = x + \ln(z^2 + y^2)$ в точке $M(-2,1,-1)$.
4	Равенство $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4$ задает неявную функцию $z(x, y)$. Вычислите значение её частной производной по y в данной $M_0(2,1,2)$.
5	Вычислите значение частной производной $u'_z(M_0)$ заданной функции $u = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - z)$ в заданной точке $M_0(2, 1, 8)$.

6	Найдите полный дифференциал функции $z = \arcsin\sqrt{xy}$ в точке $M_0(1/2, 1/2)$.
7	Найдите значение частной производной $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$ в точке $M_0(1, 1)$.
8	Найдите производную скалярного поля $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ в точке $M(1, 1, 1)$ по направлению вектора $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
9	Исследуйте на экстремум следующую функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
10	Найти точки возможного условного экстремума функции $z = 2x^2 + y^2 - 9$ при наличии связи $x - 3y = 1$.
11	Вычислите интеграл $\iint\limits_D x\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 2x$.
12	Найдите наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

Вар. № 2	Раздел 7. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Двойные интегралы

1	Вычислите значение частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \arcsin(2x^3 y)$ в точке $M_0(0, 1)$.
2	Вычислите значение частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = 2\sqrt{3x^2 + 2y^2 - 4}$ в точке $M_0(1, 1)$.
3	Найдите градиент скалярного поля $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$ в точке $M(1, -3, 1)$.
4	Равенство $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^3 z = 3/2$ задает неявную функцию $z(x, y)$. Вычислите значение её частной производной по y в точке $M(\pi/4, 3\pi/4, \pi/4)$.
5	Вычислите значение частной производной $u'_z(M_0)$ функции $u = \mathrm{arctg}(xz/y^2)$ в заданной точке $M_0(2, 1, 1)$.
6	Найдите полный дифференциал заданной функции $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$ в точке $M_0(1, 1)$.
7	Найдите значение частной производной $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = 5xy^2 - 3x^3 y^4$ в точке $M_0(1, 1)$.
8	Найдите производную скалярного поля $u = xy - \dfrac{x}{z}$ в точке $M(-4, 3, -1)$ по направлению вектора $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
9	Исследуйте на экстремум следующую функцию $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.
10	Найти точки возможного условного экстремума функции $z = x^2 + 4y^2 - 15$ при наличии уравнения связи $x + 2y = 1$.

11	Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, область D ограничена линиями $y^2 = x, y = x$.
12	Найдите наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в квадрате, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

Ответы к заданиям тестов

Вариант 1

1) 2/5. **2)** 1. **3)** $-\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. **4)** –16. **5)** –1. **6)** $\frac{1}{\sqrt{3}}dx + \frac{1}{\sqrt{3}}dy$. **7)** 0. **8)** 3.

9) $z_{\max}=-21$. **10)** В точке $M(1/19, -6/19)$ функция имеет условный минимум. **11)** $4/3$. **12)** 0.

Вариант 2

1) 0. **2)** 6. **3)** $8\bar{i} - 6\bar{j} + 9\bar{k}$. **4)** 1. **5)** 2/5. **6)** $-\frac{1}{4\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}dy$.

7) –26. **8)** $4/3\sqrt{3}$. **9)** $z_{\max} = 6$. **10)** В точке $M(1/4, 3/8)$ функция имеет условный минимум. **11)** 3/20. **12)** 2.

Раздел 8. **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Краткая характеристика раздела

1. **Темы раздела.** Дифференциальные уравнения 1-го и высших порядков, задача Коши. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Системы дифференциальных уравнений. Модели естественного и логистического роста. Уравнение Самуэльсона.
2. **Базисные понятия.** Обыкновенное дифференциальное уравнение. Задача Коши. Частное, общее и особое решения уравнения. Система обыкновенных дифференциальных уравнений.. Задача Коши, частное и общее решения системы.
3. **Основные задачи.** Нахождение общего решения дифференциального уравнения. Нахождение частного решения дифференциального уравнения по заданным начальным условиям (задача Коши). Нахождение общего и частного решения системы дифференциальных уравнений.

Глава 1. **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

§ 1. Дифференциальные уравнения. Основные понятия

Определение 1.1. *Дифференциальным уравнением* называется равенство, содержащее одну или несколько независимых переменных, неизвестную функцию и её производные или дифференциалы.

Примеры дифференциальных уравнений:

$$y'' + y = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$y' = x^2 - y^2, \tag{1.3}$$

$$y = \sqrt{1 + (y')^2}\,. \tag{1.4}$$

Если дифференциальное уравнение содержит одну независимую переменную и функцию от этой переменной, то оно называется обыкновенным дифференциальным уравнением, в противном случае – уравнением с частными производными. Так, уравнения (1.1), (1.3), (1.4) – обыкновенные дифференциальные уравнения, а уравнение (1.2) – уравнение с частными производными. Далее будут рассматриваться только обыкновенные дифференциальные уравнения и термин «обыкновенные» будет опускаться.

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение называется порядком этого уравнения. Так уравнение (1.1) – уравнение 2-го порядка, а уравнения (1.3), (1.4) – уравнения 1-го порядка.

Равенство

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{1.5}$$

задаёт дифференциальное уравнение n-го порядка в общем виде. Производная $y^{(n)}$ обязательно входит в уравнение (1.5).

Определение 1.2. Функция $y = \varphi(x)$ называется решением уравнения (1.5) на интервале (a, b), если она имеет на этом интервале все производные до n-го порядка включительно и при подстановке в уравнение (1.5) обращает его в тождество: $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$, справедливое для $\forall x \in (a,b)$. График решения уравнения (1.5) называется интегральной кривой этого уравнения.

Так, функция $y = \sin x$ – решение уравнения (1.1) на $\boldsymbol{R}$. В самом деле, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$. При подстановке этой функции и её второй производной в уравнение (1.1) получаем равенство: $-\sin x + \sin x = 0$, верное для $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

Решить дифференциальное уравнение – значит, найти все его решения. Процесс отыскания решений называется *интегрированием* дифференциального уравнения. Существует ряд приёмов интегрирования дифференциальных уравнений специального вида, все решения которых удаётся выразить в элементарных функциях. Если уравнение не интегрируется в элементарных функциях, но все его решения выражаются через неопределённые интегралы от элементарных функций, то говорят, что оно проинтегрировано *в квадратурах*. Квадратурой называется операция вычисления неопределённого интеграла. Например, все решения уравнения

$$y' = e^{-x^2} \tag{1.6}$$

содержатся в формуле $y = \int e^{-x^2} dx + C$.

Первый член в правой части этого равенства есть какая-нибудь первообразная для функции e^{-x^2}, а C – произвольная постоянная. Итак, уравнение (1.6) проинтегрировано в квадратурах.

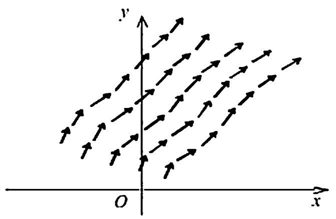


Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация уравнения $y'=f(x, y)$

Если уравнение удаётся проинтегрировать в элементарных функциях или в квадратурах, то говорят, что оно интегрируемо *в конечном виде.* Заметим, что в конечном виде интегрируется лишь небольшое число типов дифференциальных уравнений.

Уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.7}$$

задаёт дифференциальное уравнение первого порядка в общем виде.

Многие вопросы теории дифференциальных уравнений первого порядка проще рассматривать, записав уравнение (1.7) в виде, разрешённом относительно производной от искомой функции:

$$y' = f(x, y). \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) будем считать заданным в области D плоскости Oxy, если функция $f(x, y)$ из правой части этого уравнения задана в каждой точке $(x, y) \in D$. Рассмотрим точку $(x_0, y_0) \in D$. Из геометрического смысла производной следует, что угловой коэффициент k касательной к интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0), равен значению правой части уравнения (1.8) в этой точке: $k = f(x_0, y_0)$. Итак, уравнение (1.8) устанавливает зависимость между точками области D и угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой, проходящей через данную точку. Сопоставив каждой точке (x, y) области D направленный отрезок, угловой коэффициент которого равен $f(x, y)$, получим *поле направлений*, являющееся *геометрической интерпретацией уравнения* (1.8) (рис. 1.1).

§ 2. Задача и теорема Коши для уравнения $y' = f(x,y)$. Общее, частное и особое решения

Пусть дифференциальное уравнение первого порядка задано в нормальной форме:

$$y' = f(x,y) \tag{2.1}$$

Определение 2.1. Отыскание решения уравнения (3.1), удовлетворяющее условию: $y = y_0$ при $x = x_0$ или

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.2}$$

где x_0 и y_0 – заданные числа, называется *задачей Коши*. Равенство (2.2) называется *начальным условием*, а числа x_0 и y_0 – *начальными данными*.

Геометрически задача Коши трактуется как отыскание интегральной кривой уравнения (3.1), проходящей через заданную точку (x_0, y_0).

Исключительно большое значение для теории дифференциальных уравнений и её приложений имеет вопрос о существовании решения задачи Коши и о единственности этого решения.

Теорема 2.1 (*теорема Коши – теорема существования и единственности решения задачи Коши*). Пусть задано уравнение (2.1) и начальное условие (2.2). Если функция $f(x, y)$ из правой части уравнения (2.1) непрерывна вместе с частной производной $f'_y(x,y)$ в окрестности точки (x_0, y_0), то в некоторой окрестности точки x_0 это уравнение имеет единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее начальному условию (2.2).

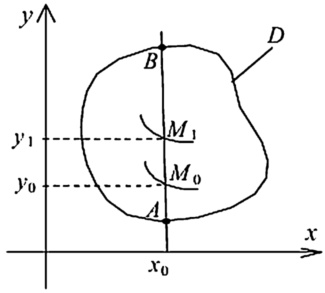


Рис. 2.1. Существования семейства решений уравнения

Если на некоторой области D плоскости Oxy выполнены условия теоремы 2.1, то уравнение (2.1) имеет на области D бесчисленное множество решений. В самом деле, пусть точка $M_0(x_0, y_0) \in D$, через M_0 в силу теоремы 2.1 пройдёт одна интегральная кривая уравнения (2.1). Рассмотрим отрезок AB, перпендикулярный оси Ox и проходящий через точку (x_0, y_0) (рис. 2.1). Через любую точку $M_1(x_0, y_1)$ этого отрезка в силу теоремы 2.1 проходит ещё одна интегральная кривая уравнения (2.1). Точек на отрезке несчётное множество, поэтому уравнение (2.1) имеет бесчисленное множество решений. Эти решения образуют семейство функций, зависящее от одного параметра.

Определение 2.2. Семейство функций

$$y = \varphi(x, C), \qquad (2.3)$$

называется *общим решением* уравнения (2.1) на области D плоскости Oxy, если:

1) для любого допустимого значения $C = C^*$ соответствующая функция $y = \varphi(x, C^*)$ семейства (2.3) является решением уравнения (2.1);

2) для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ найдётся единственное значение C_0 такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ семейства (3.3) будет решением задачи Коши для уравнения (2.1) с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Пример 2.1. Показать, что семейство функций $y = x^2 + 2x + 2 + Ce^x$ является общим решением уравнения $y' = y - x^2$ на всей плоскости Oxy.

►Необходимо показать, что для указанного семейства выполняются оба условия из определения 2.2. Действительно, подставим его в данное уравнение:

$$(x^2 + 2x + 2 + Ce^x)' = (x^2 + 2x + 2 + Ce^x) - x^2 \Rightarrow 2x + 2 + Ce^x = 2x + 2 + Ce^x.$$

Получили тождество, справедливое при $\forall x \in \boldsymbol{R}$ и $\forall C \in \boldsymbol{R}$. Таким образом, приходим к выводу, что первое условие из определения 2.2 выполнено.

Возьмём произвольную точку (x_0, y_0) плоскости Oxy и покажем, что найдётся единственное значение C_0 такое, что $y = x^2 + 2x + 2 + C_0 e^x$ будет решением задачи Коши для данного уравнения с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Подставим значения $x = x_0$ и $y = y_0$ в данное семейство функций:

$$y_0 = x_0^2 + 2x_0 + 2 + C_0 e^{x_0}.$$

Получили линейное уравнение относительно C_0. Оно имеет единственное решение: $C_0 = (y_0 - x_0^2 - 2x_0 - 2)e^{-x_0}$, так как $e^{x_0} \neq 0$. Итак, показано, что и второе условие из определения 2.2 выполнено.◄

Общее решение уравнения (2.1), записанное в виде, не разрешённом относительно искомой функции y:

$$\psi(x, y, C) = 0,$$

называется *общим интегралом* этого уравнения.

Определение 2.3. Решение, получающееся из общего решения дифференциального уравнения (3.1) при фиксированном значении произвольной постоянной C, называется *частным решением* этого уравнения (2.1).

Определение 2.4. Решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (2.1) называется *особым*, если в каждой его точке $(x_0, y(x_0))$ нарушается условие единственности решения задачи Коши.

Через каждую точку интегральной кривой, соответствующей особому решению, проходит, как минимум, ещё одна интегральная кривая. Кривые, подозрительные на особое решение, можно выделить с помощью теоремы 2.1. Ими могут быть только *те интегральные кривые*, для которых не выполняются условия этой теоремы.

Глава 2. Дифференциальные уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах

§ 1. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 2.1. Дифференциальное уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0 \qquad (1.1)$$

называется *уравнением с разделяющимися* переменными.

Разделим переменные, поделив все члены уравнения (2.1) на произведение $M_2(x)N_1(y)$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0\,. \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) называется *уравнением с разделёнными переменными*. Предположим, что функция $y = \varphi(x)$ – решение данного уравнения и подставим её в него, получим тождество:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y(x))}{N_1(y(x))}dy(x) = 0.$$

Тогда равенство

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C \qquad (1.3)$$

есть общий интеграл уравнения (1.1). Равенство (1.3) определяет в неявном виде общее решение $y = y(x, C)$ уравнения (1.1).

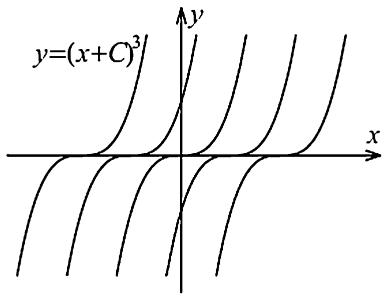


Рис. 1.1. Интегральные кривые уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

Замечание 1.1. Уравнение (1.1) с разделяющимися переменными представимо в виде, разрешённом относительно производной: $y' = \varphi(x)\psi(y)$.

Замечание 1.2. Необходимо проверять, не потеряны ли решения при переходе от уравнения (1.1) к (1.2). Функции вида $x = x_1$, где x_1 – корень уравнения $M_2(x) = 0$, и $y = y_1$, где y_1 – корень уравнения $N_1(y) = 0$, есть решения уравнения (1.1). Если окажется, что найденное решение $y = y_1$ не содержится в общем решении, то это особое решение.

Пример 1.1. Решить уравнение $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$.

►Запишем уравнение так: $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$, откуда $\frac{dy}{3y^{2/3}} = dx$. Интегрируя, получаем общее решение: $y^{1/3} = x + C \Rightarrow y = (x + C)^3$.

При делении на y предполагалось $y \neq 0$, однако, как легко видеть, функция $y \equiv 0$ удовлетворяет данному уравнению. Это решение не может быть получено из общего ни при каком значении C. Функция $y \equiv 0$ – особое решение, так как в его точках нарушается единственность решения (через каждую его точку проходит два решения).

Подставим начальное условие $y(0) = 1$ в общее решение: $1 = (0 + C)^3 \Rightarrow C = 1$. Итак, искомое частное решение есть $y = (x+1)^3$. На рис. 1.1. представлено семейство интегральных кривых данного уравнения.◄

§ 2. Однородные уравнения

Определение 2.1. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(y/x\right) \tag{2.1}$$

называется *однородным уравнением*.

Подстановкой $y = zx \Rightarrow y' = z + xz'$, где z – новая неизвестная функция x, это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$z + xz' = f(z) \Rightarrow z' = \left(f(z) - z\right)/x.$$

Пример 2.1. Найти общее решение уравнения

$$y' = y/x(1 + \ln(y/x)). \tag{2.2}$$

► $y = zx \Rightarrow y' = z + xz'$. Уравнение (3.2) принимает вид

$$z + xz' = z(1 + \ln z) \Rightarrow xz' = z\ln z.$$

Перейдя в последнем равенстве от производной к дифференциалам и разделив переменные, имеем:

$$\frac{dz}{z\ln z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dz}{z\ln z} = \int\frac{dx}{x} + \ln C_1 \Rightarrow \int\frac{d(\ln z)}{\ln z} = \ln|x| + \ln C_1,\ C_1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|\ln z| = \ln C_1|x| \Rightarrow \ln z = \pm C_1 x.$$

Обозначим: $C = \pm C$, получим: $\ln z = Cx$, $C \neq 0$. Отсюда $z = e^{Cx} \Rightarrow y/x = e^{Cx}$ или

$$y = xe^{Cx},\ C \neq 0. \tag{2.3}$$

Итак, получено общее решение уравнения (2.2). При разделении переменных могла произойти потеря решения. В самом деле, при делении на произведение $z\ln z$ предполагается, что $z \neq 1$, в то время как $z = 1$ – решение уравнения $xz' = z\ln z$. Заменив z в равенстве $z=1$на y/x, получим $y/x = 1$ или $y = x$ – решение уравнения (2.2). Заметим, что оно присоединяется к формуле (2.3) при снятии ограничения $C \neq 0$. Окончательно имеем $y = xe^{Cx}$, при этом $C \in \boldsymbol{R}$.◄

Пример 2.2. Найти общее решение уравнения $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2 dy = 0$.

►Данное уравнение однодное, ибо оно преобразуется к виду:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 - 2xy}{x^2} \Rightarrow y' = -y^2/x^2 + 2y/x. \tag{2.4}$$

Сделаем подстановку: $y = zx \Rightarrow y' = z + xz'$. Уравнение (2.4) принимает вид

$$z + xz' = -z^2 + 2z \text{ или } (z^2 - z)\,dx + x\,dz = 0.$$

В результате разделения переменных приходим к уравнению

$$\frac{dz}{z^2 - z} + \frac{dx}{x} = 0. \tag{2.5}$$

Рациональную дробь в первом слагаемом левой части равенства (2.5) разложим на элементарные дроби и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\ln|z-1| - \ln|z| + \ln|x| = \ln|C|,\ C \neq 0, \text{ или } (z-1)\cdot x = Cz.$$

При разделении переменных были потеряны решения: $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$. Подставив $z=y/x$ в полученные решения, после очевидных преобразований получим $(y-x)x = Cy$, $C\neq 0$, – общий интеграл исходного уравнения, а также $y=x$, $y=0$, $x=0$. Решения $y = x$, $x = 0$ получаются из общего интеграла, если снять ограничение $C\neq 0$. Окончательно имеем: $(y-x)x=Cy$, $y=0$.◄

§ 3. Линейное уравнение 1-го порядка. Уравнение Бернулли

Определение 3.1. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(y)y = q(x) \tag{3.1}$$

называется *линейным уравнением*. Здесь функции $p(x)$ и $q(x)$ предполагаются непрерывными x на некотором промежутке X. Если $q(x)\equiv 0$ на X, то уравнение (3.1) называется *однородным*, иначе – *неоднородным*.

Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение (3.1) обращается в уравнение с разделяющимися переменными $y' + p(x)y = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{y} = -p(x)\,dx$.

Будем искать решение уравнения (3.1) методом Бернулли в виде произведения двух функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$: $y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$. Уравнение (3.1) примет вид: $u'v+v'u+p(x)uv=q(x)$, откуда

$$u'v+u[v'+p(x)v]=q(x)\,. \tag{3.2}$$

Поскольку одну из функций $u(x)$ и $v(x)$ можно взять произвольно, то функцию $v(x)$ выберем так, чтобы она обращала в нуль выражение в квадратных скобках равенства (3.2): $v'+p(x)v=0$. Для функции $v=v(x)$ имеем уравнение с разделяющимися переменными. За $v(x)$ можно взять любое решение этого уравнения. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dv}{dx}=-p(x)v \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v}=-p(x)\,dx \quad\Rightarrow\quad v=e^{-\int p(x)dx}.$$

Уравнение (3.2) принимает вид:

$$u'e^{-\int p(x)dx}=q(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}, \text{ откуда } u=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\,.$$

Подставив найденные функции $u(x)$ и $v(x)$ в равенство $y=uv$, получаем общее решение линейного уравнения (4.1):

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right). \tag{3.3}$$

Линейное уравнение не имеет особых решений.

Замечание 3.1. Решая линейное уравнение, можно использовать формулу (3.3), либо воспроизвести для данного уравнения преобразования, приведшие к этой формуле.

Пример 3.1. Найти общее решение уравнения $y' + y/x = \ln x$.

► Положим $y=uv$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – неизвестные функции x, $y'=u'v+v'u$. Данное уравнение преобразуется к виду: $uv'+vu'+uv/x=\ln x$ или

$$u'v+u\,(v'+v/x)=\ln x\,. \tag{3.4}$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы $v'+v/x=0$. Найдём любое решение этого уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|v|=-\ln|x| \;\Rightarrow\; v=\frac{1}{x}.$$

Функцию $v=\frac{1}{x}$ подставим в уравнение (3.4): $u'\cdot\frac{1}{x}=\ln x$ или $u'=x\ln x$. Интегрируя почленно это уравнение, получим

$$u=\int x\ln x\,dx+C \;\Rightarrow\; u=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

Для функции y имеем: $y=uv=\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C\right)\frac{1}{x} \Rightarrow y=\frac{x}{2}\ln x-\frac{x}{4}+\frac{C}{x}$. ◄

Определение 3.2. Уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha},\ (\alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1). \tag{3.5}$$

называется *уравнением Бернулли*. Оно может быть решено, как и линейное уравнение, методом Бернулли: $y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$.

Пример 3.2. Найти общее решение уравнения

$$y'+\frac{1}{x}y=xy^2. \tag{3.6}$$

► Положим $y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$. Уравнение (3.6) принимает вид

$$u'v+uv'+\frac{1}{x}uv=xu^2v^2 \;\Rightarrow$$

$$u'v+u\left(v'+v/x\right)=xu^2v^2. \tag{3.7}$$

Выберем функцию v так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю:

$$v'+\frac{v}{x}=0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln v=-\ln x \;\Rightarrow v=\frac{1}{x}.$$

Уравнение (4.7) примет вид $\frac{1}{x}u'=\frac{u^2}{x}$, откуда $\frac{u'}{u^2}=1 \Rightarrow -\frac{1}{u}=x-C \Rightarrow$ $u=\frac{1}{C-x}$. Тогда общее решение уравнения (3.6) имеет вид:

$$y=uv=\frac{1}{x(C-x)}.$$

При делении на u^2 могло быть потеряно решение $u\equiv 0 \Rightarrow y\equiv 0$. Проверка показывает, что $y\equiv 0$ – решение уравнения (3.6). ◄

§ 4. Примеры дифференциальных уравнений первого порядка, используемых в экономике

1. Уравнение естественного роста объёма выпускаемой продукции. Обозначим через $y(t)$ объём выпуска продукции от некоторого начального момента времени t. Предполагается, что продукция продаётся по фиксированной цене p и что рынок ненасыщаем, т. е. вся производимая продукция полностью реализуется. Назовём чистыми инвестициями разность $I=I(t)$ между общим объёмом инвестиций и амортизационными затратами. Чтобы увеличить объём выпуска $y(t)$, необходимо, чтобы чистые инвестиции I были больше нуля. Из предположения о ненасыщаемости рынка следует, что в результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции. Это приведёт к росту объёма выпуска.

Предположим, что между чистой инвестицией $I(t)$ и ростом объёма выпуска y' прямая пропорциональная зависимость, т. е. имеет место так называемый принцип акселерации:

$$y' = mI, \tag{4.1}$$

где m – норма акселерации ($0<m<1$, m=const). Пусть a – норма чистых инвестиций, т. е. часть дохода py, полученного от реализации продукции, которая тратится на чистые инвестиции, при этом $0<a<1$. Но тогда

$$I = apy. \tag{4.2}$$

Следовательно, окончательно получаем:

$$y' = ky. \tag{4.3}$$

где $k = map$ – const.

Равенство (4.3) – это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Все решения этого уравнения содержатся в формуле $y = Ce^{kt}$, где С– произвольная константа.

Пусть в начальный момент времени t_0 обьём выпускаемой продукции был равен V_0, т. е. $V_0 = Ce^{kt_0}$. Отсюда имеем $C = V_0 e^{-kt_0}$ и окончательно получаем:

$$y = V_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{4.4}$$

Соотношение (4.4) называется уравнением естественного роста. Этим уравнением описываются также демографические процессы, процессы радиоактивного распада, размножения бактерий.

Замечание 4.1. Модель естественного роста применима только на начальном этапе выпуска продукции повышенного спроса (например, новой модели планшета). Насыщение рынка и конкуренция приводит к необходимости снижения цены. В этом случае необходимо использование других модели.

2. Уравнение Самуэльсона. Пусть $D(p)$ и $S(p)$ – соответственно величины спроса и предложения при цене $p(t)$, t – время, прошедшее от начального момента, $k > 0$. Связь между изменением цены $p(t)$ и неудовлетворённым спросом $D(p) - S(p)$ моделирует *уравнение Самуэльсона*:

$$p' = k[D(p) - S(p)]. \tag{4.5}$$

Рассмотрим простой случай, когда спрос и предложение задаются линейными функциями:

$$D(p) = a - bp, \ \ S(p) = m + np, \tag{4.6}$$

Здесь a, b, m, n – некоторые положительные числа. При этом, очевидно, $a > m$, так как при нулевой цене спрос превышает предложение.

В этом случае уравнение (4.5) имеет вид

$$p' = k(a - m) - k(n + b)p. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Решая уравнение (§ 2), получим

$$p(t) = \frac{a - m}{n + b} + Ce^{-k(n+b)t}. \tag{4.8}$$

Если $p' = 0$, то $p(t) = p_{равн} = const$. Равновесное решение является решением уравнения, следующего из (4.5) при $p'' = 0$:

$$D(p) - S(p) = 0. \tag{4.9}$$

Для случая, когда $D(p)$ и $S(p)$ – линейные функции p (см. (4.6)) из (4.9) получаем:

$$p_{равн} = \frac{a-m}{n+b} \ .$$

(4.10)

Обращаем внимание читателя на то, что это есть предел

$$p(t) = \frac{a-m}{n+b} + Ce^{-k(n+b)t} \quad \text{при } t \to \infty \ .$$

Замечание 4.2. Если в начальный момент времени (при $t = 0$) цена единицы продукции была равна p_0, то

$$p(t) = \frac{a-m}{n+b} + \left(p_0 - \frac{a-m}{n+b}\right)e^{-k(n+b)t}. \tag{4.11}$$

Замечание 4.3. Используя (4.11) нетрудно определить время, начиная с которого текущая цена единицы продукции будет составлять f% от равновесной.

3. Модель рекламной кампании.

Потребительский спрос можно определить как возможность покупателя купить нужные ему товары. Акт потребления не всегда является обдуманным поступком, твердо обоснованным экономическими соображениями. Потребление в значительной мере предопределяется привычками людей, стремлением следовать определенному жизненному укладу, связанному с принадлежностью к данной социальной или профессиональной группе. Чтобы производить вещи и услуги, которые народ пожелает купить, надо интересоваться потребностями людей, понимать их цели, обычаи, предрассудки, образ жизни, надежды, опасения, вообще настроение.

Ключевое значение по изучению рынка, интенсификации сбыта товаров и услуг, повышению их конкурентоспособности приобрел в наше время маркетинг. Коротко, маркетинг – это научно обоснованная система освоения рынка. Одна из функций маркетинга – организация рекламы.

Скажем, та или иная фирма начинает терять прочность позиций своих товаров на рынке. В таком случае фирма моментально выделяет дополнительные средства на переориентацию товара на тот сегмент рынка, где он займет лидирующее положение. Фирма начинает рекламировать новый товар или услугу. Разумеется, что издержки на дорогостоящую рекламную кампанию должны с лихвой покрыть прибыль от будущих продаж. Ясно, что вначале расходы могут превышать прибыль, поскольку лишь малая часть потенциальных покупателей будет информирована о новинке. Затем, при увеличении числа продаж, уже возможно рассчитывать на заметную прибыль, и, наконец, наступит момент, когда рынок насытится, и рекламировать товар далее станет бессмысленно.

Модель рекламной кампании основывается на следующих основных предположениях:

1. Если за время t, прошедшее с начала рекламной кампании, число узнавших о товаре и готовых его купить равно $N(t)$, то скорость изменения со временем этого числа пропорциональна числу покупателей, еще не знающих о нем, т. е. величине $\alpha_1(t)(N_0 - N(t))$, где $N_0 = N(\infty)$ – общее число потенциальных платежеспособных покупателей, т. е. предельное значение $N(t)$ при $t \to \infty$ ($t = 0$ – момент начала кампании, при этом $N(0) = 0$), $\alpha_1(t) > 0$ характеризует интенсивность рекламной кампании (фактически определяемую затратами на рекламу в данный момент времени).

2. Предполагается, что узнавшие о товаре потребители тем или иным образом распространяют полученную информацию среди неосведомленных, выступая как бы дополнительными рекламными «агентами» фирмы. Их вклад в величину скорости изменения $N(t)$ равен $\alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t))$ и тем больше, чем больше число «агентов». Величина $\alpha_2(t)$ характеризует степень общения покупателей между собой (она может быть установлена, например, с помощью опросов).

Полученная при предположениях I и II модель рекламной кампании представляет собой дифференциальное уравнение

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t)(N_0 - N(t)) + \alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t)), \text{ или}$$

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)](N_0 - N(t)). \tag{4.12}$$

Мероприятия по увеличению популярности товара могут, в зависимости от значений величин $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $N(t)$ направляться на улучшение результатов как прямой (параметр α_1), так и косвенной (параметр α_2) рекламы.

Если рассмотреть модель в окрестности точки N_0, считая, что $N \ll N_0$, $\alpha_2(t)N \ll \alpha_1(t)$, то уравнение (2.1) принимает вид $dN/dt = \alpha_1(t)N_0$ и имеет решение

$$N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t)\,dt, \tag{4.13}$$

удовлетворяющее естественному начальному условию $N = 0$ при $t = 0$. Из (4.13) относительно легко вывести соотношение между рекламными издержками и прибылью в самом начале кампании.

Обозначим через p величину прибыли от единичной продажи, какой она была бы без затрат на рекламу. Для простоты будем считать, что каждый покупатель приобретает лишь одну единицу товара. Тогда суммарная прибыль равна

$$P = pN(t). \tag{4.14}$$

Коэффициенты $\alpha_1(t)$ по своему смыслу – число равнозначных рекламных действий в единицу времени (например, изготовление и расклейка единичных афиш). Если обозначить через s стоимость элементарного акта рекламы, то произведенные на рекламу затраты будут равны

$$S = s\int_0^t \alpha_1(t)\,dt, \tag{4.15}$$

а суммарная прибыль (4.14) в первые моменты рекламной кампании (когда $\alpha_2(t)N \ll \alpha_1(t)$) в силу (4.13) может быть представлена так:

$$P = pN_0\int_0^t \alpha_1(t)\,dt. \tag{4.16}$$

Из (4.15) и (4.16) следует, что прибыль P превосходит издержки S, т. е. $P > S$, при условии $pN_0 > s$, и если реклама действенна и недорога, а общий уровень потребления на рынке достаточно высок, то выигрыш достигается с первых же моментов кампании (в реальности между оплатой рекламы, рекламным действием и последующей покупкой имеет место так называемый *лаг* – временная задержка, которая может быть учтена в более полных моделях). При дорогой или не слишком эффективной рекламе фирма на первых же порах несет убытки. Это обстоятельство, однако, не может, вообще говоря, служить основанием для прекращения рекламы, ибо условия $pN_0 > s$ справедливы лишь при малых значениях $N(t)$, когда функции S и P растут со временем соответственно по законам (4.15) и (4.16). При увеличении $N(t)$ увеличивается действие косвенной рекламы, и отброшенное в уравнении (4.12) слагаемое $\alpha_2(t)N(t)$ становится заметным. По этой причине число $N(t)$ узнавших о товаре и готовых его купить может стать более быстрой функцией времени, чем в формуле (4.13), полученной при условии $\alpha_2(t)N \ll \alpha_1(t)$. При неизменном темпе роста расходов на рекламу это дает возможность скомпенсировать финансовые издержки в начальной стадии рекламной кампании.

Рассмотрим частный случай, когда интенсивность рекламной кампании α_1 и интенсивность общения покупателей между собой α_2 постоянны. Уравнение (4.12) принимает тогда вид:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha_1 + \alpha_2 N)(N_0 - N). \tag{4.17}$$

Представляя уравнение (4.17) в виде

$$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 N} + \frac{1}{N_0 - N}\right) dN = (\alpha_1 + \alpha_2 N_0)\,dt$$

и интегрируя его, получаем:

$$\ln(\alpha_1 + \alpha_2 N) - \ln(N_0 - N) = (\alpha_1 + \alpha_2 N_0)t + C.$$

Постоянная интегрирования C определяется из начального условия

$$N\big|_{t=0} = 0, \tag{4.18}$$

которое означает, что до начала рекламной кампании покупатели ничего не знают о новом товаре. Из начального условия (4.18) находим $C = \ln(\alpha_1/N_0)$.

В результате будем иметь

$$\ln\frac{\alpha_1+\alpha_2 N}{N_0-N} = (\alpha_1+\alpha_2 N_0)t + \ln(\alpha_1/N_0),$$

откуда, потенцируя, находим

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2 N}{N_0-N} = \frac{\alpha_1}{N_0}e^{(\alpha_1+\alpha_2 N_0)t},$$

или, в окончательном виде

$$N = N_0\left(1-\frac{\alpha_2 N_0+\alpha_1}{\alpha_2 N_0+\alpha_1 e^{(\alpha_1+\alpha_2 N_0)t}}\right). \qquad (4.19)$$

Покажем, что производная функции $N(t)$ при $t>0$ может быть больше ее начального значения $\alpha_1 N_0$ (при условии $N_0 > \alpha_1/\alpha_2$). Чтобы убедиться в этом, найдём максимум dN/dt, вычислив производную от правой части уравнения (4.17) и приравняв ее к нулю

$$-\alpha_1+\alpha_2 N_0-2\alpha_2 N=0 \quad\Rightarrow\quad N=\frac{N_0-\alpha_1/\alpha_2}{2}.$$

Мы получили точку $N=(N_0-\alpha_1/\alpha_2)/2$, в которой производная dN/dt достигает максимума

$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{\max} = \alpha_2\frac{(N_0+\alpha_1/\alpha_2)^2}{4}.$$

В этот период для текущей, т. е. получаемой в единицу времени прибыли имеем

$$P_{\max} = p\frac{dN}{dt} = p\alpha_2\frac{(N_0+\alpha_1/\alpha_2)^2}{4}.$$

Вычитая из $P_{\max}$ начальную (при $t=0$) текущую прибыль

$P_0 = p(dN/dt)\big|_{t=0} = p\alpha_1 N_0$, получаем

$$P_{\max}-P_0 = p\alpha_2\frac{(N_0+\alpha_1/\alpha_2)^2}{4} - p\alpha_1 N_0 = \frac{p}{4}\left(\sqrt{\alpha_2}N_0-\alpha_1/\sqrt{\alpha_2}\right)^2. \qquad (4.20)$$

Из (4.20) мы видим, что разница между начальной и максимальной прибылью, получаемой в единицу времени, может быть весьма значительной. Суммарный экономический эффект от рекламной кампании определяется всем ее ходом, характеристики которого вычисляются из (4.17) с помощью квадратуры.

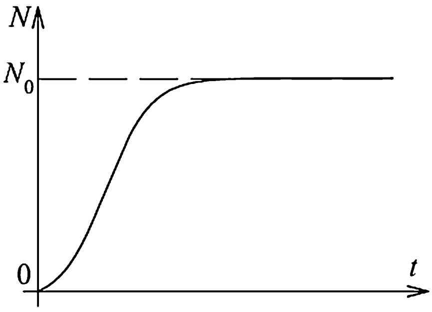


Рис. 4.1. График функции (4.19)

Из анализа функции (4.19) видно (см. также график на рис. 4.1), что, начиная с некоторого момента, продолжать рекламу становится невыгодно.

Действительно, при $N(t)$, близких к N_0, уравнение (4.17) может быть записано проще путем замены N на N_0 в первом множителе правой части (4.17):

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha_1 + \alpha_2 N_0)(N_0 - N). \tag{4.21}$$

Решение уравнения (4.21) $N = N_0\left(1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2 N_0)t}\right)$ при начальном условии $N(0) = 0$ стремится при $t \to +\infty$ к предельному значению N_0 по экспоненциальному закону, который определяет очень медленный рост вблизи асимптоты. В единицу времени появляется ничтожно малое число новых покупателей, и поступающая прибыль при любых условиях не может покрыть продолжающихся расходов на рекламу.

Аналогичные характеристики могут быть найдены для уравнения (4.12), где параметры прямой и косвенной рекламы являются переменными величинами.

Глава 3. **Дифференциальные уравнения высших порядков**

§ 1. Задача и теорема Коши для дифференциального уравнения n-го порядка. Общее и частное решения

Равенство

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

задаёт дифференциальное уравнение n-го порядка в общем виде. Здесь F – некоторая известная функция от своих аргументов, предполагаемой вещественной. В уравнение (1.1) обязательно входит производная n-го порядка.

Частным случаем уравнения (1.1) является уравнение, разрешённое относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) считается заданным в области $D \subset \boldsymbol{R}_{n+1}$, если функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ из его правой части задана в любой точке $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in D$.

Определение 1.1. Отыскание решения уравнения (1.2), удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ \dots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{1.3}$$

где x_0, y_0, y'_0, … , $y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, называется *задачей Коши*. Равенства

(1.3) называются *начальными условиями*, а числа $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – *начальными данными*.

Замечание 1.1. Задание начальных условий (1.3) соответствует заданию точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$.

Теорема 1.1 (*теорема Коши – теорема существования и единственности решения задачи Коши*). Если функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ из правой части уравнения (1.2) непрерывна вместе со своими производными по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ в окрестности точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, то в некоторой окрестности точки x_0 это уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям (1.3).

Проиллюстрируем теорему 1.1 на примере уравнения 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{1.4}$$

Начальные условия здесь имеют вид:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{1.5}$$

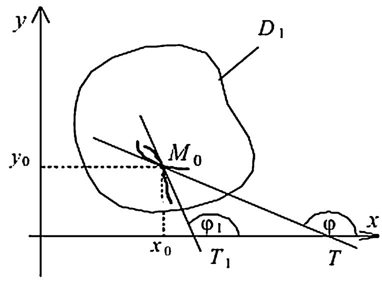


Рис. 1.1. *Иллюстрация к теореме 1.1*

Пусть $D \subset \boldsymbol{R}_3$ – область, где выполнены условия теоремы 1.1 для уравнения (1.4), $D_1 \subset \boldsymbol{R}_2$ – проекция области D в плоскость Oxy, точка $M_0(x_0, y_0) \in D_1$.. Через эту точку в силу теоремы 1.1 пройдёт единственная интегральная кривая уравнения (1.4), касательная T к которой в точке M_0 наклонена к оси Ox под углом φ: $\operatorname{tg}\varphi = y'_0$. В то же время через точку M_0 проходит бесчисленное множество интегральных кривых с другими наклонами касательных к ним (например, интегральная кривая с касательной T_1 (рис. 1.1)).

Рассуждая также, как в §1, гл. 1, можно обосновать существование семейства решений уравнения (1.2), зависящего от n параметров.

Определение 1.2. Семейство функций

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \tag{1.6}$$

где $C_1, \dots, C_n$ – произвольные постоянные, называется *общим решением* уравнения (1.2) в области $D \in \boldsymbol{R}_{n+1}$, если:

1) для любого набора допустимых значений $C_1 = C_1^*, C_2 = C_2^*, \dots, C_n = C_n^*$ соответствующая функция $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*)$ семейства (1.6) является решением уравнений (1.2);

2) для любой точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ найдётся единственный набор значений $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ такой, что функция $y = \varphi(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)})$ из семейства (1.6) будет решением задачи Коши для уравнения (1.2) с начальными условиями $y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0, \; \dots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Замечание 1.2. Второе условие из определения 1.2 эквивалентно следующему утверждению: система уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0, \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{1.7}$$

имеет единственное решение $C_1 = C_1^{(0)}$, $C_2 = C_2^{(0)}$, … , $C_n = C_n^{(0)}$.

Пример 1.1. Показать, что семейство функций $y = C_1 + C_2e^{3x}$ есть общее решение уравнения $y'' - 3y' = 0$ в пространстве $\boldsymbol{R}_3 = \{(x, y, y'), x, y, y' \in \boldsymbol{R}\}$.

►Покажем, что для этого семейства выполняются оба условия из определения 1.2. В самом деле, подставим $y = C_1 + C_2e^{3x}$ в данное уравнение:

$$(C_1 + C_2e^{3x})'' - 3(C_1 + C_2e^{3x})' = 0 \Rightarrow 9C_2e^{3x} - 3 \cdot 3C_2e^{3x} = 0.$$

Пришли к тождеству, справедливому при $\forall x \in \boldsymbol{R}$ и $\forall C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}$. Итак, первое условие из определения 1.2 выполнено.

Для проверки выполнения второго условия из определения 1.2 возьмём произвольную точку $(x_0, y_0, y_0') \in \boldsymbol{R}_3$ и покажем, что найдётся единственный набор значений $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$ такой, что функция $y = C_1^{(0)} + C_2^{(0)}e^{3x}$ будет решением задачи Коши для данного уравнения с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. Подставив значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, в данное семейство функций и его производную по x, получим следующую систему:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 + C_2e^{3x_0}, \\ y_0' = 3C_2e^{3x_0}. \end{cases}$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно C_1, C_2. Она крамеровская, ибо её главный определитель $\Delta = 3e^{3x_0} \neq 0$ при $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, она имеет единственное решение: $C_1 = C_1^{(0)}$, $C_2 = C_2^{(0)}$. Заключаем, что и второе условие из определения 1.2 выполнено.◄

Общее решение уравнения (1.2), записанное в виде, не разрешённом относительно искомой функции y

$$\psi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

называется *общим интегралом* этого уравнения.

Определение 1.3. Решение, получающееся из общего решения дифференциального уравнения (1.2) при фиксированных значениях произвольных постоянных называется *частным решением* этого уравнения.

Если общее решение уравнения (1.2) известно, то нахождение частного решения, удовлетворяющего начальным условиям (1.3), сводится к решению относительно C_1, C_2, … , C_n системы уравнений (1.7).

§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1. Уравнение не содержит искомой функции. Такое уравнение (здесь и дальнейшем, ограничимся уравнениями только 2-го порядка) имеет вид

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{2.1}$$

Вводя новую искомую функцию $z = z(x)$ по формуле $z = y'$, имеем: $y' = z'$.

Уравнение (2.1) примет вид:

$$F(x, z, z') = 0. \tag{2.2}$$

Таким образом, порядок уравнения понизился на единицу.

Если найдено общее решение уравнения (2.2):

$$z = z(x, C_1),$$

то задача сводится к интегрированию уравнения 1-го порядка

$$y' = z(x, C_1). \tag{2.3}$$

Проинтегрировав равенство (2.3), получим общее решение уравнения (2.1).

Пример 2.1. Решить уравнение

$$y'' + y'\mathrm{tg}x = \sin 2x. \tag{2.4}$$

► Уравнение (2.4) не содержит y. Полагая $z = y'$, получим дифференциальное уравнение:

$$z' + z\mathrm{tg}x = \sin 2x, \tag{2.5}$$

т. е. порядок уравнения понизился на две единицы. Общее решение линейного дифференциального уравнение (2.5) первого порядка можно получить методом Бернулли (см. § 3, гл. 2): $z = -2\cos^2 x + C_1 \cos x$, отсюда

$$y' = -2\cos^2 x + C_1 \cos x.$$

Тогда $y = \int (-2\cos^2 x + C_1 \cos x)dx = -x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \cos x + C_2$. Таким образом, функция $y = -x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \cos x + C_2$. является общим решением уравнения (2.4).◄

Замечание 2.1. Частным случаем уравнения (2.1) является уравнением вида: $y'' = f(x)$. Оно решается двухкратным интегрироваие обеих его частей.

2. Уравнение не содержит независимой переменной. Оно имеет вид:

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{2.6}$$

Порядок этого уравнения всегда можно понизить на единицу. Для этого сделаем замену искомой функции, положив $y' = z$, и примем y за новую независимую переменную, т. е. будем считать, что z есть функция от y: $z = z(y)$. Применяя правило дифференцирования сложной функции, для y''_{x^2} имеем:

$$y''_{x^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

Исходное уравнение (3.2) принимает вид

$$F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0. \tag{2.7}$$

Получили уравнение первого порядка относительно неизвестной функции z. Переменная y здесь выполняет роль аргумента.

Пример 2.2. Найти решение задачи Коши:

$$y'' = e^{2y},\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \tag{2.8}$$

►Это уравнение не содержит независимой переменной x и, следовательно, относится к рассматриваемому типу. Полагая $y' = z,\ z = z(y)$, имеем $y'' = z\frac{dz}{dy}$.

Уравнение (2.8) принимает вид $z\frac{dz}{dy}=e^{2y}$ или $zdz=e^{2y}dy$. Проинтегрируем последнее равенство: $\frac{1}{2}z^2=\frac{1}{2}e^{2y}+C_1$. Заменив z на y', после элементарных преобразований приходим к равенству:

$$\frac{1}{2}y'^2=\frac{1}{2}e^{2y}+C_1. \tag{2.9}$$

Подставим в (2.9) начальные данные: $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C_1 \Rightarrow C_1=0$, в результате соотношение (2.9) преобразуется к виду: $y'^2=e^{2y}$. Отсюда $y'^2=\pm e^{2y}$ или, с учётом начальных данных, $y'=e^y$ (в начальных данных значение y' положительно). Разделим в этом уравнении переменные: $\frac{dy}{e^y}=dx$. После интегрирования имеем:

$$-e^{-y}=x+C_2. \tag{2.10}$$

Подставим в (2.10) начальные данные: $-1=C_2$. Теперь из (2.10) получаем: $e^{-y}=1-x \Rightarrow\ y=-\ln(1-x)$ – решение данной задачи Коши. ◄

Замечание 2.2. При решении задачи Коши для уравнения, допускающего понижение порядка, произвольные постоянные целесообразно определять по мере их появления. Именно так и было сделано в примере 3.2. Если следовать алгоритму, применённому в примере 2.1, т. е. сначала найти общее решение, а потом определять произвольные постоянные, используя начальные данные, то решение примера 2.2 было бы более громоздким.

Глава 4. **Линейные дифференциальные уравнения высших порядков**

§ 1. Основные понятия

Определение 1.1. Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=q(x) \tag{1.1}$$

называется *линейным дифференциальным уравнением n-го порядка*, функции $p_k(x)$, $k=1,2,\ldots,n$, называются *коэффициентами* уравнения (1.1), $q(x)$ – его *правой частью* или *свободным членом*. Если $q(x)\not\equiv 0$, линейное уравнение называют *неоднородным*, в противном случае – *однородным*.

Теорема 1.1. Если коэффициенты и свободный член уравнения (1.1) непрерывны на промежутке (a,b), содержащем точку x_0, существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{1.2}$$

► Запишем уравнение (1.1) в виде:

$$y^{(n)}=-p_1(x)y^{(n-1)}-\ldots-p_{n-1}(x)y'-p_n(x)y+q(x). \tag{1.3}$$

Правая часть уравнения (1.3) и её производные по $y,y',\ldots,y^{(n-1)}$ непрерывны по всем своим аргументам при $\forall x\in(a,b)$ и любых вещественных значениях

$y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Тогда для $\forall x_0 \in (a, b)$ в силу теоремы Коши (теорема 1.1, гл. 3) существует единственное решение уравнения (1.3) (а, значит и уравнения (1.1)), удовлетворяющего начальным условиям (1.2).◄

Можно доказать, что решение $y(x)$ задачи Коши для уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) непрерывно вместе с производными до n-го порядка включительно на всём промежутке (a, b), а не только в окрестности точки x_0 (см., например, [11]).

Замечание 1.1. Для линейного дифференциального уравнения справедливо свойство инвариантности: уравнение (1.1) остаётся линейным при любом преобразовании $x = \varphi(t)$ независимой переменной и при линейном преобразовании $y = u(x)z + v(x)$ искомой функции. Здесь φ и u, v – произвольные непрерывные, n раз дифференцируемые функции [20].

Замечание 1.2 Мы будем вести изложение теории для уравнений второго порядка, так как здесь можно увидеть все интересующие нас закономерности. Таким образом, в дальнейшем речь пойдет об уравнении

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = r(x). \tag{1.4}$$

§ 2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x), \tag{2.1}$$

где p, q — некоторые вещественные числа, $r(x)$ — некоторая функция. Если $r(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2.2}$$

называется *однородным*, в противном случае при $r(x) \neq 0$ уравнение (2.1) называется *неоднородным*.

Можно доказать[20]., что существует единственное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где x_0, y_0, y'_0– некоторые вещественные числа.

Рассмотрим сначала решение линейного однородного уравнения (2.2) с постоянными коэффициентами.

Определение 2.1 *Линейной комбинацией* функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ с коэффициентами C_1 и C_2 называется выражение вида $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. Если линейная комбинация функций $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ тождественно равна нулю на множестве X только тогда, когда коэффциенты C_1 и C_2 равны нулю, то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми на множестве X, в противном случае — линейно зависимыми на этом множестве.

Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ дифференцируемы на промежутке (a, b), то в любой точке этого промежутка можно вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

который называется *определителем Вронского* или *вронскианом* рассматриваемой системы функций и обозначается $W[y_1, y_2]$ или $W(x)$.

Замечание 2.1. Можно доказать, что определитель Вронского системы решений уравнения (2.2) либо тождественно равен нулю на промежутке (a, b), либо он отличен от нуля в любой точке этого промежутка. В первом случае эти решения линейно зависимы, во втором – линейно независимы на промежутке (a, b).

Пример 2.1. Показать, что следующие функции линейно независимы на всей вещественной оси (т. е. на $\boldsymbol{R}$):

а) $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$; **б)** $e^{\lambda x}$ и $xe^{\lambda x}$; **в)** $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

►а) Вычислим определитель Вронского для функций $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

При вычислении $W(x)$ использованы свойства определителя 2-го порядка (разд. 1, гл. 1, § 2). Данные функции линейно независимы на $\boldsymbol{R}$, так как $W(x) \neq 0$ на $\boldsymbol{R}$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$, а $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ положительны при $\forall x \in \boldsymbol{R}$).

б) Вычислим определитель Вронского для функций $e^{\lambda x}$ и $xe^{\lambda x}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1+x\lambda)e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x}\begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda & 1+\lambda x \end{vmatrix} = e^{2\lambda x}(1+\lambda x - \lambda x) = e^{2\lambda x}.$$

Данные функции линейно независимы на $\boldsymbol{R}$, так как $W(x) \neq 0$ на $\boldsymbol{R}$.

в) Вычислим определитель Вронского для функций $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ (\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)e^{\alpha x} & (\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)e^{\alpha x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x}(\alpha\sin\beta x\cos\beta x + \beta\cos^2\beta x - \alpha\cos\beta x\sin\beta x + \beta\sin^2\beta x) = \beta e^{2\alpha x}.$$

Данные функции линейно независимы на $\boldsymbol{R}$, так как $W(x) \neq 0$ на $\boldsymbol{R}$.◄

Теорема 2.1. Если y_1 y_2, – линейно независимые решения уравнения (2.2) на промежутке (a, b), то функция

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{2.3}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, является общим решением уравнения (2.2) на этом промежутке.

►Покажем, что для функции $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ выполняются оба условия из определения общего решения (определение 1.2).

Для любого набора допустимых значений C_1, C_2 эта функция является решением уравнений (2.2). Подставим Y из (2.3) в уравнение (2.2):

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0. \tag{2.4}$$

Преобразуем левую часть равенства (2.4), сгруппировав члены, содержащие C_1 и C_2:

$$C_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) = 0.$$

Суммы в скобках в левой части последнего равенства равны нулю, так как y_1 и y_2 – решения уравнения (2.2). Итак, приходим к верному числовому равенству: 0 = 0, а это означает, что функция из (2.3) является решением уравнения (2.2). Первое условие из определения 1.2 (гл.3) выполнено.

Для проверки выполнения второго условия из определения 1.2 рассмотрим начальные условия $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, где $x_0\in(a,b)$, y_0, y_0' – любые вещественнее числа, и покажем, что найдётся единственный набор значений $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$ такой, что функция

$$y=C_1^{(0)}y_1+C_2^{(0)}y_2 \tag{2.5}$$

будет решением задачи Коши для уравнения (2.2) с данными начальными условиями. Подставив значения $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y_0'$, в семейство функций (2.3) и его производную по x, получим следующую систему:

$$\begin{cases} y_0=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0), \\ y_0'=C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0). \end{cases}$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно C_1, C_2. Она крамеровская, ибо её главный определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}=W(x_0)\neq 0,$$

так как функции y_1, y_2, – линейно независимы на промежутке (a, b) и их определитель Вронского не равен нулю на этом промежутке (замечание 2.1). Она имеет единственное решение: $C_1=C_1^{(0)}$, $C_2=C_2^{(0)}$. Заключаем, что и второе условие из определения 1.2 выполнено.◀

Итак, чтобы найти общее решение уравнения (2.2), надо знать два его частных решения y_1 y_2, линейно независимых на промежутке (a, b) .

Будем искать решение уравнения (2.2) в виде: $y=e^{\lambda x}$. Подставим эту функцию в уравнение (2.2):

$$\lambda^2e^{\lambda x}+p\lambda e^{\lambda x}+qe^{\lambda x}=0, \text{ или}$$
$$e^{\lambda x}(\lambda^2+p\lambda+q)=0.$$

Так как $e^{\lambda x}\neq 0$, то приходим к уравнению:

$$\lambda^2+p\lambda+q=0, \tag{2.6}$$

называемое *характеристическим* по отношению к уравнению (2.2).

Замечание 2.2. Характеристическое уравнение можно получить путём формальной замены производных от функции y в уравнении (2.2) на степень λ, показатель которой равен порядку соответствующей производной. Сама функция y заменяется при этом на λ^0, т. е. на 1.

Замечание 2.3. Если λ – корень характеристического уравнения (2.6), то функция $e^{\lambda x}$ решение дифференциального уравнения (2.2).Таким образом, решение дифференциального уравнения в этом случае сводится к алгебраическим операциям.

Характеристическое уравнение (2.6) может иметь 2 различных вещественных корня, два равных вещественных корня и не иметь вещественных корней. Каждому из этих трех случаев соответствует система из двух линейно независимых решений уравнения (2.2).

Теорема 2.2. *(Об общем решении линейного однородного уравнения)*

1. Если характеристическое уравнение (2.6) для уравнения (2.2) имеет различные вещественные корни λ_1 и λ_2, то общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}. \qquad (2.7)$$

2. Если характеристическое уравнение (2.6) для уравнения (2.2) имеет два равных вещественных корня λ, то общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$y = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}. \qquad (2.8)$$

3. Если характеристическое уравнение (2.6) не имеет вещественных корней, то общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x), \qquad (2.9)$$

где $\alpha \pm i\beta$ – комплексные сопряженные корни характеристического уравнения. В равенствах (2.7) – (2.9) C_1, C_2 – произвольные постоянные.

►Линейная независимость функций из равенств (2.7) – (2.9) на $\boldsymbol{R}$ показана в примере 2.1. Функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ из (2.7) – решения уравнения (2.2) в соответствии с замечанием 2.3. Проверим, что функции $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$ являются решениями уравнения (2.2). Первая из них такова в соответствии с замечанием 2.3. Вторую подставим в это уравнение:

$$(xe^{\lambda x})'' + p(xe^{\lambda x})' + q(xe^{\lambda x}) = 0. \qquad (2.10)$$

Вычислим производные в левой части последнего равенства:

$$(2\lambda + \lambda^2x)e^{\lambda x} + p(1+\lambda x)e^{\lambda x} + q(xe^{\lambda x}) = (\lambda + \lambda^2x + p(1+\lambda x) + qx)e^{\lambda x} =$$
$$= ((\lambda^2 + p\lambda + q)x + 2\lambda + p)e^{\lambda x} = 0.$$

Имеем $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, так как λ – корень характеристического уравнения; $2\lambda + p = 0$ по теореме Виетта из элементарной математики ($2\lambda = -p$). Подстановка функции $xe^{\lambda x}$ в уравнение (2.2) привела к верному числовому равенству $0 = 0$, поэтому функция $xe^{\lambda x}$ – решение этого уравнения. Аналогично устанавливается, что функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ – решения уравнения (2.2). Выполните это самостоятельно.◄

Пример 2.2. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$.

►Перейдём от дифференциального уравнения к его характеристическому уравнению $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ и найдём его корни: $\lambda = -1$, $\lambda = 3$. Корни характеристического уравнения вещественны и различны. Тогда общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид $Y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$.◄

Пример 2.3. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

►Перейдём от дифференциального уравнения к его характеристическому уравнению: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ и найдём его корни: $\lambda_{1,2} = 1$. Характеристическое уравнение имеет два равных вещественных корня. Тогда общее решение данного дифференциального имеет вид $Y = C_1e^x + C_2xe^x$.◄

Пример 2.4. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2 = 0$.

►Перейдём от дифференциального уравнения к его характеристическому уравнению $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Это уравнение не имеет вещественных корней, так как его дискриминант отрицателен. Тогда в соответствии с теоремой 2.2 общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

где $\alpha \pm i\beta$ – комплексно-сопряжённые корни характеристического уравнения. В данном случае $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{2-1} = 1$. Следовательно, $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$

общее решение данного уравнения.◄

§ 3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y'' + py' + qy = r(x). \tag{3.1}$$

Уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{3.2}$$

– это соответствующее (3.1) однородное уравнение.

1. Структура общего решения уравнения ЛНДУ. Принцип суперпозиции.

Теорема 3.1 (*о структуре общего решения уравнения ЛНДУ.*

Общее решение линейного неоднородного уравнения ЛНДУ (уравнения 3.1) есть сумма общего решения $Y = C_1y_1 + C_2y_2$ соответствующего ему однородного уравнения (3.2) и частного решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения, т. е. общее решение уравнения (3.1) определяется формулой: $y = Y + \tilde{y}$.

Теорема 3.2 (*принцип суперпозиции*). Если $\tilde{y}_1$ и $\tilde{y}_2$ – частные решения неоднородных уравнений вида

$$y'' + py' + qy = r_1(x), \tag{3.3}$$

$$y'' + py' + qy = r_2(x), \tag{3.4}$$

то $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ – частное решение неоднородного уравнения вида

$$y'' + py' + qy = r_1(x) + r_2(x). \tag{3.5}$$

► Подставим функцию $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ в уравнение (3.5):

$$(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2)'' + p(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2)' + q(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = r_1(x) + r_2(x). \tag{3.6}$$

Так как производная суммы функций равна сумме их производных, то уравнение (3.6) преобразуется к виду:

$$(\tilde{y}_1'' + p\tilde{y}_1' + q\tilde{y}_1) + (\tilde{y}_2'' + p\tilde{y}_2' + q\tilde{y}_2) = r_1(x) + r_2(x).$$

По условию теоремы $\tilde{y}_1$ – рещение уравнения (3.3), а $\tilde{y}_2$ – решение уравнения (3.4), поэтому последнее равенство приводится к тождеству:

$$r_1(x) + r_2(x) = r_1(x) + r_2(x),$$

а это и означает, что сумма $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ – решение неоднородного уравнения (3.5).◄

2. Решение линейных неоднородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.

Частное решение уравнения (3.1) можно найти методом вариации произвольных постоянных, однако проще его найти с помощью только алгебраических операций при специальном виде правой части уравнения (3.1) в следующих случаях:

1) $r(x) = P_m(x)$, $P_m(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m$ – многочлен степени m;

2) $r(x) = e^{\nu x}P_m(x)$, $P_m(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m$ – многочлен степени m;

3) $r(x)=e^{\nu x}[P_m(x)\cos\mu x+P_l^*(x)\sin\mu x]$, $P_m(x)=A_0+A_1x+\ldots+A_mx^m$ и $P_l^*(x)=A_0^*+A_1^*x+\ldots+A_l^*x^l$ – многочлены степени m и l соответственно.

Отметим, что каждый из первых двух случаев, по существу, является частным случаем последующего.

Мы рассмотрим два случая правой части $r(x)$ и методы подбора частного решения $y_ч$ сформулируем в виде двух теорем.

Теорема 3.3. Если правая часть уравнения (3.1) имеет вид $r(x)=e^{ax}P_m(x)$, то частное решение $y_ч$ может быть найдено в виде $y_ч=x^re^{ax}Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ – многочлен степени m с неопределёнными коэффициентами, а r – кратность числа a как корня характеристического уравнения.

Пример 3.1. Найти общее решение уравнения $y''-y=xe^{2x}$.

►1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни: $\lambda^2-1=0$; $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$; $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$. Общее решение однородного уравнения: $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

2) Так как $a=2$ – не является корнем характеристического уравнения, то $r=0$, и частное решение ищем в виде $y_ч=(Ax+B)e^{2x}$, далее $y_ч'=(A+2Ax+2B)e^{2x}$, $y_ч''=(2A+2A+4Ax+4B)e^{2x}$. Подставим $y_ч$, $y_ч'$ и $y_ч''$ в уравнение: $e^{2x}[4A+4Ax+4B-Ax-B]=xe^{2x}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{array}{c|lcl} x^1 & 3A=1 & \Rightarrow & A=1/3 \\ x^0 & 4A+3B=0 & \Rightarrow & B=-4/9 \end{array}$$

Следовательно, искомое частное решение: $y_ч=\dfrac{1}{9}(3x-4)e^{2x}$, и общее решение: $y=Y+y_ч=C_1e^x+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{9}(3x-4)e^{2x}$.◄

Замечание 3.1. Если $a=0$, т. е. $r(x)=P_m(x)$, то частное решение ищем в виде: $y_ч=x^rQ_m(x)$, где r – кратность числа $a=0$, как корня характеристического уравнения.

При решении конкретных примеров нужно установить вид частного решения, записать его с неопределёнными коэффициентами и найти $y_ч'$, $y_ч''$. Подставив затем $y_ч$, $y_ч'$, $y_ч''$ в уравнение, сократить на e^{ax}, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях получившегося тождества и из полученной системы определить коэффициенты многочлена $Q_m(x)$.

Теорема 3.4. Если правая часть уравнения (3.1) имеет вид $q(x)=e^{ax}[P_m(x)\cos bx+P_n(x)\sin bx]$, то частное решение ищут в виде: $y_ч=x^re^{ax}\left[Q_k(x)\cos bx+Q_k^*(x)\sin bx\right]$. Здесь $Q_k(x)$ и $Q_k^*(x)$ – разные многочлены степени k, где k – большая из степеней m и n: $k=\max\{m,n\}$, а число r есть кратность числа $a\pm bi$ как корня характеристического уравнения.

Замечание 3.2. Если правая часть имеет вид $e^{ax}P_m(x)\cos bx$ или $e^{ax}P_n(x)\sin bx$, то частное решение все равно надо искать в «полном» виде, т. е. $y_ч=x^r e^{ax}\left[Q_k(x)\cos bx+Q_k^*(x)\sin bx\right]$.

Пример 3.2. $y''-y=3e^{2x}\cos x$.

►Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2-1=0$; $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$. $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Здесь $a=2$, $b=1$ $\Rightarrow$ $a\pm bi=2\pm i$; $r=0$ (числа $2\pm i$ – не корни характеристического уравнения); $m=n=0$.

Частное решение ищем в полном виде: $y_ч=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$.

Вычислим $y_ч$, $y_ч'$ и $y_ч''$:

$$y_ч'=\left[(2A+B)\cos x+(2B-A)\sin x\right]e^{2x};$$

$$y_ч''=\left[(4B+3A)\cos x+(3B-4A)\sin x\right]e^{2x}.$$

Подставим в уравнение $y_ч$, $y_ч'$ и $y_ч''$:

$$e^{2x}\left[(4B+3A)\cos x+(3B-4A)\sin x-A\cos x-B\sin x\right]=3\cos x\,e^{2x}.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$:

$$\begin{array}{l|l}\cos x & 4B+3A-A=3\\ \sin x & -4A+3B-B=0\end{array}\Bigg\}\Rightarrow\quad \begin{array}{l}4B+2A=3,\\ 2B-4A=0.\end{array}\quad A=\frac{3}{10},\ B=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид:

$y_ч=\dfrac{3}{10}e^{2x}(\cos x+2\sin x)$, а его общее решение – $y=Y+y_ч\Rightarrow$

$$\Rightarrow y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{3}{10}e^{2x}(\cos x+2\sin x).◄$$

Замечание 3.3. При правой части более сложного вида используется метод вариации произвольных постоянных [13.20].

§ 4. Пример решения задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

В прикладных вопросах часто приходится искать решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x), \tag{4.1}$$

которое удовлетворяет двум условиям: при заданном значении $x=x_0$ сама искомая функция y и ее производная y' должны принимать заданные значения

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\big|_{x=x_0}=y_0'. \tag{4.2}$$

Здесь x_0, y_0, y'_0 – заданные числа. Задача отыскания решения уравнения (4.1), удовлетворяющего начальным условиям (4.2), называется задачей Коши.

Условия (4.2) выделяют единственное частное решение из общего решения уравнения (4.1), имеющего, как известно вид (см. теорема 3.1):

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_ч(x), \tag{4.3}$$

Действительно, равенства (4.2) приводят к системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y_ч(x_0), \\ y'_0 &= C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + y'_ч(x_0), \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

из которой находятся неизвестные C_1 и C_2. Определитель системы (4.4) является определителем Вронского. Он не равен нулю, т. к. функции y_1 и y_2 линейно независимы. И потому система имеет единственное решение

Пример 4.1. Найти то решение уравнения

$$y'' + 3y' - 4y = 6e^{-x}, \tag{4.5}$$

которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1. \tag{4.6}$$

►Составим характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения: $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$, откуда $Y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Найдём теперь частное решение $y_ч$ уравнения (4.5). В соответствии с видом правой части этого уравнения (здесь $a = -1$ не является корнем характеристического уравнения), ищем решение $y_ч$ в следующей форме: $y_ч = Ae^{-x}$ $\Rightarrow$ $y'_ч = -Ae^{-x} \Rightarrow y''_ч = Ae^{-x}$. Подставляя $y_ч$, $y'_ч$, $y''_ч$ в данное уравнение, получим

$$Ae^{-x} - 3Ae^{-x} - 4Ae^{-x} = 6e^{-x},$$

откуда $-6A = 6 \Rightarrow A = -1 \Rightarrow y_ч = -e^{-x}$. Следовательно, $y = Y + y_ч$ – общее решение уравнения (4.5). Но тогда:

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x} - e^{-x}, \\ y' &= -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x} + e^{-x}. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Из (4.7) в силу заданных начальных условий (4.6) при $x = 0$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 - 1, \\ 1 &= -4C_1 + C_2 + 1, \end{aligned}\right\}$$

откуда следует $C_2 = 4C_1$, $C_1 + 4C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \dfrac{1}{5}$, $C_2 = \dfrac{4}{5}$.

Итак, $y = \dfrac{1}{5}e^{-4x} + \dfrac{4}{5}e^{x} - e^{-x}$ – решение задачи Коши для уравнения (4.5) при начальных условиях (4.6).◄

Глава 4. **Системы линейных дифференциальных уравнений**

§ 1. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{i=1}^{n}p_{ki}(x)y_i+f_k(x),\quad k=1,2,\ \dots\ ,n, \tag{1.1}$$

где $p_{ki}(x)$, $f_k(x)$, $k=1,2,\ \dots\ ,n$, определены на промежутке (a,b), называется *нормальной системой линейных дифференциальных уравнений*. Функции $p_{ki}(x)$, $k=1,2,\dots\ ,n$, называются *коэффициентами* системы (1.1). Из линейных систем наиболее важными являются системы с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}y_i+f_k(x),\ k=1,2,\ \dots\ ,n. \tag{1.2}$$

Если все функции $f_k(x)\equiv 0$, $x\in(a,b)$, $k=1,2,\ \dots\ ,n$, в правых частях уравнений системы (1.1), то эта система принимает вид

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{i=1}^{n}p_{ik}(x)y_i,\ k=1,2,\ \dots\ ,n \tag{1.3}$$

и называется *однородной* линейной системой. В противном случае система (1.1) называется *неоднородной*. Число n называется порядком системы (1.1).

Пример 1.1. Однородная система 2-го порядка: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y.\end{cases}$

Пример 1.2. Неоднородная система 2-го порядка: $\begin{cases}\dot{x}=2x-y,\\ \dot{y}=y-2x+18t.\end{cases}$

Определение 1.1. Отыскание решения системы (1.1), удовлетворяющее условиям

$$y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20},\dots,\ y_n(x_0)=y_{n0}, \tag{1.4}$$

где x_0, y_{10}, $y_{20},\dots,$ y_{n0} – заданные числа, называется *задачей Коши*. Равенства (1.4) называются *начальными условиями*, а числа x_0, y_{10}, $y_{20},\dots,$ y_{n0} – *начальными данными*. Можно показать[20], что каковы бы не были начальные условия система (1.2) с постоянными коэффициентами всегда имеет и при том единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (1.4).

Определение 1.2. Семейство функций

$$y_i=\varphi_i(x,C_1,C_2,\ \dots\ ,C_n),\ i=1,2,\ \dots\ ,n, \tag{1.5}$$

где $C_1,\ \dots\ ,C_n$ – произвольные постоянные, называется *общим решением* системы (1.1) в области $D\subset \boldsymbol{R}_{n+1}$, если:

1) для любого набора допустимых значений $C_1 = C_1^*$, $C_2 = C_2^*$, ..., $C_n = C_n^*$ совокупность n функций $y_i = \varphi_i(x, C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, семейства (1.5) является решением системы (1.1);

2) для любой точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \in D \subset \boldsymbol{R}_{n+1}$ существует единственный набор значений $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$, ..., $C_n^{(0)}$ такой, что совокупность n функций $y_i = \varphi_i(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, из семейства (1.5) будет единственным решением системы (1.1), удовлетворяющим начальным условиям (1.4).

Определение 1.3. Решение, получающееся из общего решения системы (1.1) при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется *частным решением* этой системы.

§ 2. Интегрирование системы дифференциальных уравнений путём исключения неизвестных функций

Основным методом решения систем дифференциальных уравнений является *метод исключения неизвестных функций*, который сводит задачу решения данной системы к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения с одной неизвестной функцией. Сущность метода проиллюстрируем на решении системы двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями ($\dot{y}, \dot{x}$ – это производные функций *x(t), y(t))* по *t)*:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y), \\ \dot{y} = f_2(t, x, y), \end{cases} \tag{2.1}$$

где x, y – искомые функции независимой переменной t.

Чтобы исключить из системы (2.1) неизвестную функцию y, продифференцируем по t первое уравнение этой системы. Получим:

$$\ddot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\dot{y}.$$

Подставляя в правую часть этого равенства вместо $\dot{x}$ и $\dot{y}$ правые части уравнений системы (2.1), будем иметь:

$$\ddot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} f_1(t,x,y) + \frac{\partial f_1}{\partial y} f_2(t,x,y),$$

или $\ddot{x} = g(t, x, y)$, где g – некоторая известная функция t, x и y.

Теперь рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y), \\ \ddot{x} = g(t, x, y). \end{cases} \tag{2.2}$$

Допустим, что из первого уравнения системы (2.2) можно найти y:

$$y = h(t, x, \dot{x}). \tag{2.3}$$

Тогда, подставляя вместо y во второе уравнение системы (2.2) правую часть равенства (2.3), будем иметь

$$\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}). \tag{2.4}$$

Предполагая, что это уравнение интегрируется в конечном виде, запишем его общее решение в виде:

$$x = x(t, C_1, C_2). \tag{2.5}$$

Далее, дифференцируя полученную функцию по t и подставляя значение x и $\dot{x}$ в (2.3), получим равенство:

$$y = y(t, C_1, C_2),$$

которое вместе с ранее найденным соотношением (2.5) составляет общее решение системы (2.1):

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2), \\ y = y(t, C_1, C_2). \end{cases}$$

Замечание 2.1. В рассматриваемом случае процесс исключения можно вести и в ином порядке. Можно исключать из системы (2.1) функцию x, дифференцируя по t не первое уравнение системы (2.1), а второе.

Пример 2.1. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases} \tag{2.6}$$

►Дифференцируя почленно первое уравнение по t, получим

$$\ddot{x} = 2\dot{x} - \dot{y}.$$

Вместо $\dot{x}$ и $\dot{y}$ в последнее уравнение подставим правые части уравнений системы (2.6):

$$\ddot{x} = 2(2x - y) - (y - 2x + 18t) = 6x - 3y - 18t. \tag{2.7}$$

Теперь рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \ddot{x} = 6x - 3y - 18t. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находим:

$$y = 2x - \dot{x}. \tag{2.8}$$

Из (2.7) в силу (2.8) следует $\ddot{x} = 6x - 3(2x - \dot{x}) - 18t$, откуда

$$\ddot{x} - 3\dot{x} = -18t. \tag{2.9}$$

Это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части. Ему соответствует однородное уравнение:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} = 0. \tag{2.10}$$

Составим для него характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ и найдём его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. Тогда $X = C_1 + C_2e^{3t}$ – общее решение уравнения (2.10).

Частное решение уравнения (2.9) будем искать в виде

$$\tilde{x} = t(At + B) = At^2 + Bt. \tag{2.11}$$

Подставим $\tilde{x}$ в уравнение (2.9), после очевидных преобразований имеем: $2A - 6At - 3B = -18t$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях этого равенства: $-6A = -18, 2A - 3B = 0$. Отсюда $A = 3, B = 2$. Итак, $\tilde{x} = 3t^2 + 2t$. По теореме о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения (теорема 3.1, глава 4) равенство

$$x = X + \tilde{x} = C_1 + C_2e^{3t} + 3t^2 + 2t \tag{2.12}$$

есть общее решение уравнения (2.9). Выражение для y найдём, используя (2.8) и (2.12):

$$y = 2(C_1 + C_2e^{3t} + 3t^2 + 2t) - (3C_2e^{3t} + 6t + 2) = 2C_1 - C_2e^{3t} + 6t^2 - 2t - 2\,.$$

Два последних равенства образуют общее решение системы (2.6):

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{3t} + 3t^2 + 2t, \\ y = 2C_1 - C_2e^{3t} + 6t^2 - 2t - 2. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Глава 5. **Задания для проверки качества усвоения раздела 8**

§ 1. Задачи для самостоятельной работы

1. Решите задачу Коши: $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$; $y(1) = 1$.

2. Найдите все решения уравнения $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

3. Найдите общие решения (интегралы) уравнений:

а) $xy' - 2y = x^3 \cos x$; б) $3y' + y = 1/y^2$.

4. Найдите общие решения уравнений методом понижения порядка:

а) $y'' = \ln x$; б) $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$.

5. Найдите частное решение уравнения $yy'' = (y')^2 - (y')^3$; $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

6. Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения методом неопределённых коэффициентов: $y'' - y = 2e^x - x^2$.

7. Найдите частное решение линейного неоднородного уравнения $y'' + y = 4e^x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$ методом неопределённых коэффициентов.

8. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

9. Пусть с увеличением выпуска цена определяется уравнением $p(y) = b - ay,\ a > 0,\ b > 0$. При этом уравнение (5.3), гл. 2 принимает вид: $y' = k(b - ay)y,\ a > 0,\ b > 0$ – модель логистического роста. Решите это уравнение и постройте график полученной функции. График этой функции называется *логистической кривой*. Найдите стационарное решение этого уравнения.

10. Предполагая, что скорость роста зависит не от дохода $p(y)y$ а от прибыли $p(y)y - g(y)$, ($g(y)$ – издержки производства), постройте уравнение. описывающее скорость роста обьема выпускаемой продукции[18]. Проанализируйте полученное уравнение при $p(y) = 3 - y$, $g(y) = y + 1$.

Ответы к задачам для самостоятельной работы

1. $y=\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x}$. **2.** $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$; $y=x$. **3. а)** $y=Cx^2+x^2\sin x$;
б) $y^3=1+Ce^{-x}$. **4.** а) $y=0.5x^2(\ln x-1.5)+C_1x+C_2$; б) $y=x^3/3+C_1x^2+C_2$.
5. $y-x=2\ln|y|$. **6.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x+x^2+2$. **7.** $y=2\cos x-5\sin x+2e^x$.
8. $x=C_1e^t+C_2e^{5t}$; $y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}$. **9.** $y=\dfrac{Cbe^{kbt}}{1+Cae^{kbt}}$; стационарное решение – $y=\dfrac{b}{a}$. **10.** $y'=k(p(y)y-g(y))$. Уравнение принимает вид:
$y'=k((3-y)y-y-1)=k(3y-y^2-y-1)=-k(y-1)^2$.Имеется одна стационарная кривая y=1. Если интегральные кривые удовлетворяют начальному условию (это обьём выпуска продукции в начальный момент времени) $y_0>1$, то они будут приближаться к y=1 при $t\to+\infty$. При $y_0<1$ будет иметь место постоянное падение уровня производств, что приведет к банкротству.

§ 2. Контрольные вопросы к разделу 8

1. Что такое поле направлений, задаваемое дифференциальным уравнением 1-го порядка? Что называется изоклиной?

2. Как формулируется теорема существования и единственности решения для уравнения $y'=f(x,y)$?

3. Что такое общее, частное, особое решения уравнения $y'=f(x,y)$?

4. К какому типу относится уравнение $y'=f(y/x)$? Каким способом можно его решить?

5. Какая функция называется однородной измерения k относительно входящих в неё переменных? Приведите пример уравнения 1-го порядка, в котором участвуют однородные функции.

6. Запишите в общем виде линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Каким способом можно его решить?

7. К какому типу относится уравнение $M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$? Запишите его общий интеграл.

8. Запишите в общем виде дифференциальное уравнение Бернулли. Какой подстановкой оно решается?

9. Как определяется обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка? Что называется его решением? Обшим решением?

10. Что понимается под задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка?

11. Запишите начальные условия для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка.

12. Сформулируйте теорему существования и единственности решения для уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$.

13. В каких случаях дифференциальное уравнение 2-го порядка допускает понижение порядка?

14. Какие решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка называются линейно зависимыми? линейно независимыми?

15. Сформулируйте определение определителя Вронского $W(y_1, y_2)$.

16. Как проверить, что решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ являются линейно независимыми?

17. Будут ли в общем случае сумма и произведение решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ являться его решениями?

18. Запишите в общем виде обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка.

19. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Запишите его общее решение.

20. Как проверить, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x) = Cy_1(x)$ являются линейно зависимыми?

21. Запишиьте общее решение уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$.

22. Запишите в общем виде нормальную линейную однородную систему дифференциальных уравнений второго порядка.

23. Как построить решение уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x)$, зная решения $\overline{y}_1(x)$ и $\overline{y}_2(x)$ соответственно уравнений $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x)$, $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x)$.

24. Запишите в общем виде нормальную линейную неоднородную систему второго порядка.

25. Сформулируйтетеорему существования и единственности решения для нормальной системы 2-го порядка $y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$, $y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$.

§ 3. Тесты по разделу 8

Вар. № 1	**Раздел 8. Дифференциальные уравнения**
1	Найти значение α, при котором функция $y = \cos x$ является решением уравнения $y'' + (\operatorname{ctg} x)y' + \alpha y = 0$.
2	К какому типу относится уравнение $y^2(1 + \ln x)\,dx + 2xy \ln x\, dy = 0$: a) с разделяющимися переменными; b) однородное; c) линейное относительно $y(x)$; d) линейное относительно $x(y)$; e) уравнение Бернулли.

3	К какому типу относится уравнение $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0$: a) с разделяю-ющимися переменными; b) однородное; c) линейное относительно $y(x)$; d) линейное относительно $x(y)$; e) уравнение Бернулли.
4	Пусть $2\pm 4i$ – корни характеристического многочлена линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка. Напишите общее решение уравнения.
5	Пусть 1, 2 – корни характеристического многочлена линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с правой частью $3\sin 4x+6e^{2x}$. Укажите вид частного решения уравнения.
6	Найдите общее решение уравнения $y''-9y=0$.
7	Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $xy^2dx+y(x^2+y^2)dy=0$.
8	Решите задачу Коши для уравнения $y^3dx+x^{-5}dy=0$, $y(1)=1$.
9	Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $y'+\dfrac{xy}{2(1-x^2)}=\dfrac{x}{2}$.
10	Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'''\,\mathrm{tg}\,5x=6y''$.
11	Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''-4y'+4y=-\sin 6x$.
12	Сведите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}\dot{x}=2x+8y,\\ \dot{y}=3x+4y,\end{cases}$ к одному уравнению 2-го порядка для нахождения функции $x(t)$.

Вар.№ 2	**Раздел 8. Дифференциальные уравнения**
1	Найдите значение α, при котором функция $y=x^2-1$ является решением уравнения $(x^2+1)y''-\alpha xy'+2y=0$. Решать полученное уравнение не надо.
2	К какому типу (*возможны 2 ответа*) относится уравнение $x(y^2+1)dx+y(x^2+1)dy=0$: a) с разделяющимися переменными; b) однородное; c) линейное относительно $y(x)$; d) линейное относительно $x(y)$; e) уравнение Бернулли.
3	К какому типу (*возможны 2 ответа*) относится уравнение: $(y+x)dx-tgxdy=0$: a) с разделяющимися переменными; b) однородное; c) линейное относительно $y(x)$; d) линейное относительно $x(y)$; e) уравнение Бернулли.
4	Пусть 0, 5 – корни характеристического многочлена линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка. Напишите общее решение уравнения.

5	Пусть 2, 2 – корни характеристического многочлена линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с правой частью $9x^2 - 4x + \sin x$. Укажите вид частного решения уравнения.
6	Найдите общее решение уравнения $y'' + 6y' + 9y = 0$.
7	Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $xy' = \sqrt{x^2 - y^2}$.
8	Решите задачу Коши для уравнения $y^5 dx - x^3 dy = 0$, $y(1) = 1$.
9	Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}$.
10	Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0$.
11	Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 13y = \cos 5x$.
12	Сведите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y, \\ \dot{y} = x + 2y; \end{cases}$ к одному уравнению 2-го порядка для нахождения функции $y(t)$. Решать полученное уравнение не надо.

Ответы к заданиям тестов

Вариант 1

1) 2. **2)** *a*. **3)** *b*. **4)** $\widetilde{y} = c_5 e^{2x}\cos 4x + c_6 e^{2x}\sin 4x$. **5)** $y_* = A\sin 4x + B\cos 4x + Dxe^{2x}$.

6) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$. **7)** $2x^2y^2 + y^4 = C$. **8).** $y = \sqrt{\frac{3}{x^6+2}}$. **9)** $y = -\frac{1}{3}(1 - x^2) + c\sqrt[4]{1 - x^2}$.

10) $y = \frac{1}{25}C_1 \sin 5x + C_2 x + C_3$. **11)** $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{36}\sin 6x$.

12) $x'' - 6x' - 16x = 0$.

Вариант 2

1) 2. **2)** *a*. **3)** *c*. **4)** $\widetilde{y} = c_1 + c_2 e^{5x}$. **5)** $y_* = Ax^2 + Bx + C + D\cos x + E\sin x$.

6) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$. **7)** $y = x \sin \ln Cx$. **8)** $y = \sqrt[4]{\frac{x^2}{2 - x^2}}$; **9)** $y = 2\ln x + 2 + cx$;

10) $y = -\frac{1}{4}C_1 \cos 2x + C_2 x + C_3$. **11)** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{21}e^{-3x}\cos 5x$.

12) $y'' - 4y' - y = 0$.

Раздел 9. **ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ**

В этом разделе изучаются вопросы, связанные с перенесением свойств элементарных алгебраических операций, а также правил дифференцирования и интегрирования (известных для конечного числа слагаемых) на случай бесконечного числа слагаемых.

Краткая характеристика раздела

1. Темы раздела. Числовые и функциональные ряды. Сходимость ряда. Признаки сходимости. Степенные ряды. Ряды Тейлора. Приближенные вычисления с помощью рядов.

2. Базисные понятия. Числовой ряд. Абсолютная и условная сходимость. Функциональный ряд. Степенной ряд, радиус сходимости. Ряд Тейлора.

3. Основные задачи. Установление сходимости или расходимости (абсолютной или условной) числовых и функциональных рядов. Нахождение радиуса и промежутка сходимости степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды. Использование рядов в приближённых вычислениях.

Глава 1. **Числовые ряды. Основные понятия и свойства**

§ 1. Числовой ряд, его сходимость, сумма

Определение 1.1. Пусть имеется бесконечная последовательность вещественных чисел $\{a_n\}$.

Выражение вида
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$
называется *числовым рядом*, числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – *членами ряда*, а член ряда a_n с произвольным номером *n называется общим членом ряда*.

Величины $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ... , $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, ..., называются *частичными суммами* ряда (1.1), S_n – n-я частичная сумма ряда (1.1). Частичные суммы ряда составляют бесконечную последовательность $\{S_n\}$.

Определение 1.2. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ конечный или бесконечный, то его называют *суммой ряда* (1.1) и пишут: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Если S – число, то говорят, что ряд (1.1) *сходится*. Если $S = \infty$ или $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то говорят, что ряд (1.1) *расходится.*

Пример 1.1. Исследовать на сходимость *геометрический* ряд:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}.$$

► Составим n-ю частичную сумму данного ряда $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$. Если $q \neq 1$, то по известной формуле из элементарной математики находим:

$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \cdot q^n$. Найдём $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ при различных значениях q.

1) $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} \Rightarrow$ ряд сходится.

2) $|q| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow$ ряд расходится.

3) $q = 1$. Тогда $S_n = 1+1+\ldots+1 = n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд расходится.

4) $q = -1$, имеем ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$.

Частичная сумма этого ряда с чётным числом слагаемых равна нулю: $S_{2n} = (1-1)+\ldots+(1-1)=0$, а с нечётным: $S_{2n+1} = S_{2n}+1=1$. Итак, частичная сумма S_n поочерёдно принимает только два значения: 0 и 1 и поэтому она не имеет предела. Геометрический ряд сходится при $|q| < 1$. Его сумма $S=1/(1-q)$. При $|q| \geq 1$ он расходится.◄

Пример 1.2. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+1/n)$ расходится.

►Представим общий член этого ряда в виде $a_n = \ln(1+1/n) = \ln(n+1)/n = \ln(n+1) - \ln n$ и при этом частичная сумма ряда записвается так: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots +$
$+\ln n - \ln(n-1) = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n =$
$= -\ln 1 + \ln(n+1) = \ln(n+1) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$,
а значит, данный ряд расходится.◄

Замечание 1.1. В большинстве случаев невозможно найти выражение для частичной суммы S_n ряда, как это сделано в примерах 1.1. и 1.2. Построение удобных признаков (критериев), позволяющих ответить на вопрос о сходимости данного ряда без построения последовательности частичных сумм – один из центральных вопросов теории рядов.

§ 2. Необходимое условие сходимости ряда

Теорема 2.1 (*необходимое условие сходимости ряда*). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

►Обозначим через S сумму данного ряда. Имеем:
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n \;\Rightarrow\; a_n = S_n - S_{n-1} \;\Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.◄

Замечание 2.1. Теорема, обратная теореме 2.1 неверна. Так, $\ln(1+1/n) \to 0$, $n \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+1/n)$ расходится (пример 1.2).

Следствие из теоремы 2.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Пример 2.1. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$ расходится.

►Действительно, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2} \neq 0$, данный ряд расходится в силу следствия из теоремы 2.1.◄

§ 3. Основные свойства сходящихся рядов

1. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится, S – его сумма, а c – некоторое вещественное число. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$ тоже сходится, и его сумма равна cS.

2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, а A и B – их суммы, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ тоже сходится, и его сумма равна $A \pm B$.

3. Члены сходящегося ряда можно, не меняя их местами, объединять в группы. От этого сходимость ряда не нарушится, и величина его суммы не изменится.

Замечание 3.1. Раскрывать скобки в сходящемся ряде, вообще говоря, нельзя. Например, ряд $(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots$ сходится, и его сумма $S=0$; если же раскрыть скобки, то получится расходящийся ряд: $1-1+1-1+\ldots$ (пример 1.1).

Докажем, например, свойство 1.

►Обозначим через S_n и S_n^* n-ые частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ соответственно. Имеем: $S_n^* = ca_1 + \ldots + ca_n = c(a_1 + \ldots + a_n) = cS_n$. По условию, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, поэтому $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$. Но тогда $\exists \lim_{n\to\infty} S_n^* = \lim_{n\to\infty} (cS_n) = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ сходится, его сумма равна cS.◄

4. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и произвольное натуральное число m. Ряд $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k}$ называется *остатком ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ после m-го члена.

Теорема 3.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и его остаток $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k}$ после m -го члена сходятся или расходятся одновременно.

Глава 2. **Сходимость числовых рядов с неотрицательными членами**

§ 1. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами

Определение 1.1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

называется *рядом с неотрицательными членами*, если $a_n \geq 0$ для всех $n \in N$.

Теорема 1.1. Для того, чтобы ряд (1.1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена.

► Пусть ряд (1.1) сходится, а S_n – его n-я частичная сумма. В этом предположении существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, т.е. последовательность $\{S_n\}$ сходится. А сходящаяся последовательность ограничена (разд. 4, гл. 2, §3).

Предположим, что последовательность $\{S_n\}$ ограничена. Она является неубывающей, так как $S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$, ибо $a_n \geq 0$ для всех $n \in N$. В силу теоремы о неубывающей ограниченной последовательности (разд. 4, гл. 2, § 5) она имеет конечный предел. Следовательно, ряд (1.1) сходится. ◄

Замечание 1.1. Для рядов с неотрицательными членами существуют две возможности: ряд является сходящимся, и его сумма S является неотрицательным числом; либо он является расходящимся, при этом $S = +\infty$.

§ 2. Признаки сравнения для рядов с неотрицательными членами

Признаки сравнения позволяют свести выяснение вопроса о сходимости данного ряда к вопросу о сходимости другого более простого ряда или ряда, поведение которого уже выяснено.

Теорема 2.1 (*признак сравнения в форме неравенства*). Пусть имеются два ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, причём члены первого ряда не превосходят, начиная с некоторого номера m, соответствующих членов второго ряда:

$$a_n \leq b_n,\ n = {}_{.}\,,\ {}_{.}+1,\ {}_{.}+2, \ldots \tag{2.1}$$

Тогда из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда, а из расходимости первого ряда следует расходимость второго.

Теорема 2.2 (*признак сравнения в предельной форме*). Пусть члены рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ строго положительны, т.е. $a_n > 0$, $b_n > 0$ для всех $n \in N$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$, $l \neq 0$, $l \neq +\infty$, то данные ряды сходятся или расходятся одновременно.

Пример 2.1. Доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

► Этот ряд называют *гармоническим*. Известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}=1$. Значит, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ сходятся или расходятся одновременно. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится (пример 1.2, гл. 1). Следовательно, в силу теоремы 2.2, гармонический ряд тоже расходится. ◄

Замечание 2.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$, то можно лишь утверждать, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Замечание 2.2. Для применения признаков сравнения необходимо иметь некоторый арсенал «эталонных рядов», как сходящихся, так и расходящихся, с которыми затем сравниваются исследуемые ряды. Одним из них является так называемый *обобщённый гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. В следующем параграфе будет показано, что он сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Другим «эталонным» рядом является геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \ge 1$.

Следствие 2.1 из теоремы 2.2. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными членами, причём $a_n \to 0$ при $n\to\infty$. Если $a_n \sim \frac{C}{n^{a}}$ при $n\to\infty$, где C – постоянное число, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 \le \alpha \le 1$ (здесь ~ является знаком эквивалентности).

Пример 2.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln(1+1/n^3)$.

►Имеем $a_n = n\ln(1+1/n^3) \sim n\cdot 1/n^3 = 1/n^2$ при $n\to\infty$. В этом случае $\alpha = 2 > 1$, следовательно, данный ряд сходится (следствие 2.1).◄

§ 3. Интегральный признак Коши

Теорема 3.1 (*интегральный признак Коши*). Пусть функция f(x) непрерывна, положительна и убывает при x ≥ 1. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n = f(n)$ для $\forall n\in N$, и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Пример 3.1. Исследовать на сходимость обобщённый гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ в зависимости от значения параметра α.

► Заметим, что при $\alpha \le 0$ общий член ряда не стремится к нулю с увеличением номера, следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, поэтому в этом случае обобщённый гармонический ряд расходится.

При $\alpha = 1$ получаем гармонический ряд, он расходится (пример 2.1).

В случае $\alpha > 0$, $\alpha \ne 1$ рассмотрим функцию $f(x)=1/x^{\alpha}$. Легко проверить, что она удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1. Исследуем на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ при данных значениях α.

1) $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 1 - \alpha > 0 \Rightarrow \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{1}^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} - 1\right) = +\infty$,

что означает расходимость несобственного интеграла и, следовательно, расходимость обобщённого гармонического ряда при $0 < \alpha < 1$.

2) $\alpha > 1 \Rightarrow 1 - \alpha < 0 \Rightarrow \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{1}^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} - 1\right) = \frac{1}{\alpha - 1}$, поэтому несобственный интеграл сходится, а вместе с ним сходится и обобщённый гармонический ряд при указанных значениях α.

Итак, обобщённый гармонический ряд расходится при $\alpha \le 1$ и сходится при $\alpha > 1$.◄

Пример 3.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

►Пусть $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$. Легко проверить, что функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1. Но интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = -\frac{1}{\ln(x+1)}\Big|_{1}^{+\infty} = -\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x+1)} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$ сходится. Следовательно, сходится и данный ряд.◄

§ 4. Признак Даламбера и радикальный признак Коши

Рассмотрим ряд с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0 \text{ при } n \in \mathrm{N}. \qquad (4.1)$$

Теорема 4.1. (*признак Даламбера*, Ж. Л. Даламбер (1717-1783) – французский математик, механик, философ). Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ (конечный или бесконечный). Тогда

если $0 \le l < 1$, то ряд (4.1) сходится;

если $l > 1$, то ряд (4.1) расходится.

Замечание 4.1. Если $l = 1$, то признак Даламбера не даёт определённого ответа о сходимости ряда. В этом случае возможна как сходимость ряда, так и его расходимость. Примером тому служит обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Пример 4.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

► $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)n!} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n} = \frac{1}{e}$.

Поскольку $l = 1/e < 1$, то по признаку Даламбера данный ряд сходится.◄

Теорема 4.2 (*радикальный признак Коши*). Пусть $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (конечный или бесконечный). Тогда

если $0 \le l < 1$, то ряд (4.1) сходится;

если $l > 1$, то ряд (4.1) расходится.

►Пусть $0 \le l < 1$. Рассмотрим число q: $l < q < 1$, число $q - l$ удовлетворяет неравенству: $0 < q - l < 1$. Из определения предела числовой последовательности (определение 2.1, разд. 4, гл.2) для числа $\varepsilon = q - l$ следует существование номера $N(\varepsilon)$, начиная с которого будет верно неравенство

$$|\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon.$$

Используя свойства абсолютных величин, имеем

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - l < \varepsilon \Rightarrow -q + l < \sqrt[n]{a_n} - l < q - l \Rightarrow 2l - q < \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q.$$

Возведя обе части последнего неравенства в n-ю степень: $a_n < q^n$, $n \ge N(\varepsilon)$. Рассмотрим ряды: $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k+N}$. В силу последнего неравенства члены первого ряда меньше членов второго ряда, сходящегося как геометрический ряд при $|q| < 1$. Поэтому в силу теоремы 2.1 сходится и первый ряд. Но он является остатком ряда (4.1) после $N(\varepsilon)$-го члена, поэтому ряд (4.1) сходится (теорема 3.1, гл. 1).

Пусть $l > 1$ и конечно. Рассмотрим число $q = l - 1 > 0$. Из определения предела числовой последовательности следует существование номера $N(q)$, начиная с которого будет выполняться неравенство:

$$|\sqrt[n]{a_n} - l| < l - 1.$$

Используя свойства абсолютных величин, имеем

$$-l + 1 - l < \sqrt[n]{a_n} - l < l - 1 \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{a_n} < 2l - 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > 1.$$

Возведя обе части последнего неравенства в *n-ю* степень, получим нервенство: $a_n > 1$.

Итак, члены ряда (4.1), начиная с некоторого номера $N(q)$ больше 1, поэтому общий член ряда не может стремиться к нулю при $n \to \infty$, следоватедьно, этот ряд расходится. ◄

Замечание 4.3. Радикальный признак Коши также не даёт определённого ответа на вопрос о сходимости ряда в случае, когда $l = 1$.

Доказательства теорем 4.1 и 4.2 опираются на признаки сравнения [11,13].

Пример 4.2. Исследовать сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+7}{3n+1}\right)^n$.

►Применим радикальный признак Коши:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n+7}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+7)}{(3n+1)}=\frac{5}{3}>1$, следовательно, данный ряд расходится.◄

Глава 3. **Сходимость знакопеременных рядов**

§ 1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение 1.1. Ряд

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1.1}$$

называется *знакочередующимся*, если неравенство $u_n\cdot u_{n+1}<0$ верно для любого $n\in N$, т. е. если соседние члены ряда имеют различные знаки.

Пусть для определённости $u_1>0$. Станем обозначать через a_n модуль n-го члена ряда. Тогда знакочередующийся ряд (1.1) запишется в виде

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\,. \tag{1.2}$$

Для знакочередующихся рядов имеется достаточно общий и практически удобный признак сходимости, принадлежащий Лейбницу.

Теорема 1.1 (*признак Лейбница*). Если модули членов знакочередующегося ряда (1.2) монотонно убывают, т.е. $a_1\geq a_2\geq a_3\geq\ldots\geq a_n\geq\ldots$, а $a_n\to 0$ при $n\to\infty$, то ряд (1.2) сходится.

Замечание 1.1. Из доказательства[11,13]. теоремы 1.1 следует, что сумма S знакочередующегося ряда (1.2), удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет знак первого члена ряда, и модуль этой суммы не превосходит модуля первого члена.

Замечание 1.2. (*об оценке суммы остатка ряда*). Пусть знакочередующийся ряд (1.2) удовлетворяет условиям теоремы 1.1, остаток ряда (1.2) после m-го члена $r_m=a_{m+1}-a_{m+2}+a_{m+3}-a_{m+4}+\ldots$, $|r_m|=|a_{m+1}-a_{m+2}+a_{m+3}-a_{m+4}+\ldots|$.

По замечанию 1.1 имеем:

$$|r_m|=|a_{m+1}-a_{m+2}+a_{m+3}-a_{m+4}+\ldots|\leq|a_{m+1}|,$$

т. е. модуль суммы остатка не превосходит модуля первого члена этого остатка.

Замечание 1.3. Еще раз обращаем внимание читателя на то, что в признаке сходимости Лейбница ряд должен удовлетворять трём условиям:

1) ряд должен быть знакочередующимся;
2) модуль члена ряда должен монотонно убывать с ростом его номера;
3) модуль общего члена ряда должен стремиться к нулю при $n\to\infty$.

Каждое из этих условий необходимо проверить. Нарушение хотя бы одного из них может привести к неверному выводу о сходимости ряда [[11,13].

Пример 1.1. Доказать что знакочередующийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \tag{1.3}$$

сходится.

►Поскольку $\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$., монотонно убывая, то данный ряд сходится по признаку Лейбница.◄

§ 2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

В этом параграфе рассматриваются ряды с членами произвольных знаков. Такие ряды называются *знакопеременными.* Пусть дан ряд

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n. \qquad (2.1)$$

Рассмотрим, наряду с этим, ряд из абсолютных величин членов ряда (2.1):

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|. \qquad (2.2)$$

Определение 2.1. Ряд (2.1) с членами любых знаков называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (2.2) из модулей членов ряда (2.1).

Теорема 2.1. Абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

►По условию, ряд (2.1) абсолютно сходящийся. Это означает, что сходится ряд (2.2). Рассмотрим два вспомогательных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+a_n}{2}, \qquad (2.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|-a_n}{2}. \qquad (2.4)$$

Ряды (2.3) и (2.4) – ряды с неотрицательными членами, так как в силу свойств абсолютных величин имеем $|a_n|\ge a_n$ и $|a_n|\ge -a_n$. С другой стороны, $0\le\frac{|a_n|+a_n}{2}\le|a_n|$ и $0\le(|a_n|-a_n)/2\le|a_n|$. Тогда по признаку сравнения ряды (2.3) и (2.4) сходятся, ибо сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, поэтому по свойству 2 рядов (гл. 1, § 3) сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_n|+a_n}{2}-\frac{|a_n|-a_n}{2}\right)$.◄

Замечание 2.1. Доказанная теорема необратима. Может оказаться, что знакопеременный ряд (2.1) сходится, а ряд (2.2), составленный из модулей членов ряда (2.1), расходится.

Определение 2.2. Если знакопеременный ряд (2.1) сходится, а ряд (2.2), составленный из модулей членов ряда (2.1), расходится, то данный знакопеременный ряд (2.2) называется *условно сходящимся.*

Так, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится (пример 1.1), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, составленный из модулей его членов, расходится (пример 2.1, гл. 2). Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится условно.

Итак, все сходящиеся ряды можно разделить на два класса: абсолютно сходящиеся ряды и условно сходящиеся ряды. Отметим, что все сходящиеся *положительные* ряды входят в класс абсолютно сходящихся рядов.

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного ряда к ряду из модулей членов этого ряда можно применить признаки сходимости, установленные для положительных рядов. Но нужно помнить, что из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ не всегда следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ может сходиться условно.

Замечание 2.2. Если с помощью признака Даламбера установлено, что знакопеременный ряд абсолютно не сходится, то модули его членов монотонно возрастают (замечание 4.2, гл. 2). В этом случае общий член знакопеременного ряда не может стремиться к нулю с возрастанием номера.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают целым рядом свойств, присущих конечным суммам.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1. Сходимость не нарушается и сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяется при произвольной перестановке его членов. Иначе, для абсолютно сходящихся рядов справедлив переместительный закон сложения.

2. Два абсолютно сходящихся ряда можно перемножать как обыкновенные многочлены, т.е. каждый член одного ряда умножать на каждый член другого и результаты складывать в любом порядке; получающийся ряд тоже будет абсолютно сходящимся, и его сумма будет равна произведению сумм перемножаемых рядов.

3. Для абсолютно сходящегося ряда остается в силе свойство: «абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых»: $\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ (для доказательства достаточно взять неравенство $|a_1+\ldots+a_n| \le |a_1|+\ldots+|a_n|$ и перейти в нём к пределу при $n\to\infty$).

Доказательства вышеназванных свойств приведены, например в [11].

Условно сходящиеся ряды этими свойствами не обладают. Так, в рядах, сходящихся условно, перестановка членов ряда недопустима. Перестановка членов в таких рядах может изменить сумму ряда или привести к нарушению сходимости ряда. Например, выполним перестановку и объединение членов в сходящемся знакочередующемся ряде (1.3), обозначив его сумму через S:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S\,.$$

Теорема 2.2 (*теорема Римана*, Г. Риман (1826-1866) – немецкий математик). Каково бы не было наперёд заданное число A, перестановкой членов любого условно сходящегося ряда можно получить ряд, сходящийся к A. Члены условно сходящего ряда можно переставить и так, что он будет расходится.

§ 3*. Признаки сходимости Дирихле и Абеля

Приведём признаки Дирихле и Абеля, позволяющие установить условную сходимость довольно широкого класса рядов (доказательство можно найти, например, в [11]).

Теорема 3.1 (*признак Дирихле*). Пусть дан ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \tag{3.1}$$

Если частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, а последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, то ряд (3.1) сходится.

Теорема 3.2 (*признак Абеля*). Если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд (3.1).

Замечание 3.1. Признак Лейбница – частный случай признака Дирихле.

Замечание 3.2. С помощью этих признаков можно показать, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$ сходятся при любом $x \in (0, 2\pi)$.

Глава 4. **Функциональные ряды. Степенные ряды**

§ 1. Понятие функционального ряда, его области сходимости

Под функциональным рядом понимается ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{1.1}$$

все члены которого $u_n(x)$, $n \in N$, есть функции аргумента x, заданные на некотором множестве X. Пусть $E \subset X$ есть совокупность всех значений аргумента x, при которых ряд (1.1) сходится, E называют *областью сходимости* этого ряда.

Отметим, что областью сходимости ряда (1.1) может оказаться числовое множество самого различного строения. Далее, как правило, будем иметь дело со случаями, когда область сходимости ряда есть промежуток – замкнутый, открытый или полуоткрытый; конечный или бесконечный.

Нетрудно понять, что в области сходимости ряда (1.1) его n-я частичная сумма, а также сумма и сумма остатка ряда после n-го члена будут функциями от x. Будем обозначать их соответственно $S_n(x)$, $S(x)$, $R_n(x)$, $x \in E$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.1. Дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$. Найти множество X, на котором заданы члены этого ряда, а также область E его сходимости.

►$X = (-\infty, +\infty)$; $E = (-1; 1)$; $S(x) = 1/(1-x)$.◄

Пример 1.2. Дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = (1-x) + (1-x)x + (1-x)x^2 + \ldots + (1-x)x^n + \ldots \cdot$$

Найти множество X, на котором заданы члены этого ряда, а также область E его сходимости и сумму.

►Здесь $X=(-\infty, +\infty)$; $E=(-1;\ 1]$; $S(x)=\begin{cases}1, x\in(-1;1),\\ 0, x=1.\end{cases}$ ◄

Пример 1.3. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x^2-x+1}}$. Найти множество X, на котором заданы члены этого ряда, а также область E его сходимости.

►В этом примере $X\in(-\infty,+\infty)$. Область сходимости ряда задаётся неравенством $x^2-x+1>1$, ибо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$. Имеем $x^2-x+1>1$ $\Leftrightarrow x^2-x>0 \Leftrightarrow x(x-1)>0$, поэтому $E=(-\infty, 0)\cap(1, +\infty)$. ◄

Пример 1.4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^2)^n$.

►Очевидно, что при фиксированном $x\in\boldsymbol{R}$ этот ряд является геометрическим рядом со знаменателем $q=1+x^2$, причём $q\geq 1$ при любых $x\in\boldsymbol{R}$, следовательно, данный ряд расходится при любых $x\in\boldsymbol{R}$, т. е. $E=\varnothing$. ◄

§ 2. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости

Определение 2.1. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots \qquad (2.1)$$

называется *степенным рядом*, числа $a_n\in\boldsymbol{R}$, $n=1, 2, \ldots$ называются *коэффициентами* степенного ряда.

Замечание 2.1. Степенные ряды замечательны прежде всего тем, что их члены $u_n(x)=a_n(x-x_0)^n$, $n=1, 2, \ldots$, есть сравнительно простые функции. Частичные суммы степенного ряда $S_n(x)$ – многочлены от переменной x степени не выше n. Относительная простота $u_n(x)$ и $S_n(x)$ служит причиной многих свойств степенных рядов, которыми не обладают другие функциональные ряды. Область сходимости степенного ряда никогда не является пустым множеством, ибо ряд (3.1) обязательно сходится в точке x_0.

В ряде (2.1) сделаем замену переменной $y=x-x_0$, получим ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n y^n\ . \qquad (2.2)$$

Исследование сходимости ряда (2.1) эквивалентно исследованию сходимости ряда (2.2). Поэтому далее будем рассматривать ряды вида (2.2), но для обозначения переменной будем использовать букву x, а не y.

В основе теории степенных рядов лежит следующая теорема.

Теорема 2.1 (*теорема Абеля*, Абель Н. Х. (1802 – 1829) – норвежский математик). Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (2.3)$$

сходится при $x=x_0\neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, при любом x: $|x|<|x_0|$.

Если степенной ряд (2.3) расходится при $x=x_0$, то он расходится и при всяком x: $|x|>|x_0|$.

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда (2.3).

Следствие из теоремы 2.1. Пусть в точке $x_0 \neq 0$ ряд (2.3) сходится, но тогда ряд (2.3) сходится в каждой точке интервала $(-|x_0|, |x_0|)$. Если же ряд (2.3) расходится в точке x_1, то он расходится в интервалах $(-\infty, -|x_1|)$, $(|x_1|, +\infty)$.

Из этого заключаем, что для рассматриваемого степенного ряда существует число $R > 0$, такое, что при $|x| < R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при $|x| > R$ ряд расходится. Число R называется *радиусом сходимости* (рис. 3.1), а интервал $(-R, R)$ – *интервалом сходимости* степенного ряда.

Рис. 2.1. *К понятию радиуса сходимости*

Замечание 2.2. Для ряда (2.1) интервал сходимости имеет вид (x_0-R, x_0+R).

Замечание 2.3. На концах интервала сходимости (т. е. при $x = \pm R$ для ряда (2.3) при $x = x_0 \pm R$ для ряда (2.1)) ряд может или сходиться или расходиться. Здесь необходимо дополнительное исследование.

Замечание 2.4. У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ($R = 0$), а у других совпадает со всей осью ($R = \infty$).

При нахождении радиуса сходимости степенного ряда во многих случаях можно использовать следующие теоремы.

Теорема 2.2. Если для коэффициентов членов степенного ряда (2.1) существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = l \qquad (2.4)$$

(конечный или бесконечный), то он равен радиусу сходимости ряда (2.1), т. е. $R = l$.

Теорема 2.3. Если для коэффициентов членов степенного ряда (2.1) существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} = l \cdot \qquad (2.5)$$

Теоремы 2.2 и 2.3 доказываются аналогично. Докажем теорему 2.2.

► Используя признак Даламбера, исследуем ряд (2.1) на абсолютную сходимость в произвольно взятой точке x.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-x_0|}{l}.$$

Согласно признаку Даламбера при $|x-x_0|/l < 1 \Rightarrow |x-x_0| < l$ ряд (2.1) сходится абсолютно, а при $|x-x_0|/l > 1 \Rightarrow |x-x_0| > l$ – расходится, ибо в этом случае общий член ряда не будет стремиться к нулю с увеличением номера (гл. 2, замечание 4.2.). Таким образом, число l удовлетворяет определению радиуса сходимости, т. е. $R = l$.◄

Замечание 3.5. Затруднения, связанные с применением формул (2.4), (2.5) для определения радиуса сходимости степенного ряда возникают в случае, когда в рассматриваемом ряде имеются коэффициенты со сколь угодно большими номерами, равные нулю.

Пример 2.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$.

► Коэффициенты $a_n = 1/n \neq 0$. Чтобы определить радиус сходимости ряда, воспользуемся формулой (2.4):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1,$$

значит, ряд сходится абсолютно при $|x-2|<1$, т.е. при $x \in (1; 3)$. Выясним его поведение на концах интервала сходимости. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

1) Пусть $x = 3$, получаем числовой ряд. Это расходящийся гармонический ряд, поэтому исходный степенной ряд расходится при $x = 3$.

2) Возьмём $x = 1$, имеем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Как было показано в §2 гл.3, этот ряд является условно сходящимся, следовательно, исходный степенной ряд условно сходится при $x = 1$.

Ответ: ряд сходится абсолютно при $x \in (1; 3)$, сходится условно при $x = 1$, в остальных случаях ряд расходится. ◄

Пример 2.2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$.

►Поскольку $a_n = n! \neq 0$, воспользуемся формулой (3.5) для определения радиуса сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, следовательно, данный ряд сходится в единственной точке $x = 2$.◄

Пример 2.3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$.

► Используем формулу (2.5):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

следовательно, ряд сходится при любых $x \in \boldsymbol{R}$, его область сходимости $\boldsymbol{R}$.

Пример 2.4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{2^n}$.

►В рассматриваемый ряд входят только члены с чётными степенями $(x-2)$, следовательно, все нечётные коэффициенты ряда равны нулю. Это означает, что в данном случае нельзя пользоваться формулами (2.4), (2.5). Применим к данному ряду, например, радикальный признак Коши. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^{2n}}{2^n}\right|} = \frac{(x-2)^2}{2},$$

то ряд будет абсолютно сходиться, если $\frac{(x-2)^2}{2}<1 \Rightarrow |x-2|<\sqrt{2} \Rightarrow$ $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. При $x=2\pm\sqrt{2}$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pm\sqrt{2}-2)^{2n}}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$ расходится, ибо его общий член не стремится к нулю. Итак, область сходимости ряда: $E=(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$.◄

§ 3. Свойства степенных рядов на интервале сходимости

Теорема 3.1. Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{3.1}$$

сходится на интервале (–R, R), то его сумма непрерывна на этом интервале.

Теорема 3.2. Если степенной ряд (3.1) сходится на интервале (–R, R), то его можно почленно интегрировать по любому отрезку $[\alpha, \beta] \subset (R,R)$:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{n+1}.$$

Теорема 3.3. Если степенной ряд (3.1) сходится на интервале *(–R, R),* то его можно почленно дифференцировать сколько угодно раз внутри интервала сходимости, этом радиус сходимости ряда из производных равен радиусу сходимости исходного ряда. Например,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots.$$

Замечание 3.1. Степенной ряд на своём интервале сходимости ведёт себя по отношению к операциям дифференцирования и интегрирования так же, как и многочлен с конечным числом членов.

Операции почленного интегрирования и дифференцирования часто используются при вычислении сумм степенных рядов.

Пример 3.1. Найти область сходимости и сумму степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$.

► Интервалом сходимости ряда является $(-1, 1)$ (проверьте!). На концах этого интервала данный ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю при $n\to\infty$. Обозначим сумму ряда $S(x)$. Возьмём произвольное число $x\in(-1, 1)$ и проинтегрируем почленно данный ряд.

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n}\Bigg|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} x^n =$$

$$= x(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots) = x\frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

Получили равенство $\int_0^x S(x)dx = \frac{x}{1-x}$, продифференцировав которое, получим $S(x) = 1/(1-x)^2$. Итак, найдена сумма ряда $1/(1-x)^2$ и его область сходимости $(-1, 1)$.◄

Пример 3.2. Найти область сходимости и сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

►Интервал сходимости этого ряда есть $(-1, 1)$ (проверьте !). При $x = -1$ ряд сходится условно, а при $x = 1$ расходится. Таким образом, область сходимости данного ряда есть промежуток $[-1, 1)$. Обозначим сумму ряда $S(x)$ и продифференцируем данный ряд почленно:

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1, 1).$$

Получили равенство $S'(x) = 1/(1-x)$, проинтегрируем его:

$$S(x)-S(0)=\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln|1-x|, x\in(-1, 1).$$

Окончательно имеем $S(x) = -\ln(1-x)$, $x\in(-1, 1)$, ибо $S(0) = 0$ и $(1-x) > 0$ при $x\in(-1, 1)$. Можно доказать, что это равенство верно и при $x = -1$.◄

§ 4. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора

Определение 4.1. Если для функции $f(x)$ справедливо равенство:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots,\quad \forall x\in X, \tag{4.1}$$

то говорят, что данная функция разложена в степенной ряд на множестве X, а сам ряд называют *разложением* функции $f(x)$ по степеням разности $x-a$.

Заметим, что согласно (4.1) функция $f(x)$ является суммой степенного ряда на множестве X.

Теорема 4.1. Пусть функция $f(x)$ разложена в степенной ряд на некотором промежутке X в соответствии с равенством (4.1), то

1) функция $f(x)$ имеет на промежутке X производные любого порядка;

2) это разложение единственно.

► По условию, равенство (4.1) имеет место при любом x из промежутка X. Положив в этом равенстве $x = a$, получим $c_0 = f(a)$.

Равенство (4.1) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз (теорема 3.4). Имеем:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots,$$

$$f''(x) = 2\cdot 1\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3(x-a) + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \ldots,$$

. . . .

$$f^{(k)}(x) = k!c_k + (k+1)\,k\ldots 2c_{k+1}(x-a) + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k} + \ldots,$$

. . . .

Положим в этих равенствах $x = a$, получим

$$c_1 = f'(a),\ \ f''(a) = 2!c_2\cdot \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2!};\ \ldots f^{(k)}(a) = k!c_k\cdot \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ldots.$$

Заменим в последнем равенстве k на n:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

Итак, для коэффициентов ряда из правой части (4.1) равенство (4.2) справедливо независимо от того, как было получено это разложение.◄

Подставим (4.2) в (4.1):

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\ \forall x\in X, \qquad (4.3)$$

Ряд из равенства (4.3) называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в окрестности точки a. Из теоремы 4.1 следует, что если функция $f(x)$ разложена в степенной вида (4.1), то это всегда её ряд Тейлора.

Теорема, обратная теореме 4.1 не верна, т. е. функция, имеющая производные любого порядка на множестве X, может быть не представима на нём своим рядом Тейлора.

Теорема 4.2 (*необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора*). Пусть функция $f(x)$ имеет производные любого порядка на множестве X. Для того, чтобы $f(x)$ могла быть разложена в ряд Тейлора на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$ её формулы Тейлора стремился к нулю при $n\to\infty$ для $\forall x\in X$.

►Напишем для функции $f(x)$ формулу Тейлора:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

или

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x), \qquad (4.4)$$

где $T_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ – многочлен Тейлора. Очевидно, $T_n(x)$ – частичная сумма ряда Тейлора, т. е. $T_n(x)=S_n(x)$. Тогда (5.4) преобразуется к виду:

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x). \qquad (4.5)$$

Из равенства (5.5) следует:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x),\ \forall x\in X \Leftrightarrow R_n(x)\to 0 \text{ при } n\to\infty \text{ для } \forall x\in X.◄$$

§ 5. Разложение функций в ряды Маклорена

Пусть функция $f(x)$ имеет производные любого порядка в некоторой окрестности точки $x=0$. В равенстве (4.3) положим $a=0$, ряд (4.3) принимает вид:

$$f(x)=f(x_0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (5.1)$$

Ряд (5.1) называют *рядом Маклорена*. Ряд Маклорена – это ряд по степеням x.

Напишем для $f(x)$ формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x)=f(x_0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \theta\in(0,1). \qquad (5.2)$$

Используя равенство (5.2) и теорему 4.2, разложим в ряд Маклорена функции: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\mathrm{arctg}\,x$, $(1+x)^{\alpha}$. Предварительно докажем лемму.

Лемма. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.

►Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ и исследуем его на абсолютную сходимость по признаку Даламбера. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0 \text{ при } \forall x\in \boldsymbol{R}.$$

Данный ряд сходится абсолютно на всей вещественной оси, поэтому его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ (теорема 2.1, гл. 1).◄

1. $f(x)=e^x$, $D(f)=\boldsymbol{R}$. Имеем $f^{(n)}(x)=e^x, f^{(n)}(0)=1, f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ для $\forall x\in\boldsymbol{R}$ и $\forall n\in\boldsymbol{N}$. Напишем для $f(x)=e^x$ формулу Маклорена вида (6.2):

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\ \theta\in(0,1).$$

Для остаточного члена $R_n(x)=e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ справедливо неравенство:

$$0\le\left|e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ для } \forall x\in\boldsymbol{R}.$$

Отсюда следует с учётом леммы, что $R_n(x)=e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$ при $n\to\infty$ для $\forall x\in\boldsymbol{R}$.

Но тогда ряд Маклорена

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{5.3}$$

в силу теоремы 4.2 сходится к функции e^x всей вещественной оси.

2. $f(x)=\sin x$, $D(f)=\boldsymbol{R}$. Рассуждая также, как и для функции $f(x)=e^x$, приходим к ряду

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots, \tag{5.4}$$

который сходится к функции $\sin x$ на всей вещественной оси.

3. $f(x)=\cos x$, $D(f)=\boldsymbol{R}$. Ряд Маклорена можно получить, рассуждая так же, как в случае функции $\sin x$. Однако рациональнее применить теорему о почленном дифференцировании степенного ряда. Запишем ряд (5.4) в несколько ином виде:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

и продифференцируем обе части полученного равенства по x:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in\boldsymbol{R}. \tag{5.5}$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$, $D(f)=(-1,+\infty)$. Представим $\ln(1+x)$ как интеграл с переменным верхним пределом:

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}. \tag{5.6}$$

Подынтегральную функцию в (5.6) рассмотрим как сумму геометрической прогрессии при $q=-t$. При $|x|<1$ будем иметь:

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots \qquad (5.7)$$

Подставим (5.7) в (5.6):

$$\ln(1+x)=\int_0^x\left(1-t+t^2-t^3+\ldots\right)dt\,. \qquad (5.8)$$

Возьмём теперь любое x из промежутка $(-1;\,1)$ и проинтегрируем почленно ряд из (5.8) по промежутку $[0;\,x]$. Получим:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \qquad (5.9)$$

Разложение (5.9) установлено пока лишь для $x\in(-1;\,1)$. При $x=1$ полученный ряд сходится условно по признаку Лейбница. Можно доказать [13], что равенство (6.9) справедливо и при $x = 1$. Итак, окончательно

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1;\,1]. \qquad (5.10)$$

5. $f(x)=\mathrm{arctg}\,x,\ D(f)=\boldsymbol{R}$. Разложение в ряд Маклорена можно получить тем же способом, каким был получен ряд для функции $\ln(1+x)$. Представим $\mathrm{arctg}\,x$ как интеграл с переменным верхним пределом:

$$\mathrm{arctg}\,x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}\,. \qquad (5.11)$$

Подынтегральную функцию в (5.11) рассмотрим как сумму геометрической прогрессии при $q=-t^2$. При $|t|<1$ будем иметь:

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\ldots \qquad (5.12)$$

Подставим (5.12) в (5.11):

$$\mathrm{arctg}\,x=\int_0^x\left(1-t^2+t^4-t^6+\ldots\right)dt\,. \qquad (5.13)$$

Возьмём теперь любое x из промежутка $(-1;\,1)$ и проинтегрируем почленно ряд в (5.13) по промежутку $[0,\,x]$. Получим

$$\mathrm{arctg}\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\,x\in(-1;\,1). \qquad (5.14)$$

При $x=\pm1$ полученный ряд сходится условно по признаку Лейбница. Можно показать, что равенство (5.14) справедливо и при $x=\pm1$. Итак,

$$\mathrm{arctg}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1;\,1].\blacktriangleleft \qquad (5.15)$$

6. $f(x)=(1+x)^m$. Разложение в ряд Маклорена функции $(1+x)^m$ называется *биномиальным рядом*:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots([m-(n-1)]}{n!}x^n,\,x\in(-1,1). \qquad (5.16)$$

Вывод разложения (5.16) можно найти, например, в [13].

При любых m оно справедливо для $x\in(-1;\,1)$. Что касается концов промежутка: $x = \pm 1$, то можно показать, что:

1) если $m > 0$, то разложение (5.16) справедливо для $x \in [-1; 1]$;

2) если $-1 < m < 0$, то разложение (5.16) справедливо для $x \in (-1; 1]$;

3) если $m \le -1$, то разложение (5.16) справедливо для $x \in (-1; 1)$.

Пример 5.1. Найдём разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \arcsin x$.

► Положим $f(t) = \arcsin t$. Тогда $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-1/2}$. Рассмотрим биномиальный ряд при $m = -\frac{1}{2}$ и независимой переменной $(-t^2)$. Получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2!2^2}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}t^6 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!2^n}t^{2n} + \ldots, \qquad (5.17)$$

$$t^2 \in [0; 1) \iff t \in (-1; 1).$$

Возьмём любое $x \in (-1; 1)$ и, заменяя в (5.17) t на x, проинтегрируем почленно полученный ряд по промежутку $[0; x]$:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2!2^2}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!2^n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\ x \in (-1; 1),$$

откуда

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (5.18)$$

Здесь $(2n)!! = 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2n)$, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

Разложение (5.18) установлено нами лишь для $x \in (-1; 1)$. Можно показать [11],что оно справедливо и при $x = \pm 1$.

Замечание 5.1. Следует иметь в виду, что разложение функций в степенной ряд при помощи использования уже известных разложений часто осуществляется проще, чем с помощью формулы Маклорена. Мы видели это на примерах разложений в ряд функций $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\arcsin x$.

§ 6. Приложения степенных рядов

Степенные ряды находят применение в приближённых вычислениях значений функций, для этого используют первые члены разложения в ряд Тейлора. Кроме того, использование разложений функции в степенные ряды позволяет вычислять неберущиеся интегралы, а найти решение некоторых дифференциальных уравнений.

Пример 6.1. Вычислить с ошибкой, не превосходящей 0,001, интеграл $I = \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$.

► Используя разложение (5.3), имеем

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}.$$

Данный ряд сходится при любых $x \in \boldsymbol{R}$, поэтому его можно почленно интегрировать по любому промежутку, например, по промежутку $[0, 1]$. Таким образом, получим

$$I=\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\Bigg|_0^1=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\dots .$$

Вычислим несколько частичных сумм этого ряда: $s_1=1$, $s_2=\frac{2}{3}$, $s_3=\frac{23}{30}$, $s_4=\frac{312}{420}$, … . Ряд сходится к своей сумме довольно быстро: в силу признака Лейбница абсолютная величина разности между n-й частичной суммой и суммой ряда не превосходит $\frac{1}{n!(2n+1)}$, что уже при $n=5$ равно $\frac{1}{1320}<0{,}001$, следовательно, $I\approx\frac{312}{420}+\frac{1}{216}\approx 0{,}747$. ◄

Пример 6.2. Найти решение дифференциального уравнения

$$y''-y'=x, \tag{6.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(1)=1,\quad y'(1)=0. \tag{6.2}$$

► Допустим, что решение $y=f(x)$ существует и представимо в виде ряда Тейлора по степеням $x-1$: $y=y(1)+\frac{y'(1)}{1!}(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\dots$.

Нужно найти $y(1)$, $y'(1)$, $y''(1)$, … . Это можно сделать, исходя из уравнения (6.1) и условий (6.2). Из условий (6.2) следует $y(1)=1$, $y'(1)=0$. Используя уравнение (6.1), получаем:

$$y''=x+y', \tag{6.3}$$

откуда, полагая $x=1$, находим $y''(1)=1+y'(1)=1$.

Продифференцируем обе части уравнения (6.3) по x:

$$y'''(x)=1+y''(x), \tag{6.4}$$

и, следовательно, $y'''(1)=1+y''(1)=2$. Дифференцируя соотношение (6.4) ещё раз по x, получим

$$y^{\mathrm{IV}}(x)=y'''(x), \tag{6.5}$$

откуда $y^{\mathrm{IV}}(1)=2$. Из (6.5), последовательно дифференцируя по x, находим $y^{\mathrm{V}}(1)=y^{\mathrm{IV}}(1)=\dots=2$, и, следовательно,

$$y(x)=1+\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3+\frac{2}{4!}(x-1)^4+\dots . \tag{6.6}$$

Ряд (6.6) сходится, по признаку Даламбера, при всех x. Это и есть решение уравнения (6.1).◄

Глава 5. **Задания для проверки качества усвоения раздела 9**

§ 1. Задачи для самостоятельной работы

1. Исследуйте сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

2. Выясните, сходятся ряды или расходятся, а если сходятся, то абсолютно или условно: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}$.

3. Найдите области сходимости функциональных рядов:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(x+3)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{x}}}$.

4. Найдите промежутки сходимости степенных рядов:
а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{n+2}}$.

5. Разложите функцию в ряд по степеням x и укажите область сходимости полученного ряда: а) e^{-x^2}; б) $\ln(x^2+3x+2)$; в) $\int_0^x \frac{\sin 2t}{t} dt$.

6. Разложите функцию $y = \operatorname{tg} x$ в ряд Тейлора по степеням $(x-\pi/4)$, выписав первые 2 члена, отличные от нуля.

7. Вычислите приближенно с точностью до 10^{-3}, оценив погрешность по теореме Лейбница для знакочередующегося ряда: $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$.

8. Вычислите приближенно $f(1)$, беря сумму 3-х первых членов ряда, если $f(x)$ задана следующим рядом: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n!}$.

9. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, сведя его к прогрессии путём почленного дифференцирования.

10. Решите приближенно задачу Коши, найдя несколько первых членов разложения решения в степенной ряд (по формуле Тейлора) в окрестности начальной точки (4 члена): $y' = y^3 - x$, $y(0) = 1$.

Ответы к задачам для самостоятельной работы

1. а) расходится; **б)** расходится; **в)** сходится; **г)** сходится; **д)** сходится.
2. а) сходится условно; **б)** сходится абсолютно. **3. а)** $(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$;
б) $(1;+\infty)$. **4. а)** $[-2;2]$; **б)** $[2;4]$. **5. а)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$; **б)** $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2^n+1}{2^n} x^n$;
в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n-1)}$. **6.** $\operatorname{tg}x \approx 1-2(x-\pi/4)+2(x-\pi/4)^2$. **7.** 0.961. **8.** 0.221.
9. $-\ln(1-x)$. **10.** $y = 1 - x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$.

§ 2. Контрольные вопросы к разделу 9

1. Что такое сумма числового ряда?

2. Если числовой ряд сходится, то его остаток: 1) сходится , 2) расходится, 3) ничего нельзя сказать о сходимости или расходимости остатка.

3. Сформулируйте необходимое условие сходимости числового ряда.

4. Если общий член числового ряда стремится к нулю, то будет ли сходиться данный ряд?

5. Если общий член a_n ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то данный ряд: 1) сходится, 2) расходится, 3) ничего определенного сказать о сходимости или расходимости ряда нельзя.

6. Какой ряд называется абсолютно сходящимся? условно сходящимся?

7. Какой ряд называется геометрическим (геометрической прогрессией)? При каком условии он сходится и чему равна его сумма?

8. Как оценивается по модулю остаток ряда, подчиняющегося условиям теоремы Лейбница?

9. Сформулируйте условие, при выполнении которого сумма ряда не меняется, если члены ряда произвольным образом поменять местами.

10. Сформулируйте необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами.

11. Оказывает ли влияние на сходимость ряда "отбрасывание" его первых "n" членов?

12. Какие арифметические действия можно производить над сходящимися рядами?

13. В чем состоит сочетательное свойство сходящихся рядов?

14. Можно ли переставлять местами члены условно сходящегося ряда?

15. Какой ряд называется знакопеременным?

16. Что понимается под «n- ым остатком ряда»?

17. Что можно сказать о сходимости ряда, если $\lim\limits_{n\to\infty} \left|a_{n+1}/a_n\right| = 1$?

18. Сформулируйте предельный признак сравнения рядов с положительными членами.

19. Сформулируйте признак Даламбера сходимости ряда.

20. Сформулируйте радикальный признак Коши сходимости ряда.

21. Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости ряда.

22. Что такое гармонический ряд? Сходится он или расходится?

23. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.

24. Если отношение последующего члена ряда к предыдущему стремится к нулю при $n \to \infty$, то будет ли данный ряд сходящимся?

25. Можно ли высказать заключение о расходимости ряда с положительными в случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$?

26. Сформулируйте признак сравнения рядов с положительными членами в в форме неравенства.

27. Если для рядов с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется соотношение эквивалентности $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то что можно утверждать о сходимости или расходимости этих рядов?

28. Какой ряд называется степенным?

29. Степенной ряд по степеням $x - x_0$ имеет радиус сходимости R. Укажите, сходится или расходится ряд в точке $x_0 + 2R$.

30. Сформулируйте первую теорему Абеля о степенных рядах.

31. Степенной ряд по степеням x сходится в точке x_0 и расходится в точке $(-x_0)$. Чему равен радиус сходимости этого ряда?

32. Чтопредставляет собой область сходимости степенного ряда?
Что представляет собой область сходимости степенного ряда?

33. В какой области степенной ряд сходится абсолютно?

34. В какой области степенной ряд может быть проинтегрирован почленно?

35. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ с радиусом сходимости R продифференцирован почленно. Укажите интервал сходимости полученного ряда.

36. Можно ли сделать утверждение о непрерывности суммы степенного ряда внутпри интервала сходимости и на его концах?

37. Напишите ряд Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0.

38. Напишите ряд Маклорена для функции $f(x)$.

Напишите ряд Маклорена для функции $\sin x$. Где он сходится?

39. Напишите ряд Маклорена для функции $\cos x$. Где он сходится?

40. Напишите ряд Маклорена для функции e^x. Где он сходится?

41. Напишите биномиальный ряд. Каков его радиус сходимости?

42. Сформулируйте теорему, устанавливающую условия сходимости ряда Тейлора к функции, для которой он составлен.

43. Напишите ряд Маклорена для функции $y = \ln(1+x)$. Где он сходится?

44. Как получить разложение в степенной ряд функции $y = \operatorname{arctg} x$, зная разложение для функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$? Где этот ряд сходится?

§ 3. Тесты по разделу 9

Вар. № 1	**Раздел 9. Числовые и функциональные ряды**
1	Проверьте выполнение необходимого условия сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{3^n}{n2^n}$.
2	Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n^2+2}}$.
3	Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)!}$.

4	Исследовать сходимость ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{9+n^2}$.
5	Исследовать на условную и абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n!}$.
6	Исследовать на условную и абсолютную сходимость ряд $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}+\ln n}.$$
7	Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$.
8	Найдите интервал сходимости степенного ряда и исследуйте его сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$.
9	Найдите три первых отличных от нуля члена разложения функции $y(x)$ в ряд по степеням x, если $y=\cos^2 x^2$.
10	Разложите функцию $y(x)$ в ряд по степеням x. В ответе напишите общий член полученного ряда, если $y=\int_0^x\frac{1-\sin x}{x^2}dx$.
11	Сколько первых членов ряда по степеням x нужно сложить, чтобы вычислить $\sin(x/2)^2$ при $x = 1$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
12	Вычислите заданный интеграл $\int_0^{1/2}\frac{\sin x}{x}dx$. с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Вар. № 2	Раздел 9. Числовые и функциональные ряды
1	Проверьте выполнение необходимого условия сходимости ряда $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2+n+1}.$$
2	Исследовать сходимость положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{1+n^2\sqrt{n}}$.
3	Исследовать сходимость положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{n^n}$.
4	Исследовать сходимость положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$.
5	Исследовать на условную и абсолютную сходимость ряд $$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}.$$
6	Исследовать на условную и абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{2n+1}$.

7	Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
8	Найдите интервал сходимости степенного ряда и исследуйте его сходимость на концах интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n3^n}$.
9	Найдите три первых отличных от нуля члена разложения функции $y(x)$ в ряд по степеням x, если $y=\frac{1}{4+3x^3}$.
10	Разложите функцию $y(x)$ в ряд по степеням x. В ответе напишите общий член полученного ряда, если $y=\int_0^x x\cos\frac{x}{2}dx$.
11	Сколько первых членов ряда по степеням x нужно сложить, чтобы вычислить $1/\sqrt[3]{1+x/3}$ при $x = 1$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
12	Вычислите интеграл $\int_0^{1/3}\sqrt{1+x^3}dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Ответы к заданиям тестов

Вариант 1

1) Не выполняется. **2)** Расходится. **3)** Расходится. **4)** Расходится. **5)** Сходится абсолютно. **6)** Сходится условно. **7)** $R=1$. **8)** R=1/2, [-1/2,1/2).

9) $1-x^4+\frac{1}{3}x^8-\ldots$. **10)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)!}$. **11)** 2. **12)** 0,4931.

Вариант 2

1) Не выполняется. **2)** Сходится. **3)** Расходится. **4)** Сходится.
5) Сходится условно.
6) Сходится условно. **7)** $R=1$. **8)** $R=1$. (-1,1). **9)** $\frac{1}{4}-\frac{3}{16}x^3+\frac{9}{64}x^6-\ldots$.

10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!\cdot 2^{2n}}$. **11)** 4. **12)** 0,2505.

Раздел 10. **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Краткая характеристика содержания раздела

1. Темы раздела. Алгебра событий. Вероятность. Алгебра вероятностей. Одномерные случайные величины. Многомерные случайные величины. Предельные теоремы.

2. Базисные понятия. Событие. Вероятность. Случайная величина. Числовые характеристики случайной величины. Основные распределения. Двумерные и n-мерные случайные величины. Предельные теоремы.

3. Основные задачи. Выражение одних событий через другие. Нахождение вероятностей одних событий по вероятностям других. Нахождение и преобразование законов распределения случайных величин. Нахождение числовых характеристик случайной величины на основе её закона распределения. Нахождение вероятности попадания случайной величины в заданное множество на основе её закона распределения.

Глава 1. **АЛГЕБРА СОБЫТИЙ**

§ 1. Предмет теории вероятностей

Задача науки – выявление закономерностей, описывающих явления природы и общества. Эти закономерности могут быть выражены с помощью моделей в виде описаний, классификаций, алгоритмов, уравнений, функций детерминистским или вероятностным способом.

Детерминистская математическая модель, применяемая для выражения закономерностей, даёт однозначный вывод при задании всех переменных, входящих в модель. Таков, например, закон Ома для участка цепи $i = u/R$, связывающий ток i, напряжение u и сопротивление R.

Вероятностная, иначе – *стохастическая модель* – это модель, которая не даёт достоверного прогноза о развитии изучаемого явления. Её выводы носят лишь оценочный, вероятностный характер. Например, невозможно точно указать, сколько будет наводнений в Санкт-Петербурге в текущем году. Однако с помощью теории вероятностей, на основе имеющихся статистических данных можно сделать предсказание о количестве и величине наводнений с определённой вероятностью. Наводнения относятся к разряду случайных явлений, поведение которых достоверно предсказать невозможно.

Определение 1.1. *Теорией вероятностей* называется наука, изучающая математические модели случайных явлений.

Создание теории вероятностей относится к началу XVII в., когда стали возникать задачи, требующие статистических исследований в области страхового дела, демографии, производства. Большое влияние на теорию вероятностей оказали азартные игры, которые дают наиболее простые модели случайных явлений. Поэтому и в настоящем курсе иногда приводятся примеры из азартных игр.

Среди учёных, развивавших теорию вероятностей, встречаются такие имена, как П. Ферма (фр., 1601–1665), Я. Бернулли (швейц., 1654–1705), П. Лаплас (фр., 1749–1827), С.Д. Пуассон (фр., 1781–1840), К.Ф. Гаусс (нем., 1777–1855), известные из общих курсов математики и физики.

Большую роль в теории вероятностей сыграла российская математическая школа в лице П.Л. Чебышёва (1821–1894), А.А. Маркова (1856–1922), А.М. Ляпунова (1857–1918), С.Н. Бернштейна (1880–1968), А.Н. Колмогорова (1903–1987) и других.

§ 2. Классификация событий

Для изучения и описания реальных событий, характеризующих различные случайные явления, рассмотрим математическую схему абстрактных событий и классифицируем эти события.

Рассматривается эксперимент (опыт, испытание, наблюдение). Предполагается, что его можно проводить неоднократно. В результате эксперимента могут появляться различные события, составляющие некоторое множество F. Сам эксперимент обозначают буквой E. Наблюдаемые события разделяются на три вида: достоверное, невозможное, случайное.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдёт в результате проведения эксперимента E. Его будем обозначать буквой I (или Ω).

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдёт в результате проведения эксперимента E. Оно обозначается символом пустого множества $\varnothing$.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате эксперимента E. Случайные события обозначаются первыми большими буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots$.

Пример 2.1. Пусть E – эксперимент, означающий бросание игральной кости, X – число выпавших очков. Тогда $X \geq 7$ – невозможное событие, $X \leq 6$ – достоверное событие, а X – число чётное – случайное событие.

Дополнительным, иначе – *противоположным* событию A называется событие, обозначаемое $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

Пример 2.2. E – выстрел из орудия. Событие A – попадание в цель. Тогда $\overline{A}$ – промах.

Элементарным событием ω называется непосредственный исход эксперимента E.

Множество всех элементарных событий называется *пространством элементарных событий* и обозначается Ω.

Пример 2.3. E – бросание игральной кости. Здесь 6 элементарных событий $\omega_1, \ldots, \omega_6$. Событие ω_k означает, что в результате бросания выпало k очков, $k = 1, \ldots, 6$, $\Omega = \{ \omega_1, \ldots, \omega_6\}$.

События наглядно иллюстрируются с помощью *диаграмм Венна* (англ. математик, 1832–1923). Достоверное событие изображается квадратом; случайное событие A – областью внутри квадрата; противоположное событие $\overline{A}$ – областью внутри квадрата вне области, изображающей событие A (рис. 2.1).

Для того чтобы диаграммы Венна не представлялись слишком абстрактными, можно представить себе эксперимент E как стрельбу по квадратной мише-

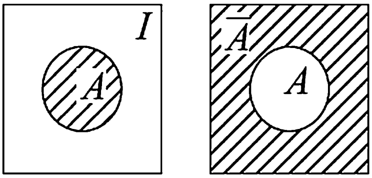


***Рис. 2.1.** Диаграммы Венна для событий A и $\overline{A}$*

ни с условием, что выпущенный снаряд обязательно попадёт в мишень. Тогда A есть событие, означающее попадание в заданную область.

§ 3. Действия над событиями

Над событиями можно производить действия, подобные алгебраическим – складывать и перемножать.

Определение 3.1. *Суммой* (или *объединением*) событий называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из данных событий. Сумма событий обозначается несколькими способами.

Алгебраические обозначения: $A + B$, $A + B + C$, $\sum_k A_k$.

Теоретико-множественные обозначения: $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $\bigcup_k A_k$.

Пример 3.1. E – бросание игральной кости. Событие A означает выпадение 1 или 2, а событие B – выпадение 2 или 3. Тогда событие $A + B$ означает выпадение 1 или 2 или 3.

На диаграмме Венна сумма событий $A + B$ изображается областью, которая накрывается областями, изображающими события A и B (рис. 3.1).

Определение 3.2. *Произведением* (или *совмещением, пересечением*) событий называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда все данные события происходят вместе (одновременно).

Произведение событий также обозначается несколькими способами.

Алгебраические обозначения: AB, ABC, $\prod_k A_k$.

Теоретико-множественные обозначения: $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $\bigcap_k A_k$.

На диаграмме Венна произведение событий AB изображается общей частью областей, изображающих события A и B (рис. 3.2).

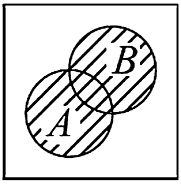


Рис. 3.1. Изображение суммы событий $A + B$

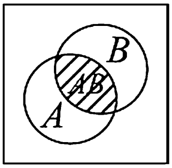


Рис. 3.2. Изображение произведения событий AB

Пример 3.2. E – стрельба по мишени – квадрату, изображающему событие I (рис. 3.2). Событие AB состоит в попадании в пересечение областей, изображающих соответственно события A и B.

Свойства действий над событиями

$A+A=A$; $A+I=I$; $A+\varnothing=A$; $AA=A$; $AI=A$; $A\varnothing=\varnothing$;

$A+B=B+A$ – переместительный закон сложения;

$(A+B)+C=A+(B+C)$ – сочетательный закон сложения; (3.1)

$AB=BA$ – переместительный закон умножения;

$(AB)C=A(BC)$ – сочетательный закон умножения; (3.2)

$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$; $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ (правила Де Моргана); $\overline{\overline{A}}=A$; (3.3)

$(A+B)C=AC+BC$ – распределительный закон. (3.4)

Свойства операций сложения, умножения, дополнения событий выражают правила действий над событиями, которые во многом похожи на правила действий с числами. Роль достоверного события I во многом похожа на роль единицы, а роль невозможного события $\varnothing$ – на роль нуля.

Эти правила и другие, более сложные, составляют *алгебру событий.*

Все приведённые формулы, кроме (3.3) и (3.4), следуют непосредственно из определений суммы и произведения событий.

Докажем первую формулу Де Моргана (3.3) (шотл. математик, 1806–1871).

►Событие $A + B$ означает, что произойдёт хотя бы одно из слагаемых событий A или B. Ему противоположное $\overline{A+B}$ означает, что не произойдёт ни A, ни B, т. е. произойдут оба противоположных события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ вместе, следовательно, произойдёт их произведение $\overline{A}\,\overline{B}$.◄

Доказательство формулы (3.4) приведено ниже после определения (3.6).

На основе понятий суммы и произведения продолжим классификацию событий.

Определение 3.3. События называются *несовместными*, если их произведение есть невозможное событие: $A_1A_2\ldots A_n=\varnothing$.

Несовместными будут все элементарные события, события A и $\overline{A}$. Таким образом, в частности,

$$A\overline{A}=\varnothing. \qquad (3.5)$$

На диаграмме Венна два несовместных события изображаются непересекающимися множествами.

Заметим, что если события попарно несовместны, то они несовместны и в совокупности. Обратное неверно.

Пример 3.3. Пусть E – бросание игральной кости. Рассмотрим события:

A = (выпадение 1 или 2), B = (выпадение 2 или 3), C = (выпадение 3 или 1). Очевидно, что $ABC=\varnothing$, т. е. все три события несовместны в совокупности, но попарно совместны.

Определение 3.4. *Полной группой событий* называется множество событий, сумма которых есть достоверное событие:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = I.$$

Примерами полной группы событий являются все элементарные события ω пространства Ω. В силу этого обстоятельства часто достоверное событие обозначается символом Ω, тем же, что и пространство элементарных событий. На диаграмме Венна полная группа событий заполняет весь квадрат.

События A и $\overline{A}$ также образуют полную группу. Таким образом,

$$A+\overline{A}=I. \qquad (3.6)$$

Определение 3.5. Событие B называется *частным случаем* события A, если с появлением события B появляется и событие A. Говорят также, что событие B влечёт событие A, что записывается в виде $B \subset A$.

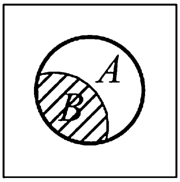


Рис. 3.3. $B \subset A$

На диаграмме Венна событие B, влекущее событие A, изображается подобластью области, изображающей A (рис. 3.3).

Если квадрат есть мишень, то попадание в область, изображающую событие B, означает попадание в область, изображающую событие A.

Заметим, что элементарное событие ω эксперимента E обладает характеристическим свойством, которое может служить определением элементарного события: каким бы ни было событие A, порождённое экспериментом E, всегда либо $\omega \subset A$, либо $\omega \subset \overline{A}$.

Определение 3.6. События A и B называются *эквивалентными*, если они происходят или не происходят совместно при проведении эксперимента E.

Запись эквивалентных событий: $A = B$.

Очевидно, что $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Доказательство формулы (3.4).

►Пусть произошло событие $(A+B)C$, записанное слева в формуле (3.4). Это означает, что вместе произошли события $A+B$ и C. Если произошло событие $A+B$, то произошло хотя бы одно из событий A или B. Пусть, например, произошло событие A. Но оно произошло, как было отмечено ранее, вместе с C. Тогда произошло событие AC. По определению суммы событий произошло и событие $AC+BC$. Мы доказали, что $(A+B)C\subset AC+BC$. Аналогично доказывается, что $AC+BC\subset(A+B)C$. Тогда события $(A+B)C$ и $AC+BC$ являются эквивалентными, т. е. $(A+B)C=AC+BC$.◄

Пример 3.4. Доказать формулу

$$A+B=A+\overline{A}B. \qquad (3.7)$$

Эта формула представляет сумму двух любых событий как сумму двух несовместных событий.

►Применим формулы (3.1), (3.2), (3.4), (3.6):

$A+B=A+BI=A+B(A+\overline{A})=(AI+AB)+\overline{A}B=A(I+B)+\overline{A}B==AI+\overline{A}B=A+\overline{A}B$.◄

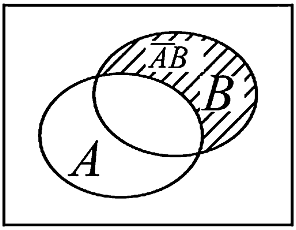


Рис. 3.4. $A+B=A+\overline{A}B$

На диаграмме Венна (рис. 3.4) формула (3.7) означает, что множество, изображающее $A+B$, представлено как объединение непересекающихся множеств, изображающих A и $\overline{A}B$.

Глава 2. **Вероятность события**

Вероятность – второе фундаментальное понятие в теории вероятностей после случайного события. С его помощью строятся все вероятностные схемы случайных явлений.

Вероятность реального события есть мера его объективной возможности. Это определение вероятности скорее философское, чем математическое. Для того чтобы понятие вероятности стало математическим, нужно ввести его как количественную характеристику событий. Математических определений вероятности существует несколько. Все они прошли длительный путь развития, дополняют и обобщают друг друга. Формирование понятия вероятности не закончено до сих пор. Исторически несомненно, что вероятность появилась как идеальное понятие, отражающее свойства относительной частоты при массовых статистических исследованиях.

§ 1. Относительная частота события и ее свойства

Рассмотрим опыт E, его можно повторять многократно (теоретически – сколько угодно раз). В результате опыта может появиться событие A.

Определение 1.2. *Относительной частотой* события A называется отношение числа μ опытов, в которых появилось событие A, к общему числу n проведённых опытов.

Относительная частота события A обозначается символом $P^*(A)$. Итак,

$$P^*(A) = \mu/n. \tag{1.1}$$

Практика указывает на то, что для широкого круга явлений при неограниченном увеличении числа опытов n относительная частота события стабилизируется, приближаясь к некоторому постоянному числу, в том смысле, что большие отклонения относительной частоты от этого числа наблюдаются тем реже, чем больше n.

Так, при бросании монеты относительная частота выпадений орла колеблется около числа $1/2$.

Практику интересует поведение относительной частоты брака изделия, поломки прибора за данный промежуток времени, заболеваемости во время эпидемии, ответов определённого содержания при социологических опросах и т. д.

Свойства относительной частоты

1. $P^*(I) = 1$, так как $\mu = n$.

2. $P^*(\varnothing) = 0$, так как $\mu = 0$.

3. $0 \le P^*(A) \le 1$, так как $0 \le \mu \le n$, $0 \le \mu/n \le n/n$.

4. $P^*(A+B) = P^*(A) + P^*(B)$, если A и B несовместны, так как

$$P^*(A+B) = (\mu_1 + \mu_2)/n = \mu_1/n + \mu_2/n = P^*(A) + P^*(B).$$

Здесь μ_1 – число опытов, в которых появилось событие A_1, μ_2 – то же для события B. Так как события A и B несовместны, то число опытов, в которых появилась сумма $A+B$, равно $\mu_1 + \mu_2$.

§ 2. Статистическое определение вероятности

В логике считается, что всякое описание понятия, помогающее уяснить его смысл, является его определением. Математику, конечно, удовлетворяют не любые определения, а в основном такие, которые полностью определяют понятие, что не всегда удается по разным причинам.

Пусть опыт E проводится многократно в стабильных условиях, в результате чего наблюдается событие A и вычисляется его относительная частота.

Определение 2.2. *Вероятностью события* называется число, около которого колеблется относительная частота этого события, приближаясь к нему при увеличении числа опытов.

Вероятность события A обозначается символом $\mathrm{P}(A)$. Это идеальная характеристика события, отражающая свойства относительной частоты, поэтому вероятности приписываются те же свойства 1 – 4 относительной частоты:

1. $\mathrm{P}(I)=1$.

2. $\mathrm{P}(\varnothing)=0$.

3. $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$.

4. $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$, если A и B несовместны.

Замечание 2.1. Статистическое определение вероятности не дает однозначного способа вычисления вероятности события (в этом его несовершенство), но дает возможность найти оценку этой вероятности:

$$\mathrm{P}(A) \approx \mathrm{P}^*(A)=\mu/n. \tag{2.1}$$

Чем больше n, тем точнее приближенное равенство (2.1). На практике за вероятность события принимается относительная частота этого события при достаточно большом числе n проведенных опытов.

Так, например, на основе публикуемых демографических данных можно утверждать, что относительная частота рождения детей мужского пола колеблется около числа 0.51, что и дает основание принять это число за приближенное значение вероятности рождения ребёнка мужского пола.

§ 3. Аксиоматическое определение вероятности

Статистическое определение вероятности конструктивно указывает, как приближённо найти вероятность отдельного массового случайного события на основе относительной частоты. Оно же ориентирует, какими должны быть свойства вероятности исходя из свойств той же относительной частоты. Однако логический порядок в вопросах теории вероятностей призвано навести аксиоматическое определение. Понятия этой теории должны не противоречить друг другу и соотносится друг с другом по определенным законам.

Напомним, что элементарным событием ω называется непосредственный исход эксперимента E. Множество всех элементарных событий образует пространство элементарных событий Ω. Под *событием* в аксиоматической схеме понимается сумма (объединение) каких-либо элементарных событий ω_i:

$$A=\sum_i \omega_i. \tag{3.1}$$

Например, если E – бросание игральной кости, A – событие, означающее выпадение чётного числа очков, то $A = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6$, где ω_i – элементарное событие, означающее выпадение i очков.

Все рассматриваемые в схеме события образуют множество событий F, называемое *полем* (Field), иначе – *алгеброй*, к нему предъявляются следующие требования, обеспечивающие применение понятия вероятности:

1. F содержит достоверное и невозможное события.

2. Если события A_1, A_2, … (конечное или счётное множество) принадлежат F, то F принадлежат сумма, произведение и дополнение этих событий.

Понятие вероятности строится для всех событий алгебры F.

Определение 3.1. *Вероятностью* события $A \in F$ называется числовая функция $\mathrm{P}(A)$, определённая на алгебре F, имеющая свойства $1-4$:

$$\mathbf{1)}\ \mathrm{P}(I)=1; \quad \mathbf{2)}\ \mathrm{P}(\varnothing)=0; \quad \mathbf{3)}\ 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1; \quad \mathbf{4)}\ \mathrm{P}\left(\sum_k A_k\right)=\sum_k \mathrm{P}(A_k),$$

если события $A_1, A_2,\ldots$(конечное или счётное множество) попарно несовместны.

Приведённое определение является адаптированным аксиоматическим определением вероятности А.Н. Колмогорова. Свойства вероятности 1– 4 являются аксиомами. Последняя аксиома носит название «Аксиома сложения». В науке существуют и другие аксиоматические определения вероятности, первое из них дано российским математиком С. Н. Бернштейном в 1917 г.

В качестве упражнения выведем формулу

$$\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A). \tag{3.2}$$

► $\overline{A}+A=I$. По аксиоме сложения $\mathrm{P}(\overline{A}+A)=\mathrm{P}(\overline{A})+\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(I)=1$. Отсюда $\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)$. Использована также аксиома 1.◄

§ 4. Классическое определение вероятности

Классическое и статистическое определения вероятности впервые четко сформулированы в работе Якоба Бернулли (швейцарский математик, 1654 – 1705), которая опубликована в 1713 г.

Предварительно продолжим классификацию событий.

События называются *равновозможными*, если по условиям эксперимента ни одно из этих событий не является предпочтительным по отношению к другим с точки зрения возможности их появления. Эксперимент E в этом случае обладает «симметрией» исходов по отношению к этим событиям. Таковы исходы бросания монеты, игральной кости, выигрыш каждого из купленных билетов лотереи, выход из строя каждого испытуемого прибора серии одинаковых приборов и т. д.

Определение 4.1. Эксперимент E назовем *классическим*, если он приводит к множеству событий, удовлетворяющих трём условиям:

1) они попарно несовместны;

2) образуют полную группу;

3) равновозможны.

Эти события называются *случаями* или *шансами* и обозначаются ω. Они могут быть элементарными событиями.

Определение 4.2. Случай ω называется *благоприятным* (иначе – *благоприятствующим*) событию A, если ω влечёт A: $\omega \subset A$.

Определение 4.3. Если эксперимент E является классическим, то вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих событию A, к общему числу n случаев.

Классическое определение, в отличие от аксиоматического, является конструктивным и даёт следующую меру возможности события:

$$P(A) = m/n. \tag{4.1}$$

Легко проверяется (как и для относительной частоты), что вероятность события, определённая по формуле (4.1), удовлетворяет свойствам 1–4, в общем случае объявленным аксиомами, а здесь следуют из формулы (4.1).

Недостатком классического определения является его малая применимость, так как классические эксперименты встречаются редко – в искусственно созданных ситуациях.

Примеры 4.1.

1. Пусть эксперимент E – бросание монеты, событие A – выпадение орла. $P(A) = m/n = 1/2$, так как $m = 1$, $n = 2$.

2. E – бросание игральной кости. A – выпадение числа очков, меньшего или равного двум. $P(A) = 2/6 = 1/3$, так как $m = 2$, $n = 6$.

3. E – бросание монеты 2 раза. Событие A – оба раза выпадает орел. Здесь равновозможных исходов 4: ОО (орёл, орёл), ОР (орёл, решка), РО, РР. Таким образом, $m = 1$, $n = 4$, $P(A) = 1/4$.◄

Классическое определение вероятности может быть реализовано на так называемой урновой схеме. Под урной понимается ёмкость, в которой находятся неразличимые на ощупь, одинаковые по размерам шары. Шары могут быть занумерованы и окрашены в различные цвета. После перемешивания шары вынимаются из урны «не глядя». Очевидно, что вероятность вынуть какой-либо определённый шар из n шаров, находящихся в урне, равна $1/n$.

Пример 4.2. В урне 3 шара: 2 белых, 1 чёрный. Подряд вынимаются два шара. Найти вероятность, что оба шара – белые (событие A).

►Пронумеруем шары: белые – номерами 1, 2; чёрный – номером 3. Тогда при вынимании двух шаров возможны исходы: (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2). Отсюда $m = 2$, $n = 6$, $P(A) = 2/6 = 1/3$.◄

§ 5. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности основную идею классического определения – равновозможности событий – распространяет на случай бесконечного несчётного множества элементарных событий.

Рассмотрим на оси абсцисс отрезок Q и внутри него отрезок q: $q \subset Q$ (рис. 5.1).

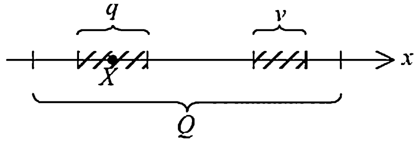


Рис. 5.1. *Иллюстрация геометрического определения вероятности*

На отрезке Q случайно выбирается точка X. Этот выбор можно интерпретировать как бросание случайной точки X на отрезок Q. При этом попадание X на Q считается достоверным событием, а попадание на отрезок q – случайным. Далее предполагается, что равновозможно попадание X на q, где бы «малый» отрезок q ни находился внутри основного отрезка Q при условии, что длина q – фиксирована. Пусть событие $A=(X\in q)$. Тогда по определению

$$\mathrm{P}(A) = q/Q. \tag{5.1}$$

Здесь под мерой отрезка понимается его длина.

Формула (5.1) распространяется на плоский и пространственный случаи, но тогда под мерой понимается соответственно площадь или объём рассматриваемых областей.

Вероятность события, введённая по формуле (5.1), обладает всеми четырьмя свойствами, присущими аксиоматическому и другим определениям. Проверим, например, выполнение аксиомы сложения для случая двух несовместных событий A и B. Для этого возьмём два непересекающихся отрезка q и v (рис. 5.1). Пусть $A=(X\in q)$, $B=(X\in v)$. Тогда

$$\mathrm{P}(A+B) = \frac{(q\cup v)}{Q} = \frac{q+v}{Q} = \frac{q}{Q} + \frac{v}{Q} = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)\,.$$

Пример 5.1. На линии связи длиной 10 км произошёл обрыв. Какова вероятность, что обрыв произошёл не далее, чем в двух км от начала (событие A)?

►В условиях неопределённости, когда никаких дополнительных сведений о свойствах линии связи нет, считается правомерным допустить равновозможность положения точки разрыва в любой области линии связи и применить геометрическое определение. По формуле (5.1) получаем $\mathrm{P}(A) = 2/10 = 0.2$.◄

Геометрическое определение, как классическое и статистическое, конструктивно и применяется в так называемом методе статистических испытаний.

§ 6. Субъективное определение вероятности

Аксиоматическое определение вероятности создаёт логический порядок в вероятностной теории, но не указывает, как найти эти вероятности на практике. Этот вопрос решают конструктивные определения – статистическое, классическое, геометрическое. Но и они не охватывают всех практически важных случаев. Предыдущие определения не помогут при попытке оценить возможность появления уникального события или очень редкого. Приходится прибегать к экспертному оцениванию вероятности на основе личного опыта экспертов.

Определение 6.1. *Субъективными вероятностями* событий называются вероятности, удовлетворяющие аксиомам 1–4 аксиоматического определения, приписанные событиям на основе личного опыта экспертов.

С помощью мнений экспертов оцениваются тенденции развития экономики, науки, техники, исходы той или иной политической ситуации, результаты спортивных состязаний, военных действий и т. д.

Не следует думать, что субъективная вероятность вносит какой-то произвол в наше познание. Она также объективна, как и вероятности, полученные на основе статистического и классического определений, так как основывается на объективном опыте экспертов, учитывающих аналогичные ситуации, исторический опыт, влияние различных факторов и т. д.

Глава 3. **Комбинаторика**

Применение классического определения вероятности предполагает знание комбинаторики. Комбинаторика также применяется и во многих других разделах математики, в естественных науках и технике.

§ 1. Комбинаторный принцип «умножения»

Комбинаторикой называется раздел математики, посвящённый решению задач выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам. Полученные группы элементов называются *соединениями*. Они могут отличаться друг от друга как составом элементов и их общим числом, так и порядком следования элементов.

В теории вероятностей, как и в самой комбинаторике, обычно интересуются не самими соединениями, а их числом. Для подсчёта количества соединений часто применяется основной комбинаторный *принцип* (*правило*) *«умножения»*.

Принцип (правило) «умножения». Пусть требуется выполнить одну за другой k операций, при этом 1-ю операцию можно выполнить n_1 способами, 2-ю – n_2 способами, и т. д., k-ю – n_k способами. Тогда все k операций вместе могут быть выполнены числом способов, равным произведению чисел n_1, ., n_k:

$$\Pi(n_1, \ldots, n_k) = n_1 n_2 \ldots n_k . \tag{1.1}$$

►Этот принцип доказывается методом математической индукции.

База индукции. Пусть $k = 2$. Две операции вместе можно выполнить, сочетая каждый способ 1-й операции с каждым способом 2-й. Их число $n_1 n_2$, т. е. формула (1.1) верна при k=2.

Индукционный шаг. Пусть формула (1.1) верна для $k-1$ операций. Докажем, что она справедлива и для k операций. Будем считать одной комплексной операцией $k-1$ операций, проведённых вместе. Тогда k операций, проведённых вместе, сводятся к проведению двух операций. Число их способов проведения будет произведением двух чисел: $(n_1 n_2 , \ldots , n_{k-1}) n_k = n_1 n_2, \ldots , n_k$. Формула (1.1) сохранилась для k операций.◄

Пример 1.1. Код замка представляет собой последовательность одной из 25 букв, стоящей в начале и двух цифр от 0 до 9. Найти вероятность открыть замок (событие A) при одном случайном наборе буквы и цифр.

►Здесь при наборе выполняются 3 операции. При этом $n_1=25$, $n_2=10$, $n_3=10$. Тогда $m=1$; $n=25\cdot10\cdot10=2500$. $P(A)=m/n=1/2500=0.0004$.◄

§ 2. Размещения

Определение 2.1. *Размещениями* (arrangements) из n элементов по k элементов называются соединения, каждое из которых состоит из k элементов, взятых из данных n элементов. При этом размещения отличаются друг от друга как самими элементами, так и их порядком.

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается символом A_n^k (читается: «A из n по k») и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]\,(1 \le k \le n). \tag{2.1}$$

Число размещений A_n^k равно произведению k последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых есть n.

►Представим размещение в виде слова, состоящего из k букв, взятых из данных n различных букв. В качестве первой буквы x_1 можно взять любую из n данных букв. В качестве буквы x_2 – любую из $n-1$ оставшихся букв и т. д.

В качестве k-й буквы x_k можно взять любую из $n-(k-1)$ оставшихся. По принципу «умножения» рассматриваемое слово можно составить числом способов, равным произведению (2.1).◄

Пример 2.1. $A_7^3 = 7\cdot6\cdot5 = 210$.

Пример 2.2. Из трёх букв a, b, c составить различные размещения по два и подсчитать их число.

►Размещения по два: ab, ba, ac, ca, bc, cb. Их число: $A_3^2 = 3\cdot2 = 6$.◄

Пример 2.3. Две радиостанции могут работать на одной из трёх фиксированных частот каждая. Найти вероятность, что при одновременном и независимом выходе в эфир они будут работать на различных частотах.

►Применяем классическое определение вероятности. Тогда искомая вероятность $p = m/n$. Здесь $m = A_3^2 = 3\cdot2 = 6$. Так как каждая из радиостанций выбирает независимо любую из трех частот, то по принципу «умножения» $n = 3\cdot3 = 9$; $p = 6/9 = 2/9$.◄

Замечание 2.1. Имея в виду дальнейшие приложения теории вероятностей к математической статистике, полезно дать статистический аспект некоторым соединениям.

Будем называть исходное множество из n элементов *генеральной совокупностью* объёма n, а соединение, из него построенное – *выборкой объёма k*. При этом выбранные по одному из генеральной совокупности элементы могут не возвращаться обратно. Тогда такой выбор называется *выбором без возвращения*. Если же выбранные по одному элементы осматриваются, запоминаются и снова после каждого выбора возвращаются в генеральную совокупность, то такой выбор называется *выбором с возвращением*. Теперь снова сформулируем определение размещения на статистической основе.

Определение 2.2. *Размещениями* из n элементов по k элементов называются выборки объёма k из генеральной совокупности объёма n, полученные выбором без возвращения и отличающиеся друг от друга при повторении выборок как самими элементами, так и порядком их выбора.

§ 3. Перестановки

Определение 3.1. *Перестановками* (permutations) из n элементов называются размещения из n элементов по n элементов, отличающиеся друг от друга лишь порядком элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n (читается: «P из n») и вычисляется по формуле (2.1) при $k = n$:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1 = n!. \tag{3.1}$$

И, следовательно, $P_n = n!$

Пример 3.1. Из трёх букв a, b, c можно составить следующие слова – перестановки: abc, acb, bca, bac, cab, cba. Их число $P_3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$.

Пример 3.2. На полке 5 книг. Книги сняты с полки и после реставрации поставлены на полку в случайном порядке. Найти вероятность, что две книги одного автора окажутся стоящими вместе.

►Предполагаем возможность применения классического определения вероятности. Тогда $n=P_5=5!=120$. Для подсчёта m будем две книги одного автора считать за один элемент. Тогда $m=2\cdot P_4=2\cdot 4!=48$. Учтено, что две книги одного автора можно менять местами. Искомая вероятность $p=m/n=48/120=2/5$.◄

§ 4. Сочетания

Определение 4.1. *Сочетаниями* (combinations) из n элементов по k элементов называются соединения, каждое из которых состоит из k элементов, взятых из данных n элементов. Эти соединения отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. В отличие от размещений, порядок следования элементов здесь не учитывается.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «C из n по k») и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \tag{4.1}$$

►Для получения всех размещений из n элементов по k элементов выполняем две операции. Первая операция – образуем всевозможные сочетания из n элементов по k элементов. Число полученных сочетаний – C_n^k. Вторая операция

– делаем в каждом полученном сочетании всевозможные перестановки. Число таких перестановок в каждом сочетании – P_k. По принципу «умножения»: $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Отсюда $C_n^k = A_n^k / P_k$. ◄

Умножая числитель и знаменатель формулы (4.1) на $(n-k)!$, получаем другую формулу для C_n^k:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4.2}$$

Заменяя в формуле (4.2) k на $n-k$, замечаем, что при такой замене множители $k!$ и $(n-k)!$ в знаменателе дроби лишь меняются местами, отчего величина дроби не меняется, поэтому

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{4.3}$$

Эта формула в некоторых случаях позволяет упростить вычисление числа сочетаний. Например, $C_{10}^8 = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$.

Числа C_n^k называются также биномиальными коэффициентами, так как являются коэффициентами разложения бинома Ньютона

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k a^{n-k}. \tag{4.4}$$

Для единства формул делается соглашение

$$C_n^0 = C_n^n = 0! = 1. \tag{4.5}$$

Дадим определение сочетаний со статистической точки зрения.

Определение 4.2. *Сочетаниями* из n элементов по k элементов называются выборки объёма k из генеральной совокупности объёма n, полученные путём выбора без возвращения и без учёта следования элементов. Они отличаются друг от друга при повторении выборок хотя бы одним элементом.

Пример 4.1. Из четырёх предметов – обозначим их буквами a, b, c, d – можно составить следующие наборы для подарков по два предмета: ab, ac, ad, bc, bd, cd. Их число: $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Пример 4.2. В лотерейном билете «Спортлото 6 из 45» нужно зачеркнуть 6 номеров из имеющихся сорока пяти. Выигрыш может быть получен на 3, 4, 5, 6 зачёркнутых выигрышных номера. Найти вероятность выигрыша на 3 правильно зачёркнутых номера.

►В этой задаче мы имеем дело с сочетаниями, так как порядок зачёркивания номеров роли не играет. Применяем классическое определение вероятности. Здесь $n = C_{45}^6$. Число вариантов правильно зачёркнутых номеров равно C_6^3. Число вариантов неправильно зачёркнутых номеров равно C_{39}^3. По принципу «умножения» $m = C_6^3 \cdot C_{39}^3$. Тогда искомая вероятность равна

$$p = \frac{m}{n} = \frac{C_6^3 \cdot C_{39}^3}{C_{45}^6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40} = \frac{13 \cdot 19 \cdot 37}{11 \cdot 21 \cdot 41 \cdot 43} = \frac{9139}{407253} \approx 0.022. ◄$$

§ 5. Размещения с повторениями

Определение 5.1. *Размещениями с повторениями* из n элементов по k элементов называются соединения, содержащие k элементов, каждый из которых может быть любого из n типов. Предполагается, что элементы каждого из n типов содержатся в исходном множестве в любом нужном количестве (подобно кассе букв для набора текстов).

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и кратностью повторения элементов.

Число размещений с повторениями из n элементов по k элементов обозначается символом V_n^k (читается: « V из n по k ») и вычисляется по формуле

$$V_n^k = n^k . \tag{5.1}$$

►Представим размещение с повторениями в виде слова $x_1x_2\ldots x_k$, состоящего из k букв n различных типов. В качестве первой буквы x_1 можно взять любую из данных n букв. В качестве второй буквы x_2 можно взять также любую из данных n букв и т. д. В качестве k-й буквы можно по-прежнему взять любую из n букв. По принципу «умножения»:

$$V_n^k = \underbrace{nn\ldots n}_{k \text{ сомножителей}} = n^k . ◄$$

Пример 5.1. Из трёх букв a, b, c можно составить следующие слова-размещения с повторениями по две буквы: aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc. Их число: $V_3^2 = 3^2 = 9$.

Пример 5.2. По l воздушным целям запускается k ракет ($k \le l$). Для каждой ракеты равновозможен выбор любой цели независимо от выбора целей для других ракет. Найти вероятность, что ракеты запущены по разным целям.

►По классическому определению вероятности $p = m/n$. Здесь $n = V_l{}^k = =l^k$, ибо всякое размещение ракет по целям есть k-элементное соединение, в котором для каждой ракеты выбирается любая из l целей; $m = A_l^k$, так как, если ракеты распределяются по разным целям, то для 1-й ракеты возможен выбор любой из l целей, для 2-й ракеты – выбор любой из $l-1$ оставшихся целей и т. д. Отсюда $m = l(l-1)(l-2)\ldots[l-(k-1)] = A_l^k$. Тогда $p = A_l^k / l^k$. ◄

Со статистической точки зрения размещения с повторениями определяются следующим образом.

Определение 5.2. *Размещениями с повторениями* из n элементов по k элементов называются выборки объёма k из генеральной совокупности объёма n, произведённые путём выбора с возвращением. При этом при повторении выборок одна выборка от другой может отличаться составом элементов, их порядком и количеством повторений элементов.

Глава 4. **Алгебра вероятностей**

В этой главе изучаются правила, позволяющие по вероятностям одних событий найти вероятности других, выражающихся через данные с помощью операций сложения, умножения, дополнения.

§ 1. Условная вероятность

Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие условной вероятности.

Определение 1.1. Пусть A и B – два события, порождённые опытом E, причём $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Число $\mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(B)$ называется *вероятностью события A при условии, что наступило событие B*, или просто *условной вероятностью* события A и обозначается символом $\mathrm{P}(A/B)$.

Таким образом, по определению

$$\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(B). \tag{1.1}$$

Замечание 1.1. При аксиоматическом определении вероятности формула (1.1) является определением и доказательству не подлежит. Однако при конструктивных определениях вероятности (классическом, геометрическом) она может быть доказана.

Доказательство формулы (1.1) *на основе классического определения вероятности.*

►Пусть опыт приводит к n случаям. Из них n_A, n_B, n_{AB} случаев благоприятствуют соответственно событиям A, B, AB. Для наглядности изобразим случаи точками (рис. 1.1).

По классическому определению $\mathrm{P}(A)=n_A/n$, $\mathrm{P}(B)=n_B/n$, $\mathrm{P}(AB)=n_{AB}/n$. Если событие B произошло, то реализовался один из n_B случаев. Поэтому общее число случаев для события A сократилось с n до n_B случаев. Из них благоприятными для A являются n_{AB} случаев, при которых возможно совместное появление A и B. По классическому определению

$$\mathrm{P}(A/B) = n_{AB}/n_B = (n_{AB}/n)/(n_B/n) = \mathrm{P}(AB)/\mathrm{P}(B).◄$$

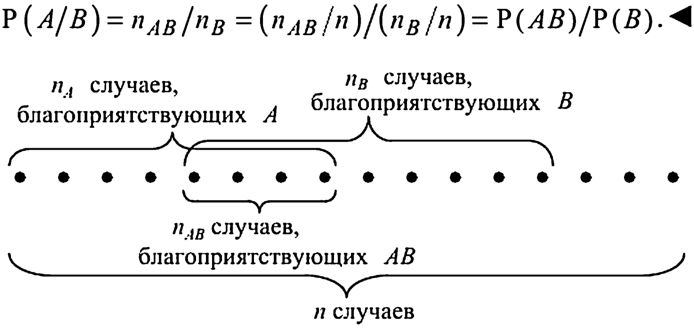


Рис. 1.1. *К доказательству формулы условной вероятности (1.1)*

Пример 1.1. Какова вероятность, что взятая наугад кость домино будет дублем, если известно, что сумма очков на этой кости – чётное число?

►Пусть событие A – взятая кость является дублем, а событие B – сумма очков чётна. Имеем

$$\mathrm{P}\left(A/B\right)=\frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{7/28}{16/28}=\frac{7}{16}.$$

При решении учтено, что из 28 костей домино 16 имеют четную сумму, 7 костей – дубли, и все дубли имеют четную сумму очков.◄

Отметим, что безусловная вероятность события A равна $\mathrm{P}(A) = 7/28$.

§ 2. Правило умножения вероятностей

Из формулы (1.1) вытекает равенство $\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}\left(A/B\right)$. По симметрии вхождения букв в выражение $\mathrm{P}(AB)$ имеет место и вторая формула $\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}\left(B/A\right)$. Обе формулы объединяются в одну и составляют правило (иначе – теорему) умножения вероятностей двух любых событий:

$$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}\left(A/B\right)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}\left(B/A\right), \tag{2.1}$$

которое формулируется следующим образом.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго при условии, что первое произошло.

Формула (2.1) обобщается на случай любого конечного числа событий.

Теорема 2.1 (*теорема умножения вероятностей n любых событий*):

$$\mathrm{P}(A_1A_2\ldots A_n)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}\left(A_2/A_1\right)\mathrm{P}\left(A_3/A_1A_2\right)\ldots\mathrm{P}\left(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}\right). \tag{2.2}$$

►Последовательно применим формулу (2.1), сводя произведение n событий к произведению двух событий:

$$\mathrm{P}(A_1A_2\ldots A_n)=\mathrm{P}\left[(A_1A_2\ldots A_{n-1})A_n\right]=\mathrm{P}\left((A_1A_2\ldots A_{n-1})\cdot\mathrm{P}(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})\right)=$$
$$=\mathrm{P}\left[(A_1A_2\ldots A_{n-2})A_{n-1}\right]\cdot\mathrm{P}(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})=$$
$$=\mathrm{P}(A_1A_2\ldots A_{n-2})\cdot\mathrm{P}(A_{n-1}/A_1A_2\ldots A_{n-2})\cdot\mathrm{P}(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})=$$
$$=\ldots=\mathrm{P}(A_1A_2)\ldots\mathrm{P}(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})=\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).◄$$

Пример 2.1 (задача-шутка). Студент выучил 20 из 25 вопросов к экзамену. Преподаватель случайным образом задал 3 вопроса. Найти вероятность, что студент знает ответы на все 3 вопроса (оценка «5»).

►Применим классическое определение вероятности и формулу (2.2). Пусть A_k – событие, означающее, что на k-й вопрос билета студент ответ знает, $k=1,2,3$. Нас интересует вероятность события $A_1A_2A_3$:

$$\mathrm{P}(A_1A_2A_3)=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}\left(A_2/A_1\right)\mathrm{P}\left(A_3/A_1A_2\right)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}<0.5.◄$$

§ 3. Независимость событий. Правило умножения вероятностей взаимно независимых событий

1. Независимость двух событий. Мы уже видели на примерах, что безусловная и условная вероятности $P(A)$ и $P(A/B)$ в общем случае различны, т. е. наступление события B может изменить вероятность события A. Случай, когда такого изменения не происходит, квалифицируется особо.

Определение 3.1. Событие A называется *не зависящим* от события B, если его условная и безусловная вероятности совпадают, т. е. справедливо равенство

$$P(A/B) = P(A). \tag{3.1}$$

В этом случае общая формула (2.1) упрощается и принимает вид

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{3.2}$$

Она выражает правило умножения вероятностей для двух независимых событий.

Замечание 3.1. Понятие независимости двух событий – взаимное, симметричное. Действительно, запишем формулы (2.1) и (3.2) вместе:

$$P(AB) = P(A)P(B) = P(A)P(B/A) \Rightarrow \tag{3.3}$$

$$P(B/A) = P(B), \tag{3.4}$$

т. е. если A не зависит от B, то и B не зависит от A. Предполагается при этом, что вероятности $P(A)$ и $P(B)$ отличны от нуля.

Замечание 3.1 позволяет сформулировать симметричное определение независимости событий.

Определение 3.2. Два события называются *независимыми*, если условная вероятность любого из них равна безусловной, т. е. выполняются равенства (3.1) и (3.4).

Попутно доказана теорема.

Теорема 3.1. Выполнение соотношения (3.2) является необходимым и достаточным условием независимости двух событий.

►Действительно, результат следует из формулы (3.3). Если справедлива формула (3.2), то из (3.3) мы уже получили (3.4), что означает независимость A и B. Обратно, если A и B независимы, то выполнено равенство (3.1). Тогда формула (2.1) принимает вид (3.2).◄

2. Независимость *n* событий (*n*>2). Понятие независимости n событий опирается на понятие независимости двух событий.

Определение 3.3. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *взаимно независимыми* (иначе – *независимыми в совокупности*), если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого в отдельности.

В этом случае все условные вероятности (в формуле (2.2)) равны безусловным, и формула упрощается:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{3.5}$$

Формула (3.5) выражает правило умножения вероятностей для n взаимно независимых событий. Формула (3.2) является ее частным случаем.

Пример 3.1. Независимо испытываются 3 прибора. Вероятность выхода из строя каждого равна 0.8. По формуле (3.5) находим вероятность выхода из строя всех трёх вместе. Она равна $0.8^3=0.512$.

§ 4. Правила сложения вероятностей

Аксиома сложения вероятностей

$$\mathrm{P}\left(\sum_k A_k\right)=\sum_k \mathrm{P}(A_k) \tag{4.1}$$

выражает правило сложения вероятностей для попарно несовместных событий.

Если же слагаемые события совместны, то формула (4.1) усложняется. Для двух любых событий она имеет вид:

Теорема 4.1. $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$. (4.2)

►Ранее была доказана формула (гл. 1, формула (3.7)) $A+B=A+\overline{A}B$, представляющая сумму двух любых событий как сумму двух несовместных событий. Тогда по аксиоме сложения вероятностей получаем $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\overline{A}B)$. Далее $B=BI=B(A+\overline{A})=AB+\overline{A}B$. Так как события AB и $\overline{A}B$ несовместны, то по той же аксиоме сложения получаем $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(\overline{A}B)$. Отсюда $\mathrm{P}(\overline{A}B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$. Возвращаясь к $\mathrm{P}(A+B)$, получаем $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$.◄

Пример 4.1. Два орудия стреляют в цель независимо. Вероятность попадания каждого орудия равна 0.6. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одного из орудий.

► Пусть A и B – события, означающие попадание в цель первого и второго орудий соответственно. Тогда

$$\mathrm{P}(A+B)=0.6+0.6-0.6^2=1.2-0.36=0.84.$$

Здесь применены формулы (4.2) и (3.2).◄

Для трёх событий формула сложения вероятностей имеет вид:

$$\mathrm{P}(A+B+C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(AB)-\mathrm{P}(AC)-\mathrm{P}(BC)+\mathrm{P}(ABC). \tag{4.3}$$

► $\mathrm{P}(A+B+C)=\mathrm{P}\left[(A+B)+C\right]=\mathrm{P}(A+B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}\left[(A+B)C\right]=$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(AC+BC)=$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ACBC)=$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(AB)-\mathrm{P}(AC)-\mathrm{P}(BC)+\mathrm{P}(ABC)$.

Здесь применена два раза формула (4.2).◄

Пример 4.2. Решим задачу из примера 4.1 для случая трёх орудий.

►По формуле (4.3) находим

$$\mathrm{P}(A+B+C)=$$

$$=0.6+0.6+0.6-0.6^2-0.6^2-0.6^2+0.6^3=1.8-1.08+0.216=0.936.◄$$

Соотношения (4.2) и (4.3) могут быть обобщены [4] :

Теорема 4.2 (*сложения вероятностей для n взаимно независимых событий*).

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)=1-\prod_{k=1}^{n}\left[1-\mathrm{P}(A_k)\right]. \qquad (4.4)$$

§ 5. Формула полной вероятности и формула Байеса

1. Формула полной вероятности. Пусть событие A может наступить только с одним из n попарно несовместных событий H_1, H_2, … H_n, составляющих полную группу:

$$H_i H_k = \varnothing \text{ при } i \neq k; \quad H_1+\ldots+H_n = I.$$

Эти события называются *гипотезами*. Тогда

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A/H_1)+\ \ldots\ +\mathrm{P}(H_n)\mathrm{P}(A/H_n). \qquad (5.1)$$

Так как сумма вероятностей гипотез равна 1:

$$\mathrm{P}(H_1)+\ldots+\mathrm{P}(H_n)=1,$$

то формула (5.1) может рассматриваться как усредняющая условные вероятности по вероятностям гипотез.

Формула (5.1) называется *формулой полной*, иначе – *средней вероятности*.

►$A=AI=A(H_1+\ldots+H_n)=AH_1+\ldots+AH_n$. События AH_1, …, AH_n – попарно несовместны, поэтому по аксиоме сложения вероятностей получаем

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(AH_1+\ \ldots\ +AH_n)=\mathrm{P}(AH_1)+\ \ldots\ +\mathrm{P}(AH_n).$$

Далее применяем правило умножения вероятностей для двух любых событий:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A/H_1)+\ \ldots\ +\mathrm{P}(H_n)\mathrm{P}(A/H_n). \blacktriangleleft$$

Пример 5.1. Партия продукции поставлена двумя заводами. 1-й завод поставил 40 % продукции, 2-й – 60 %. Вероятность брака на 1-м заводе равна 0.008, а на 2-м – 0.004. Найти вероятность брака всей партии.

►Применяем формулу полной вероятности, усредняя все условные вероятности брака. Введём события: A – взятое для контроля изделие – бракованное, H_1, H_2 – гипотезы, означающие, что изделие изготовлено соответственно 1-м и 2-м заводами. Тогда по условию задачи имеем:

$$\mathrm{P}(H_1)=0.4; \mathrm{P}(H_2)=0.6; \ \mathrm{P}(A/H_1)=0.008; \ \mathrm{P}(A/H_2)=0.004;$$

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(H_1)\mathrm{P}(A/H_1)+\mathrm{P}(H_2)\mathrm{P}(A/H_2)=$$

$$=0.4\cdot 0.008+0.6\cdot 0.004=0.0032+0.0024=0.0056. \blacktriangleleft$$

2. Формула Байеса (англ. математик, 1702–1761). При выводе формулы Байеса сохраняются предположения, принятые в п. 1° при выводе формулы полной вероятности, и ставится дополнительное условие: при проведении опыта событие A произошло. Эта новая информация позволяет переоценить первоначальные вероятности гипотез.

По формуле (1.1) для условной вероятности имеем $\mathrm{P}(H_i/A) = \mathrm{P}(H_iA)/\mathrm{P}(A)$. Числитель представим по формуле (2.1) для вероятности произведения событий, а знаменатель – по формуле (5.1) полной вероятности. Тогда получаем

$$P\left(H_i/A\right)=\frac{P(H_i)P\left(A/H_i\right)}{P(H_1)P\left(A/H_1\right)+\ldots+P(H_n)P\left(A/H_n\right)},\ i=1,2,\ldots,n. \qquad (5.2)$$

Формула (5.2) называется формулой Байеса, иначе – теоремой гипотез. Исходные вероятности гипотез $P(H_1), \ldots, P(H_n)$ называются *априорными*, т. е. доопытными, а вероятности, найденные по формуле Байеса, – *апостериорными*, т. е. послеопытными.

Пример 5.2. При постановке диагноза высказано предположение о наличии у больного болезни A (событие A) одной из двух разновидностей H_1 или H_2 (гипотезы H_1 и H_2). Экспертно оценены вероятности этих гипотез: $P(H_1) = 0.4$; $P(H_2) = 0.6$. Применяемый тест (анализ) обнаруживает болезнь A в 80% случаев при разновидности H_1 и в 60% случаев при разновидности H_2. Проведённый тест подтвердил предположение о болезни. Какая разновидность болезни вероятнее после проведения теста?

► По формуле полной вероятности находим вероятность наличия болезни у пациента:

$$P(A)=P(H_1)P\left(A/H_1\right)+P(H_2)P\left(A/H_2\right)=0.4\cdot0.8+0.6\cdot0.6=0.68.$$

По формуле Байеса находим:

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P(H_1)P\left(A/H_1\right)}{P(A)}=\frac{0.4\cdot0.8}{0.68}=\frac{32}{68}=\frac{8}{17};$$

$$P\left(H_2/A\right)=\frac{P(H_2)P\left(A/H_2\right)}{P(A)}=\frac{0.6\cdot0.6}{0.68}=\frac{36}{68}=\frac{9}{17}.$$

Наличие разновидности H_2 болезни оказалось вероятнее и после теста. ◄

§ 6. Схема Бернулли проведения независимых испытаний. Биномиальная вероятность

Схема Бернулли проведения независимых испытаний состоит в том, что независимо проводится n испытаний (опытов), в каждом из которых наблюдаемое событие A (успех) появляется с вероятностью p ($0<p<1$) и не появляется с вероятностью $q=1-p$.

Эта схема испытаний широко применяется на практике: независимые испытания n одинаковых приборов, событие A – выход из строя прибора; n выстрелов по цели из одного или разных орудий в равных условиях и независимо, событие A – попадание в цель; n независимых выборов продукции предприятия для статистического контроля, событие A – брак изделия и т. д.

При проведении испытаний по схеме Бернулли ставится *задача* – найти вероятность $P_{n,k}(p)$ того, что в результате проведённых n независимых испытаний событие A появится точно k раз, безразлично в каком порядке.

Справедлива формула [13]:

$$P_{n,k}(p)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,\ldots,n, 0<p<1. \qquad (6.1)$$

Вероятности $P_{n,k}(p)$ – более простая запись: $P_{n,k}$ – называются *биномиальными вероятностями*, поскольку являются членами разложения бинома $(q+p)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$.

Пример 6.1. Вероятность попадания в цель для каждой из трёх ракет равна p = 0.8. Ракеты запускаются независимо одна от другой. Требуется найти вероятности всех случаев попадания в цель.

►$P_{3,0} = q^3 = 0.2^3 = 0.008$ – вероятность трёх промахов.

$P_{3,1} = 3pq^2 = 3\cdot 0.8\cdot 0.2^2 = 0.096$ – вероятность одного попадания.

$P_{3,2} = 3p^2q = 3\cdot 0.8^2\cdot 0.2 = 0.384$ – вероятность двух попаданий.

$P_{3,3} = p^3 = 0.8^3 = 0.512$ – вероятность трёх попаданий.◄

Замечание 6.1. При больших n справедливы приближенные равенства:

1. $P_{n,k}(p) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{np}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – локальная приближенная формула Лапласа.

2. $P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi_0\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$, – интегральная приближенная формула Лапласа. Функция $\Phi_0(x)$, определяемая равенством

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, называется *нормированной функцией Лапласа.*

Таблица значений функции $\Phi_0(x)$ приведена в приложении 2.

Замечание 6.2. Точность приведённых соотношений улучшается с ростом npq. Рекомендуется использовать эти формулы при $npq \ge 10$.

Пример 6.2. Монету бросают 100 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет ровно 50 раз?

►Здесь $npq = 100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 25 > 10$. И тогда $P_{100,50}(p) \approx \frac{1}{\sqrt{25}}\varphi\left(\frac{50-50}{\sqrt{25}}\right) \approx 0{,}08$.◄

Пример 6.3. Монету бросают 100 раз. Какова вероятность того, что число выпадений герба будет от 40 до 50?

►Используем интегральную формулу Лапласа. Здесь $k_1 = 40, k_2 = 50$ и тогда

$$P_{100}(40 \le k \le 50) \approx \Phi_0\left(\frac{50-50}{\sqrt{25}}\right) - \Phi_0\left(\frac{40-50}{\sqrt{25}}\right) = \Phi_0(0) - \Phi_0(-2) = 0 + \Phi_0(2) =$$

$= 0 + 0{,}477 = 0{,}477$. так как $\Phi_0(0) = 0$, *а* $\Phi_0(-2) = -\Phi_0(2)$. ◄

§ 7. Приближённая формула Пуассона для вычисления биномиальной вероятности

Приближённая формула Пуассона имеет вид

$$P_{n,k}(p) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}; a = np; k = 0, 1, 2, \dots . \quad (7.1)$$

Эта формула применяется при больших n и малых p. Погрешность формулы (7.1) имеет порядок $1/n$, а сама формула (7.1) является следствием предельной теоремы Пуассона [4].

Теорема Пуассона. Если $p_n = a/n$, где a – положительная постоянная, то при любом фиксированном k

$$P_{n,k}(p_n) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{a^k}{k!} e^{-a} . \quad (7.2)$$

Пример 7.1. Брак продукции $p = 0.02$. Произведено $n=100$ изделий. Найти вероятность, что в данной партии не более одного бракованного изделия.

►Искомая вероятность есть $P_{n,0} + P_{n,1}$. Применяем приближенную формулу Пуассона (7.1). При этом $n=100$; $p=0.02$; $a=np=2$:

$$P_{n,0} + P_{n,1} \approx \frac{a^0}{0!} e^{-a} + \frac{a^1}{1!} e^{-a} = (1+a)e^{-a} = 3e^{-2} \approx 3 \cdot 0.1353 = 0.4059 \approx 0.4 .◄$$

Глава 5. **Одномерная случайная величина**

Случайная величина – третье фундаментальное понятие теории вероятностей после понятий «случайное событие» и «вероятность». Случайные величины могут одномерными и многомерными.В этой главе рассматриваются одномерные случайные величины, которые в пределах главы будут называться просто случайными величинами.

§ 1. Определение случайной величины

Определение 1.1. *Случайной величиной* X называется числовая фун-кция, определённая на пространстве элементарных событий Ω, которая каждому элементарному событию ω ставит в соответствие некоторое число.

При этом предполагаются определёнными вероятности событий $X<x$ для любых вещественных чисел x.

Таким образом, случайная величина – это вещественная переменная X, значения которой определяются исходами эксперимента E. Значения случайной величины – случайные числа. Случайные величины обычно обозначаются последними буквами латинского алфавита X, Y, Z.

Примеры реальных случайных величин:

1. Число выпавших очков при бросании игральной кости.

2. Число бракованных изделий партии.

3. Время работы прибора до первого отказа.

4. Результат измерения.

В детерминированном подходе устанавливается жесткая функциональная связь между аргументом и функцией, а для случайной величины можно априорно указать лишь вероятности попадания её значений в некоторое числовое множество, например, $X<x$, $a \le X \le b$, $X=a$ и т. д.

Определение 1.2. *Законом распределения* случайной величины называется любое правило, указывающее вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений.

Таким исчерпывающим законом (как говорят, полной вероятностной характеристикой) случайной величины является её функция распределения, обозначаемая $F(x)$ или $F_X(x)$.

Замечание 1.1. Вместо термина «закон распределения» часто употребляют более простой термин «распределение».

Определение 1.3. *Функцией распределения* случайной величины X называется функция $F_X(x)$, которая для любого вещественного числа x равна вероятности события $X<x$. Таким образом, по определению

$$F_X(x)=\mathrm{P}(X<x). \qquad (1.1)$$

Свойства функции распределения

1. $F(-\infty)=0$, так как $F(-\infty)=\mathrm{P}(X<-\infty)=\mathrm{P}(\varnothing)=0$.

2. $F(+\infty)=1$, так как $F(+\infty)=\mathrm{P}(X<+\infty)=\mathrm{P}(I)=1$.

3. $F(x)$ – неубывающая функция.

4. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке x: $F(x-0)=F(x)$ [6, 7].

5. $\mathrm{P}(a \le X < b)=F(b)-F(a)$.

Докажем свойства **3** и **5**.

►**3.** Рассмотрим $\forall x$ и пусть $\Delta x>0$. Рассмотрим событие $X<x+\Delta x$. Оно является суммой двух несовместных событий $X<x$ и $x \le X < x+\Delta x$. Тогда $\mathrm{P}(X<x+\Delta x)=\mathrm{P}(X<x)+\mathrm{P}(x \le X<x+\Delta x)$. Так как $\mathrm{P}(x\le X<x+\Delta x)\ge 0$, то $\mathrm{P}(X<x+\Delta x)\ge \mathrm{P}(X<x)$, т. е. $F(x+\Delta x)\ge F(x)$.

5. Событие $X<b$ есть сумма двух несовместных событий $X<a$ и $a\le X<b$. Тогда по аксиоме сложения получаем $\mathrm{P}(X<b)=\mathrm{P}(X<a)+\mathrm{P}(a\le X<b)$ или $F(b)=F(a)+\mathrm{P}(a\le X<b)$. Отсюда $\mathrm{P}(a\le X<b)=F(b)-F(a)$.◄

Замечание 1.2. Первые 4 свойства функции распределения являются характеристическими. Это означает, что всякая функция $F(x)$, обладающая первыми четырьмя свойствами, может быть функцией распределения некоторой случайной величины X [6].

Пример 1.1. ►Функция $F_1(x)=e^{-x}$ не может быть функцией распределения, так как $F_1(+\infty)=0$, а не 1. Функция $F_2(x)=0.5+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$ может быть функцией распределения, так как условия 1– 4 выполнены.◄

Будем различать дискретные и непрерывные случайные величины.

§ 2. Дискретная случайная величина

Определение 2.1. Случайная величина называется д и с к р е т н о й, иначе – д и с к р е т н о г о т и п а, если множество её значений может быть занумеровано натуральными числами (т. е. оно конечное или счётное).

Первые два примера предыдущего параграфа являются примерами реальных дискретных случайных величин.

Закон распределения дискретной случайной величины удобно задать с помощью формулы

$$p_k = \mathrm{P}(X = x_k),\ k = 1, 2, \dots, \tag{2.1}$$

которая определяет вероятности принятия случайной величиной её отдельных значений x_k.

Последовательность пар (x_1, p_1), (x_2, p_2), … образует так называемый *ряд распределения*.

В случае конечного числа значений ряд распределения удобно оформить в виде *таблицы распределения*.

X	x_1	x_2	…	…	x_n
P	p_1	p_2	…	…	p_n

Таблицу распределения наглядно можно представить в виде *полигона* (*многоугольника*) *распределения*. Для этого точки (x_k, p_k) плоскости Oxy соединяются отрезками (рис. 2.1). Заметим, что $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, ибо события $(X=x_k)$, $k = 1, \dots, n$, попарно несовместны и образуют полную группу.

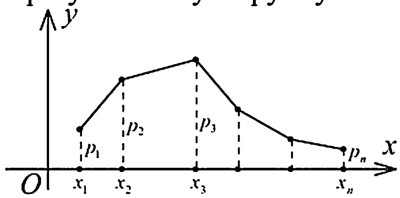


Рис. 2.1. *Полигон распределения*

Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k\,. \tag{2.2}$$

Здесь суммирование ведётся по всем k, для которых $x_k < x$.

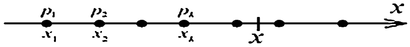


Рис.2.2. *Дискретное распределение масс на оси*

Дискретное распределение вероятностей имеет механическую аналогию дискретного распределения масс p_k в точках x_k вещественной оси (рис. 2.2); общая сумма масс равна единице. Функция распределения $F(x)$ есть сумма масс, расположенных левее точки x.

Графиком функции распределения дискретной случайной величины является ступенчатая линия со скачками p_k в точках x_k (рис. 2.3).

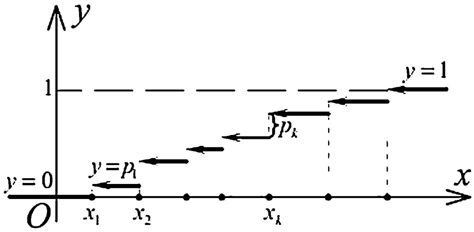


***Рис. 2.3**. График функции распределения дискретной случайной величины*

Пример 2.1. X – *индикатор события A*, равный 1, если событие A произошло, и 0, если A не произошло; $\mathrm{P}(A)=p$. Его ряд распределения: $(0, q)$, $(1, p)$ состоит из двух пар.

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } & x \le 0, \\ q \text{ при } & 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } & x > 1. \end{cases}$$

§ 3. Числовые характеристики дискретной случайной величины

1. Понятие числовой характеристики случайной величины.

Определение 3.1. *Числовыми характеристиками* случайной величины называются специальные числа, характеризующие отдельные свойства закона распределения.

Наиболее употребительны числовыми характеристики: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, мода.

2. Математическое ожидание.

Определение 3.2. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины X называется сумма произведений значений данной величины на вероятности этих значений. Обозначения: m_X, $\mathrm{M}X$, $\mathrm{M}[X]$. Итак, по определению

$$\mathrm{M}X = \sum_k x_k p_k \,. \tag{3.1}$$

Если число возможных значений случайной величины X равно n, то сумма в формуле (3.1) содержит n слагаемых. Если же это число возможных значений X бесконечно (но счётно), то сумма (3.1) есть числовой ряд, причём этот ряд предполагается абсолютно сходящимся. Иначе говорят, что случайная величина X не имеет математического ожидания. Абсолютная сходимость ряда обеспечивает однозначное определение математического ожидания, ибо порядок суммирования в данном случае безразличен.

Вероятностный смысл математического ожидания состоит в том, что оно является средним значением случайной величины, точнее – средневзвешенным значением с весами, равными вероятностям p_k значений случайной величины.

В самом деле,

$$x_{\text{среднее}} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k}{p_1 + p_2 + \ldots + p_k} = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \text{, так как } \sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

С точки зрения механической аналогии математическое ожидание является абсциссой центра масс p_k, расположенных на оси в точках x_k; при этом общая сумма масс равна 1.

Свойства математического ожидания

1) Математическое ожидание постоянной, т. е. неслучайной величины C равно этой постоянной:

$$\mathrm{M}C = C. \tag{3.2}$$

2) Постоянный, т. е. неслучайный множитель можно вынести за знак математического ожидания:

$$\mathrm{M}[CX] = C\mathrm{M}[X]. \tag{3.3}$$

3) Математическое ожидание суммы n случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$\mathrm{M}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}X_k. \tag{3.4}$$

4) Математическое ожидание произведения n взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$\mathrm{M}\left[\prod_{k=1}^{n} X_k\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{M}X_k. \tag{3.5}$$

При этом по определению случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ называются *взаимно независимыми*, если взаимно независимыми являются события $X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n$ для любых вещественных $x_1, \ldots, x_n$.

► Свойства1–2 легко доказываются:

Свойство 1. Постоянная величина C рассматривается как случайная величина, принимающая единственное значение с вероятностью 1. Тогда по определению математического ожидания $\mathrm{M}C = C \cdot 1 = C$.

Свойство 2. $\mathrm{M}[CX] = \sum_k (Cx_k)\mathrm{P}(CX = Cx_k) = C\sum_k x_k \mathrm{P}(X = x_k) = C\mathrm{M}X$, ибо $\mathrm{P}(CX = Cx_k) = \mathrm{P}(X = x_k)$ при $C \neq 0$. При $C=0$ свойство 2, очевидно, верно.

Свойства 3 и 4 будут доказаны позднее в гл. 6.◄

Пример 3.1. Испытываются независимо 3 прибора на надёжность. Вероятность выхода из строя каждого равна $p=0.8$. Найти математическое ожидание числа X вышедших из строя приборов.

► Имеем схему испытаний Бернулли, поэтому случайная величина $\overset{\circ}{X}$ распределена по закону, для которого вероятности $p_k=P_{n,k}$ являются биномиальными. Тогда получаем следующий ряд распределения:

$$P(X=0)=P_{3,0}=0.2^3=0.008;\ P(X=1)=P_{3,1}=3\cdot0.8\cdot0.2^2=0.096;$$
$$P(X=2)=P_{3,2}=3\cdot0.8^2\cdot0.2=0.384;\ P(X=3)=P_{3,3}=0.8^3=0.512.$$

Имея ряд распределения, вычисляем m_X:

$$m_X=0\cdot0.008+1\cdot0.096+2\cdot0.384+3\cdot0.512=2.4 ◄$$

3. Дисперсия. Исследователей интересует, насколько сильно может отклоняться случайная величина от своего среднего значения.

Определение 3.3. *Отклонением* случайной величины X от её математического ожидания m_X называется разность между X и m_X:

$$\overset{\circ}{X}=X-m_X. \tag{3.6}$$

Эта случайная величина $\overset{\circ}{X}$ называется также *центрированной* случайной величиной. Заметим, что

$$M\overset{\circ}{X}=MX-Mm_X=m_X-m_X=0, \tag{3.7}$$

поэтому $M\overset{\circ}{X}$ не может служить мерой среднего отклонения.

Определение 3.4. *Дисперсией* случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения от математического ожидания.

Обозначения дисперсии: D_X, DX, $D[X]$. Таким образом,

$$D_X=M[(X-m_X)^2]=M[\overset{\circ}{X}]^2. \tag{3.8}$$

Заметим, что $(X-m_X)^2$ – простейший пример функции случайной величины X. Доказано [6], что если $\varphi(x)$ – функция, определённая для всех значений дискретной случайной величины X, то

$$M[\varphi(x)]=\sum_k \varphi(x_k)p_k. \tag{3.9}$$

При этом, если (3.9) – ряд, то предполагается, что он абсолютно сходится. Здесь $P(X=x_k)=p_k$ – закон распределения X.

Основываясь на формуле (3.9), находим формулу для дисперсии дискретной случайной величины:

$$D_X=\sum_k (x_k-m_X)^2 p_k. \tag{3.10}$$

Заметим также, что дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины X, что в сравнительных целях неудобно, поэтому вводится числовая характеристика отклонений с той же размерностью, что и X.

Определение 3.5. *Средним квадратичным отклонением* случайной величины X называется корень из её дисперсии.

Его обозначения: σ_X, σX, $\sigma[X]$. Таким образом,

$$\sigma_X=\sqrt{D_X}. \tag{3.11}$$

Дисперсия и среднее квадратичное отклонение – это меры рассеяния, разброса случайной величины относительно математического ожидания.

Свойства дисперсии

1) Дисперсия постоянной равна нулю

$$D[C] = 0. \qquad (3.12)$$

2) Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его предварительно в квадрат:

$$D[CX] = C^2 D[X]. \qquad (3.13)$$

3) Формула для вычисления дисперсии

$$D_X = \mathrm{M}[X^2] - m_X{}^2. \qquad (3.14)$$

При этом $\mathrm{M}[X^2]$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{M}[X^2] = \sum_k x_k{}^2 p_k, \qquad (3.15)$$

являющейся частным случаем (3.9).

4) Дисперсия суммы n попарно независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} DX_k. \qquad (3.16)$$

►Свойства 1–3 легко доказываются:

1. $DC = \mathrm{M}[(C-\mathrm{M}C)^2] = \mathrm{M}[(C-C)^2] = \mathrm{M}0 = 0.$

2. $D[CX] = \mathrm{M}[(CX-\mathrm{M}CX)^2] = \mathrm{M}[C^2(X-m_X)^2] = C^2\mathrm{M}[(X-m_X)^2] = C^2DX.$

3. $DX = \mathrm{M}[(X-m_X)^2] = \mathrm{M}[X^2 - 2m_X X + m_X{}^2] = \mathrm{M}[X^2] - 2\,m_X\mathrm{M}X + \mathrm{M}[m_X{}^2] =$
$= \mathrm{M}[X^2] - 2\,m_X{}^2 + m_X{}^2 = \mathrm{M}[X^2] - m_X{}^2.$◄

Во всех трёх доказательствах использованы свойства математического ожидания. Свойство 4 докажем в гл. 6, § 7.

Пример 3.2. Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X из примера 3.1.

► Найдём $\mathrm{M}[X^2]$ по формуле (3.15):

$$\mathrm{M}[X^2] = 0^2\cdot 0.008 + 1^2\cdot 0.096 + 2^2\cdot 0.394 +$$
$$+ 3^2\cdot 0.512 == 0.096 + 1.536 + 4.608 = 6.24.$$

Применяем формулу (3.14):

$D_X = \mathrm{M}[X^2] - m_X^2 = 6.24 - 2.4^2 = 6.24 - 5.76 = 0.48;\ \sigma_X = \sqrt{0.48} \approx 0.69$.◄

4. Мода.

Определение 3.6. *Модой дискретной случайной величины* называется её значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями.

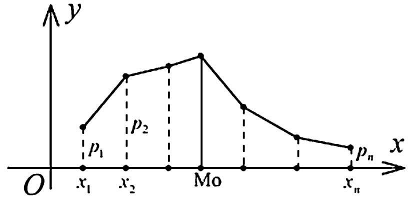


Рис. 3.1. *Иллюстрация понятия «мода»*

Обозначения моды: Mo; MoX. Графически мода отвечает вершине полигона распределения (рис. 3.1).

Существуют одномодальные (унимодальные) и многомодальные (полимодальные) распределения.

5. Начальные и центральные моменты.

Определение 3.7. *Начальным моментом порядка* k называется $\mathrm{M}[X^k] = \alpha_k$. *Центральным моментом порядка* k называется $\mathrm{M}[(X-m_X)^k] = \mu_k$.

Математическое ожидание – это начальный момент 1-го порядка. Дисперсия – центральный момент 2-го порядка. Центральные моменты могут быть выражены через начальные. Примером является формула (3.14):

$$\mu_2 = D_X = \mathrm{M}[X^2] - m_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2.$$

Начальные и центральные моменты – это тоже числовые характеристики случайной величины.

§ 4. Производящая функция (вероятностей)

Метод производящих функций достаточно эффективен в нахождении моментов дискретных случайных величин с целыми неотрицательными значениями.

Определение 4.1. *Производящей функцией вероятностей* (или *производящей функцией*) для дискретного распределения, определяемого формулой

$$\mathrm{P}(X = k) = p_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

называется сумма степенного ряда, коэффициентами которого являются вероятности закона распределения:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k . \tag{4.2}$$

Так как $p(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, то ряд (4.2) сходится в области $|x| \le 1$.

Дифференцируем ряд (4.2) почленно дважды: $p'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k x^{k-1}$. Тогда

$$p'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = m_X = \alpha_1; \tag{4.3}$$

$$p''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k x^{k-2}\ ;\ \ p''(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=2}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=2}^{\infty} kp_k = \alpha_2 - \alpha_1 .$$

Далее, $D_X = \alpha_2 - \alpha_1^2 = (\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 - \alpha_1^2 = p''(1) + p'(1) - \left[p'(1)\right]^2$.

Таким образом,

$$D_X = p''(1) + p'(1) - \left[p'(1)\right]^2 . \tag{4.4}$$

Формулы (4.3) и (4.4) будут использованы далее для нахождения m_X и D_X рассматриваемых распределений.

§ 5. Биномиальное, Пуассона, геометрическое распределения

Указанные три распределения наиболее употребительны для описания реальных дискретных распределений.

1. Биномиальное распределение. Биномиальный закон распределения определяется формулой

$$\mathrm{P}(X=k)=P_{n,k}=C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{5.1}$$

$$k=0,1,\ldots,n;\ 0<p<1;\ q=1-p;$$

$C_n^k=\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k.

Случайная величина X, распределенная по биномиальному закону, является числом появлений события A (успехов) с вероятностью p в схеме Бернулли проведения n независимых испытаний. Например, X – число выпадений орла при n бросаниях монеты ($p=1/2$), число вышедших из строя приборов при независимых испытаниях n приборов на надёжность, число попаданий в цель при n независимых выстрелах и т. д.

Производящей функцией биномиального закона будет

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} x^k=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (px)^k q^{n-k}=(px+q)^n. \tag{5.2}$$

Для неё $p'(x)=np(px+q)^{n-1}$; $p''(x)=n(n-1)p^2(px+q)^{n-2}$;

$$p'(1)=np(p+q)^n=np,\ \text{так как}\ \ p+q=1;\quad p''(1)=n(n-1)p^2.$$

Подставляя $p'(1)$ и $p''(1)$ в формулы (4.3), (4.4), находим

$$m_X=np; \tag{5.3}$$

$$D_X=npq. \tag{5.4}$$

Пример 5.1. В боевой операции участвуют 50 самолётов. Вероятность гибели самолёта в результате обстрела противником равна 0.06. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа X сбитых самолётов.

► Имеем схему испытаний Бернулли, следовательно, X – биномиальная случайная величина. Применяем формулы (5.3) и (5.4):

$$m_X=50\cdot 0.06=3;\ D_X=50\cdot 0.06\cdot 0.94=2.82;\ \sigma_X=\sqrt{2.82}\approx 1.68.◄$$

2. Распределение Пуассона. Закон распределения Пуассона определяется формулой

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a}; \tag{5.5}$$

$k=0,1,2,\ldots$; $a>0$; a – параметр распределения.

В силу предельной теоремы Пуассона (гл. 4, § 7) – распределение Пуассона – предельное для биномиального при указанных там условиях.

Закон Пуассона широко применяется на практике для описания реальных случайных величин, например, числа атомов радиоактивного вещества, распавшихся за время T; числа заявок, поступивших за время T в систему массового обслуживания; числа автомашин, проследовавших через контрольный пункт за время T; числа опечаток в большом тексте; числа бракованных изделий в большой партии и т. д. Во всех этих примерах предполагается, что среднее значение за время T для рассматриваемой случайной величины известно.

Производящей функцией закона Пуассона будет

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}e^{-a}x^k=e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^k}{k!}=e^{-a}e^{ax}=e^{a(x-1)}; \qquad (5.6)$$

Для нее $p'(x)=ae^{a(x-1)}$; $p'(1)=a$; $p''(x)=a^2e^{a(x-1)}$; $p''(1)=a^2$. Подставляя $p'(1)$ и $p''(1)$ в формулы (4.3) и (4.4), получаем

$$m_X=D_X=a. \qquad (5.7)$$

Пример 5.2. Число X пожаров в городе за сутки – случайная величина, распределенная по закону Пуассона и имеющая среднее значение $m_X=2$. Найти вероятность, что число пожаров в сутки будет меньше двух.

►По формулам (5.5) и (5.7) находим закон распределения X: $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{2^k}{k!}e^{-2}$. Отсюда

$$\mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=e^{-2}+2e^{-2}+2e^{-2}=5e^{-2}\approx 0.68.◄$$

3. Геометрическое распределение. Геометрическое распределение определяется формулой

$$\mathrm{P}(X=k)=pq^{k-1},\ k=1,2,\dots;\ 0<p<1;\ q=1-p. \qquad (5.8)$$

Случайная величина X, распределенная по геометрическому закону, есть число независимых испытаний до первого появления события A (успеха), которое в каждом испытании появляется с вероятностью p. Такая схема испытаний и сам закон распределения называются *геометрическими*, ибо вероятности (5.8) являются членами геометрической прогрессии.

Примерами реальных случайных величин, распределённых по геометрическому закону, являются число испытаний прибора до первого отказа, число бросаний монеты до первого выпадения орла, число произведенных деталей до первого брака и т. д.

Производящей функцией геометрического закона является

$$p(x)=\sum_{k=1}^{\infty}pq^{k-1}x^k=px\sum_{k=1}^{\infty}(qx)^{k-1}=\frac{px}{1-qx}; \qquad (5.9)$$

$$p'(x)=\frac{p}{(1-qx)^2};\ p''(x)=\frac{2pq}{(1-qx)^3};\ p'(1)=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p};\ p''(1)=\frac{2pq}{(1-q)^3}=\frac{2q}{p^2}.$$

Подставляя $p'(1)$ и $p''(1)$ в формулы (4.3), (4.4), находим:

$$m_X = 1/p, \qquad (5.10)$$

$$D_X = q/p^2. \qquad (5.11)$$

Пример 5.3. Вероятность брака партии изделий равна $p = 0.1$.

1) Сколько нужно проверить деталей в среднем до первого обнаружения брака? 2) Чему равна вероятность $\mathrm{P}(X < m_X + \sigma_X)$?

► 1) По формуле (5.10) получаем $m_X = 1/0.1 = 10$.

2) $\mathrm{P}(X < m_X + \sigma_X) = \mathrm{P}\left(X < 10 + \sqrt{0.9}/0.1\right) = \mathrm{P}(X < 19.49) = \mathrm{P}(X \le 19) =$

$$= \sum_{k=1}^{19} pq^{k-1} = p\frac{1-q^{20}}{1-q} = 1 - q^{20} = 1 - (0.9)^{20} \approx 1 - 0.12 = 0.88. ◄$$

§ 6. Непрерывная случайная величина

Само название случайной величины – *непрерывная* – говорит о том, что её значения непрерывно заполняют промежуток вещественной оси. Перечислить все значения такой случайной величины и задать их вероятности невозможно. Непрерывную случайную величину задают с помощью *плотности распределения вероятностей* подобно физической плотности распределения материи. Примерами реальных непрерывных случайных величин являются: результат измерения, время разговора по телефону, ошибка округления и т. д.

Определение 6.1. Случайная величина X называется *непрерывной*, если существует неотрицательная функция $f(x)$, называемая *плотностью распределения вероятности*, такая, что вероятность попадания случайной величины в промежуток $[a, b]$ равна определённому интегралу от плотности по этому промежутку:

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (6.1)$$

Там, где это не вызывает недоразумений, плотность распределения вероятности короче называют *плотностью распределения*, *плотностью вероятности*, *плотностью*.

Замечание 6.1. Для непрерывной случайной величины вероятность события $X=c$, где c – фиксированное число, равна нулю, так как

$$\mathrm{P}(X = c) = \mathrm{P}(c \le X \le c) = \int_c^c f(x)dx = 0.$$

Таким образом, событие $X=c$ является возможным, но имеющим вероятность нуль. Соответственно этому противоположное событие имеет вероятность 1, но не является достоверным. Отсюда также следует, что

$$\mathrm{P}\left(X \in [a,b]\right) = \mathrm{P}\left(X \in (a,b)\right) = \mathrm{P}\left(X \in [a,b)\right) = \mathrm{P}\left(X \in (a,b]\right).$$

Свойства плотности распределения

Это неотрицательная, заданная на всей вещественной оси функция, нормированная условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \mathrm{P}(-\infty < X < +\infty) = \mathrm{P}(I) = 1. \tag{6.2}$$

В приложениях можно ограничиться кусочно-непрерывными плотностями, т. е. функциями, ограниченными на всей вещественной оси и имеющими конечное число точек разрыва на каждом конечном промежутке. В общей формуле (6.1) содержится и формула для функции распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \mathrm{P}(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{6.3}$$

Эта функция является первообразной для плотности $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x). \tag{6.4}$$

Интеграл (6.1) численно равен площади криволинейной трапеции под кривой плотности в пределах промежутка $[a, b]$ (рис. 6.1). Он равен вероятности попадания случайной величины в этот промежуток.

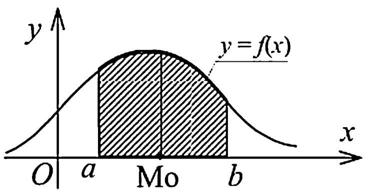


Рис. 6.1. *Геометрическая иллюстрация вероятности попадания случайной величины в промежуток*

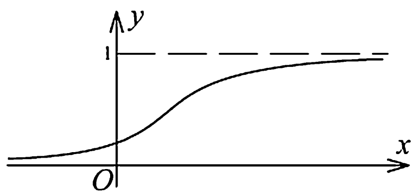


Рис. 6.2. *Типовой график функции распределения непрерывной случайной величины*

Часто плотность называют *дифференциальным*, а функцию распределения – *интегральным законами распределения* непрерывной случайной величины. Обычно предпочитают дифференциальный закон, ибо кривая плотности наглядно показывает, в какие промежутки более вероятно, а в какие – менее вероятно попадание значений случайной величины (по величине площади криволинейной трапеции). Наглядно видны и другие свойства закона, например, симметричность.

График функции распределения непрерывной случайной величины – непрерывная кривая (рис. 6.2), идущая от вещественной оси к прямой $y=1$.

§ 7. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение 7.1. *Математическим ожиданием* непрерывной случайной величины X называется интеграл

$$\mathrm{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx. \qquad (7.1)$$

Этот интеграл предполагается абсолютно сходящимся. В противном случае, т. е. когда интеграл расходится или сходится условно, считают, что случайная величина X не имеет математического ожидания.

Вероятностный смысл формулы (7.1) такой же, что и для дискретной случайной величины. Это её среднее значение, точнее – средневзвешенное значение с весовой функцией, равной плотности вероятности. Напомним, что средневзвешенным значением функции $\varphi(x)$ с весовой функцией $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ является отношение

$$\varphi(x)_{\text{ср.взв.}} = \int_a^b \varphi(x) f(x)dx \Big/ \int_a^b f(x)dx. \qquad (7.2)$$

Если $\varphi(x) = x$, $a = -\infty$, $b = +\infty$, $\int_a^b f(x)dx = 1$, то формула (7.2) принимает вид (7.1).

Свойства математического ожидания, сформулированные в § 3, формулы (3.2) – (3.5) остаются справедливыми и для непрерывной случайной величины.

Определение дисперсии случайной величины X, данное в § 3 с помощью формулы (3.8):

$$D_X = \mathrm{M}[(X-m_X)^2] = \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}{}^2],$$

является общим как для дискретной, так и для непрерывной случайной величины. Конкретизируем эту формулу, указав способ вычисления D_X. Для этого отметим общую формулу для математического ожидания непрерывной функции $\varphi(X)$ непрерывной случайной величины X [2]:

$$\mathrm{M}[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)dx. \qquad (7.3)$$

В этой формуле интеграл предполагается абсолютно сходящимся. Для случая дисперсии $\varphi(x) = (x-m_X)^2$. По формуле (7.3) получаем

$$\mathrm{D}X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f_X(x)dx. \qquad (7.4)$$

Свойства дисперсии (3.13), (3.14), (3.16), указанные для дискретного случая, остаются справедливыми и для непрерывной случайной величины.

Определение 7.2. *Модой* непрерывной случайной величины называется точка максимума её плотности вероятности (рис. 6.1).

Определение 7.3. *Медианой* (MeX, Me) непрерывной случайной величины называется её значение, обладающее свойством – вероятности попадания случайной величины X левее и правее медианы равны:

$$\mathrm{P}(X<\mathrm{Me}X)=\mathrm{P}(X>\mathrm{Me}X). \tag{7.5}$$

С помощью функции распределения $F(x)$ равенство (7.5) записывается в виде $F(\mathrm{Me})=1-F(\mathrm{Me})$, отсюда

$$F(\mathrm{Me})=1/2. \tag{7.6}$$

Если $F(x)$ строго возрастает, то медиана единственна. В случае отсутствия m_X его роль, как среднего, обычно выполняет медиана.

Определение 7.4. *Коэффициентом асимметрии* распределения (скошенности) или просто *асимметрией* называется число, равное отношению третьего центрального момента случайной величины к кубу ее среднего квадратичного отклонения:

$$a_X=\mu_3/\sigma_X^3. \tag{7.7}$$

Для непрерывной случайной величины $a_X>0$, если график одномодальной плотности имеет пологую часть справа, а крутую слева от моды; $a_X<0$, если наоборот; $a_X=0$ для симметричного распределения (рис. 7.1).

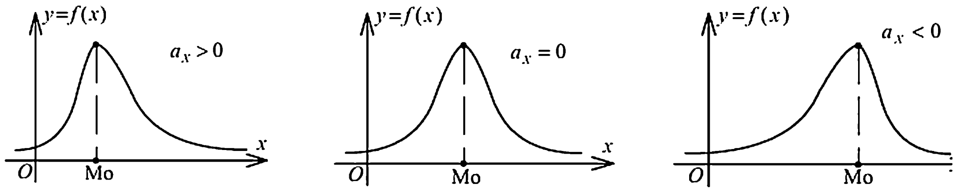


Рис. 7.1. *Геометрический смысл знака коэффициента асимметрии a_X*

Определение 7.5. *Квантилью порядка p* непрерывной случайной величины называется ее значение x_p, удовлетворяющее уравнению

$$F_X(x_p)=p. \tag{7.8}$$

Квантили порядков $p=1/4$ и $p=3/4$ называются соответственно *нижней* и *верхней квартилями*.

Если $F_X(x)$ строго возрастает, то квантиль x_p единственна.

Квантиль порядка $p=1/2$ есть медиана распределения.

В математической статистике применяются таблицы квантилей конкретных распределений [13].

§ 8. Нормальное, показательное, равномерное распределения

1. Нормальное распределение (закон Гаусса). Случайная величина X называется распределённой *нормально*, если её плотность вероятности задана формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{8.1}$$

Параметр m называется *центром*, а параметр σ – *стандартным отклонением* случайной величины X. График $f(x)$ приведен на рис. 8.1.

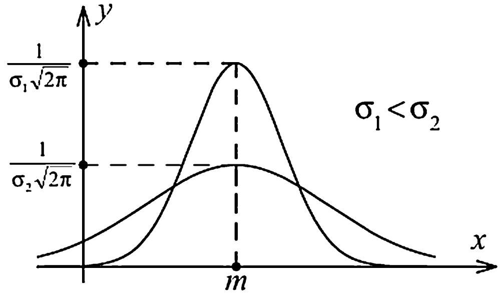


Рис. 8.1. *График плотности нормального распределения*

Нормальный закон для краткости обозначается символом $N(m, \sigma)$. Функция распределения нормального закона выражается формулой

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)=0.5+\Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \tag{8.2}$$

Здесь

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{8.3}$$

называется *функцией Лапласа*, а функция $\Phi_0(x)$, определяемая равенством

$$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \tag{8.4}$$

называется *нормированной функцией Лапласа*. Функции $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$ связаны соотношением:

$$\Phi(x)=0.5+\Phi_0(x). \tag{8.5}$$

График $\Phi_0(x)$ представлен на рис. 8.2. График $\Phi(x)$ получается сдвигом графика $\Phi_0(x)$ на 0.5 единиц вдоль оси Oy вверх.

Нормированная функция Лапласа $\Phi_0(x)$ во многих случаях удобнее, чем $\Phi(x)$, ибо является нечётной. Её свойства: $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x)$; $\Phi_0(0)=0$; $\Phi_0(+\infty)=0.5$. Последнее свойство основывается на так называемом интеграле Эйлера – Пуассона (Л. Эйлер – российский математик, 1707–1783)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi}. \tag{8.6}$$

График функции распределения $F(x)$ нормальной случайной величины (8.2) получается из графика $\Phi_0(x)$ путём сдвигов и растяжений вдоль осей координат. Он представлен на рис. 8.3.

Для нормального закона $N(m, \sigma)$, взяв интегралы (7.1), (7.4), получим

$$\mathrm{M}X = m; \tag{8.7}$$

$$DX = \sigma^2. \tag{8.8}$$

Таким образом, здесь параметр m является математическим ожиданием, а параметр σ – средним квадратичным отклонением нормальной случайной величины X.

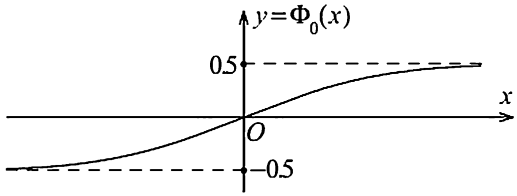


Рис. 8.2. *График нормированной функции Лапласа* $\Phi_0(x)$

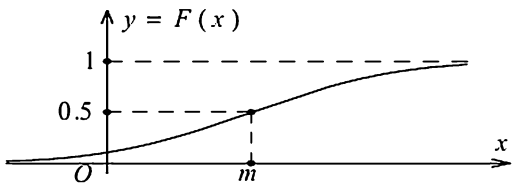


Рис. 8.3. *График функции распределения* $F(x)$ *нормального закона* $N(m, \sigma)$

В силу симметрии графика плотности относительно прямой $x = m$ имеем

$$\text{Mo} = \text{Me} = m. \tag{8.9}$$

С помощью таблицы квантилей нормального распределения $N(0, 1)$ можно найти квартили $x_{1/4} = m - 0.6745\sigma$, $x_{3/4} = m + 0.6745\sigma$ распределения $N(m, \sigma)$.

Нормальный закон широко распространён в природе. Им описываются ошибки измерений, координаты точки попадания снаряда, величина шума в радиоприёмном устройстве, линейные размеры и многие параметры деталей при массовом производстве и т. д.

Для нормального распределения $N(m,\sigma)$ справедлива формула

$$P\left(\left|X-m)\right|<\lambda\sigma\right)=2\Phi_0(\lambda). \tag{8.10}$$

$$\blacktriangleright\ P\left(\left|X-m)\right|<\lambda\sigma\right)=P(-\lambda\sigma<X-m<\lambda\sigma)=P(m-\lambda\sigma<X<m+\lambda\sigma)=$$

$$=F_X(m+\lambda\sigma)-F_X(m-\lambda\sigma)=0.5+\Phi_0\left(\frac{m+\lambda\sigma-m}{\sigma}\right)-0.5-\Phi_0\left(\frac{m-\lambda\sigma-m}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi_0(\lambda)-\Phi_0(-\lambda)=2\Phi_0(\lambda).\blacktriangleleft$$

При частных значениях λ из формулы (8.10), используя таблицу значений функции $\Phi_0(x)$, получаем

$$P\left(\left|X-m)\right|<\sigma\right)=2\Phi_0(1)\approx 0.6827;$$

$$P\left(\left|X-m)\right|<2\sigma\right)=2\Phi_0(2)\approx 0.9545;$$

$$P\left(\left|X-m)\right|<3\sigma\right)=2\Phi_0(3)\approx 0.9973.$$

Эти результаты означают, что 68.27% (грубо – две трети) значений нормальной случайной величины попадают в промежуток (m–σ, m +σ), 95.45% – в промежуток (m–2σ, m +2σ) и 99.73 % – в промежуток (m–3σ, m +3σ). Во многих вопросах инженерной практики считают допустимым пренебрегать вероятностями меньшими, чем 1-0.9973 = 0.0027$\approx$0.003.

Определение 8.1. Событие называется *практически невозможным*, если оно имеет столь малую вероятность, которой в рассматриваемых вопросах можно пренебречь. Событие, противоположное практически невозможному, называется *практически достоверным*.

Правило трёх сигм. Практически достоверно, что все значения нормальной случайной величины находятся в промежутке (m–3σ, m +3σ), т. е. отстоят от центра не более чем на 3σ.

Для сравнения распределений, близких к нормальному $N(m, \sigma)$, вводится числовая характеристика, называемая *эксцесс*.

$$e_X=\mu_4/\sigma^4 \tag{8.11}$$

Здесь μ_4 – четвёртый центральный момент

$$\mu_4=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)^4 f_X(x)dx.$$

Для нормального распределения непосредственно проверяется, что $\mu_4=3\sigma^4$, а потому $e_X=0$.

Пусть сравниваемое с нормальным $N(m, \sigma)$ распределение – симметричное, одномодальное, имеет те же математическое ожидание m и дисперсию σ^2 и, кроме того, визуально близко к нормальному (точный смысл этого требования выходит за рамки курса). Тогда можно утверждать, что если $e_X > 0$, то вершина сравниваемой кривой плотности лежит выше вершины нормальной кривой если же $e_X < 0$, то ниже (рис. 8.4).

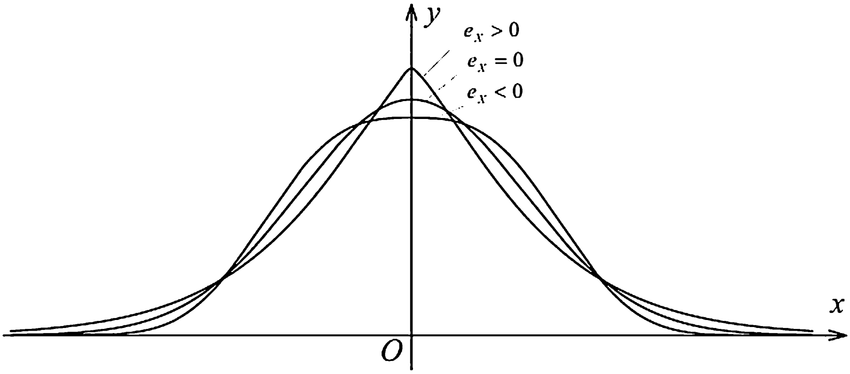


Рис. 8.4. *Иллюстрация роли эксцесса в характеристике «островершинности» кривой плотности вблизи моды в сравнении со стандартной нормальной кривой ($m = 0$, $\sigma = 1$)*

В силу этого свойства эксцесс называется показателем «островершинности» кривой плотности в сравнении с соответствующей нормальной кривой. По близости асимметрии a_X и эксцесса e_X к нулю для произвольного распределения можно сделать суждение о некоторой близости его к нормальному распределению.

Пример 8.1. Параметр детали X при массовом производстве распределен нормально с $m_X = 2$ и $\sigma_X = 0.1$. Найти процент деталей, отклоняющихся от m_X по модулю не более, чем на 1% от m_X.

▶Применим формулу (8.10): $\mathrm{P}\left(|X - m| < \lambda\sigma\right) = 2\Phi_0(\lambda)$. Здесь $\lambda\sigma = \lambda \cdot 0.1 = 0.01 \cdot 2 = 0.02$. Отсюда $\lambda = 0.02/0.1 = 0.2$. По таблице находим $2\Phi_0(\lambda) = 2\Phi_0(0.2) = 2 \cdot 0.07926 = 0.15852 \approx 15.9\%$.◀

2. Показательное распределение. Плотность вероятности показательного закона распределения определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0). \tag{8.12}$$

График плотности $F(x)$ приведён на рис. 8.5.

Функция распределения для показательного закона выражается формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases} \quad (8.13)$$

График $F(x)$ изображён на рис. 8.5.

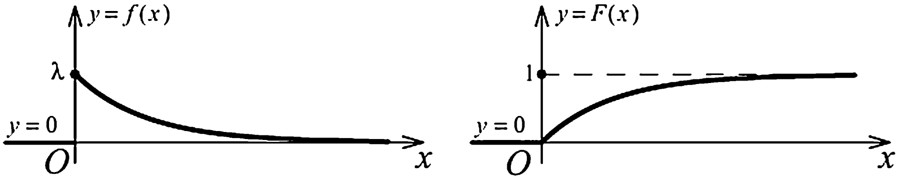


Рис. 8.5. *Графики плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ для показательного распределения*

Числовые характеристики показательного распределения:

$$m_X = \sigma_X = 1/\lambda; \quad (8.14)$$

$$\mathrm{Mo} = 0; \quad \mathrm{Me} = (\ln 2)/\lambda \approx 0.693/\lambda. \quad (8.15)$$

Показательное распределение используется для описания распределения реальных случайных величин, таких как длительность работы прибора до первого отказа, длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания, длительность жизни атома радиоактивного вещества и других.

Пример 8.2. Средняя длительность X телефонного разговора равна 5 мин. Найти вероятность, что произвольный телефонный разговор будет продолжаться от 5 до 10 мин.

► Дано $m_X = 5$. Тогда $\lambda = 1/m_X = 1/5$; $\mathrm{P}(5 \le X \le 10) = F_X(10) - F_X(5) =$

$$= (1 - e^{-10/5}) - (1 - e^{-5/5}) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.368 - 0.135 = 0.233 \approx 0.23. ◄$$

3. Равномерное распределение. Случайная величина X называется *равномерно распределённой* на отрезке $[a, b]$, если её плотность вероятности задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (8.16)$$

Функция распределения $F(x)$ для равномерного закона на отрезке $[a, b]$ выражается формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ (x-a)/(b-a), & a \le x \le b; \\ 1, & x > 1. \end{cases} \quad (8.17)$$

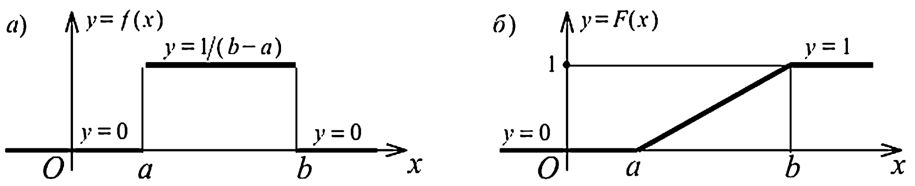


Рис. 8.6. *Графики для равномерного закона на отрезке [a, b]:*
а) плотности y=f(x); б) функции распределения y=F(x)

График плотности вероятности изображён на рис. 8.6(*а*), а график функции распределения *F(x)* на рис. 8.6 (*б*).

Доказательство формулы **(8.17).**

► Если $x \le a$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt=0$.

Если $a \le x \le b$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a} 0dt+\int\limits_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}$.

Если $x \ge b$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a} 0dt+\int\limits_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt+\int\limits_{b}^{x}0dt=0+1+0=1$.◄

Числовые характеристики равномерного распределения на $[a,b]$:

$$m_X=\mathrm{Me}=(a+b)/2; \tag{8.18}$$

$$D_X=(b-a)^2/12. \tag{8.19}$$

Доказательство формул (8.18), (8.19).

► $m_X=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{a}^{b}x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$.

$$D_X=\mathrm{M}X^2-m_X^2=\int\limits_{a}^{b}x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.◄$$

Равномерное распределение применяется для описания ошибок округления, ошибок отсчёта по приборам стрелочного типа.

Равномерное распределение на отрезке [0, 1] является стандартным. Оно заложено в компьютерах, которые по специальным программам производят псевдослучайные числа, распределённые приближённо равномерно на отрезке [0, 1]. Есть формулы, программы, преобразующие равномерный закон распределения в другие законы, а также таблицы случайных чисел, распределённых равномерно на отрезке [0, 1] [6].

Пример 8.3. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a, b]$. Найти вероятность попадания X в отрезок $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$.

$$\blacktriangleright\ \mathrm{P}\big(X\in[\alpha,\beta]\big)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{b-a}dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}=\frac{\text{длина}[\alpha,\beta]}{\text{длина}[a,b]}.$$

Этот результат показывает, что возможность применения геометрического определения вероятности (гл. 2) означает, что соответствующая случайная точка X распределена равномерно на отрезке $[a, b]$. ◀

Глава 6. **Двумерная случайная величина**

§ 1. Двумерная случайная величина. Функция распределения

Определение 1.1. *Двумерной случайной величиной* называется упорядоченная пара (X, Y) одномерных случайных величин X и Y. При этом предполагаются определёнными вероятности произведения событий $X < x$ и $Y < y$ для любых вещественных x, y. Одномерные случайные величины X,Y называются *компонентами* двумерной случайной величины (X, Y).

Двумерную случайную величину называют также *случайным двумерным вектором*, *случайной двумерной точкой*, *системой двух случайных величин.*

Примеры реальных двумерных случайных величин.

1. Два размера детали в массовом производстве.

2. Величина сигнала в управляющем устройстве в два момента времени.

3. Абсцисса и ордината точки попадания снаряда.

4. Количество бракованных деталей в двух выборках из партии деталей.

Определение 1.2. *Функцией распределения* $F_{XY}(x, y)$ *двумерной случайной величины* (X, Y) называется вероятность произведения двух событий $X < x$, $Y < y$, определённая для любых вещественных x, y:

$$F_{XY}(x, y) = \mathrm{P}(X < x, Y < y). \tag{1.1}$$

Здесь произведение событий под знаком вероятности обозначено через запятую. Функцию $F_{XY}(x, y)$ для краткости будем называть *двумерной функцией распределения.*

Свойства двумерной функции распределения

1. $F_{XY}(-\infty,-\infty)=0$; так как $X<-\infty$ и $Y<-\infty$ – невозможные события и совмещение (произведение) невозможного события с любым другим событием есть также невозможное событие.

2. $F_{XY}(+\infty, +\infty)=1,$ (1.2)

так как оба события $X<+\infty$ и $Y<+\infty$ являются достоверными.

3. $F_{XY}(x,+\infty)=F_X(x)$; $F_{XY}(+\infty, y)=F_Y(y),$ (1.3)

▶ 1) $Y<+\infty$ – достоверное событие; его совмещение с событием $X< x$ есть то же событие $X < x$>, и потому

$$F_{XY}(x,+\infty)= \mathrm{P}(X < x, Y < \infty) = \mathrm{P}(X < x)=F_X(x).$$

2) $X<+\infty$ – достоверное событие; его совмещение с событием $Y<y$ есть то же событие $Y < y$, и потому

$$F_{XY}(+\infty, y) = \mathrm{P}(X<+\infty, Y<y) = \mathrm{P}(Y<y) = F_Y(y). \blacktriangleleft$$

4. $F_{XY}(x, y)$ не убывает по каждому из своих аргументов при фиксированном другом аргументе, что доказывается так же, как и для одномерной случайной величины.

Замечание 1.1. Формулы (1.3) называются *формулами согласованности* (общего вида). Они означают, что из функции распределения двумерной случайной величины (X, Y) можно получить функции распределения её одномерных компонент X и Y, устремив один из аргументов к $+\infty$.

Обратное неверно, т. е. из одномерных функций распределения компонент в общем случае нельзя получить функцию распределения двумерной случайной величины. Таким образом, двумерная функция распределения несет существенно больше информации, чем две одномерные функции распределения компонент X и Y. Рассматривая случайные величины X, Y порознь, а не в системе, нельзя получить сведения об их зависимости.

Различают дискретные и непрерывные двумерные случайные величины.

§ 2. Дискретная двумерная случайная величина. Таблица распределения

Определение 2.1. Двумерная случайная величина называется *дискретной*, если множество её значений (x, y) – конечное или счётное.

Примеры реальных дискретных двумерных случайных величин

1. (X, Y), где X – число деталей, изготовленных за смену на первом станке, Y – на втором.

2. (X, Y), где X – число клиентов, поступивших за время T в первую систему массового обслуживания, Y – во вторую.

Закон распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины (X, Y) можно задать формулой

$$\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_k) = p_{ik} \, (i = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, n). \tag{2.1}$$

Это вероятности совмещения событий $X=x_i$, $Y=y_k$. Так как события, означающие одновременное выполнение равенств $X=x_i$, $Y=y_k$, $i = 1, \ldots, m$; $k=1$, …, n, попарно несовместны и образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{ik} = 1. \tag{2.2}$$

Если множество значений двумерной дискретной случайной величины (X, Y) конечно, то её можно задать таблицей распределения (таблица 2.1):

Таблица 2.1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\ldots$	p_{mn}

Формулы согласованности для дискретной случайной величины имеют вид:

$$p_{i\bullet} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}, \qquad p_{\bullet k} = \sum_{i=1}^{m} p_{ik}. \tag{2.3}$$

Здесь $p_{i\bullet} = \mathrm{P}(X = x_i)$, $i=1, \ldots, m$; $p_{\bullet k} = \mathrm{P}(Y = y_k)$, $k=1, \ldots, n$, – одномерные законы распределения компонент случайной величины. Формулы согласованности (2.3) позволяют из закона распределения двумерной случайной величины получить одномерные законы распределения ее компонент, которые, таким образом, не произвольные, а согласованы друг с другом.

Функция распределения дискретной двумерной случайной величины по аналогии с одномерным случаем может быть записана в виде

$$F_{XY}(x,y) = \sum_{x_i<x} \sum_{y_k<y} p_{ik}. \tag{2.4}$$

Суммирование распространяется на значения i и k, для которых $x_i<x$, $y_k<y$.

Пример 2.1. Задана таблица распределения дискретной двумерной случайной величины (табл. 2.2). Требуется найти одномерные законы распределения компонент.

Таблица 2.2

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\bullet}$
x_1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$
x_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
$p_{\bullet k}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	1

►Применим формулы согласованности (2.3). Согласно этим формулам суммы вероятностей p_{ik} по строкам таблицы дают $p_{i\bullet}$, а по столбцам – $p_{\bullet k}$. Эти суммы записаны в дополнительном столбце справа и в дополнительной строке внизу.

$$p_{1\bullet} = 1/12 + 1/6 + 1/3 = 7/12; \quad p_{2\bullet} = 1/6 + 1/6 + 1/12 = 5/12;$$

$$p_{\bullet 1}=1/12+1/6=1/4;\; p_{\bullet 2}=1/6+1/6=1/3;\; p_{\bullet 3}=1/3+1/12=5/12 .◄$$

§ 3. Непрерывная двумерная случайная величина. Плотность вероятности

Определение 3.1. Двумерная случайная величина называется *непрерывной*, если существует неотрицательная функция $f_{XY}(x, y)$, называемая *двумерной лотностью вероятности*, такая, что вероятность попадания случайной величины (X, Y) в область D равна двойному интегралу от плотности по области D

$$\mathrm{P}\big((X,Y)\in D\big)=\iint\limits_D f_{XY}(x,y)dxdy . \tag{3.1}$$

Из приведённой формулы (3.1) следует выражение для функции распределения двумерной непрерывной случайной величины:

$$F_{XY}(x,y)=\mathrm{P}(-\infty<X<x,\ -\infty<Y<y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)dxdy . \tag{3.2}$$

Это есть вероятность попадания случайной точки (X, Y) в «юго-западный» квадрант с вершиной в точке $(x, y$ (рис. 3.1).

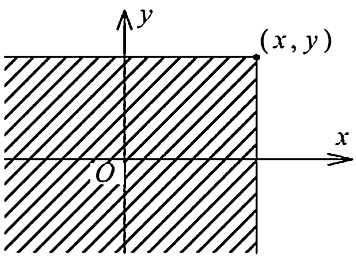


Рис. 3.1. «Юго-западный» квадрант с вершиной в точке (x,y)

Из формулы (3.2) следует, что $F_{XY}(x, y)$ непрерывна на всей плоскости Oxy.

Свойства двумерной плотности вероятности

1. Определена на всей плоскости Oxy.
2. $\dfrac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}=f_{XY}(x,y)$ в каждой точке непрерывности плотности, что

следует из свойств интеграла с переменным верхним пределом.

3. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy=f_X(x);\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx=f_Y(y) . \tag{3.3}$$

Формулы (3.3) носят название *формулы согласованности для плотностей*.

4. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy=1 . \tag{3.4}$$

Формула (3.4) есть иначе записанная формула (1.2) для непрерывного случая.

Доказательство формул (3.3; 3.4)).

►Докажем первую формулу. Вторая записывается по аналогии. Применим первую общую формулу согласованности (1.3): $F_{XY}(x,+\infty)=F_X(x)$. Для непрерывных случайных величин она записывается в виде

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx.$$

Дифференцируем обе части этого равенства по x. Используем известный факт из математического анализа: значение производной интеграла с переменным верхним пределом равно значению подынтегральной функции на верхнем пределе в любой точке непрерывности подынтегральной функции. Получаем $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy=f_X(x)$.◄

§ 4. Примеры двумерных непрерывных распределений

1. Двумерное равномерное распределение в области D определяется плотностью

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}1/S_D, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases} \tag{4.1}$$

Здесь S_D – площадь области D.

Равномерное распределение применяется в так называемом методе статистических испытаний (метод Монте-Карло) для приближенного вычисления интегралов и других математических величин.

2. Двумерное нормальное распределение определяется плотностью

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}. \tag{4.2}$$

Она содержит 5 параметров m_1, m_2, σ_1, σ_2, ρ. Точка (m_1, m_2) называется *центром нормального распределения*. Параметр ρ называется *коэффициентом корреляции*.

Двумерное нормальное распределение применяется для описания:

1. Абсциссы и ординаты точки попадания (X, Y) при стрельбе;

2. Двух параметров детали при массовом производстве;

3. Двух результатов измерения.

Если применить формулы согласованности (3.3), то после взятия интегралов получим

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right];\ f_Y(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right], \tag{4.3}$$

откуда заключаем, что m_1, m_2 – математические ожидания компонент X, Y, двумерной нормальной случайной величины (X, Y), σ_1, σ_2 – средние квадратичные отклонения их компонент.

►Для доказательства формул (4.3) используется табличный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)/2}dx=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{(b^2-ac)/2a}\ (a>0),$$

который приводится к известному интегралу Эйлера – Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}$ выделением полного квадрата трёхчлена

$$ax^2+2bx+c=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}$$

и последующей подстановкой $x+b/a=t/\sqrt{a}$.◄

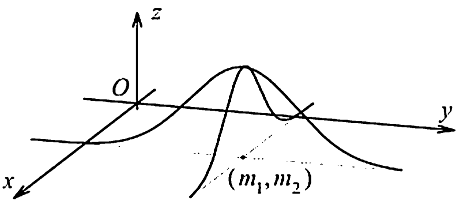


Рис. 4.1. *Сечения графика нормальной двумерной плотности*

Графиком двумерной нормальной плотности (4.2) является холмообразная поверхность, располагающаяся над всей плоскостью Oxy, асимптотически приближающаяся к ней при удалении на бесконечность, симметричная относительно вертикальной оси, проходящей через центр (m_1, m_2), и с вершиной в этой точке (рис. 4.1). Любое сечение поверхности – графика нормальной плотности плоскостью, перпендикулярной Oxy, является кривой Гаусса.

§ 5. Зависимость и независимость двух случайных величин

Определение 5.1. Случайные величины X, Y называются *независимыми*, если независимыми являются события $X<x$ и $Y<y$ для любых вещественных (x, y). В противном случае случайные величины (X, Y) называются *зависимыми*.

Теорема 5.1. Необходимым и достаточным условием независимости двух случайных величин ***в общем случае*** является равенство

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \tag{5.1}$$

для любых вещественных x и y.

Это условие есть иначе записанное необходимое и достаточное условие независимости двух событий: $P(AB)=P(A)\,P(B)$ (гл. 4, (3.2)) для случая событий $A=(X<x)$, $B=(Y<y)$.

Теорема 5.2. Необходимым и достаточным условием независимости двух ***непрерывных*** случайных величин является равенство

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \tag{5.2}$$

для любых вещественных x и y.

Формула (5.2) следует из (5.1) дифференцированием по x и y, а (5.1) из (5.2) интегрированием по x и y.

Теорема 5.3. Необходимым и достаточным условием независимости двух ***дискретных*** случайных величин является равенство[4]

$$p_{ik} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet k} \tag{5.3}$$

для любых $i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 5.1. Дана таблица распределения дискретной случайной величины (X, Y) (табл. 5.1). Выяснить, зависимы или нет её компоненты.

Таблица 5.1

X/Y	y_1	y_2
x_1	1/12	1/4
x_2	1/6	1/2

►Складывая вероятности по строкам и столбцам, находим законы распределения компонент:

$$p_{1\bullet} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}; \quad p_{2\bullet} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}; \quad p_{\bullet 1} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}; \quad p_{\bullet 2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Теперь проверяем условия (5.3):

$$p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = p_{11}; \quad p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = p_{12};$$

$$p_{2\bullet} \cdot p_{\bullet 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} = p_{21}; \quad p_{2\bullet} \cdot p_{\bullet 2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = p_{22}.$$

Условия (5.3) выполнены, поэтому компоненты (X, Y) независимы.◄

Пример 5.2. Проверить, что равенство нулю коэффициента корреляции ρ является необходимым и достаточным условием независимости компонент X, Y двумерной нормальной случайной величины (X, Y).

► Пусть $\rho = 0$. Тогда формула (4.2) принимает вид:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} = f_X(x)\cdot f_Y(y), \quad \text{где}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]; f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]. \qquad (5.4)$$

Равенство (5.2) выполнено, следовательно, X, Y независимы.

Обратно: пусть X, Y независимы, т. е. выполнено равенство (5.2): $f_{XY}(x, y) =$ $=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, где слева стоит двумерная нормальная плотность (4.2), а справа – произведение одномерных нормальных плотностей компонент X, Y, представленных формулами (5.4). Положим в этом равенстве (5.2) $x = m_1$, $y = m_2$. Тогда оно принимает вид: $\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \dfrac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}$. После упрощения получаем: $\sqrt{1-\rho^2} = 1$. Отсюда $\rho = 0$. ◄

§ 6. Математическое ожидание функции двумерной случайной величины

Рассмотрим случайную величину $\varphi(X, Y)$, являющуюся функцией компонент X, Y двумерной случайной величины (X, Y). Справедливы общие формулы:

$$M[\varphi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)f_{XY}(x,y)dxdy \qquad (6.1)$$

для непрерывного случая и

$$M[\varphi(X,Y)] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_i,y_k)p_{ik} \qquad (6.2)$$

для дискретного случая.

Здесь $f_{XY}(x,y)$ – плотность вероятности случайной величины (X, Y), а $p_{ik} = P(X = x_i, Y = y_k)$, $i = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$ – закон распределения дискретной двумерной случайной величины.

Доказательство формул (6.1), (6.2) выходит за рамки курса [7].

С помощью формул (6.1), (6.2) могут быть записаны и доказаны формулы для математического ожидания суммы и произведения двух случайных величин, выражающие свойства 3 и 4 математического ожидания (гл. 5, формулы (3.4), (3.5)) и неравенство Коши – Буняковского для математических ожиданий (О. Коши – фр., 1789–1857; В. Я. Буняковский – рос., 1804–1889).

Например, для непрерывного случая имеем

$$\mathrm{M}[X+Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f_{XY}(x,y)dxdy. \qquad (6.3)$$

Здесь $\varphi(x, y) = x + y$.

$$\mathrm{M}[XY]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_{XY}(x,y)dxdy. \qquad (6.4)$$

Здесь $\varphi(x, y) = xy$.

Основываясь на формуле (6.3), докажем, что $M[X+Y]=MX+MY$.

$$\blacktriangleright\ \mathrm{M}[X+Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f_{XY}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)dx.$$

По формулам согласованности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)dy=f_X(x),\ \int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)dx=f_Y(y), \text{ отсюда}$$

$$\mathrm{M}[X+Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\mathrm{M}X+\mathrm{M}Y.$$

Теорема 6.1. (*неравенство Коши – Буняковского*).

$$\left|\mathrm{M}[XY]\right|\le\sqrt{\mathrm{M}[X^2]\mathrm{M}[Y^2]}. \qquad (6.5)$$

§ 7. Корреляционный момент и коэффициент корреляции

В § 5 были сформулированы функциональные характеристики зависимости и независимости двух случайных величин (формулы (5.1) – (5.3)). Рассмотрим теперь числовые характеристики связи между случайными величинами.

Определение 7.1. *Корреляционным моментом* K_{XY}, иначе – *ковариацией*, двух случайных величин X, Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин от их математических ожиданий:

$$K_{XY}=\mathrm{M}[(X-m_X)\,(Y-m_Y)]. \qquad (7.1)$$

Очевидно, что $K_{XY}= K_{YX}$. На основании формул (6.1) и (6.2) получаем формулы для вычисления K_{XY}.

Для непрерывных случайных величин:

$$K_{XY}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)(y-m_Y)f_{XY}(x,y)dxdy. \qquad (7.2)$$

Для дискретных случайных величин

$$K_{XY}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_i-m_X)(y_k-m_Y)p_{ik}. \qquad (7.3)$$

Определение 7.2. *Коэффициентом корреляции* ρ_{XY} двух случайных величин X, Y называется отношение их корреляционного момента к произведению их средних квадратичных отклонений:

$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \qquad (7.4)$$

Очевидно, что $\rho_{XY} = \rho_{YX}$.

Корреляционный момент и коэффициент корреляции – это числовые характеристики двумерной случайной величины, причём ρ_{XY} – безразмерная характеристика. Из их свойств следует, что они характеризуют связь между случайными величинами.

Свойства корреляционного момента и коэффициента корреляции

Свойство 1.

$$K_{XY} = \mathrm{M}[XY] - m_X . m_Y. \qquad (7.5)$$

Эта формула удобна для вычисления K_{XY}.

► $K_{XY} = \mathrm{M}[(X - m_X)(Y - m_Y)] = \mathrm{M}[XY - m_X Y - m_Y X + m_X m_Y] =$

$= \mathrm{M}[XY] - m_X \mathrm{M}[Y] - m_Y \mathrm{M}[X] + m_X m_Y] = \mathrm{M}[XY] - m_X m_Y - m_Y m_X + m_X m_Y =$

$= \mathrm{M}[XY] - m_X m_Y.$ ◄

Свойство 2.

$$-1 \le \rho_{XY} \le 1. \qquad (7.6)$$

Формула (7.6) означает, что ρ_{XY} – нормированная характеристика.

► По неравенству Коши – Буняковского (6.5):

$$|K_{XY}| = |\mathrm{M}[(X - m_X)(Y - m_Y)]| \le \sqrt{\mathrm{M}[(X - m_X)^2] \cdot \mathrm{M}[(Y - m_Y)^2]} = \sqrt{D_X D_Y} = \sigma_X \sigma_Y .$$

Таким образом, $|\rho_{XY}| = \left| \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \right| \le \dfrac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X \sigma_Y} = 1.$◄

Свойство 3. Для независимых случайных величин X, Y их корреляционный момент, следовательно, и коэффициент корреляции, равны нулю.

► По свойству 1 (формула (7.5)): $K_{XY} = \mathrm{M}[XY] - m_X . m_Y$. Далее по формулам (3.5) из гл. 5: $\mathrm{M}[XY] = \mathrm{M}[X]\mathrm{M}[Y] = m_X . m_Y$. Тогда $K_{XY} = m_X m_Y - m_X m_Y = 0$.◄

Замечание 7.1. Обратное предложение в общем случае неверно, т. е. существуют зависимые случайные величины (X, Y) для которых $K_{XY} = 0$.

Пример 7.1. Случайная величина X имеет распределение N(0, 1).

$Y = X^2$. Тогда $XY = X^3$; $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$;

$\mathrm{M}[XY] = \mathrm{M}[X^3] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2/2} dx = 0$ как интеграл от нечётной функции по промежутку, симметричному относительно нуля. Далее

$$K_{XY} = \mathrm{M}[XY] - m_X m_Y = 0 - 0 = 0.$$

Свойство 3 и замечание 7.1 позволяют ввести новое понятие.

Определение 7.3. Две случайные величины X, Y называются *некоррелированными*, если их корреляционный момент равен нулю. Если $K_{XY} \neq 0$, то говорят, что X, Y *коррелируют* между собой.

Замечание 7.2. Если $K_{XY} \neq 0$, то случайные величины X, Y зависимы. Действительно, в противном случае по свойству 3 имели бы $K_{XY} = 0$.

Соотношение между независимыми и некоррелированными случайными величинами может быть представлено следующей таблицей.

<table>
<tr><td colspan="2">Независимые</td><td colspan="2">Зависимые</td></tr>
<tr><td colspan="3">некоррелированные; $K_{XY} = 0$</td><td>коррелированные; $K_{XY} \neq 0$</td></tr>
</table>

Свойство 4. Для случайных величин X, $Y = aX + b$, связанных линейной зависимостью, коэффициент корреляции равен 1, если $a > 0$, и -1, если $a < 0$.

► Используем свойства математического ожидания и дисперсии. Последовательно получаем

$$D_Y = \mathrm{M}\left[(Y - m_Y)^2\right] = \mathrm{M}\left[(Y - \mathrm{M}[aX + b])^2\right] = \mathrm{M}\left[(aX + b - am_X - b)^2\right] =$$

$$= M[(a^2(X - m_X)^2] = a^2 D_X = a^2 \sigma_X^2 .$$

Отсюда $\sigma_Y = |a| \sigma_X$. Далее,

$$K_{XY} = \mathrm{M}\left[(X - m_X)(Y - m_Y)\right] = \mathrm{M}\left[(X - m_X)\left(aX + b - \mathrm{M}[aX + b]\right)\right] =$$

$$= \mathrm{M}\left[(X - m_X)(aX + b - am_X - b)\right] = \mathrm{M}\left[a(X - m_X)^2\right] = aD_X = a\sigma_X^2 ;$$

$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{\sigma_X |a| \sigma_X} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & \text{при } a > 0, \\ -1 & \text{при } a < 0. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Свойство 5. Если $|\rho_{XY}| = 1$, то случайные величины X, Y связаны линейной зависимостью с вероятностью единица.

Доказательство свойства 5 выходит за рамки книги [2].

Замечание 7.3. Величина $\mathrm{M}[XY] = \alpha_{1,1}$ называется *вторым смешанным начальным моментом* двумерной случайной величины (X, Y), а её корреляционный момент K_{XY} – *вторым смешанным центральным моментом*.

В пределах первых двух моментов двумерная случайная величина может быть охарактеризована центром – точкой (m_X, m_Y) и корреляционной матрицей $K = \begin{pmatrix} D_X & K_{XY} \\ K_{YX} & D_Y \end{pmatrix}$. Заметим, что $D_X = K_{XX}$, $D_Y = K_{YY}$.

Замечание 7.4. Из свойств 1 – 4 следует теорема.

Теорема 7.1. Дисперсия суммы n попарно некоррелированных (в частности, попарно независимых) случайных величин равна сумме их дисперсий.

Пример 7.2. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей. Найти коэффициент корреляции ρ_{XY}.

X/Y	0	1
0	1/2	1/4
1	1/8	1/8

►Последовательно находим законы распределения компонент, складывая вероятности таблицы по строкам и столбцам (формулы согласованности (2.3)).

X	0	1
p	3/4	1/4

Y	0	1
p	5/8	3/8

Математические ожидания компонент:

$$m_Y = 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}; \qquad m_Y = 0 \cdot \frac{5}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}.$$

Вторые начальные моменты компонент:

$$\alpha_{2X} = 0^2 \cdot \frac{3}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}; \qquad \alpha_{2Y} = 0^2 \cdot \frac{5}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}.$$

Дисперсии компонент:

$$D_X = \alpha_{2X} - m_X^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}; \; D_Y = \alpha_{2Y} - m_Y^2 = \frac{3}{8} - \frac{9}{64} = \frac{15}{64}.$$

Второй смешанный начальный момент:

$$\alpha_{1,1} = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Корреляционный момент:

$$K_{XY} = \alpha_{1,1} - m_X m_Y = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8} - \frac{3}{32} = \frac{1}{32}.$$

Средние квадратичные отклонения компонент:

$$\sigma_X = \sqrt{3/16} = \sqrt{3}/4; \qquad \sigma_Y = \sqrt{15/64} = \sqrt{15}/8.$$

Коэффициент корреляции:

$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1/32}{\left(\sqrt{3}/4\right)\left(\sqrt{15}/8\right)} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \approx 0.15. ◄$$

Пример 7.3. Корреляционный момент двумерной нормальной случайной величины вычисляется по формуле (7.2). Подынтегральная функция определяется формулой (4.2). Опуская вычисление интеграла, запишем результат: $K_{XY} = \rho\sigma_1\sigma_2$. Отсюда $\rho_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_1\sigma_2} = \rho$, т. е. пятый параметр ρ двумерной нормальной плотности является коэффициентом корреляции в соответствии с его определением 7.2.

Замечание 7.5. Для случая двумерной нормальной случайной величины понятия независимости и некоррелированности ее компонент совпадают (примеры 5.2 и 7.2).

Глава 7. *n*-мерная случайная величина

Основные идеи о многомерных случайных величинах были изложены для случая двумерной случайной величины, поэтому в этой главе приводим обзорное изложение.

§ 1. Основные определения

Определение 1.1. *n-мерной случайной величиной* называется система n одномерных случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. При этом предполагается, что определена вероятность произведения n событий $X_1<x_1$, $X_2<x_2$, …, $X_n<x_n$ для любых вещественных $x_1, \ldots, x_n$.

Вместо термина «*n*-мерная случайная величина» употребляют термины *случайная n-мерная точка*, *n-мерный случайный вектор*.

Примером реальной *n*-мерной случайной величины может служить n результатов измерения какой-либо величины. Абсцисса, ордината, аппликата точки разрыва зенитного снаряда – пример трёхмерной случайной величины.

Определение 1.2. *n-мерной функцией распределения* называется вероятность произведения n событий $X_1<x_1$, …, $X_n<x_n$ для любых $x_1, \ldots, x_n$:

$$F_{X_1\ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{P}(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n). \qquad (1.1)$$

Определение 1.3. *n*-мерная случайная величина называется *дискретной*, если множество её значений конечное или счетное. Закон её распределения задается формулой, определяющей вероятности отдельных значений.

Определение 1.4. *n*-мерная случайная величина называется *непрерывной*, если существует неотрицательная функция $f_{X_1\ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n)$, называемая *плотностью вероятности*, такая, что вероятность попадания случайной точки $(X_1, \ldots, X_n)$ в *n*-мерную область D равна *n*-кратному интегралу от плотности по области D:

$$\mathrm{P}\big((X_1, \ldots, X_n) \in D\big) = \int\ldots\int_D f_{X_1\ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n \qquad (1.2)$$

Из формулы (1.2) следует формула для функции распределения *n*-мерной непрерывной случайной величины:

$$F_{X_1\ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\ldots\int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1\ldots X_n}(t_1, \ldots, t_n)\,dt_1\ldots dt_n\,. \qquad (1.3)$$

Определение 1.5. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ называются *взаимно независимыми*, иначе – *независимыми в совокупности*, если взаимно независимыми являются события $X_1<x_1$, …, $X_n<x_n$ для любых $x_1, \ldots, x_n$.

Теорема 1.1. Необходимым и достаточным условием взаимной независимости n случайных величин ***в общем случае*** является равенство

$$F_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdot\ \ldots\ \cdot F_{X_n}(x_n) \qquad (1.4)$$

для любых вещественных $x_1, \ldots, x_n$. Здесь $F_{X_k}(x_k)$ – одномерная функция распределения случайной величины X_k, $k=1,\ldots,n$.

Теорема 1.2. Необходимым и достаточным условием взаимной независимости n ***непрерывных*** случайных величин является равенство

$$f_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n)=f_{X_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot f_{X_n}(x_n)$$

для любых вещественных $x_1,\ldots,x_n$. Здесь $f_{X_k}(x_k)$ – плотность вероятности случайной величины X_k, $k=1, \ldots, n$.

§ 2. Числовые характеристики n-мерной случайной величины

В пределах первых двух моментов числовыми характеристиками n-мерной случайной величины являются следующие:

1. n математических ожиданий компонент X_i n-мерной случайной величины: $m_i = \mathrm{M}X_i$, $i = 1, \ldots, n$, образующих её центр распределения $(m_1, \ldots, m_n)$, т. е. точку n-мерного пространства, около которой группируются значения n-мерной случайной величины.

2. n дисперсий компонент n-мерной случайной величины:

$$D_i=\mathrm{M}[(X_i-x_i)^2], j=1, \ldots, n,$$

характеризующих её рассеяние в направлениях координатных осей.

3. $n(n-1)$ корреляционных моментов всевозможных пар X_i, X_j компонент n-мерной случайной величины:

$$K_{ij}=\mathrm{M}[(X_i-m_i)\ (X_j-m_j)],\ i,j=1, \ldots, n,\ i\neq j.$$

Эти корреляционные моменты характеризуют взаимную связь между компонентами n-мерной случайной величины. Все корреляционные моменты и дисперсии удобно записать в виде матрицы:

$$(K_{ij})=\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется *ковариационной матрицей* n-мерной случайной величины. На её главной диагонали находятся дисперсии компонент, так как

$$K_{ii}=D_i,\ i=1, \ldots, n.$$

ковариационная матрица – симметрическая; её элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны: $K_{ij}=K_{ji}$, $i,j=1, \ldots, n$.

§ 3. Полиномиальное и n-мерное нормальное распределения

1. ***Полиномиальное распределение задаётся формулой***

$$\mathrm{P}(X_1=k_1,X_2=k_2,\dots,X_n=k_n)=\frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_n^{k_n}, \qquad (3.1)$$

$k_1+k_2+\dots+k_n=m$; $0\le k_i\le m$; $p_1+p_2+\dots+p_n=1$; $0<p_i<1$; $i=1,2,\dots,n$.

Это распределение возникает в следующей полиномиальной схеме m независимых испытаний с n исходами в каждом из них.

Производится m независимых испытаний, в каждом из которых событие A_i может появляться с вероятностью p_i, $i=1, \dots, n$. Все эти события попарно несовместны и составляют полную группу. Ставится задача – найти вероятность $\mathrm{P}(X_1=k_1,\dots,X_n=k_n)$ того, что в этих m испытаниях событие A_1 появится точно k_1 раз и т. д. ,событие A_n – точно k_n раз, безразлично в каком порядке. Если случайная величина X_i означает число появлений события A_i в этих m испытаниях $i=1, \dots, n$, то приходим к формуле (3.1). Доказательство формулы (3.1) аналогично случаю биномиального распределения, в которое переходит полиномиальное распределение при $n=2$.

Полиномиальное распределение задаёт распределение m изделий по n сортам, распределение частиц по зонам, распределение больных по группам и т. д.

Пример 3.1. Вероятности производства на предприятии изделий 1, 2, 3 сортов соответственно равны 0.6; 0.3; 0.1. Найти вероятность того, что из 10 изделий, поступивших на контроль, будет 6 изделий первого сорта, 3 – второго и одно – первого.

►По формуле (3.1) получим

$$\mathrm{P}(X_1=6,X_2=3,X_3=1)=\frac{10!}{6!\cdot 3!\cdot 1!}0.6^6\cdot 0.3^3\cdot 0.1^1=84\cdot 0.0467\cdot 0.027=0.106\,.◄$$

2. ***n-мерное нормальное распределение*** задается плотностью распределения вероятности

$$f_{X_1\dots X_n}(x_1,\dots,x_n)=\sqrt{\frac{\Delta}{(2\pi)^n}}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)\right], \qquad (3.2)$$

где квадратичный полином

$$Q(x_1,\dots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j), \qquad (3.3)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию $C_{ij}=C_{ji}$, является положительно определённым [1]. Это означает, что он всегда неотрицателен и обращается в нуль только в точке $(m_1, \dots, m_n)$. Знаком Δ обозначен симметрический определитель, составленный из коэффициентов полинома Q:

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Для прояснения сущности величин, входящих в формулы (3.2), (3.3), приведём результат, содержащийся в теореме Сильвестра (англ., 1814–1897), относящийся к теории квадратичных форм алгебры [1]..

Необходимыми и достаточными условиями положительной определенности квадратичного полинома (формы) $Q(x_1, \dots, x_n)$ являются неравенства

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1k} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{k1} & C_{k2} & \dots & C_{kk} \end{vmatrix} > 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

В частности, отсюда следует, что $C_{11} > 0$ и $\Delta > 0$.

Можно доказать [7], что компоненты X_i нормальной n-мерной случайной величины $(X_1, \dots, X_n)$ распределены нормально с математическими ожиданиями $\mathrm{M}X_i = m_i$, $i = 1, \dots, n$, а параметры C_{ij} образуют матрицу $(C_{ij})_{nn}$, обратную по отношению к ковариационной матрице $(K_{ij})_{nn}$, т. е. $(C_{ij})_{n,n} = ((K_{ij})_{n,n})^{-1}$.

Итак, n-мерное нормальное распределение полностью определяется её центром $(m_1, \dots, m_n)$ и корреляционной матрицей $(K_{ij})_{nn}$.

Глава 8. **Предельные теоремы**

Предельные теоремы выясняют асимптотические свойства сумм и средних случайных величин, когда их число стремится к бесконечности. Суммы и средние при этом теряют характер случайности; их поведение можно предсказать с вероятностью, близкой к единице. Предельные теоремы лежат в основе асимптотических методов математической статистики.

§ 1. Неравенства Маркова и Чебышёва

1. Неравенство А. А. Маркова. Если X – неотрицательная случайная величина, имеющая конечное математическое ожидание m_X, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\mathrm{P}(X \geq \varepsilon) \leq m_X / \varepsilon. \tag{1.1}$$

Оно даёт оценку вероятности попадания случайной величины в промежуток $[\varepsilon, +\infty)$.

► Введём дискретную случайную величину $Y_\varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ при } X \geq \varepsilon, \\ 0 \text{ при } X < \varepsilon. \end{cases}$

Для неё $\mathrm{M}[Y_\varepsilon] = 0 \cdot \mathrm{P}(X < \varepsilon) + 1 \cdot \mathrm{P}(X \geq \varepsilon) = \mathrm{P}(X \geq \varepsilon)$. Далее, так как случайная величина X – неотрицательная, то $X \geq X \cdot Y_\varepsilon \geq \varepsilon Y_\varepsilon$. Тогда

$$\mathrm{M}[X] \geq \mathrm{M}[\varepsilon Y_\varepsilon] = \varepsilon \mathrm{M}[Y_\varepsilon] = \varepsilon \cdot \mathrm{P}(X \geq \varepsilon).$$

Отсюда $\mathrm{P}(X \geq \varepsilon) \leq m_X / \varepsilon$. ◄

Замечание 1.1. При доказательстве неравенства Маркова использовано свойство нестрогого возрастания оператора математического ожидания:

если $X \geq Y$, то $\mathrm{M}X \geq \mathrm{M}Y$.

►В самом деле, $X-Y\geq 0$. Тогда $\mathrm{M}[X-Y]=\mathrm{M}X-\mathrm{M}Y\geq 0$, т. е. $\mathrm{M}X\geq \mathrm{M}Y$.◄

2.Неравенство П. Л. Чебышёва. Если случайная величина X имеет конечные математическое ожидание m_X и дисперсию D_X, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\mathrm{P}\left(\left|X - m_X\right| \geq \varepsilon\right) \leq D_X / \varepsilon^2. \tag{1.2}$$

Оно следует из неравенства Маркова для случая неотрицательной случайной величины $|X - m_X| = |\overset{\circ}{X}|$:

$$\mathrm{P}(|\overset{\circ}{X}| \geq \varepsilon) = \mathrm{P}(|\overset{\circ}{X}|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}{}^2]/\varepsilon^2 = D_X / \varepsilon^2.$$

Неравенство (1.2) даёт оценку вероятности попадания случайной величины X в область, лежащую вне промежутка $[m_X - \varepsilon, m_X + \varepsilon]$.

Неравенство Чебышёва применяется непосредственно в математической статистике, а также для доказательства следующей теоремы Чебышёва.

§ 2. Теоремы Чебышёва и Бернулли. Сходимость по вероятности

Теорема 2.1 (П. Л. Чебышёв, 1886) *для случая одинаково распределенных слагаемых.* Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ попарно независимы, одинаково распределены, имеют математическое ожидание m и дисперсию D. Тогда имеет место предельное соотношение

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \forall\varepsilon > 0. \tag{2.1}$$

Теорема Чебышёва носит также название *закона больших чисел*. Вероятностный смысл её в том, что арифметическое среднее случайных величин с увеличением числа слагаемых все менее вероятно отклоняется по модулю от своего общего математического ожидания m на любую величину ε.

►Рассмотрим случайную величину $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. По свойствам дисперсии:

$$DY_n = D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k = \frac{1}{n^2} nD = \frac{D}{n}.$$

Далее по свойствам математического ожидания находим

$$\mathrm{M}Y_n = \mathrm{M}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n}\mathrm{M}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}X_k\right] = \frac{1}{n}nm = m.$$

Используем неравенство Чебышёва (1.2):

$$\mathrm{P}\left(\left|Y_n - \mathrm{M}Y_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DY_n}{\varepsilon^2} = \frac{D}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Это означает, что $\mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to} 0$.◄

В математической статистике результаты измерения случайной величины X рассматриваются как одинаково распределенные взаимно независимые случайные величины. Взяв их среднее арифметическое, можно сколь угодно близко приблизиться к искомому математическому ожиданию $m_X = m$ с вероятностью, сколь угодно близкой к единице. Теорема Чебышёва лежит в основе этого асимптотического метода математической статистики.

Определение 2.1. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ называется *сходящейся по вероятности* к величине A (случайной или нет), если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место предельное соотношение

$$\mathrm{P}\left(| X_n - A| \geq \varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2.2}$$

Более короткая запись:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} A \text{ или } \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\lim}} X_n = A. \tag{2.3}$$

Замечание 2.1. Результат теоремы Чебышёва удобно записать с помощью обозначений (2.3):

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} m. \tag{2.4}$$

Теорема 2.2 (Я. Бернулли). Относительная частота $\mathrm{P}^*(A)$ события при n независимых испытаниях по схеме Бернулли стремится по вероятности к вероятности события A при $n\to\infty$:

$$\mathrm{P}^*(A)\xrightarrow[n\to\infty]{P}\mathrm{P}(A). \tag{2.5}$$

►Теорема Бернулли есть следствие теоремы Чебышёва. Пусть μ – число появлений события A в n независимых испытаниях, а X_k – число появлений события A в k-м испытании. Это дискретная случайная величина, принимающая два значения: 0 с вероятностью $q = 1 - p$ и 1 с вероятностью $p = \mathrm{P}(A)$, $\mathrm{M}\,X_k = 0\cdot q + 1\cdot p = p$. Очевидно, что $\mu = \sum_{k=1}^{n} X_k$. $\mathrm{P}^*(A) = \frac{\mu}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ есть относительная частота появления события A в n испытаниях. События X_k ($k = 1, \dots, n$) – независимые взаимно, тем более попарно, так как испытания – независимые. Они одинаково распределены, имеют конечное математическое ожидание p и конечную дисперсию

$$DX_k = (0-p)^2 q + (1-p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p+q) = pq.$$

Видим, что события $X_1, \dots, X_n$ удовлетворяют всем условиям теоремы Чебышёва, а потому $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, или $P^*(A) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} P(A)$. ◄

Теорема Бернулли теоретически обосновывает возможность приближенного вычисления вероятности события с помощью его относительной частоты.

§ 3. Центральная предельная теорема для случая одинаково распределённых слагаемых

Определение 3.1. Случайная величина X называется *центрированной и нормированной*, если её математическое ожидание равно нулю, а дисперсия равна единице.

Любую случайную величину X с конечной дисперсией σ_X^2 и математическим ожиданием m_X можно центрировать и нормировать с помощью операции

$$(X - m_X)/\sigma_X, \tag{3.1}$$

что проверяется непосредственно.

Теорема 3.1 (центральная предельная теорема для случая одинаково распределенных слагаемых). Пусть случайные величины $X_1, \dots, X_n$, взаимно независимы, одинаково распределены, имеют конечные математическое ожидание m и дисперсию σ^2. Тогда функция распределения центрированной и нормированной суммы этих случайных величин

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - M\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]}{\sqrt{D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - mn}{\sigma\sqrt{n}} \tag{3.2}$$

стремится при $n \to \infty$ к функции распределения нормальной случайной величины с параметрами 0 и 1 (при любом фиксированном x):

$$F_{Y_n}(x) = P(Y_n < x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x). \tag{3.3}$$

Здесь
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \tag{3.4}$$

– функция Лапласа.

Доказательство теоремы приведено в [14, 7] .

Замечание 3.1. Центральная предельная теорема, гарантирующая результат (3.3), доказана не только для одинаково распределённых слагаемых, но и при гораздо более общих предположениях, которые обеспечивают, в частности, выполнение требования малости дисперсий слагаемых суммы случайных величин по сравнению с дисперсией всей суммы.

Из результата (3.3) следует, что при достаточно большом n сумма Y_n приближённо распределена нормально по закону $N(0,1)$. Но тогда приближённо распределена нормально и сама исходная сумма $\sum_{k=1}^{n} X_k$ с параметрами $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}X_k$ и $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} DX_k}$. Это утверждение основывается на следующем простом факте: если закон распределения случайной величины $(X-m)/\sigma$ есть $N(0,1)$, то закон распределения X есть $N(m,\sigma)$.

►По условию $\mathrm{P}(X<x)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-m}{\sigma}<\dfrac{x-m}{\sigma}\right)=\Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$.◄

Нормальный закон широко распространён в природе. Приведём примеры.

1. Ошибка измерения распределена нормально, так как является суммой большого числа малых ошибок, проистекающих из колебаний параметров среды (температура, влажность, давление и т. д.), колебаний состояния мерительного инструмента, состояния измеряющего субъекта и т. д.

2. По аналогичным причинам распределены нормально координаты точки падения снаряда.

3. Нормально распределена шумовая помеха в управляющем устройстве.

Теорема 3.2 (интегральная теорема Муавра – Лапласа). Пусть μ – число появлений события A в n независимых испытаниях по схеме Бернулли, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p ($0<p<1$; $q=1-p$). Тогда для любых a и b, $a<b$, имеет место предельное соотношение

$$\mathrm{P}\left(a \le \frac{\mu-np}{\sqrt{npq}}<b\right) \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b e^{-t^2/2}dt=\Phi(b)-\Phi(a). \quad (3.5)$$

Здесь $\Phi(x)$ – функция Лапласа (3.4).

Интегральная теорема Муавра – Лапласа является следствием центральной предельной теоремы, хотя была доказана ранее независимо (А. Муавр – англ., 1667–1754). На ней основана *интегральная приближенная формула Муавра – Лапласа*, применяемая для подсчета сумм биномиальных вероятностей:

$$\sum_{k=0}^{m} P_{n,k}(p) \approx \Phi((m-np)/\sqrt{npq}). \quad (3.6)$$

Здесь $\Phi(x)$ – функция Лапласа (3.4).

Действительно, $\sum_{k=0}^{m} P_{n,k}(p)=\mathrm{P}(\mu \le m) \approx \mathrm{P}(-\infty<\mu<m)=$

$$=\mathrm{P}\left(-\infty<\frac{\mu-np}{\sqrt{npq}}<\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi(-\infty)=\Phi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Формула (3.6) применяется при больших n и малых p таких, чтобы число $(m-np)/\sqrt{npq}$ было средним – в пределах таблицы значений аргумента для функции Лапласа, т. е. в пределах от 0 до 5.

Пример 3.1. По каналу связи передано n = 10 000 символов. Вероятность искажения каждого символа помехами $p=0.001$. Действие помех на каждый символ происходит независимо. Какова вероятность, что при передаче будет не более 15 искажений?

► Применяем формулу (3.6): $n=10\,000$, $p=0.001$, $q=0.999$; $1/\sqrt{npq}=0.316$; $m=15$; $(m-np)/\sqrt{npq}=(15-10)\cdot 0.316=1.58$; $\Phi(1.58)=0.943$. Следовательно, $\sum_{k=0}^{15} P_{n.k}(0.001)\approx 0.943$. ◄

Глава 9*. **Введение в теорию массового обслуживания**

§ 1. Системы массового обслуживания

Всякая система массового обслуживания состоит из входящего потока заявок (вызовов, требований, клиентов), обслуживающих приборов (аппаратов, каналов, мастеров), дисциплины обслуживания и выходящего потока обслуженных заявок.

Система массового обслуживания характеризуется структурой, представленной на рис. 1.1. Основные элементы этой структуры:

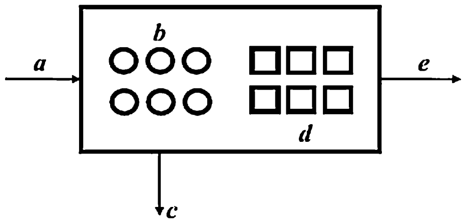


Рис. 1.1. *Структура системы массового обслуживания*

Основные элементы этой структуры:

a – входящий поток требований на обслуживание;
b – очередь требований, ожидающих начала обслуживания;
c – выходящий поток требований, получивших отказ;
d – обслуживающие аппараты;
e – выходящий поток обслуженных требований.

Примерами таких систем являются телефонные станции, магазины, ремонтные мастерские, морские порты и аэропорты, учреждения, работающие с населением, и т. д. В качестве обслуживающих приборов могут выступать физические устройства, люди, учреждения.

Системы массового обслуживания классифицируются по свойствам входящего потока заявок, дисциплине обслуживания, свойствам и количеству приборов. Изучены системы с отказами, с очередью, ограниченной и неограниченной, с приоритетами, со случайным и неслучайным временем обслуживания и т. д.

Работа системы состоит в том, что в систему одна за другой в общем случае в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание. Поступившая заявка занимает свободный прибор и обслуживается в общем случае за случайное время. Если все приборы(мастера) заняты, то заявка становится в очередь или получает отказ в обслуживании.

Рассмотрим систему, в которой входящий поток распределён по закону Пуассона (гл. 5) с параметром $\lambda > 0$. Параметр λ – среднее число заявок на обслуживание, поступающих в систему за единицу времени (например за час), X – число поступивших заявок

$$P(X=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Время T обслуживания каждым из n приборов – случайно и распределено по показательному закону (гл. 5) с параметром μ, где μ-среднее число обслуженных заявок за единицу времени одним прибором (мастером).

Замечание 1.1. Поток заявок, описываемый процессом Пуассона, в теории массового обслуживания называется простейшим, а также пуассоновским потоком.

Теорема 1.1. При показательном законе распределения времени обслуживания закон распределения оставшегося времени обслуживания не зависит от того, сколько времени обслуживание уже длилось, и потому он такой же, как закон распределения полного времени обслуживания, то есть является показательным законом с тем же самым параметром μ.

▶Время обслуживания T для всех t и $a>0$ удовлетворяет соотношению $\{T>t+a\}\subset\{T>a\}$, следовательно,

$$P(T>t+a/T>a)=\frac{P(T>t+a)}{P(T>a)}=\frac{e^{-\mu(t+a)}}{e^{-\mu a}}=e^{-\mu t}=P(T>t).◀$$

Так как M[T]=$1/\mu$ среднее время обслуживания одной заявки, то μ есть среднее число обслуженных заявок в единицу времени одним прибором, т. е. интенсивность потока освобождений одного прибора. k приборов дают интенсивность потока освобождений $k\mu$.

Системы массового обслуживания с простейшим потоком заявок и показательным временем обслуживания называются марковскими.

§ 2. Процесс рождения и гибели

Прежде, чем изучать системы массового обслуживания, обратимся к рассмотрению более общей физической системы. Элементы системы могут быть живыми организмами, приборами, станками, заявками и т. д.

Если в системе в момент t находится k элементов, то будем говорить, что система в момент t находится в состоянии E_k. Из состояния E_k система может перейти в следующее соседнее состояние E_{k+1} в результате поступления (рождения) нового элемента. Система может также перейти в предыдущее соседнее состояние E_{k-1} в результате убытия (гибели) одного элемента.

Обозначим через p_k вероятность состояния E_k. Рождение элементов создает поток рождений, а гибель элементов создаёт поток гибели элементов. Пусть λ_k – число родившихся элементов за единицу времени, а μ_k – число погибших элементов за единицу времени, если система находится в состоянии E_k. Числа λ_k и μ_k называются интенсивностями рождений и гибели соответственно.

Для каждого состояния в стационарном режиме поток рождений уравновешивается потоком гибели. Рассмотрим граф переходов системы из состояния в состояние (рис. 4.1).

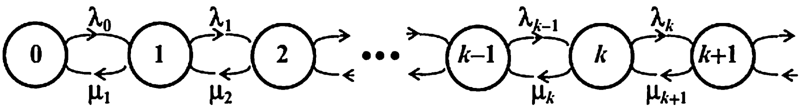


***Рис. 2.1.** Граф интенсивностей переходов из состояния в состояние для системы, описываемой процессом рождения и гибели в стационарном режиме*

В состоянии E_k количество входящих элементов в среднем за единицу времени равно $\lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}$ (учитываются рождения в предыдущем состоянии и гибель в следующем). Количество уходящих элементов из состояния E_k в среднем за единицу времени равно $\lambda_k p_k + \mu_k p_k$. В каждом состоянии входящий поток должен быть равен исходящему. Это условие сохранения приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1, \\ \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} = \lambda_k p_k + \mu_k p_r; (k = 1,2,...), \\ \lambda_{n-1}p_{n-1} = \mu_n p_n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Последнее уравнение относится к случаю когда число состояний системы конечно и равно n. Решим систему (2.1).

Положим $z_k = \lambda_k p_k - \mu_{k+1}p_{k+1}; (k = 0,1,2,...)$ Тогда система (2.1) запишется в виде $z_0 = 0;\quad z_k - z_{k+1} = 0;\quad (k = 1,2,...)$. Отсюда $z_k = 0;\quad (k = 0,1,...)$. Таким образом $p_k = \dfrac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}p_{k-1};\quad (k = 1,2...)$.

Последовательно находим $p_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}p_0; p_2 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_2}p_1 = \dfrac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}p_0;...;$ $p_k = \dfrac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2...\mu_k}p_0 = \pi_k p_0; (k = 0,1,...)$. Здесь $\pi_k = \dfrac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2...\mu_k};\quad \pi_0 = 1;\quad (k = 1,2,...)$ Вероятность p_0 находим из нормирующего условия $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i p_0 = 1;\quad p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{\infty}\pi_i}.$$

Но тогда $$p_k = \frac{\pi_k}{\sum\limits_{i=0}^{\infty}\pi_i}. \quad \pi_k = \frac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2...\mu_k}; \quad \pi_0 = 1; \quad (k = 1,2,...) \qquad (2.2)$$

Здесь предполагалось, что $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\pi_i < +\infty$.

Замечание 2.1. Работу многих систем массового обслуживания можно описать процессом рождения и гибели.

§ 3. Система массового обслуживания с отказами

Рассмотрим работу системы массового обслуживания с отказами в стационарном режиме. Она укладывается в схему для процесса рождения и гибели. В этом случае $\lambda_k = \lambda; \mu_k = k\mu$. Как и для процесса рождения и гибели, составим уравнение, выражающее равенство в среднем входящего потока заявок и потока освобождений приборов за единицу времени для состояния E_k, воспользовавшись графом интенсивностей переходов $\lambda p_{k-1} + \mu(k+1)p_{k+1} = \lambda p_k + \mu k p_k$ (рис.3.1):

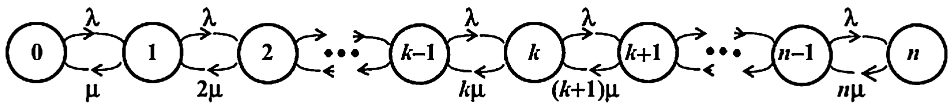


Рис. 3.1. Граф интенсивностей переходов системы массового обслуживания с отказами из состояния в состояние в стационарном режиме

Для крайних состояний E_0 и E_n эти уравнения принимают вид $\lambda p_0 = \mu p_1$ и $\lambda p_{n-1} = n\mu p_n$. В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda p_0 - \mu p_1 = 0; \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0; (k = 1,...,n-1). \\ \lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0; \end{cases} \qquad (3.1)$$

Разделим все уравнения на μ и положим $\frac{\lambda}{\mu} = c$, получим

$$\begin{cases} cp_0 - p_1 = 0; \\ (cp_{k-1} - kp_k) - (cp_k - (k+1)p_{k+1}) = 0; (k = 1,...,n-1); \\ cp_{n-1} - np_n = 0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Положим $cp_{k-1} - kp_k = z_k$, $(k = 1,...,n)$. Система принимает вид $z_1 = 0; \quad z_k - z_{k+1} = 0; \quad z_n = 0.$

Из нее находим $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$. Тогда $p_k = \frac{c}{k} p_{k-1}$. Последовательно получаем $p_1 = \frac{c}{1} p_0;\ p_2 = \frac{c}{2} p_1 = \frac{c^2}{2!} p_0; \ldots; p_k = \frac{c^k}{k!} p_0;\ (k = 0,1,\ldots,n)$. p_0 найдём из нормирующего условия $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$: $p_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k!} = 1$. Отсюда $p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k!} \right)^{-1}$. Итак,

$$p_k = \frac{c^k}{k!} p_0;\ p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k!} \right)^{-1};\quad c = \frac{\lambda}{\mu};\quad (k = 1,\ldots,n). \tag{3.3}$$

Это так называемые формулы Эрланга для вероятностей состояний системы с отказами в стационарном режиме (Эрланг Агнер Краруп, (1878 – 1929), датский учёный, занимавшийся вопросами телефонии).

Из этих формул находим некоторые важные характеристики системы:
– вероятность простоя системы (занято обслуживанием 0 приборов): p_0.
– вероятность отказа в обслуживании (все приборы заняты): p_n.

Среднее число занятых приборов $M = c(1 - p_n)$. Величина $c=\lambda/\mu$ называется приведённой плотностью потока заявок – это среднее число заявок, поступающих за среднее время обслуживания одной заявки.

Приведённые формулы характеризуют систему массового обслуживания в так называемом стационарном режиме, когда затухли переходные процессы. Теоретически он возникает при времени $t \to \infty$. На практике стационарный (установившийся) режим возникает в конечное время (довольно быстро).

Пример 3.1. Автоматическая телефонная станция (АТС) имеет 6 линий связи. Поток вызовов, поступающих на АТС – пуассоновский с параметром $\lambda = 4$ вызова в минуту, а время каждого разговора распределено по показательному закону с параметром $\mu = 2$ мин$^{-1}$. Требование получает отказ, если в момент его поступления на АТС все 6 линий связи заняты. Требуется вычислить вероятность отказа.

Для данной системы параметр $c = \lambda/\mu = 2$. Вероятность отказа, т. е. вероятность того, что разговор не состоится, $p_{отк} = p_n = \frac{2^6}{6!} \Big/ \sum_{i=0}^{6} \frac{2^i}{i!} = 0{,}012$, а данная система загружена не полностью, вполне можно сократить общее число линий и увеличить поток вызовов. ◀

Пример 3.2. Телефонная система массового обслуживания с отказами.

Фирма имеет $n = 4$ телефонных диспетчеров. Среднее число вызовов в течение часа составляет $\lambda = 96$. Среднее время телефонного разговора $T = 2$ минуты. Определить степень загрузки диспетчеров и вероятность отказа в обслуживании.

►Определим параметр системы $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{96}{60/2} = 3,2.$

1. Вероятность того, что все диспетчеры свободны

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{3,2^0}{0!} + \dfrac{3,2^1}{1!} + \dfrac{3,2^2}{2!} + \dfrac{3,2^3}{3!}} = 0,068.$$

2. Вероятность того, что все диспетчеры заняты (вероятность отказа) $p_4 = \dfrac{3,2^4}{4!} \cdot 0,068 = 0,3,$ Т.е. клиент не может дозвониться с первого раза в 3 случаях из 10.

3. Среднее число занятых диспетчеров $M_1 = 3,2(1-0,3) = 2,24.$

4. Коэффициент загрузки каналов

$$K = \frac{2,24}{4} = 0,56.$$

Следовательно, каждый диспетчер будет занят в среднем 0,56 рабочего дня.◄

Замечание 3.1. Для данного класса систем массового обслуживания можно решать задачи выбора оптимального количества аппаратов, подбора параметров обслуживающего комплекса, расчёта пропускной способности системы и др.

Пример 3.3. Определить вероятность того, что изделие пройдет без контроля, если число контролёров ОТК n, проверяющих продукцию на конечном этапе сборочного конвейера,равно *4*.. Статистическое обследование показало, что поток изделий на конвейере – простейший с параметром $\lambda = 0{,}5$ шт./мин, время контроля одного изделия – случайно и распределено по показательному закону с параметром $\mu = 0{,}25$ шт./мин.

►Используя соотношении (3.3) при $\lambda = 0{,}5$ и $\mu = 0{,}25$ получим, что вероятность отказа, т.е. вероятность, p_8= 0,66. ◄

§ 4. Система массового обслуживания с ожиданием и с неограниченной очередью

Принимаем следующие исходные положения. Система состоит из n обслуживающих приборов. На неё поступает простейший поток заявок с интенсивностью (параметром) λ. Каждый прибор одновременно может обслуживать только одну заявку. Если в момент поступления очередной заявки в системе уже находится $k \geq n$ заявок, то эта заявка становится в очередь и ждёт начала обслуживания в порядке очереди. Время обслуживания одной заявки подчинено показательному закону с параметром μ.

Работа системы укладывается в схему для процесса рождения и гибели.

В этом случае

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda; \quad (k = 0,1,\ldots); \\ \mu_k = \begin{cases} k\mu; & k = 1,\ldots,n; \\ n\mu; & k > n. \end{cases} \end{cases} \tag{4.1}$$

Система (2.1) в этом случае принимает вид

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0; \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0; 1 \le k < n; \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + n\mu) p_k + n\mu p_{k+1} = 0; \quad k \ge n. \end{cases} \tag{4.2}$$

Решая эту систему так же, как и для системы с отказами, получаем следующие формулы:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0; & 1 \le k < n; \\ \dfrac{1}{n! n^{k-n}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0; & k \ge n, \end{cases} \tag{4.3}$$

где

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n}\right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{n\mu}{n\mu - \lambda}\right]^{-1}. \tag{4.4}$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n}$ сходится, если $\dfrac{\lambda}{n\mu} < 1$, что и будем предполагать. Если же $\dfrac{\lambda}{n\mu} > 1$, то сумма ряда будет равна бесконечности и потому p_0 и все $p_k; (k \ge 1)$ будут равны нулю. Система не перейдёт в стационарное состояние, так как очередь будет бесконечно расти. Система не справляется с обслуживанием.

Отметим некоторые **показатели эффективности.**

1. Вероятность того, что все обслуживающие приборы свободны равна p_0.

2. Вероятность ожидания равна

$$p_{ож} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = \frac{n^n}{n!} p_0 \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} = \frac{p_n}{1 - \lambda/(n\mu)}. \tag{4.5}$$

3. Средняя длина очереди

$$M_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n) p_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n) p_n \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} = p_n \frac{\lambda}{n\mu} \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{j-1} =$$

$$= \frac{p_n (\lambda/(n\mu))}{(1 - \lambda/(n\mu))^2}. \tag{4.6}$$

4. Среднее число приборов, свободных от обслуживания,

$$M_2 = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)p_k = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0. \qquad (4.7)$$

Пример 4.1. Определить число взлетно-посадочных полос на аэродроме, необходимое для того, чтобы вероятность ожидания посадки или взлета для самолета была меньше 0,1. Статистическим исследованием установлено, что поток прибывающих и взлетающих самолетов – простейший с параметром $\lambda = 27$ единиц / час, а время приземления или взлета распределено по показательному закону с параметром $\mu = 30\,(час)^{-1}$.

►Воспользуемся формулами (4.3), (4.4), (4.5). Последовательно подбираем n – число нужных полос. Проверяем $n = 3$.

$\lambda/\mu = 27/30 = 0{,}9$. По условию $p_{ож} = \dfrac{p_n}{1-\lambda/(n\mu)} = \dfrac{p_n}{0{,}7}$.

Далее вычисляем $p_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \dfrac{1}{6}(0{,}9)^3 p_0 = 0{,}1215 p_0$.

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{3\mu}{3\mu-\lambda}\right]^{-1} = [1 + 0{,}9 + 0{,}405 + 0{,}1736]^{-1} = 0{,}403.$$

Тогда $p_{ож} = \dfrac{0{,}1215 \cdot 0{,}403}{0{,}7} \approx 0{,}07 < 0{,}1$. Из проделанного расчёта убеждаемся, что $n = 3$ достаточно.◄

Первые основные результаты в теории массового обслуживания из области телефонии принадлежат датскому ученому Агнеру Краруп Эрлангу (датчанин, 1878 – 1929). Большой вклад в теорию массового обслуживания сделал советский математик Александр Яковлевич Хинчин (1894 – 1959), который развивал ее также в связи с запросами телефонии.

Глава 10. **Задания для проверки качества усвоения раздела 10**

§ 1. Задачи для самостоятельной работы (по главам)

(часть задач взята из [8, 9, 14, 18])

Глава 1. Алгебра событий

1. Если $A \subset B$, то чему равно $A+B$?

2. Если $A \subset B$, то чему равно AB?

3. Пусть A, B, C–три призвольных события. Укажите выражение для события, состоящего в том, что :

3–1. произошло только событие A.

3–2. произошло одно и только одно из этих событий.

3–3. произошли только события A и B, но C не произошло.

3–4. произошло лва и только два из этих событий.

3–5. все три события произошли.

3–6. произошло не более двух событий.

4. Докажите формулу $A+B=AB+\overline{A}B+A\overline{B}$.

5. Букет составляется из нарциссов, тюльпанов и веток сирени, которые берутся в любой комбинации. Событие A – для букета выбраны нарциссы, B – тюльпаны, C – ветки сирени. Опишите следующие события: $\overline{\overline{A}+\overline{C}+B}$, $A\overline{C}$, $\overline{B}C$. Образуют ли они полную группу событий?

6. При каких событиях A, B и C возможно равенство $A+B+C=A$?

7. Упростите выражение $A=(B+C)(B+\overline{C})(\overline{B}+C)$.

Глава 2. Вероятность события

1. Точка случайным образом бросается в квадрат $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$. Используя геометрическое определение вероятности, найдите вероятность попадания случайной точки в часть квадрата, лежащую ниже параболы $y=x^3$.

2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 3.

3. От каждой из двух групп людей путём жеребьёвки выбираются по одному представителю. В первой группе 4 женщины и 5 мужчин, а второй – 7 женщин и 3 мужчины. Найдите вероятность того,что представители будут разного пола.

4. Монета бросается 3 раза. Найти вероятность, что орёл выпадет хотя бы раз.

5. В урне 4 шара: 2 белых и 2 чёрных. Последовательно вынимаются 2 шара. Найти вероятность того, что они будут разного цвета.

6. Из одного комплекта костей домино случайным образом подряд выбираются две кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выбранных костях будет равна 3.

Глава 3. Комбинаторика

1. В лифте пятиэтажного дома находятся 3 человека, каждый из которых может выйти на любом из четырёх этажей. Найти вероятность, что все пассажиры выйдут на разных этажах.

2. На полке 5 книг. Книги сняты с полки и после реставрации поставлены на полку в случайном порядке. Найти вероятность, что два тома № 1 и № 2 одного автора окажутся стоящими рядом в порядке возрастания номеров.

3. В лотерейном билете «спортлото 6 из 49» нужно зачеркнуть 6 номеров из имеющихся 49. Выигрыш может быть получен на 3, 4, 5, 6 зачёркнутых выигрышных номера. Найти вероятность выигрыша на 6 произвольно зачёркнутых номеров.

4. Кнопочный замок из 10 кнопок открывается если одновременно правильно нажаты 3 кнопки. Найти вероятность, что при случайном наборе трёх одновременно нажатых кнопок замок откроется.

5. На фондовую биржу в продажу поступили 52 акции Рамонского сахарного завода по номинальной стоимости, из них 15 акций являются привилегированными. Организация приобрела 7 акций завода. Найти вероятность того, что среди них окажутся:

а) 3 привилегированные акции;

б) хотя бы 2 привилегированные акции.

6. Генеральный директор фирмы едет в командировку и ему нужно зарезервировать номер в отеле. У него в блокноте в случайном порядке записано 15 номеров отелей, причем 5 из этих отелей – пятизвездочные. Генеральный директор выбирает 3 номера наугад, по которым он хочет осведомиться, есть ли свободные места в этих отелях. Найти вероятность того, что хотя бы один отель окажется пятизвездочным.

Глава 4. Алгебра вероятностей

1. Независимо испытываются два прибора двух различных типов. Приборы первого типа выходят из строя при испытании с вероятностью 0.2, а второго типа – с вероятностью 0.3. Найдите вероятность того, что прибор первого типа выйдет из строя, а второй – нет.

2. При сохранении условий задачи 1 найдите вероятность того, что при испытании выйдет из строя хотя бы один прибор.

3. К бензозаправочной станции для заправки проезжающая по шоссе легковая автомашина обращается с вероятностью 0.02, а грузовая – с вероятностью 0.01. Легковых автомашин проезжает по шоссе вдвое больше, чем грузовых. Найдите вероятность того, что проезжающая по шоссе автомашина произвольного типа обратится на станцию для заправки.

4. В компьютере находятся данные о зарплате 15 служащих банка, у троих из этих служащих зарплата 1 млн рублей. Начальник отдела труда и заработной платы вывел на экране дисплея данные о зарплате двух служащих. Найти вероятность того, что у обоих этих служащих зарплата 1 млн рублей.

5. Вероятность своевременного прибытия каждого поезда дальнего следования, проходящего через вокзал станции Бологое, равна 0,95. Определить вероятность того, что из 5 последовательно прибывших поездов 4 прибудут без опоздания.

6. На фирме работают 13 менеджеров, из которых 3 – женщины. В выходной день занято 3 человека. Найти вероятность того, что в выходной день при случайном выборе, все работающие – мужчины.

7. В тестировании, проведенном фирмой «ИНВЕСТ PLUS», участвовало 20 бухгалтеров, 6 менеджеров и 4 специалиста по маркетингу. Вероятность выполнения теста для бухгалтеров – 0,9, для менеджеров – 0,8, для специалистов маркетинга – 0,75. Найти вероятность того, что участник теста, вызванный наугад, выполнил норму.

8. Среди шести акций некоторого акционерного общества, которыми обладает акционер, привилегированными являются только две. Вероятность получения дивидендов от привилегированной акции равна 0,9, а с обычной – 0,2. На собрании акционеров владельцу сообщили о получении дивидендов. Определить вероятность того, что дивиденды получены:

1) от обычной акции;

2) от привилегированной акции.

9. Орудие стреляет по цели 4 раза. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.4. Найдите вероятность того, что произойдёт 2 попадания в цель.

10. Монета бросается 3 раза. Найти вероятность того, что орёл выпадет хотя бы один раз.

11. 4 сообщения посланы независимо по различным каналам связи. Вероятность того, что каждое сообщение дойдет до адресата, равна $p = 0.6$. Найти вероятность того, что до адресата дойдет не менее трех сообщений.

12. В партии $n = 100$ изделий. Вероятность брака $p = 0.01$. Используя приближенную формулу Пуассона, напишите формулу для вероятности события, означающего, что в партии не более одного бракованного изделия.

13. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок:

1) ровно две, 2) менее двух, 3) более двух, 4) хотя бы одну .

14. Инвестиции в основной капитал составляют по источникам финансирования 80% по внебюджетным средствам и 20% по бюджетным средствам. Определить вероятность того, что из 500 инвестиционных проектов инвестирования по внебюджетным средствам будет от 390 до 420 проектов.

15. Один из видов продукции производится на 3 фабриках, входящих в состав производственного объединения. Первая фабрика производит всего 40% всего выпуска продукции, вторая – 35%, третья – 25%. В продукции первой фабрики обнаружено 30% изделий 1-го сорта, продукции второй фабрики 20%, и в продукции третьей фабрики – 12%. Какова вероятность того, что среди 500 изделий производственного объединения число изделий высшего качества от 90 до 120.

Глава 5. Одномерная случайная величина

1. Дискретная случайная величина принимает значения 1, 2, 3 соответственно с вероятностями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. Найдите m_X, D_X, σ_X.

2. Вероятность брака изделия равна $p = 0.1$. Из партии сделана выборка трёх произвольных изделий. Пусть X – число бракованных изделий в выборке. Составьте закон распределения X и найдите m_X.

3. Плотность вероятности $f(x)=\begin{cases} Cx, & \text{при } x\in[0;2], \\ 0, & \text{при } x\notin[0;2]. \end{cases}$ Найдите C, $F(x)$, m_X.

4. Вероятность того, что безработный, обратившийся в службу занятости будет устроен на работу в течение первого месяца после регистрации на бирже труда, равна 0,5. Безработный обращается ежемесячно до тех пор, пока он не устроится на работу. Составьте ряд распределения дискретной случайной величины X – числа попыток, предоставленных безработному.

5. Удельный вес вкладов населения в Сбербанк России и коммерческие банки в общем объёме вкладов населения в банках в течение 20 подотчетных дней декабря задается непрерывной случайной величиной X, распределенной равномерно в интервале (5; 25).

Найти:

а) плотность распределения и интегральную функцию распределения и построить их графики;

б) вероятность попадания случайной величины в интервал (10; 15).

6. Кредиты банков, предоставленные экономике (без долгосрочных кредитов на финансирование инвестиций в основной капитал) в течение некоторого подотчетного периода задаётся непрерывной случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром $\lambda = 3$.

Найти:

а) плотность распределения;

б) интегральную функцию распределения и построить их графики;

в) вероятность того, что в результате анализа случайная величина попадает в интервал (1; 5).

7. Изменение розничного товарооборота по каналам реализации является случайной величиной, распределенной по нормальному закону, $d_x = 0{,}01, m_x = 12{,}5$ триллиона рублей. В каких границах с вероятностью 0,9973 можно гарантировать размер товарооборота?

8. Случайная величина X, описывающая динамику производства отдельных видов продукции металлургической промышленности, распределена по нормальному закону с параметрами $d_x = 4, m_x = 1$. Определить вероятность того, что случайная величина X окажется в интервале (2; 5).

9. Функция распределения непрерывной СВ задана формулой

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\infty,-1], \\ A+x+x^2/2, & x\in[-1,0], \\ B+x+Cx^2, & x\in[0,1], \\ 1, & x\in[1,+\infty]. \end{cases}$$

Найдите A, B, C, $f(x)$, m_x, D_x, $P(X>1/2)$.

Постройте графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

10. Плотность распределения непрерывной СВ задана формулой $f(x)=\begin{cases} c(|x|-x^2), & x\in[-1,1], \\ 0, & x\notin[-1,1]. \end{cases}$ Найдите c, m_x, $F(x)$, D_x, $P(X\in[1/2,3/2])$.
Постройте графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Глава 6. Двумерная случайная величина

1. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) имеет следующий закон распределения: $\mathbf{P}(X=0, Y=0)=\frac{1}{8}$; $\mathbf{P}(X=1, Y=0)=\frac{3}{8}$; $\mathbf{P}(X=0, Y=1)=\frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(X=1, Y=1)=\frac{1}{4}$. Найдите коэффициент корреляции ρ_{XY}.

2. Двумерная непрерывная случайная величина имеет плотность вероятности $f_{XY}(x,y)=C(1-x)y$ при $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ и $f_{XY}(x,y)=0$ в остальных случаях. Найдите коэффициент C.

3. Двумерная непрерывная случайная величина (X, Y) имеет плотность вероятности $f_{XY}(x,y)$ ту же, что и в задаче 15. Найдите плотности распределения компонент X и Y.

4. Двумерная непрерывная случайная величина имеет плотность вероятности $f_{XY}(x,y)$ ту же, что и в задаче 15. Найдите коэффициент корреляции ρ_{XY}.

5. Двумерная случайная величина (X, Y) задана таблицей. Построить законы распределения компонент. Являются ли X, Y зависимыми или независимыми?

X/Y	0	1
0	0. 3	0.1
1	0.2	0.4

6. Найдите c и плотности вероятностей случайных величин X, Y, если $f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c(x+y), & x\in[0,1], y\in[0,1], \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$ Являются ли X, Y зависимыми или независимыми?

§ 2. Контрольные вопросы к разделу 10

Глава 1. **Алгебра событий**

1. Что такое сумма событий?

2. Дайте определение соотношения «событие A влечет событие B».

3. Дайте определение события, противоположного событию A.

4. Что называется произведением двух событий ?

5. Запишите формулы, выражающие переместительные, сочетательные, распределительные свойства сложения и умножения событий.

6. Какие события могут появиться в результате проведения эксперимента. Дайте их определения.

7. Что такое диаграммы Венна?

8. Какие события называются несовместными? Как они изображаются на диаграмме Венна?

9. Что такое полная группа событий?

10. Что такое частный случай события?

11. Какие события называются эквивалентными?

12. Что такое событие в аксиоматической схеме?

Глава 2. **Вероятность события**

13. Сформулируйте классическое определение вероятности.

14. Сформулируйте аксиоматическое определение вероятности.

15. Сформулируйте статистическое определение вероятности.

16. Сформулируйте геометрическое определение вероятности.

17. Что такое относительная частота события?

18. Укажите свойства относительной частоты события.

19. В каких пределах заключена вероятность события? Каким событиям соответствуют крайние значения вероятности?

20. Как связаны вероятности противоположных событий?

21. Чему приближённо равна относительная частота события при большом числе n проведённых опытов?

22. Запишите свойства вероятности.

23. Чему равна вероятность суммы противоположных событий?

Глава 3. **Комбинаторика**

24. Сформулируйте основной комбинаторный принцип «умножения».

25. Что такое размещения из n элементов по k элементам?

26. Напишите формулу для вычисления A_n^k.

27. Что такое перестановки из n элементов?

28. Напишите формулу для P_n.

29. Что такое сочетания из n элементов по k элементов?

30. Напишите формулу для вычисления C_n^k.

31. Что такое размещения с повторениями из n элементов по k элементов?

32. Напишите формулу для вычисления V_n^k.

Глава 4. **Алгебра вероятностей**

33. Сформулируйте определение условной вероятности.

34. Сформулируйте правило умножения вероятностей двух любых событий.

35. Сформулируйте теорему умножения вероятностей n любых событий.

36. Какие два события называются независимыми?

37. Сформулируйте определение взаимной независимости n событий.

38. Запишите формулу, выражающую правило умножения вероятностей n взаимно независимых событий.

39. Сформулируйте аксиому сложения вероятностей для n событий.

40. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для двух любых событий.

41. Сформулируйте теорему сложения вероятностей для n взаимно независимых событий.

42. Запишите формулу полной вероятности.

43. Запишите формулу Байеса.

44. В чём состоит схема Бернулли проведения испытания?

45. Запишите формулу для биномиальной вероятности.

46. Запишите формулу Пуассона для приближённого вычисления биномиальной вероятности.

47. Сформулируйте теорему Пуассона асимптотического поведения биномиальной вероятности.

Глава 5. **Одномерная случайная величина**

48. Сформулируйте определение случайной величины.

49. Что такое закон распределения случайной величины?

50. Сформулируйте определение функции распределения случайной вели чины и её свойства.

51. Какая случайная величина называется дискретной?

52. Что такое ряд и полигон распределения?

53. Напишите формулу для функции распределения дискретной случайной величины.

54. Что такое числовая характеристика случайной величины?

55. Что такое математическое ожидание дискретной случайной величины?

56. Укажите свойства математического ожидания.

57. Что такое дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины?

58. Укажите свойства дисперсии.

59. Что такое производящая функция дискретного распределения с целыми неотрицательными значениями?

60. Запишите формулы, определяющие биномиальное, Пуассона, геометрическое распределения.

61. Сформулируйте определение непрерывной случайной величины.

62. Запишите формулу для математического ожидания непрерывной случайной величины.

63. Что такое мода, медиана, асимметрия случайной величины?

64. Запишите плотности вероятности нормального, показательного, равномерного распределений.

65. Что такое правило трёх сигм для нормальной случайной величины?

Глава 6. **Двумерная случайная величина**

66. Запишите функцию распределения двумерной случайной величины.

67. Сформулируйте определение двумерной случайной величины.

68. Запишите формулы согласованности двумерной дискретной случайной величины.

69. Сформулируйте определение двумерной непрерывной случайной величины.

70. Запишите формулу для функции распределения непрерывной двумерной случайной величины.

71. Запишите формулы согласованности для плотностей в случае двумерной случайной величины.

72. Запишите формулы согласованности для функций распределения в случае двумерной случайной величины общего вида.

73. Запишите формулы, выражающие плотность вероятности через функцию распределения в случаях одномерной и двумерной случайных величин.

74. Запишите формулы для плотностей двумерных равномерного и нормального распределений.

75. Какие две случайные величины называются независимыми?

76. Запишите формулы, выражающие необходимое и достаточное условие независимости двух случайных величин.)

77. Что такое корреляционный момент (ковариация) и коэффициент корреляции?

78. Сформулируйте свойства коэффициента корреляции.

Глава 7. ***n*-мерная случайная величина**

79. Сформулируйте определение n-мерной случайной величины.

80. Что такое n-мерная функция распределения?

81. Какая n-мерная случайная величина называется непрерывной?

82. Что означает, что случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ являются взаимно-независимыми?

83. Запишите необходимое и достаточное условие взаимной независимости n случайных величин, выраженное через функции распределения.

84. Запишите необходимое и достаточное условие взаимной независимости n непрерывных случайных величин, выраженное через их плотности вероятности.

85. Укажите числовые характеристики n-мерной случайной величины, использующие первые два момента.

86. Приведите примеры реальных n-мерных случайных величин.

87. Чему равно $F_{XYZ}(x, y, +\infty)$?

88. Чему равно $F_{XYZ}(-\infty, y, z)$?

89. Запишите неравенство Чебышёва.

90. Сформулируйте теорему Чебышёва.

91. Какое отношение имеет теорема Чебышёва к вопросам математической статистики?

92. Сформулируйте определение сходимости последовательности случайных величин по вероятности.

93. Сформулируйте теорему Я. Бернулли.

94. Какая случайная величина называется центрированной и нормированной?

95. Сформулируйте центральную предельную теорему для случая одинаково распределённых слагаемых.

96. Сформулируйте интегральную теорему Муавра – Лапласа.

97. Запишите интегральную приближённую формулу Муавра – Лапласа.

98. С помощью неравенства Чебышёва оцените сверху вероятность $\mathsf{P}(X \notin [m_X - 3\sigma_X,\ m_X + 3\sigma_X])$.

99. Вероятность опечатки на странице книги равна 0.01. С помощью интегральной приближённой формулы Муавра–Лапласа найдите приближённо вероятность того, что во всей книге, имеющей $n = 500$ страниц, будет не более $m = 10$ опечаток.

§ 3. Тесты по разделу

Вар № 1	**Тесты по разделу «Теория вероятностей»**

1	В урне лежат 2 белых и 8 чёрных шаров. Наугад один за другим вынимают 2 шара (без возвращения). Какова вероятность того, что вынутые шары разного цвета?
2	Какова вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет чётное число очков или число очков меньше 5?
3	В первой урне 8 чёрных и 9 белых шаров, во второй – 2 чёрных и 2 белых. Из одной из урн наугад достали шар. Найдите вероятность того, что этот шар – чёрный.
4	Монетку бросают 5 раз. Найдите вероятность того, что ровно 2 раза выпадет «орёл».
5	Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,003. Поступило 1000 вызовов. Определите вероятность 6-ти «сбоев».
6	Два стрелка поражают цель с вероятностями 0.6 и 0.3 соответственно. Первый стрелок сделал 1, а второй – 2 выстрела. Определите вероятность того, что все выстрелы поразили цель.
7	Дан закон распределения случайной величины: $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline X & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ \hline p & 0.1 & 0.1 & p_3 & 0.1 & 0.1 \\ \hline \end{array}$ Найдите $\mathbf{M}[X]$, предварительно определив p_2.

8	Случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону с плотностями $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+6)^2}{2}}$, $f(y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{(y-5)^2}{4}}$. Найдите $\mathbf{M}[-5X+2Y+7XY-2]$.
9	Случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону с плотностями $f(x)=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-\frac{(x-14)^2}{10}}$, $f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+8)^2}{2}}$. Найдите $\mathbf{D}[-X+5Y-4]$.
10	При каком значении a функция $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 4a(x-2)^2, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3\end{cases}$ будет функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X?
11	Пусть функция распределения случайной величины $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x\left(1-\frac{x}{4}\right), & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$ Найдите вероятность попадания значения случайной величины в интервал $[1/2;1]$.
12	Пусть функция распределения случайной величины $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2;\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$$ Найдите плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины X. В ответе укажите значение $f(x)$ при $x=\pi/3$.

Вар № 2	Тесты по разделу «Теория вероятностей»

1	В урне лежат 4 белых и 6 чёрных шаров. Наугад один за другим вынимают 2 шара (без возвращения). Какова вероятность того, что вынутые шары – разного цвета?
2	Какова вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет чётное число очков или число очков меньше 4?
3	В первой урне 2 чёрных и 7 белых шаров, во второй – 5 чёрных и 5 белых. Из одной из урн наугад достали шар. Найдите вероятность того, что этот шар – чёрный.
4	Монетку бросают 7 раз. Найдите вероятность того, что ровно 3 раза выпадет «решка».
5	Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,01. Поступило 600 вызовов. Определите вероятность 4-х «сбоев».
6	Два стрелка поражают цель с вероятностями 0,6 и 0,3 соответственно. Первый стрелок сделал 1, а второй – 2 выстрела. Определите вероятность того, что цель поражена вторым стрелком при одном выстреле.

<table>
<tr><td>7</td><td>Дан закон распределения случайной величины:
<table>
<tr><td>X</td><td>-20</td><td>-19</td><td>-17</td><td>-16</td><td>-11</td></tr>
<tr><td>p</td><td>0.2</td><td>p_2</td><td>0.1</td><td>0.1</td><td>0.2</td></tr>
</table>
Найдите $\mathbf{M}[X]$, предварительно определив p_2..</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону с плотностями $f(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(x+5)^2}{6}}$, $f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-4)^2}{2}}$. Найдите $\mathbf{M}[7X-35Y+5XY+2]$.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону с плотностями $f(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{6}}$, $f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+6)^2}{2}}$. Найдите $\mathbf{D}[8X-5Y+11]$.</td></tr>
<tr><td>10</td><td>При каком значении a функция $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ 2a\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right), & -2<x\le 2; \\ 1, & x>2 \end{cases}$ будет функцией распределения некоторой непрерывной случайной величины X?</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Пусть функция распределения случайной величины
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right), & -2<x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$$
Найдите вероятность попадания значения случайной величины в интервал $[1/2;1]$.</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Пусть функция распределения случайной величины
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ (1-\cos x), & 0<x\le \pi/2; \\ 1, & x>\pi/2. \end{cases}$$
Найдите плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины X. В ответе укажите значение $f(x)$ при $x=\pi/6$.</td></tr>
</table>

Ответы к заданиям теста

Вариант 1

1) 16/45. **2)** 5/6. **3)** 33/68. **4)** 5/16.
5) $1{,}0125\,e^{-3}$. **6)** 0,054. **7)** 5,1. **8)** - 172.
9) 30. **10)** 0,25. **11)** 5/16. **12)** 0,5.

Вариант 2

1) **8**/15. **2)** 5/6. **3)** 13/36. **4)** 35/126.

5) $54e^{-6}$. **6)** 0,168. **7)** –17.1. **8)** –273.
9) 217. **10)** 0,5. **11)** 1/8. **12)** 0,5.

§ 4. Ответы к задачам для самостоятельной работы (по главам)

Глава 1.

1. B. **2**. A.

3. 3-1) $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$. 3-2). $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$. 3-3). $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
3-4) $A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot C$. 3-5). $A\cdot B\cdot C$ 3-6). $\overline{A\cdot B\cdot C}$

4. $A+B=A(B+\overline{B})+B(A+\overline{A})=AB+A\overline{B}+AB+\overline{A}B=(AB+AB)+A\overline{B}+\overline{A}B=$
$=AB+A\overline{B}+\overline{A}B$.

5. $\overline{\overline{A}+\overline{C}+B}=\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{C}}\,\overline{B}=AC\overline{B}$ – выбраны только нарциссы и тюльпаны;
$A\overline{C}$ – в букете есть нарциссы и нет сирени;
$\overline{B}C$ – в букете есть сирень и нет тюльпанов; нет, не образуют.

6. $B+C$ – частный случай события A.

7. BC.

Глава 2.

1. 1/4. *Указание.* Подсчитайте площадь S криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямой $x=1$ и кубической параболой $y=x^3$.

2. 1/18.

Решение. Общее число случаев равно 36, так как каждый из шести случаев выпадения грани на первой кости сочетается с таким же числом случаев выпадения грани на второй кости. Благоприятные случаи усматриваются непосредственно. Они следующие: (1;2) и (2;1). Их 2. Вероятность искомого события равна 2/36=1/18.

3. 47/90. **4**. 7/8. **5**. 2/3. **6.** 1/189.

Глава 3.

1. $\dfrac{4\cdot3\cdot2}{4^2}=\dfrac{3}{8}$. **2**. $\dfrac{1}{5}$. **3**. $\dfrac{1}{13983816}\approx 0.715\cdot10^{-7}$. **4**. $\dfrac{1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$.

5. 1) $\dfrac{C_{15}^3C_{37}^4}{C_{52}^7}$ 2) $1-\dfrac{C_{37}^7}{C_{52}^7}-\dfrac{15C_{37}^6}{C_{52}^7}$. *Указание.* Рекомендуется сначала найти вероятность противоположного события.

6. $1-\dfrac{C_5^0C_{10}^3}{C_{15}^3}=1-\dfrac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\dfrac{67}{91}$. *Указание.* Рекомендуется сначала найти вероятность противоположного события.

Глава 4.

1. $0.2 \cdot 0.7 = 0.14$. **2**. $1 - 0.8 \cdot 0.7 = 0.44$.

3. $(2/3) \cdot 0.02 + (1/3) \cdot 0.01 = 0.05/3 \approx 0.017$.

4. $\frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{1}{35}$. **5.** $5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^4 \approx 0.208$. **6.** $\frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{60}{143}$.

7. $-\frac{43}{50}$. **8.** а) $\frac{4}{13}$; б) $\frac{9}{13}$. **9.** $C_4^2 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^2 = 0.3456$. **10.** 7/8.

11. $4p^3q + p^4 \approx 0.48$. **12.** $\approx 0{,}74$.

Решение. По условию задачи заключаем, что в парии должно быть либо одно, либо ни одного бракованного изделия. Применяем приближенную формулу Пуассона для биномиальных вероятностей при κ=0 и κ=1. При этом $a = np = 1$. Тогда искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{a^0}{0!}e^{-a} + \frac{a^1}{1!}e^{-a} = e^{-1} + e^{-1} = 2e^{-1} \approx 0{,}74.$$

13. 1) ровно две $\approx$ 0,224. 2) менее двух $\approx$ 0,199.

3) более двух $\approx$ 0,576. *Указание.* Рекомендуется сначала найти вероятность противоположного события.

4) хотя бы одну $\approx$ 0.95. *Указание.* Рекомендуется сначала найти вероятность противоположного события.

14. $P_{500}(390 \le k \le 420) \approx 0{,}851$. *Указание.* Используйте интегральную теорему Лапласа.

15. $P_{500}(90 \le k \le 120) \approx 0{,}851$. *Указание.* Используйте интегральную теорему Лапласа.

Глава 5. **1**. $m_X = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$; $\mathbf{M}[X^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$;

$D_X = \mathbf{M}[X^2] - m_X^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$; $\sigma_X = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2. $\mathbf{P}(X = 0) = 0.729$; $\mathbf{P}(X = 1) = 0.243$; $\mathbf{P}(X = 2) = 0.027$; $\mathbf{P}(X = 3) = 0.001$; $m_X = 0.3$.

3. $C = 0.5$; $F(x) = 0$ при $x \le 0$; $F(x) = x^2/4$ при $0 \le x \le 2$; $F(x) = 1$ при $x \ge 2$; $m_X = 4/3$.

4. $P(X = k) = 0{,}5 \cdot 0{,}5^{k-1}$, геометрическое распределение.

5. $f(x) = \frac{1}{20}$, *если* $x \in [5,25]$ *и* 0, *если* $x \notin [5,25]$,

$F(x) = \frac{1}{20}(x-5)$, *если* $x \in [5,25]$, *равна* 0, *если* $x < 5$ *и равна* 1, *если* $x > 25$.

$P(10 \le X \le 15) = 0{,}25$.

6. а) $f(x) = 0$, *если* $x < 0$ *и равна* $3e^{-3x}$, *если* $x \ge 0$;

б) $F(x) = 0$, *если* $x < 0$ *и равна* $1 - e^{-3x}$, *если* $x \ge 0$;

в) $P(1 \le X \le 5) = F(5) - F(1) = e^{-3} - e^{-15} \approx 0{,}049$.

7. $12{,}2 < X < 12{,}8$.. Указание. Используйте правило трёх сигм.

8. $\mathrm{P}(0 \le X \le 1) = F(1) - F(0) = \Phi_0((1-1)/2) - \Phi_0((0-1)/2) =$ $=0.341$.

9. $A=1/2$, $B=1/2$, $C=-1/2$, $m_x = 0$, $D_x = 1/6$, $P(X > 1/2) = 1/8$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1], \\ 1/2 + x + x^2/2, & x \in [-1, 0], \\ 1/2 + x - x^2/2, & x \in [0, 1], \\ 1, & x \in [1, +\infty]. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \in [-1, 0], \\ 1 - x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

10. $c = 3$; $m_x = 0$; $D_x = \dfrac{3}{20}$; $P(X \in [1/2, 3/2] = 1/4$, $F(x) = \begin{cases} 0, x \le -1, \\ (1 - 3x^2 - 2x^3)/2, -1 < x \le 0, \\ (1 + 3x^2 - 2x^3)/2, 0 < x \le 1, \\ 1, \ x > 1. \end{cases}$

Глава 6.

1. $-\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. **2.** $C\int_0^1 (1-x)\,dx \int_0^1 y\,dy = C\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \dfrac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = C\dfrac{1}{4} = 1$; $C = 4$.

3. $f_X(x) = 4\int_0^1 (1-x) y\,dy = 2(1-x)$ при $x \in [0, 1]$; $f_X(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$;

$f_Y(y) = 4\int_0^1 y(1-x)\,dx = 2y$ при $y \in [0, 1]$; $f_Y(y) = 0$ при $y \notin [0, 1]$.

4. $m_X = 2\int_0^1 x(1-x)\,dx = 2\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{3}$; $m_Y = 2\int_0^1 y^2\,dy = \dfrac{2}{3}$;

$\mathbf{M}[X^2] = 2\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = \dfrac{1}{6}$; $\mathbf{M}[Y^2] = 2\int_0^1 y^3 dy = \dfrac{1}{2}$;

$D_X = \mathbf{M}[X^2] - m_X^2 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{18}$;

$D_Y = \mathbf{M}[Y^2] - m_Y^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{18}$; $\mathbf{M}[XY] = 4\int_0^1 x(1-x)\,dx \int_0^1 y^2\,dy = \dfrac{2}{9}$;

$k_{XY} = \mathbf{M}[XY] - m_X m_Y = \dfrac{2}{9} - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = 0$; $\rho_{XY} = \dfrac{k_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$.

5. Законы распределения X и $\mathbf{Y}$:

X	0	1
p	0.4	0.6

Y	0	1
q	0.5	0.5

Случайные величины X, Y зависимы.

6. $c=1$; $f_X(x)=\begin{cases} x+1/2, & x\in[0,1], \\ 0, & x\notin[0,1], \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} y+1/2, & y\in[0,1], \\ 0, & y\notin[0,1], \end{cases}$

$f_{XY}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)\Rightarrow$ Случайные величины X, $У$ зависимы.

Глава 7.

9. $F_{XY}(x,y)$. **10.** 0.

Глава 8.

10. $\frac{1}{9}$. **11.** $0.5+\Phi_0\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)=0.5+\Phi_0\left(\frac{10-5}{\sqrt{5\cdot 0.99}}\right)=0.5+\Phi_0(2.25)\approx$

$\approx 0.5+0.488=0.988$.

Раздел 11. **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

Краткая характеристика содержания раздела

В этом разделе изучаются методы работы с числовыми данными, полученными в результате наблюдений и экспериментов с целью получения вероятностно-статистических моделей случайных явлений.

1. Темы раздела. Описательная статистика. Точечное и интервальное оценивание параметров распределения. Проверка статистических гипотез. Корреляционный и регрессионный анализ.

2. Базисные понятия. Выборка. Оценка числовой характеристики. Доверительный интервал. Статистические модели распределения случайной величины и зависимости между случайными величинами.

3. Основные задачи. Приближенное определение вероятности события по относительной частоте. Нахождение приближенного закона распределения случайной величины по данным экспериментов. Оценивание числовых характеристик или параметров распределения случайной величины по данным экспериментов. Проверка статистических гипотез о свойствах изучаемого случайного явления. Определение эмпирической (регрессионной) зависимости между переменными, описывающими случайное явление, на основе экспериментальных данных.

ВВЕДЕНИЕ

1. Предмет математической статистики. Раздел «Математическая статистика» общего курса математики обычно изучается последним, так как основывается на теории вероятностей и всех других ранее изученных математических разделах. Сами статистические данные и выводы, полученные на их основе, используются в естественных и гуманитарных науках, в инженерной практике, экономике. Особенно велика роль статистики в решении задач управления производством, социальными группами людей, ибо без знания состояния управляемого объекта разумное управление этим объектом невозможно. Эти знания об объекте несут обработанные и осмысленные статистические данные.

Слово «статистика» происходит от слова status – состояние, государство. Статистика – одна из древнейших наук. Еще в глубокой древности люди накапливали и анализировали сведения о природных и общественных явлениях с целью их познания и прогноза. Существуют производственная, экономическая, социальная, медицинская, демографическая и другие отраслевые статистики. Математическая статистика изучает математическую сторону работы с числовыми данными независимо от конкретной отраслевой специфики.

Определение. *Математической статистикой* называется наука, разрабатывающая методы регистрации, описания и анализа данных наблюдений и экспериментов с целью получения вероятностно-статистических моделей случайных явлений.

Математическая статистика – абстрактная наука. Её методы применимы для обработки данных наблюдений и экспериментов любой природы, поэтому используются во всех конкретных естественных и гуманитарных науках, экономике, технике, медицине и т. д., т. е. во всех отраслевых статистиках.

Основными задачами математической статистики являются следующие:

- Приближенное определение вероятности события по относительной частоте.
- Нахождение приближенного закона распределения случайной величины по данным экспериментов.
- Оценивание числовых характеристик или параметров распределения случайной величины по данным экспериментов.
- Проверка статистических гипотез о свойствах изучаемого случайного явления.
- Определение эмпирической (регрессионной) зависимости между переменными, описывающими случайное явление, на основе экспериментальных данных.

Рассмотрим типичную схему исследований при решении указанных задач. Эти исследования, естественно, делятся на две части.

Сначала путём наблюдений и экспериментов собираются, регистрируются статистические данные, составляющие *выборку*, – это числа, называемые также *выборочными элементами*. Затем они упорядочиваются, представляются в компактной, наглядной или функциональной форме. Вычисляются различного рода средние величины, характеризующие выборку. Часть математической статистики, обеспечивающая эту работу, называется *описательной статистикой* (descriptive statistics).

Вторая часть работы исследователя состоит в получении на основе найденных сведений о выборке достаточно обоснованных выводов о свойствах исследуемого случайного явления. Эта часть работы обеспечивается статистическими методами, составляющими *статистику выводов* (inferential statistics).

2. Краткие исторические сведения. Несомненно, что создание теории вероятностей в XVIII в. и ее развитие стимулировались требованиями улучшения статистической обработки данных экономики, демографии, страхового дела. Сам термин «статистика» возник в XVIII в. К этому же времени относится начало преподавания статистики в университетах Германии.

Методы теории вероятностей стали оказывать влияние и на статистику. Она перестаёт быть чисто описательной и наполняется математическими моделями изучаемых случайных явлений.

Рождение математической статистики как полноправной науки, ее выделение из ряда отраслевых и хозяйственных статистик произошло после того, как она стала строиться на основе теории вероятностей. Это случилось в XX в., когда и сама теория вероятностей стала строиться на основе аксиоматики, теории множеств, функционального анализа.

Основоположниками математической статистики были Я. Бернулли (1654–1705), К. Гаусс (1777–1855), П. Лаплас (1749–1827). В XIX в. большой вклад в нее сделали российские математики П. Л. Чебышёв (1821–1894), А. А. Марков (1856–1922), А. М. Ляпунов (1857–1918). В XX в. важные результаты были получены К. Пирсоном (1857–1936), Р. Фишером (1890–1962), Г. Крамером (1893–1985), Р. Мизесом (1883–1953), а также отечественными математиками А. Н. Колмогоровым (1903–1987), Н. В. Смирновым (1900–1966) и др.

Глава 1. **Описательная статистика**

§ 1. Генеральная совокупность. Выборка. Выбор

В соответствии с поставленными основными задачами математической статистики рассмотрим абстрактный эксперимент E. В результате его проведения мы измеряем (наблюдаем) значение x изучаемой случайной величины X.

В реальных условиях случайной величиной X являются, например, параметр детали при массовом производстве, величина инфляции, любой общий количественный признак определенного множества объектов.

Определение 1.1. *Генеральной совокупностью* называется множество возможных значений изучаемой случайной величины X с приписанным этому множеству законом распределения X: $L(X)$.

Примеры.

1. X – число рождений в городе за рассматриваемый промежуток времени. Генеральной совокупностью здесь является множество чисел $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$, ограниченное сверху каким-то числом N. Так как заранее для всех случаев указать какое-либо конкретное число N невозможно, то с целью упрощения математической теории здесь удобно рассматривать идеализированную генеральную совокупность – все множество целых неотрицательных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$, с некоторым законом распределения.

2. X – величина отклонения детали от заданного размера при массовом производстве. Для удобства исследований за генеральную совокупность здесь принимают всё множество вещественных чисел с некоторым законом распределения.

3. X – длительность обслуживания в системе массового обслуживания. Здесь генеральной совокупностью является множество неотрицательных вещественных чисел с некоторым законом распределения.

Числа, составляющие генеральную совокупность, называются её *элементами*. Закон $L(X)$ распределения случайной величины X называется *генеральным законом распределения*, а числовые характеристики X – *генеральными числовыми характеристиками*.

Так как генеральная совокупность – большая, то перебрать все её элементы невозможно, поэтому для изучения генеральной совокупности из нее делают выборку и по её свойствам судят о свойствах генеральной совокупности.

Определение 1.2. *Выборкой* называется множество измеренных значений x_1, $x_2, \dots, x_n$ случайной величины X.

Выборка записывается в виде n-мерной точки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Числа, составляющие выборку, называются её *элементами*; их количество *n – объёмом выборки*. Выборку нельзя составлять как попало. Иначе она не будет правильно характеризовать генеральную совокупность.

Определение 1.3. Процесс составления выборки называется *выбором*.

Различных типов выбора существует несколько. Будем, во-первых, различать *выбор с возвращением* и *без возвращения*. Оба типа выбора имеют смысл для конечной перенумерованной генеральной совокупности. Их можно уподобить выбору шаров из урны. При выборе без возвращения шары выбираются последовательно и в урну не возвращаются. При выборе с возвращением шар вынимается из урны, запоминается его номер, а далее шар возвращается обратно в урну. Поэтому при последующих выборах он снова может быть извлечён.

Кажущееся различие этих двух типов выбора на самом деле не меняет вероятности попадания каждого элемента в выборку при условии, что элемент попадает в выборку только один раз в случае выбора с возвращением, хотя выбран может быть много раз (не будете же вы опрашивать одного и того же респондента несколько раз при социологическом опросе или исследовать одну и ту же деталь при контроле на брак партии).

Действительно, при выборе с возвращением вероятность вынуть конкретный шар из урны, содержащей N шаров, равна $1/N$ – одна и та же при каждом выборе шара. При выборе без возвращения вероятность попадания меченого шара в выборку при k-м выеме (k=1, 2,..., N) равна

$$\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N-1}\cdot\frac{N-3}{N-2}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{N-(k-1)}{N-(k-2)}\cdot\frac{1}{N-(k-1)}=\frac{1}{N},$$

т. е. также одна и та же независимо от того, на каком этапе составления выборки шар в ней появится. Это есть вероятность того, что при последнем k-м выеме меченый шар появился, а во всех предыдущих $(k-1)$ выемах – нет.

Во-вторых, будем различать выбор *случайный*, т. е. проводимый с помощью какого-либо случайного механизма, и *неслучайный* (пристрастный, по закономерности). В статистике применяется в основном случайный выбор как более надёжный в отражении свойств генеральной совокупности.

Определение 1.4. *Простым случайным выбором* называется выбор, удовлетворяющий следующим требованиям:

1. Выбор является случайным.

2. Каждый элемент генеральной совокупности может быть выбран.

3. Каждый элемент выбирается независимо от остальных.

4. Все элементы выборки получаются в равных условиях.

Реально такой выбор можно осуществить на основе урновой схемы из конечной генеральной совокупности, перенумеровав все её элементы, а затем выбирая номера с помощью какого-либо случайного механизма: выбор карточек из колоды, чисел из таблицы равномерно распределенных случайных чисел (таблица VI приложения), одинаковых шаров из барабана и т. д. (выбор без возвращения или с возвращением).

Так можно выбирать коллективы людей по перечню для обследования, автомашины партии для испытания, штуки товара из партии для контроля и т. д.

В реальных условиях простой случайный выбор не всегда осуществим. Он является как бы эталонным идеальным выбором. Реальный выбор лишь приближённо можно считать простым случайным. Его нельзя, например, осуществить из бесконечной генеральной совокупности (время обслуживания, отклонение результата измерения от нормы), из генеральной совокупности, образование которой не завершено и может продолжаться бесконечно долго (исследуется средняя температура июля в Санкт-Петербурге; июли могут продолжаться потенциально бесконечно долго).

Виды реальных выборов.

1. *Механический выбор*. В этом случае элементы генеральной совокупности выбираются по какой-либо закономерности. Например, измерения производятся через равные промежутки времени, контролируется каждая десятая деталь, сходящая с конвейера, каждый пятый человек по списку. Применяется для автоматизированного контроля.

2. *Серийный выбор*. Элементы в этом случае выбираются не по одному, а сериями. Например, контролю подвергается не одна таблетка лекарства, а упаковка, не один человек из какой-либо группы, а вся группа. Диктуется условиями производства и обследования.

3. *Типический выбор*. В этом случае генеральная совокупность делится на непересекающиеся части. Из каждой части выбираются элементы в количестве, пропорциональном объёму части.

Так можно получить сведения о средней зарплате в отрасли, об урожайности поля, о политических предпочтениях людей. Характерен для экономических и социологических исследований.

4. *Субъективный выбор* – на основе какого-либо субъективного принципа. Так, обследуются не все партии продукции, а лишь одна, наиболее подозрительная на содержание брака, ведётся опрос по телефону, а не всех слоёв населения. Он экономит время, средства, но может привести к большим ошибкам.

5. *Выбор с помощью случайных независимых измерений* (температура среды, величина тока, загрязнённость реки). Характерен для инженерных и естественнонаучных исследований.

Все типы выборов могут комбинироваться между собой. Существуют и другие типы выборов.

В математической статистике рассматривается только простой случайный выбор. Отметим одно его важное свойство – случайность (рандомизированность). Случайный выбор объективен, гарантирует от пропуска скрытых закономерностей в генеральной совокупности, поэтому реальный выбор следует организовывать так, чтобы свойство случайности присутствовало. В механическом и субъективном выборах случайность отсутствует, поэтому они менее надёжны. (Например, каждая десятая деталь, снимаемая с конвейера, может поставляться бракоделом. Такой контроль может исказить результаты.

Обратимся снова к анализу выборки. Повторяя выборку (x_1, x_2, … , x_n) несколько раз, мы будем в общем случае получать каждый раз новые элементы, поэтому элементы выборки рассматриваются как случайные величины. Так как они принимают значения из одной и той же генеральной совокупности, то распределены одинаково – так же, как случайная величина X, образующая рассматриваемую генеральную совокупность, x_1, x_2, … , x_n – это n копий случайной величины X. Далее, так как каждый элемент выборки получен независимо от остальных, то все элементы выборки рассматриваются как взаимно независимые случайные величины.

Итак, с теоретической точки зрения выборка (x_1, x_2, … , x_n) – это n-мерная случайная величина, все компоненты которой – взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины. Их закон распределения – такой же, как у изучаемой случайной величины X.

Такую теоретическую выборку следует отличать от её реализации, т. е. набора n чисел, полученных в конкретном выборе (в конкретных измерениях). Чтобы подчеркнуть это различие, теоретическую выборку, т. е. n-мерную случайную величину, иногда обозначают символом (X_1, X_2, … , X_n), составленным из прописных букв, а её реализацию – символом (x_1, x_2, … , x_n), составленным из строчных букв. Далее с целью упрощения записей и теоретическую выборку, и ее реализацию будем обозначать одним и тем же символом (x_1, x_2, … , x_n), так как из текста обычно ясно, о чем идет речь.

Обсудим ещё последнее свойство простого случайного выбора – о том, что все элементы выборки получаются в равных условиях.

Это свойство можно выразить, введя случайную величину X^*, принимающую выборочные значения x_1, x_2, … , x_n с одной и той же вероятностью $1/n$.

Дискретное равномерное распределение с законом, заданным формулой

$$\mathrm{P}(X^* = x_k) = 1/n\,, k = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1.1}$$

называется *выборочным распределением*, а его числовые характеристики – *выборочными числовыми характеристиками* (иначе – числовыми характеристиками выборки).

К выборкам, как и к выбору, предъявляется ряд требований. Важнейшим из них является требование *репрезентативности* (представительности). Оно означает, что выборка должна хорошо представлять всю генеральную совокупность. Так, изучая среднюю зарплату отрасли, нельзя ограничиться данными одного завода, одного месяца и т. д. Для составления репрезентативной выборки более всего подходит типический выбор. Простой случайный выбор тоже репрезентативен, ибо теоретически любой элемент генеральной совокупности может попасть в выборку, но менее надёжен, чем типический, так как в силу независимости и случайности выбора элементов возможна их концентрация, и поэтому недостаточно представительный охват генеральной совокупности.

Другим требованием является требование *однородности* выборки. Это означает, что условия проведения экспериментов для получения выборки не должны меняться. Выборка должна быть получена из одной генеральной совокупности, а не из нескольких. В ней должны отсутствовать выбросы. Неоднородная выборка не может дать правильного прогноза.

Будем различать малые и большие выборки, ибо они отличаются методами обработки. Для обработки большой выборки привлекаются асимптотические методы, основанные на центральной предельной теореме. В статистической практике принято считать выборку с объёмом $n > 30$ большой.

Для изучения двумерной случайной величины (X, Y) создаётся двумерная выборка, представляющая таблицу пар чисел (x_i, y_i), $i=1,2,\dots, n$.

Существуют выборки любой размерности.

§ 2. Вариационный и статистический ряды

Выборка является труднообозримым множеством. Для дальнейшего изучения выборку подвергают перегруппировке.

Определение 2.1. *Вариационным рядом* называется последовательность всех элементов выборки, расположенных в неубывающем порядке. Одинаковые элементы повторяются.

Запись вариационного ряда: $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$.

Элементы вариационного ряда называются *порядковыми статистиками*. Минимальный и максимальный элементы называются *крайними*, иначе – *экстремальными элементами* вариационного ряда:

$$x_{\min} = x_{(1)},\ x_{\max} = x_{(n)}. \tag{2.1}$$

Разность между максимальным и минимальным элементами называется *размахом*, или *широтой,* выборки:

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \tag{2.2}$$

Определение 2.2. Средний элемент вариационного ряда, если n – нечетное, или полусумма двух средних элементов, если n – чётное, называется *медианой* выборки и обозначается med :

$$\mathrm{med} = \begin{cases} x_{(l+1)} & \text{при } n = 2l+1, \\ \left(x_{(l)} + x_{(l+1)}\right)/2 & \text{при } n = 2l. \end{cases} \tag{2.3}$$

Определение 2.3. Элементы вариационного ряда, на четверть отстоящие от краев, называются соответственно *нижней* и *верхней квартилями* и обозначаются $z_{1/4}$ и $z_{3/4}$.

Математически точно квартили определяются по формулам:

$$z_{1/4} = x_{(i)}; \quad i = \begin{cases} [n/4]+1 & \text{при } n/4 \text{ дробном}, \\ n/4 & \text{при } n/4 \text{ целом}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь $[a]$ – целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не большее, чем a.

$$z_{3/4} = x_{(n-i+1)}. \tag{2.5}$$

Числа $x_{\min}$, $z_{1/4}$, med, $z_{3/4}$, $x_{\max}$ дают сжатую информацию о выборке и о генеральной совокупности. Их можно изобразить в виде так называемого «ящика с усами» (рис. 2.1).

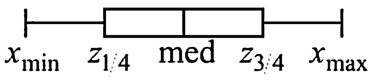


Рис. 2.1. *Ящик с усами*

Пример 2.1. Рассмотрим выборку наименьших цен в долларах США за 1 м^2 на новое жилье в отдаленных районах следующих областных или столичных городов России в 1997–1998 гг.:

Астрахань – 330, Барнаул – 340, Брянск – 360, Волгоград – 380, Екатеринбург – 380, Иркутск – 450, Казань – 350, Москва – 900, Нижний Новгород – 350, Новосибирск – 400, Омск – 360, Пенза – 320, Петрозаводск – 360, Самара – 400, Санкт-Петербург – 500, Ставрополь – 360 (газета «Известия», 21.01.98).

Построить вариационный ряд и «ящик с усами».

►Заметим предварительно, что элемент выборки 900 аномален, что объясняется исключительным положением Москвы как столицы по отношению ко всей России. Его следует исключить из выборки, иначе она будет неоднородной. После исключения вариационный ряд получает вид:

320, 330, 340, 350, 350, 360, 360, 360, 360, 380, 380, 400, 400, 450, 500.

Из него находим $x_{\min} = 320$; $x_{\max} = 500$; $\text{med} = x_{(7)} = 360$; $z_{1/4} = x_{(4)=350}$; $z_{3/4} = x_{(12)} = 400$; $R = 500 - 320 = 180$, так как

$$i = [n/4]+1 = [15/4]+1 = 3+1 = 4; \quad n-i+1 = 15-4+1 = 12.$$

«Ящик с усами»:

◄

Если в выборке много повторяющихся элементов, то вариационный ряд можно преобразовать в статистический ряд.

Определение 2.4. *Статистическим рядом* называется последовательность различных элементов z_i вариационного ряда с указанием частот n_i повторения элементов.

В общем случае статистический ряд записывают в виде таблицы

($n_1 + n_2 + +\ldots+ n_k = n$):

z_i	z_1	z_2	.....	....	z_k
n_i	n_1	n_2	....	....	n_k

Пример 2.2. Преобразуем вариационный ряд из примера 2.1 в статистический ряд.

320	330	340	350	360	380	400	450	500
1	1	1	2	4	2	2	1	1

Статистический ряд можно изобразить графически в виде полигона (многоугольника) частот, откладывая по оси абсцисс элементы статистического ряда,

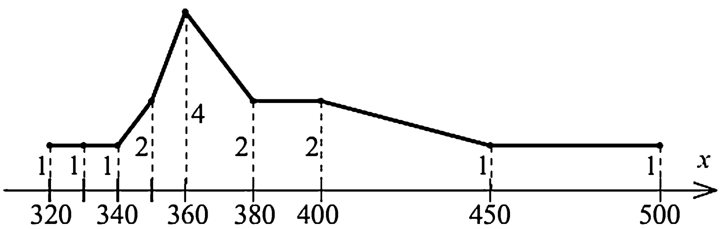


Рис. 2.2. *Полигон частот к примеру 2.2*

а по оси ординат – частоты (или относительные частоты). Полученные точки плоскости соединяются отрезками.

Полигон статистического ряда из примера 2.2 имеет вид (рис. 2.2).

Полигон частот (или относительных частот) даёт хорошее представление о распределении частот в выборке. Элемент, отвечающий наибольшей частоте по сравнению с соседними элементами статистического ряда, называется *выборочной модой* (mod). Для рис. 2.2 $\mathrm{mod} = 360$.

§ 3. Выборочная функция распределения

Рассмотрим функциональный способ описания выборки.

Определение 3.1. *Выборочной* (*эмпирической*) *функцией распределения* называется относительная частота события $X<x$, полученная по выборке:

$$F_n^*(x) = \mathrm{P}^*(X < x). \tag{3.1}$$

Для получения относительной частоты $\mathrm{P}^*(X<x)$ просуммируем в статистическом ряде, построенном по данной выборке, все частоты n_i, для которых эле-

менты z_i статистического ряда меньше x. Тогда $P^*(X<x)=\frac{1}{n}\sum_{z_i<x} n_i$. Имеем

$$F_n^*(x)=\frac{1}{n}\sum_{z_i<x} n_i. \qquad (3.2)$$

Это функция распределения дискретной случайной величины X^*, заданной таблицей распределения.

X^*	z_1	z_2	…	…	z_k
P	n_1/n	n_2/n	…	…	n_k/n

Её графиком является восходящая ступенчатая линия, называемая кумулятой (линия накопленных относительных частот).

Пример 3.1. Измеренные с точностью до одного грамма отклонения веса деталей от номинала составили следующую выборку объёма $n=16$:

(0, 1, 0, –2, 2, 3, 2, 0, 0, –1, 1, –1, 0, 1, –3, –2).

Для этой выборки статистический ряд представлен следующей таблицей.

z_i	– 3	– 2	–1	0	1	2	3
n_i	1	2	2	5	3	2	1

На основе этой таблицы строим выборочную функцию распределения.

$$F_{16}^*=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -3, \\ 1/16 & \text{при} \ -3<x\le -2, \\ 3/16 & \text{при} \ -2<x\le -1, \\ 5/16 & \text{при} \ -1<x\le 0, \\ 10/16 & \text{при} \ \ 0<x\le 1, \\ 13/16 & \text{при} \ \ 1<x\le 2, \\ 15/16 & \text{при} \ \ 2<x\le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x>3. \end{cases}$$

График этой функции (кумулята) представлен на рис. 3.1.

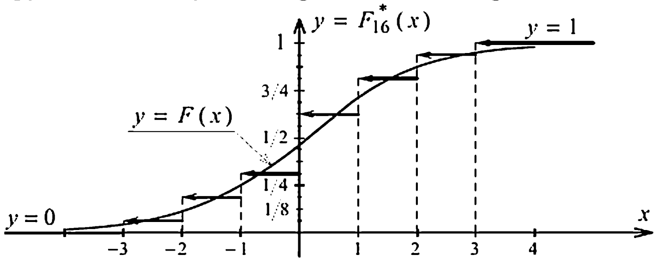


Рис. 3.1. *Кумулята (график выборочной функции распределения) и аппроксимируемый ею график генеральной функции распределения $F(x)$*

Так как относительная частота события приближается к вероятности события при увеличении n, то выборочная функция распределения $F_n^*(x)$ приближённо представляет функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности, как говорят, является её оценкой:

$$F_n^*(x) \approx F(x). \tag{3.3}$$

Точный математический смысл приближения $F_n^*(x)$ к $F(x)$ заключён в следующей теореме.

Теорема 3.1. Для любого фиксированного x выборочная функция распределения $F_n^*(x)$ при $n \to \infty$ стремится по вероятности к генеральной функции распределения $F(x)$:

$$F_n^*(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} F(x). \tag{3.4}$$

►По теореме Бернулли (разд. 8, гл. 8, § 2) относительная частота события по вероятности стремится к вероятности этого события при $n \to \infty$. В данном случае $\mathrm{P}^*(X < x) = F_n^*(x)$, $\mathrm{P}(X < x) = F(x)$; получаем формулу (3.4).◄

§ 4. Выборочные числовые характеристики

С помощью выборки образуются её числовые характеристики. Это числовые характеристики случайной величины X^* с равномерным законом распределения (1.1), который означает, что каждый элемент выборки x_k, $k=1, \ldots, n$, принимается с вероятностью $1/n$, ибо предполагается, что выборка образована с помощью простого случайного выбора.

Числовые характеристики случайной величины X^* называются *выборочными числовыми характеристиками*. Случайная величина X^* аппроксимирует изучаемую случайную величину X в силу того, что $F_n^*(x)$ по вероятности стремится к $F_X(X)$ при $n \to \infty$. Следует ожидать, что и выборочные числовые характеристики будут аппроксимировать соответствующие генеральные характеристики, т. е. являться их оценками. Такой метод образования оценок генеральных числовых характеристик называется методом *аналогии* (или *подстановки*). Вместо числовых характеристик X рассматриваются аналогичные числовые характеристики X^*. Это означает также, что во все формулы для генеральных числовых характеристик вместо X подставляется случайная величина X^*, её аппроксимирующая.

Определение 4.1. *Выборочной оценкой* генеральной числовой характеристики называется её приближенное значение, найденное по выборке.

Одним из методов получения оценок является метод аналогии (подстановки). Свойства оценок будут рассмотрены позднее. Рассмотрим сами оценки.

1. Основные оценки.

1. *Выборочное среднее*

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4.1}$$

является оценкой генерального математического ожидания $m = \mathrm{M}X$.

2. *Выборочный начальный момент порядка l*

$$a_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^l \,. \tag{4.2}$$

является оценкой генерального начального момента порядка l: $\alpha_l = \mathrm{M}[X^l]$.

3. *Выборочный центральный момент порядка l*

$$m_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^l \tag{4.3}$$

является оценкой генерального центрального момента порядка l:

$$\mu_l = \mathrm{M}\left[(X - m)^l\right].$$

4. *Выборочная дисперсия*

$$s^2 = m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \tag{4.4}$$

является оценкой генеральной дисперсии $\sigma^2 = \mu_2 = \mathrm{M}\left[(X - m)^2\right]$.

5. *Выборочное среднее квадратичное отклонение*

$$s = \sqrt{s^2} \tag{4.5}$$

является оценкой генерального среднего квадратичного отклонения $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Для выборочной дисперсии справедлива формула, аналогичная формуле для генеральной дисперсии:

$$s^2 = a_2 - \overline{x}^2 = a_2 - a_1^2 \,. \tag{4.6}$$

$$\blacktriangleright\ s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\overline{x}x_i + \overline{x}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}n\overline{x}^2 =$$

$$= a_2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = a_2 - \overline{x}^2 \,.\blacktriangleleft$$

Пример 4.1. Вычислим выборочные числовые характеристики $\overline{x}, a_2, s^2, s$ для выборки из примера 3.1.

$$\blacktriangleright\ \overline{x} = (-3\cdot 1 - 2\cdot 2 - 1\cdot 2 + 0\cdot 5 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1)/16 = 1/16 = 0.0625\,;$$

$$a_2 = [(-3)^2\cdot 1 + (-2)^2\cdot 2 + (-1)^2\cdot 2 + 0^2\cdot 5 + 1^2\cdot 3 + 2^2\cdot 2 + 3^2\cdot 1]/16 = 39/16 = 2/4375;$$

$$s^2 = a_2 - \overline{x}^2 = 39/16 - 1/16^2 = 623/256 \approx 2.4336\,;$$

$$s \approx \sqrt{2.4336} \approx 1.56\,.\blacktriangleleft$$

2*. Дополнительные оценки.

Кроме основных выборочных числовых характеристик (4.1) – (4.5), рассмотрим еще выборочные числовые характеристики, выраженные через порядковые статистики. В этом случае будем предполагать, что случайная величина X, образующая генеральную совокупность, непрерывна и имеет плотность вероятности $f(x)$ непрерывную в окрестности рассматриваемых точек. Тогда:

6*. *Выборочная медиана* med (2.3) является оценкой генеральной медианы $\mathrm{Me} = F_X^{-1}(1/2)$ (в случае её однозначности).

7*. *Выборочные квартили* $z_{1/4}$ *и* $z_{3/4}$ (2.4), (2.5) являются оценками соответствующих генеральных квартилей $\xi_{1/4} = F_X^{-1}(1/4)$, $\xi_{3/4} = F_X^{-1}(3/4)$ (в случае их однозначности).

8*. *Выборочное среднее абсолютное отклонение*

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} | x_i - \mathrm{med} | . \qquad (4.7)$$

является оценкой генерального среднего абсолютного отклонения

$$\delta = \mathrm{M}\left[| X - \mathrm{Me} | \right]. \qquad (4.8)$$

Здесь дополнительно предполагается существование конечного второго генерального момента.

9*. *Полусумма выборочных квартилей*

$$t_q = \frac{1}{2}(z_{1/4} + z_{3/4}). \qquad (4.9)$$

10*. *Полусумма экстремальных выборочных элементов*

$$t_R = \frac{1}{2}(x_{\min} + x_{\max}). \qquad (4.10)$$

11*. *Разность выборочных квартилей,* называемая выборочной *интерквартильной широтой*

$$q = z_{3/4} - z_{1/4}. \qquad (4.11)$$

12*. *Размах* выборки $R = x_{\max} - x_{\min}$ (см. (2.2)).

Четыре выборочные характеристики

$$\bar{x},\ \mathrm{med},\ t_q,\ t_R \qquad (4.12)$$

являются характеристиками положения выборки, а четыре выборочные характеристики

$$s, d, q, R \qquad (4.13)$$

являются характеристиками рассеяния элементов выборки относительно центров (4.12) соответственно.

Для симметричного генерального распределения все выборочные характеристики (4.12) оценивают центр симметрии распределения. Свойства введённых выборочных числовых характеристик будут рассмотрены в главе 2. В силу различия этих свойств все рассмотренные величины (4.12), (4.13) характеризуют выборку, а потому и генеральную совокупность, системно. Недостатки одних компенсируются другими.

Пример 4.2. Вычислим выборочные числовые характеристики med, $z_{1/4}$, $z_{3/4}$, $x_{\min}$, $x_{\max}$, t_q, t_R, q, R, d для выборки из примера 3.1.

►Составим вариационный ряд на основе статистического ряда (3.3).

$$-3, -2, -2, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3$$

Из него получаем:

$\mathrm{med} = 0$; $z_{1/4} = x_{(4)} = -1$; $z_{3/4} = x_{(13)} = 1$; $x_{\min} = -3$; $x_{\max} = 3$;

$t_q = (-1+1)/2 = 0$; $t_R = (-3+3)/2 = 0$; $q = 1-(-1) = 2$; $R = 3-(-3) = 6$;

d=(3+2·2+1·2+1·3+2·2+3)/16=(3+4+2+3+4+3)/16=19/16=1.1875.

Полезно сравнить полученные характеристики med , t_q, t_R с $\bar{x}$, а d с s.

$$\bar{x} = \left(-3 + (-2)\cdot 2 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\right)/16 = 1/16 = 0.0625;$$

med= t_q = t_R =0 близки к $\bar{x}$. Это говорит о том, что генеральное распределение предположительно симметрично относительно нуля и на это указывают все оценки. Далее

$$a_2 = (9 + 4\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 4\cdot 2 + 9)/16 = (18 + 16 + 5)/16 = 39/16 = 2.4375;$$

$$s^2 = 2.4375 - 0.0625^2 \approx 2.4336; s \approx \sqrt{2.4336} = 1.56.$$

Оценки s и d отличаются более сильно, так как оценивают различные генеральные характеристики σ и δ. Если же предположить генеральное распределение нормальным, на что есть теоретические основания, то d тоже можно считать оценкой σ, если предварительно эту выборочную оценку нормировать с помощью нормирующего коэффициента $k_d(16) = 0.76$ (см. табл. VII приложения в [13]): $d^* = d/k_d(16) = 1.1875/0.76 \approx 1.56$.◄

§ 5. Группированный статистический ряд. Гистограмма

1. Группированный статистический ряд. Если выборка получена из непрерывной генеральной совокупности и объём ее большой, то вариационный и статистический ряды, как и сама выборка, будут трудно обозримыми множествами. Действительно, в этом случае при достаточно точном измерении практически не будет равных элементов выборки, ибо вероятность равенства значений непрерывной случайной величины равна нулю. Тогда прибегают к другому способу группирования элементов выборки.

Промежуток [$x_{\min}$, $x_{\max}$] делится на некоторое число k равных по длине промежутков. Обозначим их слева направо: Δ_1, Δ_2, … , Δ_k. Если границы промежутков обозначить a_0, a_1, … , a_k, то $\Delta_1 = [x_{\min}, a_1)$, $\Delta_2 = [a_1, a_2)$, … , $\Delta_i = [a_{i-1}, a_i)$, … , $\Delta_k = [a_{k-1}, x_{\max}]$. Здесь $a_0 = x_{\min}$, $a_k = x_{\max}$. Пусть n_i – число элементов выборки, попавших в промежуток Δ_i. Числа n_1, n_2, …, n_k называются частотами попадания элементов выборки в данные промежутки.

Определение 5.1. Совокупность промежутков Δ_1, Δ_2, … , Δ_k и соответствующих им частот называется *группированным статистическим рядом*.

Естественно, возникает вопрос: как выбрать число k промежутков?

При слишком большом k картина распределения будет искажена случайными колебаниями частот. Отдельные промежутки даже могут оказаться пустыми. При слишком малом k будут сглажены и затушёваны характерные особенности распределения.

Для отыскания k можно рекомендовать полуэмпирическую формулу ([4]):

$$k = 1.72 n^{1/3}. \quad (5.1)$$

Здесь n – объём выборки; $30 \le n \le 1000$. При $n=40 \Rightarrow k=6$; при $n=100 \Rightarrow k=8$; при $n=200 \Rightarrow k=10$; при $n=400 \Rightarrow k=12 \Rightarrow k=12$; при $n=1000 \Rightarrow k=17$.

Применяется также формула Старджесса

$$k = 1+3.31\lg n. \tag{5.2}$$

Длина промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ определится по формуле

$$H=R/k=(x_{\max} - x_{\min})/k. \tag{5.3}$$

Вместо группы элементов, попавших в интервал Δ_i, рассматривается один их представитель. В качестве такового обычно берут среднюю точку x_i^* промежутка Δ_i. Группированный статистический ряд можно оформить в виде таблицы. Технически при ручном счёте это делается так. Просматриваем выборку по порядку и каждый элемент относим в соответствующий промежуток, ставя при этом палочку в графе рядом. Когда накапливается четыре палочки ||||, их перечёркиваем после появления в этом промежутке следующего элемента. Получается пяток ~~||||~~. Затем образуем следующий пяток и т. д. Так находим частоты n_i, $i=1, 2, \ldots, k$ (табл. 5.2).

При использовании компьютера частоты находятся автоматически по программе после введения выборки в компьютер.

Пример 5.1. Проведено 100 измерений веса σ_s (грамм) единицы продукции, производимой фирмой. Данные помещены в таблицу 5.1.

Из таблицы.5.1 находим $x_{\min} = 24.7$, $x_{\max} = 39.9$. Тогда

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 39.9 - 24.7 = 15.2;\ k = 8,\ h = R/k = 15.2/8 = 1.9.$$

Делим промежуток [27.4; 39.9] на 8 равных частей и подсчитываем частоты. Результаты сведены в таблицу 5.2.

Таблица 5.1

Результаты измерений веса σ_s (грамм) единицы продукции

26.7	37.0	30.5	28.1	27.4	25.4	36.1	33.4	29.7
26.4	34.0	26.6	27.9	35.4	35.3	29.6	29.4	37.4
37.0	28.7	33.7	31.2	34.5	31.8	25.5	30.2	32.7
28.3	39.9	33.5	34.1	30.0	35.8	30.7	25.9	31.6
34.4	31.5	31.8	27.4	30.7	33.4	33.1	33.2	30.3
24.7	35.8	32.2	35.2	30.8	37.0	26.3	30.2	39.9
32.5	29.7	28.0	32.4	32.3	31.9	26.7	34.7	33.6
24.7	31.9	30.8	32.3	30.4	33.8	29.5	29.7	31.8
30.1	32.4	30.6	28.1	32.2	30.5	30.8	33.4	28.7
32.6	32.7	32.3	29.8	30.6	37.2	38.4	31,8	33.1
30.6	35.4	25.6	33.5	32.0	31.6	26.1	29.4	36.4

Таблица 5.2

Группированный статистический ряд для выборки из табл. 5.1

№ промежутка	Границы промежутков		Подсчёт частот	n_i	Средняя точка промежутка
	a_{i-1}	a_i			
1	24.7	26.6	卌 IIII	9	25.65
2	26.6	28.5	卌 卌 I	11	27.55
3	28.5	30.4	卌 卌 卌 I	16	29.45
4	30.4	32.3	卌 卌 卌 卌 卌 II	27	31.35
5	32.3	34.2	卌 卌 卌 IIII	19	33.25
6	34.2	36.1	卌 卌 I	11	35.15
7	36.1	38.0	卌	5	37.05
8	38.0	39.9	II	2	38.95
				100	

2. Оценивание генеральных числовых характеристик с помощью группированного статистического ряда. С помощью группированного статистического ряда можно приближенно вычислить выборочные моменты. Так как группа элементов выборки, входящих в промежуток Δ_i, заменяется средней точкой x_i^* промежутка, то следует считать, что элемент x_i^* встречается в выборке n_i раз, т. е. имеет частоту n_i. Получаем следующие формулы:

$$\overline{x} = a_1 \approx \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{k} n_i x_i^*, \tag{5.4}$$

$$a_l \approx \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{k} n_i (x_i^*)^l. \tag{5.5}$$

Такое усреднение по промежуткам несколько искажает выборочные числовые характеристики, но при большом объёме выборки это искажение несущественно.

Таблица 5.3

Подсчет первых двух выборочных моментов по формулам (5.3), (5.4)

i	n_i	z_i	z_i^2	$n_i z_i$	$n_i z_i^2$
1	9	25.65	657.9	230.85	5921.1
2	11	27.55	795.0	303.05	8349.0
3	16	29.45	867.3	471.20	13876.8
4	27	31.35	982.8	846.45	26535.6
5	19	33.25	1105.6	631.75	21006.4
6	11	35.15	1235.5	386.65	13590.5
7	5	37.05	1372.7	185.25	6863.5
8	2	38.95	1517.1	77.90	3034.2
Σ	100	—	—	3133.10	99177.1

Применение формул (5.4), (5.5) целесообразно при ручном счете. При счете на компьютере применяются точные формулы (4.1), (4.2).

Пример 5.2. Найти выборочные числовые характеристики $\overline{x}, s^2, s$ для выборки из табл. 5.1, используя группированный статистический ряд (табл. 5.2).

► Вычисления оформляются в виде таблицы (5.3). С помощью таблицы 5.3 получаем: $\overline{x} = 3133.10/100 = 31.33$; $a_2 = 99177.1/100 = 991.77$;

$$s^2 = a_2 - \overline{x}^2 = 991.77 - 31.33^2 = 10.20; s = \sqrt{10.20} \approx 3.19. \blacktriangleleft$$

3. Гистограмма. Группированный статистический ряд наглядно можно зобразить в виде гистограммы.

Определение 5.2. *Гистограммой* выборки называется фигура, образованная прямоугольниками с основаниями Δ_i и высотами $n_i/(nh)$, $i=1,\ldots, k$.

Гистограмма изображена на рис. 5.1. Величины n_i/n называются *относительными*, а $n_i/(nh)$ – *приведёнными частотами* группированного статистического ряда.

С помощью гистограммы оценивается кривая плотности вероятности, так как ступенчатая ломаная, ограничивающая гистограмму сверху, близка к графику плотности вероятности. В самом деле, площадь прямоугольника с основанием Δ_i равна $hn_i/(nh)=n_i/n$, т. е. относительной частоте попадания элементов выборки в промежуток Δ_i. При большом n относительная частота близка к вероятности попадания значения случайной величины X в промежуток Δ_i. Эта вероятность численно равна площади криволинейной трапеции с основанием Δ_i и ограниченной графиком плотности. Итак, этот участок криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности, аппроксимируется прямоугольником гистограммы с основанием Δ_i, поэтому и вся рассматриваемая криволинейная трапеция аппроксимируется гистограммой.

Обычно приведенные частоты очень малы, поэтому гистограмму строят, увеличивая масштаб по оси Oy, что равносильно тому, что при одинаковых масштабах по осям строят прямоугольники с высотами cn_i, $i = 1, \ldots, k$, где c надлежащий коэффициент пропорциональности.

Сравнивая ступенчатую ломаную, ограничивающую гистограмму сверху, с известными графиками теоретических плотностей (нормальной, показательной и других), можно выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности (рис. 5.1).

Другим наглядным изображением группированного статистического ряда является полигон приведенных частот – это ломаная с вершинами в точках $(x_i^*, n_i/nh)$.

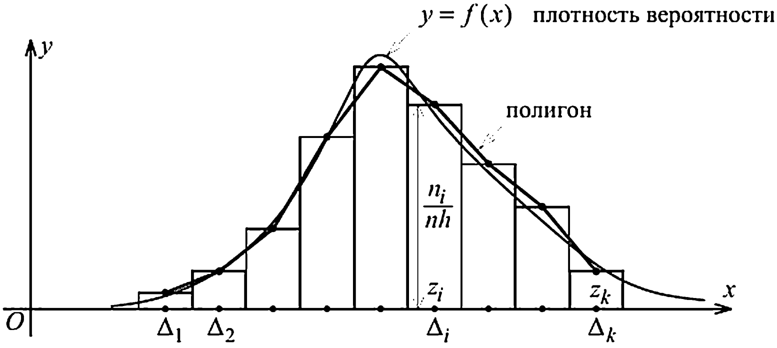


Рис. 5.1. *Гистограмма и полигон группированного статистического ряда*

С помощью полигона также оценивается кривая плотности вероятности (рис. 5.1).

Пример 5.3. Построим гистограмму и полигон приведённых частот для группированного статистического ряда (табл. 5.2).

Из рис. 5.2 видим, что ломаная, ограничивающая гистограмму сверху, и полигон по очертаниям близки к графику нормальной плотности. Это позволяет выдвинуть гипотезу о нормальности распределения изучаемой генеральной совокупности.

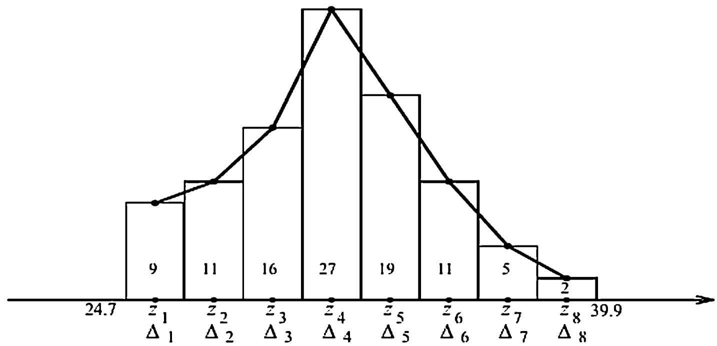


Рис. 5.2. *Гистограмма и полигон группированного статистического ряда из табл. 5.2*

4*. Гистограммная и полигональная оценки плотности вероятности.

Ступенчатая линия, ограничивающая гистограмму сверху, может быть описана аналитически функцией

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{k} n_i K\left(\frac{x - x_i^*}{h}\right). \tag{5.6}$$

Здесь $K(u)$ – функция, называемая ядром, определяется формулой

$$K(u) = \begin{cases} 1, & -1/2 \le u < 1/2; \\ 0, & u < -1/2 \text{ или } u \ge 1/2, \end{cases} \tag{5.7}$$

n – объём выборки, n_i – число элементов выборки, попавших в промежуток Δ_i, x_i^*– средняя точка промежутка Δ_i, h – длина Δ_i, $i = 1, \ldots, k$, k – число промежутков.

При выполнении достаточно общих условий относительно генеральной плотности $f(x)$ можно утверждать, что и гистограммная оценка $\hat{f}_n(x)$, и оценка $\tilde{f}_n(x)$ с помощью полигона приведенных частот сближаются с оцениваемой плотностью $f(x)$, т. е. являются, как говорят, её состоятельными оценками:

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} f(x), \quad \tilde{f}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} f(x)$$

в точках x непрерывности плотности [2,4].

Глава 2. **Точечное оценивание числовых характеристик и параметров распределения генеральной совокупности**

Одной из важнейших задач математической статистики является задача приближённого вычисления числовых характеристик и параметров закона распределения изучаемой случайной величины. Эта задача называется задачей оценивания неизвестных величин. Сформировались два направления в теории оценивания – точечное и интервальное. В настоящей главе рассматривается теория точечного оценивания.

§ 1. Понятие точечной статистической оценки. Требования к оценкам

Определение 1.1. *Точечной статистической оценкой* неизвестной числовой характеристики или параметра θ распределения называется функция $\hat{\theta}_n(x_1, \ldots, x_n)$, зависящая от элементов выборки, приближённо равная θ:

$$\hat{\theta}_n(x_1, \ldots, x_n) \approx \theta \ . \tag{1.1}$$

Для каждой конкретной выборки – это число, т. е. точка на числовой оси.

Определение 1.2. *Статистикой* называется любая функция выборочных элементов (наблюдений).

Итак, статистическая точечная оценка – это статистика, по значениям которой можно судить о величине θ. Слова «точечная», «статистическая» в применении к оценкам в пределах главы в дальнейшем для простоты опускаются.

Для одной и той же неизвестной величины θ можно составить бесконечно много различных оценок. Так, в качестве оценки математического ожидания m нормального распределения могут служить выборочное среднее $\bar{x}$, выборочная медиана med, полусумма квартилей t_q, полусумма крайних элементов t_R.

В силу многообразия оценок, применяемых для оценивания одной и той же неизвестной величины, возникает задача выбора из них лучшей в определённом смысле. К оценкам предъявляется ряд требований.

Заметим предварительно, что все статистические оценки являются случайными, так как случайными являются элементы выборки.

Определение 1.3. Оценка $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, \ldots, x_n)$ называется *состоятельной* оценкой θ, если она стремится по вероятности к θ с ростом n:

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \theta. \tag{1.2}$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{1.3}$$

Это требование означает сближение $\hat{\theta}_n$ и θ с ростом n в вероятностном смысле. В математической статистике, как правило, применяются только состоятельные оценки.

Пример 1.1. Из предельной теоремы Бернулли теории вероятностей следует, что относительная частота $\mathrm{P}^*(A)$ события A является состоятельной оценкой вероятности $\mathrm{P}(A)$ этого события: $\mathrm{P}^*(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{P}(A)$.

Определение 1.4. Оценка $\hat{\theta}_n$ называется *несмещенной оценкой* θ, если Атематическое ожидание оценки равно θ:

$$\mathrm{M}\hat{\theta}_n = \theta. \tag{1.4}$$

В противном случае оценка называется *смещенной.*

Разность $\mathrm{M}\hat{\theta}_n - \theta$ называется смещением оценки.

Требование несмещённости означает, что выборочные значения $\hat{\theta}_{n,i}$ оценок, получаемые при повторении выборок, группируются не только около их математического ожидания, но и около оцениваемой величины θ (рис. 1.1).

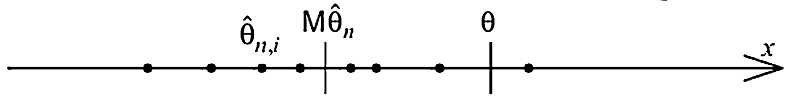


Рис. 1.1. *Группировка выборочных значений $\hat{\theta}_{n,i}$ смещённой оценки около своего математического ожидания $M\hat{\theta}_n$, а не около оцениваемой величины θ*

Определение 1.5. Оценка $\hat{\theta}_n$ величины θ называется *робастной*, если она устойчива по отношению к выбросам в статистических данных.

Выбросы в выборке могут появиться вследствие сбоев регистрирующего прибора, грубых ошибок оператора.

Выбросы группируются на концах вариационного ряда наблюдений. Поэтому оценки, не имеющие в своём составе элементов, близких к концам вариационного ряда, будут робастными. Это, например, выборочная медиана med и полусумма квартилей t_q.

Замечание 1.1. Понятие робастности оценок понимается более широко, чем об этом сказано в определении 1.5, ибо нарушения в составлении выборки могут происходить не только по причине появления выбросов. Например, выборка может быть неоднородной вследствие примешивания элементов из другой генеральной совокупности. Ограничимся только случаем появления выбросов.

Определение 1.6. Оценка $\hat{\theta}_n^*$ числовой характеристики или параметра θ распределения называется *эффективной* в рассматриваемом классе T состоятельных и несмещенных оценок, если она имеет в этом классе минимальную дисперсию:

$$D\hat{\theta}_n^* = \min_T D\hat{\theta}_n. \tag{1.5}$$

Замечание 1.2. Для рассматриваемого распределения и рассматриваемого класса оценок T эффективная оценка может не существовать, а удаётся лишь определить нижнюю грань дисперсий оценок $\inf_T D\hat{\theta}_n$. Тогда возникает задача построения оценок, дисперсии которых будут возможно ближе к этой грани.

Определение 1.7. Из двух оценок ,$\hat{\theta}_{1n}$ и $\hat{\theta}_{2n}$, одной и той же числовой характеристики или параметра θ распределения в классе T состоятельных и несмещенных оценок более эффективной считается та, дисперсия которой меньше.

Если имеет место неравенство

$$D\hat{\theta}_{1n} < D\hat{\theta}_{2n}, \tag{1.6}$$

то $\hat{\theta}_{1n}$ – более эффективная оценка θ, чем $\hat{\theta}_{2n}$.

Отношение $D\hat{\theta}_{1n} / D\hat{\theta}_{2n}$ называется *относительной эффективностью* оценки $\hat{\theta}_{2n}$ относительно оценки $\hat{\theta}_{1n}$, а отношение $\inf_T D\hat{\theta}_n / D\hat{\theta}_{2n} = \operatorname{eff}\hat{\theta}_{2n}$ называется *эффективностью* оценки $\hat{\theta}_{2n}$ в рассматриваемом классе оценок T.

Пример 1.2. Для нормального распределения $N(m,\sigma)$ оценкой математического ожидания m могут служить выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочная медиана med в силу симметричности нормального распределения.

Доказано, что $D\bar{x} = \sigma^2/n$ (для любого n) и $D\,\mathrm{med} \approx \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$ (при больших n). Следовательно, при больших n относительной эффективностью выборочной медианы относительно $\bar{x}$ будет

$$D\bar{x}/D\,\mathrm{med} = 2/\pi \approx 0.64. \tag{1.7}$$

Определение 1.8. Оценка $\hat{\theta}_n$ параметра θ распределения называется *асимптотически эффективной* в классе T состоятельных и несмещенных оценок, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{eff}\hat{\theta}_n = 1. \tag{1.8}$$

Асимптотически эффективные оценки даёт метод максимального правдоподобия получения оценок, который рассматривается далее в § 5.

В более общем случае, если отказаться от требования несмещённости оценки $\hat{\theta}_n$ параметра θ, то в качестве меры разброса значений $\hat{\theta}_n$ относительно θ вместо дисперсии $D\hat{\theta}_n$ обычно выбирается величина *среднего квадрата ошибки*, то есть второй момент вида $\mathrm{M}\left[(\hat{\theta}_n-\theta)^2\right]$. Тогда оценка $\hat{\theta}_n^*$ называется эффективной в классе T состоятельных оценок, если выполняется равенство

$$\mathrm{M}\left[(\hat{\theta}_n^*-\theta)^2\right]=\inf_T \mathrm{M}\left[(\hat{\theta}_n-\theta)^2\right]. \qquad (1.9)$$

Отношение

$$\operatorname{eff}\hat{\theta}_{1n}=\inf_T \mathrm{M}\left[(\hat{\theta}_n-\theta)^2\right]\Big/\mathrm{M}\left[(\hat{\theta}_{1n}-\theta)^2\right]. \qquad (1.10)$$

называется эффективностью оценки $\hat{\theta}_{1n}$ в классе T состоятельных оценок.

§ 2. Свойства выборочного среднего и выборочной дисперсии

1. Свойства выборочного среднего $\bar{x}$.

Свойство 1. Выборочное среднее $\bar{x}$ является состоятельной оценкой генерального математического ожидания $m = MX$, что следует из предельной теоремы Чебышёва:

$$\bar{x}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} m \qquad (2.1)$$

Свойство 2. $\bar{x}$ является несмещенной оценкой m:

$$\mathrm{M}\bar{x}=m. \qquad (2.2)$$

► $\mathrm{M}\bar{x}=\mathrm{M}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{M}x_i=\frac{1}{n}n\mathrm{M}X=m$, ибо выборочные элементы x_i рассматриваются как экземпляры изучаемой случайной величины X. Поэтому $\mathrm{M}x_i=\mathrm{M}X=m$, $i=1,\ldots,n$.◄

Свойство 3. $\bar{x}$ не является робастной оценкой m, так как в своем составе имеет крайние элементы вариационного ряда.

Свойство 4. $D\bar{x}=\sigma^2/n$. (2.3)

► $D\bar{x}=D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Dx_i=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\sigma^2/n$.◄

Этот результат означает, что с ростом n рассеяние $\bar{x}$ уменьшается обратно пропорционально n.

Замечание 2.1. Аналогично доказывается, что выборочный начальный момент a_l порядка l также является состоятельной и несмещенной оценкой генерального начального момента $\alpha_l=\mathrm{M}X^l$ порядка l:

$$a_l\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}}\alpha_l; \qquad (2.4)$$

$$\mathrm{M}a_l=\alpha_l. \qquad (2.5)$$

2. Свойства выборочной дисперсии s^2.

Свойство 1. Выборочная дисперсия является состоятельной оценкой генеральной дисперсии:

$$s^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \sigma^2 = \mathrm{D}X\,. \tag{2.6}$$

► $s^2 = a_2 - \overline{x}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \alpha_2 - m^2 = \mathrm{D}X$, так как на предел по вероятности распространяются известные теоремы о пределе суммы и произведения, известные из курса математического анализа, и $a_2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} \alpha_2$, $\overline{x} \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$ вследствие формул (2.1) и (2.4).◄

Свойство 2. Вспомогательная формула для выборочной дисперсии

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - (\overline{x} - m)^2\,. \tag{2.7}$$

► $$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - m) - (\overline{x} - m)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - m)^2 - 2(\overline{x} - m)(x_i - m) + (\overline{x} - m)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - 2(\overline{x} - m)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{n}nm\right) + \frac{1}{n}n(\overline{x} - m)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - 2(\overline{x} - m)^2 + (\overline{x} - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - (\overline{x} - m)^2\,.$$ ◄

Свойство 3. Выборочная дисперсия s^2 – смещённая оценка генеральной дисперсии σ^2 с отрицательным смещением $-\sigma^2/n$:

$$\mathrm{M}s^2 = \sigma^2 - \sigma^2/n. \tag{2.8}$$

►Применяя формулу (2.7), получаем $\mathrm{M}s^2 = DX - D\overline{x} = \sigma^2 - \dfrac{\sigma^2}{n}$.◄

Вследствие смещённости выборочной дисперсии возникает задача создания несмещенной оценки дисперсии.

Так как $\mathrm{M}s^2 = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$, то смещение можно устранить, умножив s^2 на множитель $n/(n\text{-}1)$. Образуем

$$s^{*2} = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\,. \tag{2.9}$$

Оценка s^{*2} является несмещенной оценкой σ^2. Действительно,

$$\mathrm{M}s^{*2} = \frac{n}{n-1}\mathrm{M}s^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2\,.$$

В заключение заметим, что s^2 не является робастной оценкой σ^2.

§ 3. Оценки для m и σ в случае нормального распределения

1. Свойства оценок математического ожидания m.

Рассмотрим 4 выборочные характеристики $\overline{x}$, med, t_q, t_R. Нормальное распределение $N(m, \sigma)$ – симметричное, поэтому эти выборочные характеристики $\overline{x}$ med, t_q, t_R являются оценками m. Действительно, выборочная медиана med является оценкой генеральной медианы Me, полусумма выборочных квартилей является оценкой полусуммы генеральных квартилей θ_Q, а так как m= =Me=θ_Q, то все они оценивают m. Оценка t_R=($x_{\min}$+ $x_{\max n}$)/2 в силу симметричности конструкции также оценивает m [17]. Все эти оценки состоятельные и несмещенные.

Оценки t_q и med являются робастными, $\bar{x}$ и t_R – нет.

Относительная эффективность этих оценок различна. При $n > 4$ имеют место неравенства

$$D\bar{x} < Dt_q < D\,\text{med} < Dt_R. \tag{3.1}$$

Доказано, что для нормального распределения при известном σ выборочное среднее $\bar{x}$ является эффективной оценкой параметра m [4].

2*. Свойства оценок среднего квадратичного отклонения σ.

Рассмотрим 4 выборочные характеристики: $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, $d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \text{med}\right|$, $q = z_{3/4} - z_{1/4}$ – *интерквартильная широта*, $R = x_{\max} - x_{\min}$ – *размах*. Все они характеризуют рассеяние, но являются смещенными оценками σ, выражаются через σ, следовательно, после нормирования, означающего деление на соответствующий нормирующий коэффициент

$$k_s(n) = \mathrm{M}s/\sigma, k_d(n) = \mathrm{M}d/\sigma, k_q(n) = \mathrm{M}q/\sigma, k_R(n) = \mathrm{M}R/\sigma,$$

эти характеристики станут несмещенными оценками σ. Таблица нормирующих коэффициентов приведена в [13, приложение (таблица VII))].

Образуем несмещенные оценки σ:

Нормированное среднее квадратичное отклонение

$$s' = s/k_s(n); k_s(n) = \sqrt{2/n}\cdot\Gamma(n/2)/\Gamma((n-1)/2). \tag{3.2}$$

Нормированное среднее абсолютное отклонение

$$d^* = d/k_d(n). \tag{3.3}$$

Нормированная интерквартильная широта

$$q^* = q/k_q(n). \tag{3.4}$$

Нормированный размах

$$R^* = R/k_R(n). \tag{3.5}$$

Оценки (3.2) – (3.5) – состоятельные [17], q является робастной оценкой, остальные – нет. Относительная эффективность этих оценок различна, ибо различны их дисперсии. При n>6 имеют место следующие неравенства [17]:

$$Ds' < Dd^* < DR^* < Dq^*. \tag{3.6}$$

§ 4. Метод моментов получения оценок параметров генерального распределения

Пусть известен вид генеральн ого закона распределения, а его параметры $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ неизвестны. Возникает задача их статистического оценивания. *Метод моментов* Пирсона (К. Пирсон – англ. математик, 1857–1936) – один из первых методов получения таких оценок, основанный на сравнении выборочных и генеральных моментов распределения. Идейно он очень прост.

Предполагается, что имеется выборка $(x_1,\ldots,x_n)$ из исследуемой генеральной совокупности. На её основе вычисляются m начальных моментов $a_1,\ldots, a_m$. Так как вид генерального закона известен, то, следовательно, можно найти m первых начальных генеральных моментов $\alpha_1(\theta_1,\ldots, \theta_m)$, ... , $\alpha_m(\theta_1,\ldots, \theta_m)$, которые выражаются через неизвестные параметры. Выборочные и генеральные моменты одинакового порядка приравниваются:

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta_1, \ldots, \theta_m) = a_1, \\ \quad\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_m(\theta_1, \ldots, \theta_m) = a_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

Получили систему m уравнений с неизвестными величинами $\theta_1, \ldots, \theta_m$. Решение $(\hat\theta_1, \ldots, \hat\theta_m)$ этой системы даёт оценки $\hat\theta_i = \hat\theta_i(x_1, \ldots, x_n)$ неизвестных параметров θ_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Свойства оценок метода моментов

При выполнении достаточно общих условий полученные оценки состоятельные:

$$\hat\theta_i \xrightarrow{\mathsf{P}} \theta_i \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{4.2}$$

Среднее значение такой оценки отличается от истинного значения параметра на величину порядка $1/n$ [7]. В общем случае они – смещённые и не являются эффективными и асимптотически эффективными.

Замечание 4.1. Вместо начальных моментов можно использовать центральные.

Пример 4.1.► Для показательного закона с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

известно, что $\alpha_1 = \mathrm{M}\, X = 1/\lambda$. Так как $a_1 = \bar x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, то система (4.1) в этом случае сводится к одному уравнению $1/\lambda = \bar x$, из которого находим

$$\hat{\lambda} = 1/\bar{x}\,.◄ \qquad (4.3)$$

Пример 4.2. ►Для нормального закона $N(m, \sigma)$ известно, что $\alpha_1 = \mathrm{M}X = m$; $\mu_2 = \mathrm{M}\left[(X - m_X)^2\right] = \sigma^2$. Для этого случая удобно взять первый начальный и второй центральный моменты. Имеем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1, \\ \mu_2 = m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \bar{x}, \\ \sigma^2 = s^2. \end{cases}$$

Находим оценки двух параметров по методу моментов:

$$\hat{m} = \bar{x}; \quad \hat{\sigma} = s\,.◄ \qquad (4.4)$$

Пример 4.3. ►Для равномерного закона, определяемого плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b], \end{cases}$$

неизвестными параметрами являются a, b.

Известно, что $\alpha_1 = m_X = (a+b)/2$; $\mu_2 = D_X = (b-a)^2/12$. Для нахождения оценок $\hat{a}$, $\hat{b}$ составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1, \\ \mu_2 = m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)/2 = \bar{x}, \\ (a+b)^2/12 = s^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + a = 2\bar{x}, \\ b - a = 2\sqrt{3}\cdot s, \end{cases}$$

из которой находим

$$\hat{a} = \bar{x} - s\sqrt{3}; \quad \hat{b} = \bar{x} + s\sqrt{3}\,.◄ \qquad (4.5)$$

§ 5. Метод максимального правдоподобия получения оценок параметров генерального распределения

Метод максимального правдоподобия, созданный Фишером (Р. Фишер – англ. математик, 1890–1962), является достаточно универсальным и плодотворным методом оценивания.

Пусть имеется выборка $(x_1,\ldots,x_n)$ из генеральной совокупности с плотностью вероятности $f(x,\theta)$, содержащей один неизвестный параметр θ.

Выборка является n-мерной случайной величиной, компоненты x_i которой взаимно независимы, одинаково распределены с плотностью $f(x,\theta)$. Тогда плотность распределения n-мерной случайной величины $(x_1,\ldots,x_n)$ равна

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\ldots f(x_n,\theta)\,. \qquad (5.1)$$

Эта функция называется *функцией правдоподобия* для данной выборки.

Будем считать θ переменной неслучайной величиной, а элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выборки фиксированными, так как выборка фактически осуществлена. Если придавать θ различные значения, то естественно ожидать, что плотность $L(x_1, x_2, \ldots x_n; \theta)$ примет максимальное значение в случае, когда θ окажется равным истинному его значению, так как при других значениях θ менее вероятно за один раз получить именно данную выборку.

Эти интуитивные соображения приводят к тому, что за оценку θ берут такое значение $\hat{\theta}$, при котором функция правдоподобия достигает максимума.

Технически (так как L состоит из произведений) удобнее искать max $\ln L$ (точка $\hat{\theta}$, дающая максимум $\ln L$, даёт и максимум L). Итак, для отыскания $\hat{\theta}$ имеем уравнение

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0, \tag{5.2}$$

называемое *уравнением правдоподобия*, а его решение $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)$, зависящее от элементов выборки, *оценкой максимального правдоподобия*.

Свойства оценок максимального правдоподобия

При выполнении достаточно общих условий оценки максимального правдоподобия являются состоятельными и асимптотически эффективными. В общем случае они являются смещёнными [13].

Если генеральная плотность вероятности $f(x, \theta_1, \ldots \theta_k)$ содержит k параметров, вместо одного уравнения правдоподобия решается система уравнений

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_k} = 0. \tag{5.3}$$

Пример 5.1. Найти оценки максимального правдоподобия для показательного закона с плотностью вероятности:

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

►Функция правдоподобия при $x>0$ имеет вид

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda x_1} \ldots e^{-\lambda x_n} = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right);$$

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0. \text{ Отсюда}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}; \quad \hat{\lambda} = 1/\bar{x}. \tag{5.4}$$

Оценки максимального правдоподобия и метода моментов (4.3) параметра показательного закона совпадают.◄

Пример 5.2. Найти оценки максимального правдоподобия для нормального закона $N(m, \sigma)$.

►Плотность вероятности для нормального закона $N(m, \sigma)$ имеет вид

$$f(x,m,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

Удобно считать, что здесь два параметра m и σ^2. Следовательно, функция правдоподобия равна

$$L=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{(x_1-m)^2}{2\sigma^2}-\dots-\frac{(x_n-m)^2}{2\sigma^2}},\ \text{а}$$

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2.$$

Дифференцируя $\ln L$ по m и σ^2, получаем систему уравнений правдоподобия:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial m}=\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)=0,\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2=0.\end{cases}\tag{5.5}$$

Из первого уравнения находим $\sum_{i=1}^{n}x_i-nm=0$. Отсюда

$$\hat{m}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}.\tag{5.6}$$

Из второго уравнения находим $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=n$. Отсюда

$$\hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\overline{x})^2=s^2.\tag{5.7}$$

Эти оценки мы получили ранее методом моментов.◄

Пример 5.3. Найти оценки максимального правдоподобия для равномерного закона с плотностью вероятности:

$$f(x,a,b)=\begin{cases}1/(b-a), & x\in[a,b];\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}\tag{5.8}$$

►Функция правдоподобия для $x\in[a,b]$ имеет вид

$$L=\frac{1}{(b-a)^n}\le\frac{1}{(x_{\max}-x_{\min})^n},\tag{5.9}$$

так как $b-a\ge x_{\max}-x_{\min}$. Из неравенства (5.9) следует, что функция L принимает наибольшее значение при $b=x_{\max}$ и $a=x_{\min}$. Таким образом, оценки максимального правдоподобия в случае равномерного закона есть

$$\hat{a}=x_{\min},\quad \hat{b}=x_{\max}.\tag{5.10}$$

Они *отличаются* от оценок (4.5) метода моментов.◄

Замечание 5.1. В случае дискретного закона распределения $\mathrm{P}(X = x_i) = p(x_i, \theta)$ функция правдоподобия определяется формулой

$$L = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta). \tag{5.11}$$

Пример 5.4. Найти оценку максимального правдоподобия параметра a закона Пуассона $\mathrm{P}(X = k) = a^k e^{-a}/k!$.

$$\blacktriangleright\ L = \frac{a^{x_1}}{x_1!}e^{-a} \dots \frac{a^{x_n}}{n!} = e^{-na} \cdot a^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} (x_i!)^{-1},$$

$$\ln L = -na + \ln a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \ln (x_i!); \ \frac{\partial \ln L}{\partial a} = -n + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0;$$

$$\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} x_i = n; a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}; \hat{a} = \overline{x}. \blacktriangleleft$$

Замечание 5.2. В § 4, 5 рассмотрены два наиболее употребительных на практике метода оценок параметров закона распределения – методы моментов и максимума правдоподобия. Есть и другие методы, рассмотренные в литературе: методы квантилей, минимума хи-квадрат, наименьших квадратов, наименьших абсолютных отклонений, минимакса [17].

Глава 3. **Интервальное оценивание числовых характеристик и параметров распределения генеральной совокупности**

Точечные оценки, рассмотренные в предыдущей главе, хотя и являются численными, не дают всей желательной информации об оцениваемых генеральных характеристиках.

Если, например, $\overline{x} = 10$, то совершенно неясно, насколько точно число 10 оценивает неизвестное математическое ожидание m. Мы лишь знаем некоторые качественные свойства $\overline{x}$, такие, как состоятельность и несмещённость, которые дают уверенность, что $\overline{x}$ – хорошая оценка по сравнению с другими возможными. А следовало бы связать точечную оценку с объёмом выборки, выработать показатели её точности и надёжности. Эти вопросы решаются в теории интервального оценивания.

§ 1. Доверительный интервал. Точность и надёжность оценки

Пусть θ – неизвестная числовая характеристика или параметр генерального распределения.

Определение 1.1. Если выполняется соотношение

$$P((\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma, \tag{1.1}$$

то интервал (θ_1, θ_1) называется *доверительным интервалом*, накрывающим неизвестную генеральную характеристику θ с *доверительной вероятностью* γ.

Здесь $\theta_1 = \theta_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\theta_2 = \theta_2(x_1, \ldots, x_n)$ – известные функции выборочных элементов $x_1, \ldots, x_n$, т. е. статистики. Они вычисляются по выборке.

Число γ называется также *надёжностью*, с которой доверительный интервал накрывает θ. Число $\alpha = 1 - \gamma$ называется *уровнем значимости*.

Статистики θ_1, θ_2 в соотношении (1.1) являются точечными оценками θ. Одна дает левую, а другая – правую границы, между которыми содержится θ с надёжностью γ.

Половину длины доверительного интервала

$$\delta = (\theta_2 - \theta_1)/2 \tag{1.2}$$

назовем *точностью интервального оценивания*.

Пусть теперь известна одна точечная оценка $\hat{\theta}$ генеральной числовой характеристики или параметра распределения θ.

Определение 1.2. Если выполняется соотношение

$$P\left(|\theta - \hat{\theta}| < \varepsilon\right) = \gamma, \tag{1.3}$$

то число ε называется *точностью*, а число γ – *надёжностью* оценки $\hat{\theta}$ генеральной числовой характеристики θ.

Здесь $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ – статистика, т. е. функция выборочных элементов.

Если известны ε и γ, то легко построить доверительный интервал для θ с помощью её точечной оценки $\hat{\theta}$. Действительно,

$$\left|\theta - \hat{\theta}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \theta - \hat{\theta} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\theta} - \varepsilon < \theta < \hat{\theta} + \varepsilon.$$

Тогда $\theta_1 = \hat{\theta} - \varepsilon$; $\theta_2 = \hat{\theta} + \varepsilon$, и от (1.3) приходим к соотношению (1.1).

Как находить ε, γ, строить доверительный интервал (θ_1, θ_2) в конкретных случаях разбирается в следующих параграфах. Эти вопросы будут рассмотрены для практически наиболее важных случаев оценивания: вероятности события p, математического ожидания m и среднего квадратического отклонения σ.

§ 2. Точность и надёжность оценивания вероятности события с помощью его относительной частоты при большом объёме выборки

Пусть p – вероятность события A, а $p^* = \mu/n$ – его относительная частота. По теореме Муавра – Лапласа теории вероятностей при больших n справедливо приближенное равенство

$$P\left(\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \approx \Phi(x), \tag{2.1}$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа. (2.2)

Из формулы (2.1) находим $\mathrm{P}\left(\frac{|\mu-np|}{\sqrt{npq}}<x\right)\approx\mathrm{P}\left(-x<\frac{\mu-np}{\sqrt{npq}}<x\right)\approx$

$\approx\Phi(x)-\Phi(-x)=\Phi(x)-[1-\Phi(x)]=2\Phi(x)-1$. Отсюда

$$\mathrm{P}\left(\left|p-\frac{\mu}{n}\right|<x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\approx 2\Phi(x)-1. \quad (2.3)$$

Из формулы (2.3) видим, что в наших построениях p отличается от $p^*=\mu/n$ на величину порядка $1/\sqrt{n}$. Так как p неизвестно, то его заменяем на p^*, а q соответственно на $q^*=1-p^*$. Это означает, что под корнем в формуле (2.3) мы пренебрегаем малыми слагаемыми порядка $1/\left(n\sqrt{n}\right)$. Получаем

$$\mathrm{P}\left(|p-p^*|<x\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}\right)\approx 2\Phi(x)-1. \quad (2.4)$$

Полагаем $x\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}=\varepsilon$; $2\Phi(x)-1=\gamma$. Отсюда

$$\Phi(x)=(1+\gamma)/2. \quad (2.5)$$

Решая уравнение (2.5), находим его корень

$$u_{(1+\gamma)/2}=\Phi^{-1}((1+\gamma)/2) \quad (2.6)$$

– квантиль нормального распределения $N(0,1)$ порядка $(1+\gamma)/2$. Тогда

$$\varepsilon=u_{(1+\gamma)/2}\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}. \quad (2.7)$$

Формулы (2.5), (2.7) связывают три величины ε, γ, n. Задавая две из них, можно найти третью. Тем самым будет построен доверительный интервал для неизвестной вероятности p:

$$\mathrm{P}\left(p^*-\varepsilon<p<p^*+\varepsilon\right)=\gamma. \quad (2.8)$$

Пример 2.1. Заданы $n=1600$ и $\gamma=0.95$. Требуется найти ε и построить доверительный интервал для вероятности p при найденной по выборке относительной частоте $p^*=0.2$

►Решая уравнение (2.5) $\Phi(x)=(1+\gamma)/2=(1+0.95)/2=0.975$ с помощью таблицы квантилей нормального распределения, получим $u_{(1+\gamma)/2}=u_{0.975}=1.96$. Далее по формуле (2.7) находим

$$\varepsilon=u_{0.975}\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{1600}}=u_{0.975}\frac{0.4}{40}=0.01u_{0.975}=0.01\cdot 1.96\approx 0.02.$$

Получаем доверительный интервал для неизвестной вероятности p:

$$0.18 < p < 0.22 \text{ с надёжностью } 0.95. \blacktriangleleft \tag{2.9}$$

Замечание 2.1. Примеру 2.1 можно придать, например, следующее реальное содержание. В результате проведённого социологического опроса n=1600 человек рейтинг кандидата N в президенты составляет 20%. Тогда доверительный интервал (2.9) позволяет утверждать, что с надёжностью γ=0.95 действительный рейтинг кандидата N заключён в пределах 18%–22%. Этот результат можно выразить и иначе: рейтинг N равен 20%$\pm$ 2% с 5% ошибкой.

Замечание 2.2. Вероятность p, оцениваемая с помощью доверительного интервала (2.8) и точечной оценки p^*, есть параметр биномиального закона распределения случайной величины X: $\mathrm{P}(X=k)=C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$, k=0, 1, …, m.

§ 3. Доверительный интервал для математического ожидания нормальной генеральной совокупности

Известно [4], что для выборки объёма n из нормальной генеральной совокупности случайная величина $\sqrt{n-1}\,\dfrac{\overline{x}-m}{s}$ распределена по закону Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. (О законе распределения Стьюдента см. в § 5, гл. 4. Таблица квантилей распределения Стьюдента – таблица III приложения). Здесь s – выборочное среднее квадратичное отклонение. Так как плотность $f_{n-1}(x)$ этого распределения – функция чётная, то получаем

$$\mathrm{P}\left(-x<\sqrt{n-1}\,\frac{\overline{x}-m}{s}<x\right)=\mathrm{P}\left(-x<\sqrt{n-1}\,\frac{m-\overline{x}}{s}<x\right)=\int_{-x}^{x} f_{n-1}(t)\,dt=$$

$$=2\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt=2\int_{-\infty}^{x} f_{n-1}(t)\,dt-1=2F_{n-1}(x)-1.$$

Здесь $F_{n-1}(x)$ – функция распределения закона Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Отсюда находим

$$\mathrm{P}\left(\overline{x}-\frac{sx}{\sqrt{n-1}}<m<\overline{x}+\frac{sx}{\sqrt{n-1}}\right)=2F_{n-1}(x)-1. \tag{3.1}$$

Полагаем $2F_{n-1}(x)-1=\gamma$. Тогда

$$F_{n-1}(x)=(1+\gamma)/2. \tag{3.2}$$

По таблице квантилей распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы находим квантиль порядка $(1+\gamma)/2$

$$t_{(1+\gamma)/2}(n-1)=F_{n-1}((1+\gamma)/2), \tag{3.3}$$

и получаем искомый доверительный интервал для m:

$$P\left(\bar{x}-\frac{st_{(1+\gamma)/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}<m<\bar{x}+\frac{st_{(1+\gamma)/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right)=\gamma. \qquad (3.4)$$

Пример 3.1. По выборке объёма n=20 из нормальной генеральной совокупности найдены $\bar{x}=5.00$ и s= 0.25. Требуется построить доверительный интервал для m при γ=0.95. Число m можно интерпретировать как среднее значение контролируемого параметра производимого продукта. Контроль проводится по результатам 20 измерений.

►С помощью таблицы квантилей распределения Стьюдента решаем уравнение (3.2): $F_{19}(x)=(1+0.95)/2=0.975$. Получаем $t_{0.975}(19)=2.09$. Формула (3.4) даёт $5.00-\frac{0.25\cdot 2.09}{\sqrt{19}}<m<5.00+\frac{0.25\cdot 2.09}{\sqrt{19}} \quad\Leftrightarrow\quad 4.88<m>5.12$.

Итак, $4.88<m<5.12$ с надёжностью 0.95.◄

§ 4. Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения σ нормальной генеральной совокупности

Известно [17], что для выборки объёма n из нормальной генеральной совокупности случайная величина ns^2/σ^2 распределена по закону χ^2 (хи-квадрат) с $n-1$ степенями свободы (о распределении хи-квадрат см. в § 7, гл. 4). Зададимся доверительной вероятностью γ и по таблице IV приложения найдем квантили $\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)$ и $\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)$ распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы соответственно порядков $(1-\gamma)/2$ и $(1+\gamma)/2$.

Это значит, что для случайной величины χ^2 верны равенства $P\left(\chi^2<\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)\right)=(1-\gamma)/2$; $P\left(\chi^2<\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)\right)=(1+\gamma)/2$. Но тогда

$$P\left(\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)\right)=P\left(\chi^2<\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)\right)-P\left(\chi^2<\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)\right)=$$
$$=(1+\gamma)/2-(1-\gamma)/2=\gamma.$$

Отсюда

$$P\left(\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)<\frac{ns^2}{\sigma^2}<\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)\right)=P\left(\frac{1}{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)}>\frac{\sigma^2}{ns^2}>\frac{1}{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)}\right)=$$
$$=P\left(\frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)}}<\sigma<\frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)}}\right).$$

Окончательно

$$P\left(\frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1)}}<\sigma<\frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1)}}\right)=\gamma, \qquad (4.1)$$

что и дает доверительный интервал для генерального среднего квадратичного отклонения σ с доверительной вероятностью γ.

Замечание 4.1. Любой доверительный интервал можно построить неоднозначно. Всегда применяется какой-нибудь дополнительный принцип его построения. При построении доверительного интервала (4.1) исходили из принципа, что вероятности попадания χ^2 в промежутки левее доверительного интервала и правее его равны между собой (рис. 4.1).

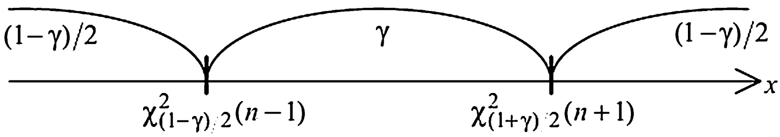


Рис. 4.1. *Положение доверительного интервала для ns^2/σ^2 на числовой оси*

Пример 4.1. Сделано n =20 измерений контролируемого параметра производимого продукта. По полученной выборке найдено значение выборочного среднего квадратичного отклонения s=0.25. Требуется построить доверительный интервал для σ с надёжностью γ=0.95 (σ характеризует разброс значений контролируемого параметра).

►По таблице распределения хи-квадрат находим

$$\chi^2_{(1-\gamma)/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(19) = 8.91; \chi^2_{(1+\gamma)/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(19) = 32.9\,.$$

Применяя формулу (4.1), получаем

$$\frac{0.25\cdot\sqrt{19}}{\sqrt{32.9}} < \sigma < \frac{0.25\cdot\sqrt{19}}{\sqrt{8.91}} \quad \Leftrightarrow \quad 0.19 < \sigma < 0.36\,.$$

Итак, $0.19<\sigma<0.36$ с надёжностью 0.95.◄

§ 5. Доверительный интервал для математического ожидания любой генеральной совокупности при большом объёме выборки

Выборочное среднее $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ является суммой большого числа независимых одинаково распределенных слагаемых. В силу центральной предельной теоремы при большом объёме выборки (n >30) случайная величина $\dfrac{\overline{x} - \mathrm{M}\overline{x}}{\sqrt{D\overline{x}}} = \sqrt{n}\,\dfrac{(\overline{x} - m)}{\sigma}$ распределена приблизительно нормально $N(0,1)$. Пусть $\Phi(x)$ – функция Лапласа (2.2). Тогда имеем

$$\mathrm{P}\left(-x < \sqrt{n}\,\frac{\overline{x} - m}{\sigma} < x\right) = \mathrm{P}\left(-x < \sqrt{n}\,\frac{m - \overline{x}}{\sigma} < x\right) \approx \Phi(x) - \Phi(-x) =$$

$$=\Phi(x) - [1 - \Phi(x)] = 2\Phi(x) - 1.$$ Отсюда

$$\mathrm{P}\left(\overline{x} - \frac{\sigma x}{\sqrt{n}} < m < \overline{x} + \frac{\sigma x}{\sqrt{n}}\right) \approx 2\Phi(x) - 1. \qquad (5.1)$$

Полагаем $2\Phi(x)-1=\gamma$. Тогда

$$\Phi(x)=(1+\gamma)/2). \qquad (5.2)$$

Пусть $u_{(1+\gamma)/2}$ – квантиль нормального распределения $N(0, 1)$ порядка $(1+\gamma)/2)$, т. е. решение уравнения (5.2):

$$u_{(1+\gamma)/2}=\Phi^{-1}((1+\gamma)/2). \qquad (5.3)$$

В соотношении (5.1) σ заменяем на s, так как величина σ неизвестна. Эта замена означает, что в этом соотношении под знаком вероятности мы пренебрегаем слагаемыми порядка $1/n$, ибо с той же надёжностью σ отличается от s на величину порядка $1/\sqrt{n}$ (см. формулу (6.9) в § 6). В результате мы получаем доверительный интервал для m с надёжностью γ:

$$\mathrm{P}\left(\overline{x}-\frac{s\cdot u_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}<m<\overline{x}+\frac{s\cdot u_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}\right)=\gamma. \qquad (5.4)$$

Пример 5.1. По выборке с объёмом $n=100$ вычислены выборочные характеристики $\overline{x}=0.13$; $s=1.05$. Требуется построить доверительный интервал для m с надёжностью $\gamma=0.95$.

►По таблице II приложения для квантилей нормального распределения $N(0, 1)$ находим квантиль $u_{(1+\gamma)/2}= u_{0.9751}=1.96$. Тогда по формуле (5.4) получаем

$$0.13-\frac{1.05\cdot 1.96}{\sqrt{100}}<m<0.13+\frac{1.05\cdot 1.96}{\sqrt{100}} \quad \Leftrightarrow \quad -0.07<m<0.33.$$

Таким образом, $-0{,}07<m<0{,}33$ с надёжностью 0,95. Этот результат можно записать также в виде $m=0.13\pm0.2$ с надёжностью 0.95.◄

§ 6*. Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения σ любой генеральной совокупности при большом объёме выборки

Выборочная дисперсия $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ является суммой большого числа практически независимых одинаково распределенных слагаемых (имеется одна связь: $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=0$). В силу центральной предельной теоремы случайная величина $(s^2-\mathrm{M}s^2)/\sqrt{Ds^2}$ распределена приблизительно нормально $N(0, 1)$.

Пусть $\Phi(x)$ – функция Лапласа (2.2). Тогда при больших n получаем

$$P\left(-x<\frac{s^2-Ms^2}{\sqrt{Ds^2}}<x\right)\approx\Phi(x)-\Phi(-x)=\Phi(x)-[1-\Phi(x)]=2\Phi(x)-1\,. \quad (6.1)$$

Положим $2\Phi(x)-1=\gamma$. Отсюда $\Phi(x)=(1+\gamma)/2$. Пусть $u_{(1+\gamma)/2}$ квантиль нормального распределения $N(0, 1)$ порядка $(1+\gamma)/2$:

$$u_{(1+\gamma)/2}=\Phi^{-1}((1+\gamma)/2). \quad (6.2)$$

Известно, что (гл. 2, (2.8)):

$$Ms^2=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}\approx\sigma^2 \quad (6.3)$$

и [7]

$$Ds^2=(\mu_4-\sigma^4)/n+o(1/n)\approx(m_4-s^4)/n \quad (6.4)$$

Здесь $o(1/n)$ – бесконечно малая высшего порядка, чем $1/n$, $\mu_4=M[(X-m_X)^4]$ – 4-й генеральный центральный момент. Он заменён на выборочный 4-й центральный момент

$$m_4=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^4\,, \quad (6.5)$$

а σ заменено на S. Это означает, что в формуле (6.4) в среднем мы пренебрегаем бесконечно малыми порядка выше, чем $1/n$ [17]. Вместо m_4 удобно взять безразмерную выборочную числовую характеристику

$$\hat{E}=m_4/s^4-3, \quad (6.6)$$

называемую *выборочным эксцессом*. Он является оценкой генерального эксцесса

$$E=\mu_4/\sigma^4-3\,. \quad (6.7)$$

В результате сделанных приближений находим

$$Ds^2\approx\frac{s^4}{n}\left(\frac{m_4}{s^4}-1\right)=\frac{s^4}{n}\left(\left(\frac{m_4}{s^4}-3\right)+2\right)=\frac{s^4}{n}(\hat{E}+2)\,.$$

Итак,

$$\sqrt{Ds^2}=\frac{s^2}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{E}+2}\,. \quad (6.8)$$

Преобразуем неравенства под знаком вероятности в формуле (6.1). учитывая, что $x=u_{(1+\gamma)/2}$

$$-x<\frac{s^2-\sigma^2}{\sqrt{Ds^2}}<x\Leftrightarrow\ -x<\frac{\sigma^2-s^2}{\sqrt{Ds^2}}<x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2-x\sqrt{Ds^2}<\sigma^2<s^2+x\sqrt{Ds^2}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{E}+2}\right)<\sigma^2<s^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{E}+2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{E}+2}\right)^{1/2}<\sigma<s\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\sqrt{\hat{E}+2}\right)^{1/2}.$$

Разлагая функции в биномиальный ряд и оставляя первые два члена, получим окончательно

$$\mathrm{P}\left(s\left(1-\frac{1}{2\sqrt{n}}u_{(1+\gamma)/2}\sqrt{\hat{E}+2}\right)<\sigma<s\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}u_{(1+\gamma)/2}\sqrt{\hat{E}+2}\right)\right)=\gamma. \tag{6.9}$$

Это и есть доверительный интервал для σ с доверительной вероятностью γ.

Пример 6.1. По выборке с объёмом n=100 вычислены s=1.05; $m_4=2.86$, $\hat{E}=-0.62$. Построить доверительный интервал для σ с надёжностью $\gamma=0.95$.

►По таблице II приложения находим квантиль $u_{(1+\gamma)/2}=u_{0.9751}=1.96$ нормального распределения $N(0, 1)$ порядка 0.975. Применяем формулу (6.9):

$$1.05\left(1-\frac{1}{20}1.96\sqrt{2-0.62}\right)<\sigma<1.05\left(1+\frac{1}{20}1.96\sqrt{2-0.62}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0.93<\sigma<1.21.$$

Итак, $0.93<\sigma<1.21$ с надёжностью 0.95.

Глава 4. **Проверка статистических гипотез**

При проведении статистических исследований возникают различные вопросы о свойствах генерального распределения и выборки. Для ответов на эти вопросы выдвигаются гипотезы, требующие статистической проверки на основе полученной выборки.

Эти гипотезы могут быть выдвинуты непосредственно практикой, а могут возникнуть как дальнейший этап статистических исследований после разведочного анализа, обеспеченного описательной статистикой.

§ 1. Виды статистических гипотез

Приведём примеры наиболее важных в практическом отношении гипотез.

1. Гипотеза о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей.

Она возникает, когда нужно проверить, равны ли средние значения основных параметров изделий, производимых двумя станками, участками, цехами.

2. Гипотеза о равенстве дисперсий нескольких генеральных совокупностей.

Например, следует сравнить точность двух измерительных приборов, разброс значений контролируемого параметра при массовом производстве продукта на двух участках.

3. Гипотеза о законе распределения генеральной совокупности.

Эта гипотеза может возникнуть на основе теоретических соображений, имеющегося опыта исследований, на основе изучения гистограммы выборки.

4. Гипотеза об однородности выборки, об отсутствии в ней выбросов.

Определение 1.1. *Статистической гипотезой* называется предположение о виде или свойствах генерального или выборочного распределений, которое можно проверить статистическими методами на основе имеющейся выборки.

Определение 1.2. Статистическая гипотеза о генеральном распределении называется *простой*, если она его полностью определяет. В противном случае гипотеза называется *сложной*.

Как правило, гипотезы о генеральном распределении – сложные.

§ 2. Критерий значимости. Общая схема проверки статистических гипотез

Для проверки любой статистической гипотезы выбирается какой-либо критерий, называемый критерием значимости.

Определение 2.1. *Критерием значимости* называется правило проверки статистической гипотезы.

Выдвинутую гипотезу проверяют на основе имеющейся выборки. Для этого конструируется функция выборочных элементов, называемая статистикой, по величине которой судят о справедливости гипотезы.

Определение 2.2. *Статистикой критерия значимости* называется статистика, по значениям которой судят о справедливости статистической гипотезы.

Часто её для простоты тоже называют критерием. Например, для проверки гипотезы о том, что вероятность интересующего нас события A равна p, можно взять статистику

$$Z = \mu/n - p. \tag{2.1}$$

Она есть отклонение относительной частоты μ/n от вероятности события A.

Если гипотеза верна, то при увеличении n относительная частота будет приближаться к p по вероятности, поэтому Z будет стремиться к нулю. При большом n маловероятно, что Z будет сильно отличаться от нуля. В этом примере и в общем случае надо знать закон распределения статистики критерия, чтобы судить, какие её значения маловероятны, а какие – нет.

В основе большинства критериев значимости лежит следующий простой принцип: если сделана гипотеза о том, что событие имеет очень малую вероятность, но в результате одного лишь испытания это событие произошло, то следует подвергнуть сомнению справедливость выдвинутой гипотезы.

События с малой вероятностью α будем называть *практически невозможными*, а с вероятностью $1-\alpha$, близкой к единице, – *практически достоверными*.

Вероятности α и $1-\alpha$ абстрактно выбрать нельзя. Их значения диктуются реальной ситуацией. Например, если α – вероятность нераскрытия парашюта или разрушения дорогостоящей плотины паводком, то α должно быть десятичной дробью с большим числом нулей после запятой. Это число обычно стандартизируется мировой практикой.

Определение 2.3. *Уровнем значимости* α называется столь малая вероятность, что событие с такой вероятностью является практически невозможным.

Обычно проверяемая гипотеза обозначается H_0, а ей альтернативная – H_1. Например, если вероятность брака (событие A) равна p, а после усовершенствования технологического процесса ожидается, что она будет меньше, то в качестве H_0 можно взять гипотезу: $\mathrm{P}(A) = p$, а в качестве H_1: $\mathrm{P}(A) < p$.

Если сформулированы гипотезы H_0 и H_1 и выбрана статистика критерия Z, то следует указать еще область V_k маловероятных значений Z, попадание в которую статистики Z заставляет нас отвергнуть H_0 и принять H_1.

Определение 2.4. *Критической областью* критерия значимости называется подобласть V_k области V значений статистики Z, вероятность попадания в которую для этой статистики при условии истинности проверяемой гипотезы H_0 равна уровню значимости α:

$$\mathrm{P}\left(Z \in V_k / H_0\right) = \alpha. \tag{2.2}$$

Дополнительная область $V \backslash V_k$ называется *областью допустимых значений* статистики критерия. Если $Z \in (V \backslash V_k)$, то гипотеза H_0 при заданном уровне значимости α принимается. Обычно говорят более осторожно: H_0 не противоречит имеющейся выборке, т. е. гипотеза H_0 правдоподобна.

Область V_k можно выбрать неоднозначно. Однако зная закон распределения случайной величины Z, хотя бы асимптотический, т. е. при большом объёме выборки n, и налагая на V_k дополнительные условия, можно критическую область найти однозначно, задав величину α.

Общая схема проверки статистических гипотез

1. Выдвигаются проверяемая и альтернативная гипотезы H_0, H_1.
2. Выбирается уровень значимости α (обычно 0.001; 0.01; 0.05; 0.1).
3. Выбирается статистика Z критерия значимости и соответствующая ей, уровню значимости и проверяемым гипотезам H_0 и H_1 критическая область V_k, являющаяся частью области V значений статистики Z. При этом $V \backslash V_k$ будет областью допустимых значений Z.
4. Вычисляется выборочное значение $Z_в$ статистики Z.
5. Формулируется критерий проверки. Если $Z_в \in V_k$, то гипотеза H_0 отвергается, так как в результате одного лишь испытания, получения выборки произошло практически невозможное событие $Z_в \in V_k$ с вероятностью α. Если $Z_в \in (V \backslash V_k)$, то гипотеза H_0 принимается.

Определение 2.5. *Критерием согласия* называется критерий значимости, применяемый для проверки гипотезы о генеральном законе распределения.

Заметим, что существуют и другие схемы проверки статистических гипотез.

§ 3. Ошибки первого и второго рода. Односторонний и двусторонний критерии

1. Ошибки первого и второго рода. Суждения о принятии или отвержении выдвинутой статистической гипотезы не являются абсолютными, а носят лишь вероятностный характер, т. е. являются правдоподобными. Принимая или отвергая гипотезу, мы можем совершить ошибку.

Определение 3.1. *Ошибкой первого рода* называется ошибка отвержения правильной гипотезы. *Ошибкой второго рода* называется ошибка принятия неверной гипотезы.

Вероятность ошибки первого рода равна уровню значимости, т. е.

$$\alpha = P(Z \in V_k / H_0). \tag{3.1}$$

Эта формула означает, что гипотеза H_0 отвергается с вероятностью α, хотя эта гипотеза верна.

Вероятность ошибки второго рода обозначается β:

$$\beta = P(Z \in (V \setminus V_k)/H_1). \tag{3.2}$$

Формула (3.2) означает, что принимается гипотеза H_0, с вероятностью β, хотя верна альтернативная гипотеза H_1.

При той схеме проверки гипотез, которая сформулирована в § 2, вероятность α задаётся. Вероятность же β приходится находить. Это удаётся в редких случаях, ибо для этого нужно знать распределение статистики Z для случая альтернативной гипотезы H_1.

Принципы назначения уровня значимости α при проверке статистической гипотезы согласуются с опасностью совершения ошибок первого и второго рода. Эти принципы находятся вне статистики. Они выдвигаются практикой.

Для того чтобы проверяемая гипотеза была достаточно обоснованно отвергнута, уровень значимости выбирают достаточно малым; в практике: 0.01; 0.001. Напротив, если делается вывод о принятии гипотезы, то уровень значимости не должен быть очень малым, ибо в этом случае расширяется область допустимых значений $V \setminus V_k$, и даже при неверной гипотезе статистика Z критерия может попасть в эту область за счёт случайных колебаний. Будет совершена ошибка второго рода. Уровень значимости в этом случае можно взять равным 0.05; 0.10. Чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность забраковать верную гипотезу, т. е. совершить ошибку первого рода, но при этом увеличивается вероятность принятия неверной гипотезы, т. е. совершения ошибки второго рода.

2. Односторонний и двусторонний критерии. Пусть известен закон распределения статистики критерия Z (хотя бы асимптотический). Будем предполагать, что известна плотность вероятности $f(z/H_0)$ при условии, что справедлива проверяемая гипотеза H_0. График плотности изображен на рис. 3.1.

Пусть для простоты область значений Z – вся вещественная ось. Если критическая область V_k представляет собой промежуток $(-\infty, a)$ или $(b, +\infty)$, то соответствующий критерий называется *односторонним* (*левосторонним* или *правосторонним*).Если же критическая область является объединением этих полубесконечных промежутков: $V_k = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, то соответствующий критерий называется *двусторонним*.

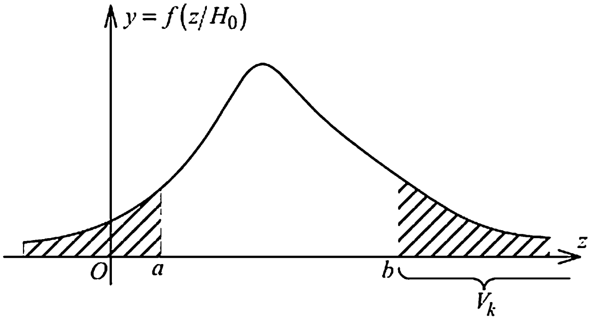


Рис. 3.1. *Правосторонняя критическая область*

Пример 3.1. Проверяется гипотеза H_0 о том, что вероятность события $P(A) = p$. Для статистики критерия (2.1): $Z = \mu/n - p$ целесообразен двусторонний критерий, так как большие по модулю отклонения относительной частоты μ/n от вероятности p заставляют отвергнуть гипотезу H_0.

§ 4. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей

Напомним, эта гипотеза возникает при сравнении точности двух одинаковых измерительных приборов, при сравнении разброса значений параметров продуктов массового производства двух станков, цехов, заводов.

Математическая постановка задачи. Изучаются две генеральные совокупности, распределенные нормально. Пусть $(x_1, \ldots, x_m)$ – выборка объёма m из первой, а $(y_1, \ldots, y_n)$ – выборка объёма n из второй генеральной совокупности, полученной независимо от первой. Генеральные математические ожидания неизвестны. Проверяется гипотеза H_0 о равенстве дисперсий: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ против гипотезы $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$. Критерий проверки следующий.

1. Вычисляются несмещенные оценки дисперсий

$$s_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2; s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2. \quad (4.1)$$

Здесь $\overline{x}$ и $\overline{y}$ – выборочные средние, найденные заранее.

2. Статистикой критерия является отношение

$$F = s_X^2 / s_Y^2. \quad (4.2)$$

В предположении справедливости гипотезы H_0 отношение (4.2) распределено по закону Фишера (F-распределение) с числами степеней свободы

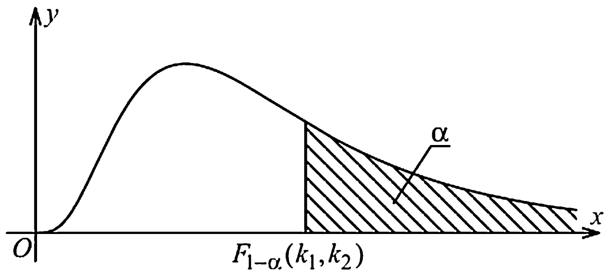


Рис. 4.1. *График плотности вероятности F - распределения. Критическая область $\left(F_{1-\alpha}(k_1,k_2),+\infty\right)$ критерия*

$k_1=m-1$ и $k_2=n-1$. Закон обозначается символом $F(k_1, k_2)$. Таблица квантилей F-распределения приведена в конце книги в приложении (табл. V). График плотности вероятности F-распределения показан на рис. 4.1.

При отношении дисперсий $\sigma_X^2/\sigma_Y^2=1$ отношение оценок (4.2) должно быть близким к 1, поэтому гипотеза H_0 должна отвергаться при слишком малых или слишком больших значениях F. Это означает, что в общем случае критерий проверки должен быть двусторонним.

Если проверяется гипотеза об уменьшении дисперсии (например, в результате нововведений), то неприемлемыми для справедливости гипотезы H_0 будут слишком большие значения F. Таким образом, применяемый критерий будет правосторонним. В этом случае надо помещать в числитель F-отношения большую дисперсию из двух s_X^2 и s_Y^2, вычисленных по формуле (4.1).

Далее будем рассматривать общий случай двустороннего критерия.

3. Выбираем уровень значимости α. Эту вероятность α разделяем на две равные половинки α/2, считая их вероятностями попадания статистики критерия в каждую из двух частей критической области.

4. По таблице находим квантиль $F_{1-\alpha/2}(k_1,k_2)$ распределения Фишера.

5. Вычисляем выборочное значение $F_в$ статистики критерия (4.2).

6. Сравниваем $F_в$ и $F_{1-\alpha/2}(k_1, k_2)$. Если $F_в<F_{1-\alpha/2}(k_1, k_2)$, то гипотеза H_0 на выбранном уровне значимости α принимается, в противном случае – отвергается. На рис. 4.1 показана критическая область $\left(F_{1-\alpha}(k_1,k_2),+\infty\right)$.

§ 5. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей

Эта гипотеза возникает на производстве при сравнении средних значений контролируемого параметра продукта, выпускаемого двумя станками, цехами, заводами. В экономике сравнивают средний уровень зарплаты, средний объём выпускаемой продукции в двух регионах, отраслях хозяйства. Эта задача может возникнуть в социальной сфере при сравнении социальных факторов, таких, как средний возраст, средний уровень обеспеченности жильём.

Имеются две независимые выборки ($x_1, \ldots, x_m$) и ($y_1, \ldots, y_n$) из двух генеральных совокупностей. По этим выборкам найдены выборочные средние

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i, \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{5.1}$$

и выборочные дисперсии

$$s_X^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2, s_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 . \tag{5.2}$$

1. Случай нормальных генеральных совокупностей.

Предположим, что предварительно была проверена гипотеза о равенстве дисперсий σ_X^2 и σ_Y^2 генеральных совокупностей, из которых были извлечены выборки, и можно утверждать, что

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2 . \tag{5.3}$$

Проверяется гипотеза H_0 о равенстве математических ожиданий $m_X = m_Y$ генеральных совокупностей, из которых извлечены выборки. Альтернативной гипотезой H_1 является гипотеза $m_X \neq m_Y$.

Критерий проверки

1. Применяем статистику критерия

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(m-1)s_X^2 + (n-1)s_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} . \tag{5.4}$$

Доказано [17], что статистика T распределена по закону Стьюдента с $k = m + n - 1$ степенями свободы. Таблица квантилей распределения Стьюдента приведена в конце книги в приложении (табл. III). Закон Стьюдента обозначается символом $T(k)$.

Аналитическое выражение плотности распределения Стьюдента с k степенями свободы даётся формулой (5.5):

$$f(x) = C\left(1 + x^2/k\right)^{-(k+1)/2} . \tag{5.5}$$

Константа C, исходя из условия нормировки плотности, задаётся формулой

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) . \tag{5.6}$$

(здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция). График плотности вероятности распределения Стьюдента показан на рис. 5.1.

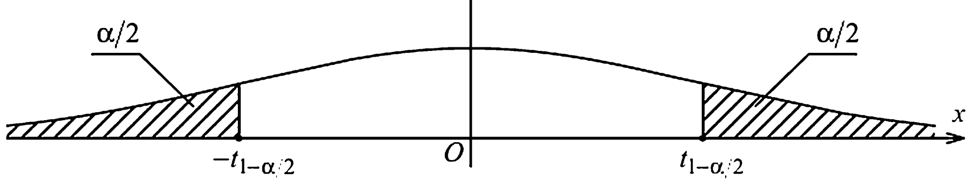


Рис. 5.1. *График плотности распределения Стьюдента. Площадь заштрихованных частей в сумме равна α*

Если $m_X = m_Y$, то $\bar{x}$ и $\bar{y}$ должны быть близкими, а следовательно, T – малым. Если же $|\bar{x}-\bar{y}|$ является большим числом, то это свидетельствует о неверности гипотезы H_0. Отсюда следует, что критерий значимости должен быть двусторонним. Критическая область выбирается так, чтобы вероятности попадания в её левую и правую части были равны $\alpha/2$, где α – уровень значимости.

2. Назначаем уровень значимости α.

3. По таблице находим квантиль $t_{1-\alpha/2}(m+n-2)=t_{1-\alpha/2}$ порядка $1-\alpha/2$ для распределения Стьюдента с $m+n-2$ степенями свободы. Она показана на рис. 5.1.

4. Вычисляем выборочное значение $T_в$ статистики T по формуле (5.4).

5. Сравниваем $|T_в|$ и $t_{1-\alpha/2}$. Если выполняется неравенство $|T_в|<t_{1-\alpha/2}$, то гипотеза H_0 принимается, так как $T_в$ попадает в область допустимых значений $(-t_{1-\alpha/2}, t_{1-\alpha/2})$. Если же $|T_в|\ge t_{1-\alpha/2}$, то гипотеза H_0 отвергается, так как $T_в$ попадает в критическую область $|x|>t_{1-\alpha/2}$.

Пример 5.1. Сравнить процентное содержание контролируемой примеси в выпускаемом продукте на основе выборок из двух партий (для удобства все числа умножены на 100):

x: (11, 14, 11, 11, 13, 16, 14, 19, 14, 18, 19, 19, 23, 22, 18);

y: (19, 17, 18, 19, 17, 25, 19, 22, 13, 18, 21, 30, 21, 13, 10).

Сравнение произвести по их выборочным средним $\bar{x}$, $\bar{y}$ и выборочным дисперсиям s_X^2, s_Y^2 на уровне значимости $\alpha = 0.05$.

►Здесь объём выборок одинаков $m=n=15$. Путем непосредственных вычислений по формулам (5.1), (5.2) получаем

$$\bar{x}=242/15=16.13;\bar{y}=282/15=18.80;s_X^2=14.4;s_Y^2=22.4.$$

Сравним сначала выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2 по критерию Фишера (§ 4). $F_в=s_Y^2/s_X^2=22.4/14.4=1.56$. По таблице V приложения находим квантиль распределения Фишера $F_{0.975}(14,14)=2,5$. Сравниваем $F_в$ и $F_{0.975}(14,14): F_в<2,5$.

Согласно критерию равенства генеральных дисперсий можно считать, что обе выборки принадлежат генеральным совокупностям с равными дисперсиями: $\sigma_X^2=\sigma_Y^2=\sigma^2$. Теперь можно приступить к сравнению выборочных средних $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Вычисляем $T_в$ по формуле (5.4):

$$|T_в|=\frac{18.80-16.13}{\sqrt{14(14.4+22.4)}}\sqrt{\frac{15^2\cdot 28}{2\cdot 15}}.$$

По таблице находим квантиль распределения Стьюдента $t_{1-\alpha/2}(m+n-2)=t_{0.975}(28)=2.048$. Сравниваем $|T_в|$ и $t_{0.975}(28)$: $|T_в|<2.048$.

Итак, расхождение между $\bar{x}$ и $\bar{y}$ незначимо. Гипотеза H_0 принимается.◄

Пример 5.2. Цех в среднем выпускает n=100 единиц продукции в месяц. Затраты металла на 1 *кг* изготовленной продукции равны $\bar{x} = 2.47$ *кг*. При этом s_X = 1,2 *кг*. После усовершенствований в технологическом процессе в следующем месяце оказалось $\bar{y} = 2.03$ *кг*; s_Y = 1.05 *кг* . Здесь X, Y – случайные величины, равные весу металла, затрачиваемого на изготовление одного килограмма единицы продукции в рассматриваемых месяцах.

Требуется установить, привели ли усовершенствования к уменьшению затрат металла или различия объясняются естественным разбросом показателей.

►Сначала проверяем гипотезу о равенстве дисперсий. Находим выборочное значение статистики Фишера $F_в = s_X^2 / s_Y^2 = 1{,}2^2/1{,}05^2 = 1{,}29$. Берем уровень значимости $\alpha = 0.05$ и по таблице V приложения находим квантиль $F_{1-\alpha/2}(k_1 – k_2) = F_{0.975}(99{,}99) = 1.4$ распределения Фишера (интерполируем соседние значения таблицы). Сравниваем $F_в$ и 1.4: $F_в < 1.4$. Гипотеза о равенстве дисперсий принимается. Теперь проверяем гипотезу о равенстве математических ожиданий m_X и m_Y. Вычисляем $T_в$ по формуле (5.4):

$$T_в = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(m-1)s_X^2 + (n-1)s_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} = \frac{2{,}47 - 2{,}03}{\sqrt{99(1{,}2^2 + 1{,}05^2)}} \cdot \sqrt{\frac{100 \cdot 100(100+100-2)}{100+100}} = 2{,}75.$$

По таблице III находим квантиль $t_{1-\alpha/2}(m+n-2) = t_{0.975}(198) = 1.96$ распределения Стьюдента. Так как $T_в > 1.96$, то гипотеза H_0 о равенстве математических ожиданий отвергается. Усовершенствования действительно привели к уменьшению затрат металла.◄

2. Случай больших выборок из любых генеральных совокупностей.

Центрированная и нормированная случайная величина

$$v = \left[(\bar{x} - \bar{y}) - (m_X - m_Y)\right] \Big/ \sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}$$

по центральной предельной теореме распределена приближённо нормально по закону N(0, 1) как сумма большого числа взаимно независимых одинаково распределённых случайных величин. Тогда имеем

$$\mathrm{P}(-x < v < x) \approx \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - \left[1 - \Phi(x)\right] = 2\Phi(x) - 1 = 1 - \alpha.$$

Здесь $\Phi(x)$ – функция Лапласа, α – уровень значимости, $1-\alpha$ – доверительная вероятность. Отсюда $\Phi(x) = 1-\alpha/2$. Решая это уравнение с помощью таблицы, найдём $x = u_{1-\alpha/2}$ – квантиль порядка $1-\alpha/2$ распределения N(0, 1). Далее

$$\mathrm{P}\left(-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n} < m_X - m_Y - (\bar{x} - \bar{y}) < u_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}\right) = 1 - \alpha/2.$$

Преобразуем выражение под знаком вероятности, заменив σ_X^2 на s_X^2 и σ_Y^2 на s_Y^2. Получим доверительный интервал для разности $m_X - m_Y$:

$$\Delta = \left(\bar{x} - \bar{y} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}; \bar{x} - \bar{y} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}\right)$$

с доверительной вероятностью $1-\alpha$.

Критерий проверки гипотезы H_0 ($m_X = m_Y$): *если Δ накрывает нуль, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае – отвергается.*

Пример 5.3. Требуется сравнить средние баллы $\bar{x} = 10.8$ и $\bar{y} = 11.7$ результатов входного тестирования по элементарной математике 168 только что зачисленных студентов 1-го курса одного из факультетов СПбГПУ в сентябре 2011 и 2012 года. Результаты оценивались по 20-балльной шкале. При этом были вычислены $s_X^2 = 2.75$ и $s_Y^2 = 1.57$.

►Выдвинута гипотеза H_0: $m_X = m_Y$. Выбираем уровень значимости α=0.05. По таблице находим $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$. Строим доверительный интервал Δ:

$$\Delta = \left(10.8 - 11.7 - 1.96\sqrt{(2.75 + 1.57)/168};\ 10.8 - 11.7 + 1.96\sqrt{(2.75 + 1.57)/168}\right) =$$
$$= (-1.21; -0.59).$$

Итак, интервал Δ не накрывает нуль. Гипотеза H_0 отвергается. Значит, разница между $\bar{x}$ и $\bar{y}$ значима, т. е. студенты 1-го курса в 2012/2013 учебном году по элементарной математике были подготовлены лучше, чем в предыдущем году.◄

§ 6. Проверка гипотезы о равенстве вероятностей двух событий с помощью доверительного интервала при больших объёмах выборок

Применим метод доверительных интервалов для проверки статистической гипотезы о равенстве вероятностей двух событий. По двум сериям независимых наблюдений с большими объёмами n_1 и n_2 найдены относительные частоты p_A^* и p_B^* двух событий A и B, вероятности которых обозначим $p_A = \mathrm{P}(A)$ и $p_B = \mathrm{P}(B)$. Построим доверительный интервал для вероятности p_A:

$$\mathrm{P}(\theta_1 < p_A < \theta_2) = \gamma \qquad (6.1)$$

с доверительной вероятностью γ, которую выбираем заранее. Упрощённый критерий проверки: если доверительный интервал для p_A (6.1) накрывает вероятность p_A, то гипотеза H_0 о равенстве вероятностей $p_A = p_B$ принимается с доверительной вероятностью γ (т. е. она правдоподобна). Если же p_B оказывается вне интервала, то выдвинутую гипотезу H_0 о равенстве вероятностей следует отвергнуть. За p_B принимается её оценка p_B^*.

Более обоснованным, но более громоздким является следующий критерий. Строим доверительный интервал для разности вероятностей $p_A - p_B$. Если этот интервал накрывает нуль, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае – отвергается. Таким интервалом будет интервал $(p_A^* - p_B^* - \varepsilon, p_A^* - p_B^* + \varepsilon)$, где $\varepsilon = u_{(1+\gamma/2)}\sqrt{p_A^*(1-p_A^*)/n_1 + p_B^*(1-p_B^*)/n_2}$; $u_{(1+\gamma)/2}$ – квантиль нормального распределения $N(0, 1)$ порядка $(1+\gamma)/2$.

Пример 6.1. В результате проведённого социологического опроса n= 1600 человек рейтинг кандидата N в президенты составил 20%. После проведенных мероприятий по увеличению рейтинга был проведен повторный опрос такого же количества людей. Новый рейтинг оказался равным 21%. Ставится вопрос:

увеличился рейтинг или он остался прежним, а разницу в числах можно объяснить естественным разбросом данных?

►Вводим два события: A – при первом опросе респондент поддерживает кандидата N, B – при втором опросе респондент поддерживает кандидата N: $p_A^* = 0.2$; $p_B^* = 0.21$. В примере 2.1 гл. 3 построен доверительный интервал для вероятности $p_A = \text{P}(A)$: $0.18 < p_A < 0.22$ с доверительной вероятностью $\gamma = 0.95$ (уровень значимости $\alpha = 1 - \gamma = 0.05$). Относительная частота $p_B^* = 0.21$, которую мы принимаем за вероятность p_B, попадает в этот интервал, поэтому можно утверждать, что рейтинг кандидата N не увеличился. Гипотеза H_0 о равенстве вероятностей $p_A = p_B$ принимается на уровне значимости α=0.05.

Проверим теперь гипотезу H_0 по более обоснованному критерию.

$$p_A^* - p_B^* = 0.2 - 0.21 = -0.01; u_{(1+\gamma)/2} = u_{0.975} = 1.96;;\ u_{(1+\gamma)/2} = u_{0.975} = 1.96;$$

$$\varepsilon = 1.96\sqrt{(0.2 \cdot 0.8 + 0.21 \cdot 0.79)/1600} = 0.028.$$

Интервал $(p_A^* - p_B^* - \varepsilon, p_A^* - p_B^* + \varepsilon) = (-0.038, 0.018)$ накрывает нуль, следовательно, гипотеза H_0 принимается.◄

§ 7. Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности

1. Общие вопросы. Закон распределения случайной величины является ее полной вероятностной характеристикой. Естественно стремление исследователей построить этот закон приближённо на основе статистических данных.

Сначала выдвигается гипотеза о виде закона распределения, который может быть в одномерном случае нормальным, показательным, Пуассона и т. д. Такая гипотеза может возникнуть из теоретических соображений (например, на основе центральной предельной теоремы), на основе анализа гистограммы, на основе статистической практики.

После того, как выбран вид закона распределения, возникает задача оценивания его параметров (она решалась ранее в гл. 2) и проверки закона в целом.

Критериев проверки существует много. Рассмотрим наиболее обоснованный и наиболее часто используемый в практике – критерий χ^2 (хи-квадрат), введённый английским статистиком К. Пирсоном (1900г.) для случая, когда параметры закона известны. Этот критерий был существенно уточнен английским математиком Р. Фишером (1924г.), когда параметры распределения оцениваются методом максимума правдоподобия по выборке, используемой для проверки.

Ограничимся случаем одномерного распределения.

Итак, выдвинута гипотеза H_0 о генеральном законе распределения с функцией распределения $F(x)$. Конкурирующей гипотезой является гипотеза о справедливости одного из конкурирующих распределений. Рассмотрим два различных случая.

2. Параметры проверяемого закона полностью известны. Эти параметры могут быть оценены по независимой выборке.

Разобьём генеральную совокупность, т. е. множество значений изучаемой случайной величины X, на k непересекающихся промежутков Δ_1, Δ_2, …, Δ_k. Пусть $p_i = \mathrm{P}(X \in \Delta_i)$, $i = 1, \dots, k$. Если генеральная совокупность – вся вещественная ось, то подмножества $\Delta_i = [a_{i-1}, a_i)$ – полуоткрытые промежутки, $i = 2, \dots, k-1$. Крайние промежутки будут полубесконечными: $\Delta_0 = (-\infty, a_1)$, $\Delta_k = [a_k, +\infty)$, рис. 7.1. Отметим, что $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Будем предполагать, что все $p_i > 0$ $(i = 1, \dots, k)$.

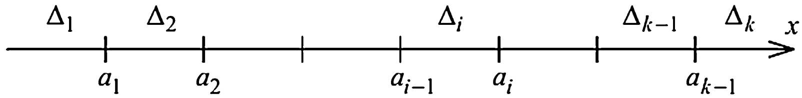


Рис. 7.1. *Разбиение вещественной оси на непересекающиеся промежутки при проверке гипотезы о законе распределения по методу хи-квадрат*

Пусть далее n_1, n_2, …, n_k – частоты попадания выборочных элементов в промежутки Δ_1, Δ_2, …, Δ_k соответственно. В случае справедливости гипотезы H_0 относительные частоты n_i/n при большом n должны быть близки к вероятностям p_i, $i = 1$, …, k, поэтому за меру отклонения выборочного распределения от гипотетического с функцией $F(x)$ естественно выбрать величину

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \left(n_i/n - p_i\right)^2, \tag{7.1}$$

где c_i – какие-нибудь положительные числа (веса). К. Пирсоном в качестве весов выбраны числа $c_i = n/p_i$, $i = 1$, …, k. Тогда получается статистика критерия хи-квадрат К. Пирсона

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i}\left(n_i/n - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{7.2}$$

которая обозначена тем же символом, что и закон распределения хи-квадрат.

Закон распределения хи-квадрат появляется в теории вероятностей при изучении суммы квадратов k взаимно независимых случайных величин X, …, X_k, с одними и теми же параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$:

$$Z = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_k^2. \tag{7.3}$$

Случайная величина Z распределена по закону хи-квадрат с k степенями свободы. Этот закон обозначается $\chi^2(k)$. Плотность вероятности этого закона определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 2^{-\frac{k}{2}} \Gamma^{-1}(k/2) x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{при } x \ge 0 \end{cases} (k \ge 2). \tag{7.4}$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция. График функции $f(x)$ для различных k изображен на рис. 7.2.

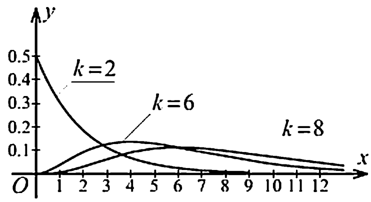


Рис. 7.2. *График плотности вероятности распределения хи-квадрат при числе степеней свободы* $k = 2, 6, 8$

К. Пирсоном доказана теорема об асимптотическом поведении статистики χ^2 (7.2) при объёме выборки n стремящемся к бесконечности, которая указывает путь её применения.

Теорема К. Пирсона. Статистика (7.2) критерия χ^2 асимптотически при $n \to \infty$ распределена по закону χ^2 с $k-1$ степенями свободы.

Доказательство теоремы Пирсона приведено в [17].

Для прояснения сущности метода хи-квадрат сделаем ряд замечаний.

Замечание 7.1 (*о выборе числа k*). Выбор подмножеств Δ_1, Δ_2, …, Δ_k и их числа k в принципе ничем не регламентируется, так как $n \to \infty$. Но так как число n хотя и очень большое, но конечное, то k и n должны быть согласованы. Обычно его берут таким же, как и для построения гистограммы, т. е. можно руководствоваться формулой $k \approx 1.72\sqrt[3]{n}$ или формулой Старджесса $k \approx 1 + 3.3\lg n$. При этом, если Δ_1, Δ_2, …, Δ_k – промежутки, то их длины удобно сделать равными, за исключением крайних – полубесконечных при числе степеней свободы $k = 2,\ 4,\ 6$.

Замечание 7.2 (*о числе степеней свободы*). *Числом степеней свободы* функции (по старой терминологии) называется число её независимых аргументов. Аргументами статистики χ^2 являются частоты n_1, …, n_k. Эти частоты связаны одним равенством $n_1 + \ldots + n_k = n$, а в остальном независимы в силу независимости элементов выборки. Таким образом, функция χ^2 имеет $k-1$ независимых аргументов: число частот минус одна связь. В силу теоремы Пирсона число степеней свободы статистики χ^2 отражается на виде асимптотической плотности $f(x)$.

Рассмотрим теперь второй и наиболее важный в практическом отношении случай.

3. Параметры проверяемого закона неизвестны. Неизвестные параметры оцениваются по той же выборке, которая используется для проверки гипотезы о законе распределения. Если оценка произведена по методу максимума правдоподобия, то справедлива теорема Р. Фишера, уточняющая теорему К. Пирсона.

Теорема Р. Фишера. Статистика (7.2) критерия χ^2 асимптотически при $n \to \infty$ распределена по закону хи-квадрат с числом степеней свободы, равным $r=k-l-1$, где l – число параметров, оценённых по выборке.

Доказательство теоремы приведено в [17].

Заключение теоремы Фишера объясняется тем, что оценивание параметров накладывает дополнительные связи на частоты $n_1, \ldots, n_k$, и поэтому уменьшает число степеней свободы статистики χ^2.

Критерий проверки гипотезы сформулируем на основе теоремы Фишера, но предварительно сделаем некоторые комментарии.

Замечание 7.3. Из вида (7.2) статистики критерия χ^2 видим, что большие значения χ^2 неприемлемы для справедливости гипотезы H_0. Отсюда следует, что применяемый критерий является правосторонним, а критической областью будет промежуток вида $\left(\chi^2_{1-\alpha}(r), +\infty\right)$, где $\chi^2_{1-\alpha}(r)$ – квантиль распределения порядка $1-\alpha$ распределения хи-квадрат с r степенями свободы.

Из формулы (7.2) также видно, что веса $c_i = n/p_i$ пропорциональны n, т. е. с ростом n увеличиваются. Итак, если выдвинутая гипотеза H_0 неверна, то относительные частоты n_i/n не будут близки к вероятностям p_i, и с ростом n величина χ^2 будет увеличиваться. При фиксированном уровне значимости α будет фиксировано пороговое число $\chi^2_{1-\alpha}(r)$. Поэтому, увеличивая n, приходим к неравенству $\chi^2_{\text{в}} > \chi^2_{1-\alpha}(r)$, где $\chi^2_{\text{в}}$ – выборочное значение статистики χ^2 (7.2), $\chi^2_{\text{в}}$ попадёт в критическую область (рис. 7.3), и неверная гипотеза отвергается.

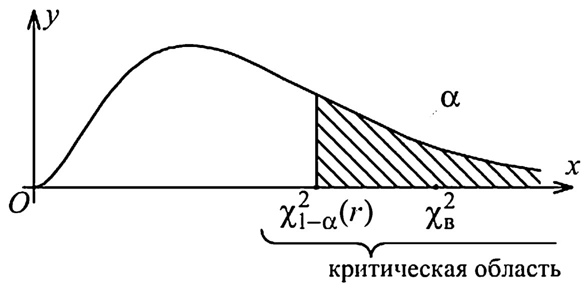


Рис. 7.3. *Критическая область критерия хи-квадрат*

Из этих рассуждений следует, что при сомнительной ситуации, когда $\chi^2_{\text{в}} \approx \chi^2_{1-\alpha}(r)$, следует увеличить объём выборки (например, в 2 раза), чтобы проверяемое неравенство было более четким.

Замечание 7.4. Теория и практика применения критерия χ^2 указывают, что если для каких-либо подмножеств Δ_i, $i=1, 2, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, k$, условие $n\hat{p}_i \geq 5$ не выполняется, то надо объединить соседние подмножества (промежутки). Это условие выдвигается требованием близости величин $\dfrac{n_i - n\hat{p}_i}{\sqrt{n\hat{p}_i}}$, квадраты которых есть слагаемые χ^2, к нормальным $N(0, 1)$. Тогда случайная величина в формуле (7.2) будет распределена по закону, близкому к хи-квадрат. Такая близость обеспечивается достаточной численностью элементов в подмножествах Δ_i.

Критерий проверки

1. Выбираем уровень значимости α.

2. С помощью гипотетической функции распределения $F(x)$ с l оцененными параметрами вычисляем оценки вероятностей $\hat{p}_i = \mathrm{P}(X \in \Delta_i)$, $i=1, 2, \ldots, k$.

3. По таблице находим квантиль $\chi^2_{1-\alpha}(r)$ распределения хи-квадрат с $r=k-l-1$ степенями свободы порядка $1-\alpha$.

4. Находим частоты n_i попадания элементов выборки в подмножества Δ_i, $i=1, 2, \ldots, k$, и вычисляем выборочное значение статистики критерия хи-квадрат $\chi^2_{\text{в}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$.

5. Сравниваем $\chi^2_{\text{в}}$ и квантиль $\chi^2_{1-\alpha}(r)$.

5.1.Если $\chi^2_{\text{в}} < \chi^2_{1-\alpha}(r)$, то гипотеза H_0 принимается.

5.2.Если $\chi^2_{\text{в}} \geq \chi^2_{1-\alpha}(r)$, то гипотеза H_0 отвергается. Выбирается одно из альтернативных распределений, и процедура проверки повторяется.

В заключение отметим, что, кроме критерия хи-квадрат, применяются критерии А. Н. Колмогорова, Н. В. Смирнова, Р. Мизеса и др. [17].

Пример 7.1. Проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по выборке, содержащей 100 измерений веса единицы продукции (пример 5.1, гл. 1).

►По этой выборке был построен группированный статистический ряд (табл. 5.2, гл. 1) из 8 промежутков. На основе этого ряда были вычислены выборочные характеристики $\bar{x} = 31.3$ и $s = 3.19$ (табл. 5.3, гл. 1).

Таблица 7.1

Вычисление $\chi^2_{\text{в}}$ при проверке гипотезы о нормальности генерального распределения в примере 7.1

i	Границы Δ_i a_{i-1} a_i	n_i	$b_i = \frac{a_i - \bar{x}}{s}$	$\Phi_0(b_i)$	$\hat{p}_i = \Phi_0(b_i) - \Phi_0(b_{i-1})$	$n\hat{p}_i$	$n_i - n\hat{p}_i$	$\frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
1	$-\infty$ 26.6	9	$-\infty$ –1.48	–0.5 –0.4306	0.0694	6.94	2.06	0.61
2	26.6 28.5	11	–1.48 –0.88	–0.4306 –0.3106	0.1200	12.00	–1.00	0.08
3	28.5 30.4	16	–0.88 –0.28	–0.3106 –0.1103	0.2003	20.03	–4.03	0.81
4	30.4 32.3	27	–0.28 0.31	–0.1103 0.1217	0.2320	23.20	3.80	0.62
5	32.3 34.2	19	0.31 0.91	0.1217 0.3186	0.1969	19.69	–0.69	0.02
6	34.2 36.1	11	0.91 1.51	0.3186 0.4345	0.1159	11.59	–0.59	0.03
7	36.1 $+\infty$	7	1.51 $+\infty$	0.4345 0.5	0.0655	6.55	0.45	0.03
Σ	—	100	—	—	1.0000	100.00	0.000	$2.20 = \chi^2_{\text{в}}$

Так как в последнем промежутке таблицы. 5.2 гл. 1 число элементов $n_8 = 2$, то и соответствующее математическое ожидание должно быть близким.

Просчитывая, находим $n\hat{p}_8 = 1.39 < 5$. В соответствии с рекомендацией, сделанной в замечании 7.4, объединяем 8-й промежуток с 7-м. Число оцениваемых параметров в нормальном распределении равно 2, поэтому число степеней свободы асимптотического закона хи-квадрат равно $r = k - l - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$. Выбираем уровень значимости $\alpha = 0.05$ и по таблице находим квантиль распределения хи-квадрат $\chi^2_{1-\alpha}(r) = \chi^2_{0.95}(4) = 9.49$.

Далее на основе группированного статистического ряда вычисляем $\chi^2_{\text{в}}$ по формуле (7.6). Вычисления сведены в табл. 7.1.

Сравнивая $\chi^2_{\text{в}} = 2.20$ и $\chi^2_{0.95} = 9.49$, видим, что $\chi^2_{\text{в}} < \chi^2_{0.95}$. Заключаем, что гипотеза H_0 о нормальном распределении случайной величины, равной весу единицы продукции, на уровне значимости $\alpha = 0.05$ согласуется с данными измерений.◄

Глава 5. **Корреляционный и регрессионный анализ**

В главе 5 исследуются вопросы зависимости между двумя случайными величинами X и Y на основе двумерной выборки (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n). В корреляционном анализе зависимость оценивается с помощью выборочного коэффициента корреляции r_{XY}, а в регрессионном анализе зависимость между X и Y описывается функционально в среднем. Если зависимость обнаруживается, то её можно использовать в целях диагностики, прогнозирования и управления значениями одной величины по значениям другой в среднем.

§ 1. Корреляционный анализ

1. Выборочный коэффициент корреляции.

Определение 1.1. *Корреляционным анализом* называется раздел математической статистики, исследующий зависимость между случайными величинами с помощью выборочных оценок генеральных коэффициентов корреляции.

Ограничимся рассмотрением лишь парного коэффициента корреляции, характеризующего зависимость между двумя случайными величинами. Существуют и множественные коэффициенты корреляции, учитывающие связь трёх и более случайных величин.

Пусть по выборке значений $\{(x_i, y_i)\}$, $i=1,2,\ldots n$, двумерной случайной величины (X, Y) требуется оценить генеральный коэффициент корреляции

$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{M}\left[(X - m_X)(Y - m_Y)\right]}{\sqrt{\mathrm{M}\left[(X - m_X)^2\right]\mathrm{M}\left[(Y - m_Y)^2\right]}}. \tag{1.1}$$

Естественной оценкой ρ_{XY} служит выборочный коэффициент корреляции

$$r = r_{XY} = \frac{\hat{K}_{XY}}{s_X s_Y}, \tag{1.2}$$

который конструируется по методу аналогии (подстановки). Здесь

$$\hat{K}_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\overline{y} \tag{1.3}$$

– выборочная ковариация (корреляционный момент),

$$s_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2;\ s_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 \tag{1.4}$$

– выборочные дисперсии компонент.

r_{XY} – состоятельная оценка ρ_{XY}. Легко доказываются (см. далее § 4) следующие свойства r_{XY}, аналогичные свойствам для ρ_{XY}:

1. $-1 \le r_{XY} \le 1$;
2. если $y_i=ax_i+b$, $i=1, \ldots, n$, то $r_{XY}=+1$ при $a>0$ и $r_{XY}=-1$ при $a<0$.

2. Гипотеза о независимости случайных величин.

Рассмотрим случай, когда генеральное распределение двумерной случайной величины – нормальное. Тогда, как известно из теории вероятностей, генеральный коэффициент корреляции ρ_{XY} равен нулю тогда и только тогда, когда компоненты X и Y независимы.

Важнейшей задачей корреляционного анализа является задача определения наличия или отсутствия зависимости между компонентами двумерной нормальной случайной величины. Для этой цели проверяется статистическая гипотеза H_0: $\rho_{XY} = 0$ против альтернативы $\rho_{XY} \neq 0$.

Доказано [17], что при условии $\rho_{XY} = 0$ случайная величина

$$t = \sqrt{n-2} \cdot r_{XY} \Big/ \sqrt{1 - r_{XY}^2} \qquad (1.5)$$

распределена по закону Стьюдента с $n-2$ степенями свободы, где n – объём двумерной выборки (о законе Стьюдента см. гл. 4, § 5).

1. Взяв уровень значимости α, находим квантиль $t_{1-\alpha/2}(n-2)$ распределения Стьюдента.

2. По выборке вычисляем коэффициент корреляции r, пользуясь формулами (1.2) – (1.4).

3. Критическую область задаем неравенством

$$|t| > t_{1-\alpha/2}(n-2). \qquad (1.6)$$

Гипотеза H_0 отвергается, если выполнено это неравенство, и на уровне значимости α принимается альтернативная гипотеза о наличии связи между X и Y.

Пример 1.1. На сталеплавильном заводе произведены измерения угара кремния в процентах (признак X) и выхода стали в процентах (признак $У$) по результатам n=15 плавок определённого сорта стали. Получена следующая двумерная выборка:

1) (7.9; 70.3), 2) (0.9; 85.0), 3) (3.7; 100.0), 4) (8.1; 78.1), 5) (6.9; 77.9),
6) (0.8; 98.4), 7) (6.0; 59.2), 8) (7.2; 86.8), 9) (8.8; 70.1), 10) (10.2; 42.2),
11) (11.2; 81.9), 12) (0.5; 97.1), 13) (4.6; 68.2), 14) (9.7; 92.1), 15) (1.0; 91.2).

Требуется решить вопрос о наличии или отсутствии связи между X и Y.

►Сначала нанесём на чертёж полученные экспериментальные точки (x_i, y_i) и визуально решим поставленный вопрос (рис. 1.1).

1) Вычислим выборочный коэффициент корреляции по формулам (1.2) – (1.4). Получаем:

$$\bar{x} = 5.83; \quad \bar{y} = 79.9; \quad s_X = 3.56; \quad s_Y = 15.45;$$

$$\hat{K}_{XY} = -29.79; \quad r = r_{XY} = -0.542\,.$$

2) Вычислим выборочное значение статистики t по формуле (1.5):

$$t_в = \sqrt{13}(-0.542) / \sqrt{1 - 0.542^2} = -2.33.$$

3) Выбираем уровень значимости $\alpha = 0.05$ и находим по таблице квантиль распределения Стьюдента $t_{1-\alpha/2}(n-2) = t_{0.975}(13) = 2.16$.

4) Сравниваем $|t_в|$ и $t_{0.975}(13)$: $|t_в| > t_{0.975}(13)$, т. е. значение $t_в$ попадает в критическую область, что на уровне значимости $\alpha = 0.05$ означает отвержение гипотезы H_0 об отсутствии связи и принятие альтернативной гипотезы о наличии связи между X и Y.◄

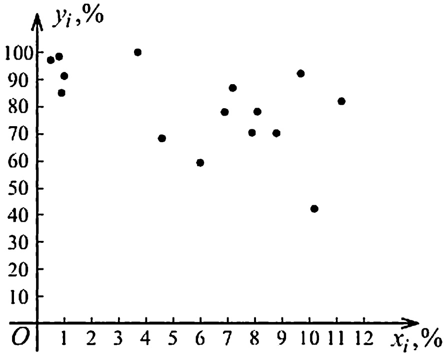


Рис. 1.1. *Экспериментальные точки* (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 15$, *из примера 1.1*

Хотя формально гипотеза о наличии связи между X и Y в примере 1.1 подтверждена, однако малый объём выборки ($n = 15$) и близкие значения $|t_{\text{в}}|$ и $t_{0.975}(13)$ не позволяют достаточно уверенно утверждать о наличии этой связи. Следует увеличить объём выборки, взять меньший уровень значимости (например, $\alpha = 0.01$) и вновь провести проверку.

3. Грубая проверка зависимости компонент двумерной нормальной случайной величины.

Существуют простые формулы для грубой проверки наличия зависимости между случайными величинами X и Y.

Если выполняется неравенство

$$|r_{XY}|\sqrt{n-1} > 2.5, \tag{1.7}$$

то зависимость фиксируется с уровнем значимости $\alpha = 0.05$.

Если же

$$|r_{XY}|\sqrt{n-1} > 3, \tag{1.8}$$

то зависимость фиксируется с уровнем значимости $\alpha = 0.01$ [4].

§ 2. Общие сведения о регрессионном анализе

При решении многих задач физики, экономики, медицины, инженерии приходится экспериментально изучать зависимость наблюдаемой случайной величины Y от одной или нескольких других случайных или неслучайных величин $X_1, \ldots, X_k$. Случайная величина Y называется *откликом*, а величины $X_1, \ldots, X_k$ – *факторами* (иначе – *предикторами*).

Например, изучается зависимость какого-либо свойства стали (прочность, хрупкость, вязкость) от процентного содержания компонент, от параметров технологического процесса; в экономике изучается величина валового продукта, дохода, инфляции в зависимости от времени.

Изучаемую зависимость выражают функционально уравнением $y = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$, естественно, лишь в среднем. Такое уравнение называется *регрессионным*, иначе – *уравнением регрессии*.

Детерминированной зависимости между откликом и факторами быть не может в силу их случайности. Кроме того, всегда существуют неконтролируемые случайные факторы, влияющие на отклик. Это в первую очередь изменчивые параметры среды – температура, влажность, давление, а также ошибки измерения.

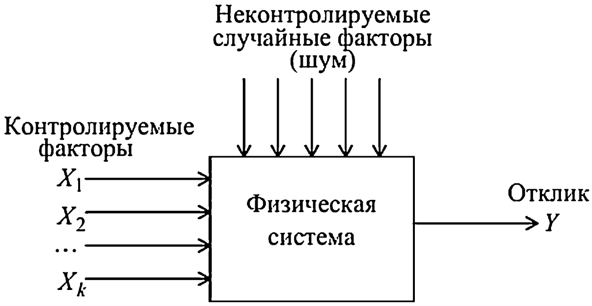


Рис. 2.1. *Схема функционирования абстрактной физической системы*

Отклик и факторы характеризуют состояние некоторой физической системы, изучение которой можно представить схемой (рис. 2.1).

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь одного фактора X. Отметим, что между случайными величинами X, Y причинно-следственной связи может не быть, хотя вероятностная связь наблюдается, ибо на них влияют общие случайные факторы. Например, показатели урожая на разных полях причинно следственно не связаны, но вероятностная связь наблюдается, так как имеет место общий влияющий фактор – погода.

Определение 2.1. *Регрессионный анализ* – это раздел математической статистики, изучающий зависимость между случайными величинами с помощью уравнений регрессии.

Регрессионная зависимость, выраженная уравнением регрессии, называется просто *регрессией*. Термин «регрессия» введён в науку английским антропологом Гальтоном (1822–1911), открывшим регресс к середине размеров потомков по сравнению с отклонениями от средних размеров родителей. Эту зависимость можно выразить линейной функцией. Термин «регрессия» прижился и стал употребляться более широко

Определение 2.2. *Регрессией* называется функциональная связь в среднем любых случайных величин.

Теоретически уравнение регрессии, выражающее зависимость Y от X в среднем, записывается уравнением

$$y=M_xY, \tag{2.1}$$

где M_xY – условное математическое ожидание случайной величины Y при заданном значении x случайной величины X. Это некоторая функция $y=y(x)$, выражающая зависимость y от x. В частности, она может быть многочленом и даже линейной функцией: $y=\beta_0+\beta_1 x$.

По экспериментальным точкам $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ *теоретическое уравнение регрессии* (2.1) можно построить лишь приближённо. Такое уравнение будем называть *эмпирическим уравнением регрессии*. Например, его можно построить в виде многочлена

$$y=B_0+B_1x+\ldots+B_kx^k, \tag{2.2}$$

в частности, в виде линейной функции

$$y=B_0+B_1x. \tag{2.3}$$

Определение 2.3. Регрессия, выраженная линейной функцией (2.3), называется *эмпирической простой линейной регрессией*.

Слово «простая» употребляется потому, что рассматривается лишь один фактор. Соответствующая *теоретическая простая линейная регрессия* описывается уравнением

$$y=\beta_0+\beta_1x. \tag{2.4}$$

Коэффициенты B_0, B_1 являются оценками соответствующих коэффициентов β_0, β_1 теоретической регрессии.

Наиболее распространенным методом для построения эмпирического уравнения регрессии является *метод наименьших квадратов*.

§ 3. Метод наименьших квадратов

Постановка задачи. Имеется n экспериментальных точек $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Надо найти многочлен $y(x)$ вида (2.2) так, чтобы сумма квадратов отклонений многочлена в точках x_i от наблюденных значений y_i, $i=1, \dots, n$ имела наименьшее значение:

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-y(x_i)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 \to \min. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Метод нахождения коэффициентов многочлена (2.2) по экспериментальным данным на основе минимизации суммы квадратов отклонений (3.1) называется *методом наименьших квадратов*.

Мы рассмотрим этот метод для построения простой линейной регрессии.

Графически выполнить условие (3.1) для линейной функции $y=B_0+B_1x$ означает провести прямую между экспериментальными точками так, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной (рис. 3.1). Пусть

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-B_0-B_1x_i)^2. \tag{3.2}$$

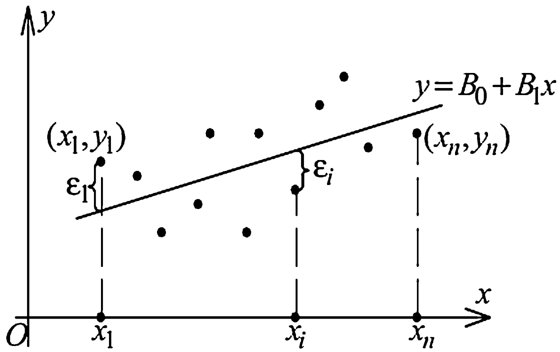


Рис. 3.1. *Экспериментальные точки и прямая регрессии*

Коэффициенты B_0, B_1 рассматриваются как переменные, обращающие функцию в минимум. Используем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial B_0} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - B_0 - B_1x_i) = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial B_1} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - B_0 - B_1x_i)x_i = 0. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{cases} nB_0 + B_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i = \sum\limits_{i=1}^{n}y_i, \\ B_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i + B_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i. \end{cases}$$

Разделим оба уравнения на n:

$$\begin{cases} B_0 + \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)B_1 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i, \\ \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)B_0 + \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)B_1 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i. \end{cases} \tag{3.3}$$

Используем известные статистические обозначения и формулы:

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ – выборочное среднее X,

$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$ – выборочное среднее Y,

$a_{2X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ – второй выборочный начальный момент X,

$a_{2Y} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2$ – второй выборочный начальный момент Y,

$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$ – второй выборочный смешанный начальный момент X и Y,

$s_X^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = a_{2X} - \overline{x}^2$ – выборочная дисперсия X,

$s_Y^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = a_{2Y} - \overline{y}^2$ – выборочная дисперсия Y,

$\hat{K}_{XY} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}$ – выборочная ковариация X и Y,

$r_{XY} = \hat{K}_{XY}/(s_Xs_Y)$ – выборочный коэффициент корреляции X и Y.

С помощью этих обозначений система (3.3) записывается в виде

$$\begin{cases} B_0 + \overline{x}B_1 = \overline{y}, \\ \overline{x}B_0 + a_{2X}B_1 = \overline{xy}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Неизвестный коэффициент B_1 находим по формулам Крамера

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & \overline{y} \\ \overline{x} & \overline{xy} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \overline{x} \\ \overline{x} & a_{2X} \end{vmatrix} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{a_{2X} - \overline{x}^2} = \frac{\hat{K}_{XY}}{s_X^2} = \frac{\hat{K}_{XY}}{s_X s_Y} \cdot \frac{s_Y}{s_X} = r_{XY}\frac{s_Y}{s_X}.$$

Коэффициент B_0 находим непосредственно из первого уравнения (3.4):

$$B_0 = \overline{y} - \overline{x}B_1.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} B_1 = r_{XY} \cdot \dfrac{s_Y}{s_X} \\ B_0 = \overline{y} - \overline{x}B_1 \end{cases} \tag{3.5}$$

Заметим, что определитель системы (3.4) равен

$$a_{2X} - \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 > 0,$$

и если среди значений $x_1, \dots, x_n$ есть различные, что и будем предполагать, определитель систем отличен от нуля. В этом случае система (3.4) имеет единственное решение. Можно доказать, что стационарная точка (3.5) даёт глобальный минимум функции Q (т. е. наименьшее значение) [4].

§ 4. Статистический анализ эмпирической простой линейной регрессии

1. Остаточная дисперсия. Степень приближения прямой $y=B_0 + B_1 x$ экспериментальным данным будем характеризовать средним квадратичным отклонением, рассчитанным на одну степень свободы (n точек минус две связи, которые накладываются на экспериментальные данные двумя зависимостями для B_0 и B_1 (3.5)):

$$s = \sqrt{\frac{Q}{n-2}} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - B_0 - B_1 x_i)^2}. \tag{4.1}$$

Величина s^2 называется *остаточной дисперсией*. Для s имеется более простая формула

$$s = s_Y\sqrt{\frac{n}{n-2}(1 - r_{XY}^2)}. \tag{4.2}$$

$$\blacktriangleright\ Q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - B_0 - B_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y} + B_1\overline{x} - B_1 x_i)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[(y_i - \overline{y}) - B_1(x_i - \overline{x})\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 + B_1^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 -$$
$$-2B_1\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = ns_Y^2 + B_1^2 ns_X^2 - 2nB_1 r_{XY}s_X s_Y =$$
$$= ns_Y^2 + nr_{XY}^2 s_Y^2 - 2nr_{XY}^2 s_Y^2 = ns_Y^2 - nr_{XY}^2 s_Y^2 = ns_Y^2(1 - r_{XY}^2).$$

Подставляя этот результат в (4.1), получим (4.2).◀

2. Прямые регрессии « y на x » и « x на y ». Докажем сначала, что выборочный коэффициент корреляции $r_{XY} = \hat{K}_{XY}/(s_X s_Y)$ удовлетворяет условию

$$|r_{XY}| \le 1. \tag{4.3}$$

►В силу неравенства Коши – Буняковского

$$|\hat{K}_{XY}| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right| \le \sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i - \bar{x}|}{\sqrt{n}}\cdot\frac{|y_i - \bar{y}|}{\sqrt{n}} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - \bar{y})^2}{n}} = s_X s_Y.$$

Отсюда $|r_{XY}| = |\hat{K}_{XY}|/(s_X s_Y) \le 1$.◄

Запишем теперь полученное ранее уравнение регрессии $y = B_0 + B_1 x$ в симметричной форме. Используем формулы (3.6):

$$y = \bar{y} - \bar{x}B_1 + B_1 x = \bar{y} + B_1(x - \bar{x}) = \bar{y} + r_{XY}\frac{s_Y}{s_X}(x - \bar{x}).$$

Отсюда
$$\frac{y - \bar{y}}{s_Y} = r_{XY}\frac{x - \bar{x}}{s_X}. \tag{4.4}$$

Говорят, что это уравнение прямой регрессии y на x. Её угловой коэффициент:

$$k_{y/x} = r_{XY}(s_Y/s_X). \tag{4.5}$$

Аналогично рассуждая, исходя из требования обращения в минимум функции $Q_1 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - A_0 - A_1 y_i)^2$ (отклонения по абсциссам), можно построить уравнение прямой регрессии x относительно y (говорят: « x на y »):

$$\frac{x - \bar{x}}{s_X} = r_{XY}\frac{y - \bar{y}}{s_Y}. \tag{4.6}$$

Её угловой коэффициент:

$$k_{x/y} = \frac{1}{r_{XY}}\cdot\frac{s_Y}{s_X}. \tag{4.7}$$

Заметим, что $|k_{x/y}| \ge |k_{y/x}|$, так как $|r_{XY}| \le 1$. Обе прямые регрессии (4.4) и (4.6) проходят через точку $(\bar{x}, \bar{y})$ – центр регрессии (рис. 4.1).

Рис. 4.1. Прямые регрессии

3. ***Роль выборочного коэффициента корреляции.*** Если $|r_{XY}|=1$, то из формул (4.4), (4.6) заключаем, что обе прямые регрессии сливаются в одну прямую $y = B_0 + B_1x$. Кроме того, из (4.1), (4.2) следует, что $s=0$, отсюда $Q=0$, и поэтому $y_i=B_0 + B_1x_i$, $i=1, \ldots, n$, т. е. все экспериментальные точки лежат на прямой регрессии. Это случай жесткой линейной зависимости $Y = B_0 + B_1X$ между случайными величинами в пределах проведённых опытов (рис. 4.2). Если $r_{XY} = 0$, то одна прямая регрессии горизонтальна, а другая – вертикальна (рис. 4.3). Такой случай означает, что в среднем на изменение X случайная величина Y не реагирует и на изменение Y случайная величина X в среднем не реагирует. К этому случаю мы приходим, когда случайные величины независимы – экспериментальные точки расположены хаотично, но в среднем симметрично около прямых регрессии, либо когда в распределении экспериментальных точек имеется строгая симметрия около какой-либо прямой регрессии.

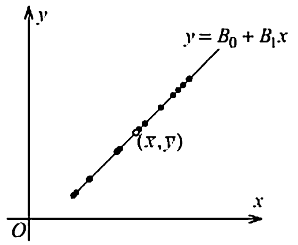


Рис. 4.2. *Случай* $|r_{XY}| = 1$

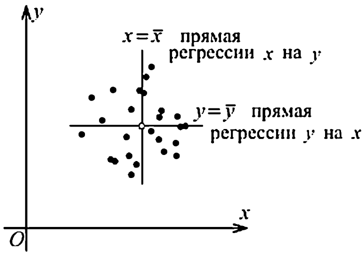


Рис. 4.3. *Случай* $r_{XY} = 0$

4*. Условия Гаусса – Маркова для экспериментальных данных. Для того чтобы сделать статистические выводы из полученных результатов по регрессии в части их точности и надёжности, необходимо сделать предположения о распределении экспериментальных данных. Такими предположениями являются условия Гаусса – Маркова. (К. Ф. Гаусс – немецкий математик, 1777–1855; А.А. Марков – российский математик, 1856–1922):

Отклонения $\varepsilon_i = y_i - y(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, наблюдаемых значений y_i случайной величины Y от значений функции регрессии $y(x_i) = B_0 + B_1x_i$ нормально распределены, независимы, имеют нулевые математические ожидания и равные дисперсии. Ошибки измерения x_i, $i = 1, \ldots, n$ пренебрежимо малы по сравнению с ошибками измерения величин y_i, $i = 1, \ldots, n$.

Во многих случаях на практике эти предположения можно считать выполненными. Мы будем предполагать, что величины x_i, $i = 1, \ldots, n$, измерены точно. Тогда

$$D\varepsilon_i = Dy_i = DY = \sigma^2. \qquad (4.8)$$

Основанием для такого допущения является сама математическая модель $y = B_0 + B_1x$, которая призвана описывать зависимость y только от одной переменной (фактора) x без учёта многих факторов, влияющих на y. Это влияние мы относим только к y, а не к x, и весь разброс экспериментальных точек объясняем только погрешностью нахождения y.

5*. Свойства оценок и доверительные интервалы регрессии. Приведем основные результаты для эмпирической простой линейной регрессии (доказательство в [17].

Теорема 4.1.

$$Ms^2 = \sigma^2, \tag{4.9}$$

т. е. остаточная дисперсия, вычисляемая по формулам (4.1) или (4.2), является несмещенной оценкой дисперсии отклика $\sigma^2 = DY$.

Теорема 4.2.

$$M[B_0 + B_1 x] = \beta_0 + \beta_1 x, \tag{4.10}$$

т. е. эмпирическая линейная регрессия, найденная по методу наименьших квадратов, является несмещённой оценкой соответствующей теоретической регрессии.

Теорема 4.3. Границы доверительных интервалов для параметров β_0, β_1 теоретической линейной регрессии с доверительной вероятностью $1-\alpha$ имеют вид

$$B_0 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2)s\sqrt{a_{2X}}\Big/(s_X\sqrt{n}), \tag{4.11}$$

$$B_1 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2)s\Big/(s_X\sqrt{n}) \tag{4.12}$$

Здесь α – уровень значимости, $t_{1-\alpha/2}(n-2)$ – квантиль распределения Стьюдента порядка $1-\alpha/2$ с $n-2$ степенями свободы, величины s_X, a_{2X} определяются формулами (3.4), s – остаточная дисперсия (4.1) или (4.2).

Теорема 4.4. Границы доверительного интервала для теоретической линейной регрессии $y = B_0 + B_1 x$ с доверительной вероятностью $1-\alpha$ имеют вид

$$\hat{y} \pm t_{1-\alpha/2}(n-2)\cdot s\sqrt{1+(x-\bar{x})^2/s_X^2}\Big/\sqrt{n}. \tag{4.13}$$

Здесь $\hat{y} = B_0 + B_1 x$ – оценка теоретической регрессии $y = \beta_0 + \beta_1 x$. Остальные величины имеют тот же смысл, что и в теореме 4.3.

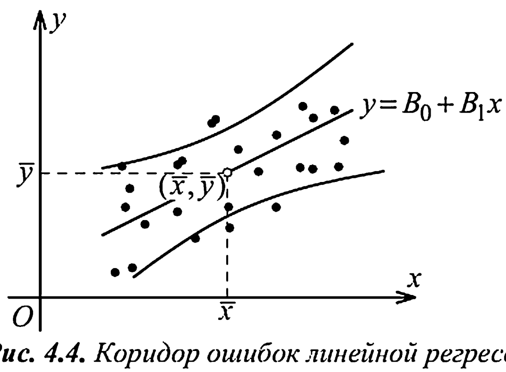


Рис. 4.4. *Коридор ошибок линейной регрессии*

Замечание 4.1. Формула (4.13), определяющая доверительный интервал для $M\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x$, определяет и коридор ошибок прогноза значений $y = \beta_0 + \beta_1 x$

с доверительной вероятностью $1-\alpha$. Этот коридор ограничен двумя гиперболами с уравнениями

$$y = \hat{y} \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \cdot s\sqrt{1+(x-\bar{x})^2/s_X^2}\,/\sqrt{n}\,. \qquad (4.14)$$

Осью этого коридора является прямая эмпирической регрессии $y = B_0 + B_1x$ (рис. 4.4).

Ошибка прогноза значений $y = \beta_0 + \beta_1 x$ является наименьшей при $x = \bar{x}$ и возрастает по мере удаления от центра.

6*. Адекватность линейной модели регрессии данным эксперимента.

Важным является вопрос, адекватна ли принятая линейная модель регрессии данным эксперимента, т. е. достаточно ли хорошо линейная функция $y=B_0+$ $+ B_1x$ аппроксимирует экспериментальные точки. Об этом можно судить по многим признакам.

1. Достаточно хорошее представление о качестве аппроксимации дает чертеж, на который нанесены экспериментальные точки и прямые регрессии.

2. Величины выборочного коэффициента корреляции r_{XY} и остаточного среднего квадратичного отклонения s также дают представление о качестве аппроксимации. Если $|r_{XY}|$ близок к 1, а s мало по сравнению с s_X и s_Y, то качество аппроксимации хорошее.

3. Сравниваются две модели регрессии. Для этого выборка делится на две независимые части. Одна часть используется для построения линейной функции регрессии и соответствующей остаточной дисперсии s_1^2, другая часть является контрольной. С помощью контрольной части выборки строится другая функция регрессии, например квадратичная $y = B_0 + B_1x+B_2x^2$, и для нее вычисляется остаточная дисперсия s_2^2. Если s_2^2 значимо меньше s_1^2, то линейная модель хуже, и следует принять на данном этапе квадратичную модель. Проверка неравенства $s_2^2<s_1^2$ также проводится с помощью критерия Фишера равенства дисперсий (гл. 4, § 4).

4. Существуют слабые критерии проверки адекватности линейной модели – критерии проверки наличия вероятностной зависимости между X и Y. Если зависимость есть, то её можно описать линейной регрессией (хотя, может быть, и не наилучшим образом). Если зависимости нет, то линейная модель (и никакая другая также) не адекватна эксперименту.

Отсутствие зависимости между X и Y можно проверить с помощью гипотезы $\beta_1=0$. Эта гипотеза принимается, если доверительный интервал с границами (4.12) для β_1 при принятом уровне значимости накрывает нуль. Наличие или отсутствие зависимости между X и Y можно также проверить с помощью гипотезы $\rho_{XY}=0$ (см. гл. 5, § 1).

5. Наиболее надёжным и наиболее употребительным способом проверки адекватности модели регрессии данным эксперимента является способ сравнения дисперсии неадекватности $s_{\text{н}}^2$ с дисперсией воспроизводимости $s_{\text{в}}^2$, если имеются повторные опыты. Пусть в каждой точке x_i проведено n_i опытов и при

этом наблюдались значения y_{ij} случайной величины Y, i=1, …, m; j=1, …, n_i. При этом общее число опытов равно

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n\ . \qquad (4.15)$$

Вычисляется выборочное среднее в каждой точке x_i:

$$\overline{y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\,(i=1,\ldots,m) \qquad (4.16)$$

и дисперсия воспроизводимости

$$s_{\text{в}}^2 = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\overline{y}_i)^2 = \frac{Q_{\text{в}}}{n-m}. \qquad (4.17)$$

Здесь $(n - m)$ – число степеней свободы статистики $s_{\text{в}}^2$, равное общему числу опытов n минус число связей m, которые накладываются равенствами (4.16). Далее вычисляется дисперсия неадекватности

$$s_{\text{н}}^2 = \frac{1}{m-2}\sum_{i=1}^{m} n_i(\overline{y}_i-\hat{y}_i)^2 = \frac{Q_{\text{н}}}{m-2}. \qquad (4.18)$$

Здесь $\hat{y}_i = B_0 + B_1 x_i$ – значение эмпирической функции регрессии в точке x_i. $(m-2)$ – число степеней свободы статистики $s_{\text{н}}^2$ (число абсцисс x_i минус число связей, накладываемых вычислением коэффициентов B_0, B_1). Доказано [17], что

$$Q=Q_{\text{в}}+Q_{\text{н}}, \qquad (4.19)$$

где

$$Q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\hat{y}_i)^2 \qquad (4.20)$$

– иначе записанная остаточная сумма квадратов (3.1).

Статистики $s_{\text{н}}^2$ и $s_{\text{в}}^2$ независимы [16] и их можно сравнить с помощью отношения Фишера

$$F = s_{\text{н}}^2 / s_{\text{в}}^2\ , \qquad (4.21)$$

которое распределено по закону Фишера $F(m-2, n-m)$ с $m-2$ и $n-m$ степенями свободы. Проверяем гипотезу о равенстве двух дисперсий $s_{\text{н}}^2$ и $s_{\text{в}}^2$ (гл. 4, § 4). Задаёмся уровнем значимости α и по таблице находим квантиль $F_{1-\alpha}$ $(m-2, n-m)$ распределения Фишера. Пусть $F_{\text{в}}$ – выборочное значение статистики Фишера (4.21). Если

$$F_{\text{в}} < F_{1-\alpha}(m\text{-}2,\ n\text{-}m), \qquad (4.22)$$

то гипотеза адекватности принимается. В этом случае дисперсия неадекватности $s_{\text{н}}^2$ находится на уровне дисперсии воспроизводимости, не зависящей от выбранной модели, поэтому величину $s_{\text{н}}^2$ можно объяснить естественным разбросом данных. Если $s_{\text{н}}^2$ значительно меньше, чем $s_{\text{в}}^2$ (в этом случае неравенство (4.22) тоже выполняется), то это говорит об очень хорошем соответствии модели опытным данным. Если гипотеза адекватности не принимается, то нужно искать другую модель, например квадратичную $y = B_0 + B_1x + B_2x^2$.

Пример 4.1. Имеются 20 экспериментальных точек (x_1, y'_1), (x_1, y''_1), … , (x_{10}, y'_{10}), (x_{10}, y''_{10}) – значений двумерной случайной величины (X, Y), где $X=\sigma_s$ (млн. руб.) – текущие расходы(зарплата, сырье, реклама и т. д.) фирмы (в месяц), $Y=\sigma_в$ (млн. руб.) – доход фирмы (в месяц),. Здесь каждому из 10 значений x_i случайной величины X соответствуют два значения y'_i, y''_i случайной величины Y, $i=1, …, 10$, – результат повторных измерений. Данные помещены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Экспериментальные данные о расходах и доходах фирмы

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	45	54	63	74	85	93	104	111	123	135
y'_i	52	70	74	87	92	117	123	121	133	157
y''_i	65	82	83	94	105	125	132	134	142	180

Требуется построить уравнения прямых регрессии и сделать их статистический анализ.

►Для построения уравнений прямых регрессии требуется вычислить числовые характеристики (3.4). Для этого составляем таблицу 4.2.

С помощью таблицы 4.2 находим

$$\bar{x} = 887/10 = 88.7; \quad \bar{y} = 2168/20 = 108.4;$$

$$a_{2X} = 86751/10 = 8675.1; \quad a_{2Y} = 256178/20 = 12808.9;$$

$$\overline{xy} = \sum_{i=1}^{10} x_i(y'_i + y''_i)/20 = \sum_{i=1}^{10} x_i\bar{y}_i/10 = 105077/10 = 10507.7;$$

$$s_X = \sqrt{8675.1 - 88.7^2} = 28.415; \quad s_Y = \sqrt{12808.9 - 108.4^2} = 32.532;$$

$$\hat{K}_{XY} = 10507.7 - 88.7 \cdot 108.4 = 892.62;$$

$$r_{XY} = 892.62/(28.415 \cdot 32.532) = 0.96562;$$

$$B_1 = r_{XY} \cdot s_Y/s_X = 0.96562 \cdot 32.532/28.415 = 1.1055;$$

$$B_0 = \bar{y} - \bar{x}B_1 = 108.4 - 88.7 \cdot 1.1055 = 10.342.$$

Таблица 4.2

Расчет характеристик эмпирической линейной регрессии

i	x_i	y_i' y_i''	x_i^2	$y_i'^2$ $y_i''^2$	$\bar{y}_i$	$x_i\bar{y}_i$	$(y_i''-y_i')^2$	$\hat{y}_i =$ $= B_0 + B_1 x$	$(\bar{y}_i - \hat{y}_i')^2$
1	45	52 65	2025	2704 4225	58.5	2632.5	169	60.1	2.56
2	54	70 82	2916	4900 6724	76	4104	144	70.0	36
3	63	74 83	3969	5476 6889	78.5	4945.5	81	80.0	2.25
4	74	87 94	5476	7569 8836	90.5	6697	49	92.1	2.56
5	85	92 105	7225	8464 11025	98.5	8372.5	169	104.3	33.64
6	93	117 125	8649	13689 15625	121	11253	64	113.2	60.84
7	104	123 132	10816	15129 17424	127.5	13260	81	125.3	4.84
8	111	121 134	12321	14641 17956	127.5	14152.5	169	133.1	31.36
9	123	133 142	15129	17689 20164	137.5	16912.5	81	146.3	77.44
10	135	157 180	18225	24649 32400	168.5	22747.5	529	159.6	79.21
Σ	887	2168	86751	256178	1084	105077	1536	—	330.7

Уравнение прямой регрессии y на x:

$$y = B_0 + B_1 x = 10.342 + 1.1055x \approx 10.3 + 1.11x.$$

Уравнение прямой регрессии x на y:

$$\frac{x-\bar{x}}{s_X} = \frac{r_{XY}(y-\bar{y})}{s_Y} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.844y - 2.7 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3.2 + 1.19x.$$

Построим прямые регрессии и экспериментальные точки (рис. 4.5).

Статистический анализ результатов, полученных в примере 4.1

1. ***Вычисляем остаточную дисперсию и остаточное среднее квадратичное отклонение.***

$$Q_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{10}\left[(y_i' - \bar{y}_i)^2 + (y_i'' - \bar{y}_i)^2\right] = 0.5\sum_{i=1}^{10}(y_i'' - y_i')^2 = 0.5 \cdot 1536 = 768$$

$$Q_{\text{н}} = \sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{10}(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 = 2 \cdot 330.7 = 661.4.$$

$$Q = Q_{\text{в}} + Q_{\text{н}} = 768 + 661.4 = 1429.4.$$

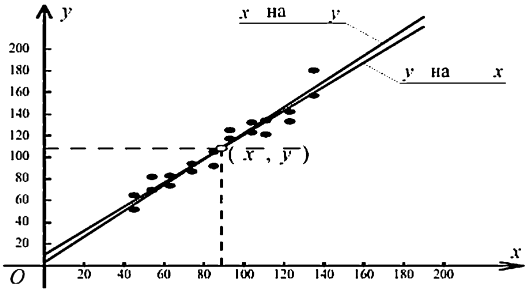


Рис. 4.5. *Экспериментальные точки и прямые регрессии в примере 4.1*

По формуле (4.1):

$$s=\sqrt{Q/(n-2)}=\sqrt{1429.4/18}=8.911\approx 8.91.$$

По формуле (4.2) вычисляем s для контроля:

$$s=s_Y\sqrt{\frac{n}{n-2}(1-r_{XY}^2)}=32.532\sqrt{\frac{20}{18}(1-0.96562^2)}=8.914\approx 8.91.$$

2. Суждение об адекватности линейной модели по чертежу, остаточной дисперсии и коэффициенту корреляции.

Экспериментальные точки достаточно хорошо группируются около прямых регрессии. Остаточная дисперсия s мала по сравнению с s_X и s_Y. Коэффициент корреляции r_{XY} близок к 1. Вывод: линейная модель регрессии адекватна экспериментальным данным.

Тангенс угла между прямыми регрессии равен 0.035 – очень мал – прямые почти сливаются, т. е. экспериментальные точки связаны зависимостью, близкой к линейной – очень сильной зависимостью.

3*. Проверка адекватности линейной модели с помощью критерия Фишера. Находим отношение Фишера $F_{\text{в}}=s_{\text{н}}^2/s_{\text{в}}^2=(9.093/8.764)^2=1.076$. Выбираем уровень значимости $\alpha=0.05$ и по таблице находим квантиль распределения Фишера $F_{0.95}(8,10)=3.07$. Видим, что $F_{\text{в}}<F_{0.95}(8,10)$. Это неравенство означает, что линейная модель адекватна опытным данным с доверительной вероятностью 0.95.

4*. Границы доверительных интервалов для коэффициентов β_0,β_1 линейной модели регрессии при доверительной вероятности $1-\alpha$.

Применяем формулы (4.11), (4.12) для β_0:

$$B_0\pm t_{0.975}(18)s\sqrt{a_{2X}}\Big/\left(s_X\sqrt{n}\right)=10.34\pm 2.101\cdot 8.91\sqrt{8675.1}\Big/\left(28.42\cdot\sqrt{20}\right)=10.3\pm 13.7;$$

и для β_1: $\quad B_1\pm t_{0.975}(18)s\Big/\left(s_X\sqrt{n}\right)=1.11\pm 2.101\cdot 8.91\Big/\left(28.42\cdot\sqrt{20}\right)=1.11\pm 0.15.$

5*. Границы доверительного интервала для функции регрессии $y=B_0+B_1x$ с доверительной вероятностью $1-\alpha=0.95$.

В силу формулы (4.13) имеем:

$$\bar{y}\pm t_{0.975}(18)\cdot s\cdot\sqrt{1+(x-\bar{x})^2/s_x^2}\,/\sqrt{n}=\bar{y}\pm 2.101\cdot 8.91\sqrt{1+(x-88.7)^2/28.42^2}\,/\sqrt{20}=$$

$= \hat{y} \pm 4.19\sqrt{1+(x-88.7)^2/807.4}$. Здесь $\hat{y} = B_0 + B_1 x = 10.3 + 1.11x$.

Применим полученные формулы для прогноза y при $x = 100$. Тогда

$$\hat{y}(100) = 10.3 + 111 = 121.3;$$

$$\hat{y} \pm 4.19\sqrt{1+(100-88.7)^2/807.4} = 121.3 \pm 4.5.$$

Таким образом, $y = 121.3\ (\pm 4.5)$, или иначе: $116.8 < y < 125.8$. ◄

Глава 6. **Задания для проверки качества усвоения раздела 11**

§ 1. Задачи для самостоятельной работы (по главам)

Глава 1. **Описательная статистика**

1. Взята выборка первых 15 чисел из первой строки таблицы VI равномерно распределенных случайных чисел на промежутке

(98, 52, 01, 77, 67, 14, 90, 56, 86, 07, 22, 10, 94, 05, 58).

Постройте вариационный ряд.

2. В вариационном ряде, построенном в задаче 1, найдите $x_{\min}, x_{\max}, z_{1/4}, z_{3/4}$.

3. С помощью вариационного ряда, построенного в задаче 1, и величин, найденных в задаче 2, вычислите med, t_q, t_R, $\bar{x}$. Убедитесь, что все они близки к середине промежутка [4; 12].

4. Выборка задана в виде ряда распределения частот:

x_i	4	7	8	12
n_i	6	2	3	10

Найти распределение относительных частот.

5. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки: (ϖ_i -относительные частоты)

x_i	2	4	5	7	10
ϖ_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

6. Результаты анализа рынка труда по профессии менеджер приведены в виде таблицы, отражающей зависимость числа кандидатов, желающих работать менеджером, от предлагаемой заработной платы (в тыс. рублей).

x_i	40	100	140	160
n_i	10	30	20	40

Найти эмпирическую (выборочную) функцию распределения и построить график полученной функции.

7. В итоге пяти измерений одним прибором (весами без систематической ошибки) веса контейнера с продукцией, поступившей в магазин, получены следующие результаты (в кг): 92;94;103;105;106;

Найти:

1). выборочный средний вес контейнера $\overline{x}$.

2). выборочную дисперсию s^2.

Глава 2. **Точечное оценивание числовых характеристик и параметров распределения генеральной совокупности**

1. Найдите выборочную дисперсию по данному распределению выборки обьема $n = 10$:

x_i	-5	1	3
n_i	2	5	3

2. По выборке объёма $n = 41$ найдена смещенная оценка $s^2 = 3$ генеральной дисперсии. Найдите несмещенную оценку дисперсии $\bar{s}^2$ генеральной совокупности.

3. Распределение Парето применяется для описания величины доходов населения выше фиксированного уровня. Плотность распределения Парето задается формулой

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_0; \\ \alpha x_0^{\alpha} x^{-\alpha-1}, & x > x_0 \end{cases} (\alpha > 1).$$

Вычислите математическое ожидание m и с его помощью по методу моментов найдите оценку параметра α (x_0 – фиксировано).

4. Найдите оценку параметра α распределения Парето из задачи 3 по методу максимума правдоподобия (x_0 – фиксировано).

Глава 3. **Интервальное оценивание числовых характеристик и параметров распределения генеральной совокупности**

1. Найдите квантили распределения Стьюдента (по таблице III) порядка 0.9 и 0.99 с 10 степенями свободы.

2. Изготовлен экспериментальный игровой автомат, который должен обеспечить появление выигрыша в одном случае из 100 бросаний монеты в автомат. Для проверки пригодности автомата произведено 400 испытаний [8], при этом выигрыш появился 5 раз, Найдите доверительный интервал покрывающий неизвестную вероятность выигрыша с надёжностью 0,999. *Указание.* Еще раз внимательно прочтите §2 этой главы.

3. Найдите доверительный интервал с надёжностью 0,95 неизвестного математического ожидания нормально распределенного признака генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $s^2 = 3$ выборочное среднее $\bar{x} = 14$ и обьём выборки n =25.

4. Найдите точность оценки $\bar{x} = 10$ при выборке объёма $n = 400$ с надёжностью $\gamma = 0.95$, если $s = 2$. *Указание.* Еще раз внимательно прочтите § 5 этой главы.

Глава 4. **Проверка статистических гипотез**

1. Проверьте гипотезу H_0 о равенстве математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей по двум независимым выборкам объёма $n = 60$, для которых вычислены $\bar{x} = 5.2$; $s_X = 1.3$; $\bar{y} = 5.1$; $s_Y = 1.4$. Возьмите уровень значимости $\alpha = 0.05$.

2.Даны две выборки [9] распределения (по обьёму закупок) банков-покупателей иностранной валюты на двух валютных биржах:

(x_i, y_i - обьём покупки (в тыс. долларов), n_i, k_i - количество банков).

Биржа № 1

x_i	18,55	16,48	15,16	15,02
n_i	34	31	36	21

Биржа № 2

y_i	25,02	21,86	18,4	15,6
k_i	20	22	30	15

Проверьте гипотезу (при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$) о равенстве математических ожиданий $m_X = m_Y$ генеральных средних двух совокупностей, из которых извлечены выборки. Альтернативная гипотеза $m_X \neq m_Y$.

3. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объёма $\mathrm{n} = 200$:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

4. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объёма $\mathrm{n} = 200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Глава 5. **Корреляционный и регрессионный анализ**

1. По опытным данным объёма $n=26$ найден эмпирический коэффициент корреляции $r_{XY}=0.6$. Проверьте наличие вероятностной зависимости между случайными величинами X и Y с помощью формул (1.7), (1.8).

2. Составьте уравнение прямых регрессии по следующим опытным данным: $\bar{x}=1.2$; $\bar{y}=0.8$; $s_X=2.1$; $s_Y=1.3$; $r_{XY}=0.6$. Вычислите тангенс угла между прямыми регрессии по формуле $\operatorname{tg}\varphi=(k_2-k_1)/(1+k_1k_2)$, где $k_1=k_{y/x}$, $k_2=k_{x/y}$, и постройте эти прямые на плоскости.

3. Зависимость между месячной выработкой продукции Y (в тыс. руб.) и величиной основных производственных фондов X (в млн. руб.) для 50 однотипных предприятий приведена в табл.1. Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии y на x. и x на y по приведённым данным.

Таблица 1.

Y	X							
	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	-	1	-	-	-	-	-	1
150	1	2	5	-	-	-	-	8
175	-	3	2	12	-	-	-	17
200	-	-	1	8	7	-	-	16
225	-	-	-	-	3	3	-	6
250	-	-	-	-	-	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n=50$

§ 2. Контрольные вопросы по разделу 11

Глава 1. **Описательная статистика**

1. Что такое генеральная совокупность, выборка, выбор?
2. Сформулируйте определение простого случайного выбора.
3. Какая выборка называется репрезентативной, однородной?
4. Что такое вариационный, статистический ряд?
5. Дайте определения крайних элементов вариационного ряда, размаха, медианы, квартилей.
6. Что такое полигон частот?
7. Дайте определение выборочной функции распределения.
8. Что такое оценка генеральной числовой характеристики?
9. Перечислите основные выборочные оценки генеральных числовых характеристик.
10. Что такое группированный статистический ряд?
11. Что такое гистограмма выборки?

Глава 2. **Точечное оценивание числовых характеристик**

и параметров распределения генеральной совокупности

12. Дайте определение точечной статистической оценки.

13. Какая оценка называется состоятельной, несмещенной, робастной, эффективной?

14. Какая из двух оценок считается более эффективной?

15. Что такое относительная эффективность, эффективность, асимптотическая эффективность оценки?

16. Какими свойствами обладает выборочное среднее?

17. Какие свойства имеет выборочная дисперсия?

18. Укажите статистические оценки математического ожидания для случая нормального распределения.

19. Укажите статистические оценки среднего квадратического отклонения для случая нормального распределения.

20. Опишите метод моментов получения оценок.

21. Опишите метод максимального правдоподобия получения оценок.

Глава 3. **Интервальное оценивание числовых характеристик и параметров распределения генеральной совокупности**

22. Дайте определение доверительного интервала.

23. Что такое точность и надёжность оценки?

24. Как определяется точность и надёжность оценки вероятности события по относительной частоте?

25. Постройте доверительный интервал для математического ожидания нормальной генеральной совокупности.

26. Постройте доверительный интервал для математического ожидания любой генеральной совокупности при большом объёме выборки.

Глава 4. **Проверка статистических гипотез**

27. Что такое статистическая гипотеза?

28. Какая гипотеза называется простой?

29. Что такое критерий значимости, статистика критерия значимости?

30. Что такое уровень значимости? Как он связан с доверительной вероятностью?

31. Что такое критическая область критерия?

32. Изложите общую схему проверки статистических гипотез.

33. Что такое критерий согласия?

34. Какие ошибки называются ошибками первого и второго рода?

35. Какие критерии называют односторонними и двусторонними?

36. Какая статистика применяется при проверке гипотезы о равенстве двух дисперсий?

37. В каких реальных задачах возникает гипотеза о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей?

38. Как с помощью доверительного интервала проверяется гипотеза о равенстве вероятностей двух событий?

39. Как формулируются теоремы Пирсона и Фишера об асимптотическом поведении статистик критерия хи-квадрат?

40. Как формулируется критерий хи-квадрат для проверки гипотезы о законе распределения генеральной совокупности с неизвестными параметрами?

Глава 5. **Корреляционный и регрессионный анализ**

41. Что такое регрессионный анализ?

42. Напишите формулу для вычисления выборочного коэффициента корреляции.

43. Как проверяется статистическая гипотеза о равенстве нулю коэффициента корреляции?

44. Что такое эмпирическая простая линейная регрессия?

45. В чем состоит метод наименьших квадратов?

46. Выведите формулы для нахождения параметров B_0, B_1 эмпирической простой линейной регрессии по экспериментальным данным.

47. Что такое остаточная дисперсия?

48. Выведите формулу, выражающую остаточное среднее квадратическое отклонение через выборочный коэффициент корреляции.

49. Запишите уравнения прямых регрессии «y на x» и «x на y» в симметричной форме.

50. Как ведут себя прямые регрессии при $r_{XY} \to 0$ и $r_{XY} \to 1$?

51. Какая регрессия называется адекватной опытным данным?

52. Как проверить адекватность простой линейной регрессии опытным данным с помощью чертежа, остаточной дисперсии и выборочного коэффициента корреляции?

53. Как проверить адекватность простой линейной регрессии опытным данным с помощью двух независимых выборок?

§3. Тесты по разделу 11

<table>
<tr><th>Вар. № 1</th><th>Тест по разделу «Математическая статистика»</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Выборка задана в виде распределения частот:
x_i 2 5 7
n_i 1 3 6
Найти распределение относительных частот.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Найти эмпирическую функцию распределения по данным выборки:
x_i 1 4 6
n_i 10 15 25</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:
x_i 1 4 5 8 9
ω_i 0,15 0,25 0,3 0,2 0,1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.
<table>
<tr><th>Номер интервала i</th><th>Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$</th><th>Сумма частот n_i по вариантам интервалов</th><th>Плотность частоты n_i / h, (h – число интервалов)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3 – 5</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>5 – 7</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>7 – 9</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>9 – 11</td><td>40</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>11 – 13</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>13 – 15</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>15 – 17</td><td>6</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>5</td><td>По выборке объёма $n = 83$ найдена смещенная оценка $D_b = 3$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Случайная величина X (число нестандартных изделий в партии изделий) распределена по закону Пуассона. Ниже приведено распределение нестандартных изделий в $n = 200$ партиях (в первой строке указано количество x_i нестандартных изделий в одной партии; во второй строке указана частота n_i – число партий, содержащих x_i нестандартных изделий):
x_i 0 1 2 3 4
n_i 132 43 20 3 2
Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра λ распределения Пуассона</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Из генеральной совокупности произведена выборка объёмом $n = 60$:
x_i 1 3 6 26
n_i 8 40 10 2
Найти несмещенную оценку выборочной средней.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>8</td><td>Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объёмом $n=100$:
x_i 340 360 375 380
n_i 20 50 18 12</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$, выборочная средняя $\bar{x}=10{,}2$ и объём выборки $n=16$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Используя критерий Пуассона, при уровне значимости 0,05 установить случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i^0, которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:
n_i 8 16 40 72 36 18 10
n_i^0 6 18 36 76 39 18 7</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Вар. № 2</td><td>Тест по разделу «Математическая статистика»</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Выборка задана в виде распределения частот:
x_i 4 7 8 12
n_i 5 2 3 10
Найти распределение относительных частот</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Найти эмпирическую функцию распределения по данным выборки:
x_i 2 5 7 8
n_i 1 3 2 4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Построить полигон относительных частот по данным выборки:
x_i 2 4 5 7 10
ω_i 0,15 0,2 0,1 0,1 0,45</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Построить гистограмму частот по данному распределению выборки:
<table>
<tr><th>Номер интервала i</th><th>Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$</th><th>Сумма частот n_i по вариантам интервалов</th><th>Плотность частоты n_i / h, (h — число интервалов)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2 — 7</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>7 — 12</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>12 — 17</td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>17 — 22</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>22 — 27</td><td>4</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>5</td><td>По выборке объёма $n=51$ найдена смещённая оценка $D_b=5$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности</td></tr>
</table>

6	Случайная величина X (число семян сорняков в пробе зерна) распределена по закону Пуассона. $P_m(x_i) = \lambda^{x_i} e^{-\lambda} / x_i!$, где m - число испытаний, произведённых в одном опыте; x_i - число появлений событий в i-м опыте $P_m(x_i) = \lambda^{x_i} e^{-\lambda} / x_i!$,. Ниже приведено распределение семян сорняков в $n = 1000$ пробах зерна (в первой строке указано количество x_i сорняков в одной пробе; во второй строке указана частота n_i — число проб, содержащих x_i семян сорняков): x_i 0 1 2 3 4 5 6 n_i 405 366 175 40 8 4 2 Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра распределения Пуассона
7	Из генеральной совокупности произведена выборка объёмом $n = 60$: x_i 1 3 6 26 n_i 8 40 10 2 Найти несмещенную оценку выборочной средней.
8	Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объёмом $n = 10$: x_i 186 192 194 n_i 2 5 3
9	Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\bar{x} = 16{,}8$ и объём выборки $n = 25$.
10	Используя критерий Пуассона, при уровне значимости 0,05 установить случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i^0 которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X: n_i 14 18 32 70 20 36 10 n_i^0 10 24 34 0 18 22 12

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ТЕСТОВ

Вариант 1

1) 0,1; 0,3; 0,6.

2) $F(x) = 0$ при $x \le 1$,

$F(x) = 0{,}2$ при $1 < x \le 4$,

$F(x) = 0{,}5$ при $4 < x \le 6$,

$F(x) = 1$ при $x > 6$.

3) *Решение.* Отложим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие относительные частоты ω_i. Соединив точки (x_i, ω_i) отрезками прямых, получим полигон относительных частот.

4) *Указание.* Найти предварительно плотность частоты n_i/h (h – *число интервалов)* для каждого интервала и заполнить последний столбец таблицы. Затем построить на оси абсцисс заданные интервалами длины h=5 и провести над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящихся от нее на расстояниях равным соответствующим плотностям частоты n_i/h .

5) 3,075 **6)** $\lambda_в = \bar{x} = 0{,}05$.

7) 5,76 **8)** 167,29 **9)** $7{,}63 < a < 12{,}77$.

10) k=4, $\chi^2_{набл} = 3{,}061$, $\chi^2_{крит}(0{,}01;4) = 13б3$. Расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами незначимо (случайно), так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$.

Вариант 2

1) 0,25; 0,10; 0,15; 0,50 .

2) $F(x) = 0$ при $x \le 2$,
$F(x) = 0{,}1$ при $2 < x \le 5$,
$F(x) = 0{,}4$ при $5 < x \le 7$,
$F(x) = 0{,}6$ при $7 < x \le 8$,
$F(x) = 1$ при $x > 8$.

3) *Решение.* Отложим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие относительные частоты ω_i. Соединив точки (x_i, ω_i) отрезками прямых, получим полигон относительных частот.

4) *Указание.* Найти предварительно плотность частоты n_i/h (*h-число интервалов)* для каждого интервала и заполнить последний столбец таблицы. Затем построить на оси абсцисс заданные интервалами длины h=5 и провести над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящихся от нее на расстояниях, равным соответствующим плотностям частоты n_i/h .

5) $S^2 = 5{,}1$. **6)** $\lambda = \bar{x} = 0{,}021$. **7)** 4.

8) 8,04. **9)** $14{,}23 < a < 19{,}37$.

10) k=4, $\chi^2_{набл} = 13{,}93$, $\chi^2_{крит}(0{,}05;4) = 9{,}5$. Расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами значимо (неслучайно), так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}$.

§ 4. Ответы к задачам для самостоятельной работы (по главам)

Глава 1.

1. 01, 05, 07, 10, 14, 22, 52, 56, 58, 67, 77, 86, 90, 94, 98;

2. $x_{\min} = 0.1$; $x_{\max} = 98$; $z_{1/4} = 10$; $z_{3/4}=86$.

3. $\text{med} = 56$; $t_q = 48$; $t_R = 49.5$; $\bar{x} = 49.13$.

4.

x_i	4	7	8	12
ϖ_i	0,25	0,10	0,15	0,50

5. *Указание.* Отложите на оси абсцисс значения x_i, а на оси ординат – соответствующие относительные частоты ω_i. Соединив точки (x_i, ω_i) отрезками прямых, получим полигон относительных частот.

6. $F(x) = 0$ при $x \le 40$,
$F(x) = 0{,}1$ при $40 < x \le 100$, $F(x) = 0{,}4$ при $100 < x \le 140$,
$F(x) = 0{,}6$ при $140 < x \le 160$, $F(x) = 1$ при $x > 160$.

7. 1. $\bar{x}=100$. 2. $s^2=34{,}3$.

Глава 2.

1. $s^2 = 8{,}04$ 2. $\bar{s}^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot s^2 = \dfrac{41}{40} \cdot 3 = 3{,}075$.

3. $$m = \int_{x_0}^{+\infty} x \alpha x_0^{\alpha} x^{-\alpha-1} dx = \alpha x_0^{\alpha} \int_{x_0}^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \alpha x_0^{\alpha} x_0^{1-\alpha} / (\alpha - 1) = \alpha x_0 / (\alpha - 1);$$

$$m = \bar{x}; \ \bar{x} = \alpha x_0/(\alpha-1) \ \Rightarrow \ \hat{\alpha} = \bar{x}/(\bar{x} - x_0).$$

4. $$L = \alpha^n x_0^{n\alpha} (x_1 \ldots x_n)^{-\alpha-1}; \ \ln L = n \ln\alpha + n\alpha \ln x_0 - (\alpha+1)\sum_{k=1}^{n} \ln x_k;$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \ln x_0 - \sum_{k=1}^{n} \ln x_k = 0; \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln x_k - \ln x_0;$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln x_k - \ln x_0\right)^{-1} \Rightarrow \hat{\alpha} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln x_k - \ln x_0\right)^{-1} = n \Big/ \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{x_k}{x_0}.$$

Глава 3.

1. $t_{0.9}(10) = 1.372$; $t_{0.99}(10) = 2.764$.

2. $0<p<0{,}0308$. *Указание.* За оценку p принимается относительная частота появления выигрыша $p^*=5/400=0{,}0125$.

3. $12{,}04 < m < 15{,}96$. *Указание.* См. §3, формула 3.4.

4. По формуле (5.4) находим

$$\alpha = s u_{(1+\beta)/2} \big/ \sqrt{n} = 2 \cdot u_{0.975} \big/ \sqrt{400} = 2 \cdot 1.96/20 = 0.196 \approx 0.2.$$

Глава 4.

1. Гипотеза H_0 о равенстве математических ожиданий принимается.

Решение. Проверяем сначала гипотезу о равенстве дисперсий. Находим выборочное значение статистики Фишера $F_B = 1.4/1.3 = 1.08$. По таблице V находим квантиль $F_{1-\alpha}(k_1, k_2) = F_{0.95}(60{,}60) = 1.5$ распределения Фишера. Видим, что $F_в < 1.5$. гипотеза о равенстве дисперсий принимается. Сравниваем математические ожидания. Вычисляем выборочное значение по формуле (5.4).

$$T_в = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(m-1)s_X^2 + (n-1)s_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} = \frac{52-51}{\sqrt{59(1{,}3^2 + 1{,}4^2}} \cdot \sqrt{\frac{59^2(49+59-2)}{59+59}} \approx 0{,}40 .$$

По таблице III находим квантиль $t_{1-\alpha/2}(m+n-2) = t_{0.975}(118) = 1.98$. Видим, что $|T_B| < 1.98$. Расхождение между и незначимо. Гипотеза о равенстве математических ожиданий принимается.

2. Гипотеза H_0 о равенстве математических ожиданий не принимается. Обьёмы продаж на двух биржах неравнозначны.

3. $k = 8; x^2_{набл} = 7{,}71;$ $\chi^2_{кр}(0{,}05;8) = 15{,}5$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

4. Ответ: k=6, $x^2_{набл} = 22{,}2., x^2_{кр}(0{,}05;6) = 12{,}6.$

Так как $x^2_{набл} > x^2_{кр}$ - гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Глава 5.

1. $|r_{XY}|\sqrt{n-1} = 0.6 \cdot \sqrt{25} = 3 > 2.5$. Зависимость фиксируется на уровне значимости ά = 0,05.

2. Уравнение прямой регрессии « y на x »:

$$(y - 0.8)/1.3 = 0.6(x - 1.2)/2.1; \quad k_1 = k_{y/x} = 0.6 \cdot 1.3/2.1 = 0.37 .$$

Уравнение прямой регрессии « x на y »:

$$(x - 1.2)/2.1 = 0.6(y - 0.8)/1.3; \qquad k_2 = k_{x/y} = 1.3/(0.6 \cdot 2.1) = 1.03;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = (1.03 - 0.37)/(1 + 1.03 \cdot 0.37) = 0.48 .$$

3. $\overline{y_x} = 3{,}69x + 66,$ $\quad \overline{x_y} = 0{,}19y - 3{,}1.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Физматлит, 2007. – 320 с.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 2006.– 575 с.
3. Вентцель Е. С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2006. – 448 с.
4. Вероятностные разделы математики / под ред. Ю.Д. Максимова. – СПб.: Иван Федоров, 2001. – 589 с.
5. Глухов В. В., Медников М. Д.. Коробко С.В. Математические методы и модели для менеджмента. – СПб.: Издательство «Лань», 2000. – 480 с.
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. 8-е изд., испр. и доп.– М.: Высш.шк., 2005. – 448 с.
7. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для вузов. Изд. 8-е. стер. – М.: Высш.шк., 2002. – 479с.
8. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие для студентов вузов. Изд. 9-е. стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 404 с.
9. Енина Е. П. Теория вероятностей и математическая статистика в экономике. Учебное пособие. – Воронеж: изд. НПО Модзк., 1998. – 238 с.
10. Замков О. О., Тостопятенко А. В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Издательство «Дело и сервис», 2002. – 386 с.
11. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. Учебник. – М.: Изд. Проспект, 2015. – 592 с..
12. Красс М. С. Математика в экономике. Математические методы и модели. Учебник. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.
13. Лобкова Н. И., Максимов Ю. Д., Хватов Ю. А. Высшая математика . Учебное пособие. Т.1, Т2. – М.: Изд. Проспект, 2015.
14. Математика для экономистов и менеджеров. Учебник/колл. авторов под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : КНОРУС, 2015. – 480 с.
15. Максимов Ю. Д., Куклин Б. А., Хватов Ю. А. Теория вероятностей. Контрольные задания с образцами решений. Учебное пособие. – СПб.: СПбГПУ, 2002. – 96 с.
16. Максимов Ю. Д. Математика. Теория вероятностей и случайные процессы.– СПб.: СПбГПУ, 2008. – 384 с.
17. Математическая статистика. Математика в техническом университете. Т. XVII / под ред. Зарубина В. С., Крищенко А. П. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.– 424 с.
18. Математика для экономистов. Практикум. Учебное пособие/колл. авторов: под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 480 с.
19. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В. Математика в экономике. Учебник в 2-х частях. – М.: Финансы и статистика, 2000.
20. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во ЛКИ, 2013. – 312 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Справочник по одномерным непрерывным распределениям

Приведённые 25 наиболее употребительных распределений разбиты на 3 группы по виду областей, где плотность отлична от нуля: на всей оси, на правой полуоси и на ограниченном промежутке.

Для распределений указаны математические ожидания m_X, дисперсии D_X, если они существуют, моды Mo, типовые графики плотностей, а также применения при моделировании реальных распределений. Справочник полезен при решении учебных задач, а также при выборе альтернатив для моделирования.

§ 1. Распределения с плотностью, отличной от нуля на всей оси

1. Нормальное распределение: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right]$, $m \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$; $m_X = m$; $D_X = \sigma^2$; $\mathrm{Mo} = m$. Типовой график – на рис. 1.1. Является предельным для распределения суммы независимых случайных величин, рассматриваемых в центральной предельной теореме. Описывает распределение различных выборочных средних, ошибок измерения, параметров деталей, координат точки падения снаряда, величины шума в управляющем устройстве.

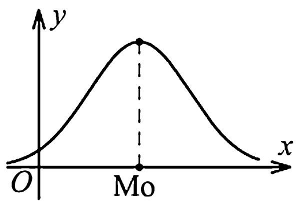


Рис. 1.1. Типовой график плотности для распределений 1, 2, 3, 4, 5

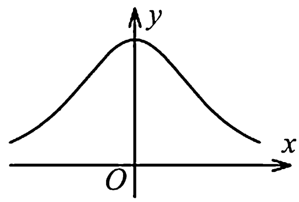


Рис. 1.2. График плотности распределения Стьюдента

2. Логистическое распределение:

$f(x) = q\sigma^{-1}e^{-qy}(1+e^{-qy})^{-2} = \frac{q}{4\sigma}\mathrm{ch}^{-2}\frac{qy}{2}$, $y = (x-m)/\sigma$, $q = \pi/\sqrt{3} \approx 1.8138$; $m \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$; $m_X = m$; $D_X = \sigma^2$; $\mathrm{Mo} = m$. График – на рис. 1.1. Мало отличается от нормального распределения. Применяется в экономических, социологических, экологических, медико-биологических исследованиях.

3. Распределение Коши: $f(x) = \frac{a}{\pi}\left[a^2 + (x-m)^2\right]^{-1}$, $m \in \mathbf{R}$, $a > 0$; m_X, D_X не существуют; $\mathrm{Mo} = \mathrm{Me} = m$; вероятное отклонение (половина расстояния между квартилями) – мера рассеяния $E = a$. График – на рис. 1.1. Является распределением отношения двух нормальных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями.

4. Трехпараметрическое распределение Коши:
$f(x)=C\left[1+\alpha(x-m)^{\lambda}\right]^{-1}$, $\alpha>0$, $\lambda>1$, $m\in\mathbf{R}$, $C=\left[\lambda\alpha^{1/\lambda}/(2\pi)\right]\sin\frac{\pi}{\lambda}$; $m_X=m$ (при $\lambda>2$); $D_X=\alpha^{-2/\lambda}\sin\frac{\pi}{\lambda}\Big/\sin\frac{3\pi}{\lambda}$ (при $\lambda>3$); $\text{Mo}=m$. График – на рис. 1.1. При $\lambda=2$ получаем распределение Коши. Применяется при моделировании реальных распределений.

5. Трехпараметрическое распределение, близкое к нормальному: $f(x)=C\exp\left(-\alpha|x-m|^{\lambda}\right)$, $m\in\mathbf{R}$, $\alpha>0$, $\lambda>0$, $C=\frac{1}{2}\lambda\alpha^{1/\lambda}\Gamma^{-1}(1/\lambda)$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция; $m_X=m$; $D_X=\alpha^{-2/\lambda}\Gamma(3/\lambda)\Gamma^{-1}(1/\lambda)$; $\text{Mo}=m$. График при $\lambda>1$ – на рис. 1.1. При $\lambda=1$ получаем распределение Лапласа, при $\lambda=2$ – нормальное. Применяется при моделировании реальных распределений.

6. *t*-распределение Стьюдента: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$, $n\in\mathbf{N}$ (число степеней свободы), $\Gamma(x)$ – гамма-функция. $m_X=0$ ($n\geq 2$); $D_X=n/(n-2)$ ($n\geq 3$); $\text{Mo}=0$. График – на рис. 1.2. Применяется в математической статистике.

7. Распределение Лапласа (двустороннее показательное):
$f(x)=\frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{|x-m|}{\sigma}\right)$, $m\in\mathbf{R}$, $\sigma>0$; $m_X=m$; $D_X=2\sigma^2$; $\text{Mo}=m$. График – на рис. 1.3. Является распределением случайной величины $X=X_1-X_2+m$, где X_1, X_2 – независимые показательно распределенные случайные величины с параметром $1/\sigma$.

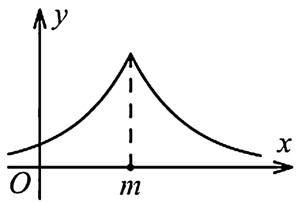


Рис. 1.3. *График плотности распределения Лапласа*

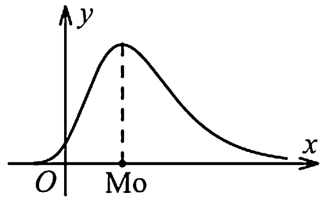


Рис. 1.4. *График плотности двойного показательного распределения*

8. Двойное показательное распределение:
$f(x)=\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{x-m}{\sigma}\right)\exp\left[-\exp\left(-\frac{x-m}{\sigma}\right)\right]$, $m\in\mathbf{R}$, $\sigma>0$; $m_X=m+c\sigma$, $c\approx 0.5772$; $D_X=\sigma^2\pi^2/6$; $\text{Mo}=m$; асимметрия $A\approx 1.1395$. График – на рис. 1.4. Является распределением экстремальных элементов выборки.

§ 2. Распределения с плотностью, отличной от нуля на полуоси

1. Распределения с плотностью показательного типа

1.1. Показательное (экспоненциальное) распределение: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda>0$, $x\ge 0$; $m_X=1/\lambda$; $D_X=1/\lambda^2$; $\text{Mo}=0$. График – на рис. 2.1. Описывает распределение времени обслуживания, времени безотказной работы прибора.

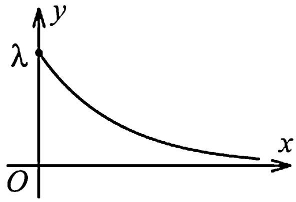


***Рис. 2.1.** График плотности показательного распределения*

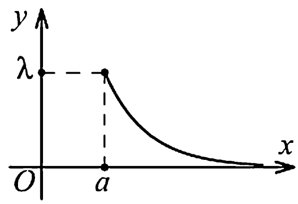


***Рис. 2.2.** График плотности смещенного показательного распределения*

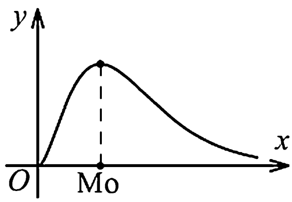


***Рис. 2.3.** Типовой график плотности распределений 1.3, 1.4–1.6, 1.9–1.11, 2.1, 2.2*

1.2. Смещённое показательное распределение: $f(x)=\lambda e^{-\lambda(x-a)}$, $\lambda>0$, $a>0$, $x\ge a$; $m_X=a+1/\lambda$; $D_X=1/\lambda^2$; $\text{Mo}=a$. График – на рис. 2.2. Применяется для описания распределения времени обслуживания, заведомо не меньшего, чем a.

1.3. Гамма-распределение: $f(x)=Cx^{k-1}e^{-\lambda x}$, $C=\lambda^k/\Gamma(k)$, $\lambda>0$, $k\ge 1$, $x\ge 0$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция; $m_X=k/\lambda$; $D_X=k/\lambda^2$; $\text{Mo}=(k-1)/\lambda$. График при $k>2$ – на рис. 2.3. Применяется в теории надёжности для моделирования времени безотказной работы приборов, материалов, времени обслуживания. При $k=1$ гамма-распределение переходит в показательное. При k натуральном распределение называется распределением Эрланга порядка k. Оно используется в теории массового обслуживания.

1.4. Хи-квадрат распределение (χ^2): $f(x)=2^{-n/2}\Gamma^{-1}(n/2)x^{(n/2)-1}e^{-x/2}$, $x\ge 0$, $n\in\mathbf{N}$; $m_X=n$; $D_X=2n$; $\text{Mo}=n-2$ при $n\ge 3$. График при $n\ge 5$ – на рис. 2.3. Является частным случаем гамма-распределения при $k=n/2$ и $\lambda=1/2$. Применяется в математической статистике. Параметр n называется *числом степеней свободы*.

1.5. Модифицированное хи-распределение (χ):

$$f(x)=2^{1-n/2}\Gamma^{-1}(n/2)\sigma^{-n}x^{n-1}e^{-x^2/(2\sigma^2)},\ n\in\mathbf{N},\ x\ge 0;$$

$$m_X=\sigma\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right);\quad D_X=\sigma^2\left[n-2\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma^{-2}\left(\frac{n}{2}\right)\right];\quad \text{Mo}=\sigma\sqrt{n-1}.$$

График при $n\ge 3$ – на рис. 2.3. Является распределением случайной величины

$X = \sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}$, где $X_1, \ldots, X_n$ – нормальные взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины с параметрами 0 и σ. При $\sigma = 1$ переходит в обычное хи-распределение. Применяется в математической статистике.

1.6. Распределение Максвелла: $f(x) = \frac{2}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$, $\sigma > 0$, $x \geq 0$; $m_X = \sigma 2\sqrt{2}/\sqrt{\pi}$; $D_X = \sigma^2(3 - 8/\pi)$; $\text{Mo} = \sigma\sqrt{2}$. График – на рис. 2.3. Является частным случаем модифицированного хи-распределения при $n = 3$. Описывает распределение длины вектора скорости молекулы газа.

1.7. Распределение Релея: $f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-x^2/2\sigma^2\right)$, $\sigma > 0$, $x \geq 0$; $m_X = \sigma\sqrt{\pi/2} \approx 1.2533\sigma$; $D_X = \sigma^2(2 - \pi/2) \approx 0.4292\sigma^2$; $\text{Mo} = \sigma$. График – на рис. 2.4. Является частным случаем модифицированного хи-распределения при $n = 2$. Описывает распределение длины случайного плоского вектора $\sqrt{X^2 + Y^2}$, где X, Y – независимые нормальные случайные величины, одинаково распределенные с параметрами 0 и σ. Применяется в артиллерии, теории связи, теории надёжности.

1.8. Усечённое нормальное распределение: $f(x) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$, $\sigma > 0$, $x \geq 0$; $m_X = \sigma\sqrt{2/\pi}$; $D_X = \sigma^2(\pi - 2)/\pi$; $\text{Mo} = 0$. График – на рис. 2.5. Применяется в теории надёжности для моделирования времени безотказной работы приборов, материалов. Является частным случаем модифицированного хи-распределения при $n = 1$.

1.9. Распределение Вейбулла: $f(x) = \lambda k x^{k-1}\exp(-\lambda x^k)$, $\lambda > 0$, $k > 0$, $x \geq 0$; $m_X = \lambda^{-1/k}\Gamma(1 + 1/k)$; $D_X = \lambda^{-2/k}\left[\Gamma(1 + 2/k) - \Gamma^2(1 + 1/k)\right]$; $\text{Mo} = \lambda^{-1/k}(1 - 1/k)^{1/k}$. График при $k > 2$ – на рис. 2.3. При $k = 1$ распределение Вейбулла переходит в показательное. Применяется для моделирования распределения времени безотказной работы приборов, материалов.

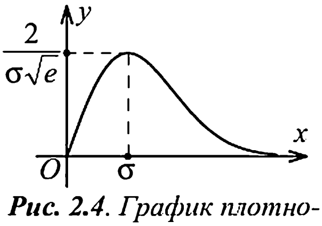


Рис. 2.4. График плотности распределения Релея

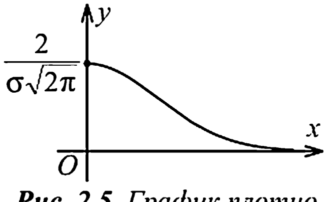


Рис. 2.5. График плотности усеченного нормального распределения

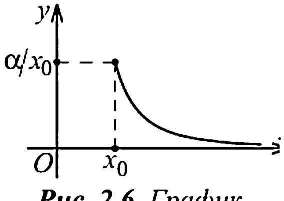


Рис. 2.6. График плотности распределения Парето

1.10. Трехпараметрическое гамма-распределение:

$f(x) = Cx^{k-1}\exp(-\lambda x^n)$, $k \geq 1$, $\lambda > 0$, $n > 0$, $x \geq 0$, $C = n\lambda^{k/n}\Gamma^{-1}(k/n)$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция; $m_X = \lambda^{-1/n}\Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)$;

$D_X = \lambda^{-2-2/n}\Gamma(k)\left[\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{k+2}{n}\right) - \Gamma^2\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]$ $\text{Mo} = \left(\frac{k-1}{\lambda n}\right)^{1/n}$. При $n=1$ получаем обычное гамма-распределение, при $n=k$ – распределение Вейбулла. График при $k>2$ – на рис. 2.3. Применяется для моделирования распределения величины стока и загрязнения рек.

1.11. Логарифмически-нормальное распределение: $f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right]$, $\sigma>0$, $m\in\mathbf{R}$, $x>0$; $m_X = e^{m+\sigma^2/2}$, $D_X = e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$; $\text{Mo} = e^{m-\sigma^2}$. График – на рис. 2.3. Применяется для моделирования распределения продолжительности жизни, величины доходов населения, размеров частиц при дроблении, в теории надёжности.

2. Распределения с плотностью алгебраического типа.

2.1. F**-распределение Фишера:**
$f(x) = (m/n)^{m/2}\,\mathrm{B}^{-1}(m/2, n/2)\,x^{-1+m/2}(1+(m/n)x)^{-(m+n)/2}$, m, n – натуральные числа – степени свободы; $x>0$, $\mathrm{B}(p,q)$ – бета-функция; $m_X = n/(n-2)$ при $n\ge 3$;

$D_X = 2n^2(m+n-2)m^{-1}(n-2)^{-2}(n-4)^{-1}$ при $n\ge 5$; $\text{Mo} = n(m-2)m^{-1}(n+2)^{-1}$ при $m\ge 2$. График при $m\ge 5$ – на рис. 2.3. Применяется в математической статистике при сравнении дисперсий.

2.2. Бета-распределение 2-го типа: $f(x) = \mathrm{B}^{-1}(p,q)x^{p-1}(1+x)^{-p-q}$, $p>0$, $q>0$, $x>0$; $m_X = p/(q-1)$ при $q>1$; $D_X = p(p+q-1)(q-1)^{-2}(q-2)^{-1}$ при $q>2$; $\text{Mo} = (p-1)/(q+1)$ при $p>1$; $\mathrm{B}(p,q)$ – бета-функция. График при $p>2$ – на рис. 2.3. Применяется для моделирования реальных распределений.

2.3. Распределение Парето (степенное): $f(x) = \alpha x_0^{\alpha} x^{-\alpha-1}$, $x_0>0$, $x\ge x_0$, $\alpha>0$; $m_X = \alpha x_0(\alpha-1)^{-1}$ при $\alpha>1$; $D_X = \alpha x_0^2(\alpha-1)^{-2}(\alpha-2)^{-1}$ при $\alpha>2$. График – на рис. 2.6. Применяется для моделирования распределения величины доходов населения выше уровня x_0.

§ 3. Распределения, отличные от нуля на конечном промежутке

1. Равномерное распределение на $[a,b]$**:** $f(x) = 1/(b-a)$, $x\in[a,b]$, $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$; $m_X = (a+b)/2$; $D_X = (b-a)^2/12$. График – на рис. 3.1. Применяется для моделирования распределения ошибок округления, ошибок отсчета по приборам стрелочного типа. Равномерное распределение на отрезке $[0,1]$ является стандартным, табулировано и по специальным программам может быть преобразовано в другие распределения. Оно же применяется в статистической практике для образования выборок.

2. Треугольное распределение (Симпсона):
$f(x) = 2\left[1 - |a + b - 2x|/(b - a)\right]/(b - a)$, $x \in [a,b]$, $a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$; $m_X = (a + b)/2$; $D_X = (b - a)^2/24$; $\text{Mo} = (a + b)/2$. Является распределением суммы двух случайных величин, независимых, одинаково равномерно распределенных на промежутке $[a/2; b/2]$. Применяется при моделировании реальных распределений.

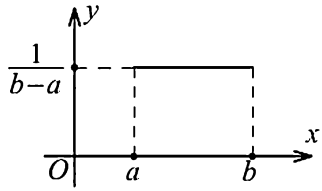


Рис. 3.1*. График плотности равномерного распределения*

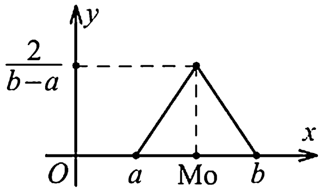


Рис. 3.2*. График плотности распределения Симпсона*

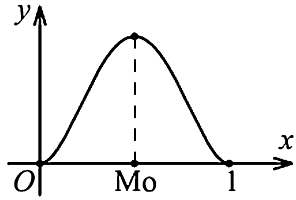


Рис. 3.3*. График плотности бета-распределения 1-го типа*

3. Бета-распределение 1-го типа: $f(x) = \mathrm{B}^{-1}(p,q)x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, $p > 0$, $q > 0$, $0 < x < 1$; $m_X = p/(p + q)$; $D_X = pq(p+q)^{-2}(p+q+1)^{-1}$; $\text{Mo} = (p - 1)/(p + q - 2)$ при $p \geq 1$, $q \geq 1$, $p + q > 2$. График при $p > 2$ и $q > 2$ – на рис. 3.3. Применяется при моделировании реальных распределений. При $p = q = 1$ переходит в равномерное распределение на $[0, 1]$.

ПРИЛОЖЕНИЕ II. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица I. Значения нормированной функции Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0.5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0.8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0.9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	34134	34375	34614	34849	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1.4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42785	42922	43056	43189
1.5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2.0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2.8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

x	3.0	3.5	4.0	5.0
$\Phi_0(x)$	0.49865	0.49977	0.499968	0.49999997

Таблица II. Квантили u_p нормального распределения $N(0,1)$

p	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
u_p	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Таблица III. Квантили $t_p(k)$ распределения Стьюдента $T(k)$

k **– число степеней свободы распределения;** p **– порядок квантили.**

$$f_T(x) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)(\pi k)^{-1/2}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-(k+2)/2}$$

k \ p	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.3
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.2
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Таблица IV. Квантили $\chi_p^2(k)$ распределения хи-квадрат $\chi^2(k)$

p – порядок квантили; k – число степеней свободы распределения

$k \backslash p$	0.90	0.95	0.99	$k \backslash p$	0.90	0.95	0.99
1	2.71	3.84	6.63	21	29.62	32.67	38.93
2	4.61	5.99	9.21	22	30.81	33.92	40.29
3	6.25	7.81	11.34	23	32.01	35.17	41.64
4	7.78	9.49	13.28	24	33.20	36.42	42.98
5	9.24	11.07	15.09	25	34.38	37.65	44.31
6	10.64	12.59	16.81	26	35.56	38.89	45.64
7	12.02	14.07	18.48	27	36.74	40.11	46.96
8	13.36	15.51	20.09	28	37.92	41.34	48.28
9	14.68	16.92	21.67	29	39.09	42.56	49.59
10	50.99	18.31	23.21	30	40.26	43.77	50.89
11	17.28	19.68	24.72	40	51.80	55.76	63.69
12	18.55	21.03	26.22	50	63.17	67.50	76.15
13	19.81	22.36	27.69	60	74.40	79.08	88.38
14	21.06	23.68	29.14	70	85.53	90.53	100.42
15	22.31	25.00	30.58	80	96.58	101.88	112.33
16	23.54	26.30	32.00	90	107.56	113.14	124.12
17	24.77	27.59	33.41	100	118.50	124.34	135.81
18	25.99	28.87	34.81				
19	27.20	30.14	36.19				
20	28.41	31.14	37.57				

Плотность вероятности распределения хи-квадрат $\chi^2(k)$:

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 2^{-k/2}\Gamma^{-1}(k/2)x^{(k-2)/2}e^{-x/2}, & x > 0. \end{cases}$$

Таблица V. Квантили $F_p(k_1, k_2)$ распределения Фишера $F(k_1, k_2)$

k_1, k_2 – числа степеней свободы; уровень значимости $\alpha = 0,05$.

$k_2 \backslash k_1$	4	6	12	24	30	40	60	120	∞
2	19.2	19.3	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	9.1	8.9	8.7	8.6	8.6	8.6	8.6	8.5	8.5
4	6.4	6.2	5.9	5.8	5.7	5.7	5.7	5.7	5.6
5	5.2	5.0	4.7	4.5	4.5	4.5	4.4	4.4	4.4
6	4.5	4.3	4.0	3.8	3.8	3.8	3.7	3.7	3.7
7	4.1	3.9	3.6	3.4	3.4	3.3	3.3	3.3	3.2
8	3.8	3.6	3.3	3.1	3.1	3.0	3.0	3.0	2.9
9	3.6	3.4	3.1	2.9	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7
10	3.5	3.2	2.9	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6	2.5
11	3.4	3.1	2.8	2.6	2.6	2.5	2.5	2.4	2.4
12	3.3	3.0	2.7	2.5	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3
13	3.2	2.9	2.6	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3	2.2
14	3.1	2.8	2.5	2.3	2.3	2.3	2.2	2.2	2.1
15	3.1	2.8	2.5	2.3	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1

16	3.0	2.7	2.4	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0
17	3.0	2.7	2.4	2.2	2.1	2.1	2.1	2.0	2.0
18	2.9	2.7	2.3	2.1	2.1	2.1	2.1	2.0	1.9
19	2.9	2.6	2.3	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9
20	2.9	2.6	2.3	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8
22	2.8	2.5	2.2	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8
24	2.8	2.5	2.2	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7
26	2.7	2.5	2.1	1.9	1.9	1.9	1.8	1.7	1.7
28	2.7	2.4	2.1	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7
30	2.7	2.4	2.1	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6
40	2.6	2.3	2.0	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.5
60	2.5	2.3	1.9	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.4
120	2.4	2.2	1.8	1.6	1.6	1.5	1.4	1.4	1.3
∞	2.4	2.1	1.8	1.5	1.5	1.4	1.3	1.2	1.0

Плотность вероятности распределения Фишера $F(k_1, k_2)$:

$$f_F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{k_2}{2}\right)\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{k_1/2} x^{(k_1/2)-1}\left(1+\frac{k_1}{k_2}x\right)^{-(k_1+k_2)/2}, & x > 0. \end{cases}$$

k_1, k_2 – натуральные числа.

Таблица VI. Равномерно распределённые случайные числа

98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33	50 50 07 39 98
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42,01	52 77 56 78 51
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10	68 71 17 78 17
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93	29 60 91 10 62
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68	23 47 83 41 13
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86	40 21 81 65 44
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53	14 38 55 37 63
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37	96 28 60 26 55
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 63 72 03	76 62 11 39 90	94 40 05 64 18
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22	54 38 21 45 98
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23	37 08 92 00 48
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40	42 05 08 23 41
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81	22 22 20 64 13
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39	28 70 72 53 15
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82	07 20 73 17 90
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93	42 58 26 05 27
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18	33 21 15 94 66
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92	92 92 74 59 73
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59	25 70 14 66 70
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63	05 52 28 25 62
04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35	65 33 71 24 72
00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91	23 28 72 95 29
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24	90 10 33 93 33
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92	78 56 52 01 06
46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47	70 61 74 29 41
32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57	85 39 41 18 38
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23	97 11 89 63 35
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06	84 96 28 52 07
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33	20 82 66 95 41

94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56	05 01 45 11 76
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07	35 44 13 18 80
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94	37 54 87 30 43
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98	94 62 46 11 71
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39	00 38 75 95 79
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27	77 93 89 19 36
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21	80 81 45 17 48
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55	36 04 09 03 24
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40	88 46 12 33 56
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46	25 02 00 99 94
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15	01 84 87 69 38

ОГЛАВЛЕНИЕ

Наталия Ивановна ЛОБКОВА,
Юрий Дмитриевич МАКСИМОВ,
Юрий Алексеевич ХВАТОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ И МЕНЕДЖЕРОВ

Учебное пособие

Под редакцией Ю. А. Хватова

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*
Ответственный редактор *С. В. Макаров*
Корректор *С. В. Николаева*
Выпускающий *В. А. Иутин*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д.1, лит. А.
Тел.: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 09.08.18.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 $^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 42,25. Тираж 100 экз.

Заказ № 514-18.
Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские технологии»
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.