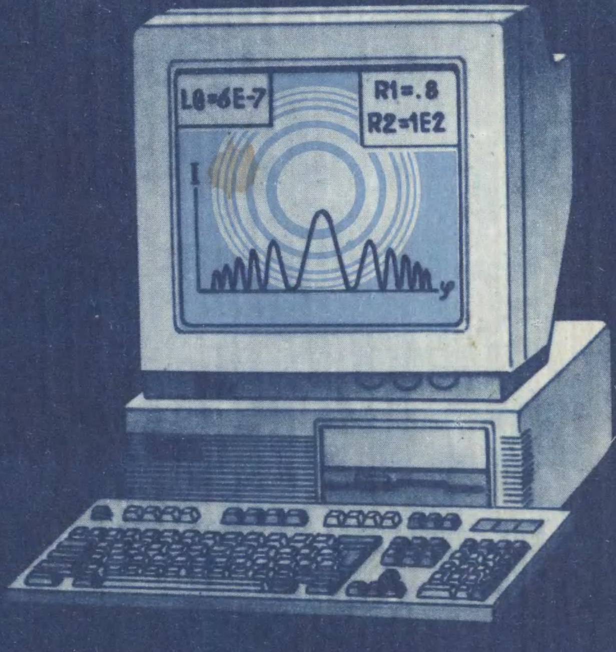
Учебное пособие для педагогических институтов

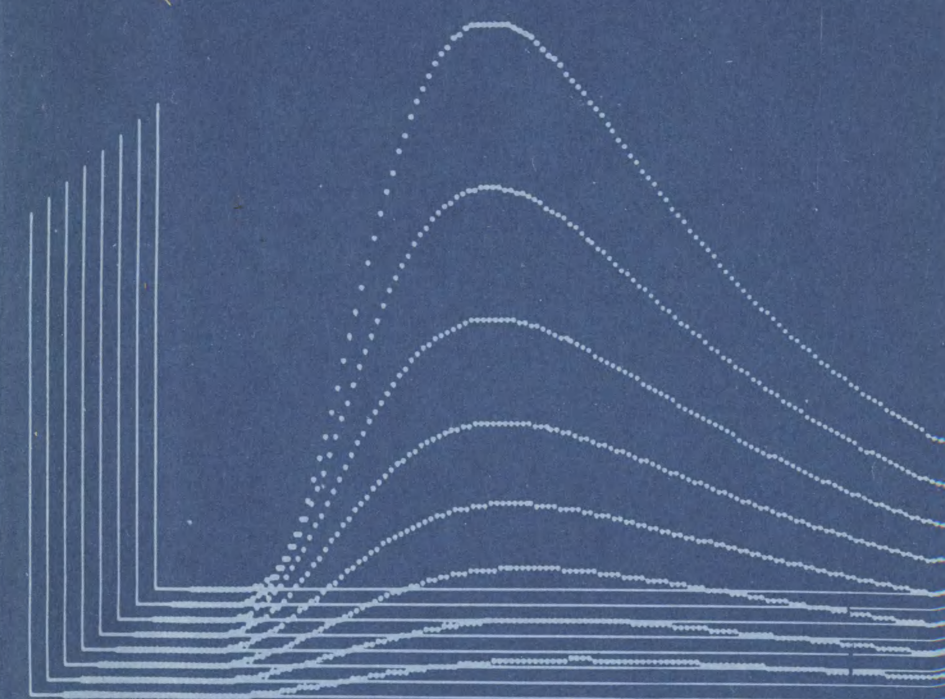
Э. В. Бурсиан

LIST-820
10 PRINT"
20 PRINT"
30 PRINT"
820 PRINT"

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРА



```
10 PRINT "PLANK1"
20 PRINT "СЕМЕЙСТВО КРИВЫХ ПЛАНКА"
30 C=3E8
40 K=1.38E-23
50 H=6.6E-34
60 L1=3E-8
70 M=1E8
80 M1=1E-9
90 SCREEN 2
110 FOR N=0 TO 7
120 X3=100-N*10
130 Y3=80-N*5
140 LINE (X3,Y3)-(X3+500,Y3),5
150 LINE (X3,Y3)-(X3,Y3+160),5
160 T=1700-N*100
170 FOR L=2E-7 TO 5E-6 STEP L1
180 Z=2*PI*C*C*H/L/L/L/L/L
190 W=H*C/K/T/L
200 R=Z/(EXP(W)-1)
210 PSET (X3+L*M,Y3+R*M1),8
220 NEXT L
230 NEXT N
240 GOTO 240
250 END
```



Э. В. Бурсиан

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРА

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию в качестве
учебного пособия для студентов
физико-математических факультетов
педагогических институтов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1991

ББК 22.3
Б91

Рецензенты: кафедра методики преподавания физики Азербайджанского педагогического института (зав. кафедрой чл.-кор. АПН СССР, профессор С. Ш. Иманов); кандидат физико-математических наук, доцент А. Н. Ломакович

Бурсиан Э. В.

Б91 Задачи по физике для компьютера: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов.— М.: Просвещение, 1991.— 256 с.: ил.— ISBN 5-09-003414-1.

В книге рассмотрен один из вариантов внедрения вычислительной техники в учебный процесс.

В ней даны задачи по всем разделам курса общей физики, которые методически целесообразно решать с помощью компьютеров.

Б $\frac{4309000000-538}{103(03)-91}$ 113—91 ББК 22.3

ISBN 5-09-003414-1

1. ВВЕДЕНИЕ

В существующих задачниках по общей физике задачи, требующие количественного расчета, подобраны так, чтобы их решения можно было найти аналитическим путем, т. е. путем использования определенных формул (или их комбинаций). Кроме того, обычно в целях экономии времени данные приводятся с небольшим числом значащих цифр, а значение искомой величины требуется вычислить в какой-либо одной точке. Формулы для вычислений предполагаются достаточно простыми (в кинематике движение считается равноускоренным, в динамике силы — постоянными, в электричестве цепи — не слишком разветвленными и т. д.). Приобретение навыков решения задач по физике по простым формулам совершенно необходимо. Причем для начального обучения эти задачи должны быть простыми. Именно поэтому столь широкое распространение получил задачник В. С. Волькенштейн. Однако в реальной жизни, на производстве мы сталкиваемся и с такими задачами, которые аналитическим путем не решаются или решаются очень сложно: например, груз качается на твердом подвесе с большой амплитудой, и надо найти период колебаний. При отклонениях до 90° погрешность вычислений по общеизвестной формуле для маятника, справедливой только для малых амплитуд, получается 20%, при отклонениях до 120° результат расходится с истиной в 1,5 раза! Практически ни одна реальная задача даже на динамику равномерного движения с трением не может быть решена аналитически (за исключением крайне медленных движений, когда сила вязкого трения пропорциональна первой степени скорости).

В связи с широким распространением дешевых и надежных программируемых калькуляторов (Б3-34, МК-56 и т. д.) и появлением в учебных заведениях диалого-вычислительных комплексов (персональных ЭВМ) возникла возможность рассматривать такие задачи, которые могут быть решены только с помощью вычислительной техники (вместе с составлением программы занимают у студента от 15 мин до 1 ч). К ним относятся:

1. Задачи, в которых *по одной и той же формуле* необходимо провести вычисления несколько раз, в частности при построении графиков, а также задачи с многократным решением квадратного уравнения.

2. Задачи, в процессе решения которых возникают уравнения высоких степеней или *трансцендентные* уравнения, которые легко решаются только численными методами.

3. Задачи, в которых предлагается найти *экстремумы* функций, если эти экстремумы невозможно найти аналитически.

4. Задачи, где необходимо найти определенный *интеграл*, вычисление которого возможно только численными методами.

5. Задачи по *оптимизации* простых конструкций и процессов.

6. Задачи, где необходимы численные методы обработки экспериментальной зависимости $y(x)$ (подбор функционального масштаба, аппроксимация *методом наименьших квадратов,* линейная экстраполяция, вычисление погрешностей и т. д.).

7. Задачи, приводящие к *дифференциальным уравнениям* (здесь применение численных методов часто значительно быстрее ведет к ответу, и даже в том случае, если дифференциальные уравнения решаются аналитически).

8. Задачи, где возникает необходимость решения *системы линейных* уравнений.

9. Задачи на *спектральный анализ* (разложение в ряд Фурье) и синтез функции по известному спектру.

Задачи типа 2. . .9 встречаются в курсе общей физики реже, чем типа 1, однако их надо разобрать для того, чтобы показать мощь численных методов и возможность находить решения любых уравнений, в частности дифференциальных как первого, так и второго порядков, а также возможность вычислять определенный интеграл от любых сложных функций и т. д. В специальных же отраслях науки и техники задачи этого типа встречаются очень часто (в реальных ситуациях уравнения всегда сложнее, чем в задачниках по общему курсу физики), и представление об их решении необходимо дать студенту.

Как можно быстрее надо допускать студента к вычислительному устройству (желательно на первом же занятии). После выполнения легких упражнений у студента сразу возникает убеждение в ценности вычислительной техники (ВТ), а главное, возникает уверенность в том, что работу на ней освоить нетрудно. И только после этого возникает интерес к освоению более сложных вопросов. Данное пособие и преследует цель: быстро привлечь студентов к ВТ решением вначале несложных задач.

В то же время преподавателю следует отдавать себе отчет в том, что возможности привлечения ВТ к использованию ее в курсе общей физики ограничены. Не следует на всех занятиях использовать программируемые калькуляторы и ЭВМ. Решение большинства физических задач не требует программирования. Более того, существенное значение при изучении физики имеют качественные задачи, где вообще никакие вычисления не нужны, а также задачи, где требуется оценка какой-либо величины с точностью до порядка. Разумная доза задач с применением ВТ, по-видимому, близка к 10. . .20% от общего числа задач. За рубежом используются пособия, близкие по назначению к данному задачнику [1], но более сложные.

Настоящее пособие рассчитано на студентов первых курсов, изучающих общую физику. В нем учитывается возможность большого разброса по уровню подготовки студентов, изучавших и не изучавших ранее информатику и вычислительную технику. Предлагаются задачи разной трудности, а решения — разной степени совершенства.

Методы, применяемые при решении большинства задач, являются простейшими, а с точки зрения вычислительной математики весьма грубыми. Однако начинать следует именно с таких методов. Этим достигаются две цели: кратчайшим путем учащиеся знакомятся с элементами программирования и ВТ; студент видит, что это несложно. После первых шагов, когда обучаемый понял основные идеи численных методов и у него возник интерес к этому мощному средству, которое «все может», он заинтересуется и тем, как можно улучшить и ускорить вычисления. Только тогда можно переходить к использованию более совершенных и более быстродействующих стандартных программ, принципы работы которых обычно сложны и понимать их уже необязательно (как необязательно понимать принцип работы телевизора для того, чтобы им пользоваться), но миновать указанную первую стадию нельзя. Попытка научить студента сразу более совершенным методам, чтобы потом не переучивать, как иногда считают, может привести к непониманию, формализму и потере интереса к предмету надолго, если не навсегда.

Все задачи (за исключением нескольких, где предлагается провести самостоятельное исследование) снабжены решениями на программируемом микрокалькуляторе (ПМК) типа Б3-34 или МК-61 и на диалого-вычислительном комплексе (ДВК) или персональных ЭВМ (ПЭВМ) на языке Бейсик. Решения первых задач даны очень детально, последних — менее подробно. Перед разделом «Решения» вставлены два вспомогательных раздела, которые позволяют не обращаться к каким-либо пособиям по информатике и ВТ.

Таблицы внесены в «Приложения» в конце пособия.

В отладке программ на машинах Д3-28, ДВК-2М, YAMACHA и др. на различных версиях языка Бейсик принимали участие Р. Х. Калимуллин, Н. А. Швецов, О. И. Федоров, Е. А. Ефставьева.

2. ЗАДАЧИ

В этом основном разделе приведены 11 тренировочных абстрактных упражнений и 131 задача по различным темам курса физики. Главное пожелание читателю: хотя к большинству задач в следующих разделах даны подробные решения, не торопитесь этими решениями пользоваться. Если задачу не удается решить самостоятельно, воспользуйтесь указанием к ней (там, где оно есть), посмотрите введение к соответствующему параграфу, изучите разделы 3 и 4. Только в крайнем случае прибегайте к разделу 5. Помните, что даже несовершенное, но самостоятельное решение во много раз ценнее заимствованного.

И еще один совет: общайтесь с машиной по возможности «один на один». Только самостоятельный диалог с машиной может обеспечить компьютерную грамотность.

2.1. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Приведенные в этом разделе задачи являются чисто математическими упражнениями без физического содержания, решения которых познакомят студента с приемами вычислений, составлением наипростейших программ и использованием вычислительных устройств.

2.1.1. Перевод градусов в радианы. Постройте программу для перевода градусов в радианы и сделайте таблицу перевода от 0 до 180° через каждые 5°.

2.1.2. Многократные вычисления по формуле. Найдите площади кругов диаметрами 0,1; 0,2; 0,3; ...; 1 м.

2.1.3. Квадратное уравнение. Как будет меняться корень квадратного уравнения $1{,}1x^2+bx+0{,}9=0$ при изменении b от -10 до $+10$?

2.1.4. Трансцендентное уравнение. Найдите корни уравнения $2\,\mathrm{th}\,x=x$.

2.1.5. Интегрирование. Найдите $I_1=\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx,\ I_2=\int\limits_3^5 e^{-x^2}dx.$

2.1.6. Интегрирование. Найдите $\int\limits_1^2 x^{1,5}\sin^5 x dx.$

2.1.7. Экстремум. Найдите максимум функции $f(x)=\dfrac{x^3}{e^x+1}$.

2.1.8. Система линейных уравнений. Решите систему уравнений

$$0{,}123x+0{,}184y+0{,}172z=0{,}101;$$
$$0{,}503x+0{,}058y+0{,}082z=0{,}086;$$
$$2{,}71x+8{,}53z=2{,}83.$$

2.1.9. Дифференциальное уравнение. Решите дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}=\sin 2{,}1x$, если при $x=0$ $y=2{,}3$.

2.1.10. График синусоиды на графическом дисплее. Постройте на экране графики синусоиды и косинусоиды (разными цветами).

2.1.11. График модулированной синусоиды. Постройте график функции $y=\cos \omega t \cos \Omega t$, где $\omega=10\Omega$.

2.2. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

В этом разделе приведены задачи, которые приходится решать, проводя любые измерения и исследуя на опыте какие-либо зависимости, в частности оформляя отчеты по лабораторным работам.

При решении таких задач следует руководствоваться разделами 4.9 и 4.10.

2.2.1. Погрешность непосредственного измерения. Величина измерялась 8 раз, и были получены значения: 10,1; 10,0; 10,1; 10,2; 10,0; 9,9; 9,8; 10,0. Считая ошибку случайной, обусловленной разбросом полученных значений, определите абсолютную (доверительный интервал с вероятностью 95%) и относительную ошибки в процентах.

2.2.2. Класс точности прибора. При измерении массы m по шкале с пределами 0. . .$3\cdot10^{-5}$ г были получены следующие значения: $1{,}27\cdot10^{-5}$; $1{,}25\cdot10^{-5}$; $1{,}26\cdot10^{-5}$; $1{,}20\cdot10^{-5}$; $1{,}22\cdot10^{-5}$; $1{,}24\cdot10^{-5}$; $1{,}26\cdot10^{-5}$ г. Класс точности прибора 0,1. Найдите m и укажите погрешность.

2.2.3. Класс точности прибора. Какое следует указать значение погрешности для массы m, если те же числа, что и в предыдущей задаче, получены по шкале с такими же пределами на приборе класса точности 2,0?

2.2.4. Погрешность косвенного результата. В лабораторной работе необходимо найти величину F, пользуясь формулой $F=B\,\mathrm{tg}\,\gamma/D^2$. Для исходных величин на опыте получены значения: $B=97{,}1\pm0{,}3$; $D=(4{,}3\pm0{,}7)\cdot10^{-2}$; γ измеряется с точностью до 0,05°. Как будут меняться результат измерения и погрешность при изменении γ от 0 до 50°?

2.2.5. Аппроксимация зависимости. В лабораторной работе исследовалась зависимость величины y от величины x. Получен следующий ряд значений:

x	2	3	3,5	5	5,5	6	7	7,7
y	5	10	20	25	35	40	40	51

Предполагается, что величина y должна зависеть от величины x линейно: $y=ax+b$.

Методом наименьших квадратов (см. раздел 4.10) проведите наилучшим образом прямую через экспериментальные точки и найдите наиболее вероятные значения a и b. Условие задачи и найденную прямую покажите на графике.

2.2.6. Функциональный масштаб. При исследовании зависимости $J(\varphi)$ получены следующие результаты:

φ	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
J	0,11	0,72	5,0	32	220

Из теории явления можно ожидать, что J зависит от φ экспоненциально: $J=Ae^{B\varphi}$. Такая зависимость угадывается также по приведенным выше данным (быстрое нарастание J при незначительном изменении φ). Методом наименьших квадратов (см. раздел 4.10) найдите наиболее вероятные значения A и B.

2.3. КИНЕМАТИКА

1. При движении по прямой линии скорость $v_x=dx/dt$, ускорение $a_x=dv_x/dt\equiv d^2x/dt^2$, так что

$$v_x=\int a_x dt=\begin{cases} v_{0x}+a_x t & \text{(при } a_x=\text{const — равноускоренное движение);} \\ v_{0x} & \text{(при } a_x=0 \text{ — равномерное движение)} \end{cases}$$

$$x=\int v_x dt=x_0+v_{0x}t+a_x t^2/2 \quad (\text{при } a_x=\text{const}).$$

2. При двумерном движении аналогичные соотношения служат для вычислений y, v_y, a_y.

Для получения уравнения траектории следует исключить время t и найти выражение для $y(x)$.

2.3.1. Свободное падение. Найдите положения свободно падающего тела в первую и последующие секунды (до 20 с после начала падения).

2.3.2. Вертикальный полет камня. Камень брошен вертикально вверх со скоростью v_0. Через какое время от начала движения он пройдет высоту H? Как зависит ответ от значений скорости v_0 и высоты H?

2.3.3. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Начертите траектории тела, брошенного под углом к горизонту (от 10 до 70° через каждые 20°) с начальными скоростями 20 м/с и 30 м/с. Сопротивление воздуха не учитывать.

Указание. Запишите отдельно зависимости скорости и пути от времени в проекциях на оси x и y. Из полученных уравнений найдите время подъема (от начала движения до момента, когда скорость $v_y=0$), время спуска, высоту подъема y_{max} и дальность полета x_{max}. Исключив из выражений $y(t)$ и $x(t)$ время t, получите траекторию $y(x)$.

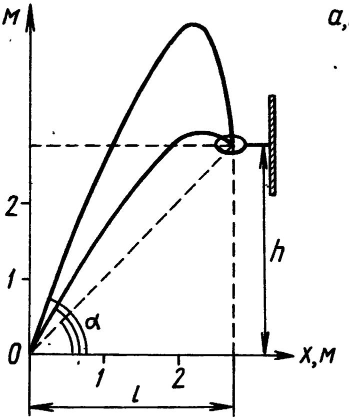


Рис. 1

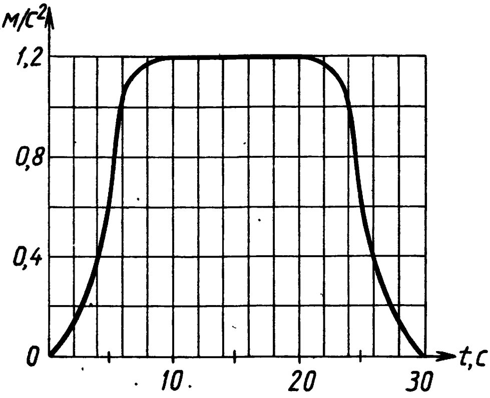


Рис. 2

2.3.4. Баскетбол. С какой скоростью и под каким углом следует бросить мяч (рис. 1), чтобы попасть в баскетбольное кольцо? Сопротивление воздуха и диаметр мяча не учитывать; $l = h = 2{,}5$ м.

Указание. Получите уравнение траектории $y(x)$; подставив $x = l$, $y = h$, выведите связь между углом бросания α и необходимой скоростью v_0.

2.3.5. Ускорение транспорта. Если на поезд метро при начале движения сразу начала бы действовать постоянная сила, то пассажиры ощутили бы резкий толчок. Чтобы этого не происходило, силу тяги, а следовательно, и ускорение увеличивают (а при достижении необходимой скорости уменьшают) постепенно, например так, как показано на рисунке 2. Найдите скорость и путь, проделанный поездом в промежутке от 0 до 30 с через каждые 2 с, взяв данные об ускорении из графика.

Указание. Напишите выражение для ускорения как производную от скорости по времени и воспользуйтесь сказанным в разделе 4.6.

2.3.6. Дифференцирование и интегрирование графиков движения. Даны значения скорости, которые имеет тело в каждую последующую секунду, начиная от 0 до 40 с. Изобразите на экране графического дисплея графики скорости $v(t)$, пути $s(t)$ и ускорения $a(t)$.

Указание. Воспользуйтесь соотношениями: $a = (v_{n+1} - v_n)/\Delta t$, $s = \int_0^t v(t)\,dt$ (см. раздел 4.3).

2.4. ДИНАМИКА ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. В соответствии со вторым законом Ньютона напишем уравнение движения:

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = F \quad (\text{при } m = \text{const}). \qquad (2.4.1)$$

Сила (сумма сил) в правой части может быть постоянной, а может зависеть от координаты, скорости, времени и т. д. Это дифференциальное уравнение, которое аналитически легко решается только в простейших случаях. Общий же численный метод, пригодный в любых ситуациях (хотя и приближенный), дан в разделах 4.6 и 4.7. Используя данные там рекомендации, получаем приближенные уравнения:

$$\Delta v \approx F(x,\ v,\ t,\ \ldots)\,\Delta t/m;\quad v_{n+1}=v_n+F(x,\ v,\ t,\ \ldots)\,\Delta t/m; \tag{2.4.2}$$

$$\Delta x \approx v\Delta t;\quad x_{n+1}=x_n+v\Delta t. \tag{2.4.3}$$

Если известны начальные условия x_0, v_0 при $t=0$, то формулы (2.4.2), (2.4.3) позволяют найти, какими будут v_1, x_1 через время Δt, затем v_2, x_2 еще через Δt и т. д. При этом время для каждой следующей пары значений v_{n+1} и x_{n+1} будет равно:

$$t_{n+1}=t_n+\Delta t. \tag{2.4.4}$$

Правда, это процесс длительный (промежутки времени Δt должны быть достаточно малыми) и без вычислительной техники, способной быстро выполнять большое число однообразных операций, расчеты просто невозможны. Применение же простейших вычислительных устройств (например, ПМК) позволяет сравнительно легко решать интересные задачи, например задачи, где надо учитывать силу трения, зависящую от скорости (вязкое трение). При малых значениях скорости эта сила пропорциональна ей, при больших — начинает зависеть от нее, причем тем больше, чем скорость больше (рис. 3). Это отклонение от линейной зависимости можно отразить добавлением кубического члена:

$$F_{\text{тр}}=Av+Bv^3 \tag{2.4.5}$$

(иногда пишут $F_{\text{тр}}=Av+Bv^2+\ldots$, но тогда при смене знака скорости знак второго слагаемого не изменится, что не соответствует истине; поэтому следует разлагать $F_{\text{тр}}$ в ряд по нечетным степеням v).

При равномерном движении левая часть уравнения (2.4.1) равна нулю. Это ведет к обычному алгебраическому уравнению. Если степень уравнения выше двух, то следует использовать рекомендации, приведенные в разделе 4.4.

2. Сила тяготения равна:

$$F=G\,\frac{m_1m_2}{r^2}, \tag{2.4.6}$$

где

$$G=6{,}7\cdot10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2.$$

3. Уравнение движения тела переменной массы M, например, ракеты со скоростью u истечения газов и расходом топлива в секунду μ (уравнение Мещерского):

$$M\Delta v+\mu\Delta t u=F\Delta t, \tag{2.4.7}$$

где F — внешняя сила, например сила тяготения. Важно соблюдать правило знаков. Выбрав положительное направление оси x, остальные величины следует считать положительными или отрицательны-

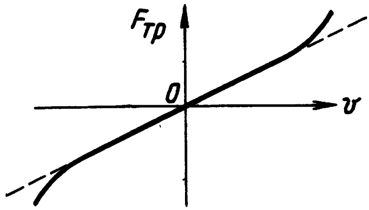


Рис. 3

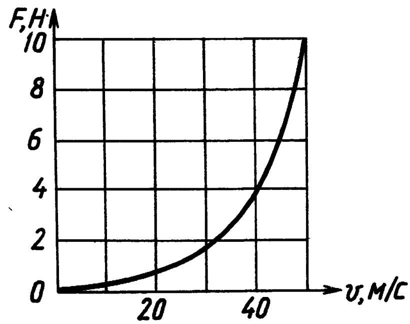


Рис. 5

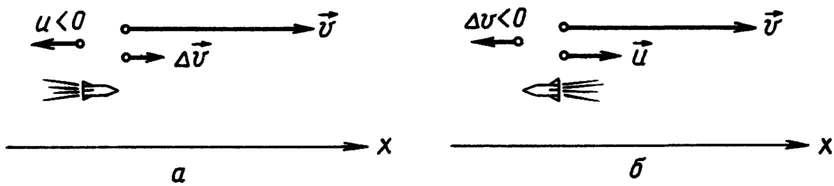


Рис. 4

ми в зависимости от того, как они направлены: вдоль оси x или в противоположную сторону (на рисунке 4, *а* изображен случай ускорения ракеты; на рисунке 4, *б* — ее торможение: ракета при торможении выбрасывает струю газов вперед, в результате чего ее скорость уменьшается).

Уравнение Мещерского относительно $x(t)$ — это также дифференциальное уравнение второго порядка ($\Delta v/\Delta t \approx dv/dt = d^2x/dt^2$) и тоже решается методом, приведенным в разделах 4.6 и 4.7.

Следует обратить внимание на то, что в задачах технического содержания (2.4.4, 2.4.6, 2.4.10 и др.) данные приведены не в СИ, а в тех единицах, которые используются на практике, в частности на транспорте. Так, сила тяги локомотива и массы вагонов всюду указываются в тоннах. При решении задачи на динамику движения необходимо уметь разбираться, где имеется в виду масса, а где сила, и перед решением задачи переводить все данные в СИ (1 т силы $=9\,800$ Н, 1 т массы $=10^3$ кг). Вес в 1 т на поверхности Земли (при $g=9{,}8$ м/с^2) соответствует 1 т массы (в меру точности задания g).

2.4.1. Равномерное движение поезда. С какой максимальной скоростью тепловоз, развивающий силу тяги 25 т, может вести состав массой 2 000 т? Учесть трение по формуле (2.4.5). Коэффициенты равны: $A=10^4$ кг/с; $B=30$ кг·с/м^2. Какую мощность при этом развивает тепловоз?

Указание. Напишите уравнение движения (см. вводную часть раздела). Далее воспользуйтесь разделом 4.4. Получив ответ, исследуйте, как будет меняться скорость при изменении силы тяги, коэффициента B и т. д.

2.4.2. Лодка на веслах. Постройте график зависимости скорости равномерного движения лодки от средней силы тяги, развиваемой гребцами, если сила вязкого трения характеризуется коэффициентами: $A=40$ кг/с; $B=32$ кг·с/м^2.

2.4.3. Моторная лодка. Постройте график зависимости скорости равномерного движения моторной лодки от мощности установленного мотора. Коэффициенты в формуле (2.4.5) равны:

$$A=40 \text{ кг/с}; \; B=32 \text{ кг}\cdot\text{с/м}^2.$$

Указание. Запишите выражение для мощности через силу и скорость. Найденную из этого выражения силу подставьте в уравнение движения. Полученное биквадратное уравнение решите с помощью раздела 4.1.

2.4.4. Мощность теплохода. Морское судно водоизмещением 20 000 т имеет двигательную установку мощностью 15 000 кВт. Найдите его максимальную скорость, если для судов такого типа трение о воду характеризуется коэффициентами: $A\approx 1{,}5\cdot 10^4$ кг/с; $B\approx 1{,}3\cdot 10^3$ кг·с/м^2. Постройте график мощности, которую должна развить силовая установка, от требуемой скорости равномерного движения. Насколько надо увеличить мощность, чтобы скорость была 45 км/ч? Почему так не делают?

2.4.5. Экономика морского рейса (простейшая задача на оптимизацию). Необходимая сила тяги для судна очень сильно зависит от его скорости. С одной стороны, для развития большой скорости нужно много топлива, что дорого, а с другой — при очень медленном движении возрастают расходы на зарплату экипажу и на фрахтовку судна. С какой скоростью следует вести судно, если стоимость фрахтовки судна и зарплата экипажу за единицу времени равны σ_1, а стоимость топлива за 1 кг равна σ_2? Сила сопротивления воды $F_{тр}=Av+Bv^3$ (для морского теплохода водоизмещением 20 тыс. т коэффициенты $A=1{,}5\cdot 10^4$ кг/с; $B\approx 1{,}3\cdot 10^3$ кг·с/м^2). Работа, производимая силовой установкой, равна $\eta q m$, где η — КПД; q — теплотворная способность топлива; m — масса топлива. Как оптимальная скорость зависит от изменения соотношения σ_1/σ_2? Начертите рекомендательный график экономически оптимальной скорости для капитана.

Указание. Найдите общее выражение для стоимости рейса длительностью t и общим расходом топлива m. Приравняв работу против сил трения работе, получаемой за счет сжигания топлива, найдите m и подставьте в первое выражение. Минимум стоимости найдите, приравняв нулю производную от стоимости по скорости и решив полученное уравнение относительно v.

2.4.6. Ускорение трамвая. Трамвай развивает силу тяги 1,5 т при массе 10 т. Сила сопротивления равна Av, где v — скорость; $A=10^3$ кг/с — коэффициент пропорциональности. Через какое время от начала движения можно считать движение трамвая практически равномерным?

Указание. Сведите задачу к решению дифференциального уравнения второго порядка (см. раздел 4.7). Это относится и к решению следующих задач.

2.4.7. Падение шарика в масле. Шарик массой $m=2{,}2$ г и радиусом $r=4{,}1$ мм падает в масле, встречая силу сопротивления, равную $6\pi r\eta v$, где коэффициент вязкости жидкости $\eta=0{,}95$ кг/м·с; v — скорость. Найдите зависимости скорости, ускорения и пути от времени падения шарика.

Почему при постановке такого опыта на практике с данными параметрами результаты эксперимента хорошо согласуются с теорией, а при увеличении радиуса шарика той же плотности всего в 3 раза получаются данные, резко расходящиеся с теорией?

2.4.8. Падение тела в воздухе. Тело массой $m=70$ кг падает в воздухе с большой высоты. Сила сопротивления воздуха $F_{\text{тр}}=Av+Bv^3$, где коэффициенты A и B определяются размерами тела. Пусть эти коэффициенты равны следующим значениям: $A=5$ Н·с/м; $B=10^{-2}$ Н·с^3/м^3. Найдите скорость в зависимости от времени, прошедшего после начала падения. Начертите график.

2.4.9. Прыжок с парашютом. Названные в задаче 2.4.8 величины A и B годятся и для задачи, в которой парашютист делает затяжной прыжок (долго не раскрывая парашют). Пусть прыжок выполняется с высоты 7 км. Оцените приблизительно, как долго парашютист может не раскрывать парашют. До земли должно остаться не менее 1 км и не менее 0,5...1 мин запаса времени.

2.4.10. Ускоренное движение поезда. Скорость. Какую скорость наберет товарный состав массой 2 000 т при силе тяги тепловоза 25 т за первую минуту от начала движения? Дайте два ответа: без учета трения и с учетом вязкого трения о воздух и в осях по формуле (2.4.5) при $A=10^4$ Н·с/м; $B=30$ Н·с^3/м^3.

2.4.11. Ускоренное движение поезда. Путь. На какое расстояние за 3 мин отойдет от остановки состав массой 2 000 т, ведомый тепловозом силой тяги 25 т? Дайте два ответа: без учета трения и с учетом вязкого трения о воздух и в осях по формуле (2.4.5) при $A=10^4$ кг/с; $B=30$ кг·с/м^2.

2.4.12. Движение тела при силе трения, заданной численно. Пусть зависимость силы сопротивления воздуха от скорости для тела данной формы дана не аналитически, т. е. не в виде формулы, а только в виде графика (рис. 5). Начертите график зависимости скорости от времени без учета и с учетом сопротивления воздуха.

Указание. Задача аналогична предыдущим, но в каждом цикле придется в программе предусматривать остановку для ввода численного значения силы.

2.4.13. Соскальзывание цепи. На столе лежит цепь, часть ее свешивается через край стола вниз. Общая длина цепи l, длина свешивающейся части x, общая масса m. Найдите время соскальзывания цепи, если коэффициент трения о стол равен k.

Указание. Напишите уравнение движения, в котором результирующей силой будет разность между силой тяжести, действующей на свешивающуюся часть цепи, и силой трения о стол части, остающейся в данный момент на столе. Будет ли движение ускоренным, равноускоренным?

2.4.14. Старт ракеты. Ракета массой 300 т стартует с Земли. Через какое время она достигнет высоты 40 км, если ежесекундно выбрасывает 1 000 кг продуктов сгорания со скоростью $u=4$ км/с?

Указание. Познакомьтесь с уравнением движения тела переменной массы (уравнением Мещерского) по какому-либо курсу механики. Запишите приращение (убывание) массы за время Δt, приращения скорости, пути и времени. Составьте программу, в которой через каждый промежуток времени Δt будут вычисляться эти величины. Учтите зависимость силы тяготения от высоты.

2.4.15. Посадка на Луну. Лунный модуль массой 1 т приближается к Луне со скоростью 1 км/с с расстояния 50 км по прямой, соединяющей их центры. На модуле есть топливо, продукты сгорания которого двигатель выбрасывает со скоростью 4 км/с. Как следует управлять расходом топлива (в кг/с), чтобы обеспечить мягкую посадку (при сближении с поверхностью Луны скорость должна быть близка к нулю)?

Указание. Задача похожа на предыдущую, но нужно внимательно проследить за знаком скорости лунного модуля, а также за знаком скорости выбрасываемых продуктов сгорания (так, чтобы замедлять падение, а не ускорять его!). Решение задачи зависит от желаемого режима посадки (движение равнозамедленное, неравнозамедленное).

2.5. ДИНАМИКА ДВУМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Решение задач на двумерное движение в принципе не отличается от решения задач на динамику одномерного движения, если удачно выбрана прямоугольная система координат и правильно составлены уравнения движения, аналогично тому, как это делалось в разделе 2.4, но для каждой оси в отдельности, например для случая силы трения, пропорциональной скорости, имеем

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x-A\frac{dx}{dt}; \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y-A\frac{dy}{dt}. \tag{2.5.1}$$

Решение этих дифференциальных уравнений ведется точно так же, как в разделе 2.4, т. е. используя приемы, приведенные в разделах 4.6 и 4.7. Этим методом, хотя и приближенно, на ПМК или ПЭВМ можно решать интересные задачи, причем решения доступны даже малоподготовленному пользователю, поскольку программы очень простые. В то же время большинство приведенных ниже задач обычными аналитическими методами решить невозможно.

2. Для космических траекторий вблизи тяготеющих масс (планет, звезд):

$$F=G\frac{mM}{r^2}; \quad \frac{F_x}{F}=\frac{a-x}{r}; \quad \frac{F_y}{F}=\frac{p-y}{r}; \tag{2.5.2}$$

$$r^2=(a-x)^2+(p-y)^2; \quad 6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Смысл расстояния a и прицельного расстояния p показывает рисунок 6. Моделирование космических траекторий возможно методами теоретической механики. Известно, например, что в поле центральной силы тело двигается по эллипсу, параболе или гиперболе и их параметры можно рассчитать, имея начальные условия (удобнее пользоваться полярными координатами). Однако, владея математическим анализом и аналитической геометрией, удается решить только простейшие задачи, например без трения. Описываемый же здесь метод пригоден для любых движений под действием любых сил, лишь бы они были известны или их можно было бы как-то вычислить.

2.5.1. Полет камня без учета силы трения. Камень массой 200 г брошен под углом α к горизонту со скоростью 20 м/с. Начертите траекторию без учета сопротивления воздуха. Как меняются максимальная высота подъема и дальность полета камня при изменении угла от 10 до 80°? Начертите графики.

Указание. Вернитесь к вводной части данного раздела. Задачи 2.5.1 и 2.5.2 следует рассматривать лишь как вспомогательные к последующим задачам.

2.5.2. Полет бумажки без учета силы трения. Как изменятся результаты решения предыдущей задачи, если бросать не камень, а скомканную бумажку массой 20 г?

2.5.3. Моделирование баллистической кривой. Камень массой 200 г брошен под углом 45° к горизонту со скоростью $v_0=20$ м/с. Найдите его траекторию, если сила сопротивления воздуха $F_{тр}=Av$, где коэффициент $A=0{,}1$ Н·с/м. Сравните ее с траекторией, получающейся без учета сопротивления воздуха (см. задачу 2.5.1).

2.5.4. Моделирование баллистической кривой. Учет кубического члена. Как изменится траектория, полученная в предыдущей задаче, если учесть, что сила сопротивления воздуха $F_{тр}=Av+Bv^3$, коэффициент $B=10^{-3}$ Н·с^3/м^3?

2.5.5. Полет бумажки с учетом трения. Скомканная бумажка массой 20 г брошена так же, как камень в предыдущих задачах. При полете она встречает сопротивление воздуха $F_{тр}=Av+$ $+Bv^3$, где коэффициенты равны:

$$A=0{,}1\ \text{Н·с/м};\ B=10^{-3}\ \text{Н·с}^3/\text{м}^3.$$

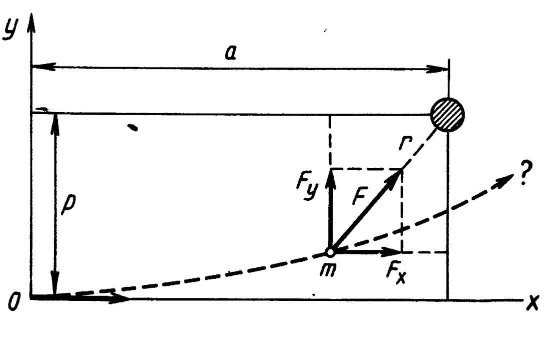


Рис. 6

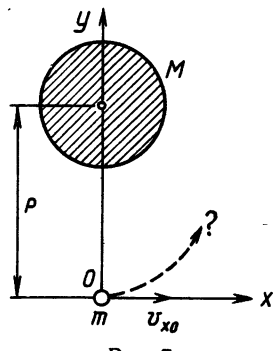


Рис. 7

Найдите траекторию и сравните с ответом задачи 2.5.4. Почему масса тела так сильно сказывается на результате?

2.5.6. Дальность полета. Как меняются максимальная дальность полета и время полета комка бумаги массой 20 г в зависимости от угла бросания? Начальная скорость комка бумаги равна 20 м/с, сила трения $F_{тр}=Av$, где коэффициент $A=0{,}1$ Н·с/м. Кубический член не учитывать.

Указание. В отличие от предыдущих задач здесь следует в программе организовать циклы с автоматическим наращиванием угла α.

2.5.7. Оптимальный угол бросания бумажки. Найдите оптимальный угол бросания комка бумаги, используя условие задачи 2.5.6, для получения максимальной дальности полета.

Указание. Кроме автоматического наращивания угла α, организуйте остановку программы, когда дальность полета (x_{max}) начнет убывать.

2.5.8. Оптимальный угол бросания камня. Под каким углом к горизонту следует бросить камень массой 200 г со скоростью 20 м/с, чтобы дальность полета была наибольшей, если сила сопротивления воздуха $F_{тр}=Av+Bv^3$ ($A=0{,}1$ Н·с/м; $B=10^{-3}$ Н·с^3/м^3)? Сравните со случаем, когда сопротивление воздуха не учитывается.

2.5.9. Приближение к Луне. Космический объект массой 1 000 кг подлетает к Луне. Когда расстояние a становится равным $2{,}1\cdot10^4$ км (см. рис. 6), а прицельное расстояние $p=7\cdot10^3$ км, то скорость объекта $v_{x_0}=1{,}5\cdot10^3$ м/с. Рассчитайте траекторию полета вблизи Луны. Масса Луны равна $7{,}3\cdot10^{22}$ кг, радиус Луны равен $1{,}7\cdot10^3$ км.

Указание. Напишите уравнения движения по оси x и по оси y с учетом зависимости силы притяжения от расстояния. Решайте в соответствии с рекомендациями разделов 4.6 и 4.7.

2.5.10. Траектории вблизи Луны. Пусть скорость тела v_{x_0} (рис. 7) перпендикулярна направлению на центр Луны. Прицельное расстояние $p=5\cdot10^3$ км. Как будет двигаться тело при скоростях 500 м/с, 1 000 м/с, 1 500 м/с? Радиус Луны равен $1{,}7\cdot10^3$ км.

2.5.11. Моделирование различных космических траекторий. Задавая различные значения для величин p, a, v_{x_0} (см. данные задачи 2.5.9 и 2.5.10 и рисунки 6 и 7), исследуйте вопрос о движении тела вблизи Луны (или Земли) более подробно. (Для самостоятельного длительного задания, например для курсовой работы.)

2.5.12. Посадка спутника в атмосфере. Спутник Земли массой 1 т вошел в атмосферу на высоте 300 км со скоростью $v_{x_0}=7{,}9$ км/с, параллельной поверхности Земли. Атмосфера тормозит полет силой, равной Av, где для простоты расчетов выражение A/m не зависит от высоты и равно 10^{-4} с$^{-1}$. Начертите траекторию посадки. Радиус Земли равен 6 370 км, масса Земли равна $5{,}96\cdot10^{24}$ кг.

2.5.13. Болид. Каменная глыба (болид) массой 1 т приближается из космоса к планете, у которой радиус $R=1{,}74\cdot10^6$ м, масса $m=7{,}3\cdot10^{22}$ кг и толщина атмосферы $h=1{,}26\cdot10^6$ м. Пусть трение в атмосфере характеризуется силой Av, причем $A/m=5\cdot10^{-4}$ с$^{-1}$. (Положим, что коэффициент A не зависит от высоты, хотя, конечно, несложно было бы и учесть эту зависимость, если она известна.) Начертите траекторию болида при следующих начальных условиях: расстояние $a = 1 \cdot 10^7$ м, прицельное расстояние $p = 3{,}5 \cdot 10^6$ м, скорость $v_{x_0} = 1\,700$ м/с (см. рис. 6) — без учета и с учетом трения.

Указание. Составляя программу с постепенным наращиванием x, y, t и т. д., введите строки вычисления r. Поставьте условие: когда $r \leqslant R + h$, сила вычисляется с учетом трения.

2.6. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Уравнения вращательного движения тела относительно некоторой оси сходны с уравнениями поступательного движения при условии следующей замены (рис. 8):

путь s — угол φ;

скорость $v = \dfrac{ds}{dt}$ — угловая скорость $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$;

ускорение $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ — угловое ускорение $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$;

масса m — момент инерции I;

сила $\vec{F}$ — момент силы $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$; $M = rF \sin \alpha$.

Таким образом, уравнение поступательного движения $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ (второй закон Ньютона), где $\vec{p} = m\vec{v}$, переходит в уравнение

$$\vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt}; \quad \vec{N} = I\vec{\omega}. \tag{2.6.1}$$

Поэтому можно пользоваться программами, аналогичными тем, которые применялись при решении задач раздела 2.4.

2. Формулы для нахождения момента инерции I в простейших случаях:

$I = mr^2$ — материальная точка или колесо, основная масса которого распределена по ободу;

$I = (1/3)\, ml^2$ — стержень, если ось вращения проходит через конец стержня и перпендикулярна ему;

$I = \dfrac{2}{5} mR^2$ — шар, если ось вращения проходит через его центр.

3. При вращении на оси с жидкой смазкой (вязкое трение) момент тормозящих сил зависит от скорости:

$$M_{\text{тр}} = -a\omega - b\omega^3 \tag{2.6.2}$$

(см. аналогию в разделе 2.4).

2.6.1. Маятник. Груз на невесомом жестком подвесе длиной $l = 0{,}5$ м колеблется с большой амплитудой. Как зависит период колебаний от величины максимального угла отклонения?

Указание. Сделайте чертеж и найдите из него момент силы, возвращающей маятник в положение равновесия из такого положения, где угол отклонения равен φ. Напишите уравнение вращатель-

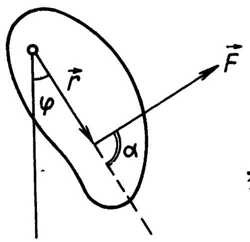


Рис. 8

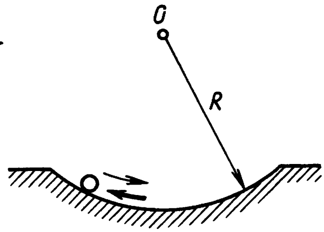


Рис. 9

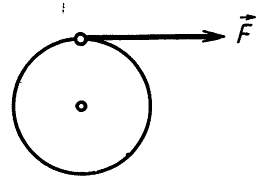


Рис. 10

ного движения (см. вводную часть данного раздела). Решайте дифференциальное уравнение методами, данными в разделах 4.6 и 4.7.

2.6.2. Шарик в лунке. Шарик радиусом $r=2$ см катается в сферической ямке радиусом $R=10$ см (рис. 9). Найдите зависимость периода колебаний от величины начального отклонения.

Указание. Учтите, что шарик движется не только по окружности радиусом R, но и вращается вокруг своей оси.

2.6.3. Падение карандаша. Сколько времени падает карандаш длиной $l=18$ см, поставленный на острие? Считайте, что карандаш неизбежно вначале отклонен от вертикали. Это отклонение равно 1°.

Указание. Сделайте чертеж и напишите уравнение вращательного движения для данного случая. Для решения этой и последующих задач используйте разделы 4.6 и 4.7.

2.6.4. Падение столба. Постройте график зависимости угла от времени для падения спиленного столба высотой 10 м. Считайте, что вначале он был отклонен от вертикального положения на 10°.

2.6.5. Падение дерева. Начертите график зависимости угловой скорости от времени для падающего спиленного дерева высотой 15 м. Начальное отклонение от вертикального положения 10°. Считайте дерево однородным стержнем.

2.6.6. Еще раз о падении дерева. Определите время падения дерева, находящегося под углом наклона 10° относительно вертикали, до угла наклона 45°; от 45 до 90°. Высота дерева 15 м.

2.6.7. Остановка колеса. Колесо массой 1 кг, распределенной по ободу радиусом 0,35 м, вращается с угловой скоростью 10,5 рад/с на оси с жидкой смазкой и тормозится только трением в оси. Коэффициенты в формуле (2.6.2) равны: $a=2{,}8\cdot10^{-2}$ Н·м·с; $b=9{,}1\cdot10^{-4}$ Н·м·с^3. Колесо останавливается, когда угловая скорость становится равной 0,1 рад/с (захват трением покоя). Найдите время и количество оборотов до остановки.

Указание. Напишите уравнение вращательного движения (см. вводную часть данного раздела). Далее воспользуйтесь методом, данным в разделах 4.6 и 4.7, но при наращивании угловой скорости ω поставьте условие: $\omega\leqslant0{,}1$.

2.6.8. График торможения колеса. Начертите график зависимости угловой скорости колеса от времени, имея данные условия задачи 2.6.7.

2.6.9. Еще раз об остановке колеса. Как в задаче 2.6.7 время вращения колеса зависит от его массы? Начертите график.

2.6.10. Равномерное вращение колеса. С какой угловой скоростью ω вращается колесо, если к его ободу по касательной приложена постоянная сила $F=5$ Н (рис. 10)? Остальные данные возьмите из условия задачи 2.6.7.

Указание. Напишите уравнение движения и учтите, что $\omega = \text{const}$, т. е. $d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2 = 0$. Далее воспользуйтесь разделом 4.4.

2.6.11. Еще раз о равномерном вращении. Постройте график зависимости скорости равномерного вращения колеса (параметры можно взять из задачи 2.6.7) от силы, приложенной касательно к ободу. Объясните форму графика.

2.7. КОЛЕБАНИЯ

1. Уравнение гармонического колебания физической величины X с циклической частотой ω и амплитудой A:

$$X = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{2.7.1}$$

где φ — начальная фаза. Вместо ω может быть использовано $2\pi/T$, где T — период колебаний. Уравнение затухающих колебаний:

$$X = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi), \tag{2.7.2}$$

где A_0 — начальная амплитуда, а $A_0 e^{-\delta t}$ — текущая; δ — коэффициент затухания. Вместо δ часто используют логарифмический декремент затухания $\Delta = \delta T$ (он равен натуральному логарифму отношения двух последующих амплитуд колеблющейся величины в одну и ту же сторону).

2. Вычислительная техника дает возможность вычислять по формулам (2.7.1) и (2.7.2) многократно и вычерчивать серию графиков для разных значений параметров. Наиболее интересное применение вычислительной техники — это разложение в спектр немонохроматического, но периодического колебания (см. раздел 4.8 и задачи 2.7.2, 2.7.3 этого раздела).

2.7.1. Затухающие колебания. Колебания тела происходят по закону: $X = A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0)$. Пусть $\delta = 0{,}01$ с$^{-1}$; период колебаний 1 мин; $A_0 = 3$ см; $\varphi_0 = \pi/2$. Найдите положения тела в промежутке времени 0...5 мин. Начертите график. Исследуйте, к чему приводит изменение каждого из четырех параметров. A_0, δ, T (и, следовательно, $\omega = 2\pi/T$) и φ_0.

Указание. Используйте раздел 3.16.

2.7.2. Асимметричный маятник. К бревну радиусом $R = 20$ см в верхней точке прикреплен один конец нити длиной $L = 1$ м. К другому концу нити прикреплен груз. Нить приведена в горизонтальное положение. Найдите период колебаний и траекторию груза, если этот груз отпустить (рис. 11). Будут ли колебания гармоническими, периодическими? Как зависят ответы от соотношения между R и L?

Указание. Могут быть два решения этой задачи. *Динамическое решение* можно получить, записав уравнение динамики для

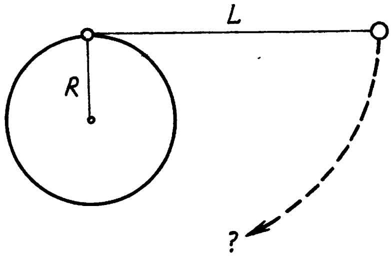


Рис. 11

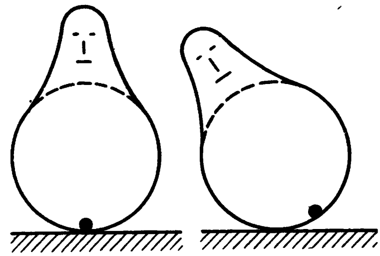


Рис. 12

вращательного движения: $M = dN/dt$, где M — момент силы в данный момент времени; N — момент импульса ($N = I\omega$, где I — момент инерции; ω — циклическая частота). Следует только учесть, что I тоже переменная величина, и при дифференцировании брать производную от произведения. Далее решение дифференциального уравнения следует организовать, пользуясь рекомендациями разделов 4.6 и 4.7.

Другое решение (энергетическое) можно найти, используя закон сохранения энергии (при условии отсутствия потерь на трение): линейную скорость в любом положении можно находить из соотношения $mv^2/2 = mgy$, где y — смещение груза по вертикали.

2.7.3. Игрушка «Раскидай». На тонком резиновом шнуре длиной 0,5 м подвешен небольшой шарик массой 50 г. Качнув эту игрушку, называемую «Раскидай», в сторону, резко дергают подвес горизонтально в противоположном направлении. Это равносильно такой постановке задачи: как будет двигаться шарик, если его оттянуть от неподвижной точки в горизонтальном направлении на 0,3 м и отпустить? Пусть при равновесии в вертикальном положении шнур растягивается грузом на 0,2 м.

Указание. Изобразите игрушку «Раскидай» в некотором произвольном положении, а также силы, действующие на нее со стороны Земли и растянутой нити. Найдите их проекции на горизонтальную и вертикальную оси и напишите уравнения движения по каждой оси. Далее используйте разделы 4.6 и 4.7.

2.7.4. Принцип соответствия на примере игрушки «Раскидай» и математического маятника. В физике существует гносеологически важный принцип: если законы твердо установлены для некоторой области явлений, то при расширении этой области (например, при существенном изменении значений величин) эти законы (формулы) могут оказаться иными. Однако им надо быть такими, чтобы при старых значениях величин они переходили бы в старые законы (формулы). Пример: формулы теории относительности переходят в формулы классической физики при малых скоростях ($v/c \to 0$). Примените этот принцип к предыдущим задачам 2.7.2 и 2.7.3. Покажите, что для малорастяжимой нити (большом K) случай игрушки «Раскидай» переходит в случай математического маятника (см. задачу 2.6.1).

Асимметричный маятник (см. задачу 2.7.2) при $R \to 0$ должен превратиться в обычный математический (симметричный) маятник с периодом колебаний $T=2\pi\sqrt{L/g}$ (при малых амплитудах — см. задачу 2.6.1).

Указание. В программе для расчета траектории «Раскидая» следует предположить: L=1,0001 * LØ, а L1=1,00005*LØ. Удаляя или вводя те или иные строки, найдите период колебаний и траекторию.

2.7.5. Игрушка ванька-встанька. Эта игрушка имеет сферическое основание радиусом $R=5$ см (рис. 12), внутри ее к нижней точке прикреплен груз (считайте его сосредоточенным в этой точке), остальные части игрушки невесомые. Как будет колебаться ванька-встанька, если его поставить на горизонтальную поверхность и отклонить от вертикали на угол $\alpha=45°$? Будут ли колебания периодическими, гармоническими? Зависит ли период колебаний от амплитуды? Какими будут колебания, если за каждый период колебаний теряется 20% энергии на трение?

Указание. Воспользуйтесь уравнением вращательного движения твердого тела вокруг мгновенной оси (точки касания поверхности):

$$\vec{M}=\frac{d\vec{N}}{dt};\quad N=I\omega.$$

Учтите, что момент инерции I не константа, и дифференцировать момент импульса N надо как произведение двух переменных.

2.7.6. Спектральный анализ. Проверьте работоспособность программ для спектрального анализа на таком примере: найдите спектр функции $y=3\sin\omega t+\cos 3\omega t$, где $\omega=17{,}1\ \text{с}^{-1}$.

Изобразите спектр функции $y(t)$ на бумаге (экране дисплея). Задайте сами любую периодическую функцию и найдите ее спектр.

Указание. Используйте раздел 4.8.

2.7.7. Спектр звука. Звук струны улавливают микрофоном, подключенным к осциллографу. На экране видна кривая, изображенная на рисунке 13. Одна клеточка по горизонтали соответствует 0,239 мс. Каковы основной тон и первые обертоны струны? Нарисуйте спектр.

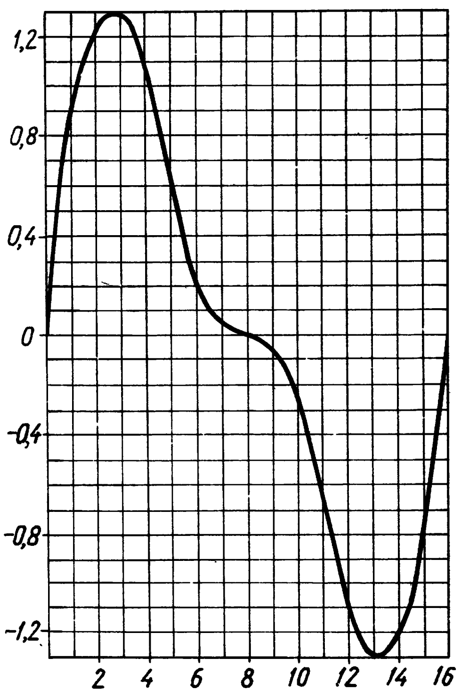


Рис. 13

Нарисуйте сами на миллиметровой бумаге любой периодический сигнал. Найдите спектр.

2.7.8. Фигуры Лиссажу. Продемонстрируйте на экране дисплея сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний с разными амплитудами, частотами, а также различной разностью фаз между ними.

2.8. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

1. Число молекул газа Δn, имеющих скорости в пределах от v до $v+\Delta v$, по Максвеллу равно:

$$\Delta n = \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} n e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} 4\pi v^2 \Delta v. \qquad (2.8.1)$$

Доля молекул, имеющих скорости в этом интервале, равна $\Delta n/n$. Она зависит от величины интервала Δv. Более удобно пользоваться величиной $\Delta n/(n\Delta v)$. Это доля молекул, имеющих скорости в единичном интервале (от v до $v+1$):

$$\frac{\Delta n}{n\Delta v} = \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} 4\pi v^2. \qquad (2.8.2)$$

Формула упрощается, если ввести относительную скорость $u \equiv v/v_{\text{в}}$, где $v_{\text{в}} = \sqrt{2RT/M}$ — наиболее вероятная скорость (R — газовая постоянная; M — молекулярная масса):

$$\frac{\Delta n}{n\Delta u} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2. \qquad (2.8.3)$$

Эта величина не зависит ни от температуры, ни от состава газа.

2. При различных (политропических) процессах в идеальном газе можно записать

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \qquad (2.8.4)$$

где γ — показатель политропы; $\gamma = 1$ соответствует изотермическому процессу.

3. При больших плотностях газа (больших давлениях, малых объемах, а именно таких, что газ близок к сжижению) состояние вещества описывается уравнением Ван-дер-Ваальса (для 1 моля или 1 кмоля, от чего зависит величина R: $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К) $= 8{,}3 \cdot 10^3$ Дж/(кмоль·К)):

$$(p + a/V_0^2)(V_0 - b) = RT. \qquad (2.8.5)$$

Соотношение (2.8.5) не годится для насыщенного пара и для двухфазной системы, когда часть насыщенного пара превращается в жидкость.

2.8.1. Распределение Максвелла. Начертите график зависимости $\Delta n/(n\Delta u)$ (доля молекул, имеющих относительные скорости от u до $u+1$) от скорости u.

Указание. Воспользуйтесь формулой (2.8.3) и рекомендациями раздела 3.16.

2.8.2. Зависимость распределения молекул по скорости от температуры. Начертите график зависимости $\Delta n/(n\Delta v)$ от скорости v для кислорода при температуре $T=300$ К. Измените темературу. Как изменится при этом распределение?

2.8.3. Доля молекул, имеющих определенные скорости. Найдите долю молекул азота, имеющих скорости от 700 до 2 000 м/с при температуре 20 °С. Измените температуру. Как изменится эта доля молекул?

2.8.4. Политропа. Начертите кривую зависимости $V(p)$ для политропического процесса, если показатель политропы равен 1,28. Давление меняется от 0,2 до 3 атм. Меняйте показатель политропы от 1 (изотерма) до 1,5. Как меняется вид кривых?

2.8.5. Кривая Ван-дер-Ваальса. Начертите кривые функции $p(V_0)$ для количества вещества реального газа (азота), равного 1 кмоль и имеющего поправки $a=1{,}36\cdot10^5$ Н·м^4/кмоль^2 и $b=3{,}85\cdot10^{-2}$ м^3/кмоль при разных температурах. Газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К) $=8{,}3\cdot10^3$ Дж/(кмоль·К).

2.8.6. Объем азота. Найдите объем азота массой 200 г при давлении $p=100$ атм. Поправки a и b возьмите из предыдущей задачи.

2.8.7. Давление насыщенного пара. Пользуясь приведенной ниже таблицей, подберите аналитическую зависимость, по которой меняется давление насыщенного водяного пара от температуры:

t, °С	−5	0	5	10	15	20	25
$p_{н\cdot п}$, 10^2 Па	3,96	6,02	8,61	12,1	16,8	23,0	31,3

2.8.8. Вязкость глицерина. Подберите закон, по которому меняется вязкость глицерина от температуры, если на опыте получилось следующее:

t, °С	−42	−20	0	20	30
η, сантипуаз	$6{,}71\cdot10^6$	$1{,}34\cdot10^5$	$1{,}21\cdot10^4$	$1{,}49\cdot10^3$	$6{,}29\cdot10^2$

Методом наименьших квадратов подберите наилучшие значения параметров.

2.9. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

При решении этих задач используют закон Кулона для точечных зарядов:

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\quad(\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}\ \text{Ф/м}),\qquad(2.9.1)$$

определение напряженности электрического поля $\vec{E}$:

$$\vec{E}=\vec{F}/q, \qquad (2.9.2)$$

где q — заряд, на который действует сила $\vec{F}$. Также используют понятия о силовой линии (линия, касательная к которой в любой точке дает направление вектора напряженности $\vec{E}$) и об эквипотенциальной поверхности как геометрического места точек, где потенциал одинаков. Потенциал φ точек поля, создаваемого точечным зарядом Q, равен:

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}. \qquad (2.9.3)$$

Существует связь между напряженностью $\vec{E}$ и потенциалом φ для любого электростатического поля:

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi=-\left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right), \qquad (2.9.4)$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты вдоль осей x, y, z.

2.9.1. Закон Кулона. Постройте график зависимости силы взаимодействия двух зарядов ($q_1=5\cdot10^{-8}$ Кл и $q_2=3\cdot10^{-8}$ Кл) в вакууме от расстояния r между ними в диапазоне изменения этого расстояния от 1 до 10 см.

Если бы вы на опыте проверяли этот закон, то на какой график наносили бы точки?

2.9.2. Моделирование силовых линий электрического поля. Два одноименных заряда. Начертите силовые линии в пространстве между двумя одинаковыми зарядами $q_1=q_2=10^{-8}$ Кл, находящимися друг от друга на расстоянии $l=0{,}2$ м. Начните с силовой линии, исходящей от заряда q_1 под углом 30° к прямой, соединяющей эти заряды.

Указание. Сделайте чертеж и найдите для некоторой точки силы, действующие на пробный заряд со стороны зарядов q_1 и q_2. Найдите проекцию результирующей силы $\vec{F}$ на ось x, т. е. F_x, и на ось y — F_y. Силовая линия — это такая кривая, касательная к которой в любой точке совпадает с направлением силы. Поэтому $dy/dx=F_y/F_x\equiv f(x, y)$. Для решения этого дифференциального уравнения используйте раздел 4.6.

2.9.3. Силовые линии. Два разноименных заряда. В отличие от предыдущей задачи $q_2=-q_1=-10^{-8}$ Кл. Начертите силовые линии.

2.9.4. Моделирование эквипотенциальных поверхностей. Одноименные равные заряды. Для ситуации, данной в задаче 2.9.2, начертите эквипотенциальные поверхности (их сечения плоскостью, в которой лежат оба заряда).

Указание. Напишите выражение для суммы потенциалов, создаваемых зарядами, и приравняйте значению потенциала φ, соответствующего какой-либо потенциальной поверхности. Приведите уравнение к виду $F(x, y)=0$. Сведите его к уравнению $F(y)=0$, за-

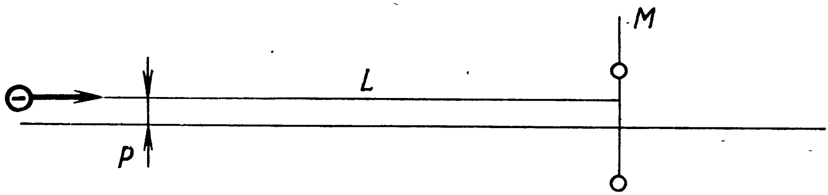


Рис. 14

дав определенное значение x. Уравнение решите, используя рекомендации раздела 4.4. Таким способом найдите ряд значений следующих пар: (x_1, y_1); (x_2, y_2) и т. д. Через эти точки и проходит эквипотенциальная поверхность для выбранного вами значения φ. Аналогично найдите поверхность для другого потенциала φ.

2.9.5. Эквипотенциальные поверхности. Разноименные заряды. Начертите эквипотенциальные поверхности для ситуации, данной в задаче 2.9.3.

2.9.6. Тема для самостоятельного исследования. Исследуйте методом, приведенным в решении задач 2.9.1. . .2.9.5, силовые линии и эквипотенциальные поверхности для трех (и более) разных зарядов, расположенных в одной плоскости.

2.9.7. Траектория электрона (модель электронной лампы). В плоскости M (рис. 14) на расстоянии $A=2$ мм друг от друга лежат две положительно заряженные тонкие проволоки с линейной плотностью заряда $\rho=-4\cdot10^{-9}$ Кл/м. В направлении, перпендикулярном этой плоскости, с расстояния L приближается электрон с начальной скоростью V. Какие возможны варианты его траектории при различных значениях V, ρ, P?

Указание. Начало координат возьмите в середине между проволоками. Затем возьмите некоторую точку в правой части чертежа $(x>0)$ и, пользуясь формулой напряженности $E=\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}$, найдите силы, действующие на электрон, а также проекции этих сил на оси x и y. Составьте уравнения движения по осям. Далее руководствуйтесь разделами 4.6 и 4.7. Приращение времени Δt должно быть много меньше, чем время полета L/V, например $\Delta t=10^{-11}$ с. Вывод результата сделайте через 100 или 10 таких Δt. Для изображения траекторий на дисплее воспользуйтесь рекомендациями раздела 3.16.

2.10. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Для решения задач этого раздела необходимо знать элементарные формулы законов постоянного тока, в том числе законы Кирхгофа для разветвленных цепей: 1) Для любого узла выполняется условие:

$$\sum i=0 \qquad (2.10.1)$$

с соблюдением правила для токов (входящие в узел токи считаются положительными, выходящие из узла — отрицательными). Если направления токов заранее неизвестны, то они выбираются произвольно. Если на самом деле какой-либо ток течет в другую сторону, то он считается отрицательным. Так, выбирая направления токов, как показано на рисунке 15, следует писать

$i_1+i_2+i_3=0$ — для верхнего узла;

$-i_1-i_2-i_3=0$ — для нижнего узла (второе уравнение новой информации не дает и должно быть отброшено).

2) Для любого контура

$$\sum \mathscr{E}=\sum (iR),$$

где $\mathscr{E}$ — все ЭДС; R — все сопротивления, встречающиеся на пути обхода. Ток и ЭДС считают положительными, если они совпадают с направлением обхода контура, которое выбирается произвольно: например для случая, изображенного на рисунке 15, выбрав все направления обхода по часовой стрелке, имеем

$$\begin{cases} \mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2=i_1r_1-i_3(r_2+R); \\ \mathscr{E}_2-\mathscr{E}_3=i_2(r_2+R)-i_3r_3; \\ \mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3=i_1r_1-i_3r_3. \end{cases}$$

(Одно из уравнений следует отбросить, так как оно является комбинацией других.)

Для решения получающейся системы уравнений следует использовать раздел 4.2.

2.10.1. Закон Ома для участка цепи. Закон Ома $i=\frac{1}{R}U$ означает пропорциональность между напряжением и током, что будет иметь место только при условии: коэффициент пропорциональности $1/R$ есть константа, не зависящая от силы тока i. В дейст-

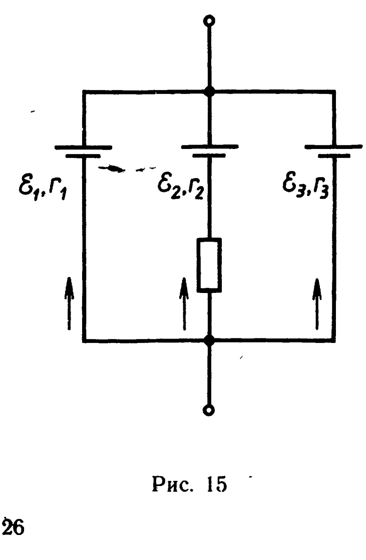


Рис. 15

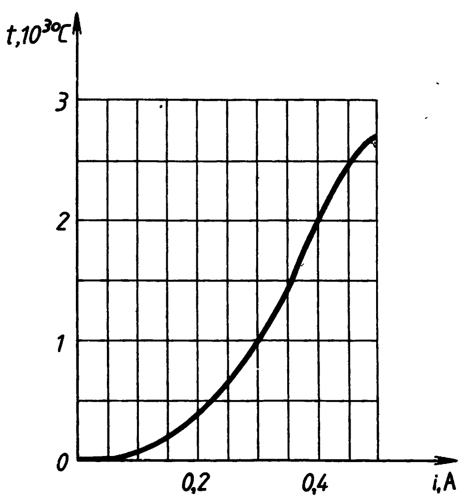


Рис. 16

вительности закон Ома почти никогда строго не выполняется, даже для металлического проводника (не говоря уже о полупроводниках, а тем более о полупроводниковых или электровакуумных устройствах). Например, ток нагревает металлический провод, и его сопротивление меняется так, что пропорциональность между силой тока i и напряжением U уже не имеет места. Зависимость температуры вольфрамовой нити некоторой конкретной лампочки от силы тока i показана на рисунке 16; сопротивление $R=R_0(1+\alpha t)$, где R_0 — сопротивление при температуре, равной 0 °C; температурный коэффициент линейного расширения $\alpha=5{,}1\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$. Начертите вольт-амперную характеристику, т. е. график $i(U)$, для лампочки сопротивлением $R_0=50$ Ом.

Указание. Удобнее вычислить напряжение U для каждого значения тока i, а затем для получения зависимости $i(U)$ поменять оси координат.

2.10.2. Нагрузочная характеристика источника тока. Источник тока исследовали путем подключения к нему различных резисторов (нагрузок), измерения силы тока i и напряжения U на клеммах источника. Получены следующие данные:

i, А	0,06	0,11	0,125	0,16	0,22	0,23	0,27	0,29	0,375	0,40
U, В	4,8	4,8	4,4	4,1	4,0	3,3	3,6	3,2	3,0	2,05

Обработайте данные методом наименьших квадратов и определите ЭДС ($\mathscr{E}$), ток короткого замыкания $i_к$ и внутреннее сопротивление источника.

Указание. Используйте раздел 4.5.

2.10.3. Последовательное соединение резисторов. Последовательно соединены резистор из металлической проволоки и полупроводниковый резистор. Температурные зависимости их сопротивлений таковы:

$$R_м=R_0\alpha T;\quad R_п=R_0'\exp\left[W/(kT)\right], \qquad (2.10.1)$$

где

$R_0=125$ Ом; $R_0'=5{,}86\cdot10^{-2}$ Ом; $\alpha=4\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$; $W=4{,}8\cdot10^{-20}$ Дж; $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К. Определите, при какой температуре общее сопротивление будет минимальным.

2.10.4. Параллельное соединение резисторов. Найдите температуру, при которой параллельное соединение двух резисторов (см. задачу 2.10.2) будет иметь максимальное сопротивление.

2.10.5. Разветвленная цепь. В цепи, изображенной на рисунке 15, $\mathscr{E}_1=2{,}015$ В, $r_1=0{,}013$ Ом; $\mathscr{E}_2=2$ В, $r_2=0{,}017$ Ом; $\mathscr{E}_3=2{,}031$ В, $r_3=0{,}021$ Ом; $R=5{,}37$ Ом. Найдите все токи и разность потенциалов на клеммах.

Указание. Используйте раздел 4.2.

2.10.6. Разветвленная цепь с меняющимся параметром. Как будет меняться ответ предыдущей задачи при плавном изменении сопротивления R от 3 до 5,7 Ом?

2.10.7. Ток эмиссии. Плотность тока насыщения при термоэлектронной эмиссии из горячего катода в электровакуумном приборе меняется по закону:

$$j_н = BT^2 \exp[-A/(kT)], \qquad (2.10.2)$$

где энергия активации $A = 4$ эВ; коэффициент $B = 1{,}3 \cdot 10^5$ А/м^{2}К^2. Найдите температуру, при которой плотность тока $j_н = 100$ мА/мм^2.

Указание. Решение ведет к трансцендентному уравнению. Используйте раздел 4.4.

2.11. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1. Напряженность магнитного поля, $\overrightarrow{dH}$, создаваемая элементом тока $(i\overrightarrow{dl})$ в точке A на расстоянии $\vec{r}$ от dl (рис. 17), по закону Био — Савара — Лапласа равна:

$$\overrightarrow{dH} = \frac{[(i\overrightarrow{dl}), \vec{r}]}{4\pi r^3}; \quad |\overrightarrow{dH}| = \frac{idl \sin\alpha}{4\pi r^2}. \qquad (2.11.1)$$

Направление $\overrightarrow{dH}$ определяется по правилу правого винта (на рисунке — от читателя за бумагу). Общее $\vec{H}$, создаваемое всем проводом с током, находится интегрированием.

2. Общий магнитный поток в неразветвленном магнитопроводе (рис. 18) равен:

$$\Phi = \frac{iN\mu_0}{\Sigma\left(\frac{l}{\mu S}\right)}, \qquad (2.11.2)$$

где S, l, μ — площадь поперечного сечения, длина и проницаемость каждого участка, а N — общее число витков провода с силой тока i, охватывающих магнитопровод. Для каждого сечения $\Phi = BS$, где B — магнитная индукция.

Индуктивность многослойной катушки находится по приближенной формуле

$$L \approx \mu_0 \mu^* \frac{D^2 N^2}{3D + 9l + 10t}, \qquad (2.11.3)$$

где D, l и t — размеры, указанные на рисунке 19; N — число витков; μ^* — некоторое эффективное μ, которое может быть меньше относительной проницаемости сердечника μ; без сердечника μ^* равно 1.

2.11.1. Магнитное поле витка. Найдите напряженность магнитного поля в центре плоского витка с током (рис. 20; $i = 1$ А; $R = 1$ м) и на расстоянии a от центра в плоскости витка.

Как следует рисовать силовые линии витка, т. е. какой из рисунков 21, *а, б, в* ближе к истине?

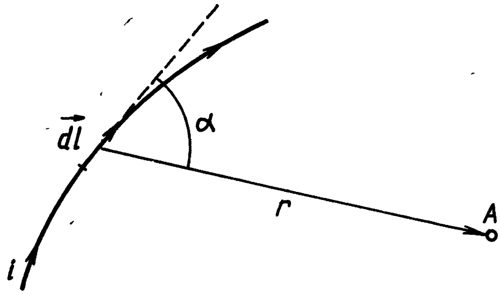


Рис. 17

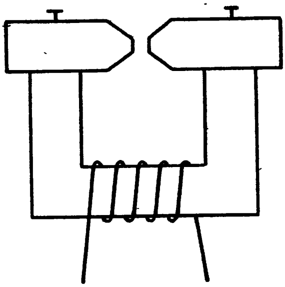


Рис. 18

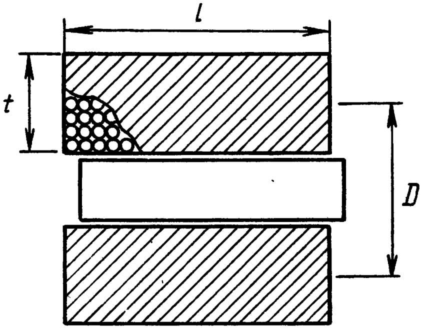


Рис. 19

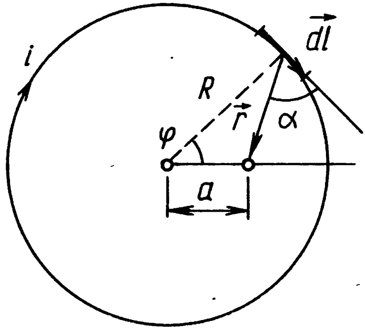


Рис. 20

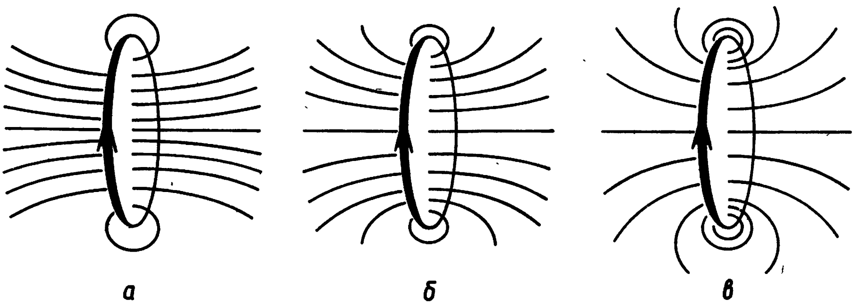


Рис. 21

Указание. Воспользуйтесь законом Био — Савара — Лапласа. Сведите выражение для $d\vec{H}$ к одной переменной φ (см. рис. 20), проинтегрируйте от $\varphi=0$ до π и удвойте результат. Интеграл рекомендуется брать численно по одной из программ, приведенных в разделе 4.3. Предусмотрите в программе переход к новой точке A на другом расстоянии a, и так от $a=0$ до $a=R$.

2.11.2. Электромагнит. В электромагните, общая длина которого 83 см, катушка имеет намотку из 1 000 витков, а площадь поперечного сечения сердечника равна 100 $см^2$. Сила тока в обмотке имеет значение 0,2 А; 10 $см^2$ — площадь поперечного сечения зазора между наконечниками. Определите (см. рис. 18), как зависит величина индукции в зазоре от ширины этого зазора. Магнитную проницаемость сердечника считать равной 1 200.

2.11.3. Расчет катушки индуктивности. На каркас диаметром $\delta=8$ мм и длиной $l=3$ см (см. рис. 19) надо намотать провод диаметром 0,2 мм так, чтобы получить катушку индуктивностью $L\approx1$ мГн. Сколько надо намотать витков и какова должна быть толщина t намотки?

Указание. Учтите, что общее число витков $N=mn$, где m — число слоев намотки, а n — число витков в одном слое. Выразите t и l через m, n и диаметр провода. Составьте на основе формулы (2.11.3) уравнение относительно N и решите его, пользуясь разделом 4.4.

2.11.4. Движение заряженной частицы в магнитном поле ($\vec{v}\perp\vec{B}$). Частица массой $9\cdot10^{-31}$ кг и зарядом $+1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл влетает в магнитное поле индукцией $B=0{,}1$ Тл перпендикулярно силовым линиям поля. Найдите траектории движения частицы при разных начальных скоростях: от $0{,}2\cdot10^7$ до $1{,}6\cdot10^7$ м/с.

2.11.5. Движение частиц в магнитном поле, если вектор скорости $\vec{v}$ не перпендикулярен вектору магнитной индукции $\vec{B}$. Такие же частицы, как и в предыдущей задаче, влетают в такое же магнитное поле, но под разными углами к силовым линиям. Начертите траектории.

Указание. Разложите вектор скорости $\vec{v}$ на два составляющих вектора: вектор $\vec{v}_1$, перпендикулярный вектору $\vec{B}$, и вектор $\vec{v}_2$, параллельный $\vec{B}$. Движение со скоростью $\vec{v}_1$ сведется к решению предыдущей задачи, а движение со скоростью $\vec{v}_2$ будет равномерным, так как поле индукцией $\vec{B}$ не действует на этот составляющий вектор скорости. Таким образом, задача заключается в некотором расширении программы для предыдущей задачи (добавляют смещение по третьей координате y).

Сложность заключается в изображении этой трехмерной траектории на плоском экране. Здесь следует воспользоваться рекомендациями, данными в конце раздела 3.16.

2.11.6. Тема для самостоятельного исследования. Составьте программу для моделирования движения заряженной частицы в неоднородном магнитном поле. Покажите, что в отличие от случая задачи 2.11.5 частица не просто будет двигаться по спирали, а входя в область более сильного поля, будет из него выталкиваться и поворачивать назад (элемент «магнитной ловушки»).

Указание. Сила Лоренца содержит векторное произведение $[\vec{v}, \vec{B}]$. Разложите эту силу на составляющие, зная правила нахождения проекций векторного произведения. Составьте три дифференциальных уравнения движения по каждой из осей x, y и z.

2.12. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ И ПЕРЕМЕННЫЕ ТОКИ

Для неразветвленной цепи переменного тока (рис. 22) справедливы следующие соотношения:

$$
\begin{gathered}
z=\sqrt{R^2+[\omega L-1/(\omega C)]^2};\\
i=U/z;\ \cos\varphi=R/z;\\
P=i^2R;\ U_C=i/(\omega C);\\
U_L=i\omega L;\ \omega=2\pi f,
\end{gathered}
\qquad (2.12.1)
$$

где z — полное сопротивление переменному току; φ — сдвиг по фазе между током и напряжением; P — активная мощность; f — частота; U_C и U_L — напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности соответственно. Резонанс напряжений возникает при $\omega L=1/(\omega C)$.

При решении задач 2.12.6. . .2.12.12 следует пользоваться материалом раздела 4.8.

2.12.1. Резонанс напряжений. Как будут меняться напряжения на конденсаторе (см. рис. 22), на катушке индуктивности, ток в цепи, мощность и $\cos\varphi$ при подаче на вход цепи синусоидального напряжения 20 В и при изменении частоты этого напряжения от 0 до 2 МГц ($R=10$ Ом; $L=14{,}2$ мкГн; $C=1{,}2$ нФ)?

2.12.2. Дроссель. В лабораторной работе исследовался тороидальный дроссель по схеме, показанной на рисунке 23. Длина сердечника дросселя $l=10$ см, сечение $S=1$ см^2, число витков $N=1\,000$. При изменении напряжения на частоте 50 Гц получены следующие показания приборов:

U, В	43,9	50,2	51,0	51,6	53,5	54,6	55,3	58
i, А	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
P, Вт	0,06	0,24	0,55	0,98	1,52	2,20	3,04	3,97

Найдите зависимости $z(i)$, $L(i)$, $\mu(i)$, $\cos\varphi(i)$ и $R(i)$ и постройте соответствующие графики.

2.12.3. Колебательный контур. Частота колебаний LC-контура, имеющего активное сопротивление R, меняется по закону:

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}. \qquad (2.12.2)$$

Начертите график зависимости $f(R)$ при $L=1$ и $L=2$ мГн; $C=0{,}97$ мкФ.

2.12.4. Зарядка конденсатора пульсирующим током. От сети переменного тока напряжением 220 В, частотой 50 Гц через однополупериодный выпрямитель сопротивлением $R=50$ кОм (рис. 24) заряжается конденсатор емкостью $C=1$ мкФ. Через какое время конденсатор зарядится до напряжения 200 В?

Указание. Учтите, что зарядка конденсатора происходит только тогда, когда напряжение $U_\sim$, выпрямленное однополупериодно, положительно и больше, чем напряжение на конденса-

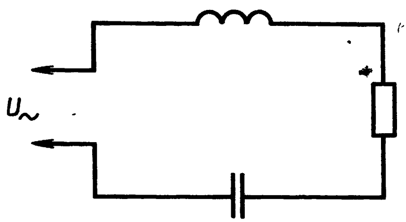


Рис. 22

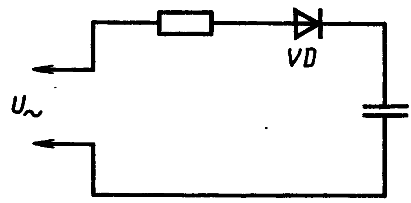


Рис. 24

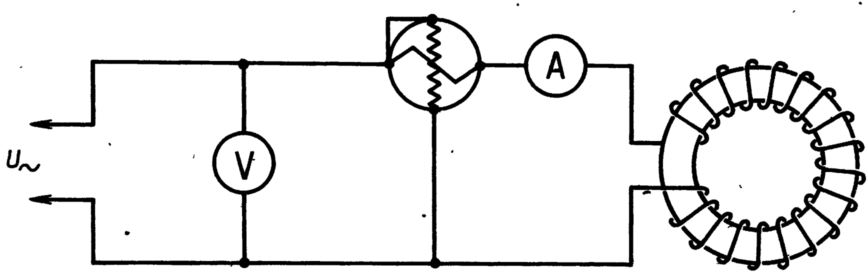
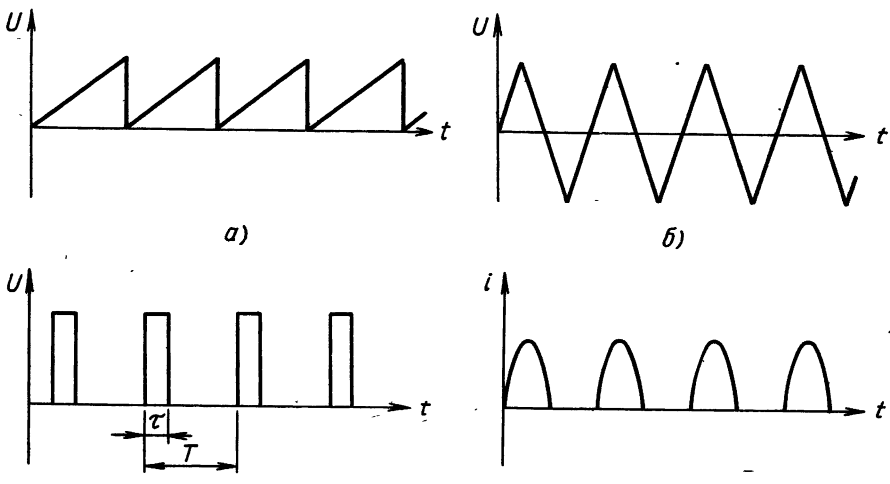


Рис. 23



в) Рис. 25 г)

торе U. Свяжите силу зарядного тока $i=dQ/dt$ с напряжениями на конденсаторе и на выпрямителе $i=(U_{\sim}-U)/R$ и с емкостью конденсатора $i=dQ/dt=CdU/dt$. Возникающее дифференциальное уравнение для $U(t)$ решайте постепенным наращиванием времени t и напряжения U (см. раздел 4.6), но все время ставьте условие, что $U_{\sim}>U$.

2.12.5. Зарядка конденсатора падающим напряжением. В момент времени $t=0$ на клеммы цепи (см. рис. 24) подается не синусоидальное напряжение, а напряжение, меняющееся по закону: $U = U_0 e^{-\beta t}$, где $U_0 = 100$ В; $\beta = 1$ c^{-1}. Параметры цепи: $R = 100$ кОм; $C = 1{,}2$ мкФ. До какого потенциала зарядится конденсатор? (Диод предотвращает обратный ток (разрядку) конденсатора.)

2.12.6. Спектр «пилы». Найдите спектр пилообразного (рис. 25, *а*) напряжения (постоянную составляющую, основной тон и первые 8 гармоник).

Указание. Разделите период на N частей. Номер каждого такого деления пусть будет i. Запишите выражение для y_i через i и N, приняв максимальное значение y за 1. Для разложения в спектр внимательно изучите раздел 4.8.

2.12.7. Спектральный анализ треугольного сигнала. Произведите гармонический анализ треугольного периодического сигнала (рис. 25, *б*).

Указание. Пусть y меняется от 1 до -1. Выражения для y через i и N запишите отдельно для восходящей и нисходящей ветвей. Дополните программу для решения предыдущей задачи условием: $i \leqslant N/2$.

2.12.8. Спектр прямоугольных импульсов. Найдите спектр периодических сигналов, состоящих из прямоугольных импульсов (рис. 25, *в*) длительностью $\tau = 4$ мкс и скважностью 4 (скважность — отношение периода следования T к длительности сигнала τ). Высоту импульса примите равной 1. Найдите составляющие с n от 0 до 9. Какие составляющие равны 0? Как зависит спектр от скважности?

2.12.9. Спектр выпрямленного тока. Найдите спектр переменного тока частотой 50 Гц после однопериодного выпрямления (рис. 25, *г*).

2.12.10. Спектральный анализ сигнала, заданного графически (численно). На экране осциллографа виден сигнал, изображенный на рисунке 26. Разложите его в спектр.

Указание. Введите все значения y_i в память ЭВМ с помощью оператора DATA (см. раздел 3.17) через запятую. В программе предусмотрите чтение очередного значения y_i с помощью оператора READ.

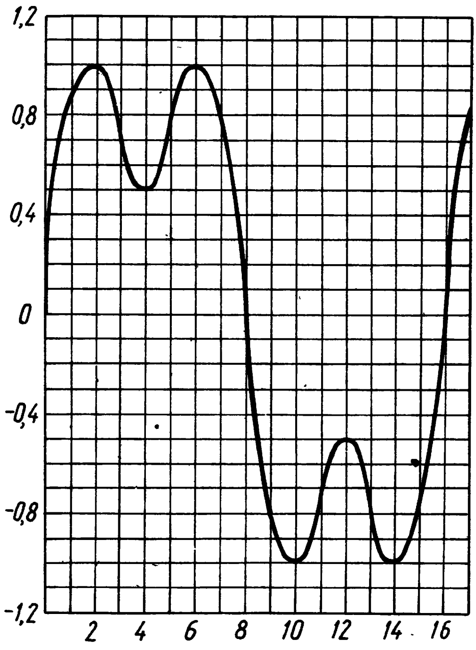


Рис. 26

2.12.11. Синтез сигнала. Восстановите график зависимости $i(t)$ по ответу задачи 2.12.9, используя только первые составляющие с n от 0 до 4. Насколько велики искажения? Как улучшится форма сигнала, если учесть следующую гармонику: $n=5$?

2.12.12. Анализ и синтез. Допустим, что сигнал, изображенный на рисунке 25, *в*, проходит через цепи, пропускающие только гармоники с n от 1 до 4 (т. е. только частоты от $\omega_1=2\pi/T$ до $\omega_4=4\omega_1$). Как искажается сигнал? Изобразите форму сигнала.

2.13. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

1. В этом разделе используются элементарная формула закона преломления света и формула линзы.

2. На экране графического дисплея можно моделировать ход луча в оптической системе, где луч претерпевает различные отражения и преломления при переходе из одной среды в другую. Для решения таких задач надо каждый раз задавать уравнение границы раздела между средами и уравнение луча. Решая эти уравнения совместно, можно получить точку пересечения, найти угол падения; пользуясь законом отражения или преломления, найти угол, под которым из точки пересечения луч пойдет дальше, вычертить на экране все эти линии.

Для решения таких задач нужны более сложные программы. В задачах данного параграфа даются готовые программы, а читателю предоставляется возможность исследовать ход лучей в различных ситуациях, задавая различные начальные условия: положение границы раздела, начальную точку, угол наклона луча к горизонтали, показатель преломления и др.

2.13.1. Угол отклонения в разных призмах. Угол ϑ отклонения луча в призме при симметричном расположении входящего и выходящего лучей (рис. 27) зависит от преломляющего угла A и показателя преломления n:

$$n \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{A+\vartheta}{2}. \qquad (2.13.1)$$

Постройте графики зависимости ϑ от A при $n=1{,}45$ и зависимости ϑ от n при $A=60°$.

2.13.2. Разложение света в спектр призмой. Призма разлагает свет в спектр потому, что показатель преломления зависит от длины волны (больше для фиолетовых лучей, чем для красных,— рис. 28). Пользуясь формулой (2.13.1), начертите зависимость угла отклонения ϑ от λ при $A=60°$.

2.13.3. Мираж. Каково расстояние от наблюдателя до оазиса в пустыне, если путник утром видит в небе мираж под углом 10° к горизонту (рис. 29), а показатель преломления из-за сильного охлаждения поверхности пустыни за ночь убывает с высотой z по закону: $n=n_0-gz$, где $n=1{,}0004$, а $g=2\cdot10^{-5}$ м$^{-1}$?

Указание. Изобразите на чертеже отстоящие друг от друга на Δz слои; ход луча изобразите так, как если бы он преломлялся

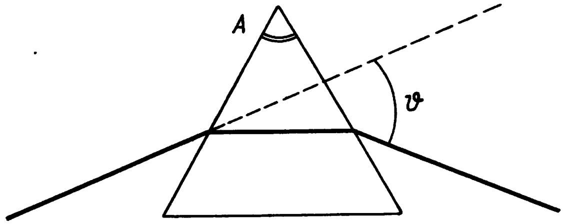


Рис. 27

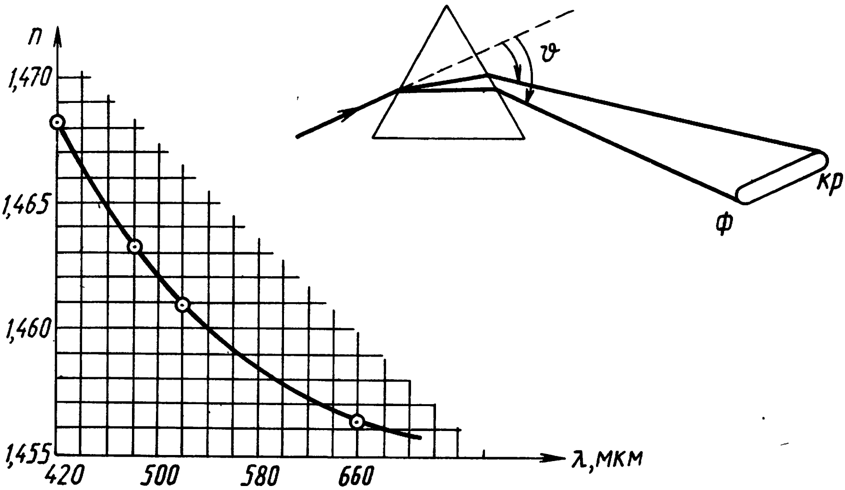


Рис. 28

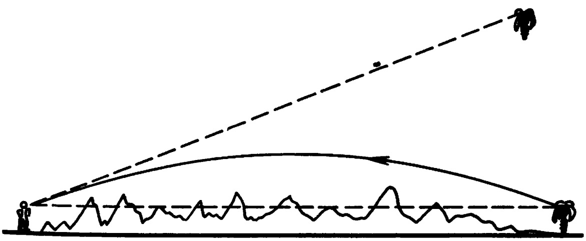


Рис. 29

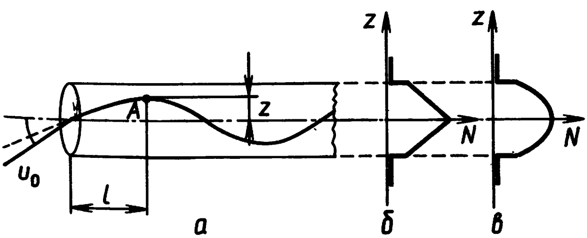


Рис. 30

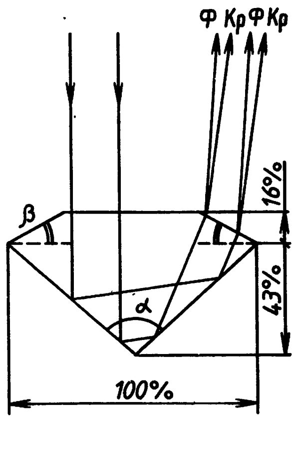


Рис. 31

только на границе слоев M и $M+1$. Напишите условие для углов при переходе луча из слоя с показателем преломления n_M в слой с показателем преломления n_{M+1}. Запишите все соотношения между углами и отрезками, а также их приращениями. Составьте программу постепенного изменения углов и отрезков. В некотором слое происходит полное внутреннее отражение (угол преломления становится равным 90; $\sin\alpha=1$). Когда это условие выполняется, это значит, что достигнута высшая точка, а вдоль горизонта пройдена половина пути.

2.13.4. Световод с линейным изменением показателя преломления. В световоде типа «Градан» луч света искривляется и все время возвращается обратно к оси благодаря тому, что показатель преломления n убывает от оси к краям (рис. 30, *а*). Возьмем для простоты такую зависимость: $n=n_0-gz$ (рис. 30, *б*), где $n_0=1{,}5$; $g=0{,}5$ мм$^{-1}$. В точке A происходит полное внутреннее отражение. Найдите расстояние z от оси до точки A, если свет входит с торца световода в осевой точке под углом $u_0=30°$. Измените u_0. Как меняется расстояние z?

2.13.5. Световод с квадратичным изменением показателя преломления. Решите задачу 2.13.4 при условии, что показатель преломления убывает от оси к краям не по линейному закону, а по параболическому:

$$n=n_0-az^2, \qquad (2.13.2)$$

где $a=0{,}68$ мм$^{-2}$ (рис. 30, *в*).

2.13.6. Апертура световода. Найдите апертуру световода (максимальный угол u_0, при котором свет не будет выходить из боковой стенки), если радиус световода $r=150$ мкм. Остальные данные возьмите из задачи 2.13.4.

Указание. Составьте программу для нахождения расстояния z_{max} при постепенном наращивании угла u_0. Когда z_{max} станет больше или равным r, выведите на экран u_0 и остановите вычисления.

2.13.7. Линза. Начертите график зависимости расстояния от линзы до изображения при изменении расстояния от предмета до линзы в пределах от 0 до ∞. Фокусное расстояние линзы равно 5,2 см.

Дополните программу вычислением увеличения. Как оно зависит от фокусного расстояния линзы при фиксированном расстоянии от предмета до линзы?

2.13.8. Уголковый отражатель. Два зеркала, расположенные под углом 90°, обладают интересным свойством: любой луч, падающий на такой уголковый отражатель, в результате двух отражений оказывается направленным точно в обратную сторону. В этом случае необходимо, чтобы линия пересечения зеркала была перпендикулярна падающему лучу. Если это не так, то потребуется еще третье зеркало, перпендикулярное двум предыдущим. Тогда в результате трех отражений луч повернется в прямо противоположное направление. Рассмотрим первый случай. Дана программа UGOL, изображающая отражатель и строящая ход лучей:

```
1 PRINT "UGOL"
2 PRINT "УГОЛКОВЫЙ ОТРАЖАТЕЛЬ"
10 K=0.64
20 X1=0
30 Y1=200
40 AL=15*PI/180
50 X2=400
60 Y2=  0
70 X3=600
80 Y3=200
90 X4=400
100 Y4=400
110 SCREEN 2
120 LINE (X2,Y2*K)-(X3,Y3*K),5
130 LINE (X3,Y3*K)-(X4,Y4*K),5
140 A=(Y4-Y3)/(X4-X3)
150 XP=INT((X3*A-Y3+Y1-TAN(AL)*X1)/(A-TAN(AL)))
160 YS=INT(XP*A-X3*A+Y3)
170 A=(Y3-Y2)/(X3-X2)
180 XS=INT((X2*A-Y2+Y1-TAN(AL)*X1)/(A-TAN(AL)))
190 YS=INT(XP*A-X2*A+Y2)
200 X=0
210 Y=Y1+TAN(AL)*(X-X1)
220 PSET (X,Y*K),8
230 IF X=XP THEN 280 ELSE 240
240 IF X=XS THEN 320 ELSE 250
250 X=X+1
260 IF Y>Y4 THEN 540
270 GOTO 210
280 P=X
290 P1=Y
300 T=X
310 T1=Y
320 A1=TAN(AL)
330 A2=(Y4-Y3)/(X4-X3)
340 X=P
350 Y=P1
360 PSET (X,Y*K),8
370 X=X+0.5
380 Y=TAN(ATN(2*A2-AL-PI))*X+P1-TAN(ATN(2*A2-AL-PI))*P
390 UG=ATN(2*A2-AL-PI)
400 C=T1-TAN(UG)*T
410 XP=INT(((Y2*X3-Y3*X2)/(X3-X2)-C)/(TAN(UG)-(Y3-Y2)/(X3-X2)))
420 IF X=XP THEN 440
430 GOTO 360
440 T2=X
450 T3=Y
460 A4=(Y3-Y2)/(X3-X2)
470 X=T2
480 Y=T3
490 PSET (X,Y*K),8
500 X=X-0.5
510 Y=INT(TAN(ATN(2*A4-UG-PI))*X+T3-TAN(ATN(2*A4-UG-PI))*T2)
520 IF Y=0 THEN 530 ELSE 490
530 GOTO 530
540 SCREEN 1
550 PRINT "ИЗМЕНИТЕ ЛИБО ПАРАМЕТРЫ ЛУЧА,ЛИБО ПАРАМЕТРЫ ЗЕРКАЛА"
560 GOTO 560
```

В этой программе X, Y — исходная точка луча; AL — угол между этим лучом и горизонталью. Введя программу в машину и меняя эти параметры, покажите, что луч поворачивается на 180°.

2.13.9. Упражнения с готовой программой «Преломление». Дана программа PREL, которая позволяет рассматривать поведение луча света вблизи плоской границы раздела двух сред с показателями преломления $n_1 \equiv M$ и $n_2 = M1$:

```
1 PRINT "PREL9
2 PRINT "ПРЕЛ.И ОТР НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА"
10 K=0.64
20 M=1.0
30 M1=1.5
40 X1=0
50 Y1=200
60 AL=345*PI/180
70 X3=500
80 Y3=0
90 X4=80
100 Y4=400
110 SCREEN 2
120 IF M>M1 THEN 200
130 LINE (X3,Y3*K)-(650,Y3*K),5
140 LINE (X4,Y4*K)-(650,Y4*K),5
150 LINE (650,Y3*K)-(650,Y4*K),5
160 LINE (X3,Y3*K)-(X4,Y4*K),5
170 YK=(Y4-5)*K
180 IF X3>X4 THEN PAINT (X3+10,YK),5 ELSE PAINT(X4+10,(Y3+5)*K),5
190 GOTO 250
200 LINE (X3,Y3*K)-(X4,Y4*K),5
210 LINE (X3,Y3*K)-(0,Y3*K),5
220 LINE (X4,Y4*K)-(0,Y4*K),5
230 LINE (0,Y3*K)-(0,Y4*K),5
240 PAINT (10,10),5
250 A=(Y3-Y4)/(X3-X4)
260 XP=INT((X3*A-Y3+Y1-TAN(AL)*X1)/(A-TAN(AL)))
270 YP=INT(XP*A-X3*A+Y3)
280 X=0
290 Y=Y1+TAN(AL)*(X-X1)
300 PSET (X,Y*K),8
310 IF X=XP THEN 350 ELSE 320
320 X=X+1
330 IF Y>Y4 THEN 490
340 GOTO 290
350 P=X
360 P1=Y
370 A2=ATN((Y3-Y4)/(X3-X4))
380 IF X3>X4 AND AL<=90*PI/180 THEN GOSUB 500
390 IF X3>X4 AND AL>90*PI/180 THEN GOSUB 660
400 IF X3<X4 AND AL<=90*PI/180 THEN GOSUB 820
410 IF X3<X4 AND AL>90*PI/180 THEN GOSUB 890
420 X=P
430 Y=P1
440 FOR I=1 TO 300
450 PSET (X,Y*K),8
460 X=X+0.5
470 Y=TAN(AO)*X+P1-TAN(AO)*P
480 NEXT I
490 GOTO 490
500 R=-A2+AL-PI/2
510 IF M1=0 THEN GOSUB 570
520 U=SIN(R)*M/M1
530 IF ABS(U)>1 THEN GOSUB 570
540 AX=ATN(U/SQR(1-U^2))
550 IF M<M1 THEN AO=AX+A2-PI/2 ELSE AO=ABS(AX)-PI/2+A2
560 RETURN
570 X=P
580 Y=P1
590 AY=PI-(2*R-AL)
600 FOR I=1 TO 100
```

```
610 PSET (X,Y*K),8
620 IF X3>X4 THEN X=X-0.5 ELSE X=X+.5
630 Y=TAN(AY)*X+P1-TAN(AY)*P
640 NEXT I
650 GOTO 490
660 R=2*PI-AL+ABS(A2)
670 IF M1=0 THEN GOSUB 730
680 U=SIN(R)*M/M1
690 IF ABS(U)>1 THEN GOSUB 730
700 AX=ATN(U/SQR(1-U^2))
710 IF M<M1 THEN AO=ABS(A2)-AX ELSE AO=2*PI-(ABS(AX)+PI/2-A2)
720 RETURN
730 X=P
740 Y=P1
750 AY=-PI+2*R+AL
760 FOR I=1 TO 100
770 PSET (X,Y*K),8
780 IF X3>X4 THEN X=X+0.5 ELSE X=X-.5
790 Y=TAN(AY)*X+P1-TAN(AY)*P
800 NEXT I
810 GOTO 490
820 R=PI/2-A2+AL
830 IF M1=0 THEN GOSUB 570
840 U=SIN(R)*M/M1
850 IF ABS(U)>1 THEN GOSUB 570
860 AX=ATN(U/SQR(1-U^2))
870 IF M<M1 THEN AO=2*PI-(PI/2-AX-A2) ELSE  AO=ABS(AX-PI/2+A2)
880 RETURN
890 R=3*PI/2-AL+A2
900 IF M1=0 THEN GOSUB 730
910 U=SIN(R)*M/M1
920 IF ABS(U)>1 THEN GOSUB 730
930 AX=ATN(U/SQR(1-U^2))
940 IF M<M1 THEN AO=2*PI-(PI/2+AX-A2) ELSE AO=ABS(AX)-PI/2+A2
950 RETURN
```

В этой программе (X3, Y3) — (X4, Y4) задают границу раздела сред; X_1, Y_1 — точку, из которой выходит луч; AL — угол α между лучом и горизонталью.

Введите эту программу в вашу ПЭВМ и, задав произвольные значения X3, Y3, X4, Y4, AL, запустите программу в работу командой RUN. Проанализируйте правильность образующегося на экране построения хода луча. Измените ход падающего луча так, чтобы получилось полное внутреннее отражение.

Указание. Такую сравнительно длинную программу надо вводить очень внимательно, так как даже незначительная ошибка ведет к неверной работе программы. Если за один прием отладить программу не удалось, то запишите, что у вас введено на диск (желательно и принтером — на бумагу), и в следующий раз продолжите ее отладку. Вероятно, придется учесть особенности вашего устройства и применяемой в вашем устройстве версии языка Бейсик и ввести некоторые поправки в программу.

2.13.10. Плоское зеркало. Используйте программу PREL для случая плоского зеркала.

Указание. Поскольку при угле падения α_1, большем предельного угла A и определяющемся из соотношений $\sin A = n_2/n_1$, $\sin A = (\sin 90°)\, n_2/n_1$, всегда получается полное отражение. Для металлического зеркала можно предположить, что $n_2 = 0$. Тогда

$A=0$ и любой угол падения α_1 будет больше A, т. е. при любом α_1 произойдет полное отражение.

2.13.11. Призма. На основе программы PREL (см. задачу 2.13.9) можно составить программу, с помощью которой будет на экране дисплея изображаться ход луча, преломляющегося на двух границах раздела (если они под углом друг к другу, то это — призма, если параллельны — плоскопараллельная пластина):

```
1 PRINT "PRIZMA"
2 PRINT "ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЛУЧЕЙ В ПРИЗМЕ"
10 K=0.64
20 M=1.0
30 M1=1.5
40 SH=0
50 X1=0
60 Y1=100
70 AL=15*PI/180
80 X3=200
90 Y3=100
100 X2=450
110 Y2=100
120 X4=375
130 Y4=300
140 SCREEN 2
150 LINE (X3,Y3*K)-(X2,Y2*K),5
160 LINE (X4,Y4*K)-(X2,Y2*K),5
170 LINE (X3,Y3*K)-(X4,Y4*K),5
180 PAINT ((X2+X3)/2,(Y3+10)*K),5
190 A=(Y3-Y4)/(X3-X4)
200 XP=INT((X3*A-Y3+Y1-TAN(AL)*X1)/(A-TAN(AL)))
210 YP=INT(XP*A-X3*A+Y3)
220 X=0
230 Y=Y1+TAN(AL)*(X-X1)
240 PSET (X,Y*K),8
250 IF X=XP THEN 280 ELSE 260
260 X=X+1
270 GOTO 230
280 P=X
290 P1=Y
300 A2=ATN((Y3-Y4)/(X3-X4))
310 IF X3>X4 AND AL<=90*PI/180 THEN GOSUB 570
320 IF X3>X4 AND AL>90*PI/180 THEN GOSUB 760
330 IF X3<X4 AND AL<=90*PI/180 THEN GOSUB 950
340 IF X3<X4 AND AL>90*PI/180 THEN GOSUB 1030
350 IF SH=1 THEN GOSUB 1110
360 X=P
370 Y=P1
380 IF INT(Y)=YS OR X=XP  THEN 430
390 PSET (X,Y*K),8
400 X=X+0.5
410 Y=TAN(AO)*X+P1-TAN(AO)*P
420 GOTO 380
430 P=X
440 P1=Y
450 AL=AO
460 J=M
470 M=M1
480 M1=J
490 A2=ATN((Y2-Y4)/(X2-X4))
500 IF X2<X4 AND AL>90*PI/180 AND INT(Y)<>Y3 AND SH=1 THEN GOSUB 1030
510 IF X2>X4 AND AL<=90*PI/180 AND INT(Y)<>Y3 AND SH=1 THEN GOSUB 570
520 IF X2>X4 AND AL>90*PI/180 AND INT(Y)<>Y3  AND SH=1 THEN GOSUB 760
530 IF X2<X4 AND AL<=90*PI/180 AND INT(Y)<>Y3 AND SH=1 THEN GOSUB 950
540 IF INT(Y)=Y3 THEN GOSUB 1180
```

```
550 GOSUB 1240
560 GOTO 560
570 R=PI/2-ABS(A2)-AL
580 IF M1=0 THEN GOSUB 670
590 U=SIN(R)*M/M1
600 IF ABS(U)>1 THEN GOSUB 670
610 AX=ATN(U/SQR(1-U^2))
620 IF M<M1 THEN AO=PI/2-ABS(A2)-ABS(AX) ELSE GOTO 640
630 GOTO 650
640 IF PI/2-ABS(A2)>ABS(AX) THEN AO=PI/2-ABS(A2)-ABS(AX) ELSE AO=2*PI-(A
BS(A2)-PI/2)
650 SH=SH+1
660 RETURN
670 X=P
680 Y=P1
690 AY=PI-(2*R-AL)
700 FOR I=1 TO 100
710 PSET (X,Y*K),8
720 IF AY>PI/2 THEN X=X+0.5 ELSE X=X-.5
730 Y=TAN(AY)*X+P1-TAN(AY)*P
740 NEXT I
750 GOTO 560
760 R=2*PI-AL+PI/2-ABS(A2)
770 IF M1=0 THEN GOSUB 850
780 U=SIN(R)*M/M1
790 IF ABS(U)>1 THEN GOSUB 850
800 AX=ATN(U/SQR(1-U^2))
810 IF M<M1 THEN AO=PI/2-ABS(A2)-AX ELSE AO=2*PI-(ABS(AX)-PI/2+ABS(A2))
820 IF AO<0 THEN AO=2*PI-ABS(AO)
830 SH=SH+1
840 RETURN
850 X=P
860 Y=P1
870 IF SH=1 THEN  A2=ATN((Y2-Y4)/(X2-X4))
880 AY=PI/2-ABS(A2)+R
890 FOR I=1 TO 100
900 PSET (X,Y*K),8
910 IF AY>PI/2 THEN X=X+0.5 ELSE X=X-.5
920 Y=TAN(AY)*X+P1-TAN(AY)*P
930 NEXT I
940 GOTO 560
950 R=PI/2-A2+AL
960 IF M1=0 THEN GOSUB 670
970 U=SIN(R)*M/M1
980 IF ABS(U)>1 THEN GOSUB 670
990 AX=ATN(U/SQR(1-U^2))
1000 IF M<M1 THEN AO=2*PI-(PI/2-AX-A2) ELSE  AO=ABS(AX-PI/2+A2)
1010 SH=SH+1
1020 RETURN
1030 R=3*PI/2-AL+A2
1040 IF M1=0 THEN GOSUB 850
1050 U=SIN(R)*M/M1
1060 IF ABS(U)>1 THEN GOSUB 850
1070 AX=ATN(U/SQR(1-U^2))
1080 IF M<M1 THEN AO=2*PI-(PI/2+AX-A2) ELSE AO=2*PI-(AX+PI/2-A2)
1090 SH=SH+1
1100 RETURN
1110 A=(Y2-Y4)/(X2-X4)
1120 AL=AO
1130 XP=INT((X2*A-Y2+P1-TAN(AL)*P)/(A-TAN(AL)))
1140 YP=INT(XP*A-X2*A+Y2)
1150 XS=INT((-Y3+Y1-TAN(AL)*X1)/(-TAN(AL)))
1160 YS=INT(Y3)
1170 RETURN
1180 R=PI/2-2*PI+AL
1190 U=SIN(R)*M/M1
```

```
1200 IF ABS(U)>1 THEN GOSUB 1300
1210 AX=ATN(U/SQR(1-U^2))
1220 AO=3*PI/2+ABS(AX)
1230 RETURN
1240 FOR I=1 TO 200
1250 PSET (X,Y*K),8
1260 X=X+0.5
1270 Y=TAN(AO)*X+P1-TAN(AO)*P
1280 NEXT
1290 RETURN
1300 X=P
1310 Y=P1
1320 AY=PI/2-R
1330 FOR I=1 TO 100
1340 PSET (X,Y*K),8
1350 X=X+0.5
1360 Y=TAN(AY)*X+P1-TAN(AY)*P
1370 NEXT I
1380 GOTO 560
```

В этой программе строки 80—130 задают форму призмы; X1, Y1 — точку выхода луча; AL — угол этого луча с горизонталью; M1 — показатель преломления вещества призмы.

Введите программу в ОЗУ ПЭВМ и, меняя параметры луча и форму призмы, проанализируйте правильность изображаемого компьютером хода луча.

2.13.12. Бриллиант. Алмаз, ограненный таким образом, что бо́льшая часть падающего света отражается назад и при этом разлагается в спектр, называется *бриллиантом.* Пример огранки (в сечении) дан на рисунке 31. Угол $\alpha \approx 98°$, угол $\beta \approx 34°$. Отношение размеров дано в процентах. Красота этого камня обусловлена большим показателем преломления n, что обеспечивает полное внутреннее отражение, и большой дисперсией (сильной зависимостью n от длины волны: $n = 2{,}402$ — для красного света и 2,465 — для фиолетового).

Взяв за основу программу PREL, смоделируйте ход лучей *1* и *2* для красного и фиолетового света.

2.13.13. Преломление на сферической поверхности и в линзе (тема для самостоятельного исследования). Усовершенствуйте программу PREL так, чтобы она работала не только для случая плоской границы раздела, но и для сферической, двух сферических (линза) и нескольких сферических поверхностей (оптическая система).

Указание. В программу придется ввести построение касательных в точках пересечения луча с неплоскими границами раздела. Следует воспользоваться методами аналитической геометрии, а также, возможно, помощью руководителя или преподавателя математики.

2.14. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

1. Результат интерференции двух лучей с амплитудами поля E_1 и E_2 в зависимости от разности фаз $\Delta\varphi$ между ними:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \Delta\varphi,$$

или, полагая $E_1=E_2=\sqrt{I_1}=\sqrt{I_2}$ (I_1 и I_2 — интенсивности каждого луча):

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi=2I_1(1+\cos\Delta\varphi).$$

Разность фаз $\Delta\varphi$ связана с разностью хода для этих лучей Δ соотношением

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi}=\frac{\Delta}{\lambda}.$$

2. При дифракции в параллельных лучах от одной щели (рис. 32) распределение интенсивности по углу дифракции φ выражается формулой

$$I_\varphi=I_0\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2;\quad \theta=\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi, \tag{2.14.1}$$

где b — ширина щели.

3. В случае дифракции монохроматических лучей с длиной волны λ на дифракционной решетке с периодом d и шириной b каждой щели интенсивность распределяется по углу φ следующим образом:

$$I_\varphi=I_0\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\left(\frac{\sin N\psi}{\sin\psi}\right)^2;\quad \theta=\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi;\quad \psi=\frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi, \tag{2.14.2}$$

N — общее число щелей.

2.14.1. Кольца Ньютона. Рассчитайте и изобразите на графическом дисплее интерференционные картины, получающиеся при освещении красным светом ($\lambda=0{,}6$ мкм) плоской пластины с прижатыми к ней плосковыпуклыми линзами радиусами R от 5 м до 20 см.

Указание. Используйте формулу для интенсивности при интерференции двух лучей. Свяжите разность фаз с разностью хода двух лучей. Воспользуйтесь возможностью чертить линии на дисплее разных оттенков. Номер оттенка C свяжите с интенсивностью, полученной в результате интерференции.

2.14.2. Интерференция от двух точечных источников. Два когерентных точечных источника на расстоянии $a=0{,}1$ мм друг от друга

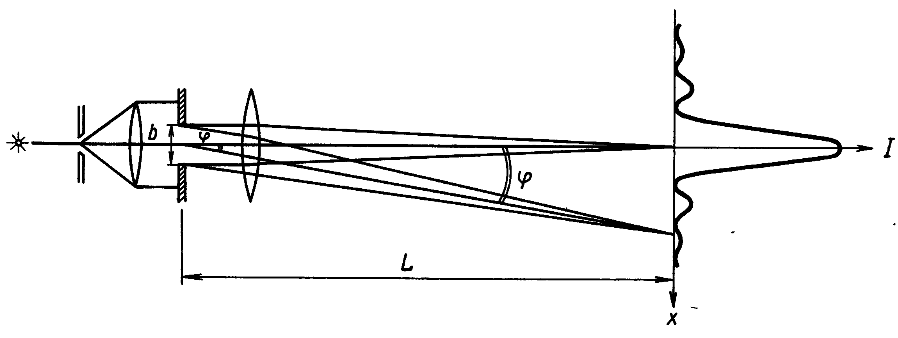


Рис. 32

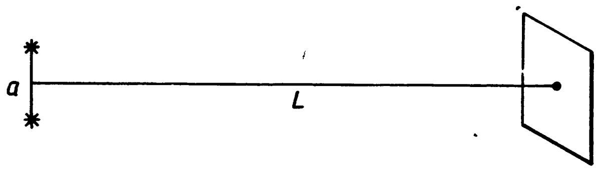


Рис. 33

дают свет ($\lambda=0{,}6$ мкм) на экран, находящийся на расстоянии $L=1$ м от них (рис. 33). Рассчитайте интерференционную картину и на графическом дисплее постройте ее изображение. Как будет меняться картина при изменении расстояния a?

Если в вашем распоряжении есть цветной дисплей, то начертите картину для разных λ соответствующими цветами.

Указание. Обратитесь к указанию предыдущей задачи.

2.14.3. Дифракция на щели. Постройте график распределения интенсивности по экрану, находящемуся на расстоянии $L=4$ м от щели, приняв $I_0=1$; $b=0{,}1$ мм; $\lambda=0{,}55$ мкм.

2.14.4. Дифракционная решетка. Постройте график распределения интенсивности по экрану, находящемуся на расстоянии $L=4$ м от решетки, приняв $I_0=1$; $b=0{,}1$ мм; $\lambda=0{,}55$ мкм; $N=5$; $d=0{,}3$ мм.

2.15. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ДИСПЕРСИЯ

1. Спектральная плотность излучения, т. е. энергия, излучаемая с площади 1 м^2 за время, равное 1 с, в пределах узкого интервала длин волн от λ до $\lambda+\Delta\lambda$ и отнесенная к этому интервалу, равна:

$$r(\lambda, T)=\frac{dW(\lambda, \lambda+\Delta\lambda)}{\Delta\lambda},$$

а по Планку:

$$r(\lambda, T)=\frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right)-1}. \qquad (2.15.1)$$

В СИ:

$c=3\cdot10^8$ м/с; $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с; $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

2. Закон Стефана—Больцмана для общей энергии теплового излучения с единицы площади в единицу времени:

$$R(T)=\sigma T^4,$$

где σ — константа Стефана—Больцмана ($\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\times$ $\times$К$^{-4}$)).

Закон Вина для длины волны, соответствующей максимуму излучения:

$$\lambda_{max}=b/\text{T},$$

где $b=2{,}9\cdot10^{-3}$ м·К.

3. Согласно простейшей теории дисперсии (одна резонансная частота ω_0, затухание не учитывается) показатель преломления n зависит от частоты следующим образом:

$$n=\sqrt{1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}}, \qquad (2.15.2)$$

где e, m — заряд и масса электрона; N — число электронов в единице объема вещества.

2.15.1. Функция видности. Функция видности изображена на рисунке 34. Аппроксимируйте эту функцию аналитической зависимостью (подберите подходящую формулу). Методом наименьших квадратов подберите подходящие параметры.

Указание. Используйте раздел 4.10. При $x=x_0$ сходный максимум имеет кривая Гаусса: $y=y_0e^{-A(x-x_0)^2}$.

2.15.2. Построение кривой Планка. Начертите $r(\lambda)$, если λ меняется от 0 до 10 мкм при температуре 1 000 К; при температуре, вдвое большей.

2.15.3. Семейство кривых Планка. Изобразите на экране графического дисплея семейство кривых излучательной способности черного тела при температурах от 800 до 1600 К через каждые 100 К.

2.15.4. Закон Стефана — Больцмана. Зная $r(\lambda, T)$, найдите, какую энергию излучает черное тело с площади 1 м^2 за время, равное 1 с, в видимом диапазоне (от $\lambda=0{,}38$ до 0,78 мкм) и в инфракрасном диапазоне (от $\lambda=0{,}78$ мкм до ∞) при температурах 1 000 К и 2 000 К. Для проверки работы вашей программы найдите также интегральную энергетическую светимость $R(T)=\int_0^\infty r(\lambda, T)\,d\lambda$ при температурах 1 000 К и 2 000 К. Определите, выполняется ли закон Стефана—Больцмана.

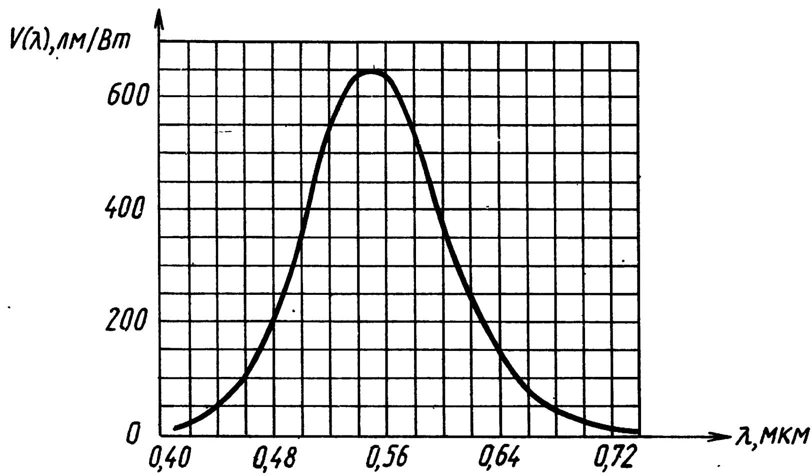


Рис. 34

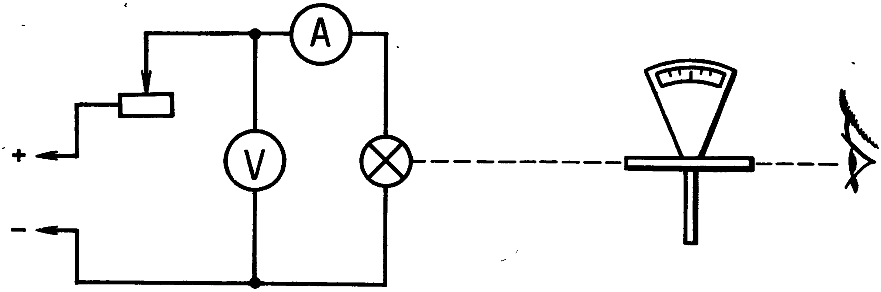


Рис. 35

Указание. Излучаемая энергия $W(T)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} r(\lambda, T)\,d\lambda$. Используйте раздел 4.3.

2.15.5. Закон смещения Вина. Зная $r(\lambda, T)$ (см. задачу 2.15.2), найдите λ максимума излучения при температурах 1 000 K и 2 000 K. Выполняется ли закон Вина?

Указание. Используйте раздел 4.5.

2.15.6. Паяльник. Как меняется со временем температура паяльника от момента включения, если мощность нагревателя равна 40 Вт, масса паяльника 100 г, удельная теплоемкость 400 Дж/(кг·К)? Потери тепла происходят за счет теплопроводности среды и конвекции по закону: $dQ_1/dt=A(T-T_{ср})$, где $A=0{,}05$ Вт/К, температура среды $T_{ср}=20$ °C, а также за счет излучения в соответствии с законом Стефана—Больцмана по закону: $dQ_2/dt=S(T^4-T^4_{ср})$, где $S=3{,}4\cdot10^{-10}$ Вт/К^4. Дайте ответ с учетом и без учета излучения.

2.15.7. Утюг с регулятором. Начертите зависимость температуры электрического утюга от времени, если мощность нагревателя 1,5 кВт, масса утюга 2 кг, удельная теплоемкость 400 Дж/(кг·К). Потери тепла происходят по тем же законам, что и в задаче 2.15.6, но здесь $A=6$ Вт/К; $S=3{,}4\cdot10^{-9}$ Вт/К^4. В отличие от той задачи учтите, что в утюге есть регулятор, который включает его, если $T<300$ °C, и выключает, если $T>350$ °C.

2.15.8. Экспериментальная проверка закона Стефана—Больцмана. В лабораторной работе проверялся закон Стефана—Больцмана $R=\sigma T^n$ на следующей установке (рис. 35). Потребляемая лампой накаливания мощность (следовательно, и излучаемая мощность: $P=RS$) измерялась амперметром и вольтметром, а температура нити — оптическим пирометром. Излучающая площадь нитей накаливания равна 1 см^2. При разных токах получены следующие значения:

t, °C	700	800	900	1 000	1 100	1 200	1 300	1 400	1 500	1 600	1 700
P, Вт	11	17	23	35	47	61	82	105	130	170	210

Обработайте данные методом наименьших квадратов и найдите константу Стефана — Больцмана σ и n. Выполняется ли закон Стефана — Больцмана?

Указание. Воспользуйтесь приемами, данными в разделе 4.10.

2.15.9. Замедление и поглощение волны в среде. Изобразите на экране в некоторый момент времени световую волну (график $|\vec{E}|$), проходящую по нормали через плоскопараллельную пластину толщиной 2,5 мкм. Показатель преломления пластины $n=1{,}8$, коэффициент поглощения $\mu=5\cdot10^5$ м$^{-1}$, длина волны $\lambda=0{,}5$ мкм.

2.15.10. Дисперсионная кривая. Начертите кривую дисперсии — зависимость показателя преломления от частоты — без учета затухания (принять $N=10^{22}$ см$^{-3}$; $\omega_0=10^{16}$ с$^{-1}$).

2.15.11. Экстраполяция дисперсионной кривой. На опыте для данного сорта стекла получена такая зависимость показателя преломления от длины волны:

λ, мкм	0,22	0,25	0,3	0,35	0,40	0,45	0,5
n	1,5	1,31	1,23	1,20	1,17	1,16	1,15

т. е. значения n получены только в пределах длин волн λ от 0,22 до 0,5 мкм. Предполагая, что n зависит от λ по закону (2.15.2), восстановите примерно ход $n(\lambda)$ в более широких пределах и найдите длину волны резонанса λ_0.

Указание. Зависимость (2.15.2) перепишите для $n(\lambda)$, учитывая, что $\omega=2\pi c/\lambda$, и приведите эту зависимость к линейной, используя функциональный масштаб (см. раздел 4.10). На график в таком масштабе нанесите экспериментальные точки. Проведите через них прямую методом наименьших квадратов (см. раздел 4.10). Из полученных параметров этой прямой получите ω_0 и $\left(\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\right)$ и по формуле (2.15.2) вычертите всю кривую.

2.16. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА. АТОМ И ЯДРО

1. Зависимость массы от скорости согласно теории относительности равна:

$$m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}. \qquad (2.16.1)$$

2. Согласно квантовой механике вероятность пройти через барьер энергетической высотой U и толщиной l (рис. 36) для частицы массой m и с энергией E равна:

$$D=\exp\left[-\frac{2l}{h}\sqrt{2m\,(U-E)}\right]. \qquad (2.16.2)$$

3. Длины волн линий излучения водорода определяются по формуле

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right), \qquad (2.16.3)$$

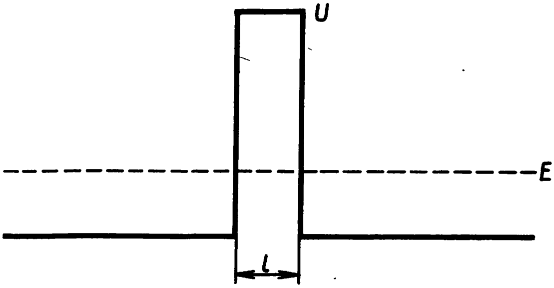


Рис. 36

где в СИ $R = 1{,}097373 \cdot 10^7$ м$^{-1}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$; m для данного n равно $n+1$, $n+2$, $n+3$ и т. д.

2.16.1. Зависимость массы от скорости. Начертите график зависимости массы электрона от скорости. Масса покоя электрона равна $9 \cdot 10^{-31}$ кг.

2.16.2. Зависимость массы от скорости. Обратная задача. Какую скорость надо сообщить частице, чтобы ее масса в соответствии с теорией относительности возросла в N раз? Начертите график $v(N)$.

2.16.3. Квантовомеханическая прозрачность барьера. Начертите график зависимости прозрачности прямоугольного барьера для α-частицы от толщины барьера l (от 0 до 1,5 фм$= 1{,}5 \cdot 10^{-15}$ м) для двух значений высоты барьера: $U - E = 2$ МэВ и 10 МэВ. Масса α-частицы равна 4,004 а.е.м.$\approx 4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

2.16.4. Рассеяние α-частиц. α-Частицы с энергией 4 МэВ рассеиваются тонкой золотой фольгой. Начертите траекторию частицы, приближающейся к ядру Au с прицельным расстоянием $p = 2 \cdot 10^{-15}$ м. На какой угол ϑ рассеивается частица?

Указание. Это задача на динамику двумерного движения (см. общий подход в вводных частях к разделам 2.4 и 2.5 и численные методы решения дифференциальных уравнений, приведенные в разделах 4.6 и 4.7). Решение задачи аналогично решению задачи 2.5.9 с тем отличием, что вместо силы тяготения следует подставить силу Кулона. Кроме того, в данном случае это сила отталкивания.

2.16.5. Зависимость угла рассеяния от прицельного расстояния. Проведите небольшое исследование: как зависит угол ϑ от прицельного расстояния p при рассеянии α-частиц ядрами золота (см. задачу 2.16.4).

2.16.6. Спектр водорода. С точностью до 0,1 нм найдите значения длин волн λ восьми линий в каждой из первых пяти серий в спектре излучения атома водорода.

Указание. Задача на многократные вычисления по формуле (2.16.3) с организацией цикла по n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), а внутри каждого цикла — еще и с организацией цикла по m ($m = n+1$, $n+2$, $n+3$, ...).

3. НЕОБХОДИМЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ И ПРОГРАММИРОВАНИИ (К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ)

Читатель может быть знаком с информатикой и программированием. В этом случае главу 3 можно пропустить, так как в ней в очень сжатом виде излагаются только самые необходимые сведения.

3.1. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ. ПРОГРАММА

Решая любую задачу (необязательно математическую), мы прежде всего составляем план решения, т. е. определенную последовательность этапов решения. *Эту последовательность (план решения) называют* ***алгоритмом***. Он может быть *линейным*, содержащим только следование одного действия за другим (рис. 37, *а*), а может быть *ветвящимся*: на некотором этапе *М* (рис. 37, *б*) принимается решение как идти дальше — по пути I или по пути II; это зависит от того, выполняется или не выполняется некоторое условие. В таком случае говорят, что на этапе *М* надо сделать условный переход (если «Да», то следует идти по пути I, если «Нет», то — по пути II). Наконец, алгоритм может быть *циклическим* (рис. 37, *в*): на этапе *N* делается безусловный переход на один из предыдущих этапов. В этом случае если условие *М* не выполняется, то мы производим операции ... *N, 2, M*; ... *N, 2, M*; ... *N, 2, M* и т. д., т. е. ходим по кругу, совершая цикл до тех пор, пока на этапе *М* не выполнится поставленное условие. Тогда мы выйдем из цикла и пойдем по пути *K, L*, ...

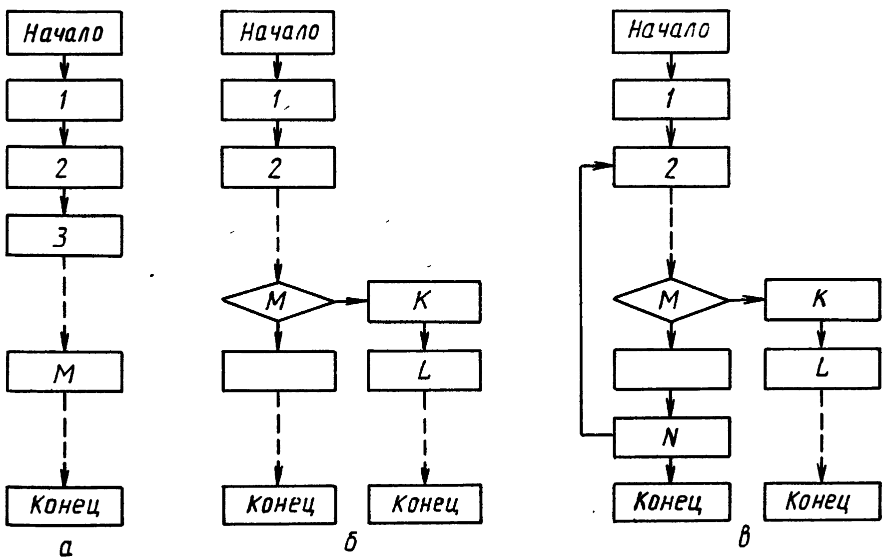


Рис. 37

Правильно составить алгоритм решения задачи, организовать условные и безусловные переходы и циклы — *первый* (важнейший) *этап* решения задачи. Ниже будем обозначать этот этап цифрой ①.

Для решения любой части задачи, т. е. для реализации каждой части алгоритма, нужно выполнить ряд операций: какие-либо числа сложить или перемножить, достать что-либо из памяти или положить в память на хранение и др. *Точный и подробный перечень операций на всех стадиях реализации алгоритма называют программой.* Этап распределения памяти будем обозначать цифрой ②, а следующий за ним этап — составление программы — цифрой ③.

Программу, т. е. перечень операций в определенной последовательности, записывают условными обозначениями в виде команд, понятных тому устройству — вычислительной машине, которая потом будет по этим командам выполнять соответствующие операции. *Совокупность условных обозначений, понятных машине, называют языком.* Ниже мы будем использовать только два языка: *клавишный язык* для программируемых калькуляторов и язык *Бейсик* для диалого-вычислительных комплексов и ЭВМ. Другие языки — Алгол, Фортран и др.— сложнее для пользователя, но в принципе не отличаются от тех, которые мы будем использовать [2—7]. Для сравнения одна из программ (см. решение задачи 2.5.6) дана на языках «Паскаль» и «Фортран» (табл. 5.2 и 5.3 в приложении).

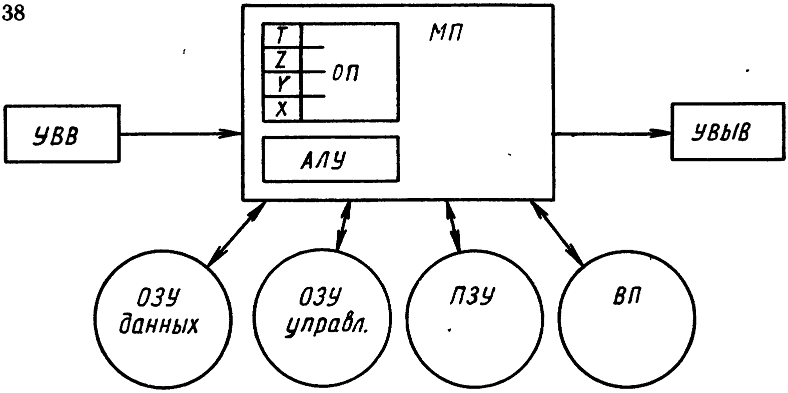
3.2. ТИПЫ ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН И ИХ УСТРОЙСТВА

Общая структурная схема электронно-вычислительных машин (ЭВМ) или компьютеров дана на рисунке 38, где УВВ — *устройство ввода информации* (чисел, команд), или устройство управления. Это обычная клавиатура, похожая на клавиатуру пишущей машинки. Используют и другие способы ввода информации — с перфокарты, перфоленты, магнитной ленты или магнитного диска. Появляются и устройства, способные читать информацию (чертежи, изображения), а также воспринимающие звук, человеческий голос.

Главная часть машины — *микропроцессор* (МП). В его *арифметико-логическом устройстве* (АЛУ) совершаются все операции над числами (сложение, вычитание и др.). В структурную схему ЭВМ также входит *устройство вывода информации* (УВЫВ). Это могут быть автоматическая электрическая пишущая машинка или любое другое печатающее устройство (принтер), экран телевизора (дисплей), синтезатор голоса и др.

Кроме того, в любой вычислительной машине должны быть блоки хранения информации, которые чаще называют *памятью.* Память может быть нескольких типов и разного назначения. *Операционная память* (ОП) — блок, непосредственно примыкающий

Рис. 38



к АЛУ и входящий в состав микропроцессора. Для того чтобы произвести действия над несколькими числами, последние надо накопить в ячейках — *регистрах.* Регистры обозначают как РгX, что значит регистр X, РгY — регистр Y и т. д. Несколько таких регистров (X, Y, Z, T) и образуют операционную память — *стек.* После действий над записанными числами содержание ОП обычно полностью или частично стирается.

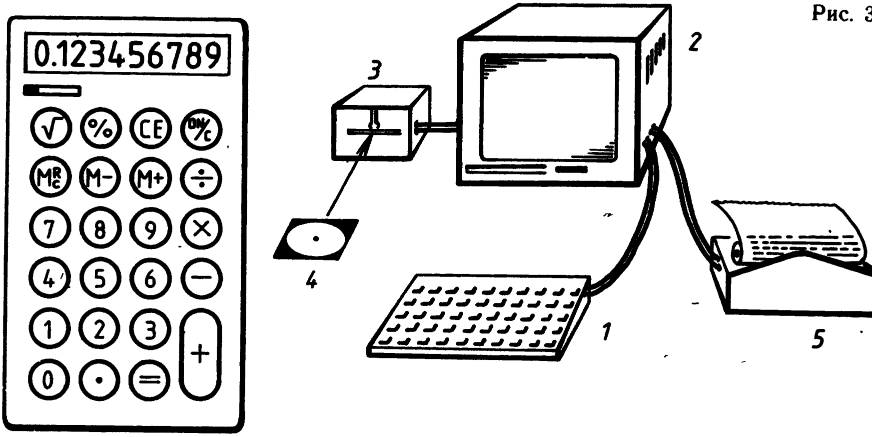
Для более длительного хранения информации в ЭВМ имеется *оперативная память,* или *оперативное запоминающее устройство* (ОЗУ). В ней информация хранится до тех пор, пока пользователь намеренно ее не сотрет или пока машина не будет выключена. Эта память делится на два отдела: ОЗУ *данных*, где запоминаются числа, и ОЗУ *управления,* где запоминаются команды, т. е. программы.

Долгое время хранить информацию, которая не стирается и после выключения машины, позволяет *постоянное запоминающее устройство* (ПЗУ).

Для хранения большого (практически неограниченного) объема информации существует *внешняя память* (ВП). Обычно эта информация записана на магнитофонной ленте или магнитных дисках.

В учебной работе, как правило, используют два типа вычислительных устройств: *программируемые микрокалькуляторы (ПМК) и диалого-вычислительные комплексы (ДВК)* или *персональные ЭВМ (ПЭВМ),* реже — большие ЭВМ с выходом на определенное число рабочих мест — *терминалы с дисплеями.* Программируемые микрокалькуляторы — это чаще всего карманные устройства с ограниченными возможностями, но достаточными для решения довольно-таки сложных задач, во всяком случае всех задач, приводимых в этом задачнике. Персональные ЭВМ (ПЭВМ) — сложные и сравнительно дорогие устройства, занимающие по своим возможностям промежуточное положение между ПМК и большими стационарными ЭВМ. Однако различие между ПМК и ПЭВМ в основном *количественное* — число ячеек памяти, число шагов программы, быстродействие. *Качественное* отличие ПМК от ПЭВМ заключается в раз-

Рис. 39



а б

личии входных языков (способов ввода программ). Роль устройства вывода в ПМК играет высвечиваемый в виде цифр регистр X операционной памяти (см. рис. 38), а в ПВМ — дисплей. В большинстве случаев в ПМК отсутствует возможность связи с внешними (периферийными) устройствами, например с внешней памятью.

На рисунке 39, *а, б* дан примерный внешний вид ПМК и ПЭВМ.

3.3. ПРОГРАММИРУЕМЫЙ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР. РАБОТА В РУЧНОМ РЕЖИМЕ

Непрограммируемый микрокалькулятор (например, МК-71, Б3-38) выполняет функции хорошего арифмометра. На нем можно производить различные операции над числами (сложение, нахождение квадратного корня, логарифма и др.), но каждая такая операция выполняется по «одиночной» команде пользователя. Говорят, что такие калькуляторы работают только в ручном режиме.

Программируемый микрокалькулятор (ПМК) отличается от непрограммируемого тем, что на нем можно не только работать в ручном режиме, но и заложить программу *(перечень команд)*, исходные данные *(операнды)*, а затем запустить машину на автоматическую работу по заложенной программе.

В СССР промышленностью выпущены два типа ПМК. В настоящее время калькуляторы первого типа (Б3-21, МК-46, МК-64) устарели. Они имеют 7 ячеек памяти в ОЗУ данных (плюс стек), а в ОЗУ управления можно ввести только 60 шагов программы. Кроме того, в них не очень удобно осуществлять безусловные и условные переходы и циклы. Калькуляторы второго типа (Б3-34, МК-54, МК-56 и др.) имеют 14 ячеек памяти, допускают 98 шагов программы, более удобны для осуществления переходов и циклов, имеют косвенную адресацию.

Дальнейшее изложение этого раздела строится для калькуляторов типа Б3-34, так как клавиатура последнего тождественна клавиатуре МК-54 и отличается очень незначительно от клавиатуры МК-56. (В калькуляторах МК-52 и МК-61 введены некоторые добавочные возможности, но клавиатуры соответствуют базовому калькулятору Б3-34.) Для дальнейшего чтения и работы по данному пособию необходимо все время иметь под рукой ПМК и отрабатывать на нем соответствующие операции.

Ввод числа производится клавишами 0, 1, 2, ..., 9. Десятичная дробь отделяется точкой (в некоторых калькуляторах — запятой). Для введения отрицательного числа надо ввести сначала положительное число, а затем нажать клавишу *изменить знак* (/—/). Для введения порядка надо после набора числа (и изменения знака, если это необходимо) нажать клавишу *ввод порядка* (ВП), а затем набрать степень десяти (не более 99). Для введения отрицательной степени надо нажать клавишу /—/.

Примеры

Число	*Нажимаемая клавиша*
21,53	$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{.}$ $\boxed{5}$ $\boxed{3}$
—5,7	$\boxed{5}$ $\boxed{.}$ $\boxed{7}$ $\boxed{/-/}$
$0{,}98\cdot10^{13}$	$\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{9}$ $\boxed{8}$ $\boxed{ВП}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$
$-1{,}3\cdot10^{-2}$	$\boxed{1}$ $\boxed{.}$ $\boxed{3}$ $\boxed{/-/}$ $\boxed{ВП}$ $\boxed{2}$ $\boxed{/-/}$

Число вводится в регистр X, содержимое которого высвечивается на экране. Все, что вводится в машину, необходимо визуально контролировать по экрану. В противном случае могут быть ошибки, особенно при некотором износе клавишного устройства. Стереть с экрана число можно клавишей *стереть* x (C_x).

Одноместные операции. Операции над одним числом называются *одноместными*. К ним относятся следующие операции: возведение в квадрат, извлечение корня, взятие логарифма (десятичного, натурального), нахождение e^x и 10^x, синуса и т. д. Обозначения таких команд написаны не на клавишах, а над ними. При выполнении этих операций надо сначала нажать так называемую *префиксную* клавишу F, а затем соответствующую клавишу.

Примеры

Операция	*Нажимаемая клавиша*	*Результат*
$\sqrt{23{,}5}$	$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{.}$ $\boxed{5}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$	4.8477
lg 314	$\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ $\boxed{F}$ $\boxed{lg}$	2.497
$(-0{,}015)^2$	$\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{/-/}$	
	$\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$	$2.25\cdot10^{-4}$

При вычислении тригонометрических функций надо указать переключателем «Р — Г», в градусах или в радианах задан угол.

Примеры

Операция	*Положение переключателя*	*Нажимаемая клавиша*	*Результат*
sin 30°	Г	3 0 F sin	$5 \cdot 10^{-1}$
sin 30	Р	3 0 F sin	$-9.88 \times \times 10^{-1}$

Некорректные операции. Операции: деление на нуль, извлечение квадратного корня из отрицательного числа, логарифмирование отрицательного числа, попытки набрать число, большее $9.9999999 \times \times 10^{99}$ (переполнение), и др.— являются *некорректными* операциями. В этих случаях калькулятор сообщает об ошибке английским словом «ЕГГОГ».

Пример

Нажимаемая клавиша	*Результат*
C_x F 1/x	ЕГГОГ

Двухместные операции. Стек. Обратная бесскобочная логика. Двухместными операциями называют операции над двумя числами: сложение, вычитание, умножение, деление, а также операцию «X^Y».

В калькуляторах с так называемой *алгебраической логикой* для операции «Y — X» набираются сначала число Y, затем знак —, затем число X и знак =, т. е. «действуй, как в алгебре». Например, порядок набора чисел и команд для вычисления $(a+b) \cdot c$ при $a=4$, $b=5$, $c=2$ по алгебраической логике следующий:

(4 + 5) × 2 = .

Такую логику используют в выпускаемых в СССР непрограммируемых калькуляторах. Во всех программируемых калькуляторах используют *обратную бесскобочную логику*. Сначала числа накапливают в регистрах операционной памяти, а затем указывают операции, которые с ними надо сделать. Как говорилось выше, регистры операционной памяти образуют стек — устройство типа магазина, в который числа закладываются в определенном порядке, например c, b, a.

Регистры стека изображены на рисунке 40. При наборе числа оно поступает в регистр X (РгX). Его можно поднять в РгY клавишей ↑, а в РгX ввести новое число. Если теперь нажать клавишу ↑, то из РгY число поднимется в РгZ, из РгX — в РгY, а в РгX можно ввести следующее число и т. д. Всего в стеке 4 регистра (есть еще пятый регистр «предыдущего результата» — регистр X_1 — см. ниже).

Перемещение чисел в стеке показано в таблице 3.3.1. Содержимое регистров X и Y можно поменять местами командой $\overrightarrow{\underleftarrow{XY}}$, которая часто обозначается знаком $\leftrightarrow$. Опустить все числа по стеку можно командой F ⟳. При этом число из X перемещается в РгТ (циклическая перестановка — см. табл. 3.3.1). В результате одноместной операции меняется только содержимое РгХ, где вместо исходного X появляется результат операции. Предыдущее значение X отправляется в X_1, откуда его можно достать командой F B_x (см. табл. 3.3.1).

T	
Z	c
Y	b
X	a
X_1	

Рис. 40

Для двухместных операций, например из b вычесть a, b разделить на a и др., нужно иметь число b в PгY, число a в РгХ и дать команду «—» или «÷». Так, для нахождения разности 7—5 нажимают следующие клавиши:

$\boxed{7}\,\boxed{\uparrow}\,\boxed{5}\,\boxed{-}$, а для вычисления $(4+5)\cdot 2$ — клавиши $\boxed{2}\,\boxed{\uparrow}\,\boxed{5}\,\boxed{\uparrow}\,\boxed{4}\,\boxed{+}\,\boxed{\times}$. Ниже будем опускать рамку, обозначающую клавишу. Для вычисления $\sqrt{\frac{(4+5)\cdot 2}{6}}$ можно набрать числа 6, 2, 5, 4, а затем — клавиши $+ \times \leftrightarrow \div$ F $\sqrt{\ }$. При этом в стеке происходят перемещения, показанные в таблице 3.3.2. Команду «$\leftrightarrow$» пришлось ввести для того, чтобы не 6 делилось на 18, а 18 на 6.

Можно, конечно, и постепенно вводить числа и не использовать весь стек: $4 \uparrow 5 + 2 \times 6 \div$ F $\sqrt{\ }$.

Хотя и не всегда, но этот способ проще, а в ряде случаев и лучше. Обратите внимание на то, что после команды «+» мы не даем команду «$\uparrow$» (поднять в Y), а сразу вводим следующее число: 2. Дело в том, что, для того чтобы было удобно проводить такие вычисления, в ПМК при вводе числа в РгХ после какой-либо операции предыдущее значение X само поднимается в PгY (см. табл. 3.3.1). Это сокращает число команд. Аналогично не нужно ставить $\uparrow$ после команды «$\times$», и команда «$\uparrow$» остается только после ввода первого числа (иначе между вводами чисел 4 и 5 не было бы никакой операции и на экране набралось бы число 45).

Использование ячеек памяти. Четырнадцать ячеек памяти (ЯП) имеют обозначения 0, 1, 2, ..., 9, А, В, С, Д. Число, находящееся в РгХ, можно положить на хранение в ЯП5, дав команду П5 (префиксная клавиша П и номер ячейки 5). Если содержимое РгХ изменилось или вообще стерто, то можно достать число из ЯП5 командой ИП5. Например, если нажать клавиши в таком порядке: 2 3 П 5 C_x ИП5, то на экране восстановится число 23. При этом в ЯП5 копия данного числа останется, и можно доставать оттуда это число сколько угодно раз. Содержимое ЯП5 изменится только при введении туда другого числа или при выключении машины.

Если положить число 4 в ЯП0, 5 — в ЯП1, 2 — в ЯП2, 6 — в ЯП3 (клавиши 4 П0 5 П1 2 П2 6 П3), то предыдущий пример решается еще проще: ИП0 ИП1 + ИП 2 × ИП3 ÷.

Обратите внимание, что после ИП0 мы не поставили команду «↑». Дело в том, что ИП0 — это тоже *операция*; ввод числа 5 командой ИП1 происходит после операции, а следовательно, предыдущее значение 4 само поднимается в РгY. (В калькуляторах первого типа этого не произойдет и команда после ИП0 нужна.)

3.4. ВВОД ПРОГРАММЫ И РАБОТА ПО ПРОГРАММЕ

Вычисления по программе. Все приведенные в предыдущем параграфе последовательности команд — это программы. Только подавались эти команды вручную поодиночке (ручной режим). Можно записать все команды (программу) в ОЗУ управления и пустить машину на автоматический счет по программе.

Для ввода программы нужно перевести машину в режим программирования клавишами F ПРГ. В правой части экрана появятся цифры 00. Это означает, что пользователю предлагается ввести первую команду. Введем, например, команду ИП0. В левой части экрана появится условное обозначение этой команды: 60. Это так называемый *код* операции. В правой части появится приглашение ввести вторую команду: 01 (команды нумеруются с 00 так, что 01 — это будет второй шаг). Введем команду ИП1 (шаг 01, код 61). Код предыдущей команды сместится вправо, а слева появятся цифры 61. Справа появится приглашение сделать следующий шаг: 02 и т. д.

Введем полностью всю программу вычисления $\sqrt{\frac{(a+b)\cdot c}{d}}$ при условии, что a уже хранится в ЯП0, b — в ЯП1, c — в ЯП2 и d — в ЯП3, или эти значения будут заложены в память после ввода программы (но до работы по этой программе!); в конце программы надо обязательно дать машине команду *остановиться* (С/П):

ИП0 ИП1 + ИП2 × ИП3 ÷ F $\sqrt{}$ С/П.

При вводе программы надо следить за правильностью кодов. Если машина восприняла не тот код (ошибка при вводе или нечеткая работа изношенных клавиш), то надо вернуться по программе на шаг назад клавишей $\overleftarrow{\text{ШГ}}$ и повторить ввод нужной команды.

Коды наиболее часто встречающихся операций даны в таблице 3.4.1. Первая цифра кода указана в левой колонке, вторая — в верхней строке. В центральной части даны операции. Например, код операции ИПА (достать из ячейки памяти «А») будет 6—, а код операции F $\sqrt{}$ будет 21.

По окончании ввода программы нужно *сразу вернуться* в режим счета, нажав клавиши F АВТ (режим автоматического или ручного счета). Если операнды ранее не были заложены в ячейки памяти, то это можно сделать после возврата, но обязательно в режиме АВТ, а не в режиме ПРГ. Например: F АВТ 4 П0 5 П1 2 П2 6 П3. Теперь можно пустить машину на счет по программе, но при этом необходимо, чтобы машина выполняла команду с первого шага. Для этого счетчик адресов надо *поставить на нуль*. Это делается клавишей В/0. (Клавиша В/0 выполняет две функции. В режиме ПРГ она означает *возврат из подпрограммы*. Значение *установка адреса (шага) на* 00 она имеет только в режиме АВТ.) Итак, даем команду В/0 и пускаем машину на счет клавишей *стоп-пуск* (С/П). Эта клавиша означает *пуск*, если машина стоит, т. е. не делает вычислений, и *стоп*, если машина работает. В процессе вычислений на экране мелькают цифры. Время вычислений зависит от длины программы и характера операций. По окончании счета результат последней операции (перед С/П) высвечивается в РгХ (на экране). В нашем примере время вычислений около 4 с, ответ 1,7320508.

Теперь можно заменить содержимое ячеек и снова пустить машину на счет: В/0 С/П и т. д.

Порядок записи программ. В связи с тем что программы далее будут усложняться, полезно принять строго однообразный порядок их записи. Для каждой программы полезно иметь отдельный разграфленный лист (см. табл. 3.4.2). На этапе (1) производим математическую формализацию задачи: находим нужные формулы, затем определяем порядок расчетов, т. е. составляем алгоритм решения задачи. Затем распорядимся памятью (этап (2)). После этого столбиком будем записывать программу с указанием номера шага (адреса) и кода каждой операции (этап (3)). Справа в программе полезно делать комментарии: иначе в сложных программах даже составитель программы через некоторое время с трудом разбирает, какие части задачи решаются в отдельных блоках программы. При отсутствии опыта удобно, чтобы вся программа была оформлена в один столбик. Если она не умещается по высоте листа, то можно подклеить снизу добавочные листы.

На этапе (4) составим инструкцию — порядок всех процедур, выполняемых пользователем. Пунктиром покажем автоматическую работу машины.

Для проверки правильности программы и инструкции на этапе (5) дадим *тест*. Возьмем простейшие значения для операндов и укажем то, что должно получиться и через какое время.

Из таких листов полезно накапливать свою библиотеку программ.

После решения нескольких десятков задач коды запоминают, и необходимость их выписывать исчезает. Тогда программу записывают короче, например так, как показано в таблице 3.4.3. Желательно, чтобы каждая строка соответствовала определенному этапу вычислений. Достаточно указать номер только для первого шага (адреса) в строке. При решении задач будем пользоваться такой формой записи, но начинающим рекомендуется все операции располагать в столбик и указывать коды, как в таблице 3.4.2.

Проверка программы и ее исправление (редактирование). Прохождение теста через машину является *первым способом проверки программы.* Если тест не проходит, т. е. получается неверный результат, то следует прежде всего проверить, правильно ли заложены операнды (в режиме АВТ командами ИП0, ИП1 надо просмотреть содержимое ячеек памяти и сопоставить это с этапом (2)). Обнаружив ошибку, следует заложить в ЯП правильное значение и снова действовать по инструкции.

Если ошибок во введении операндов нет, следует проверить программу по кодам — *второй способ проверки программы.* Поставив машину на нулевой шаг (F АВТ В/0), перейдем в режим программирования (F ПРГ) и произведем пошаговую проверку кодов программы многократным нажатием клавиши *шаг вперед* ($\overrightarrow{\text{ШГ}}$). Обнаружив неверный код на каком-либо шаге, следует сделать *шаг назад* ($\overleftarrow{\text{ШГ}}$), ввести правильную команду и продолжить просмотр программы клавишей $\overrightarrow{\text{ШГ}}$.

Не рекомендуется всю программу набирать заново. При этом могут появиться новые ошибки.

Третий способ проверки программы — пошаговое выполнение операций. Проверив правильность введения операндов в память, можно, нажимая (в режиме АВТ после установки на шаг 00) клавишу *пошаговое прохождение* (ПП), просить машину выполнять операции по одной, каждый раз выдавая на экран результат. Так, в нашем примере должны появиться числа 4 5 9 2 18 6 3 1,73 ... .

Этот способ особенно полезен, если нет уверенности в правильности подготовленной на бумаге программы, например при отладке самостоятельно составленной программы.

3.5. ОРГАНИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДОВ И ЦИКЛОВ

Организация безусловных переходов. Автоматическое изменение параметров. Пусть нужно многократно произвести вычисления по формуле $\sqrt{\frac{(a+b)\cdot c}{d}}$ при разных значениях c. Для этого нужно каждый раз заменять значение c в ЯП2 (c П2). Чтобы не забывать ставить программу перед пуском на нулевой шаг, можно добавить в конце программы такие команды: БП 00 (см. табл. 3.4.2 и 3.4.3). Это означает *безусловный переход на шаг 00* (по адресу 00). Теперь после останова машины на шаге 08 мы можем ввести новое значение c и, не нажимая на клавишу В/0, дать команду *пуск* (С/П). Машина выполнит команды 09 и 10, которые означают *перейти по* *адресу* 00. Далее она выполнит всю программу до шага 08 включительно. В программе переход можно показать стрелкой.

Если значение c меняется всегда на одну и ту же величину Δc, то можно эту работу по изменению операнда c поручить машине (автоматическое изменение параметра). Введем Δc в ЯП5 (см. табл. 3.4.2), а программу и инструкцию изменим так, как показано в таблице 3.5.1. Теперь каждое нажатие на клавишу С/П (без В/0!) будет давать значение выражения уже с измененным значением c. В результате быстро может быть составлена таблица значений этого выражения или какой-либо функции.

Подпрограммы. Если основная программа является стандартной (например, программа вычисления определенного интеграла), а часть вычислений приходится часто менять (нахождение значения подынтегральной функции), то удобно эту часть вынести в отдельную подпрограмму. Тогда в программе ставится команда ПП, что в режиме ПРГ означает *переход на подпрограмму*, и далее указывается адрес, где эта подпрограмма расположена в памяти машины. В конце подпрограммы надо поставить команду В/0, что в режиме ПРГ означает *возврат из подпрограммы* (см., например, табл. 4.3.1).

Организация условных переходов. Такая организация осуществляется с помощью команд Fx<0, Fx=0 и т. д. Пусть в результате операции 30, получено число N. И если это число N больше числа M или равно ему (хранится в ЯПА), то надо выполнять операцию 45 и далее. Если же $N<M$, то надо остановиться, высветив на экране число N. Составляем фрагмент программы следующим образом:

	. . .		
	30	. . .	$\}N$
	31	ПД	
	32	ИПА	$\}N-M$
	33	—	
	34	Fx<0	
	35	$\boxed{45}$	Да
	36	ИПД	
Нет	37	С/П	
	. . .	. . .	
	. . .	. . .	
	. . .	. . .	
	45	. . .	

т. е. находим разность $N-M$ и ставим вопрос: $(N-M)<0$? (клавиши Fx<0). *Если «Да»*, то машина будет выполнять далее команду, расположенную *через шаг. Если «Нет»,* то машина *пойдет по адресу, указанному в следующем шаге после команды Fx*<0.

Вводя программу в машину, мы набираем все команды подряд, как они написаны в программе, но работать машина будет по стрелкам в зависимости от выполнения условия.

Организация циклов. Преимущества вычислительной техники проявляются главным образом в таких задачах, где одни и те же операции нужно повторять много раз. В этих случаях машину возвращают тем или иным способом назад к предыдущему этапу определенное число раз. Допустим, нужно найти сумму

$$z=\sum_{n=0}^{N}(n+5{,}2)^2.$$

Программа дана в таблице 3.5.2. По этой программе машина будет многократно совершать циклы по стрелкам, изображенным слева (каждый раз с новым значением n), до тех пор, пока на шаге 10 не окажется, что условие $Fx\geqslant 0$ выполнилось. Тогда произойдет выход из цикла по стрелке справа и останов на шаге 13.

В ПМК типа Б3-34 предусмотрен и другой, чуть более совершенный способ организации циклов. В одну из ячеек 0, 1, 2 или 3 закладывается общее число необходимых циклов (у нас — 101 при $N=100$, так как надо считать и $n=0$). Вместо условия $Fx\geqslant 0$ в конце каждого вычисления ставится команда FL0. По этой команде машина обращается в ЯП0, вычитает из содержимого 1 и производит анализ на 0. Если 0 еще не достигнут, то машина переходит на указанный за этой командой адрес, а если 0 достигнут, то — через шаг. Тогда программа в таблице 3.5.2 может быть заменена на программу таблицы 3.5.3. Это несколько сокращает программу и время счета по ней.

Здесь и ниже будем записывать программу более компактно, т. е. располагать несколько команд, которые в совокупности обеспечивают некоторый смысловой блок, в одну строку, в конце которой будем ее комментировать, указывая, какую задачу решает данный блок. Номер шага будем проставлять только у первой команды в строке. Коды команд указывать не будем. Начинающим все же рекомендуется вначале переписывать программу так, как это сделано в таблице 3.5.2 и ранее, проставляя все коды.

Полный перечень всех команд дан в таблице 3.5.4. Здесь не была дана только организация косвенных переходов, но это применяется реже и при решении задач, приведенных ниже, не используется.

3.6. ПЕРСОНАЛЬНЫЕ ЭВМ (ДИАЛОГО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ). ЯЗЫКИ ОБЩЕНИЯ С МАШИНОЙ

Персональные электронно-вычислительные машины (ПЭВМ), диалого-вычислительные комплексы (ДВК) или персональные компьютеры отличаются от ПМК значительно бóльшим объемом оперативной памяти, возможностью вводить весьма сложные и длинные программы (например, до десятков тысяч команд вместо 98, как было в ПМК), бóльшим быстродействием (до миллиона операций в секунду), а также возможностью выводить информацию на телевизионный экран (дисплей) и записью информации во внешнем постоянном запоминающем устройстве (ВП — см. рис. 38) в неограниченном количестве (определяется только количеством магнитофонной ленты или магнитных дисков).

Диалого-вычислительные комплексы (ДВК) могут быть разных типов: ДВК-2, ДВК-3 и т. д. БК-0010 (бытовой компьютер, в котором в качестве дисплея используется бытовой телевизор, а в качестве ВП — бытовой кассетный магнитофон), ЕС-1845, «Ямаха», «Корвет», «Агат», УК-НЦ и т. д. Они отличаются друг от друга объемом памяти, быстродействием, наличием или отсутствием графического дисплея (возможностью выводить на дисплей чертежи или вводить чертежи с дисплея в машину с помощью электрического карандаша), цветного дисплея и т. д.

Однако большое многообразие таких машин не означает необходимость изучения каждой из них в отдельности. Существует способ, который позволяет работать на любом ДВК и любой ЭВМ, не приспосабливая программы к определенному типу устройства. Этот способ заключается в том, что составляется определенный единый язык (перечень команд и приемов), на котором условливаются говорить с машиной. Приступая к работе с ДВК или ЭВМ, нужно обучить машину этому языку, т. е. надо ввести в машину определенный словарь, с помощью которого она сможет переводить наши команды в свои машинные команды (машинные коды). Такой словарь записывается на магнитном диске (или ленте) и носит название *интерпретатор* или *компилятор*.

Существует несколько языков, например Паскаль, Фортран, Бейсик и др. [2—7]. Из них язык Бейсик придуман специально для непрофессионалов. Он наиболее прост для пользователя, удобен для быстрой отладки программ, но более сложен для машины, занимает в ней сравнительно большой объем памяти и неоптимален в отношении скорости решения задач.

В системе образования принят язык Бейсик, точнее, один из его вариантов (версий). Мы будем использовать только этот язык. Для работы на нем нужно загрузить соответствующий интерпретатор с диска (или ленты) в ОЗУ машины. (В некоторых ПЭВМ интерпретатор Бейсика встроен в машину и вводить его не нужно.) Правила ввода интерпретатора в машину для каждого комплекса свои; поэтому нужно пользоваться инструкцией, которая описывает несколько коротких действий: например, вставить дискету, нажать такие-то клавиши и др. После ввода интерпретатора машина должна сообщить о готовности к работе на соответствующем языке: например, напечатать двоеточие «:», или READY, или OK.

3.7. ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА ЯЗЫКЕ БЕЙСИК

Перечень команд, т. е. программу, составляют в виде отдельных строк. В начале каждой строки ставят ее номер: 1, 2, 3 и т. д.

В программе допускается иметь много строк, например 10000. Поэтому строки можно не экономить и при составлении программы их нумеруют обычно не подряд, а, например, так: 10, 20, 30. Это дает возможность при необходимости вставить между строками 10 и 20 строку 15 и др.

Команды записывают в виде условных комбинаций букв и других знаков, набираемых на клавиатуре. Команды могут быть такими же, как в ПМК, или сложнее. *Конкретное указание машине, т. е. обозначенное символом правило (предписание, инструкция) обработки информации и получения результата, называется* ***оператором***.

В качестве операторов Бейсика используются сокращенные английские слова или комбинации слов: например, GOTO 50 означает «иди на строку 50», т. е. безусловный переход на строку 50 (от английских слов «go» «to», обычно без пробела между ними). Пользователь должен знать команды Бейсика и приемы их использования. Список операторов дан в таблице 3.7.1. Мы будем вводить те или иные операторы по мере необходимости, притом не все, а только те, которые будут нужны для решения приведенных в разделе 2 задач.

К сожалению, в употреблении находится много вариантов языка Бейсик, отличающихся друг от друга некоторыми деталями. Ниже по возможности будем подчеркивать эти отличия.

3.8. ДВА РЕЖИМА РАБОТЫ ПЭВМ

Как и в ПМК, где можно было переходить в режим программирования (F ПРГ) или в режим счета (F АВТ), в ПЭВМ также есть эти два режима, но машина переходит из одного в другой автоматически в зависимости от действия оператора (пользователя).

Вся вводимая в машину информация, а также информация, выводимая из машины, в виде строк располагается на дисплее или на бумаге пишущей машинки. Для перехода на следующую строку нажимают клавишу *возврат каретки* (ВК), иногда *перевод строки* (ПС), а иногда ↲ или ↲. Если, набирая на клавиатуре строку, пользователь в начале строки наберет номер строки, то команды (операторы) в строке будут включаться в программу (режим ПРГ); если же номер не набирается, а печатается сразу оператор (команда), то это означает просьбу выполнить указанные действия сразу после окончания набора строки и команды ВК (режим АВТ). Например:

115 PRINT (210—17)/(5.2—5)

— машина заложит это строкой 115 в программу;

PRINT (210—17)/(5.2—5)

— после *возврата каретки* машина сосчитает это выражение и напечатает ответ.

Строку 115, которую желательно ввести в программу, можно напечатать и после строк с бо́льшими номерами. Перед выполнением программы машина просмотрит всю программу и расположит строки в порядке возрастания номеров.

На пробелы между оператором и числом в строке машина не обращает внимания. Их можно делать или не делать, но нельзя делать пробелы между буквами оператора.

Независимо от того, печатается ли строка для программы или для работы в непосредственном режиме, она должна начинаться с оператора и служебных знаков после него, если этого требует данный оператор.

В большинстве версий языка Бейсик (но не во всех) в одной строке можно набрать несколько операторов, записывая их через знак :. Например:

150 PRINT'Z'=Z:PRINT'W'=W:GOTO 200

(В ряде версий для разделения операторов используется знак \ вместо двоеточия. Эти детали следует всегда уточнять по описанию используемого варианта языка.) Но при начальном обучении это не всегда рационально, так как затрудняет редактирование программы.

3.9. ВВОД ОПЕРАНДОВ (ДАННЫХ). ОПЕРАТОР ПРИСВОЕНИЯ

Вместо закладывания чисел в ячейки памяти, как в ПМК, в ПЭВМ вводятся числовые переменные (существуют еще символьные переменные, которые при решении физических задач используют реже), и им присваиваются значения. Числовые переменные могут иметь имена: A, B5, D0, Z9 и т. д., т. е. латинская буква с цифрой или без цифры.

Чтобы присвоить переменной B5 значение 17, в программу следует ввести строку 10 LET B5=17.

Оператор LET «пусть» — оператор присвоения. Набирать его необязательно, поэтому можно набрать 10 B5=17.

Машина сама вставит оператор, найдет место в ОЗУ данных для хранения этого числа и по требованию выдаст его.

Числа набираются по следующим правилам:

3,457 →3.457, или .3457E1, или 345.7E—2
$-0{,}5\cdot10^6$ →—0.5E6 или —.5E6
—0,0068 →—6.8E—3 или —.68E—2
π →#PI,

откуда видно, что клавиша E (латинская буква! следить внимательно, на каком регистре набирается буква E) означает *ввод порядка*. После *ввода порядка* число должно быть целым. Знак #PI означает «ввести число π». (В других вариантах Бейсика обходятся без знака #. Иногда число π вообще не предусмотрено, и приходится вводить 3,14.)

Для отличия нуля от буквы *O* в большинстве случаев нуль перечеркивают, например Ø.

При вводе значений углов следует помнить: формулы, содержащие углы, угловые скорости, угловые ускорения, подразумевают, что углы выражаются в радианах, а не в градусах. Для перевода градусов в радианы в ряде вариантов Бейсика есть оператор RAD; RAD (180) будет означать введение числа 3,14... . Для обратного перевода используется оператор DEG; DEG (1,07 ...)=90. Если таких операторов нет, то обозначив угол в градусах через A1, а в радианах — через A2, следует самим делать необходимые переводы, вводя строки

```
135 A2=3.14*A1/180
195 A1=180*A2/3.14
```

Строка

```
500 B5=A1
```

означает, что переменной B5 присваивается то значение, которое в данный момент имеет переменная A1. Строка

```
510 X=X+1
```

означает присвоение переменной X старого значения X плюс 1, т. е. увеличение X на 1. Строка

```
520 Z=SIN (Z)
```

означает присвоение переменной Z нового значения, равного синусу от старого значения.

Ввод операндов может производиться, кроме оператора LET, еще операторами INPUT и DATA ... READ. Об этом см. разделы 3.13 и 3.17.

3.10. ОПЕРАТОРЫ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ. СТАНДАРТНЫЕ (ВСТРОЕННЫЕ) ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

Любое выражение (совокупность арифметических действий над операциями) записывают в строку с помощью операторов +, —, * (умножить), / (делить), ⌐ (возвести в степень). Машина выполнит эти действия в том порядке, как это принято в алгебре (сначала возведение в степень, затем умножение и деление, затем сложение и вычитание). Порядок можно, как и в алгебре, изменить введением скобок. Например, чтобы вычислить выражение

$$z=\frac{Ax^2+Bx+C}{D-2{,}5},$$

его на языке Бейсик надо записать так:

```
10Z=(A*X ⌐ 2+B*X+C)/(D-2.5)
```

Если выражение сложное, его лучше вычислять по частям. В нашем примере можно это сделать так:

```
10 X1=A*X^2+B*X+C
20 X2=D-2.5
30 Z=X1/X2
```

В машине заложены микропрограммы для вычисления синуса, логарифма и т. д. Поэтому вычисляемые выражения могут содержать команды SIN (X) (латинские буквы! следить за регистром), LGT (X1) (десятичный логарифм X1). В некоторых вариантах — LOG 10 (X1) (см. описание используемой версии языка). Аргумент должен быть заключен в скобки.

Список встроенных функций дан в таблице 3.10.1.

Можно и самим ввести какую-либо функцию и попросить присоединить ее к вышеперечисленным. Для введения своей функции, например $B(y)=y^3+2\,\mathrm{tg}\,y$ (функция пользователя), надо набрать

200 DEF FNB (Y) = Y ¬ 3+2 * TAN (Y)

Теперь если в программе встретится команда

2030 Z = A * FNB (Y),

то машина вычислит эту функцию и вставит ее значение в это выражение.

3.11. ВЫВОД РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ. ФОРМАТ

Если набрать

```
100 A=2
110 X=3
120 C=5.1
130 Y=.1
140 Z=(A*X^2+C)/SIN(Y)
```

то машина вычислит это выражение и присвоит его значение переменной Z, т. е. запомнит результат, но не выведет его на дисплей (или на печать). Вывод результата производится оператором PRINT, так что, для того чтобы увидеть результат, надо заменить строку 140 на

140 PRINT (A * X ¬ 2+C)/SIN (Y)

или

140 PRINT'Z=' (A * X ¬ 2+C)/SIN (Y)

То, что поставлено между апострофами, машина воспроизводит дословно. В некоторых вариантах Бейсика используются кавычки. Можно строку 140Z = *A* * X ¬ 2. . . и т. д. не заменять, а добавить строку

141 PRINT Z

или

141 PRINT' Z='Z

Как указывалось выше, число может быть представлено в разном виде. Говорят, что это число задано в разных форматах. Обозначают формат так:

Число	*Формат*
38.457 ⟶	!2.3! (с фиксированной точкой)
3.8457E1 ⟶	!F1.4! (физический формат с плавающей точкой)
38457.E—3 ⟶	!F5.0!
—0.00068 ⟶	!1.5!
—6.8 E—4 ⟶	!F1.1!

т. е. указывают число знаков до запятой и после. Буква F означает физический формат, т. е. «с указанием порядка». Перед командой вывода чисел на дисплей или пишущую машинку надо указать желательный формат:

```
106 PRINT !F1.4!
107 PRINT Z
```

Однажды введенный формат сохраняется в течение всей работы машины до тех пор, пока не будет сделано новое указание. Если формат не введен, то машина выдает числа всегда в одном формате. (В некоторых вариантах Бейсика формат вводится иначе, например 106 PRINT USING '# . # # # ¬¬¬', Z. Знак ¬¬¬ означает экспоненциальный или физический формат, т. е. «с указанием порядка». Формат не всегда запоминается. В ряде вариантов формат вообще не заказывается.)

Пример простейшей программы на языке Бейсик. Составим программу вычисления длины волны одной из линий излучения водорода (см. задачу 2.16.6). Будем сохранять обозначения этапов действий пользователя, принятые ранее для ПМК. Однако этап 2 отпадает, так как машина распоряжается памятью сама. Обычно программе присваивается какое-нибудь имя. Если машина будет искать эту программу среди других, то она опознает ее по первым шести знакам имени. Программа дана в таблице 3.11.1.

3.12. ПРОВЕРКА И РЕДАКТИРОВАНИЕ ПРОГРАММЫ

Если при вводе программы или при выполнении вычислений машина обнаруживает ошибки в действиях пользователя, то она сообщает об этом фразой «ошибка 123 в строке 100» или SYNTAX ERROR AT LINE 100. Расшифровку сообщений об ошибках следует найти в описании используемой версии языка Бейсик. В этих случаях, а также и тогда, когда машина выдает неверный ответ, например «тест не проходит», усвоенную машиной программу можно проверить, попросив «распечатать» программу оператором LIST (и ВК). Если нужно вывести только одну строку программы, например 50, то набирается LIST 50.

При необходимости что-либо изменить в строке можно набрать номер строки (именно так старая строка под этим номером уничтожается) и набрать (или не набирать) новое содержание строки.

Если возникает необходимость вставить между строками 30 и 40 дополнительную строку, то можно (в любое время) набрать номер 35 и содержание этой добавочной строки. Например:

```
35 PRINT ' N='N, 'M='M
```

Если теперь дать команду LIST (и ВК), то можно увидеть, что машина вставила эту строку в нужное место, а после команды RUN (и ВК) машина напечатает перед значением L еще и значения N и M.

Если нужно из оперативной памяти удалить все программы и *детали программ — файлы,* то в большинстве версий Бейсика следует набрать NEW. При этом остаются только программы, записанные на внешней памяти.

Предусматриваются и другие способы редактирования программы (в разных версиях Бейсика разные). Например, используется команда редактирования SUB: для исправления строки 15 PRINT (A+B)/C: PRITTZ набрать SUB 15: TT:NT — и после нажатия печатается исправленная строка. Чаще же всего пользуются *курсором* — световым указателем. Клавишами управления курсор подгоняют в нужное место и на место неправильного текста набирают правильный. (Следует уточнить детали по описанию используемой версии.) Для вывода программы на печать (на принтер) используют оператор LLIST.

3.13. ОРГАНИЗАЦИЯ ДИАЛОГА С МАШИНОЙ. ОПЕРАТОР INPUT

Для беседы с машиной (для ответов на ее вопросы, введения новых значений операндов) необходимо, чтобы в определенных местах программы были предусмотрены остановки, машина задавала бы пользователю вопросы и предлагала бы что-то ввести. Эта задача решается с помощью оператора INPUT («введите»). Если в предыдущей программе (см. табл. 3.11.1) в строках 30 и 50 произвести замену, например:

```
30 INPUT 'ВВЕДИТЕ N=' N
50 INPUT 'M='M,
```

то машина напечатает текст дословно в апострофах (он может быть любым) и остановится. В некоторых версиях Бейсика не предусмотрена возможность вставки текста в апострофах (в кавычках) после оператора INPUT. Для печатания текста в этом случае надо вводить дополнительную строку

```
25 PRINT 'ВВЕДИТЕ N'
```

Пользователь печатает значение N: например, набирает цифру 2 и нажимает ВК. Тогда машина печатает M=? и надо назвать M. После возврата каретки машина продолжит работу по программе уже с этими значениями операндов.

3.14. БЕЗУСЛОВНЫЕ И УСЛОВНЫЕ ПЕРЕХОДЫ НА ПЭВМ

Безусловный переход со строки, например 520, на строку, например 10, делается введением следующей строки:

```
520 GOTO 10
```

Переход со строки 140 на подпрограмму, расположенную на строке 800, делается так:

```
140 GOSUB 800
```

В конце подпрограммы следует поставить оператор возврата из подпрограммы:

```
890 RETURN
```

Условный переход организуется с помощью операторов IF... THEN... («если ..., тогда...»). Например, команда «если $A \geqslant B$, то иди на строку 452» набирается так:

530 IF A> =B THEN 452

При этом если это условие не выполняется, то машина пойдет на следующую строку, например на строку 540, а если выполняется, то — на строку 452.

В качестве примера программы с условными переходами дадим программу выбора из трех чисел: $A=5{,}2^{1{,}66}$; $B=5{,}3^{1{,}65}$; $C=5{,}4^{1{,}63}$ — наибольшего (см. табл. 3.14.1).

3.15. ОРГАНИЗАЦИЯ ЦИКЛОВ

Для организации циклов (см. разделы 3.1 и 3.5) служат операторы FOR ... TO («для ... до») и NEXT («следующий»). Рассмотрим пример.

Допустим, надо сосчитать 8 линий в серии Бальмера (N=2) для водорода (см. задачу 2.16.6). Необходимо, чтобы при данном N значение M менялось от N+1 до N+8 и с каждым новым M машина возвращалась к вычислениям N по одной и той же формуле (2.16.3), пока M не станет больше N+8. Изменим программу, приведенную в таблице 3.11.1, таким образом:

```
1 PRINT "VODOR"
2 PRINT "ВЫЧ.ДЛ.ВОЛН 8 ЛИН.СЕР.БАЛЬМЕРА"
10 N=2
20 FOR M=N+1 TO N+8
30 R=1.097373E-2
40 Z=R*(1/(N*N)-1/(M*M))
50 PRINT 1/Z "НМ"
60 NEXT M
70 END
```

Тогда образуется цикл. Машина пройдет по этому циклу 8 раз, напечатает 8 ответов и выйдет из цикла на строку 70, когда M станет больше N+8. Пример протокола:

```
RUN
ВЫЧ.ДЛ.ВОЛН 8 ЛИН.СЕР.БАЛЬМЕРА
 656.1123 НМ
 486.0092 НМ
 433.9367 НМ
 410.0702 НМ
 396.9075 НМ
 388.8073 НМ
 383.4423 НМ
 379.6946 НМ
```

Если бы при организации цикла по M следующее значение M отличалось бы от предыдущего не на 1, а на другой шаг, например на H, то следовало бы строку 30 дополнить:

30 FOR M=N+1 TO N+8 STEP H

Естественно, что значение H должно быть до этого введено в машину или здесь указано не в виде буквы, а в виде числа: STEP 2.

3.16. ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ГРАФИКОВ. РАБОТА С ГРАФИЧЕСКИМ ДИСПЛЕЕМ

Для вычерчивания графиков можно использовать оператор TAB, предназначенный для печатания цифр в виде таблиц. Если набрать строку

310 PRINT TAB(10)' * ',

то машина напечатает, отступя 10 знаков от левого края бумаги, знак *. Если набрать

310 PRINT TAB (Y)'+',

то она напечатает знак + на расстоянии Y от левого края.

Может оказаться, что $Y>100$ (на бумаге или экране умещается, допустим, 100 знаков). Например, максимальное значение Y может быть равно 450. Тогда следует набрать

310 PRINT TAB (Y/5)'+'

Если Y — отрицательный (например, до —50), то следует набрать

310 PRINT TAB ((Y+50)/10)'+',

что сдвинет Y на 50 знаков в сторону увеличения для того, чтобы Y+50 никогда не было отрицательным.

Для изображения целого графика функции, например синусоиды для X от 0 до 2π, следует набрать

```
310 FOR X=0 TO 2*PI STEP .3
312 PRINT TAB((SIN(X)+1)*30)"*"
314 NEXT X
316 END
```

Здесь поправка на 1 сдвигает всю синусоиду в область положительных значений, а умножение на 30 растягивает ее по высоте на всю ширину бумаги. Результат приведен на рисунке 41. Шаг выбран таким, чтобы график разместился в разумном числе строк (на разумной длине бумаги), а именно $2\pi/0.1\approx60$ строк.

Такой способ вычерчивания графиков не является наилучшим и не использует всех возможностей машины. При наличии графического, а тем более цветного дисплея графики и любые другие рисунки могут быть выведены на экран в значительно более совершенном виде [8, 9].

Операторы, управляющие графикой, могут слегка различаться в различных версиях Бейсика. Приведем наиболее распространенный вариант.

Для перевода дисплея в графический (и обратно в текстовой) режим служит оператор SCREEN, после которого ставят номер от 0 до 3:

0 — текст обычными символами (24 строки по 40 символов в строке);

1 — текст большими символами (24 строки по 32 символа в строке);

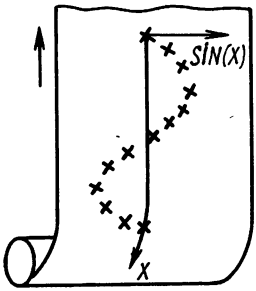


Рис. 41

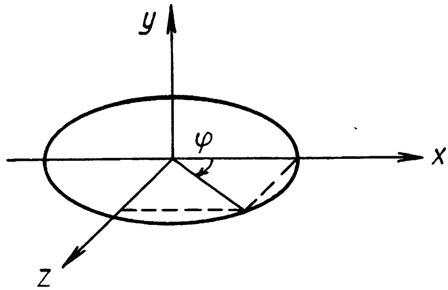


Рис. 43

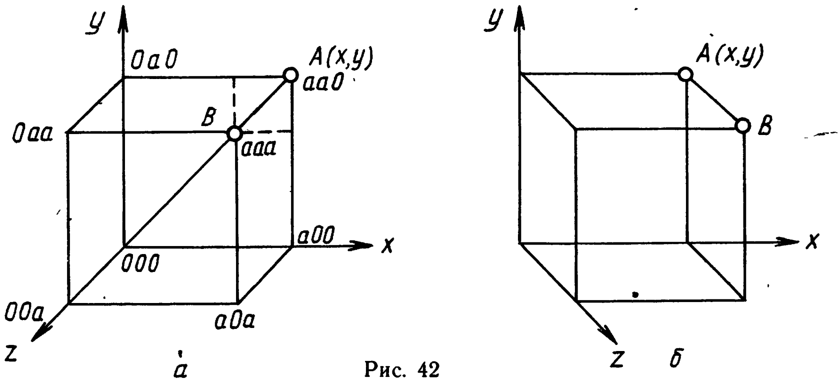


Рис. 42

2 — графики, рисунки изображаются с помощью мелких точек;
3 — графики, рисунки изображаются крупными точками (4×4 мелких).

Для цветного дисплея — установка цвета и цвета точек и линий в графическом режиме:

5 COLOR 15,5

(15 — цвет точек и линий; 5 — цвет фона). Номера цветов следует уточнить по описанию дисплея. Например:

1 — черный	9 — красный
2 — зеленый	10 — желтый
5 — синий	15 — белый

Точка X=0, Y=0 (0,0) может быть расположена в левом верхнем углу экрана. Для постановки точки на 10 позиций правее и на 30 ниже следует в программе указать

```
10 SCREEN 2
20 PSET (10,30), C
```

В конце последней строки после запятой указан номер цвета (например если C=9, то цвет будет красным, и т. д.). Для постановки большого числа точек (вычерчивание графика, например, $y=e^x$) следует поступить так:

```
10 SCREEN 2
20 FOR X=0 TO 2 STEP .01
30 Y=EXP(X)
40 PSET (X*100,191-Y*20),8
50 NEXT X
60 GOTO 60
```

В строке 40 стоит не PSET (X,Y), а более сложное выражение. Дело в том, что в режиме SCREEN 2 на экране получается, допустим, 255 точек по оси X и 191 — по Y и надо, прикинув максимальный размах значений по X и по Y, с помощью множителей (в данном случае 100 и 20) увеличить или уменьшить размер изображения так, чтобы оно было не больше и не меньше экрана. Кроме того, строка 40 написана для случая, когда по вертикали расстояния на дисплее отсчитываются вниз, а не вверх, как обычно при вычерчивании графиков. Для того чтобы Y отложить вверх, надо после запятой в операторе PSET поставить не Y * 20, а 191 — Y * 20. (В некоторых устройствах это учтено. Тогда указывают просто: PSET (X * 100, Y * 20), 8. В некоторых машинах (например, УК-НЦ) масштабы изображения по вертикали и горизонтали разные и нужно вводить поправочный множитель для Y, например Y * 20 * .64)

Для вычерчивания прямой линии из точки (X1, Y1) в точку (X2, Y2) цветом 8 служит оператор

140 LINE (X1, Y1) — (X2, X2), 8

Для вычерчивания окружности с центром в точке (X, Y) радиусом R линией цвета C:

150 CIRCLE (X, Y), R, C

Заметим, что, как только программа выполняется, сразу автоматически осуществляется переход в текстовой режим и изображение пропадает. Чтобы задержать его, надо поставить в конце строку

60 GOTO 60,

которая зациклит программу на неопределенно длительное время. Также надо знать, как вернуться в текстовой режим (один из вариантов — нажать одновременно клавиши CTRL и STOP).

Этого минимума сведений достаточно для вычерчивания требуемых в задачах графиков. Однако возможности машины обычно много шире: например если одновременно с графикой (линиями, точками) нужно кое-где поставить символы (буквы, цифры), то следует открыть файл вывода символьной информации в графическом режиме:

20 OPEN"GRP" AS1

(это нужно уточнить по описаниям машины и используемого варианта языка). Теперь, если необходимо поставить символ, например W в точку (X, Y), то надо ввести строку:

120 PRESET (X, Y) : PRINT # 1, "W"

Для постановки в данную точку не символа W, а численного значения величины W кавычки отбрасываются:

130 PRESET (X, Y) :PRINT # 1, W

Для изображения на плоском экране трехмерного объекта, у которого каждая точка имеет координаты x, y, z, поступают так: точку с координатами x, y смещают вниз и влево (или вправо). Величину смещений делают зависящей от величины z (рис. 42). Например, угол куба с координатами $x=a$, $y=a$, $z=a$ изображают на экране в точке

$X_э=x-\frac{z}{2\sqrt{2}}=a-\frac{a}{2\sqrt{2}}$, $Y_э=y-\frac{z}{2\sqrt{2}}=a-\frac{a}{2\sqrt{2}}$. Окружность радиусом $R=50$, лежащую в плоскости xz и описывающуюся уравнением

$$x=R\cos\varphi$$
$$y=0$$
$$z=R\sin\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$$

(рис. 43), можно нарисовать так:

```
1 PRINT "OKR"
2 PRINT "ОКРУЖНОСТЬ"
10 R=50
20 SCREEN 2
30 FOR F=0 TO 2*PI STEP .01
40 X=R*COS(F)
50 Y=0
60 Z=R*SIN(F)
70 X8=X-Z/(2*SQR(2))+100
80 Y8=Y-Z/(2*SQR(2))+100
90 PSET (X8,Y8)
100 NEXT F
110 GOTO 110
120 END
```

Освоение этих и других деталей можно отложить до приобретения достаточных навыков.

3.17. РАБОТА С МАССИВАМИ ЧИСЕЛ

Если данных много, то удобно занести их сначала в особый блок — *блок записи данных* (DATA). Для этого надо сначала зарезервировать в ОЗУ место для массива такой командой:

10 DIM A5 (20)

Будет выделено место для одномерного массива под именем A5 в двадцать элементов: A5 (1), A5 (2), ... и т. д. Теперь можно ввести все числа:

200 DATA 1, 2, 5, 7, 8, 103, 75, 9, 13, ... и т. д.

Это надо сделать любой свободной строкой до или после введения программы, но обязательно до работы по программе. Как бы мы ни меняли программу, этот блок чисел сохраняется (до выключения машины, если он не записан на магнитную ленту). Для использования этих чисел их надо вызвать в программу оператором READ («прочти»):

```
30 READ A5 (1), A5 (2), A5 (20).
```

При этом переменной A5 (1) будет присвоено значение 1, переменной A5 (2) — значение 2, переменной A5 (20) — значение 5. Теперь можно работать с этими переменными:

```
40 LET X=A5 (1)+A5 (20)
50 PRINT !2.2! X
60 END
```

При следующем прочтении

```
70 READ A5 (3)
```

переменной A5 (3) будет присвоено значение 7 из DATA.

Для автоматического прочтения большого числа данных из DATA организуют цикл

```
80 FOR I=1 TO 6
90 READ A5 (I)
100 NEXT I
```

По такой команде переменным будут присвоены значения: A5 (1)=1; A5 (2)=2; A5 (3)=5; A5 (4)=7; A5 (5)=8; A5 (6)==103.75, и теперь с ними можно будет работать:

```
110 PRINT!F1.2! A5 (4) * A5 (5)
```

Перед занесением ряда чисел в блок DATA или перед чтением ряда чисел по порядку, начиная с первого, надо ставить счетчик DATA на 0 командой

```
19 RESTORE,
```

иначе прочтение (или занесение в DATA) пойдет не с первого элемента. Для проверки содержания массива можно использовать такой фрагмент:

```
200 FOR K=1 TO 6
210 PRINT A5(K)
220 NEXT K
230 END
```

3.18. РАБОТА С МАГНИТНЫМИ НАКОПИТЕЛЯМИ (МАГНИТНОЙ ЛЕНТОЙ ИЛИ МАГНИТНЫМ ДИСКОМ)

После набора программы и проверки по LIST и RUN можно попросить сохранить программу во внешней памяти (на магнитном диске или магнитной ленте). Пусть программа имеет имя INT и пусть у нас установлена на дисководе магнитная дискета со свободным местом (или в подключенный к компьютеру магнитофон вставлена кассета с магнитной лентой). Тогда, набрав SAVE "INT", мы будем иметь эту программу на диске (ленте). Диск (кассету с лентой) можно вынуть из машины и хранить отдельно или использовать на другой машине.

Для обратной загрузки этой программы с диска (ленты) в ОЗУ следует вставить диск (кассету) и набрать LOAD "INT" (в других версиях — иногда OLD'INT', иногда OPEN'INT'), что означает «загрузить с внешнего накопителя в ОЗУ программу (файл) с именем INT».

Перед загрузкой с ленты надо перемотать ее на начало командой REWIND.

Примерно такие же операции надо совершать и при записи на магнитных дисках.

В кратком тексте невозможно указать все операторы и все правила работы с ними. Для более успешной работы на ДВК следует изучить подробнее описание используемого языка (конкретного варианта) и описание самого комплекса.

4. К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ: ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ (МИНИМАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ)

Раздел математики, где разработаны способы решения различных задач (решение уравнений, интегрирование, дифференцирование, нахождение экстремумов функций и т. д.) не алгебраическим путем и не методами математического анализа, а путем многократных арифметических действий над числами, называется «Численные методы» или «Вычислительная математика». Любая ЭВМ решение всех задач сводит к арифметическим действиям (и к математической логике). Поэтому в программировании широко используются численные методы.

Численные методы решения задач (взятие интегралов, решение уравнений и др.) были разработаны еще во время Ньютона, но оказались очень трудоемкими и давали лишь приближенный результат. После появления вычислительной техники возникла возможность однообразную рутинную работу переложить на машину, а возможность выполнять быстро и автоматически большое количество вычислений привела к тому, что погрешность получаемого приближенного результата может быть сделана сколь угодно малой.

В данном вспомогательном разделе даны только самые простые программы. Они несовершенны (дают сравнительно грубые результаты и неэффективны в отношении скорости вычислений), но имеют для начинающих то преимущество, что они максимально упрощены и доступны для понимания. Более совершенные программы имеются в пособиях по вычислительной математике [10, 11]. Кроме того, необходимые программы могут иметься в готовом виде в записи на лентах или дисках и нужно только ввести их в машину. При этом можно не понимать принципов их использования, но тем не менее ими можно пользоваться. Однако на первых стадиях обучения все же полезно понять суть методов на примере простейших программ.

4.1. МНОГОКРАТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО ФОРМУЛАМ. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Наиболее просты программы для многократных вычислений по каким-либо формулам. Рассмотрим, например, программы для нахождения корней квадратного уравнения. Простейшая программа для ПМК дана в таблице 4.1.1. В таблице 4.1.2 дана более полная программа для ПЭВМ.

4.2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

(Для решения n линейных уравнений с n неизвестными при $n>3$ придется познакомиться с методом Гаусса последовательного исключения неизвестных или с методом Гаусса с выбором главного элемента [10, 11]. Соответствующие программы для ПМК и ПЭВМ есть в [2—7].)

Система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{1,3}z=b_1; \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{2,3}z=b_2; \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{3,3}z=b_3 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

имеет решение:

$$x=\Delta_1/\Delta;\ y=\Delta_2/\Delta;\ z=\Delta_3/\Delta \tag{4.2.2}$$

при условии $\Delta\neq 0$. При $\Delta=0$ и $\Delta_1=0$ (или $\Delta_2=0$; $\Delta_3=0$) решение неопределенно, а при $\Delta=0$; $\Delta_1\neq 0$; $\Delta_2\neq 0$; $\Delta_3\neq 0$ решения нет. Для нахождения Δ выписывают коэффициенты левых частей уравнений в виде таблицы, справа приписывают еще раз первые два столбика:

$$\left|\begin{matrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{matrix} \tag{4.2.3}$$

Затем составляется сумма из произведений членов, пересекаемых диагоналями $a_{11}a_{22}a_{33}$ $a_{12}a_{23}a_{31}$ $a_{13}a_{21}a_{32}$ (эти члены берутся со знаком «+») и диагоналями $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$ (эти члены берутся со знаком «—»):

$$\begin{aligned}\Delta=a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+\\ +a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}-\\ -a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Для нахождения Δ_i перед составлением такой суммы по тем же правилам i-й столбец заменяется столбцом из свободных членов. Например:

$$\Delta_1=\left|\begin{matrix} b_1a_{12}a_{13} \\ b_2a_{22}a_{23} \\ b_3a_{32}a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} b_1a_{12} \\ b_2a_{22} \\ b_3a_{32} \end{matrix}=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+\ldots \tag{4.2.5}$$

Не самый эффективный, но самый наглядный способ нахождения Δ и Δ_i на ПМК такой. Выпишем 9 коэффициентов каждого определителя на бумаге и заложим их в ЯП7...ЯП3 в таком же порядке, как они расположены в определителе ($a_{11} \rightarrow$ П7, $a_{12} \rightarrow$ П8...$a_{32} \rightarrow$ П2, $a_{33} \rightarrow$ П3). Тогда вычисление удобно выполнять по программе, представленной в таблице 4.2.1. Каждое значение определителя Δ, Δ_1, ... надо записать и затем вручную по формуле (4.2.2) найти x, y, z. Существуют программы, сразу выдающие результат [2—7].

Программа для ПЭВМ дана в таблице 4.2.2 в приложении.

4.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Если интеграл табличный или легкоприводимый к табличному, а следовательно, берется методами математического анализа, например

$$I=\int_0^{10}(30x^2+20x)\,dx=\left(\frac{30x^3}{3}+\frac{20x^2}{2}\right)\Big|_0^{10}=1100, \qquad (4.3.1)$$

то нет необходимости прибегать к численным методам; интеграл

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{Ax^2+Bx}{3+\sin x}\,dx \qquad (4.3.2)$$

и многие другие можно взять только численными методами. Рассмотрим простейшие из этих методов.

Определенный интеграл равен площади под кривой $f(x)$ в заданных пределах: x_1, x_2 (рис. 44). Разобъем отрезок $[x_1, x_2]$ на участки Δx и будем вычислять площадь как сумму площадей прямоугольных полосок:

$$I\approx\sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta x, \qquad (4.3.3)$$

где n — число полосок. Такой метод называется «взятие определенного интеграла методом прямоугольников».

В таблице 4.3.1 (см. приложение) дана программа вычислений по этому методу на ПМК, а в таблице 4.3.2 — по этому же методу на ПЭВМ на языке Бейсик.

(В большинстве случаев решения задач численными методами вычисления делаются «шаг за шагом» малыми шагами: Δx, Δt (интегрирование, решение дифференциальных уравнений и т. д.). Обычно трудность вызывает выбор величины этого шага. Если шаг слишком мал, вычисления длятся слишком долго (машина не останавливается в течение длительного времени). Если же шаг велик, то ответ получается слишком грубым или вообще неверным. Рекомендуется заложить сначала такой шаг, чтобы ответ появился достаточно быстро. Затем следует уточнить результат, постепенно закладывая все меньший шаг. Остановиться следует только тогда, когда от уменьшения шага ответ будет достаточно мало меняться. Можно задачу определения величины шага переложить на машину, задав требуемую точность ответа.)

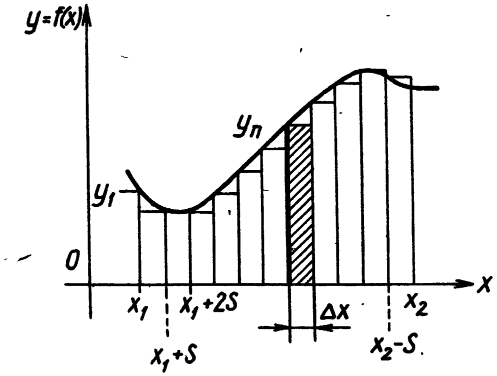


Рис. 44

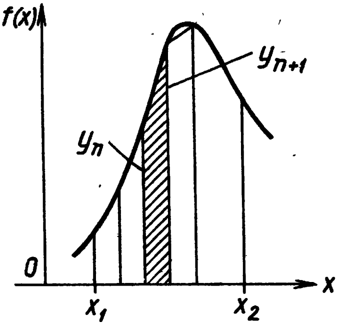


Рис. 45

Однако метод прямоугольников очень груб. Это видно из полученных ответов и из рисунка 44. Значительно более совершенен метод трапеций, когда полоски считаются трапециями (рис. 45). В этом случае

$$I=\left(\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)\Delta x=$$
$$=\left(\frac{y_1+y_n}{2}+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1}\right)\Delta x. \qquad (4.3.4)$$

В таблицах 4.3.3, 4.3.4 и 4.3.5 даны программы для ПМК и ПЭВМ (Бейсик), вычисляющие интеграл по этому методу.

В качестве теста, кроме указанных, всегда полезно взять

$$\int_0^{10} dx \ (y=\text{const}=1), \qquad (4.3.5)$$

который должен быть равен 10 при любом размере шага и при любом методе.

Вычислительная техника позволяет брать определенные интегралы и в том случае, когда подынтегральная функция не задана аналитически (не дана в виде формулы), а задана лишь численно в виде

x_i	0	2	4	6	8	10	12 . . .
y_i	0	2	5	8	18	32	49 . . .

или только в виде графика, из которого такую таблицу можно получить. Сделаем программу так, чтобы вместо вычисления по подпрограмме машина останавливалась для ввода очередных x_i, y_i руками с клавиатуры. Для ПМК при использовании метода прямоугольников соответствующая программа дана в таблице 4.3.6. Для ПЭВМ программа дана в таблице 4.3.7. Более совершенную программу решения такой задачи на ПЭВМ можно составить, предусматривая введение всех чисел в массив (операторы DATA...READ — см. раздел 3.17).

4.4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Линейное уравнение

$$ax+b=0 \tag{4.4.1}$$

сводится к нахождению x по формуле $x=-b/a$. Квадратное — к нахождению x_1 и x_2 по формуле и программам, приведенным в разделе 4.1. Кубическое уравнение

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{4.4.2}$$

всегда может быть приведено к виду

$$y^3+py+q=0 \tag{4.4.3}$$

путем деления его на a и подстановкой $x=y-b/(3a)$. Корни уравнения (4.4.3) могут быть найдены по формуле Кардано:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{4.4.4}$$

Преобразование (4.4.2) к виду (4.4.3) и нахождение корней по выражению (4.4.4) довольно громоздко, поэтому применение вычислительной техники здесь уже вполне рационально. Программа решения уравнения (4.4.3) по этой формуле дана в таблице 4.4.1.

Не менее сложно решение уравнения 4-й степени, если только оно не сводится к биквадратному. Формул для корней уравнений 5-й степени и выше не существует. Уравнения же, где неизвестное встречается не только в какой-либо степени, но и под знаком других функций ($\sin x$, $\lg x$, e^x и т. д.), называются трансцендентными. Кроме самых простых случаев, для нахождения корней этих уравнений формул не существует.

Численные методы в совокупности с вычислительной техникой позволяют решать сравнительно просто всякие уравнения (алгебраические высоких степеней, трансцендентные).

Любое уравнение с одним неизвестным может быть приведено к виду

$$F(x)=0. \tag{4.4.5}$$

Корнем такого уравнения будет значение x, при котором $F(x)$ проходит через нуль (рис. 46). Решение уравнения разобьем на два этапа: изоляция корней и уточнение значения изолированного корня.

Изоляция корня означает нахождение такого отрезка $[a, b]$, где есть корень, и притом только один (см. рис. 46). Эта задача решается либо путем анализа функции $F(x)$, либо вычислением $F(x)$ в нескольких точках по программе и выяснением примерного хода графика $F(x)$. Иногда удобнее разбить $F(x)$ на два слагаемых:

$$F(x)=f(x)+\varphi(x)=0;\ f(x)=-\varphi(x) \tag{4.4.6}$$

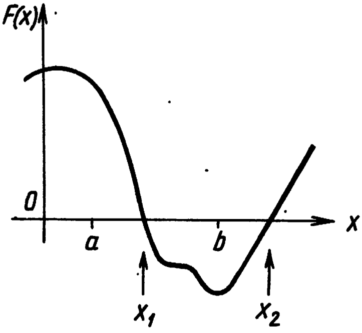


Рис. 46

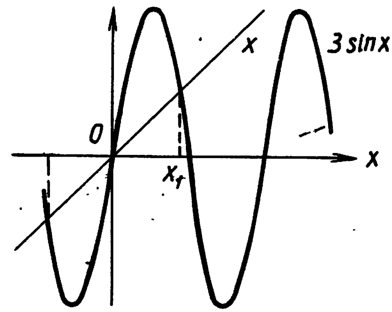


Рис. 47

и приближенно оценить x, при котором графики $f(x)$ и $-\varphi(x)$ пересекаются. Например, решая уравнение $3\sin x - x = 0$, удобно приблизительно на глаз начертить графики $3\sin x$ и x (рис. 47), откуда сразу станет ясно, что один из корней находится где-то между $a = \pi/2 \approx 1{,}5$ и $b = \pi \approx 3{,}1$.

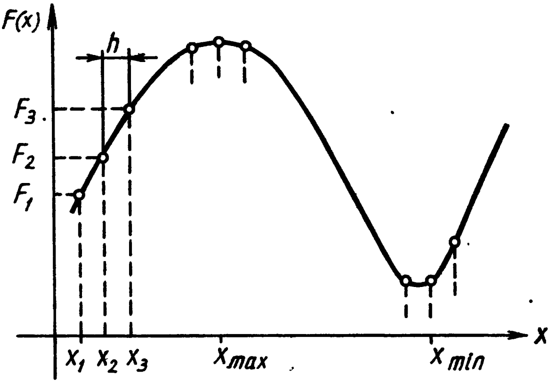
Уточнение корня производят по более или менее совершенным программам. Приведем вначале простейшую. Будем вычислять $F(x)$ во всех точках, начиная с $x = a$ и наращивая x шагами Δx, а также искать точку, где $F(x)$ меняет знак. А для этого будем искать точку, где $F(x)F(a) < 0$, т. е. такое x, где первый раз $F(x)$ имеет знак, противоположный знаку $F(a)$. Для ПМК программа дана в таблице 4.4.2, для ПЭВМ — в таблице 4.4.3. Следует сначала взять шаг Δx крупным, а затем сужать отрезок $[a, b]$ и уменьшать шаг. (Допустим, при $\Delta x = 0{,}2$ корень получился $x = 3{,}2$. Теперь можно взять отрезок от 3,0 до 3,4 и шаг $\Delta x = 0{,}01$ и т. д.)

Более совершенная программа уточнения корня дана в таблице 4.4.4. С помощью этой программы отрезок $[a, b]$ делится пополам и устанавливается, в какой половине находится корень; затем эта половина снова делится пополам и т. д. Ответ по этой программе получается гораздо быстрее и точнее, чем по приведенным выше примитивным программам. (Более совершенные программы см. в [2—7, 10, 11]. Однако в них процесс поиска корня сильно автоматизирован, в то время как предложенная выше программа предусматривает более осознанное использование техники, что методически на начальных стадиях обучения имеет свои преимущества. Программа с делением отрезка пополам для ПЭВМ дана в [6].)

4.5. НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ ЗАВИСИМОСТЕЙ. ОПТИМИЗАЦИЯ

Пусть функция $F(x)$ имеет максимум в некоторой точке x (рис. 48). Будем вычислять $F(x)$ в трех равноотстоящих друг от друга по x на шаг $\Delta x = h$ точках и будем двигаться по кривой $F(x)$. Наличие экстремума означает изменение знака приращения ΔF. Когда такая тройка точек x_1, x_2, x_3 проходит через максимум или минимум, произведение

Рис. 48



$(F_3-F_2)*(F_2-F_1)$ будет отрицательным (см. рис. 48). Здесь надо остановиться и принять значение x_2 за приближенное значение x максимума (минимума).

Распорядимся памятью ПМК и составим программу так, как показано в таблице 4.5.1. С шага 50 расположим подпрограмму вычисления $F(x)$. В таблице она дана для случая $F(x)=x^2e^{-x^2}$. В случае других функций эту подпрограмму надо заменить.

В таблице 4.5.2 дана программа для ПЭВМ.

4.6. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальным уравнением *называется уравнение, содержащее, кроме функции $y(x)$, еще производные dy/dx, d^2y/dx^2* и т. д. Задачей решения *обычного уравнения*

$$y(x)=0 \tag{4.6.1}$$

является нахождение таких *чисел x,* которые, будучи подставленными в уравнение (4.6.1), обращают его в тождество. Задачей решения *дифференциального уравнения*

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\right)=0 \tag{4.6.2}$$

является нахождение таких *функций $y(x)$*, которые, будучи подставленными в уравнение (4.6.2), обращают его в тождество. Например, уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-g \tag{4.6.3}$$

имеет решение:

$$y=A+Bx-\frac{gx^2}{2}. \tag{4.6.4}$$

Если даны начальные условия, например $y\Big|_{x=0}=y_0$, а $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$ $=v_0$, то можно найти значения параметров A, B в уравнении (4.6.4). В данном случае $A=y_0$; $B=v_0$.

В большинстве физических задач дифференциальные уравнения получаются не очень сложными. Но только в некоторых случаях решения находятся аналитически, т. е. в виде формул. Численные методы при наличии даже примитивного вычислительного устройства (например, ПМК) позволяют найти решение *любого* уравнения (4.6.2). Однако ответ получается не в виде аналитической зависимости $y(x)$, как, например, уравнение (4.6.4), т. е. не в виде формулы, а в виде рядов чисел:

x	x_1	x_2	x_3	x_4 . . .
y	y_1	y_2	y_3	y_4 . . .

При этом задание начальных условий обязательно.

Рассмотрим здесь только простейшие случаи. Пусть дифференциальное уравнение приведено к виду

$$dy/dx=f(x, y), \tag{4.6.5}$$

а вид функции $f(x, y)$ известен. Это уравнение первого порядка, так как содержит только первую производную. Заменим приближенно дифференциалы приращениями. Тогда

$$\Delta y=f(x, y)\,\Delta x;$$
$$y_{n+1}=y_n+f(x_n, y_n)\,\Delta x. \tag{4.6.6}$$

Это дает возможность «карабкаться по ступенькам», т. е., зная x_n, y_n (например, из начальных условий известно значение y_0 при заданном x_0), находить y_{n+1} по формуле (4.6.6) и x_{n+1} по формуле

$$x_{n+1}=x_n+\Delta x, \tag{4.6.7}$$

затем следующую пару значений y_{n+2}; x_{n+2} и, таким образом, получить всю зависимость $y(x)$ в виде двух рядов чисел. Это простой метод Эйлера первого порядка. (После приобретения определенного навыка в программировании рекомендуется перейти к использованию более совершенных программ для решения дифференциальных уравнений [2—7, 10, 11].) Алгоритм решения показан на рисунке 49.

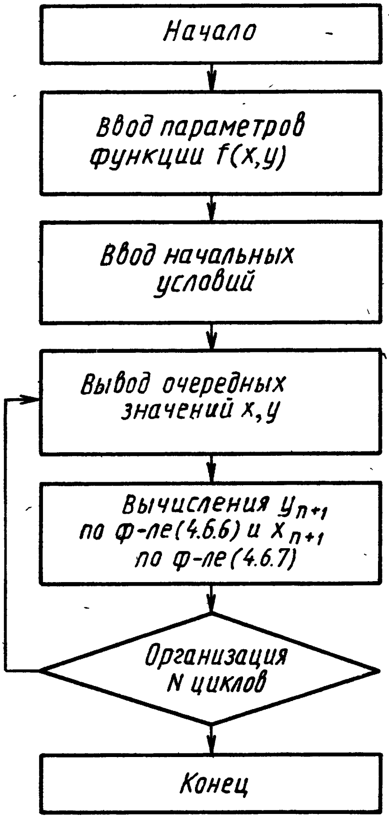


Рис. 49

Приведем пример. Пусть нужно решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}=ax \qquad (4.6.8)$$

при $a=2$ и при начальных условиях: $x_0=0$; $y_0=5$. Получим из него приближенные соотношения:

$$y_{n+1}=y_n+ax\Delta x; \qquad (4.6.9)$$
$$x_{n+1}=x_n+\Delta x. \qquad (4.6.10)$$

Разместив данные в памяти:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6
Сначала Потом		x_0 x_n		y_0 y_n	a		Δx

составим программу для ПМК, руководствуясь алгоритмом (см. рис. 49):

```
┌00 ИП1    С/П    ИП3 С/П . . . вывод xn, yn
│04 ИП4    ИП1 × ИП6 × . . . . . axnΔx
│09 ИП3 + П3 . . . . . . . . . . . . yn+1
│12 ИП1    ИП6 + П1 . . . . . . . . xn+1
│16 БП     [00] . . . . . . . . . . . . переход
└──────────┘                          на начало
```

Инструкция. FАВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; FАВТ; ввод операндов (a П4, x_0 П1, y_0 П3, Δx П6) В/0 С/П——— вывод x_n; С/П——— вывод y_n; С/П——— вывод следующего x_n и т. д.

Ответ: при $\Delta x=0{,}1$.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	5	5	5,02	5,06	5,12	5,2	5,3	5,42	5,56	5,72	5,9

Видим, что изменения Δy невелики по сравнению с y; следовательно, шаг $\Delta x=0{,}1$ достаточно мелкий. При $\Delta x=1$ получилось бы слишком грубо. Вычертив график $y(x)$, получаем ответ.

Следует отметить, что замена точных соотношений приближенными ведет к ошибке, которая нарастает с номером n, и тем меньше, чем меньше величина «ступеньки» Δx. Однако при этом возрастает время вычислений. В результате, для того чтобы добраться до существенных изменений x и y, нужно записать огромное число значений. Но можно сделать и так. Пусть Δx останется малым. Выводить будем только каждую 10-ю (N-ю) пару чисел (рис. 50). Для этого заложим в ячейку П7 число $N=10$, а программу изменим так:

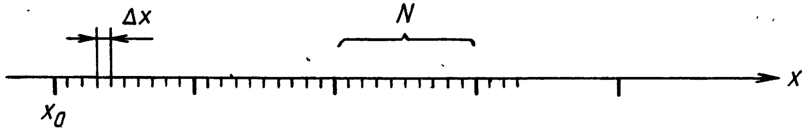


Рис. 50

```
00 ИП7 П0 . . . . . . . . . . . . . . заполнение счетчика циклов

02 ИП1    С/П ИП3 С/П
06 ИП4    ИП1 × ИП6 ×
                                 . . . фрагмент старой программы
11 ИП3 + П3
14 ИП1  ИП6 + П1

18 FL0    [06] БП [00]          . . . переход на вычисление новых x_n, y_n, если выполнено
                                      меньше N внутренних циклов, и на начало, если выполнено
                                      N внутренних циклов
```

Напомним (см. раздел 3.15), что по команде FL0 машина вычитает из содержимого ЯП0 единицу и проверяет результат на 0: если не 0, то — по адресу, указанному за этой командой; если 0, то — через шаг.

В приведенном примере о т в е т по этой программе при $\Delta x = 0{,}1$ и $N = 10$ следующий:

x	0	1	2	3	4	5
y	5	5,9	8,8	13,7	20,6	29,5

(каждая пара точек получается через 45 с).

Для решения того же уравнения на ПЭВМ надо составить программу, обозначив $\Delta x \equiv S$; $a \equiv A$:

```
1 PRINT "DIFUR1"
2 PRINT "РЕШ.ДИФ.УР.1-ГО ПОР."
10 A=2
20 X=0
30 Y=5
40 S=0.1
50 N=10
60 PRINT X;Y
70 FOR I=1TO N
80 Y=Y+A*X*S
90 X=X+S
100 NEXT I
110 IF Y>= 50 THEN 130
120 GOTO 60
130 END
```

В отличие от ПМК, который при каждом выводе останавливается, ПЭВМ, отпечатав ответ, сразу переходит на дальнейший счет. Поэтому надо указать, где остановиться (строки 110 и 130).

Протокол:

```
DIFUR1
РЕШ.ДИФ.УР.1-ГО ПОР.
 0  5
 1  5.899999
 2  8.8
 2.999999  13.7
 3.999998  20.59999
 4.999998  29.49999
 5.999997  40.39999
```

4.7. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть, например, имеется дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}=f(x,\ y). \qquad (4.7.1)$$

Сведем его сначала к виду (4.6.5). Для этого сделаем замену:

$$z=\frac{dy}{dx}. \qquad (4.7.2)$$

Тогда

$$\frac{dz}{dx}+Az=f(x,\ y), \qquad (4.7.3)$$

т. е. уравнение второго порядка (4.7.1) свелось к двум уравнениям (4.7.2) и (4.7.3) первого порядка. Эти два уравнения заменим приближенными соотношениями:

$$y_{n+1}=y_n+z_n\Delta x; \qquad (4.7.4)$$

$$z_{n+1}=z_n+[f(x_n,\ y_n)-Az_n]\,\Delta x, \qquad (4.7.5)$$

и если при каком-то x_n известны y_n и $z_n=\left(\frac{dy}{dx}\right)_n$, то формулы (4.7.4) и (4.7.5) позволяют идти от x_0, y_0, z_0 к x_1, y_1, z_1 и далее сколь угодно долго аналогично тому, как это делалось в разделе 4.6. Таким образом, в простейших случаях надо лишь расширить приведенные в разделе 4.6 программы введением дополнительных строчек так, чтобы вычислялись не только x_n, y_n, а и z_n по соотношению (4.7.5). При выводе данных можно добавить вывод z_n, если это нужно.

Приведем пример. Пусть необходимо решить уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a\,\frac{dy}{dx}+b \qquad (4.7.6)$$

при $a=-2$; $b=30$ и при начальных условиях: $x_0=0$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=40$; $y_0=0$. Приближенные соотношения:

$$y_{n+1}=y_n+z_n\Delta x;\quad z_{n+1}=z_n+(az_n+b)\,\Delta x;\quad x_{n+1}=x_n+\Delta x. \qquad (4.7.7)$$

Для решения на ПМК распределим память:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7
Сначала Потом	— N . . . 0	x_0 x_n	z_0 z_n	y_0 y_n	a	b	Δx	N

Расширив программу, приведенную в разделе 4.6, получим

00 ИП7 П0
02 ИП1 С/П ИП2 С/П ИП3 С/П . . . . .дополнено выводом z_n
08 ИП4 ИП2 × ИП5 + ...az_n+b
13 ИП6 × ИП2 + П2 . . . . .z_{n+1}
18 ИП6 × ИП3 + П3 . . . . .y_{n+1}
23 ИП1 ИП6 + П1
27 FL0 08 БП $\boxed{00}$

Инструкция аналогична. Добавляется лишь ввод z_0 и b. Выводятся не двойки чисел, а тройки (x_n, x_n, y_n).

Решение. Возьмем $\Delta x=1$; $N=1$. Действуя по инструкции, получим

x_n	0	1	2	. . .
z_n	40	−10	40	. . .
y_n	0	−10	30	. . .

Видим, что это недопустимо грубо: изменения z и y получаются немалыми по сравнению с начальными значениями.

Уменьшим Δx до 0,05 и возьмем $N=10$. Изменив содержание ЯП6 и ЯП7 и восстановив содержание других ячеек, снова запустим машину.

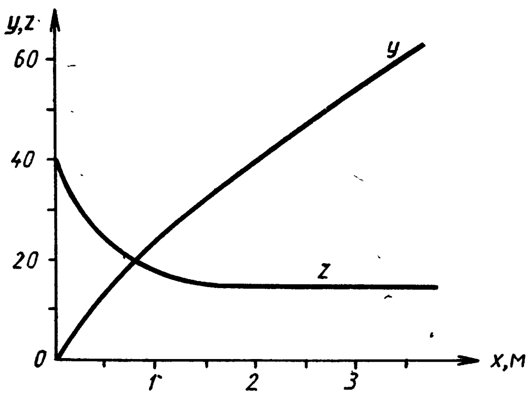


Рис. 51

Результат для $\Delta x = 0{,}05$ и $N = 10$ следующий:

x_n	0	0,5	1	1,5	2	2,5
z_n	40	23,7	18	16	15,4	15,1
y_n	0	14,8	24,9	33,3	41,1	48,7

(на каждую тройку чисел уходит ≈ 75 с). Ответ представлен в виде графика (рис. 51).

Для решения на ПЭВМ с помощью языка Бейсик сделаем в программе, приведенной в разделе 4.6, необходимые дополнения:

```
1 PRINT "DIFUR2"
2 PRINT "РЕШ.ДИФ.УР.2-ГО ПОР."
10 A=-2
20 B=30
30 X=0
40 Y=0
50 Z=40
60 S=0.05
70 N=10
80 FOR I=1 TO N
90 Y=Y+Z*S
100 Z=Z+(A*Z+B)*S
110 X=X+S
120 NEXT I
130 IF X<3.5 THEN PRINTX;Y;Z
140 GOTO 80
150 END
```

Протокол решения задачи:

```
DIFUR2
РЕШ.ДИФ.УР.2-ГО ПОР.
 .5000001  15.64152  23.71696
 1  25.98029  18.03942
 1.5  34.47011  16.05978
 1.999999  42.31524  15.36952
 2.499999  49.93558  15.12884
 2.999998  57.47754  15.04493
 3.499998  64.99217  15.01566
```

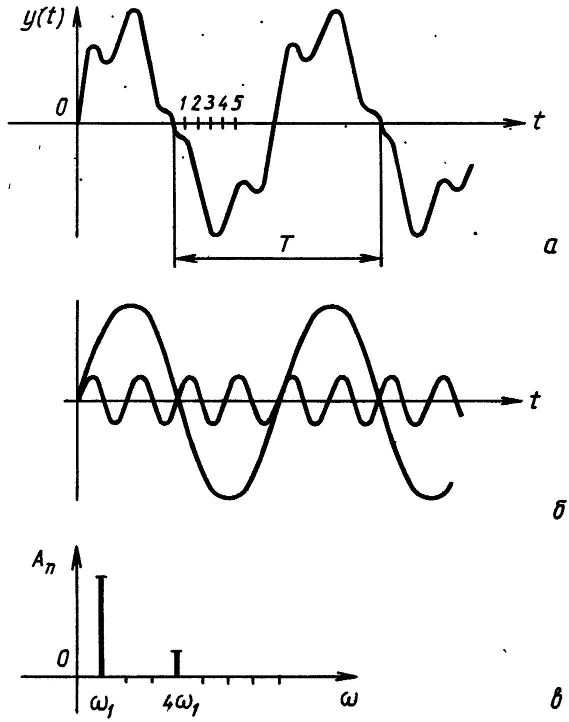
Как и ранее, отметим, что такой метод решения дифференциальных уравнений является простейшим и не лучшим. Более совершенные методы следует смотреть в [2—7, 10, 11]. Но изложенный метод использования соотношений типа (4.6.6) или (4.7.4), (4.7.5) все же вполне можно применять для решения простых задач, приведенных в данном задачнике.

4.8. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ (РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ)

Согласно теореме Фурье периодическая функция $y(t)$ с периодом T (рис. 52, *а*) при некоторых ограничениях на характер функции [10, 11] может быть представлена в виде

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad (4.8.1)$$

Рис. 52



т. е. в виде суммы синусоид (косинусоид) разных амплитуд и сдвинутых относительно друг друга по фазе (рис. 52, *б*). Частоты этих синусоид не произвольны, а кратны основной частоте $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

Спектром функции называется набор амплитуд A_n, соответствующих частотам $\omega = n\omega_1$. Спектр может быть представлен в виде графика, на котором по одной оси отложены частоты, а по другой — амплитуды колебаний (рис. 52, *в*). Коэффициенты a_n, b_n или A_n, φ_n могут быть найдены по формулам

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt;\quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt;$$
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};\quad \varphi_n = \operatorname{arctg}(b_n/a_n). \tag{4.8.2}$$

Если разбить период на N частей размером Δt каждая и каждому участку внутри периода присвоить номер i (рис. 53), то интегралы для a_n и b_n можно найти приближенно (см. раздел 4.3) методом прямоугольников:

$$a_n \approx \frac{2}{N\Delta t}\sum_{i=1}^{N} y_i \cos\left(\frac{2\pi n i}{N}\right)\Delta t;$$
$$b_n \approx \frac{2}{N\Delta t}\sum_{i=1}^{N} y_i \sin\left(\frac{2\pi n i}{N}\right)\Delta t. \tag{4.8.3}$$

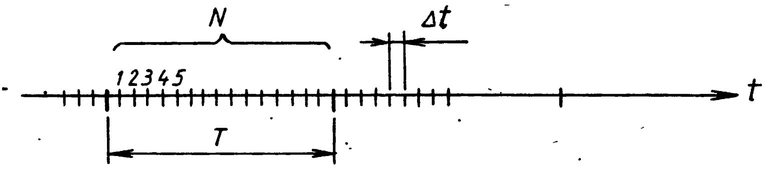


Рис. 53

Пусть дана кривая $y(t)$ (см. рис. 52, *а*). Надо сделать спектральный анализ, т. е. найти спектр (рис. 52, *в*), что значит найти амплитуды и частоты синусоид (см. рис. 52, *б*), из которых сложена эта кривая. Может представиться два случая: функция $y(t)$ задана аналитически, т. е. в виде формулы. Тогда можно найти значение для каждого момента времени t по этой формуле. Но может быть $y(t)$ задана лишь численно или в виде графика, как на рисунке 52, *а*, из которого для каждого i-го момента времени можно в конкретном случае получить

i	1	2	3	4	5	...	и т. д.
y_i	−0,6	−3	−4,6	−4	−2,5	...	

Для первого случая программы даны в таблицах 4.8.1 и 4.8.2. Число N следует выбирать много бо́льшим, чем n. Иначе для высоких гармоник, когда число n сравнимо с N, получаются неверные результаты.

Если функция $y(t)$ задана только численно, то в таблице 4.8.1 вместо шагов

48 ПП

49 $\boxed{70}$ (вычисление y по подпрограмме)

следует поставить шаги

48 ИП3 — вывести на экран очередное i

49 С/П — останов для ввода y_i с клавиатуры

Инструкция заменяется следующим образом: FABT В/0 F ПРГ; ввод (измененной) программы; FABT; ввод операндов (NП1, nП2) В/0 С/П——— на экране появляется i; ввести y_i; С/П——— вывод a_n; С/П——— вывод b_n и далее, ка́к в таблице 4.8.1.

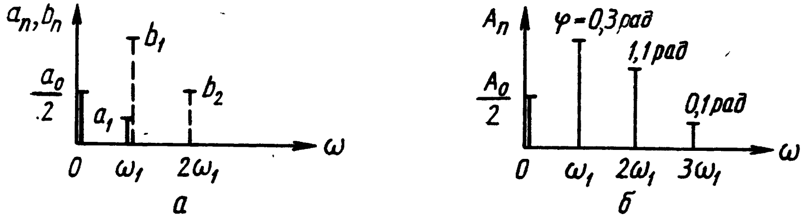


Рис. 54

В таблице 4.8.2 при численном или графическом задании следует строку 100 заменить на

```
100 PRINT "I=;" I
102 INPUT "Y="; Y
```

и для каждого I по запросу машины ввести $Y = y_i$. Можно сделать и иначе: ввести сначала все y_i в блок DATA, а в программе предусмотреть их постепенное использование (оператором READ).

Следует обратить внимание на то, что программы позволяют сравнительно быстро найти спектр *любого*, встречающегося в физике периодического сигнала, *любой* периодической функции.

Обратная задача (синтез, обратное фурье-преобразование): пусть дана совокупность синусоид, даны их частоты, амплитуды и фазы, т. е. дан спектр. Надо найти суммарную кривую. Эта задача проще. Ответ находим простым суммированием тех отклонений, которые в данный i-й момент времени дает каждая синусоида.

Программы для решений такой задачи даны в таблицах 4.8.3 и 4.8.4, если известны a_n и b_n (рис. 54, *а*), т. е. функция задана в виде

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t).$$

Если же известны A_n и φ_n (рис. 54, *б*), т. е. функция задана в виде

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos (n\omega_1 t + \varphi_n),$$

то составление программы также не представляет трудностей.

4.9 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ (ЗДЕСЬ ПРИВЕДЕН УПРОЩЕННЫЙ ВАРИАНТ)

Погрешность прямого измерения. Измерения любой величины делаются не менее трех раз и заносятся в таблицу. Если оказывается, что все время получается одинаковый результат (нет разброса), то точность ограничена несовершенством использованного прибора (систематическая погрешность). В этом случае в качестве погрешности берется *погрешность градуировки* прибора (определяется по классу точности прибора или по величине наименьшего деления шкалы).

Класс точности — параметр, позволяющий определить абсолютную погрешность прибора (обозначается буквой M). По определению класс точности — это отношение абсолютной погрешности в единицах длины шкалы к длине всей шкалы, выраженное в процентах:

$$M \equiv \frac{\Delta L}{L} 100\%,$$

где L — длина всей шкалы в единицах, соответствующих измеряемой величине; ΔL — погрешность градуировки шкалы.

Если же разброс значений превышает погрешность градуировки, то измерения производят большое число раз.

Погрешность разброса (случайную ошибку) вычисляют по следующим правилам:

1. Находят среднее арифметическое:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i. \qquad (4.9.1)$$

2. Оценивают дисперсию (средний квадрат отклонения от среднего):

$$\sigma\approx\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i(x_i-\bar{x})^2}. \qquad (4.9.2)$$

3. Абсолютную погрешность находят по формуле

$$\Delta x=t\sigma/\sqrt{n}, \qquad (4.9.3)$$

где t — коэффициент Стьюдента, который зависит от n и вероятности p, с которой мы хотим указать погрешность Δx (половина доверительного интервала для среднего арифметического).

Значения t для $p=0{,}95$ даны в таблице 4.9.1.

Полученное Δx (погрешность разброса) сравнивается с погрешностью градуировки прибора и берется наибольшее из них.

Если погрешности разброса и градуировки сравнимы по величине, полную погрешность следует вычислять как корень квадратный из суммы квадратов этих погрешностей.

4. Результат записывается так: $x=\bar{x}\pm\Delta x$. Относительная погрешность равна $\Delta x/\bar{x}$. На ПМК можно сначала найти $\bar{x}$ вручную, набирая

$$x_1\uparrow x_2+x_3+\ldots x_n+n\div.$$

Отправим $\bar{x}$ в ЯП0, n — в ЯП1. Найдем t для данного n (и $p=0{,}95$) из таблицы 4.9.1 и отправим в ЯП2:

ЯП	0	1	2	. . . D
Сначала	$\bar{x}$	n	t	. . . 0
Потом				$\sum_i(x_i-\bar{x})^2$

Составим программу для вычислений σ, Δx, $\Delta x/x$ из расчета, что все x_i снова будут вводиться поочередно в РгХ:

00 ИП0 $-$ Fx^2 ИПD $+$ ПD С/П БП $\boxed{00}$ ... накопление суммы $\sum_i(x_i-\bar{x})^2$

50 ИП1 1 $-$ ИПD $\leftrightarrow$ $\div$ F$\sqrt{\ }$ . . . . σ

57 ИП1 F$\sqrt{\ }$ $\div$ ИП2 $\times$ С/П . . . . Δx

63 ИП0 $\div$ 1 0 0 $\times$ С/П $\frac{\Delta x}{x}100\%$

Инструкция для работы по этой программе (если $\bar{x}$ уже вычислено). F АВТ В/0 F ПРГ; ввод первой строки программы F АВТ БП $\boxed{50}$ F ПРГ; ввод остальных строк программы; F АВТ; ввод $\bar{x}$; П0 n П1 t П2 0ПD ввод x_1; В/0 С/П — — — ввод x_2; С/П — — — ввод x_3; С/П — — — и т. д. После ввода всех x_i: БП 50 — — — вывод Δx; С/П — — — вывод $\Delta x/x$ (в %).

Пример. $x_i = 13,\ 18,\ 15,\ 16.$

Ответ. $\bar{x}=15{,}5$; $\Delta x=3{,}3$; $\Delta x/x=21\%$, так что $x=15{,}5\pm3{,}3$ с погрешностью 21%. Вероятность попадания истинной величины в этот интервал 95% (при определенных условиях, налагаемых на функцию распределения ошибок).

При работе на ПЭВМ, когда значений много, удобно выделить массив, занести в него все значения x_i, а затем уже производить все вычисления. Соответствующая программа дана в таблице 4.9.2.

Данные могут быть введены в машину строкой с любым свободным номером:

1 000 DATA 10.1, 10.0, 10.15, 10.2, 10.05, ...

Это можно сделать и до и после введения программы (но, естественно, до работы по программе). Содержание этой строки можно менять, набирая ее заново.

Погрешность косвенного результата. Если результат A находится, например, из формулы в виде произведения

$$A=\frac{a^3}{b}\sin\alpha \tag{4.9.4}$$

и величины a, b, α найдены из опыта с погрешностями Δa, Δb, $\Delta\alpha$, то для нахождения абсолютной погрешности ΔA и относительной погрешности $\Delta A/A$ надо прологарифмировать формулу (4.9.4)

$$\ln A=3\ln a-\ln b+\ln(\sin\alpha) \tag{4.9.5}$$

и взять дифференциал:

$$\frac{dA}{A}=3\frac{da}{a}-\frac{db}{b}+\frac{d(\sin\alpha)}{\sin\alpha}. \tag{4.9.6}$$

Заменяя дифференциалы приращениями ($da\to\Delta a$; $db\to\Delta b$ и т. д.) и учитывая, что знаки ошибок Δa, Δb ... могут быть и положительными, и отрицательными, найдем *максимальную* относительную погрешность для данной формулы (4.9.4), заменяя знаки — на +:

$$\frac{\Delta A}{A}=3\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{4.9.7}$$

Этой формулой можно пользоваться при самых простых расчетах. Однако более вероятно, что знаки Δa, Δb ... все же будут варьироваться, так что погрешность $\Delta A/A$ будет меньше максимальной. В теории вероятностей показывается, что *вероятную* погрешность следует находить как *среднюю квадратичную*:

$$\Delta A=\sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial a}\Delta a\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial b}\Delta b\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial\alpha}\Delta\alpha\right)^2}. \tag{4.9.8}$$

В нашем случае для формулы (4.9.4) имеем

$$\frac{\Delta A}{A}=\sqrt{3\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2+\left(\frac{\Delta \alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2}, \qquad (4.9.9)$$

что дает величину $\Delta A/A$, несколько меньшую, чем то, что получается из выражения (4.9.7). Ее обычно и указывают в результатах эксперимента как относительную погрешность.

При обработке результатов косвенных измерений полагается сначала найти $\Delta A/A$ по формуле типа (4.9.9) или хотя бы оценить по формуле типа (4.9.7). Только после этого следует вычислить A по рабочей формуле (например, по формуле 4.9.4). Такая последовательность нужна для того, чтобы знать, до какой значащей цифры следует вычислять результат A. Например, если $\Delta A/A=0{,}1=10\%$, то больше двух значащих цифр у A вычислять нельзя, так как следующие цифры при такой погрешности не имеют смысла.

Затем вычисляется ΔA путем умножения $\Delta A/A$ на A и пишется ответ: $A\pm\Delta A$.

4.10. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО ПОЛУЧЕННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МАСШТАБ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Обработка результата исследования зависимости одной величины от другой методом наименьших квадратов. Пусть величина y зависит от x и в результате эксперимента получено достаточно много пар значений (x_i, y_i). Пусть известно также, что зависимость $y(x)$ должна быть линейной функцией:

$$y=M+Kx. \qquad (4.10.1)$$

Однако в связи с погрешностями измерений полученные точки (x_i, y_i) не ложатся на прямую линию (рис. 55). Как найти наиболее вероятный ход искомой прямой?

Прямая считается проведенной по экспериментальным точкам наилучшим образом, если $\sum\limits_i (y_i-y)^2$ минимальна (см. рис. 55), т. е. надо найти такие M и K для уравнения прямой $y=M+Kx$, чтобы выражение $F(M, K)=\sum\limits_{i=1}^{N} (y_i-y)^2$ имело минимум. Тогда должно быть

$$\partial F/\partial M=0; \ \partial F/\partial K=0.$$

Подставляя сюда $F(M, K)$ и $y=M+Kx$ и выполнив дифференцирование, можно получить

$$M=\frac{BC-AD}{NC-A^2}; \quad K=\frac{B-NM}{A}, \qquad (4.10.2)$$

где

$$A=\sum_i x_i; \ B=\sum_i y_i; \ C=\sum_i x_i^2; \ D=\sum_i x_i y_i, \qquad (4.10.3)$$

а N — число измерений, т. е. число пар (x_i, y_i).

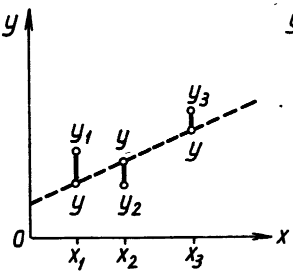


Рис. 55

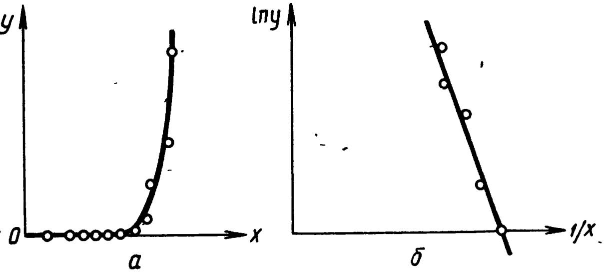


Рис. 56

Для вычисления сумм (4.10.3) и нахождения M и K можно составить программу, по которой после введения каждой пары значений y_i (в PrY) и x_i (в PrX) будет происходить наращивание названных сумм и результаты будут накапливаться в ячейках памяти. Кроме того, будет вестись подсчет количества введенных пар (N) и при каждой остановке это число будет высвечиваться на экране.

Когда будут введены все пары значений y_i и x_i и сформированы суммы A, B, C и D, программа переходит на расчет M и K по формулам (4.10.2). Для ПМК программа дана в таблице 4.10.1, для расчетов на ПЭВМ на языке Бейсик — в таблице 4.10.2.

Использование функционального масштаба. Если зависимость $y(x)$ нелинейна, то в ряде случаев ее можно свести к линейной путем замены переменных. Так, если по расположению экспериментальных точек на графике $y(x)$ (рис. 56, *а*) ожидается зависимость вида

$$y = ae^{-b/x}, \tag{4.10.4}$$

то, прологарифмировав это уравнение, можно перейти к таким переменным W и V, что связь между ними окажется линейной:

$$\begin{gathered}\ln y = \ln a - b/x;\ \ln y \equiv W;\ \ln a \equiv M;\ 1/x \equiv V;\\ -b \equiv K;\ W = M + KV.\end{gathered} \tag{4.10.5}$$

Теперь на графике $W(V)$ должна быть прямая линия (рис. 56, *б*). Преобразовав $y_i \to W_i$, $x_i \to V_i$, можно для обработки экспериментальных данных применить метод наименьших квадратов так, как сказано выше. Найдя этим методом наилучшие значения M и K, можно затем их пересчитать в наилучшие значения параметров a и b.

Метод, приведенный здесь, является простейшим. Он дает хорошие результаты только в том случае, когда погрешность измерений примерно одинакова во всем диапазоне. Если это не так, то следует в тех областях, где погрешность больше, брать больше точек (делать больше измерений). Чаще всего это область резких изменений функции (экстремумы или другие особенности).

2.1.1. Задача решается с помощью ПМК. Если нажать клавиши, соответствующие числу градусов φ°, то это число будет в регистре X (РгX), т. е. на индикаторе. Можно вручную (в режиме ручной работы — см. раздел 3.3) переместить это число в РгY, в РгX ввести π, далее умножить одно число на другое клавишей × и ввести число 180, затем разделить и получить ответ. Но если это надо проделать много раз, то удобнее ввести этот порядок действий (программу) в память машины, а потом после каждого введения φ° запускать машину на работу по программе.

Краткая запись простейшей программы при условии, что φ° введено в РгX:

↑ Fπ × 1 8 0 ÷ С/П

Однако для начинающих удобнее записывать программу с номерами шагов (адресов) и с кодами команд, а справа делать комментарии:

Шаг (адрес)	Клавиша (команда)	Код	Комментарии
00	↑	0E	— поднять φ° в РгY
01	Fπ	20	— вызвать число π
02	×	12	— перемножить эти два числа
03	1	01	— вызвать число 180 (φ° поднимается в РгY)
04	8	08	
05	0	00	
06	÷	13	— делить φ° (РгY) на 180 (РгX)
07	С/П	50	— остановка для чтения ответа

Для того чтобы не забыть, что для следующих вычислений надо перевести машину на шаг программы 00, можно добавить в конце программы еще две команды:

08	БП	51	— безусловный переход...
09	00	00	— ... на шаг 00

Тогда при следующем запуске клавишей С/П машина сначала выполнит команды 08 и 09 и не нужно будет каждый раз нажимать на клавишу В/0.

Покажем подробную *инструкцию* работы по программе для начинающего. Включаем калькулятор. На экране должен быть 0 слева. Если калькулятор был включен ранее, то надо обязательно нажать клавишу F АВТ В/0, чтобы перевести ПМК в начало программы («обнулить» счетчик шагов). Переводим ПМК в режим ввода программы клавишами F ПРГ: на экране справа появляется двузначное число 00 — *номер команды* или *номер шага* программы, который будет первым в наших вычислениях. Этот номер будем называть также *адресом*, поскольку часто мы будем отсылать машину к команде «номер такой-то». Нажимаем последовательно клавиши, приведенные в программе. В левой части экрана появляются коды команд, в правой — номер следующего шага. Сразу после ввода программы надо вернуть машину в режим счета клавишами F АВТ. Вводим данные (нажимаем клавиши числа $\varphi°$). Нажимаем клавиши В/0 (установка на адрес 00) и С/П (пуск на счет). Во время счета на индикаторе мелькают цифры, затем высвечивается ответ. Прежде чем делать серию вычислений, полезно проверить работу машины с введенной программой. Для этого следует «пропустить тест». Например, ввод $\varphi°=180°$ должен привести к результату: $\varphi_{рад}=$ $=3{,}141592$. Если «тест не проходит», значит, в программе есть ошибка. Найти ошибку можно способами, указанными в разделе 3.4.

Для решения этой задачи на ПЭВМ включаем комплекс ПЭВМ. Если интерпретатор Бейсик не введен в машину, то его следует ввести с магнитной ленты (или диска) по правилам, указанным в описании к данному ПЭВМ. При получении сообщения о готовности набираем строки.

```
1 PRINT "GRARAD"
2 PRINT "ПЕРЕСЧ.ГРАД.В РАД."
10 INPUT "УГОЛ В ГРАД. F0";F0
20 PRINT "УГОЛ В РАД. F";PI*F0/180
30 END
```

После введения каждой строки нажимаем на клавишу «перевод строки» (ПС) или «возврат каретки» (ВК). Даем команду LIST (набираем без номера строки и ВК). Проверяем введенную программу. Набираем RUN (и ВК). Отвечаем на вопрос машины (набираем $\varphi°$), и после ВК машина печатает ответ.

Протокол диалога:

: RUN
Угол в град. F0=45
Угол в рад. F=7.854E—01

2.1.2. Площадь $S=\pi d^2/4$.

Р е ш е н и е на ПМК. Пусть первое значение d заложено в ЯП2, а шаг изменения d (Δd) — в ЯП3.

Распорядимся памятью:

ЯП	. . .2	. . .3
Сначала Потом	d_1 d_n	Δd

Тогда программа с автоматическим наращиванием d будет

Шаг	Команда	Код	Комментарии
00	ИП2	62	
01	Fx^2	22	
02	$F\pi$	20	— вычисление $\frac{d^2\pi}{4}$
03	$\times$	12	
04	4	04	
05	$\div$	13	
06	С/П	50 ...	— остановка для вывода
07	ИП2	62	
08	ИП3	63	— наращивание d
09	+	10	
10	П2	42	
11	БП	51	
12	00	00	— переход на начало программы

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод операндов (d_1 П2, Δd П3); В/0 С/П — — — С/П — — — С/П. — — — .

Ответ. $7{,}85 \cdot 10^{-3}$; $3{,}14 \cdot 10^{-2}$; $7{,}07 \cdot 10^{-2}$; $1{,}26 \cdot 10^{-1}$... $7{,}85 \cdot 10^{-1}$.

Решение на ДВК. Если машина подготовлена к работе на языке Бейсик (см. разделы 3.6...3.17) и на экране появился сигнал готовности, набираем строки

```
1 PRINT "KRUG"
10 PRINT "ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ КРУГОВ"
20 INPUT "НАЧАЛЬНЫЙ ДИАМЕТР";D0
30 INPUT "ИНТЕРВАЛ";D1
40 INPUT "КОНЕЧНЫЙ ДИАМЕТР";D2
50 FOR I=D0 TO D2 STEP D1
60 PRINT PI*I*I/4
70 NEXT I
80 END
```

Проверяем программу командой LIST (и ВК) и запускаем на выполнение командой RUN (и ВК).

Протокол диалога:

: RUN
Вычисление площадей кругов
Начальный диаметр .1
Интервал .1
Конечный диаметр .5
7.854E—03
3.142E—02
7.069E—02
1.257E—01
1.963E—01

2.1.3. Используем рекомендации, данные в разделе 4.1.

Ответы, полученные на ПМК.

b	−10	−8	−6	−4	−2	0	2	4
x_1 x_2	9 0,09	7,16 0,11	5,30 0,15	3,39 0,24	1,00 0,82	Нет действительных корней	−0,82 −1,00	−0,24 −3,39

6	8	10
−0,15 −5,30	−0,11 −7,16	−0,09 −9

Для решения задачи на ПЭВМ введем в машину программу «КВУР» (см. табл. 4.1.2).

Протокол диалога:

```
:10 DATA 1.1, —6, .9
:RUN
Кор. действ. X1=5.300
X2=1.544E—01
:10 DATA 1.1, 0, .9
:RUN
Кор. комп. сопр.
X1=—.000+I * 9.045E—01
X2=—.000—I * 9.045E—01
:10 DATA 1.1, 6, .9
:RUN
Кор. действ. X1= —1.544E—01
X2= —5,300
```

Отметим. что здесь даны и комплексные корни при $b=0$.—φ

2.1.4. Прикинем примерно, где могут быть корни: Вид функций th$x$ и 2th$x$ примерно такой, как на рисунке 57: кривая *1*, а x — прямая *2*. Ясно, что один из корней — это $x=0$. Остальные два корня симметричны относительно нуля. Найдем положительный. Для этого будем двигаться от какого-либо малого $x=a$ шагами вправо.

Воспользуемся программой для ПМК (см. табл. 4.4.2), но добавим к ней подпрограмму вычисления $F(x)=2\text{th}x-x$, которую расположим с 50-го шага:

50 ИП3 Fe^x П6 . . . вычисление e^x
53 F1/x П7 . . . . вычисление e^{-x}
55 ИП6+П8 . . . . вычисление e^x+e^{-x}
58 ИП6 ИП7 — . . . вычисление e^x-e^{-x}
61 ИП8 ÷ . . . . . вычисление $(e^x-e^{-x})/(e^x+e^{-x})=\text{th}x$
63 2 × ИП3 — В/0 . . вычисление $(2\text{th}x-x)$ и возврат из подпрограммы

Результаты промежуточных вычислений будем хранить в свободных ячейках памяти: 6, 8, 9.

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы из таблицы 4.4.2; F АВТ БП 50 F ПРГ; ввод подпрограммы F АВТ; ввод операндов (a ПА, Δx П1); В/0 С/П — — —.

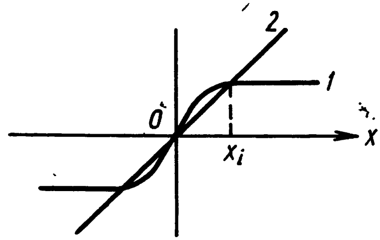


Рис. 57

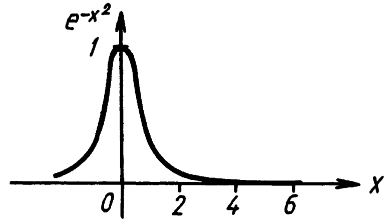


Рис. 58

Ответ получается через 50 с. При $a=0{,}2$; $\Delta x=0{,}2$ корень $x_2\approx 2$. Теперь можно уточнить ответ, взяв $a=1{,}9$; $\Delta x=0{,}001$. Тогда получается $x_2=1{,}916$. Еще один корень будет при $x_2=-1{,}916$. Итак: $x_1=0$; $x_2=1{,}916$; $x_3=-1{,}916$. Возможно и дальнейшее уточнение.

Для решения задачи на ПЭВМ воспользуемся программой «УР», приведенной в таблице 4.4.3, но заменим содержание строк 70 и 500:

```
70 PRINT TAB((2*HTN(X)-X)*20
500 F=2*HTN(X)-X
```

Если в используемом варианте Бейсика нет встроенной функции th x (HTN (x)), то придется эти строки записать иначе:

```
70 PRINT TAB((2*(EXP(X)+EXP(-X))/(EXP(X)-EXP(-X))-X)*20
500 F=2*(EXP(X)+EXP(-X))/(EXP(X)-EXP(-X))-X
```

Инструкция. Введем все строки программы, просмотрим программу командой LIST (и ВК) и запустим в работу командой RUN (и ВК).

```
:RUN
A1= .2
B1= 3
S= .2
X= 2.000
```

2.1.5. Воспользуемся разделом 4.3. Для вычислений с помощью ПМК воспользуемся программой, приведенной в таблице 4.3.1; с 50-го адреса заложим подпрограмму вычисления нашей подынтегральной функции:

50 ИП1 Fx^2 /—/. . . . . $-x^2$
53 Fe^x В/0 . . . . e^{-x^2} и возврат из подпрограммы

В ЯП1 заложим для первого интеграла 0, а для второго — число 3. В ЯП2 для второго интеграла заложим число 5, а для первого вместо ∞ заложим достаточно большое число. Заметив, что e^{-x^2} очень быстро убывает с x, можем взять $x_2=5$ или даже меньшее число. Ячейки 4 и 5 не понадобятся, так как наша функция не содержит числовых параметров (кроме e).

Ответ. $I_1=0{,}986$ (по программе таблицы 4.3.1 при $\Delta x=0{,}2$ через 3 мин); $I_2=3{,}43\cdot10^{-5}$. Большую разницу между I_1 и I_2 можно понять, глядя на рисунок 58. Для уточнения решения рекомендуется воспользоваться программой таблицы 4.3.3 или таблицы 4.3.4. Можно также уменьшить шаг Δx.

Для решения этой же задачи на ДВК воспользуемся таблицей 4.3.2 (или 4.3.5), но строку 500 запишем в виде, соответствующем нашей задаче:

```
500 LET Y=EXP  (—X ⌐ 2)
```

Протокол диалога и ответ:

```
:RUN
Опр. инт. методом прямоуг.
X1=0
X2=50
S= .2
I= 9.862E—01
```

2.1.6. Решение аналогично решению задачи 2.1.5, т. е. следует воспользоваться разделом 4.3 и одной из таблиц 4.3.1 ... 4.3.5, но при этом заменить подпрограмму вычисления подынтегральной функции. Для ПМК:

50 ИП1 F sin ↑ Fx² ↑ × × П7	$\sin^5 x$
58 1 · 5 ИП1 Fx^y	$x^{1,5}$
63 ИП7 ×	$x^{1,5}\sin^5 x$
65 В/0	возврат из подпрограммы

Инструкция. Следует положить $1\to П1$, $2\to П2$, $\Delta x\to П3$, $0\to ПД$.

Ответ. 1,48 (по программе таблицы 4.3.1 при $\Delta x=0{,}1$ через 2,5 мин).

Для решения задачи на ПЭВМ воспользуемся таблицей 4.3.2, но подпрограмму (строки 500, 510) сделаем соответствующей нашему случаю:

```
500 Y=(X ⌐ 1.5) * (SIN (X)) ⌐ 5
510 RETURN
```

Протокол диалога:

```
:RUN
Опр. инт. методом прямоуг.
X1=1
X2=2
S= .1
I= 1.483
```

2.1.7. Изучив раздел 4.5 и воспользовавшись таблицей 4.5.1, составляем свою подпрограмму для ПМК:

50 П8 Fe^x 1 + П9 . . . . e^x+1
55 ИП8 ↑ Fx^2 × . . . . x^3
59 ИП9 ÷ В/0 . . . . $f(x)$ и возврат из подпрограммы

Ответ. Приняв $x_0=0$; $\Delta x=0{,}5$, получим через 2 мин $x_{max}=3{,}0\pm0{,}5$. Для уточнения можно взять $x_0=2{,}5$; $\Delta x=0{,}1$; тогда $x_{max}=3{,}1\pm0{,}1$. При $x_0=3{,}0$; $\Delta x=0{,}02$ имеем $x_{max}=3{,}14\pm0{,}02$ и т. д.

Для решения на ПЭВМ воспользуемся таблицей 4.5.2, но заменим строки

```
30 LET X1=0:LET X2=100:LETS=.02
180 LET F=Z ¬ 3/(EXP (Z)+1)
```

Протокол диалога и ответ:

```
:RUN
Поиск экстр. F (x)
X=3.120 F=1.284
```

2.1.8. Руководствуясь разделом 4.2 и приведенной там программой для ПМК, получаем

$$\Delta=-0{,}715 \qquad x=0{,}098$$
$$\Delta_1=-0{,}070 \qquad y=0{,}201$$
$$\Delta_2=-0{,}144 \qquad z=0{,}3$$
$$\Delta_3=-0{,}215$$

Решение второй части задачи при использовании ПМК трудоемко. Здесь лучше использовать ПЭВМ. В программе для ПЭВМ (см. раздел 4.2) ничего не меняем. Вводим ее в машину. При появлении вопросов (?) вводим числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, b_1 (и ВК) и так 3 раза. После этого машина считает и выдает ответ.

Протокол диалога:

```
? .123, .184, .172, .101
? .503, .058, .082, .086
? 2.71, 0, 8.53, 2.83
X=9.869E-02
Y=2.021E-01
Z=3.004E-01
```

2.1.9. Следует изучить раздел 4.6. Пользуясь предложенным методом, зная начальные значения x_0, y_0, будем наращивать y и x по формулам

$$y_{n+1}=y_n+(\sin 2{,}1x_n)\,\Delta x; \qquad x_{n+1}=x_n+\Delta x. \tag{5.1}$$

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7
Сначала Потом		x_0 x_n		y_0 y_n	2,1		Δx	N

Программа:

00 ИП7 П0 . . . . заполнение счетчика циклов
02 ИП1 С/П ИП3 С/П . . . . . . вывод x_n, y_n
06 ИП4 ИП1 × F sin . . . . sin 2,1x
10 ИП6 × ИП3 + П3 . . . . y_{n+1}
15 ИП1 ИП6 + П1 . . . . x_{n+1}
19 FL0 $\boxed{06}$ БП $\boxed{00}$ . . . . организация циклов

Инструкция. Переключатель «Р—Г» — в положение «Р» F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод операндов (x_0 П1, y_0 П3, 2,1 П4, Δx П6, N П7) В/0 С/П — — — вывод x_n; С/П — — — вывод y_n; С/П — — — x_{n+1}; С/П — — — y_{n+1} и т. д.

Ответ. При $\Delta x=0{,}1$ и $N=5$ получаем

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4	. . .
y	2,30	2,49	2,90	3,20	3,05	2,57	2,30	2,50	2,98	. . .

Приращения y не очень велики, так что решение верное, хотя и приближенное. Лучше все же уменьшить Δx и увеличить N. Отметим, что данное уравнение решается и аналитическим путем, дающим точный ответ, так что для решения этой задачи применять численный метод не следовало. Сравните этот результат с точным решением:

$$y=\int(\sin 2{,}1x)\,dx=-\frac{1}{2{,}1}\cos 2{,}1x+C=2{,}776-\frac{1}{2{,}1}\cos 2{,}1x, \qquad (5.2)$$

где C получено из начальных условий.

Для работы на ПЭВМ составим коротенькую программу с автоматическим наращиванием x через 0,5:

```
1 PRINT "DURSIN"
3 PRINT "РЕШ.ДИФ.УР.С СИН."
10 X=0
20 Y=2.3
30 S=0.1
40 N=5
50 PRINT X,Y
60 FOR I=1 TO N
70 Y=Y+SIN(2.1*X)*S
80 X=X+S
90 NEXT I
100 IF X>=4 THEN 120
110 GOTO 50
120 END
```

Протокол работы:

```
: RUN
 .000          2.300
5.000E-01      2.495
1.000          2.971
1.500          3.249
```

2.000	3.051
2.500	2.574
3.000	2.299
3.500	2.502

2.1.10. Для решения этой задачи на ПЭВМ с цветным дисплеем надо изучить раздел 3.16. Функции $\sin x$ и $\cos x$ принимают значения от $+1$ до -1. Изображения должны занимать бо́льшую часть экрана; поэтому возьмем для амплитуды множитель 50, а для того чтобы уместилось несколько периодов, будем менять x (в радианах!) от 0 до 20. Подберем к x множитель 10 и растянем эти значения почти на весь экран.

Составление программы начнем с выбора цвета фона:

```
5 COLOR, 1
```

(до запятой ничего не указано; по умолчанию цвет линий будет белым).

Для получения осей координат набираем

```
20 LINE (0,80)—(240,80) : LINE (0,0)—(0,160)
```

Для получения синусоиды зеленого цвета и косинусоиды красного в пределах x от 0 до 20 набираем

```
1 PRINT "SINCOS"
2 PRINT "СИНУС.И КОСИН."
30 FOR X=0 TO 20 STEP.1
40 PSET (X*10,80-50*SIN(X)),3
50 PSET (X*10,80-50*COS(X)),9
60 NEXT X
100 GOTO 100
```

После команды RUN машина вычерчивает требуемое.

Если бы мы захотели пометить кривые и расставить значения x вдоль оси, то можно было бы расширить программу:

```
1 PRINT "SINCOS"
2 PRINT "СИНУС.И КОСИН."
5 COLOR ,2
10 SCREEN 2
20 OPEN "GRP:"AS1
30 FOR X=0 TO 20 STEP.1
40 PSET (X*10,80-50*SIN(X)),3
45 PSET (X*10,80-50*COS(X)),9
50 NEXT X
52 PRESET (245,75):PRINT#1,"X"
54 PRESET (25,1.5):PRINT#1"SIN(X)"
55 LINE (0,80)-(240,80):LINE(0,0)-(0,160)
56 PRESET (135,3):PRINT#1,"COS(X)"
57 FOR X=0 TO 20 STEP 5
58 PRESET (X*10,90):PRINT#1,X
59 NEXT X
100 GOTO 100
```

2.1.11. Пусть $\omega=1$; $\Omega=10$. Чтобы ωt пробегало значения от 0 до $\approx 3\pi$ (хорошо обозначилась медленно меняющаяся косинусоида), возьмем t от 0 до 10 и будем его откладывать по оси x (с множителем 25, чтобы занять весь экран по ширине). Оси проведем, как в предыдущей задаче. Множитель по Y возьмем также 50. Шаг вычислений придется уменьшить, чтобы лучше изображались детали быстро меняющейся косинусоиды. Введем обозначения: $\omega \equiv V$; $\Omega \equiv W$; $t \equiv T$.

Программа:

```
1 PRINT "MODSIN"
2 PRINT "МОДУЛИР.СИНУС."
10 SCREEN 2
20 LINE (0,80)-(600,80),5
30 LINE (0,0)-(0,160),5
40 V=1
50 W=10
60 FOR.T=0 TO 20 STEP.005
70 F=COS(V*T)*COS(W*T)
80 PSET (T*25,50*F+80)
90 NEXT T
100 GOTO 100
```

2.2.1. Для решения на ПМК следует изучить в разделе 4.9 подраздел «Погрешность прямого измерения» и использовать приведенные соотношения и программы.

Ответ. $x=10{,}01 \pm 0{,}10$; $\Delta x/x = 1\%$.

2.2.2. В соответствии с разделом 4.9 погрешность градуировки прибора равна: (диапазон шкалы) $\times$ (класс точности) / $100\% = 3 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}1/100 = 0{,}003$. Погрешность разброса определяют по одной из программ, приведенных в разделе 4.9. Получаем $\overline{M} = 1{,}24 \cdot 10^{-5}$; $\Delta M = 0{,}023 \cdot 10^{-5}$. Это несколько больше погрешности градуировки, поэтому используем эту погрешность.

Ответ. $M = (1{,}24 \pm 0{,}03)\, 10^{-5}$ г (округление в сторону большего числа). Относительная погрешность $1{,}9\% \approx 2\%$.

2.2.3. При классе точности прибора 2,0 (т. е. 2% от всей шкалы) абсолютная погрешность градуировки $\Delta M =$ (диапазон шкалы) $\times 0{,}02 = 0{,}06 \cdot 10^{-5}$, что больше погрешности разброса, полученной в предыдущей задаче. Поэтому $M = \overline{M} \pm \Delta M = (1{,}24 \pm 0{,}06) \cdot 10^{5}$ г, а относительная погрешность $\Delta M/M = 5\%$.

2.2.4. Задачу решаем на ПМК. Для вычисления $F(\gamma)$ при $\gamma = 0$, 10, 20, 30°, т. е. с шагом $\Delta\gamma = 10°$, распорядимся памятью:

ЯП	0	1	A	B	C	D
Сначала Потом	0 γ	$\Delta\gamma$		B		D

Программа вычисления $F(\gamma)$:

00 ИПВ ИП0 F tg $\times$ ИПД Fx^2 $\div$ С/П . . . вычисление F

08 ИП0 ИП1 + П0 БП $\boxed{00}$ . . . . . автоматическое наращивание γ и переход к новому вычислению

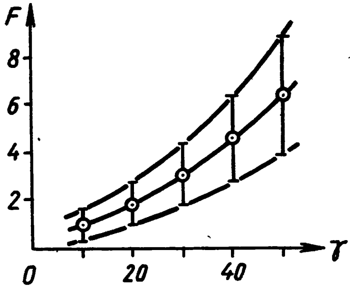


Рис. 59

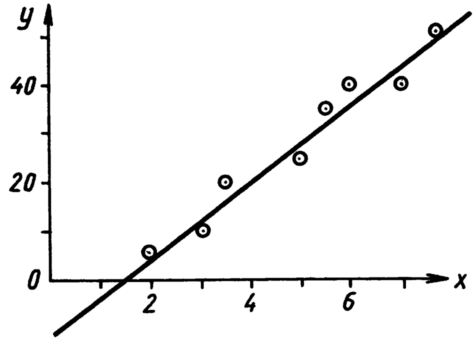


Рис. 60

Получается график, изображенный на рисунке 59.

Инструкция. Переключатель «Р—Г» — в положение «Г»; F АВТ В/0 F ПРГ; ввод данных (0 → П0, 10 (шаг увеличения γ) П1 В ПВ, D ПD В/0 С/П — — — С/П — — — С/П.

Ответ. $F=0$; $9{,}2\cdot10^3$; $1{,}9\cdot10^4$; $3{,}0\cdot10^4$; $4{,}4\cdot10^4$; $6{,}25\cdot10^4$.

Формула для вычисления погрешности:

$$\frac{\Delta F}{F}=\sqrt{\left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2+\left(\frac{\Delta\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\gamma}\right)^2+2\frac{\Delta D}{D}}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2+\left(\frac{2\Delta\gamma}{\sin 2\gamma}\right)^2+2\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2}; \qquad (5.3)$$

$$\Delta F=F\left(\frac{\Delta F}{F}\right).$$

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	А	В	С	Д
Сначала	γ	$\Delta\gamma$	—	ΔB	—	ΔD	—	—	—	—	—	B	—	D
Потом					$\left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2$		$2\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2$			F				

Программа:

00 ИП3 ИПВ $\div$Fx^2 П4 . . . . $(\Delta B/B)^2$
05 ИП5 ИПД$\div$Fx^{2}2$\times$П6 . . . . $2(\Delta D/D)^2$
12 ИП0 2$\times$F sin 2$\div$ИП1$\div$F1/x . . . . . $(2\Delta\gamma/\sin 2\gamma)^2$
21 ИП4+ИП6+F$\sqrt{\ }$ . . . . $\Delta F/F$
22 ИП9$\times$С/П . . . . ΔF

Инструкция. Переключатель «Р—Г» — в положение «Г»; F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод данных (γ П0, $\Delta\gamma$ (погрешность) П1, ΔBП3, ΔDП5, FП9, BПВ, DПD) В/0 С/П ——— вывод ΔF; смена γ; F В/0 С/П——— и т. д.

Ответ.

$\gamma,^0$	0	10	20	30	40	50
ΔF	ЕГГОГ	$5{,}4\cdot10^3$	$8{,}7\cdot10^3$	$1{,}2\cdot10^4$	$1{,}7\cdot10^4$	$2{,}5\cdot10^4$

Погрешность показана на рисунке 59.

Можно необходимые вычисления на ПЭВМ сделать по такой **программе:**

```
1 PRINT "POGRK"
2 PRINT "ПОГРЕШН.КОСВ.РЕЗ."
10 B=97.1
20 B1=0.3
30 D=4.3E-02
40 D1=0.7E-02
50 G=PI*10/180
60 G1=PI*0.05/180
70 G2=PI*50/180
80 S=PI*10/180
90 FOR I=G TO G2 STEP S
100 F=B*TAN(I)/D^2
110 Z=(B1/B)^2+(2*G1(SIN(2*I)))^2+2*(D1/D)^2
120 Z=SQR(Z)
130 F1=F*Z
140 PRINT F,F+F1,F-F1
150 NEXT I
160 END
```

Протокол работы:

```
ПОГРЕШН.КОСВ.РЕЗ.
 9259.788         11391.78         7127.8
 19113.85         23514.65         14713.05
 30319.47         37300.28         23338.67
 44065.21         54210.85         33919.57
```

Результаты любых измерений обязательно должны быть показаны на графиках с указанием погрешностей, чтобы видеть, в каких пределах возможны отступления истинных значений от измеренных. Если с некоторой погрешностью измеряется и аргумент (в данном случае γ), то, кроме вертикальных отрезков, показывающих погрешность, около каждой точки следует указать и горизонтальный отрезок — погрешность аргумента.

2.2.5. Метод наименьших квадратов дан в разделе 4.10. Программы даны в таблицах 4.10.1 и 4.10.2. Действуя по указанным там инструкциям, получаем $b=M=-10$; $a=K=7{,}86$. На рисунке 60 показаны точки, данные в задаче. Прямая построена по значениям M и K, выданным машиной.

2.2.6. Выберем такой функциональный масштаб, чтобы ожидаемую нелинейную зависимость свести к линейной. Для этого можно, например, прологарифмировать обе части:

$$\ln j=\ln A+B\varphi. \qquad (5.4)$$

Если ввести обозначения $\ln j\equiv Y$, $\ln A\equiv M$, то получится линейная зависимость:

$$Y=M+B\varphi. \qquad (5.5)$$

Теперь подберем оптимальные M и B методом наименьших квадратов, для чего распишем таблицу данных, введя строку $\ln j$:

$\varphi = X$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$\ln j = Y$	−2,2	−0,33	1,61	3,46	5,39

Воспользуемся одной из программ, данных в разделе 4.10. Действуя по указанным там инструкциям, получим $M = \ln A = -5{,}6$; $K = B = 3{,}66$. Для нахождения A возведем e в степень $\ln A = -5{,}6$: $A = 3{,}70 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, искомая зависимость $j = 3{,}7 \cdot 10^{-3} e^{3{,}66\varphi}$ (рис. 61, *а*).

График лучше строить в функциональном масштабе (рис. 61, *б*).

2.3.1. При свободном падении путь равен: $s = gt^2/2$. При решении на ПМК следует распорядиться памятью:

ЯП	0	1	2
Сначала Потом	g	0 t	Δt

Затем надо найти все ответы по **программе**:

→ 00 ИП0 ИП1 Fx^2 $\times$ 2 $\div$ С/П . . . $s = gt^2/2$
06 ИП1 ИП2 + П1 . . . . наращивание t
10 БП $\boxed{00}$ и переход к следующему вычислению

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ ввод (9,81П0, 0П1, 1П2) В/0 С/П——— s_0 С/П———s_1 С/П——— s_2 и т. д.

Ответ. 0; 4,9; 19,6; 44,1; 78,4; 122,5 и т. д.

Для решения на ПЭВМ введем в машину **программу**:

```
1 PRINT "PAD"
2 PRINT "СВОБ. ПАД."
10 G=9.81
20 T=0
30 T1=1
40 FOR I=0 TO 20
50 PRINT G*T^2/2
60 T=T+T1
70 NEXT I
80 END
```

Протокол работы:

```
0
4.905
19.62
44.145
78.48
122.625
```

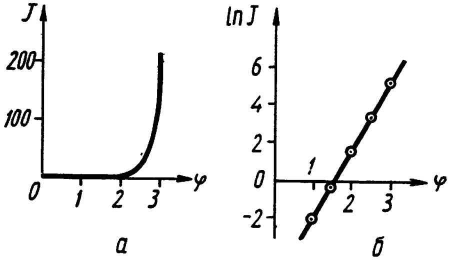


Рис. 61

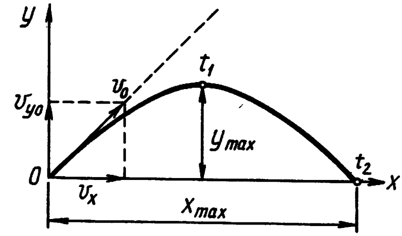


Рис. 62

Строим график по точкам или просим машину вычертить его, заменив строку

```
60 PRINT TAB ((G∗T ¬ 2/2)/2)
```

или (при наличии графического дисплея)

```
1 PRINT "PADG"
2 PRINT "ГРАФ.ПУТИ ПРИ СВОБ. ПАД."
10 SCREEN 2
20 G=9.81
30 T=0
40 T1=1
50 LINE (0,0)-(0,360),8
60 LINE (0,0)-(600,0),8
70 FOR T=0 TO 20 STEP .1
80 S=G*T^2/2
90 PSET (T*10,S/10),8
100 NEXT T
110 GOTO 110
```

Как изменится график, если тело падает на Луне (g в 6 раз меньше)?

2.3.2. Текущая высота y зависит от времени t таким образом: $y=v_0t-gt^2/2$, так что t находится из квадратного уравнения $(g/2)\,t^2-v_0t+H=0$. Используем программы, данные в разделе 4.1. При $v_0=10$ м/с; $H=4$ м получаем $t_1=x_1=0{,}55$ с; $t_2=x_2=1{,}49$ с. Это означает, что тело проходит эту высоту два раза — при подъеме и при спуске. При $H=10$ м калькулятор выдает ошибку ($D<0$), что означает: данная высота недостижима.

Для решения на ПЭВМ можно воспользоваться программой из раздела 4.1, но можно ввести и **программу** попроще:

```
1 PRINT "KAMVER"
2 PRINT "КАМЕНЬ,БРОШ.ВЕРТ."
10 G=9.81
20 INPUT "V0= ";V0
30 INPUT "H= ";H
40 A=SQR(2*G*H)
50 IF V0<A THEN PRINT"ВЫСОТА НЕДОСТИЖИМА"
60 GOTO 30
70 IF V0>A THEN 80
80 T1=(V0+SQR(V0^2-A^2))/G
90 T2=(V0-SQR(V0^2-A^2))/G
100 PRINT T2,T1
110 GOTO 30
```

Протокол диалога:
:RUN
VØ=1.5
H=5.3

Высота недостижима
VØ=10
H=4
5.465E—Ø1 1.492
VØ=

2.3.3. Данная задача на сложение движений. По горизонтали тело движется равномерно со скоростью $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ (рис. 62), так что $x = v_{0x}t$, а по вертикали (ось y) — с ускорением g, направленным против оси y. Начальная скорость по оси y равна: $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$. Текущая скорость равна: $v_y = v_{y0} - gt$. Путь по оси y: $y = \int_0^t v_y dt = v_{y0} - gt^2/2$. **Время** подъема t_1 находится из формулы $t_1 = v_{y0}/g$, время всего полета из $t_2 = 2t_1$, высота подъема: $y_{max} = v_{y0}{}^2/2g$; дальность полета: $x_{max} = 2v_{0x}v_{0y}/g$.

Траектория представляет собой квадратичную параболу:

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2.$$

Таким образом, задача решается аналитически. Но при желании получить много значений есть смысл воспользоваться вычислительной техникой. Построим для примера одну траекторию строго по точкам с помощью ПМК.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
Сначала		v_0	g	α	—	—	0	0	—	—	0	Δt	—	$\Delta\alpha$
Потом					v_{0x}	v_{0y}	x	y			t		$\frac{gt^2}{2}$	

Программа:

00 ИП3 F cos ИП1 × П4 . . . . v_{0x}
05 ИП3 F sin ИП1 × П5 . . . . v_{0y}
10 ИП4 ИПА × С/П x
14 ИПА Fx^2 ИП2 × 2 ÷ ПС . . . . . . $gt^2/2$
21 ИП5 ИПА × ИПС — С/П . . . . . . y
27 ИПА ИПВ + ПА . . . . . . наращивание t
31 БП $\boxed{10}$

Инструкция. Переключатель «Р — Г» — в положение «Г»; F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод (v_0, g, α, Δt);

В/0 С/П —— x_1 С/П —— y_1 С/П —— x_2 С/П —— y_2 С/П —— x_3 и т. д.

Ответ. При $v_0=20$ м/с, $\alpha=45°$, $\Delta t=0{,}5$ с:

x	0	7,07	14,1	21,2	28,3	35,3	42,4
y	0	5,85	9,24	10,2	8,68	4,73	−1,67

Отрицательное y означает, что тело уже упало (опустилось под горизонт). Отметим: Δt следовало бы взять поменьше. Траекторию изобразим на рисунке. Остальные траектории наметим, пользуясь формулами для x_{max} и y_{max} и изменив строки программы:

10 2 × ИП4 × ИП2 ÷ С/П . . . x_{max}
17 ИП5 Fx² 2 ÷ ИП2 ÷ С/П . . . y_{max}
24 ИП3 ИПД + П3 . . . . наращивание α
28 БП 00

Инструкция. Если еще не стерта предыдущая программа, то F АВТ БП 10 F ПРГ; набрать эти новые строки; F АВТ; ввести очередные v_0, α_0; ввести $\Delta\alpha$ в ЯПД; В/0 С/П —— x_{max} С/П —— y_{max} С/П —— x_{max} С/П —— y_{max} и т. д. (каждая пара значений — для следующего угла α).

Ответ.

v_0	α	x_{max}	y_{max}
20	10 20 30	14,0 26,2 35,3	0,6 2,4 5,1
30	10	59,0	53
			и т. д.

Заполнив такую таблицу, следует вычертить все траектории. Для ПЭВМ можно составить **программу**:

```
1 PRINT "KAMUG
2 PRINT "КАМ.ПОД УГЛ."
10 INPUT "V0=";V0
20 INPUT "A=";A
30 INPUT "T1=";T1
35 SCREEN 2
40 G=9.81
50 X=0
60 Y=0
70 T=T1
80 A=PI*A/180
90 U=V0*COS(A)
100 W=V0*SIN(A)
110 X=U*T
120 Z=G*T^2/2
130 Y=W*T-Z
140 IF Y<=0 THEN GOTO 180
150 LINE (0,0)-(600,0),5
```

```
151 LINE (0,0)-(0,360),5
155 PSET (X*5,Y*5*.64),8
160 T=T+T1
170 GOTO 110
180 GOTO 180
```

2.3.4. Попасть в кольцо можно разными способами (см. рис. 1), т. е. при различных комбинациях α и v_0. Задача заключается в том, чтобы указать v_0 при разных α. Зная, что $x=v_0t\cos\alpha$; $y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$, найдем уравнение траектории:

$$y=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2. \quad (5.6)$$

Подставим $y=h$, $x=l$ и получим связь v_0 и α:

$$h=l\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}l^2;\quad v_0=\sqrt{\frac{gl^2}{2\,(l\operatorname{tg}\alpha-h)\cos^2\alpha}}. \quad (5.7)$$

Отсюда следует, что $\operatorname{tg}\alpha$ должен быть больше h/l (см. рис. 1). Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6
Сначала Потом		g	l	h	— α_0 α	$\Delta\alpha$	

Найдем $v_0(\alpha)$ по **программе:**

```
→00 ИП3  ИП2  ÷  F arctg  П4 . . . . . . . . . . . α0
 05 ИП4  ИП5  +    П4   С/П . . . . . . . . . . наращивание и
                                                 вывод α
 10 F cos  F x²  П6 . . . . . . . . . . . . . . . . cos²α
 13 ИП4  F tg  ИП2  ×  ИП3  —2×ИП6×П7 . . знаменатель
                                                 дроби
 24 ИП2  F x²  ИП1  × . . . . . . . . . . . . . . числитель
 28 ИП7  ÷   F√  С/П . . . . . . . . . . . . . . вывод v0
 32 БП       [05]
```

Действуя по этой программе, получим

$\alpha,°$	50	55	60	65	70	75	80	85	90
v_0, м/с	12,4	9,3	8,2	7,7	7,7	8,2	9,3	12,4	

Заложив любую пару значений α, v_0 в выражение (5.6) и написав программу для нахождения y при увеличении x от 0 до 2,5 м, можно вычертить траекторию для любого случая.

На ПЭВМ, введя обозначения: $g\equiv G$; $l\equiv L$; $h\equiv H$; $\alpha\equiv A$; $\Delta\alpha\equiv A1$,— можно сразу вывести все значения v_0 в зависимости от α, работая по **программе**:

```
1 PRINT "BASK"
2 PRINT "BACKETBOЛ"
10 SCREEN 2
20 G=9.81
30 L=2.5
40 H=2.5
50 FOR A=50 TO 80 STEP 5
60 A1=A*PI/180
70 V0=SQR(G*L^2/2/(L*TAN(A1)-H)/(COS(A1)^2))
80 FOR X=0 TO 2.5 STEP.05
90 Y=SIN(A1)*X/COS(A1)-G*X^2/2/V0^2/(COS(A1)^2)
100 PSET (X*80,Y*80*.64)
110 NEXT X
120 NEXT A
130 GOTO 130
```

Протокол диалога:

```
:RUN
A1=.08
8.654E-01    1.294E 01
9.454E-01    9.642
1.025        8.386
```

Имея в распоряжении графический дисплей, можно вычертить ряд траекторий по программе:

```
1 PRINT "BASK"
2 PRINT "BACKETBOЛ"
10 G=9.81
20 L=2.5
30 H=2.5
40 A=ATN(H/L)
45 INPUT "A1=";A1
50 FOR I=0 TO 8
60 A=A+A1
70 Z=COS(A)^2
80 U=(L*TAN(A)-H)*2*Z
90 W=G*L^2
100 V=SQR(W/U)
110 PRINT A,V
120 NEXT I
130 END
```

2.3.5. Из $dv/dt=a$ следует

$$v_{n+1}=v_n+a_n\Delta t. \qquad (5.8)$$

Из $dx/dt=v$ следует

$$x_{n+1}=x_n+v_n\Delta t. \qquad (5.9)$$

Зная v_0 и x_0 (в нашем примере это нули), будем последовательно находить v_0, v_1, v_2, ... и x_0, x_1, x_2, ... через промежутки времени Δt по уравнениям (5.8) и (5.9). Нам придется каждый раз останавливаться для введения нового значения a_n из данного в задаче графика.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6
Сначала Потом		x_0 x	v_0 v	t_0 t			Δt

Программа:

00 ИП6×ИП2+П2 С/П . . . . вывод v
06 ИП6×ИП1+П1 С/П . . . . вывод x
12 ИП3 ИП6+П3 С/П . . . . вывод t, ввод a_n

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы F АВТ; ввод x_0П1 v_0 П2 t_0 П3 Δt П6; ввод в РгХ (на экран) первого значения; a_1 В/0 С/П ——— v_1 С/П ——— x_1С/П ——— t_1; ввод в РгХ a_2 В/0 С/П ——— v_2 С/П ——— x_2 С/П ——— t_2; ввод a_3 В/0 С/П ——— и т. д.

Ответ удобно записать сначала в виде таблицы a_n, v_n, x_n, t_n, а затем дать в виде графиков (рис. 63).

Проанализируйте физический смысл полученных графиков. Каким будет движение в интервале времени 15 . . . 20 с, после 30 с?

Для ПЭВМ воспользуемся программой с введением массива (см. раздел 3.17):

```
1 PRINT "USTRAN"
2 PRINT "УСК. ДВИЖ.ТРАНСП."
10 V=0
20 S=0
30 T1=2
40 FOR T=0 TO 32 STEP T1
50 READ A
60 V=V+A*T1
70 S=S+V*T1
80 PRINT T,A,V,S
90 NEXT T
100 DATA 0,.12,.36,1,1.2,1.2
101 DATA 1.2,1.2,1.2,1.2,1.2,1.2
102 DATA 1,.36,.12,0,0
```

Получим:

```
УСК. ДВИЖ.ТРАНСП.
 0             0              0              0
 2             .12            .24            .48
 4             .36            .96            2.4
 6             1              2.96           8.320001
 8             1.2            5.36           19.04
```

2.3.6. Для решения этой задачи может быть использована программа для ПЭВМ:

```
1 PRINT "DIFINT"
2 PRINT "ДИФФЕРЕНЦ. И ИНТЕГРИРОВ. ГРАФИКОВ"
10 DATA 10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10
20 DATA 10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4,-5
30 DATA -6,-6,-6,-6,-6,-6,-6,-6,-6,-6,-6,-6,-6
40 K=15
50 LX=2E-1
60 LV=3
70 LA=15
80 T1=1
90 X=0
```

```
100 SCREEN 2
110 LINE (0,225)-(630,225),5
120 LINE (0,130)-(630,130),5
130 LINE (0,35)-(630,35),5
140 LINE (0,260)-(0,190),5
150 LINE (0,165)-(0,95),5
160 LINE (0,70)-(0,0),5
170 READ V1
180 FOR I=1 TO 40
190 T=I*T1
200 READ V2
210 X=X+V2*T1
220 A=(V2-V1)/T1
230 PSET (T*K,X*LX+225)
240 PSET (T*K,V2*LV+130)
250 PSET (T*K,A*LA+35)
260 V1=V2
270 NEXT I
280 GOTO 280
```

2.4.1. Уравнение движения $m\ddot{x}=F_т-Av-Bv^3$ при равномерном движении ($\ddot{x}=0$) переходит в кубическое уравнение $F(v)=Bv^3+Av-F_т=0$. Его можно решить по известной формуле Кардано (см. табл. 4.4.1), но решение будет довольно громоздким. Приведем здесь хотя и приближенное, но более быстрое решение численным методом (см. раздел 4.4). График функции $F(v)$ — сумма кривых *1, 2* и *3* на рисунке 64. Таким образом, вещественный корень будет где-то между $v=0$ и не слишком большим значением v.

Для решения этого кубического уравнения на ПМК переведем данные в СИ, а затем распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	...	7	...	A
Сначала Потом	$F_Т$	Δv	B	A	— Bv^3		— $F(a)$		a v

Используем простейшую программу для решения уравнения, приведенную в таблице 4.4.2. Начнем искать корень с точки $a=0$. Подпрограмма для вычисления $F(x)$ (в нашем случае $F(v)$):

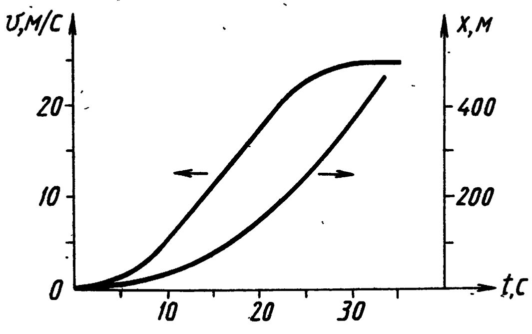


Рис. 63

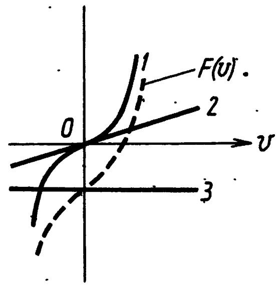


Рис. 64

50 ИПА Fx^2 ИПА×ИП2×П4 . . . . Bv^3
57 ИПА ИП3× . . . . Av
60 ИП4+ИП0−В/0 . . . . $Bv^3+Av-F_т$

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ БП 50 F ПРГ; ввод подпрограммы; F АВТ; ввод операндов (в системе СИ) В/0 С/П... Мощность находится на калькуляторе вручную, т. е. умножением v на $F_т$ (ИП0×).

Ответ. Взяв $\Delta v=1$ м/с, через 2 мин получим $v=15$ м/с. Это значение можно уточнить, взяв $a=14$; $\Delta v=0{,}1$. Получим $v=15{,}0$ м/с$=54$ км/ч; мощность равна 3 750 кВт.

Для решения задачи на ПЭВМ введем обозначения: $v\equiv$V; $F_т\equiv$U; начало и конец отрезка для поиска корня V1, V2, F (V1) $\equiv$F1, а текущее $F(v)\equiv$F. Для поиска корня можно использовать **программу**:

```
1 PRINT "RAWNPO"
2 PRINT "РАВН.ДВИЖ.ПОЕЗДА"
10 INPUT "A=";A
20 INPUT "B=";B
30 INPUT "U=";U
40 INPUT "V1=";V1
50 INPUT "V2=";V2
60 INPUT "ШАГ ПОИСКА=";S
70 F1=A*V1+B*V1^3-U
80 FOR V=V1 TO V2 STEP S
90 F=A*V+B*V^3-U
100 IF F*F1<=0 THEN 130
110 NEXT V
120 PRINT "КОР. НЕ ОБН."
125 STOP
130 PRINT "V=",V
140 END
```

2.4.2. Это решение полностью аналогично решению предыдущей задачи. Приняв $\Delta v=0{,}2$; $a=0$; $F_т=10$, 20, 50, 100, 200, 500, 1 000 Н и каждый раз «обнуляя» ЯПА, получим очередные значения v. Очень скоро убедимся, что начиная с некоторых значений v скорость растет медленно и увеличение усилий гребцов дает мало эффекта.

Ответ.

$F_т$, Н	0	10	20	50	100	200	500	1 000
v, м/с	0	0,2	0,6	1	1,2	1,8	2,4	3,2

Этот ответ следует представить в виде графика (рис. 65).

Для решения на ПЭВМ также можно использовать программу, приведенную в решении предыдущей задачи.

2.4.3. Мощность двигателя $P=\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{F_т\Delta s}{\Delta t}=F_тv$. Подставим $F_т$ в уравнение движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0=F_т-Av-Bv^3=P/v-Av-Bv^3. \qquad (5.10)$$

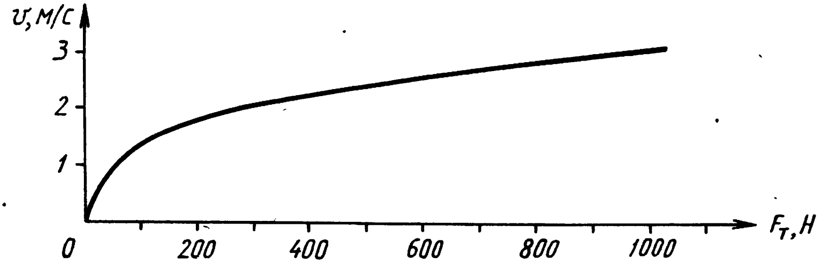


Рис. 65

Получается биквадратное уравнение для v:

$$Bv^4+Av^2-P=0; \tag{5.11}$$

$$v=\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+4BP}}{2B}}. \tag{5.12}$$

Таким образом, решение этой задачи возможно без использования вычислительной техники, но тем не менее для многократных вычислений удобно использовать ПМК.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4
Сначала Потом	*A*	*B*	0 *P*	Δ*P*	

Программа:

```
00 ИП1 ИП2  ×   4 ×  ИП0 Fx²+F√  . . √(A²+4BP)
09 ИП0 —   ИП1  ÷ 2 ÷   F√  С/П . . v
17 ИП2 ИП3   +  П2 БП [00] . . . . . . . . . . наращивание P
```

Ответ.

P, кВт	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
v, м/с	0	1,8	2,2	2,5	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3

Обратите внимание на то, что ставить двигатель на лодку мощностью более нескольких киловатт бессмысленно из-за сильного сопротивления воды (рис. 66). Увеличение скорости возможно только путем изменения конструкции лодки, увеличения ее обтекаемости, глиссирования, или использования подводных крыльев, что ведет к выходу части корпуса из воды, а соответственно уменьшению коэффициентов *A* и *B*.

На ПЭВМ можно получить сразу всю таблицу $P(v)$:

```
10 A=40
20 B=32
30 FOR P=0 TO 5000 STEP 500
40 Z=SQR(A^2+4*B*P)
50 V=SQR((Z-A)/(2*B))
60 PRINT P,V
70 NEXT P
80 END
```

Протокол работы:

```
МОЩН.ДВИГ.ЛОДКИ
 0                 0
 500               1.837649
 1000              2.236068
 1500              2.5
 2000              2.702843
 ...
```

Если же ввести строки

```
25 SCREEN 2
60 PSET (P/10,V*50)
80 GOTO 80
```

то на экране дисплея будет график V (P).

2.4.4. Скорость находится так же, как в предыдущей задаче. Для построения графика зависимости $P(v)$ при равномерном движении используем соотношение

$$P = F_{тр}v = Av^2 + Bv^4. \tag{5.13}$$

Вычисления проводим на ПМК.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6
Сначала Потом	A	B	— Av^2	—	0 v	Δv	— v^2

Программа:

```
→00 ИП4 Fx² П6    ИП0 × П2 . . . . . . . Av²
 06 ИП6 Fx² ИП1   ×  . . . . . . . . . . . . . Bv⁴
 10 ИП2  +  С/П . . . . . . . . . . . . . . . . P
 13 ИП4 ИП5 +     П4   БП [00] . . . . . . наращивание v
```

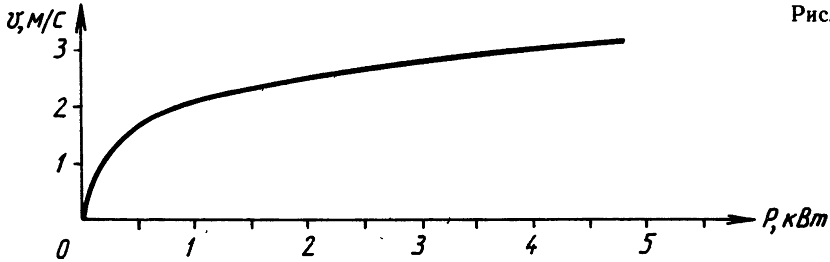


Рис. 66

График $P(v)$ дан на рисунке 67. Из него видно, что для увеличения скорости v от 36 до 45 км/ч мощность пришлось бы удвоить.

Для ПЭВМ при обозначениях $v_1=0\equiv V1$; $v_2=50$ км/ч$=13{,}9$ м/с$\equiv V2$; $\Delta v=1{,}39$ м/с$\equiv S$.

Программа:

```
1 PRINT "TEPL"
2 PRINT "ТЕПЛОХОД"
10 A=1.5E04
20 B=1.3E03
30 V1=0
40 V2=13.9
50 S=1.39
60 FOR V=V1 TO V2 STEP S
70 P=A*V^2+B*V^4
80 PRINT V,P
90 NEXT V
100 END
```

Протокол:

```
ТЕПЛОХОД
0            0
 1.39        33834.41
 2.78        193572.6
 4.17        653919.6
```

2.4.5. Стоимость рейса $\Sigma=\sigma_1 t+\sigma_2 m$, где t — время; m — масса израсходованного топлива. Введем $t=l/v$, а m подставим из формулы $A=\eta q m$. Эта работа идет на преодоление силы трения о воду:

$$F_{\text{тр}}=Av+Bv^3;$$

$$\Sigma=\sigma_1 l/v+\sigma_2 A/(\eta q)=\sigma_1 l/v+\sigma_2 m. \tag{5.14}$$

Из $\eta q m=F_{\text{тр}} l=(Av+Bv^3)\,l$ найдем m (работа, полученная от двигателя, у которого КПД при сгорании в нем топлива массой m с теплотворной способностью q идет на преодоление силы трения о воду). Тогда

$$\Sigma=\sigma_1 l/v+\sigma_2\,\frac{Av+Bv^3 l}{\eta q}, \tag{5.15}$$

а на единицу длины пути

$$\Sigma'=\sigma_1/v+\sigma_2\,\frac{Av+Bv^3}{\eta q}. \tag{5.16}$$

Найдем, при каком v сумма Σ' будет минимальной:

$$\frac{d\Sigma'}{dv}=-\frac{\sigma_1}{v^2}+\frac{\sigma_2}{\eta q}(A+3Bv^2)=0, \tag{5.17}$$

что ведет к биквадратному уравнению

$$\frac{3B\sigma_2}{\eta q}v^4+\frac{A\sigma_2}{\eta q}v^2-\sigma_1=0;$$

$$3Bv^4+Av^2-\eta q\sigma_1/\sigma_2=0; \tag{5.18}$$

$$v=\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+12B\eta q\sigma_1/\sigma_2}}{6B}}.$$

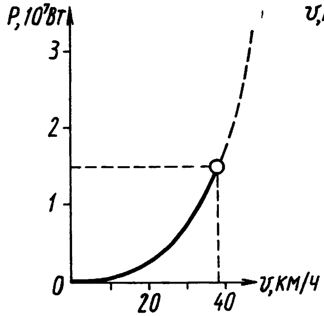


Рис. 67

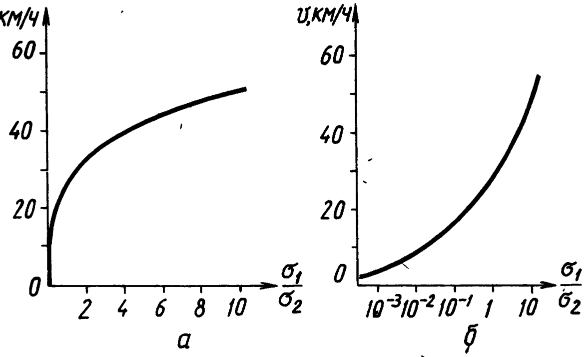


Рис. 68

Работаем на ПМК.
Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4
	A	B	η	q	σ_1/σ_2

Находим оптимальные скорости v (σ_1/σ_2) по **программе**:

00 ИП4 ИП3×ИП2×ИП1×1 2× . . $12B\eta q\sigma_1/\sigma_2$
10 ИП0 Fx² + $F\sqrt{\ }$ . . . . $\sqrt{A^2+12B\eta q\sigma_1/\sigma_2}$
14 ИП0 − 6 ÷ ИП1 ÷ $F\sqrt{\ }$ С/П v

Будем менять σ_1/σ_2 в широких пределах.
Ответ.

σ_1/σ_2	0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^1	10^2	10^3
v, м/с v, км/ч	0 0	0,96 3,4	2,2 8	4,4 16	8,0 29	14,4 52	25,7 92,5	45,8 165

На рисунке 68 ответ дан в линейном (*а*) и логарифмическом (*б*) масштабах по оси σ_1/σ_2. Реальные значения σ_1/σ_2 колеблются от 10^{-2} до 1, поэтому наиболее распространенные скорости лежат в диапазоне 15. . .20 км/ч. Здесь использование ПЭВМ излишне.

2.4.6. Уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_{\text{т}}-A\frac{dx}{dt} \qquad (5.19)$$

представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Общие приемы решения даны в разделах 4.6 и 4.7. Сведем наше уравнение к двум дифференциальным уравнениям первого порядка, введя обозначения:

$$\frac{dx}{dt}\equiv v;\quad \frac{dv}{dt}=\frac{F_{\text{т}}}{m}-\frac{A}{m}v. \qquad (5.20)$$

Получаются приближенные соотношения, пригодные для численного решения:

$$x_{n+1}=x_n+v_n\Delta t;\quad v_{n+1}=v_n+\frac{F_т-Av_n}{m}\Delta t. \qquad (5.21)$$

Для решения используем ПМК.

Распределим память:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Сначала Потом	— N 0	0 t_n	0 v_n	0 x_n	A	m	$F_т$	Δt	N

Зная начальные условия ($t=0$; $x=0$; $v=0$), действуем по **программе:**

00 ИП8 П0 . . . . заполнение счетчика
02 ИП1 С/П ИП2 С/П ИП3 С/П . . . . . . вывод t, v, x
08 ИП6 ИП4 ИП2 × − ИП5 ÷ ИП7 ÷ × ИП2 + П2 v_n
20 ИП7 × ИП3 + П3 . . . . x_n
25 ИП1 ИП7 + П1 . . . . t_n
29 FL0 $\boxed{08}$ БП $\boxed{00}$ . . . . организация циклов

Приняв $\Delta t=0{,}5$ с; $N=10$; $m=10^4$; $F_т=1{,}5\cdot10^4$, действуем по *инструкции*. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы;

F АВТ 0П1 П2 П3 АП4 m П5 $F_т$ П6 0,5 П7 10 П8 В/0
С/П ——— t_1 С/П ——— v_1 С/П ——— x_1
С/П ——— t_2 С/П ——— v_2 С/П ——— x_2.

Ответ.

t, с	0	5	10	15	20	25	30	35
v, м/с x, м	0 0	6 18	9,6 58,6	11,8 113	13 176	13,8 243	14,3 314	14,6 386

На получение каждой строки чисел уходит около 70 с. Видно, что через 30 с, т. е. по прохождении 300 м, движение становится практически равномерным. Можно решить задачу и иначе: найти сначала скорость равномерного движения из условия $F_т=Av$, а затем, взяв от нее 90%, сравнить скорость с этим числом. Когда они сравняются, вывести t и остановить машину. Составьте такую программу для ПМК самостоятельно.

Для решения на ПЭВМ именно так и поступим:

```
1 PRINT "UTRAM"
2 PRINT "УСКОРЕНИЕ ТРАМВАЯ"
10 T=0
20 V=0
30 X=0
40 A=1E03
50 M=1E04
60 F=1.5E04
70 T1=.5
80 V1=F/A
90 V=V+(F-A*V)*T1/M
100 X=X+V*T1
110 T=T+T1
120 IF V>=.9*V1 THEN 140
130 GOTO 90
140 PRINT T,V,X
150 END
```

Ответ.

2.25E 01 1.35E 01 2.09E 02

2.4.7. Задача аналогична предыдущей, только в качестве $F_\text{т}$ следует взять силу тяжести mg и вычесть силу Архимеда:

$$F_\text{т} = mg - \rho_\text{в} Wg = g\,(m - \rho_\text{в} 4\pi r^3/3), \qquad (5.22)$$

где W — объем шарика; $\rho_\text{в}$ — плотность воды, а в качестве A следует взять $6\pi r\eta$. Разместив дополнительно в памяти g П9, $\rho_\text{в}$ ПА, r ПВ, η ПС, следует начать программу с вычисления $F_\text{т}$ и A:

00 ИПВ ИПВ $\text{F}x^2 \times \text{F}\pi \times 4 \times$ ИПА $\times\, 3 \div \ldots \rho_\text{в} 4\pi r^3/3$
12 ИП5 $\leftrightarrow$ — ИП9 $\times$ П6
18 6 $\text{F}\pi \times$ ИПВ $\times$ ИПС $\times$ П4

Далее используем полностью программу из предыдущей задачи (необходимо только сменить адреса переходов). Не следует забывать опустошать ячейки 0, 1, 2, 3 перед работой.

Ответ: при $\Delta t = 0{,}05$ и $N = 2$.

t, с	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
v, м/с	0	0,14	0,21	0,24	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26
x, м	0	0,29	0,06	0,08	0,11	0,14	0,16	0,19	0,21

Скорость установившегося в конце концов равномерного движения может быть найдена из соотношения

$$\frac{4\pi r^3}{3} g\,(\rho_\text{ш} - \rho_\text{в}) = 6\pi r\eta v,$$

откуда видно, что $v \sim r^2$. При увеличении радиуса в 3 раза скорость возрастает на порядок, а соотношение между вторым и первым членами в формуле (2.4.5) — на 2 порядка. Так что отбрасывать второй член уже нельзя. Поэтому известная лабораторная работа «Опыт Стокса» должна выполняться с маленькими шариками или шариками малой плотности, т. е. с использованием предельно малых скоростей.

2.4.8. Уравнение движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-(Av+Bv^3). \tag{5.23}$$

Приведем его к виду (см. раздел 4.7)

$$v\equiv\frac{dx}{dt};\ \frac{dv}{dt}=g-(Av+Bv^3)/m;$$
$$x_{n+1}=x_n+v_n\Delta t; \tag{5.24}$$
$$v_{n+1}=v_n+[g-(Av+Bv^3)/m]\,\Delta t;$$
$$t_{n+1}=t_n+\Delta t.$$

Последние три формулы и кладутся в основу программы для ПМК.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C
Сначала Потом	— N 0	0 t_n	0 v_n	0 x_n	A	B	m	g	Δt	N	— Bv^3	—	—

Программа:

```
00 ИП9 П0 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . заполнение
                                               счетчика
02 ИП1 С/П ИП2 С/П  ИП3 С/П . . . . . . вывод
                                               t, v, x
08 ИП2 ИП2 Fx²  ×    ИП5 ×  ПА . . . . . Bv³
15 ИП2 ИП4 ×    ИПА  +   ИП6 ÷    . . . (Av+Bv³)/m
22 ИП7 ↔   —    ИП8  ×   ИП2+П2 . . . v
30 ИП8 ×   ИП3  +    П3 . . . . . . . . . . . x
35 ИП1 ИП8 +    П1 . . . . . . . . . . . . . . . t
39 FL0 [08]  БП  [00]
```

Ответ при $\Delta t=0{,}2$ и $N=5$:

t, с	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v, м/с x, м	0 0	9,5 5,8	18,0 20,5	25,0 42,8	30,0 70,9	33,1 102,9	34,9 137,2	35,9 172,7	36,3 208,9	36,6 245	36,7 282

Этот ответ надо представить в виде графика. Для уточнения движения на начальном участке необходимо уменьшить Δt и увеличить N. Отметим, что после 8...10 с падения скорость парашютиста становится почти постоянной.

На ПЭВМ организуем печатание таблицы t, v, x:

```
1 PRINT "PADVOZ"
2 PRINT "ПАДЕНИЕ В ВОЗДУХЕ"
10 T=0
20 V=0
30 X=0
40 A=5
50 B=1E-02
60 M=70
70 G=9.81
80 T1=.1
90 FOR J=1 TO 15
100 FOR I=1 TO 10
110 Z=G-(A*V+B*V^3)/M
120 V=V+Z*T1
130 X=X+V*T1
140 T=T+T1
150 NEXT I
160 PRINT T,V,X
170 NEXT J
180 END
```

(Здесь не учтено, что на большой высоте воздух значительно более разрежен, чем у поверхности земли. Более правильный ответ получится, если ввести зависимость коэффициентов A и B от высоты, например, по барометрической формуле $A=A_0 \exp(-Mgh/RT)$, где M — молекулярная масса; R — газовая постоянная. На ПЭВМ для этого потребуется только изменение строки 30. Несложен также учет зависимости температуры от высоты.) Получаем результат:

```
:RUN
1.000   9.476      5.275
2.000   1.795E 01  1.952E 01
3.000   2.485E 01  4.141E 01
```

Сделав небольшие изменения в программе, получаем график:

```
5 SCREEN 2
160 LINE (0,0)-(600,0),8
161 LINE (0,0)-(0,360),8
165 PSET (T*30,V*5),8
180 GOTO 180
```

2.4.9. Учитывая результат предыдущей задачи, получаем, что по крайней мере $5000/40 \sim 120$ с $=2$ мин парашют можно не раскрывать. До земли останется еще около 1 км.

2.4.10. Уравнение движения: $m\ddot{x}=F_{\text{т}}-Av-Bv^3$ или $dv/dt=$ $=F_{\text{т}}/m-Av/m-Bv^3/m$. Это дифференциальное уравнение первого порядка вида $dv/dt=F(v)$, которое решается по программам, приведенным в разделах 4.6 и 4.7. Уравнение записывается как

$$\Delta v \approx F(v)\,\Delta t;\quad v_{n+1}=v_n+F(v_n)\,\Delta t. \tag{5.25}$$

Берут первое значение $v_n=0$, вычисляют $F(v_n)$, задают Δt, находят v_{n+1}, затем в качестве v_n берут это значение, а новое v_{n+1} находят таким же способом и т. д. При этом надо следить за общим временем $t=n\Delta t$. Когда оно станет равным $T=1$ мин (60 с), вычисление надо остановить и вывести на экран последнее значение v.

Распорядимся памятью ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	...	A	B
Сначала Потом	0 v	Δt	0 t	$F_{\text{т}}$	m	A	B	T		— kv^3/m	— fv/m

Программа:

```
00 ИП0 Fx²  ИП0 ×  . . . . . . . . . . . . . . . . v³
04 ИП6 ×    ИП4 ÷   ПА  . . . . . . . . . . . . Bv³/m
09 ИП0 ИП5 ×   ИП4 ÷  ПВ  . . . . . . . . . . . Av/m
15 ИП3 ИП4 ÷  . . . . . . . . . . . . . . . . . . Fт/m
18 ИПВ —    ИПА —  . . . . . . . . . . . . . . . F(v)
22 ИП1 ×    ИП0 +   П0  . . . . . . . . . . . новое vₙ
27 ИП2 ИП1 +   П2 . . . . . . . . . . . . . . . . tₙ
31 ИП7 —  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . tₙ—T

33 Fx≥0 [00] ИП0 С/П
```

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод операндов; В/0 С/П. При изменении параметров перед новым расчетом «обнулить» ЯП 0 и 2!

Ответ. Если брать $\Delta t=5$ с, то скорость с учетом трения к концу первой минуты окажется равна 6,49 м/с (через 2 мин работы калькулятора). Точнее ответ будет при $\Delta t=1$ с: $v=6{,}43$ м/с$=$ $=23{,}2$ км/ч (время работы калькулятора 10 мин). Без учета трения $v=\frac{F}{m}t=\frac{2{,}5\cdot 10^4}{2\cdot 10^6}60=7{,}5$ м/с$=27$ км/ч.

Программа для ПЭВМ (обозначения: $t\equiv$T; $\Delta t=$T1; $v\equiv$V; $F_{\text{т}}\equiv$F; $m\equiv$M):

Протокол диалога:

```
1 PRINT "USKPO
2 PRINT "УСКОРЕНИЕ ПОЕЗДА"
10 T=0
20 V=0
30 F=2.5E5
40 M=2E6
50 A=1E4
60 B=30
70 T0=60
80 T1=1
90 Z=(F-A*V-B*V^3)/M
100 V=V+Z*T1
110 T=T+T1
120 IF T>=T0 THEN 140
130 GOTO 90
140 PRINT V
150 END
```

:RUN
6.433

Таким образом, для первой минуты движения разница не так уж велика. А как для первых 20 мин? Измените содержание строки 40 (Т0=1200). Можно ли хотя бы для приближенных расчетов предполагать отсутствие трения?

2.4.11. Уравнение движения: $m\ddot{x}=F_{\text{т}}-A\dot{x}-B\dot{x}^3$. Относительно x — это дифференциальное уравнение второго порядка. Сведем его сначала к уравнению первого порядка вида $dv/dt=F(v)$, что ведет к приближенной формуле $v_{n+1}=v_n+F(v)\Delta t$. Поскольку $dx/dt=v$, можно приближенно предположить $\Delta x\approx v\Delta t$ или $x_{n+1}\approx x_n+v_n\Delta t$. Эти формулы для v и x и положены в основу программы. Задав x_0, v_0 и Δt, вычисляем $F(v)$, затем v_1, x_1, а затем v_2, x_2 и т. д. Одновременно будем наращивать время t каждый раз на Δt и поставим условие: при $t\geqslant T=3$ мин следует остановить вычисления, выведя предварительно значение x_n на экран.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
Сначала Потом	0 v	Δt	0 t	$F_{\text{т}}$	m	A	B	T	0 x	—	— Bv^3/m	— Av/m

Программа:

```
00 ИП0  Fx²  ИП0  ×  . . . . . . . . . . . .  v³
04 ИП6  ×    ИП4  ÷    ПА . . . . . . . .  Bv³/m
09 ИП0  ИП5  ×    ИП4  ÷  ПВ . . . . .  Av/m
15 ИП3  ИП4  ÷  . . . . . . . . . . . . . .  Fт/m
18 ИПВ  —    ИПА  —  . . . . . . . . . . .  F(v)
22 ИП1  ×    ИП0  +    П0 . . . . . . . .  v
27 ИП1  ×    ИП8  +    П8 . . . . . . . .  x
32 ИП2  ИП1  +    П2 . . . . . . . . . . .  t
36 ИП7  —  . . . . . . . . . . . . . . . . . .  t—T
38 Fx≥0 [00] ИП8  С/П . . . . . . . . . .  если t<T, то следует
                                             повторять операции
                                             наращивания v, x, t;
                                             если t≥T, то следу-
                                             ет вывести x на экран
                                             и стоп
```

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод операндов (в системе СИ!); В/0 С/П. При замене данных для нового расчета «обнулить» ЯП 0,2 и 8.

О т в е т. Если взять $\Delta t=10$ с, то через 4 мин работы калькулятора получим ответ: 2130 м. Более точный ответ (при $\Delta t=5$ с): 2068 м. Без учета трения, т. е. заложив значения $f=k=0$ в ЯП 5 и 6 по этой же программе или просто по формуле $x=\frac{\ddot{x}t^2}{2}=\frac{F_{\text{т}}t^2}{2m}$, получим неверный результат: 4 км (равномерное движение не получается; скорость поезда непрерывно растет).

Программа для ПЭВМ будет мало отличаться от программы в решении предыдущей задачи. Нужно только добавить строки

```
70 T0=180
25 X=0
105 X=X+V*T1
140 PRINT T,V,X
```

2.4.12. Уравнение движения имеет вид

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}=mg-F\,(v). \tag{5.26}$$

Как в предыдущих задачах

$$\begin{gathered} dx/dt=v;\ dv/dt=g-F/m; \\ x_{n+1}=x_n+v_n\Delta t;\ v_{n+1}=v_n+(g-F/m)\,\Delta t. \end{gathered} \tag{5.27}$$

Но теперь F не вычисляется по формуле. Поэтому организуем для каждого отрезка времени остановку калькулятора и ввод вручную F из графика, показанного на рисунке 5.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Сначала Потом	—	0 t	0 v	0 x	—	—	m	g	Δt

Программа:

```
→00 ИП1 С/П ИП2 С/П ИП3 С/П . . . . вывод t, v, x и оста-
                                    новка для ввода F
 06 ИП6  ÷   ИП7 ↔   —  . . . . . . . . (g—F/m)
 11 ИП8  ×   ИП2 +   П2 . . . . . . . . v
 16 ИП8  ×   ИП3 +   П3 . . . . . . . . x
 21 ИП1 ИП8  +   П1 . . . . . . . . . . . t
 25 БП  [00]
```

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; ввод 0 П1 П2 П3 m П6 g П7 Δt П8 В/0 С/П ——— t_1 С/П ——— x_1; ввод F из графика 5, соответствующее текущему v; С/П ——— t_2 С/П ——— v_2 С/П ——— x_2 и т. д.

Ответ. Без сопротивления воздуха $v=gt$ (прямая *1* на рис. 69). С учетом сопротивления, взяв $\Delta t=1$ с и действуя по инструкции, получим

t, с	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v, м/с x, м	0 0	9,8 9,8	19,4 29,2	28,2 57	37 94	43 137	48 186	49 237	50 287	50 336

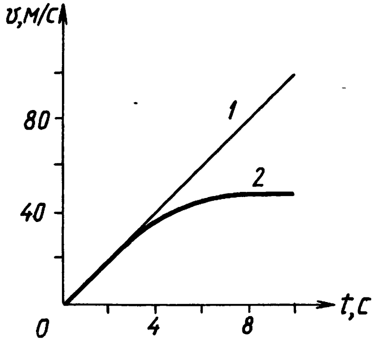


Рис. 69

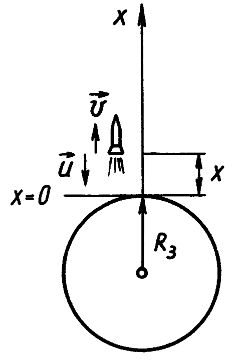


Рис. 70

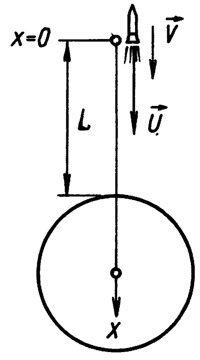


Рис. 71

Результат дан на рисунке 69, кривая *2*.

Такая задача при использовании ПМК оказывается очень трудоемкой. Легко сбиться и ввести не то число. Кроме того, крупные шаги ведут к большим ошибкам, а при маленьких шагах время вычислений очень велико.

На ПЭВМ можно ввести значения $F(v)$ через определенные промежутки (по v или лучше по F) в блок DATA (см. раздел 3.17), а потом сделать программу, которая использовала бы эти данные при вычислениях следующих значений: t, v, x.

2.4.13. Обозначим переменную длину свешивающегося конца через x. Уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\left(m\frac{x}{l}\right)g-m\left(\frac{l-x}{l}\right)gk;\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g}{l}[x(1+k)-kl]. \qquad (5.28)$$

При $x(1+k)<kl$ скорость нарастать не будет, конец должен свешиваться на $x>kl/(1+k)$. Возьмем в качестве начального значения x величину $x_0=\varkappa kl/(1+k)$ и сосчитаем время соскальзывания. Дифференциальное уравнение (5.28) решается аналитически, но не так уж просто. Использование же численного метода (см. раздел 4.7) позволяет решить задачу простым стандартным методом (хотя и приближенно).

Введем $v=dx/dt$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{g}{l}[x(1+k)-kl]; \\ v_{n+1}=v_n+\dfrac{g}{l}[x_n(1+k)-kl]\,\Delta t; \\ x_{n+1}=x_n+v_n\Delta t;\ t_{n+1}=t_n+\Delta t. \end{cases} \qquad (5.29)$$

Зная начальные x_0 и $v_0=0$ при $t_0=0$, будем находить следующие значения: x_{n+1} и v_{n+1} — по формуле (5.29) до тех пор, пока x не станет равным l. Используем ПМК.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Сначала Потом	—	0 t_n	0 v_n	— x_0 x_n	g	l	Δt	$\varkappa$	k

Программа:

00 ИП8 ИП5 × ПА . . . . kl
04 ИП8 1 + ПВ . . . . $(1+k)$
08 ИПА ИПВ ÷ ИП7 × П3 . . . . x_0
16 ИП1 ИП6 ÷ П1 . . . . наращивание t
20 ИПВ ИП3 × ИПА — . . . . [скобка]
25 ИП4 × ИП6 × ИП5 ÷ . . . . $g\,[...]\cdot \Delta t/l$
31 ИП2 + П2 . . . . наращивание v
34 ИП6 × ИП3 + П3 . . . . наращивание x

нет

39 ИП5 — Fx⩾0 $\boxed{16}$ . . . . $x-l\geqslant 0$?

Да

43 ИП1 С/П . . . если $x\geqslant l$, то вывести t и стоп

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод 0 П1 П2 g П4 l П5 Δt П6 k П8 В/0 С/П ——— t.

Для $l=3$ м $k=0{,}1$; взяв $\varkappa=1{,}1$ и $\Delta t=0{,}1$ с, через 4 мин получим $t=2{,}8$ с. Если взять в качестве начального $x_0=1{,}01kl/(1+k)$, т. е. $\varkappa=1{,}01$, то при тех же условиях время будет больше 4 с, а при $\varkappa=1$ время уходит в бесконечность (машина не останавливается). Это понятно, так как конец не соскальзывает.

```
1 PRINT "СЕР"
2 PRINT "СОСКАЛЬЗ.ЦЕПИ"
10 T=0
20 V=0
30 G=9.81
40 L=3
50 K=.1
60 INPUT "Q=";Q
70 INPUT "T1=";T1
80 X=Q*K*L/(1+K)
90 T=T+T1
100 Z=(X*(1+K)-K*L)*G*T1/L
110 V=V+Z
120 X=X+V*T1
130 IF X>=L THEN 150
140 GOTO 90
150 PRINT T
160 END
```

Решение задачи:

:RUN
Q=1.1
T1=.1
2.800

Каким будет движение цепочки? Проделайте опыт и убедитесь в том, что движение не будет равноускоренным.

2.4.14. Используем уравнение Мещерского (см. введение к параграфу 2.4):

$$M\Delta v + \mu\Delta t u = F\Delta t. \tag{5.30}$$

Если положительным на рисунке 70 считать направление вверх, то $u<0$; $F_{\text{т}}<0$. Это уравнение легко решается (т. е. находится $v(t)$) аналитически только в том случае, если $F=\text{const}$. Если же учитывать трение о воздух и уменьшение силы тяжести с высотой, то необходимо использовать вычислительную технику.

Пусть $F=-\gamma M M_З/(R_З+x)^2$. Тогда

$$\Delta v = -\gamma M_З/(R_З+x)^2 - \mu\Delta t u/M;$$
$$v_{n+1} = v_n - \gamma M_З/(R_З+x)^2 - \mu\Delta t u/M. \tag{5.31}$$

Масса M убывает по закону:

$$\Delta M = -\mu\Delta t;\ M_{n+1} = M_n - \mu\Delta t. \tag{5.32}$$

Кроме того,

$$x_{n+1} = x_n + v_n\Delta t;\ t_{n+1} = t_n + \Delta t. \tag{5.33}$$

Эти четыре уравнения и положены в основу программы для ПМК.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
Сначала	—	0	0	0	M_0	μ	u	γ	$M_З$	$R_З$	Δt	H	—	—
Потом		t_n	v_n	x_n	M_n								$\gamma\dfrac{M_З}{(R_З+x)^2}$	$\dfrac{\mu\Delta t u}{M}$

Программа:

00 ИП5 ИПА × ИП6 × ИП4 ÷ ПД . . . $\mu\Delta t u/M$
08 ИП9 ИП3 + Fx^2 F1/x ИП7×ИП8× ПС $\gamma M_З/(R_З+x)^2$
18 ИП2 ИПС — ИПД — П2 v
24 ИП5 ИПА × ИП4 ↔ — П4 . . . . M
31 ИП2 ИПА × ИП3 + П3 x
37 ИП1 ИПА + П1 . . . . t

41 ИПВ ИП3 — Fx<0 $\boxed{08}$ . . . . если H достигнута, то вывести время и стоп

46 ИП1 С/П

О т в е т. 85 с (через 4 мин работы калькулятора при $\Delta t=5$ с).

Отметим, что в этом упрощенном решении не учтено вращение Земли.

Для ПЭВМ программа аналогична.

2.4.15. Задача на уравнение Мещерского (см. решение задачи 2.4.14). Существует много программ для решения этой задачи, поскольку требования к режиму посадки могут быть разными (с минимальным расходом горючего, с минимальным временем посадки и т. д.). Потребуем, чтобы перегрузки, испытываемые космонавтами или оборудованием, были постоянными в течение всего времени посадки, что возможно при равнозамедленном движении. Выберем ось x, направленную от ракеты к центру Луны (рис. 71). Пусть в начальный момент времени $x=0$. Тогда скорость ракеты V и скорость пороховых газов — положительные физические величины. Для торможения реактивная струя направляется в сторону Луны. Ускорение найдем из уравнения $V_0^2=-2aL$. В нашем случае $a=-10^6/(2\cdot5\cdot10^4)=-1$ м/с, а скорость в любой момент времени равна: $V=V_0+at$, так что $\Delta V=a\Delta t$. Сила притяжения к Луне будет равна: $F=\gamma MM_{\text{л}}/(R_{\text{л}}+L-x)^2$. Требуемый секундный расход топлива μ найдем из уравнения Мещерского:

$$M\Delta V+\mu u\Delta t=F\Delta t;$$

$$\mu=\frac{F-aM}{u}$$

($F>0$; $a<0$; $M>0$; $U>0$). Будем наращивать время малыми промежутками Δt и вычислять каждый раз F, μ, M, V, t и высоту над поверхностью Луны: $H=L-x$.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C
Сначала	0	V_0	M_0	0	U	γ	$M_{\text{л}}$	$R_{\text{л}}$	L	—	—	—	Δt
Потом	x	V	M	t						μ	a		

Программа:

```
 00 ИП1  Fx²   2     ÷    ИП8  ÷    |—| ПА . . . a
→08 ИП5  ИП2   ×     ИП6  ×    ПВ . . . . . . . . . числитель F
 14 ИП7  ИП8   +     ИП0  —    Fx²  ИПВ ↔ ÷ . . F
 23 ИПА  ИП2   ×     —    ИП4  ÷    С/П . . . . . вывод μ
 30 ИПС  ×     ИП2   ↔    —    П2   С/П . . . . . вывод M
 37 ИП3  ИПС         +    П3   С/П  . . . . . . . . вывод t
 42 ИПА  ИПС   ×     ИП1  +    П1   С/П . . . . . вывод V
 49 ИП1  ИПС   ×     ИП0  +    П0   . . . . . . . . . x
 55 ИП8  ↔     —     С/П  . . . . . . . . . . . . . . вывод H

 59 БП   [08]
```

Полное время торможения при равноускоренном движении: $t_{\text{п}}=-V_0/a=-10^3/-10=100$ с. Поэтому можно взять Δt, например 5 с (лучше брать меньше).

Ответ при $\Delta t=5$ с:

μ	2,88	2,84	. . .	2,27	2,23	2,20
M	985	971	. . .	769	758	747
t	5	10	. . .	90	95	100
V	950	900	. . .	100	50	0
H	$4{,}5\cdot10^4$	$4{,}1\cdot10^4$	. . .	$2{,}7\cdot10^3$	$2{,}5\cdot10^3$	$2{,}5\cdot10^3$

Получается, что ракета останавливается не на $H=0$, а на высоте 2,5 км. Это результат приближенности расчета. Чем меньше Δt, тем лучше будет получаться мягкая посадка ($V=0$ при $H=0$). Абсолютно точный расчет невозможен. Предложите программу для корректировки посадки при малых H. Добавим, что при реальных посадках сближение идет не по прямой линии, а по сложной кривой (см. задачи 2.5.9...2.5.13).

На ПЭВМ по аналогичной программе ответ можно получить много быстрее и он будет точнее:

```
1 PRINT "POSLUN"
2 PRINT "ПОСАДКА НА ЛУНУ"
10 U=4E3
20 J=6.7E-11
30 M3=7.35E22
40 R3=1.735E6
50 X=0
60 V=1E3
70 M=1E3
80 T=0
90 L=5E4
100 T1=.5
110 A=-V^2/(2*L)
120 F=J*M3*M/((R3+L-X)^2)
130 M1=(F-A*M)/U
140 M=M-M1*T1
150 T=T+T1
160 V=V+A*T1
170 X=X+V*T1
180 H=L-X
185 PRINT T,V,H
190 IF H<=250 THEN 210
200 GOTO 120
210 PRINT "СНИЖЕНИЕ ПО ПРОГРАММЕ ЗАКОНЧЕНО,V="V;"M/C"
220 PRINT "ДО ЛУНЫ H="H;"M"
230 PRINT "ПЕРЕХОДИТЕ НА РУЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСХОДОМ ТОПЛИВА"
240 END
```

2.5.1. По оси x (рис. 72) на камень не действуют никакие силы, по оси y действует сила тяжести. Имеем уравнения движения по оси x и по оси y:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg. \tag{5.34}$$

Решения этих дифференциальных уравнений находятся аналитически (не требуется применения численных методов и вычислительной техники).

Введя $v_x\equiv dx/dt$; $v_y\equiv dy/dt$, получаем

$$dv_x/dt=0;\quad dv_y/dt=-g \tag{5.35}$$

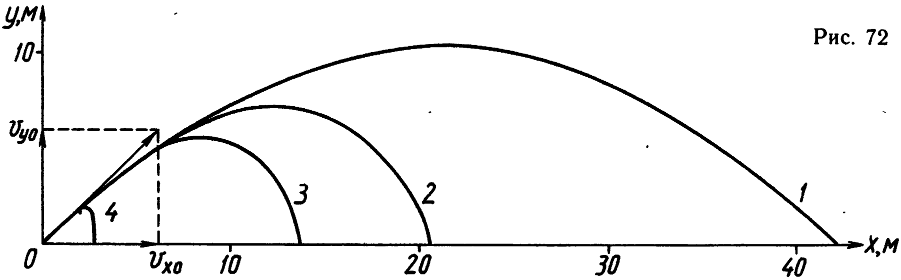


Рис. 72

и после интегрирования:

$$v_x = \text{const} = v_{x0};\ v_y = v_{y0} - gt;$$
$$v_{x0} = v_0 \cos\alpha;\ v_{y0} = v_0 \sin\alpha. \qquad (5.36)$$

Еще одно интегрирование даст

$$x = v_{x0}t;\ y = v_{y0}t - gt^2/2. \qquad (5.37)$$

Это и есть траектория в параметрической форме. Можно исключить t:

$$y = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x - \frac{gx^2}{2v_{x0}^2} = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - x^2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \qquad (5.38)$$

Видно, что траектория есть парабола (см. рис. 72, кривая *1*). Максимальная высота подъема будет в том случае, если $v_y = 0$. Находя из выражений (5.36) время подъема

$$t = v_0 \sin\alpha/g, \qquad (5.39)$$

подставляя его в формулу (5.37), находим:

$$y_{\max} = v_0^2 \sin^2\alpha/2g;\ x_{\max} = 2v_0\cos\alpha\,\frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (5.40)$$

Для расчета траектории по уравнению (5.38) следует составить простую программу для ПМК, но сначала распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	. . .	А
Сначала Потом	v_0	α	g	0 x	Δx		— Второе слагаемое

Программа:

```
00 ИП3 Fx² ИП2 × 2 ÷ ИП0 Fx² ÷
            ИП1 F cos Fx² ÷ ПА ............ второе слагаемое
14 ИП1 F tg ИП3 × ......................... первое слагаемое
18 ИПА      —    С/П ...................... y
21 ИП3      ИП4  +   П3 ................... наращивание x
25 БП       [00]                            переход на начало
```

Инструкция. Переключатель «Р — Г» — в положение «Г», F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод данных; В/0 С/П ——— y_0 С/П ——— y_1 С/П ——— y_2 и т. д.

Ответ для $\alpha=45°$ дан на рисунке 72, кривая *1*. Для других α следует заменить ввод: α П1, 0 П5.

Для расчета на ПЭВМ: $v_0\equiv$V0; $v_x\equiv$V1; $v_y\equiv$V2; $g\equiv$G; $\alpha\equiv$A (в радианах!); $\Delta x\equiv$X1.

Программа:

```
1 PRINT "KUG"
2 PRINT "ПОЛЕТ КАМ.ПОД УГЛ."
10 V0=20
20 A=PI*45/180
30 G=9.8
40 X=0
50 X1=2
60 X=X+X1
70 Z=X^2*G/2/V0^2/(COS(A))^2
80 Y=X*TAN(A)-Z
90 IF Y<=0 THEN STOP
100 PRINT Y
110 GOTO 60
```

2.5.2. Результат не изменится, так как в уравнениях (5.34) масса сокращается. Однако, как будет видно из решения следующих задач, если для камня пренебрежение сопротивлением воздуха ведет к небольшому искажению результата, то для легкого тела пренебрегать трением о воздух никак нельзя.

2.5.3. Уравнения движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-F_{\text{тр}\,x};\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg-F_{\text{тр}\,y}. \tag{5.41}$$

Общий метод решения этих дифференциальных уравнений дан в разделах 4.6 и 4.7. Эти разделы следует изучить, прежде чем решать эту и следующие задачи.

Сила трения $F_{\text{тр}}$ находится по формуле (2.4.5) (вначале — по известному значению начальной скорости, а затем по мере движения — по новому значению скорости, которое каждый раз будет вычисляться).

При составлении программы будем использовать соотношения:

$$v_x=v\cos\alpha;\quad v_y=v\sin\alpha;\quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}; \tag{5.42}$$

$$F_{\text{тр}}=Av+Bv^3;\quad F_{\text{тр}\,x}=F_{\text{тр}}v_x/v;\quad F_{\text{тр}\,y}=F_{\text{тр}}v_y/v; \tag{5.43}$$

$$v_{x,\,n+1}=v_{x,\,n}-(F_{\text{тр}\,x}/m)\,\Delta t;\quad v_{y,\,n+1}=v_{y,\,n}-(F_{\text{тр}\,y}/m+g)\,\Delta t; \tag{5.44}$$

$$x_{n+1}=x_n+v_{x,\,n}\Delta t;\quad y_{n+1}=y_n+v_{y,\,n}\Delta t;\quad t_{n+1}+t_n+\Delta t. \tag{5.45}$$

В данной задаче коэффициент $B=0$. В уравнениях (5.43) учитывается только член с A.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
Сначала Потом	— N . . . 0 (счетчик циклов)	v_0 v	α	g	A/m	x_0	y_0	— v_x	— v_y	— $F_{тр}/m$	t_0 t_n	N	Δt	B/m

Чтобы результат был более точным, возьмем Δt достаточно малым, например 0,04 с, но выводить будем x, y и t не каждый раз, а только через $5\Delta t$ (=0,2 с).

Программа:

00 ИП1 ИП2 F cos ×П7 . . . . v_{x0}
05 ИП1 ИП2 F sin×П8 . . . . v_{y0}
10 ИПВ П0 . . . . установка счетчика внутренних циклов
12 ИП4 ИП1×ИПД ИП1 Fx² ИП1××+ /—/П9 . . . . $F_{тр}/m$
24 ИП7×ИП1÷ИПС×ИП7+П7 . . v_x
33 ИПС×ИП5+П5 x
38 ИП9 ИП8×ИП1÷ИП3—ИПС×ИП8+ П8 . . . . v_y
50 ИПС×ИП6+П6 . . . . y
55 ИПА ИПС+ПА . . . . t
59 ИП7 Fx² ИП8 Fx²+F√ П1 v
66 FL0 $\boxed{12}$ . . . . организация внутренних циклов (если в ЯПО не 0, то по адресу 12; если 0, то через шаг)
68 ИПА С/П ИП5 С/П ИП6 С/П БП $\boxed{10}$ вывод точек

Инструкция. Переключатель «Р — Г» — в положение «Г»; F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод операндов; В/0 С/П ——— на экране t С/П ——— на экране x С/П ——— на экране следующее t и т. д.

Ответ при Δt=0,04, N=5 дан на рисунке 72, кривая *2*. Для расчета кривой с другими данными следует ввести эти данные вместо предыдущих и «обнулить» ячейки 5, 6, 7, 8, А; В/0, С/П.

Для ПЭВМ программа при следующих обозначениях: $v_0 \equiv$ V; $\alpha \equiv$ A1; $g \equiv$ G; $m \equiv$ M; $v_x \equiv$ U; $v_y \equiv$ W; $t \equiv$ T; $\Delta t \equiv$ T1:

```
1 PRINT "BALL"
2 PRINT "БАЛЛИСТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ"
10 V=20
20 A=.1
30 B=0
40 M=.2
```

```
50 T1=.25
60 G=9.81
70 A1=45*PI/180
80 X=0
90 Y=0
100 T=0
110 VX=V*COS(A1)
120 VY=V*SIN(A1)
130 F=-A*V-B*V^3
140 FX=F*VX/V
150 VX=VX+FX*T1/M
160 X=X+VX*T1
170 FY=F*VY/V-M*G
180 VY=VY+FY*T1/M
190 Y=Y+VY*T1
200 T=T+T1
210 V=SQR(VX^2+VY^2)
220 PRINT T,X,Y
230 IF Y<=0 THEN 250
240 GOTO 130
250 PRINT "ДАЛЬНОСТЬ "X;"M"
260 PRINT "ВРЕМЯ "T;"C"
270 END
```

Протокол диалога:

```
.25            3.093592       2.480467
.5             5.800486       4.037751
.75            8.169018       4.78725
1              10.24148       4.829936
1.25           12.05489       4.254161
1.5            13.64162       3.137233
1.75           15.03001       1.546796
2              16.24485       -.4579614
ДАЛЬНОСТЬ  16.24485 M
ВРЕМЯ  2 C
```

Выбирать $\Delta t \equiv T1$ надо осторожно. При больших Δt получается совершенно неверный результат.

Для получения кривых на экране графического дисплея введем строки

```
125 SCREEN 2
127 LINE (0,0)-(630,0),5
205 PSET (X*15,Y*15*.64)
267 GOTO 267
```

Уберем строки 220, 250, 260

2.5.4. В предыдущих программах придется ввести значение B/m. Действуя по тем же программам, получим ответ, приведенный в графическом виде на рисунке 72, кривая *3*. Из рисунка видно, что учет кубического члена Bv^3 обязателен. Это можно увидеть, если сравнить Av и Bv^3 при $v=20$ м/с. Они одного порядка, и, следовательно, пренебрегать членом Bv^3 при таких скоростях нельзя.

Кривая *2* (решение осуществляется с учетом только члена Av), конечно, ближе к истине, чем кривая *1* (без учета трения), но к тому, что будет получаться на опыте, все же ближе кривая *3*. Теперь видно, как далеко от реальности было решение задачи 2.5.1. Конечно, отличие кривой *3* от кривой *1* сильно зависит от массы тела (при тех же размерах). Для камня массой 500 г разница будет заметно меньше.

2.5.5. Решение аналогично решению задачи 2.5.4, но величины A/m и B/m в 10 раз больше. Ответ дан на рисунке 72, кривая *4*.

2.5.6. В программах, приведенных к решениям задач 2.5.3 и 2.5.4, все величины надо оставить прежними, но вывод результатов и условия остановки изменить так, чтобы вывести только то, что спрашивается в задаче. Кроме того, надо организовать автоматическое наращивание α от 0 до 90°, например через 5°, и «обнуление» ячеек. Для ПЭВМ **программа** может быть такой:

```
1 PRINT "DALN"
10 PRINT "ДАЛЬНОСТЬ ОТ УГЛА"
20 A=.1
30 B=0
40 M=.2
50 T1=.02
60 G=9.81
70 FOR A1=10*PI/180 TO PI/2 STEP 5*PI/180
80 X=0
90 Y=0
100 T=0
105 V=20
110 VX=V*COS(A1)
120 VY=V*SIN(A1)
130 F=-A*V-B*V^3
140 FX=F*VX/V
150 VX=VX+FX*T1/M
160 X=X+VX*T1
170 FY=F*VY/V-M*G
180 VY=VY+FY*T1/M
190 Y=Y+VY*T1
200 T=T+T1
210 V=SQR(VX^2+VY^2)
230 IF Y<=0 THEN 250
240 GOTO 130
250 PRINT "ДАЛЬНОСТЬ "X;"М","ПРИ УГЛЕ"A1*180/PI
270 NEXT A1
280 END
```

Протокол диалога:

```
ДАЛЬНОСТЬ  11.00805 М        ПРИ УГЛЕ 10
ДАЛЬНОСТЬ  14.63891 М        ПРИ УГЛЕ 15
ДАЛЬНОСТЬ  17.25631 М        ПРИ УГЛЕ 20
ДАЛЬНОСТЬ  19.00053 М        ПРИ УГЛЕ 25
ДАЛЬНОСТЬ  20.13267 М        ПРИ УГЛЕ 30
ДАЛЬНОСТЬ  20.44498 М        ПРИ УГЛЕ 35
ДАЛЬНОСТЬ  20.29335 М        ПРИ УГЛЕ 40
ДАЛЬНОСТЬ  19.53367 М        ПРИ УГЛЕ 45
ДАЛЬНОСТЬ  18.42258 М        ПРИ УГЛЕ 50
ДАЛЬНОСТЬ  16.86522 М        ПРИ УГЛЕ 54.99999
ДАЛЬНОСТЬ  15.04815 М        ПРИ УГЛЕ 59.99999
ДАЛЬНОСТЬ  12.9161 М         ПРИ УГЛЕ 64.99999
ДАЛЬНОСТЬ  10.60435 М        ПРИ УГЛЕ 69.99999
ДАЛЬНОСТЬ  8.11235 М         ПРИ УГЛЕ 74.99999
ДАЛЬНОСТЬ  5.471317 М        ПРИ УГЛЕ 79.99998
ДАЛЬНОСТЬ  2.760146 М        ПРИ УГЛЕ 84.99998
ДАЛЬНОСТЬ  5.930136E-06 М    ПРИ УГЛЕ 89.99999
```

2.5.7. В предыдущей программе надо убрать остановки для вывода $x_{макс}$ и $t_{полета}$, а ввести сравнение $x_{макс}$ с предыдущим значением (для чего необходимо каждый раз откладывать $x_{макс}$ в ЯП0). Когда разность $x_{макс,\ n} - x_{макс,\ n-1}$ станет меньше нуля, это будет означать, что дальнейшее увеличение α нерационально. Следует остановить машину и вывести значение α. При этом надо не забывать «обнулять» ячейки 0, 2, 5, 6, А перед запуском!

Такую программу для ПМК составить несложно, но работа по ней занимает уже десятки минут. Также следует помнить, что Δt надо брать достаточно малым (много меньше, чем общее время движения). В частности, в данной задаче, зная, что время полета приблизительно равно 1 с, Δt следует брать не более 0,05 с, хотя это ведет к увеличению времени счета. Задачу желательно решать на более быстродействующей технике, чем ПМК.

В программу BALL (см. решения предыдущих задач) надо добавить строку с запоминанием предыдущей дальности под измененным именем (X3), а после получения нового значения дальности организовать сравнение: X<X3? Если нет, то сделать наращивание А1 на А2 и найти новую дальность. Если да, т. е. новая дальность X меньше предыдущей X3, то следует вывести на экран предыдущие значения угла бросания А3 и дальности X3:

```
1 PRINT "OPTUG"
2 PRINT "БАЛЛИСТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ"
10 PRINT "ОПТИМАЛЬНЫЙ УГОЛ...(ЖДИТЕ)"
20 A=.1
30 B=0
40 M=.2
50 T1=.02
60 G=9.81
65 A1=1*PI/180
70 FOR A2=A1 TO PI/2 STEP A1
80 X=0
90 Y=0
100 T=0
105 V=20
110 VX=V*COS(A2)
120 VY=V*SIN(A2)
130 F=-A*V-B*V^3
140 FX=F*VX/V
150 VX=VX+FX*T1/M
160 X=X+VX*T1
170 FY=F*VY/V-M*G
180 VY=VY+FY*T1/M
190 Y=Y+VY*T1
200 T=T+T1
210 V=SQR(VX^2+VY^2)
230 IF Y<=0 THEN 250
240 GOTO 130
250 IF X<X3 THEN 500
260 X3=X
270 A3=A2
280 NEXT A2
500 PRINT "МАКС.ДАЛЬНОСТЬ" X3
510 PRINT "ПРИ УГЛЕ БРОС." A3*180/PI
520 END
```

Результат.

```
OPTUG
БАЛЛИСТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ
ОПТИМАЛЬНЫЙ УГОЛ
МАКС.ДАЛЬНОСТЬ 20.44525
ПРИ УГЛЕ БРОС. 34
```

Таким образом, оптимальный угол бросания получается значительно меньше 45° (как было бы без сопротивления воздуха). Проверьте качественно этот результат на опыте.

2.5.8. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

2.5.9. При решении подобных задач аналитическим методом (путем подбора и преобразования формул, а также используя аналитическую геометрию) рационально выбирать удобную систему координат (с началом отсчета в центре массивного тела) и вводить удобные условные единицы (например, можно принять за единицу расстояния радиус Луны) и т. д. При использовании численных методов это уже необязательно.

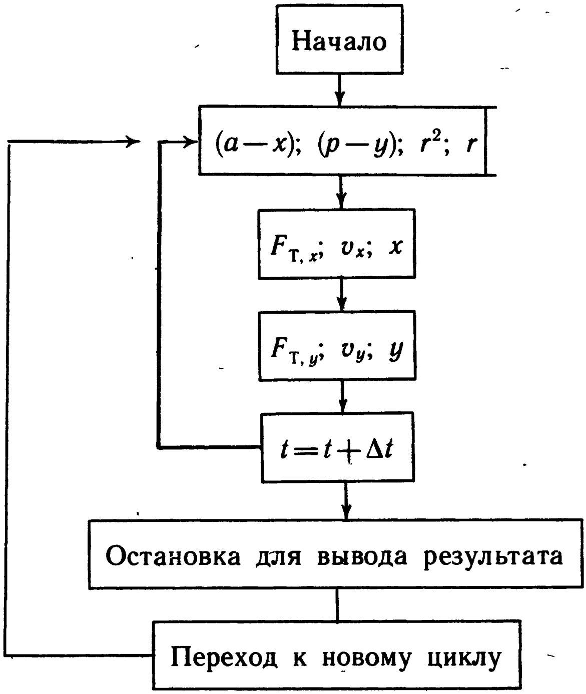
Таким образом, напишем уравнения движения, пользуясь только рисунком 6 и законом тяготения (см. вводные части к разделам 2.4 и 2.5):

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_{\text{т},\,x}=\gamma\frac{mM}{r^2}\,\frac{a-x}{r}; \qquad (5.46)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=F_{\text{т},\,y}=\gamma\frac{mM}{r^2}\,\frac{p-y}{r}. \qquad (5.47)$$

Решать их будем методом последовательного наращивания x, y, v_x, v_y, t и будем выводить вычисленные значения всех величин не через мелкие промежутки времени Δt, а только через N таких промежутков (см. разделы 4.6 и 4.7 и рис. 73).

Алгоритм решения задачи:



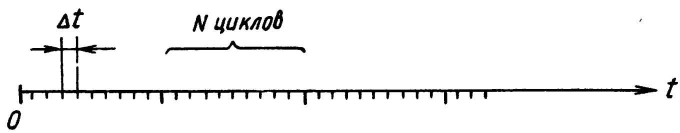


Рис. 73

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
Сначала	N	x	y	v_x	v_y	—	Δt	a	p	γM	N	—	—	—
Потом	0					r^2						r	$(a-x)$	$(p-y)$

Программа:

```
00 ИП7  ИП1  —    ПС  . . . . . . . . (a—x)
04 ИП8  ИП2  —    ПД  . . . . . . . . (p—y)
08 Fx²  ИПС  Fx²  +    П5 F√  ПВ  r², r
15 ИП9  ИП5  ÷    П5  . . . . . . . . F/m=γM/r²
19 ИПС  ×    ИПВ  ÷   . . . . . . . . Fx/m
23 ИП6  ×    ИП3  +    П3 . . . .     vx
28 ИП6  ×    ИП1  +    П1 . . . .     x
33 ИП5  ИПД  ×    ИПВ  ÷  . . . .     Fy/m
38 ИП6  ×    ИП4  +    П4 . . . .     vy
43 ИП6  ×    ИП2  +    П2 . . . .     y
48 FL0  [00] . . . . . . . . . . . .  счетчик внутренних
                                      циклов

50 ИП1  С/П  ИП2  С/П . . . . . . .   вывод x, y

54 ИПА  П0   БП   [00] . . . . . . .  зарядка счетчика
                                      циклов (N=5 внут-
                                      ренних циклов) и пе-
                                      реход к новым цик-
                                      лам
```

Выбрав $\Delta t = 10^3$ с и $N=5$, получаем о т в е т:

x	$7{,}7\cdot10^6$	$1{,}6\cdot10^7$	...	$4{,}2\cdot10^7$
y	$5\cdot10^4$	$3{,}8\cdot10^5$	...	$2{,}1\cdot10^7$

На большом листе миллиметровой бумаги следует изобразить a, p, Луну ($R=1{,}7\cdot10^3$ км). По мере вычислений x и y следует ставить точки, что и будет создавать траекторию. Результат приведен на рисунке 74 (гипербола).

(Следует учитывать, что ошибка при таком методе решения дифференциальных уравнений постепенно накапливается. Поэтому наименьшие искажения получаются в начале траектории, а наибольшие — в конце. Интервал Δt должен быть достаточно малым; в данном случае не более 1 000 с.)

Для решения задач 2.5.9. . .2.5.13 на ПЭВМ сделаем одну общую программу, которая может быть использована и в том случае, если планета окружена атмосферой и надо учитывать трение. Выпишем необходимые формулы в том порядке, в котором они потребуются для вычислений:

$$\left\{\begin{array}{l} v=\sqrt{v_x^2+v_y^2};\; r^2=(a-x)^2+(p-y)^2; \\ F_{\text{т}}=\gamma mM/r^2;\; F_{\text{т},x}=F_{\text{т}}(a-x)/r;\; F_{\text{т},y}=F_{\text{т}}(p-y)/r; \\ F_{\text{тр}}=Av+Bv^3;\; F_{\text{тр},x}=F_{\text{тр}}v_x/v;\; F_{\text{тр},y}=F_{\text{тр}}v_y/v; \\ v_{x,n+1}=v_{x,n}+(F_{\text{т},x}-F_{\text{тр},x})\Delta t/m;\quad v_{y,n+1}=v_{y,n}+(F_{\text{т},y}-F_{\text{тр},y})\Delta t/m; \\ x_{n+1}=x_n+v_x\Delta t,\; y_{n+1}=y_n+v_y\Delta t; \\ t_{n+1}=t_n+\Delta t. \end{array}\right. \tag{5.48}$$

Введем обозначения переменных:

$$\left\{\begin{array}{lllll} v\equiv \mathrm{V} & r\equiv \mathrm{R} & m_{\text{пл}}\equiv \mathrm{M} & r^2\equiv \mathrm{R0} & F_{\text{тр},x}\equiv \mathrm{F5} \\ v_x\equiv \mathrm{U} & r_{\text{пл}}\equiv \mathrm{R1} & t\equiv \mathrm{T} & F_{\text{т}}\equiv \mathrm{F1} & F_{\text{тр},y}\equiv \mathrm{F6} \\ v_y\equiv \mathrm{W} & r_{\text{атм}}\equiv \mathrm{R2} & \Delta t\equiv \mathrm{T1} & F_{\text{т},x}\equiv \mathrm{F2} & \\ a\equiv \mathrm{A1} & \gamma\equiv \mathrm{G} & a-x\equiv \mathrm{A2} & F_{\text{т},y}\equiv \mathrm{F3} & \\ p\equiv \mathrm{P} & m_{\text{тела}}\equiv \mathrm{M1} & p-y\equiv \mathrm{P2} & F_{\text{тр}}\equiv \mathrm{F4} & \end{array}\right. \tag{5.49}$$

Составим программу для графического дисплея:

```
1 PRINT "PLANGR"
2 PRINT "ПОЛЕТ К ПЛАНЕТЕ,ТРАЕКТОРИЯ"
10 SCREEN 2
20 A1=2.1E7
30 P=5E6
40 R1=1.7E6
50 S=1E5
60 U=700
70 W=0
80 G=6.67E-11
90 M1=1E3
100 M=7.3E+22
110 R2=0
120 A=0
130 B=0
140 T1=100
150 X=0
160 Y=0
170 CIRCLE (A1/S,P*.64/S),R1/S,8,,,.64
180 CIRCLE (A1/S,P*.64/S),R2/S,6,,,.64
190 V=SQR(U^2+W^2)
200 A2=A1-X
210 P2=P-Y
220 R0=A2^2+P2^2
230 R=SQR(R0)
240 F1=G*M1*M/R0
250 F2=F1*A2/R
260 F3=F1*P2/R
270 F4=-A*V-B*V^3
280 F5=F4*U/V
290 F6=F4*W/V
```

```
300 U=U+(F2+F5)*T1/M1
310 W=W+(F3+F6)*T1/M1
320 X=X+U*T1
330 Y=Y+W*T1
340 IF R<=R1 THEN 400
350 IF R<=R2 THEN A=0
360 IF X>600*S THEN 400
370 IF Y*.64>260*S THEN 400
380 PSET (X/S,Y/S*.64),8
390 GOTO 190
400 GOTO 400
```

2.5.10. Для решения на ПМК и ДВК можно использовать те же программы, что и при решении предыдущей задачи. Меняется только ввод ($a=0$). На рисунке 75 приведена траектория, получившаяся при скорости $v_{x0}=500$ м/с (траектория *1* — эллипс), если взять $\Delta t=200$ с; $N=5$. Учитывая размер Луны ($R=1{,}7\cdot10^3$ км) и рисуя ее в масштабе, видим, что тело должно упасть на Луну. При $v_{x0}=1\,000$ м/с получается траектория *2*, близкая к круговой. Действительно, из уравнения движения по кругу $mv^2/R=\gamma mM/R^2$ следует $v=\sqrt{\gamma M/R}=\sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}3\cdot10^{22}/5\cdot10^6}\approx1\,000$ м/с (первая космическая скорость для Луны). При $v=1\,500$ м/с тело покидает Луну по гиперболе (траектория *3*).

Для графического дисплея в программе PLANG добавим:

```
60 U=500
150 X=A1
```

2.5.11. Решение не приводится.

2.5.12. Решение возможно на ПМК, но потребуется много времени. На ПЭВМ траектория вычисляется сравнительно просто по полной программе, приведенной в решении задачи 2.5.9. Нужно только ввести ряд изменений.

```
20 A1=6.67E6
30 P=6.67E6
40 R1=6.37E6
50 S=4E4
60 U=7900
100 M=5.96E24
110 R2=6.67E6
140 T1=10
150 X=A1
350 IF R<=R2 THEN A=8E-2
```

Изобразив в масштабе Землю, построим по точкам траекторию (рис. 76). Если положить $A=0$, то должна получиться круговая траектория, так как 8 км/с — это первая космическая скорость для Земли.

Следует отметить, что постановка задачи и программа для ее решения сильно упрощены и дают только первое приближение к проблеме посадки. На самом же деле надо учитывать и кубический член Bv^3, и зависимость A и B от высоты, и ряд других деталей.

2.5.13. Решение задачи возможно и на ПМК, и на ПЭВМ, но на ПМК займет много времени. Следует использовать программы, приведенные в решении задачи 2.5.9. Учесть, что трение возникает только в точке Q, когда $r\leqslant r_{пл}+h$, где h — толщина атмосферы.

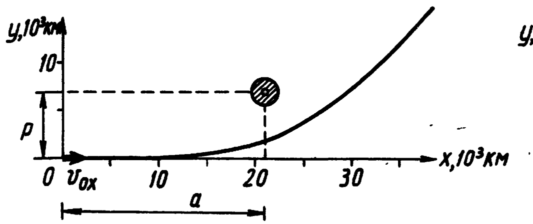


Рис. 74

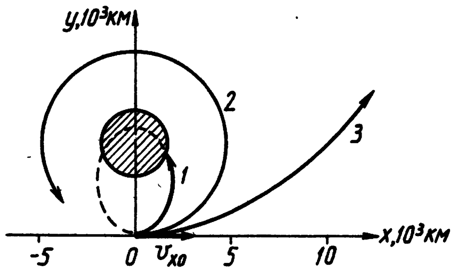


Рис. 75

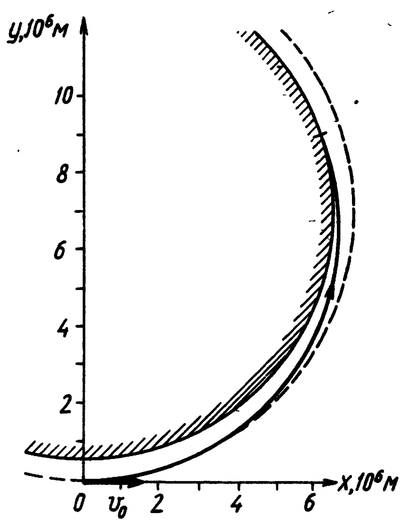


Рис. 76

Следует организовать соответствующие условные переходы:

```
20 A1=1E7
30 P=3.5E6
40 R1=1.74E6
50 S=3E4
60 U=1700
100 M=7.3E+22
110 R2=3E6
140 T1=100
150 X=0
350 IF R<=R2 THEN A=3E-1
```

Если программа отлажена так, что она выдает координаты в виде столбиков цифр, то по мере вычислений следует ставить точки на миллиметровой бумаге, где изображены планета и расстояния a и p. По мере приближения к планете можно рекомендовать менять Δt (содержание ячейки 6). При равномерном движении (далеко от планеты) можно Δt брать 500 с (и $N=5$). При резких изменениях траектории вблизи планеты — не более 100 с.

Ответ дан на рисунке 77, кривая *2*: болид падает на поверхность планеты (или сгорает в атмосфере).

При наличии графического дисплея полезно изменить программу так, чтобы машина сама чертила траекторию.

Очень поучительно и интересно с помощью такой несложной программы моделировать разные траектории, задавая различные начальные условия и меняя другие параметры.

2.6.1. Момент силы $mgl \sin \varphi$ (рис. 78) сообщает системе с моментом инерции ml^2 ускорение $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, так что уравнение движения:

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi, \qquad (5.50)$$

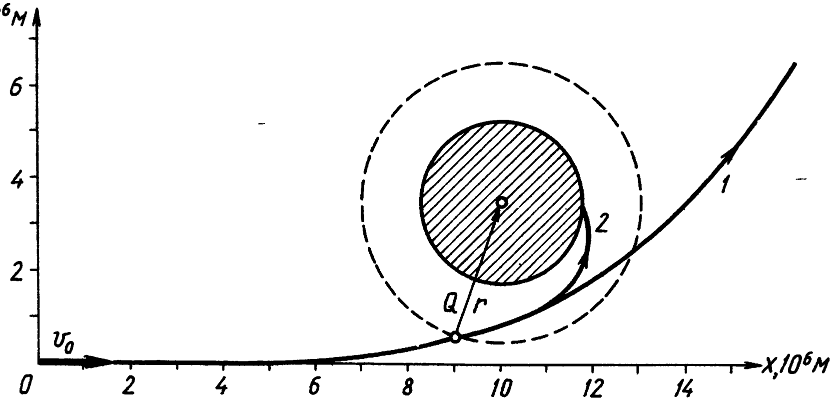


Рис. 77

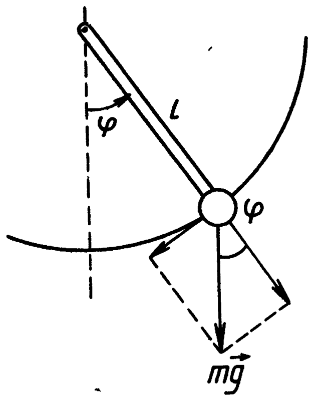


Рис. 78

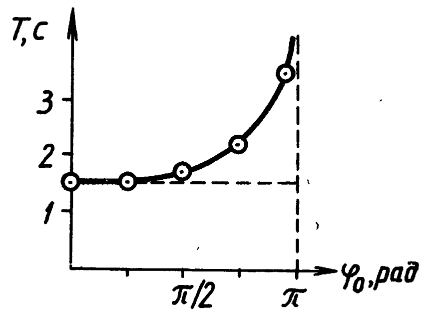


Рис. 79

где φ и угловое ускорение $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ направлены в разные стороны. При малых углах φ $\sin\varphi\approx\varphi$ (рад) и решение дифференциального уравнения (5.50) легко находится: $\varphi=\varphi_0\sin\omega t$, что при подстановке в уравнение (5.50) дает $\omega=\sqrt{g/l}$: период колебаний $T=2\pi/\omega=$ $=2\pi\sqrt{l/g}$. Однако при больших амплитудах замена $\sin\varphi$ на φ недопустима. В этом случае дифференциальное уравнение (5.50) аналитически решается крайне сложно. Его можно решить хотя и приближенно, однако весьма просто с помощью вычислительной техники. Точность решения зависит от величины шага Δt, т. е. от времени вычислений, и может быть в принципе сделана сколь угодно большой.

Для решения надо воспользоваться разделами 4.6 и 4.7. Сделав замену переменных:

$$\omega=d\varphi/dt, \tag{5.51}$$

получим уравнения для постепенного наращивания ω, φ и t:

$$\frac{d\omega}{dt}=-\frac{g}{l}\sin\varphi;\quad \omega_{n+1}=\omega_n-(g\sin\varphi/l)\,\Delta t;$$
$$\varphi_{n+1}=\varphi_n+\omega_n\Delta t;\quad t_{n+1}=t_n+\Delta t. \tag{5.52}$$

Таким образом, задав начальные условия: $t=0$; $\omega=0$; $\varphi=\varphi_0$ (максимальное отклонение, амплитуду),— мы можем постепенным наращиванием найти ω и φ в любой момент времени. Остановим наращивание, когда φ будет равно нулю, и выведем время. Оно будет соответствовать четверти периода.

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	1	2	3	4	5	6	7
Сначала Потом	g	φ_0 φ	ω_0 ω	t_0 t	Δt	—	l

Программа:

```
00 ИП2 F sin ИП1  ×  ИП5  ×  ИП7 ÷ . . g(sin α)Δt/l
08 ИП3 ↔    —    П3 . . . . . . . . . . . ωn
12 ИП5  ×   ИП2 +  П2 . . . . . . . . . . φn
17 Fx<0 [23]  ИП4 4  ×   С/П . . . . . вывод периода T
23 ИП4  ИП5 +   П4 . . . . . . . . . . . t
27 БП  [00]
```

Обратите внимание на положение переключателя «Р — Г»!

Для ПЭВМ, когда $l\equiv$ L; $g\equiv$ G; $t\equiv$ T1; $\varphi\equiv$ Y; $\omega\equiv$ W; $\Delta t\equiv$ T2, **программа** выглядит так:

```
1 PRINT "MA5
10 PRINT "ЗАВ.ПЕРИОДА МАЯТН.ОТ АМПЛ."
20 L=.5
30 G=9.81
40 T1=0
50 W=0
60 INPUT "НАЧ.УГОЛ В ГРАД.";Y1
70 INPUT "ШАГ ПО ВРЕМЕНИ";T2
80 Y=PI*Y1/180
90 W=W-G*SIN(Y)*T2/L
100 Y=Y+W*T2
110 IF Y<=0 THEN GOTO 145
130 IF Y>0 THEN T1=T1+T2
140 GOTO 90
145 PRINT Y1,T1*4
150 END
```

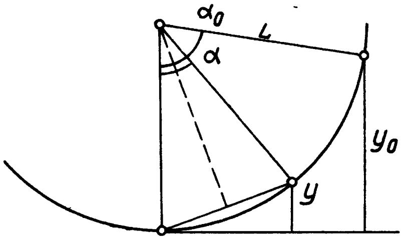


Рис. 80

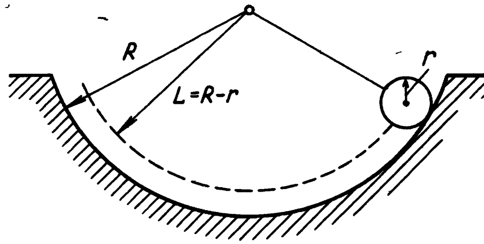


Рис. 81

Точность определения периода зависит от величины шага: $\Delta t = T1$. Чем шаг меньше, тем больше цифр после точки можно указать в формате, но машина будет считать дольше.

Ответ.

φ_0,°	1	45	90	135	170
T, с	1,36	1,44	1,64	2,12	3,44

График зависимости $T(\varphi_0)$ дан на рисунке 79.

Подумайте, почему при φ_0, стремящемся к 180°, период T стремится к бесконечности. Соответствует ли это реальной ситуации? Почему в задаче говорится о жестком подвесе, а не грузе на нити?

Эту задачу можно решить и иначе. Если приравнять изменение потенциальной энергии к кинетической энергии вращательного движения, то (рис. 80)

$$mgy_0 - mgy = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Это энергетический путь решения (предыдущий способ динамический, так как опирается на силы). Он короче, но более ограниченный, например трудно учесть трение, определяемое скоростью движения в вязкой среде. Из чертежа видно, что

$$y = 2L\sin^2(\alpha/2),$$

так что

$$2gL\left(\sin^2\frac{\alpha_0}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{L^2\omega^2}{2};$$

$$-\frac{d\alpha}{dt} = \omega = 2\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha_0}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Знак «минус» означает, что угол α убывает. Отсюда **программа:**

```
1 PRINT "MAENER"
10 PRINT "ЗАВ.ПЕР.КОЛ.МАЯТН.ОТ АМПЛ."
20 G=9.8
30 A0=10
40 A0=A0*PI/180
50 L=.5
```

```
60 A1=-.1
70 A1=A1*PI/180
80 A3=10
90 A3=A3*PI/180
100 T=0
110 A=A0+A1
120 Z1=SIN(A0/2)
130 Z2=SIN(A/2)
140 Z3=Z1^2-Z2^2
150 W=SQR(2*G*Z3/L)
160 T1=-A1/W
170 A=A+A1
180 T=T+T1
190 IF A<=0 THEN 210
200 GOTO 120
210 LPRINT A0*180/PI,4*T
220 A0=A0+A3
230 IF A0>PI/2 THEN 250
240 GOTO 100
250 END
```

2.6.2. Эта задача несколько сложнее предыдущей. В ней надо учесть еще и кинетическую энергию вращения шарика вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_ш$ (рис. 81), когда он катится по поверхности:

$$\omega_ш = \frac{v}{r} = \frac{\omega L}{r};$$

$$mgy - mgy_0 = \frac{L^2\omega^2}{2} + \frac{I_ш\omega_ш^2}{2} = \frac{L^2\omega^2}{2} + \frac{(2/5)\,mr^2\omega^2L^2}{2r^2} = 0{,}7m\omega^2L^2.$$

Радиус шарика выпал из окончательного выражения, следовательно, ответ от него не зависит (чем меньше шарик, тем меньше его момент инерции, но во столько же раз больше скорость вращения, так что пренебрегать кинетической энергией вращения вокруг своей оси нельзя даже для маленького шарика).

В остальном решение сходно с решением предыдущей задачи. Так, в энергетическом варианте нужно только заменить строку 150 на

150 W=SQR (2 * Z/(0,7 * L))

и под L понимать $(R-r)=8E-2$.

Ответ. Период при малых амплитудах (Y1 < .1 рад) и тех данных, которые имеются в задаче, равен 0,63 с. Проверьте результат на опыте. При больших $\varphi_0 \equiv Y1$ период, как и в случае маятника, возрастает.

Усовершенствуйте программу так, чтобы получить таблицу зависимости периода от начального угла (амплитуды), а при наличии графического дисплея — график.

2.6.3. Момент силы, вращающей карандаш:

$$M = mg\frac{l}{2}\sin\varphi$$

(рис. 82). Так что уравнение для вращательного движения

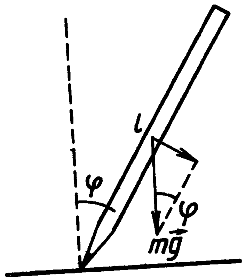


Рис. 82

$\left(I\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M\right)$ стержня, поворачивающегося вокруг одного из концов $\left(I=\frac{1}{3}ml^2\right)$, принимает вид

$$\frac{1}{3}ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}=mg\frac{l}{2}\sin\varphi. \qquad (5.53)$$

Это дифференциальное уравнение, которое можно решать по алгоритму, описанному в разделах 4.6 и 4.7. Сделаем замену:

$$\frac{d\varphi}{dt}\equiv\omega;\ \frac{d\omega}{dt}=\frac{3g}{2l}\sin\varphi \qquad (5.54)$$

и запишем эти уравнения приближенно так:

$$\Delta\varphi\approx\omega\Delta t;\ \varphi_n\approx y_{n-1}+\omega_{n-1}\Delta t;$$

$$\Delta\omega=\left(\frac{3g}{2l}\sin\varphi\right)\Delta t;\ \omega_n=\omega_{n-1}+\frac{3g}{2l}\Delta t\sin\varphi. \qquad (5.55)$$

Составим программу, постепенно наращивая t, ω и φ циклами и задав достаточно малое Δt.

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7
Сначала Потом	φ_0 φ	0 ω	0 t	g	l	—	Δt	φ_t

(φ_0 — начальный угол, обязательно в радианах; φ_t — конечный угол, в данной задаче $\varphi_t\equiv\pi/2$).

Программа:

```
00 3    ИП3  ×    ИП4 ÷ 2 ÷ П5  . . 3g/(2l)
08 0    П1   П2 . . . . . . . . . . . . . . очистка ЯП1 и 2
11 ИП2  ИП6  +    П2  . . . . . . . . . . . t_n
15 ИП0  F sin ИП6 ×   ИП5 × ИП1 + П1  ω_n
24 ИП6  ×    ИП0 +    П0 . . . . . . . . . φ_n
29 ИП7  — . . . . . . . . . . . . . . . . . φ_n — φ_t
                 Да
31 Fx≥0 [11] ИП2 С/П  . . . . . . . . . если φ_n ≥ φ_t, то вы-
                 Нет                        вод t_n и конец вы-
                                            числений; если «нет»,
                                            то по адресу 11
```

Инструкция. Переключатель «Р — Г» — в положение «Р»; F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод операндов; В/0 С/П. Перед новым расчетом заменить φ на φ_0 в ЯП0 и, если нужно, значения операндов.

Для ПЭВМ **программа** при обозначениях: $l \equiv$ L; $\varphi \equiv$ F; $t \equiv$ T; $g \equiv$ G; $\Delta t \equiv$ T1; $\varphi_0 \equiv$ F0; $\varphi_t \equiv$ F1; $\omega \equiv$ W:

```
1 PRINT "KARAND"
2 PRINT "ПАДЕНИЕ КАРАНДАША"
10 W=0
20 T=0
30 G=9.81
40 INPUT "L=";L
50 INPUT "F0=";F0
60 INPUT "F1=";F1
70 INPUT "T1=";T1
80 W=W+3*G*T1*SIN(F0)/(2*L)
90 F0=F0+W*T1
100 IF (F0-F1)<0 THEN 110 ELSE GOTO 140
110 T=T+T1
120 GOTO 80
140 PRINT T
150 END
```

Протокол диалога:

```
:RUN
L=.18
F0=1.7E-02
F1=1.57
T1=.05
5.500E-01
```

Ответ. Карандаш падает 0,55 с. Что получится, если φ_0 брать все меньше и меньше?

2.6.4...2.6.6. Задачи решаются по тем же программам, что и задача 2.6.3, но вводятся строки для получения таблиц или графиков.

2.6.7. Уравнение движения:

$$I\frac{d\omega}{dt}=I\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M=-a\omega-b\omega^3 \qquad (5.56)$$

с математической точки зрения совершенно аналогично уравнению движения, рассмотренному в задачах 2.4.8...2.4.11. Следует только сделать замену обозначений: $A \rightarrow a$; $B \rightarrow b$; $x \rightarrow \varphi$; $m \rightarrow I=mR^2$.

Перепишем (5.56) в виде приближенных соотношений (см. разделы 4.6 и 4.7):

$$\begin{aligned}&\frac{d\omega}{dt}=-\frac{a}{I}\omega-\frac{b}{I}\omega^3;\ \omega_{n+1}=\omega_n-(a\omega+b\omega^3)\,\Delta t/I;\\&\frac{d\varphi}{dt}=\omega;\ \varphi_{n+1}=\varphi_n+\omega\Delta t;\ t_{n+1}=t_n+\Delta t.\end{aligned} \qquad (5.57)$$

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
Сначала Потом	—	0 t_n	10,5 ω_n	0 φ_n	a	b	m	R I	Δt	—	— $b\omega^3$	ω_t

Программа:

```
00 ИП2  ИП2 Fx² ×    ИП5 ×    ПА . . . . . bω³
07 ИП2  ИП4×ИПА+ИП6÷ИП7 Fx²÷ИП8×  (aω+bω³)Δt/mR²
19 ИП2  ↔  — П2  . . . . . . . . . . . . . . . . ω
23 ИПВ  —Fx<0 [31]  ИП1 С/П ИП3 С/П. . . если ω<ωₜ, то
                                          вывод t, φ
31 ИП3  ИП2 ИП8 × + П3 . . . . . . . . . . . если ω>ωₜ, то
                                          вычисление φ
37 ИП1      ИП8 + П1 . . . . . . . . . . . . . t
41 БП  [00]
```

О т в е т. 16,7 с.

Для ПЭВМ при обозначениях: $t \equiv$ T; $\omega \equiv$ W; $\varphi \equiv$ F; $a \equiv$ A; $b \equiv$ B; $m \equiv$ M; $\Delta t \equiv$ T1; $\omega_t \equiv$ W5 **программа:**

```
1 PRINT "OSTKOL"
10 PRINT "ОСТАН.КОЛЕСА"
20 W=10.5
30 W5=.1
40 A=2.8E-2
50 B=9.1E-4
60 M=1
70 R=.35
80 T1=.1
90 T=0
100 F=0
110 Z=(A*W+B*W^3)/(M*R^2)
120 W=W-Z*T1
130 IF W>W5 THEN GOTO 140 ELSE GOTO 170
140 F=F+W*T1
150 T=T+T1
160 GOTO 110
170 PRINT T,F
180 END
```

Протокол диалога:
:RUN
ОСТАН. КОЛЕСА
1.670E 01   2.437E01

2.6.8. Теперь, наращивая (уменьшая) ω, φ, t по выражениям (5.57), нужно иногда делать остановки и выводить значения этих величин для записи и вычерчивания графика. Как и всегда, при решении дифференциальных уравнений (см. разделы 4.6 и 4.7) будем наращивать эти величины через малые помежутки Δt, а результаты выводить только после N таких наращиваний.

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	. . .
Сначала	—	0	10,5	0	a	b	m	R	Δt	N	—	—	
Потом	N	t_n	ω_n	φ_n							$b\omega^3$		

Программа:

00 ИП9 П0 . . . . задача счетчика

02 ИП1 С/П ИП2 С/П ИП3 С/П . . . . вывод t, ω, φ

08 ИП2 ИП2 Fx^2 $\times$ ИП5 $\times$ ПА . . . . $b\omega^3$

15 ИП2 ИП4 $\times$ ИПА $+$ ИП6 $\div$ ИП7 Fx^2 $\div$ ИП8 $\times$ $\frac{(a\omega+b\omega^3)\,\Delta t}{mR^2}$

27 ИП2 $\leftrightarrow$ — П2 . . . . ω

31 ИП3 ИП2 ИП8 $\times$ $+$ П3 . . . . φ

37 ИП1 ИП8 $+$ П1 . . . . t

41 FLO $\boxed{08}$ БП $\boxed{00}$ . . . . если N циклов сделано, то проводится вывод результата, перезарядка счетчика и новых N циклов

Ответ при $N=10$, $\Delta t=0{,}2$:

t	0	2	4	6	8	10	12
ω	10,5	3,46	1,92	1,16	0,7	0,45	0,78
φ	0	10,4	15,4	18,4	20,2	21,3	22,0

Полный ответ дан на рисунке 83.

2.6.9. Будем менять массу, например от $m_0=0{,}5$ кг через $\Delta m=0{,}5$ кг, и каждый раз выводить t (можно и φ). Для этого дополнительно к тому, что было в задаче 2.6.7, заложим m_0 в ЯП6, Δm — в ЯП9. Дополним программу для ПМК к решению задачи 2.6.7 после строки с шагом 19...22:

```
23 ИПВ —Fx<0 [35] ИП6 С/П ИП1 С/П ИП2 С/П БП [47]
35 ИП3   ИП2   ИП8 × + П3
41 ИП1   ИП8   +  П1
45 БП [00]

47 ИП6 ИП9 + П6 . . . . . . . . . . . . . . изменение массы
51 0    П1    П3 1 0,5 П2 . . . . . . . . . «обнуление» ячеек
59 БП [00]
```

Для ПЭВМ, введя обозначение $\Delta m = M1$ и задав общее число значений массы $N = 10$, перебьем (или добавим) строки программы к решению задачи 2.6.7:

```
1 PRINT "OSTKOL"
10 PRINT "ОСТАН.КОЛЕСА"
20 W=10.5
30 W5=.1
40 A=2.8E-2
50 B=9.1E-4
60 M=0.5
65 N=3
66 M1=.5
70 R=.35
80 T1=.1
90 T=0
100 F=0
105 FOR I=1 TO N
110 Z=(A*W+B*W^3)/(M*R^2)
120 W=W-Z*T1
130 IF W>W5 THEN GOTO 140 ELSE GOTO 170
140 F=F+W*T1
150 T=T+T1
160 GOTO 110
170 PRINT T,F
171 M=M+M1
172 W=10.5
175 NEXT I
180 END
```

Протокол работы:

```
8.099995        11.37948
24.80006        35.74896
49.99981        73.07098
```

По этим данным следует начертить график $t(m)$.

2.6.10. Уравнение движения:

$$I\frac{d\omega}{dt} = Fr - a\omega - b\omega^3 = 0, \qquad (5.58)$$

где $M = Fr$ — момент приложенной силы. Это кубическое уравнение, аналогичное тому, которое получилось в задаче 2.4.1 (с заменой $m \to I = mr^2$; $v \to \omega$; $x \to \varphi$; $F_т \to M = Fr$).

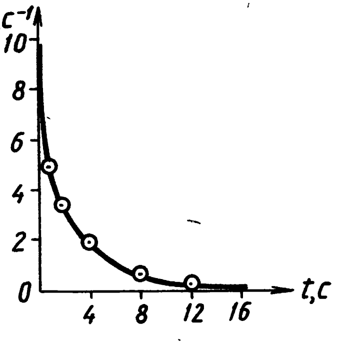


Рис. 83

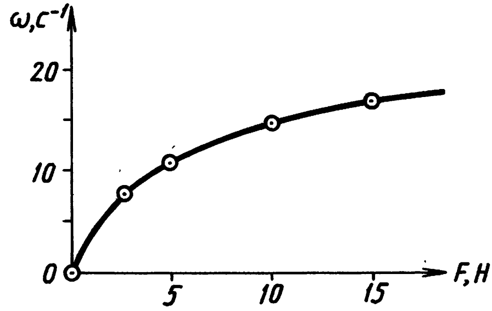


Рис. 84

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	...	A
Сначала Потом	Fr	$\Delta\omega$	B	a	— $b\omega^3$	—	—	— $F(\omega_1)$		ω_1 ω

Используем простейшую программу для решения уравнения (уточнения корня), приведенную в разделе 4.4. Будем искать ω начиная с $\omega_1=0$. Подпрограмма для вычисления $F(x)=F(\omega)=$ $=b\omega^3+a\omega-Fr$ следующая:

50 ИПА Fx^2 ИПА$\times$ИП2$\times$П4 . . . . $b\omega^3$
57 ИПА ИП3$\times$ . . . . $a\omega$
60 ИП4$+$ИП0$-$В/0 . . . . $F(\omega)$

Ответ при $\Delta\omega=0{,}2$: $\omega=11{,}8$ с$^{-1}$.

Для ПЭВМ при обозначениях: $a\equiv$A; $b\equiv$B; $Fr\equiv$M; $\omega\equiv$W; $F(\omega)\equiv F$; $\Delta\omega\equiv$S **программа:**

```
1 PRINT "RAWKOL"
2 PRINT "РАВНОМ.ВРАЩ.КОЛ."
10 A=2.8E-2
20 B=9.1E-4
30 M=1.75
40 W=0
50 INPUT "ШАГ ПОИСКА S=";S
60 F1=B*W^3+A*W-M
70 W=W+S
80 F=B*W^3+A*W-M
90 IF F*F1<=0 THEN 110
100 GOTO 70
110 PRINT "W="W
120 END
```

Протокол диалога:

:RUN
Шаг поиска S=.2
W=1.18E 01

Что получится, если трение не учитывать?

2.6.11. В решении предыдущей задачи для ПМК следует менять содержимое ЯП0 и откладывать на графике $\omega(F)$. Ответ дан на рисунке 84. Нужна совсем небольшая сила для достижения частоты $\omega=10$ с$^{-1}$ и очень большая — для частоты $\omega=20$ с$^{-1}$.

Используя ПЭВМ, можно, как и в задаче 2.4.3, вычертить график автоматически.

2.7.1. Для ПМК вычисления X по формуле (2.7.2) при условии заполнения памяти:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6
Сначала	A	δ	$\omega=\frac{2\pi}{T}$	φ_0	0	Δt	—
Потом					t		$\sin(\omega t+\varphi_0)$

можно выполнить по **программе**:

```
00 ИП2 ИП4   ×  ИП3 +Fsin П6 . . . . . sin (ωt+φ0)
07 ИП1 ИП4   ×  |—| Fe^x  . . . . . . . . . e^(−δt)
12 ИП6 ×   ИП0   × С/П . . . . . . . . . . . вывод X
17 ИП4 ИП5 + П4 . . . . . . . . . . . . . . . наращивание t
21 БП   [00]
```

(переключатель «Р — Г» — в положение «Р»). Возьмем сначала $\Delta t=30$ с.

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод данных (3 ПО 0,01 П1 $2\pi/60=0{,}104$ П2 Fπ ↑ 2 $\div$ П3 10 П5) В/0 С/П ——— X_0 С/П ——— X_1 С/П ——— X_2 С/П ——— и т. д.

Ответ. 3; —2,2; 1,6... . Слишком резкие изменения X! Уменьшим Δt до 10 с и «обнулим» ЯП4 (ОП4) В/0 С/П.

Ответ. 3; 1,37; —1,19; —2,22; —1,05; 0,85; 1,64... и т. д. (см. график на рис. 85).

Для решения задачи на ПЭВМ введем обозначения: $\delta\equiv$D; период=TO; $\varphi_0\equiv$FØ; $t\equiv$T, $\Delta t\equiv$T1 — и составим программу:

```
1 PRINT "ZATKOL"
2 PRINT "ЗАТУХ.КОЛ."
10 A=3
20 D=.01
30 T0=60
40 F0=PI/2
50 T=0
60 T1=10
70 FOR I=0 TO 30
80 Y=SIN(2*PI*T/T0+F0)
90 Z=EXP(-D*T)
100 X=A*Z*T
110 PRINT T,X
120 T=T+T1
130 NEXT I
140 END
```

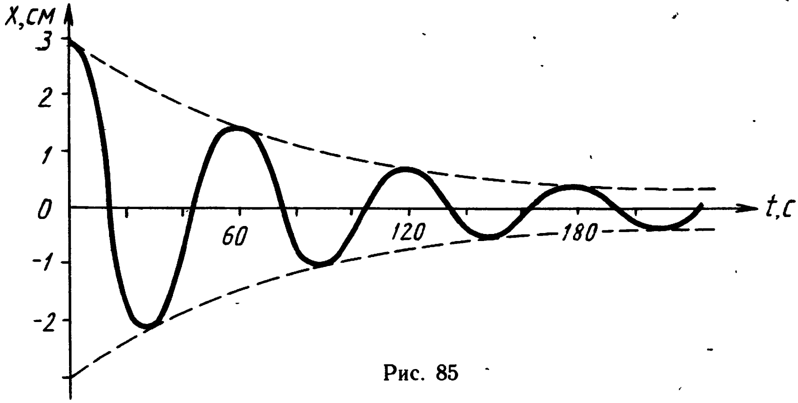


Рис. 85

После команды RUN (и ВК) машина выдает таблицу из 60 пар цифр. Но на ПЭВМ можно организовать и автоматическое вычерчивание графика (см. раздел 3.16). Для этого заменим строку

80 PRINT TAB ((X+3) * 10)' * '

Здесь число 3 добавлено для того, чтобы не получалось отрицательных значений, а число 20 — чтобы размах кривой был не 6, а 60 знаков. После RUN (и ВК) получается кривая, где X отложен вправо, а t — вниз.

Для графического дисплея:

```
1 PRINT "ZATKOG"
2 PRINT "ЗАТУХ.КОЛ.,ГРАФИК"
5 SCREEN 2
10 A=3
20 D=.01
30 T0=60
40 F0=PI/2
50 T=0
60 T1=.3
65 LINE (0,0)-(600,0),8
66 LINE (0,0)-(0,260),8
70 FOR T=0 TO 600 STEP T1
80 Y=SIN(2*PI*T/T0+F0)
90 Z=EXP(-D*T)
100 X=A*Z*Y
110 ' PRINT T,X
115 PSET (T,X*40+130),8
120 T=T+T1
130 NEXT T
140 GOTO 140
```

2.7.2. Для динамического решения в соответствии с рисунком 86 $L_1=R\varphi$ (для намотанной части нити); $L_2=L-R\varphi$ (для свободной части нити). Момент силы: $M=mg\,(L-R\varphi)\sin\alpha=mg\,(L-R\varphi)\cos\varphi$. Момент инерции: $I=m\,(L-R\varphi)^2$. При подстановке этих выражений в уравнение $M=d\,(I\omega)/dt$ получим

$$mg\,(L-R\varphi)\cos\varphi=m\,(L-R\varphi)^2\,\frac{d\omega}{dt}-2R\omega^2 m\,(L-R\varphi),$$

откуда

$$\Delta\omega=\frac{(g\cos\varphi+2R\omega^2)}{L-R\varphi}\,\Delta t.$$

Так как $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, то, следовательно, мы имеем дифференциальное уравнение второго порядка, которое можно решать численно (см. разделы 4.6 и 4.7).

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	Д
Сначала Потом	— N	g	L	φ	Δt	t	— x	ω	— $\sin\varphi$	— $\cos\varphi$	N	R	— Δy	— $(L-R\varphi)$

Программа:

00 0 П3 П5 П7 ИП2 ПD
06 ИПА ПО
08 ИП3 F cos П9 ИП1×2 ИПВ×ИП7
Fx^2×+ . . . . числитель
20 ИПD ÷ . . . . дробь
22 ИП4×ИП7+П7 . . . . ω
27 ИП4×ИП3+П3 . . . . φ
32 ИП4 ИП5+П5 . . . . t
36 ИП2 ИПВ ИП3×2−ПD . . . . . $L-R\varphi$
42 Fx≥0 $\boxed{74}$ FL0 $\boxed{08}$ . . . . условие и организация внутренних циклов
46 ИП3 F sin П8 ИП8×ИПД ИП9×+С/Пxx
56 1 ИП9−ИПВ×ИПД ИП8×+С/П . y
66 ИП5 С/П ИП3 С/П ИП7 С/П . . . t, φ, ω
72 БП $\boxed{06}$
74 0 F 1/x

Не рекомендуется брать Δt больше 0,01 с.

Ответ.

t, с	0,2	0,4	0,6	0,62	0,64	0,66	0,68	0,7
φ, рад	0,25	0,99	2,5	2,7	2,97	3,29	3,75	4,72
ω, рад/с	2,05	4,79	9,92	11,3	13,4	17,0	25,2	62,4

Траектория дана на рисунке 86. После удара о бревно (если удар упругий) угловая скорость ω меняет знак с плюса на минус. Энергетическое решение можно построить на соотношениях:

$$mv^2/2 = mgy;\quad v=\sqrt{2gy};$$

$$ds=(L-R\varphi)\,d\varphi;\quad dx=ds\cos\alpha=ds\sin\varphi;\quad dy=ds\cos\varphi;$$
$$x=R\sin\varphi+(L-R\varphi)\cos\varphi;\quad y=R(1-\cos\varphi)+(L-R\varphi)\sin\varphi;$$
$$dt=ds/v.$$

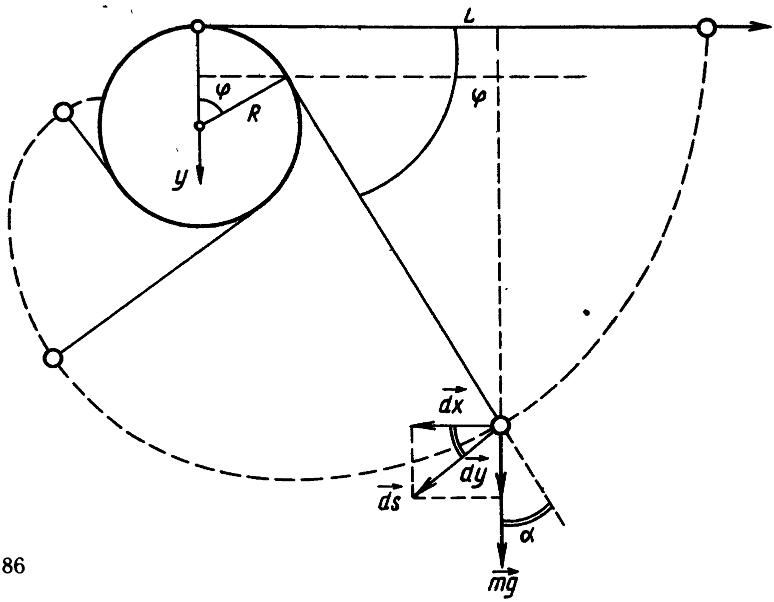


Рис. 86

Зная φ в данный момент, находим x, y, v. Задавая $\Delta\varphi$, находим Δs, затем Δt и все остальные приращения и новые значения.

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	А	В	С	Д
Сначала Потом	— N . . . 0	g	L	— φ	Δφ	— t	— x	— y	— sin φ	— cos φ	N	R	— Δy	— $(L-R\varphi)$

Программа:

00 0 П3 П5 П6 П7 . . . . «обнуление» ЯП
05 ИПА П0 . . . . заполнение счетчика внутренних циклов
07 ИП3 ИП4 + П3 . . . . φ
11 ИП2 ИПВ ИП3 × — ПД . . . . . $L-R\varphi$
17 ИП3 F sin П8 . . . . sin φ
20 ИП3 F cos П9 . . . . cos φ
23 ИПВ ИП8 × ИПД ИП9 × + П6 . . . x
31 1 ИП9 — ИПВ × ИПД ИП8 × + П7 . y
41 ИПД ИП4 × . . . . Δs
44 2 ИП1 × ИП7 × F$\sqrt{\ }$ v
50 ÷ ИП5 + П5 . . . . t
54 ИПД Fx⩾0 $\boxed{69}$ FL0 $\boxed{07}$

59 ИП3 С/П ИП5 С/П ИП6 С/П ИП7
С/П . . . . вывод φ, t, x, y

67 БП $\boxed{05}$

69 0 F1/x

Программа для ПЭВМ:

```
10 PRINT "ASMA"
20 PRINT "АСИММЕТРИЧНЫЙ МАЯТНИК"
30 PRINT "3 СПОСОБ РЕШЕНИЯ (ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ)"
40 PRINT "L=1"
50 INPUT "R=";R
60 SCREEN 2
70 G=9.81
80 L=1
90 F=0
100 CIRCLE (310,263-R*300*.64),R*300,,,,.64
110 LINE (0,263)-(640,263)
120 ' LINE (  0,0)-(  0,263),8
130 LINE (310,0)-(310,263)
140 ' LINE (0,0)-(639,0),8
150 W=0
160 F1=.01
170 N=5
180 T=0
190 FOR I=1 TO N
200 F=F+F1
210 D=L-R*F
220 IF D=<0 THEN 360
230 IF F=<0 THEN 380
240 X=D*COS(F)+R*SIN(F)
250 Y=D*SIN(F)+R*(1-COS(F))
260 IF Y=<0 THEN 360
270 S=ABS(F1)*D
280 T=T+S/SQR(2*G*Y)
290 IF F=<0 THEN 380
300 NEXT I
310 ' PRINT "Ь=";X,"Y=";Y,"T=";T,"F=";F
320 PSET (310+300*X,263-.64*300*Y)
330 ' PRINT T*200,F*50
340 ' PSET (T*200,F*50),7
350 GOTO 190
360 F1=-F1
370 GOTO 190
380 GOTO 380
390 END
```

В таком виде не выполняются строки 120, 140, 310, 330 и 340. Программа чертит на графическом дисплее траекторию $y(x)$. Если убрать запреты в строках 120, 140 и 340 и заблокировать строки 100, 110, 130 и 320, то вычерчивается график $\varphi(t)$. Если же нет возможности чертить график на дисплее, то следует заблокировать или стереть все эти строки, а также строки 60 и 380; в строке 290 изменить адрес на 390 и снять запрет со строки 310. Получится таблица чисел.

При $R \to 0$ должен получиться обычный физический (симметричный) маятник с периодом колебаний $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ (при малых амплитудах — см. задачу 2.6.1).

2.7.3. Выберем оси x и y так, как показано на рисунке 87. Сила натяжения резинки $F = K(L - L_0)$. Коэффициент K можно найти из

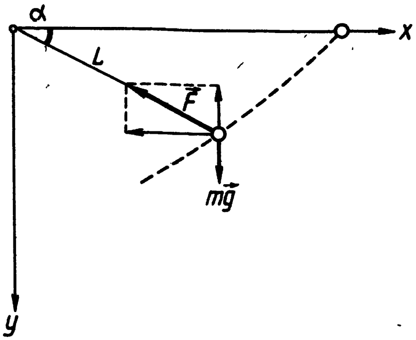


Рис. 87

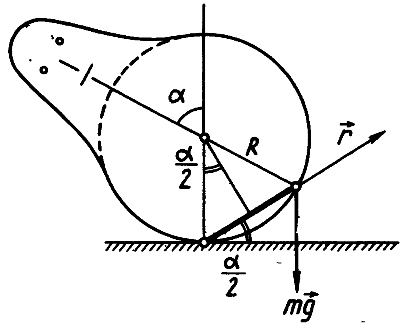


Рис. 88

условия: $K=Mg/(L_1-L_0)$, где $L_1=0{,}2$ м. Проекцию на ось x дает только сила F ($F\cos\alpha$). Проекцию на ось y — разность Mg и $F\sin\alpha$. Уравнения движения по осям будут следующие:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt}=-\frac{F\cos\alpha}{M};\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv_y}{dt}=\frac{Mg-F\sin\alpha}{M}.$$

Введем обозначения: $L_0=$LØ; $L_1\equiv$L1; $g\equiv$G; $v_x=$V1; $v_y=$V2; $\sin\alpha\equiv$S; $\cos\alpha\equiv$C.

Обозначим переменную длину резинового шнура через L, а ускорения по осям x и y соответственно $W1$ и $W2$.

Программа:

```
1 PRINT "RA"
10 PRINT "РАСКИДАЙ"
20 SCREEN 2
30 L0=1
40 L=2
50 L1=1.2
60 M=.05
70 G=9.81
80 T1=.005
90 X=L
100 Y=0
110 V1=0
120 V2=0
130 L=SQR(X*X+Y*Y)
140 S=Y/L
150 C=X/L
160 K=M*G/(L1-L0)
170 F=K*(L-L0)
180 F1=-F*C
190 F2=G*M-F*S
200 W1=F1/M
210 W2=F2/M
220 V1=V1+W1*T1
230 V2=V2+W2*T1
240 X=X+V1*T1
250 Y=Y+V2*T1
260 T=T+T1
270 PSET (310+X*100,200-Y*100),8
280 ' IF X<0 THEN 320
290 IF T>5 THEN 310
300 GOTO 130
```

```
310 GOTO 310
320 ' PRINT T
330 END
```

Характер траектории получается сложным и неожиданным (попробуйте, хотя бы качественно, предсказать вид траектории). Без применения вычислительной техники это сделать оказывается практически невозможно. Решение проверьте на опыте.

Проследите, как меняются траектория и период колебаний при изменении параметров. Обратите внимание на частные случаи: X=0; Y=L; X=Y=L, а также V1; V2≠0.

2.7.4. Решение не приводится.

2.7.5. Момент силы $\vec{M}$ равен изменению момента количества движения (момента импульса) $\vec{N}$ в единицу времени: $\vec{M}=d\vec{N}/dt$. Из рисунка 88 следует $\vec{M}=[\vec{r}, \vec{P}]$; $M=rmg\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=rmg\cos\alpha/2$. В то же время $N=I\omega$; $I=mr^2$ (следует обратить внимание на то, что I непостоянная величина). Тогда

$$rmg\cos\frac{\alpha}{2}=mr^2\frac{d\omega}{dt}+2\omega mr\frac{dr}{dt}.$$

Поскольку

$$r=2R\sin\frac{\alpha}{2};\qquad \frac{dr}{dt}=R\cos\frac{\alpha}{2}\frac{d\alpha}{dt},$$

откуда

$$g\cos\frac{\alpha}{2}=2R\sin\frac{\alpha}{2}\frac{d\omega}{dt}+2\omega^2R\cos\frac{\alpha}{2},$$

где $\omega=d\alpha/dt$. Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $\alpha(t)$. Будем решать его численным методом, находя шаг за шагом приращение угловой скорости:

$$d\omega=\frac{(g-2\omega^2R)}{2R\,\mathrm{tg}\,(\alpha/2)}dt,$$

а также приращение угла, времени и др. Введем обозначения: $g\equiv$G; $\alpha\equiv$A; $\Delta\alpha\equiv$A1; $\omega=$W; $\Delta\omega\equiv$W1; $t\equiv$T; $\Delta t\equiv$T1. Тогда **программа** для ПЭВМ может быть такой:

```
1 PRINT "WANKA"
2 PRINT "ВАНЬКА-ВСТАНЬКА"
10 INPUT "A=";A
11 SCREEN 2
20 G=9.8
30 R=.1
40 A=80
50 A=A*PI/180
60 T=0
70 W=0
80 T1=.001
90 ' N=40
100 ' FOR I=0 TO N
110 SCREEN 2
120 LINE (0,130)-(639,130),5
130 LINE (0,0)-(0,263),5
140 X=(G-2*W*W*R)*T1
```

```
150 Y=2*R*TAN(A/2)
160 W1=X/Y
170 W=W+W1
180 A=A-2*W*T1
190 ' IF A<1E-6 THEN 260
200 T=T+T1
210 IF T>3 THEN 260
220 ' PRINT T,A*180/PI,W
230 PSET (T*200,130+A*60)
240 GOTO 140
250 ' NEXT I
255 PRINT T,A*180/PI,W
260 GOTO 260
270 GOTO 90
280 END
```

В зависимости от того, что требуется (таблица цифр t, α или график зависимости $\alpha(t)$), вводятся или блокируются строки 90, 100, 110 ... 130, 190, 220 или 230, 250, 270.

Следует обратить внимание (как и всегда при решении дифференциальных уравнений) на величину приращения $T1$. Если взять $T1 \geqslant 0{,}01$, то быстро накапливается ошибка и решение получается неправильным.

2.7.6. Для решения этой и последующих задач необходимо изучить раздел 4.8 и использовать приведенные там программы.

Решение на ПМК возможно, если ввести в калькулятор программу из таблицы 4.8.1 и с 70-го шага заложить подпрограмму для вычисления y. Так как $\omega t = 2\pi t/T = 2\pi i\Delta t/(N\Delta t) = 2\pi i/N$, имеем **программу:**

70	Fπ 2×ИП3×ИП1÷F sin 3×И6	$3\sin\omega t$
81	Fπ 6×ИП3×ИП1÷F cos	$\cos 3\omega t$
89	ИП6+В/0	y

Для решения на ПЭВМ используем программу из таблицы 4.8.2, но для $y = 3\sin\omega t + \cos 3\omega t$ следует заменить строку 100:

100 Y=3 * SIN (PI * 2 * I/N) +COS (PI * 6 * I/N)

Ответ. $A_0 = 0$; $A_1 = 3$ ($\varphi = -1{,}57$ рад); $A_2 = 0$; $A_3 = 1$ ($\varphi = 0$); остальные A_n равны нулю, т. е. $y = \sum_n A_n \cos(n\omega t + \varphi) = 3\cos(\omega t - \pi/2) + \cos 3\omega t = 3\sin\omega t + \cos 3\omega t$. Спектр дан на рисунке 89.

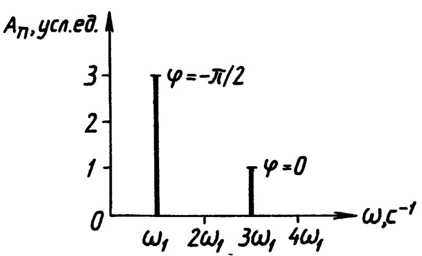


Рис. 89

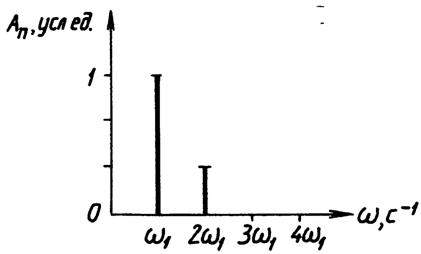


Рис. 90

2.7.7. Это задача на спектральный анализ функции, заданной численно (числа y_i берутся из графика — см. рис. 13). Программа для ПМК и порядок действий даны в разделе 4.8. Для решения таких задач лучше использовать более мощную технику, например ПЭВМ.

Программа для ПЭВМ:

```
1 PRINT "SPANCH"
10 PRINT "СПЕКТР.АНАЛИЗ Ф.,ЗАД.ЧИСЛ."
20 INPUT "НОМЕР MAX ГАРМОНИКИ N1=";N1
30 INPUT "ЧИСЛО УЧАСТКОВ N=";N
40 K=2/N
50 FOR J=0 TO N1
60 P1=0
70 P2=0
80 L=K*PI*J
90 FOR I=1 TO N
100 M=L*I
110 READ Y
120 C1=Y*COS(M)*K
130 P1=P1+C1
140 C2=Y*SIN(M)*K
150 P2=P2+C2
160 NEXT I
170 PRINT TAB(24)"ГАРМ. N=" J
180 PRINT "AN="P1;"BN="P2;
190 PRINT "ANN="SQR(P1^2+P2^2);
200 PRINT "FNN="ATN(P2/P1)
210 RESTORE
220 NEXT J
230 END
240 DATA 0,.8,1.2,1.28,1,.6,.2,.04,0
250 DATA -.04,-.25,-.62,-1.1,-1.28,-1.2,-.8,0
```

Ответ дан на рисунке 90, из которого видно, что струна звучит основным тоном с периодом $T=0{,}239\cdot 10^{-3}$, частотой $\nu=1/T=$ $=261{,}5$ Гц и обертоном $2\nu=523$ Гц. Основным тоном считается частота при $n=1$, первым обертоном — при $n=2$.

2.7.8. Уравнения колебаний вдоль осей x и y запишем в виде

$$x=A_1 \cos(\omega_1 t);\quad y=A_2 \cos(\omega_2 t+\varphi).$$

Введя обозначения: $A_1\equiv$ A1; $\omega_1\equiv$ W1; $\varphi\equiv$ F,— возьмем какие-либо значения для амплитуд и частот (важны только соотношения между ними) и зададим F. Тогда **программа** для графического ПЭВМ будет такой:

```
1 PRINT "LISSAZ"
2 PRINT "ФИГУРЫ ЛИССАЖУ"
10 A1=200
20 A2=100
30 W1=3
40 W2=6.1
50 F=1.4
60 SCREEN 2
70 LINE (315,260)-(315,0),5
80 LINE (0,130)-(630,130),5
90 FOR T=0 TO 10 STEP 1E-2
100 X=A1*COS(W1*T)
110 Y=A2*COS(W2*T+F)
120 PSET (X+315,Y+130)
130 NEXT T
140 GOTO 140
```

Меняя параметры, пронаблюдайте, как меняются траектории точки (фигуры Лиссажу). Одно из решений, полученных на экране дисплея по этой программе, дано на рисунке 91.

2.8.1. Задача решается по формуле (2.8.3).

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7
Сначала Потом	0 u	Δu	— u^2					

Программа:

00 ИП0 Fx^2 П2 /—/ Fe^x . . . . u^2, e^{-u^2}

05 ИП2$\times$4$\times$Fπ F$\sqrt{\ }$ $\div$С/П . . . . $(4/\sqrt{\pi})\,e^{-u^2}\,u^2$

13 ИП0 ИП1+П0 БП $\boxed{01}$ . . . . u

На ПЭВМ можно получить график автоматически:

```
1 PRINT "MAXW"
5 SCREEN 2
10 ' PRINT "РАСПР. ПО СКОР."
20 U1=.1
30 LINE (0,0)-(600,0),8
31 LINE (0,0)-(0,260),8
40 FOR I=1 TO 30
50 U=U1*I
60 Z=4*EXP(-U^2)*U^2/SQR(PI)
70 ' PRINT U*100,Z*100
71 PSET (U*100,Z*300),8
80 NEXT I
90 GOTO 90
```

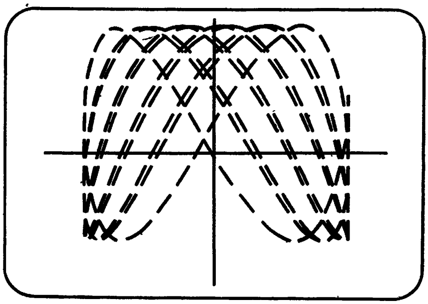


Рис. 91

Ответ дан на рисунке 92.

2.8.2. Вид кривой, описываемой формулой (2.8.3), не зависит от температуры. Чтобы показать зависимость распределения от температуры, воспользуемся формулой (2.8.2).

Программа для вычерчивания семейства кривых при разных T:

```
1 PRINT "MAXWT"
2 PRINT "ЗАВ.РАСПР.МОЛ.ПО
3 PRINT "СКОР.ОТ ТЕМПЕР.
5 SCREEN 2
10 LINE (0,230)-(0,0),5
20 LINE -(640,0),5
```

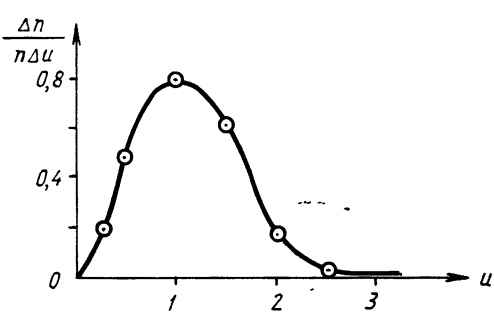


Рис. 92

```
30 M=32
40 R=8.3E3
50 FOR T=100 TO 1000 STEP 200
60 FOR V=0 TO 1200 STEP 5
70 A=(M/(2*PI*R*T))^1.5
80 B=EXP(-M*V*V/2/R/T)
90 C=4*PI*V*V
100 Y=A*B*C
110 ' PRINT V,Y
120 PSET (V*.5,Y*6E4)
130 NEXT V
140 NEXT T
150 GOTO 150
160 END
```

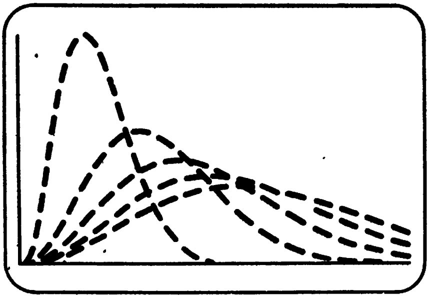


Рис. 93

Результат работы по этой программе дан на рисунке 93.

2.8.3. Здесь надо интегрировать выражение для $\Delta n/(n\Delta u)$ в пределах от $u_1=v_1/v_в$ до $u_2=v_2/v_в$, где $v_в=\sqrt{2RT/M}=$ $=\sqrt{2\cdot 8{,}3\cdot 10^3 293/28}=417$ м/с:

$$\frac{\Delta n}{n}=\int_{u_1}^{u_2}\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}u^2e^{-u^2}\right)\Delta u. \qquad (5.59)$$

Действуя по одной из программ, которые приведены в разделе 4.3, находим о т в е т: 17%.

2.8.4. $pV^\gamma=\text{const}$; $\gamma=1{,}28$; $p_1=0{,}2$; $p_2=3$; $V=(\text{const}/P)^{1/\gamma}$. Значение const зависит от массы газа и температуры.

Возьмем для определенности $\text{const}=1$.

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6
Сначала Потом	p_1 p	Δp	$1/\gamma$	const	—	—	—

Программа:

00 ИП3 ИП0 ÷ ИП2 ↔ Fx^y С/П V
07 ИП0 ИП1 + П0 . . . . p
11 БП $\boxed{00}$

Применение ПЭВМ в этом случае излишне.

О т в е т.

p	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
V	3,5	2,04	1,49	1,19	1	0,82	0,77

2.8.5. Давление легко находится по формуле

$$p=\frac{RT}{V_0-b}-\frac{a}{V_0^2}. \qquad (5.60)$$

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	...	A	B	...
Сначала Потом	V_0	—	R	T	— a/V_0^2	—		a	b	

Программа:

00 ИПА ИП0 $Fx^2 \div$ П4 . . . . a/V_0^2
05 ИП2 ИП3 $\times$ ИП0 ИПВ $- \div$ . . . . . $RT/(V_0-b)$
12 ИП4 $-$ С/П . . . . p

Имеет смысл брать объем не менее $V_0=b$: иначе давление p всегда будет отрицательным. Задавая $V_0=1{,}1...20b$, а $T=300$, 100, 60 К, получаем кривые, изображенные на рисунке 94.

Резкую разницу кривых можно объяснить, если вспомнить, что при нормальном давлении азот при температуре, равной 77 К, обращается в жидкость.

Для $T=100$ К и ниже в определенной области получаются отрицательные давления.

При вычерчивании графика возникают трудности с выбором масштаба. Дело в том, что изображаемая в учебниках кривая Ван-дер-Ваальса искажена. На самом деле левая ветвь, соответствующая жидкому состоянию, идет очень круто, почти вертикально (жидкость практически несжимаема), а правая ветвь, соответствующая газу, идет полого (объем газа в сотни и тысячи раз превышает объем жидкости при том же давлении). В данной задаче получить полностью кривую с максимумом и минимумом удается только вблизи температуры, равной 100 К.

На ПЭВМ можно вычертить семейство кривых вблизи температуры 100 К, введя обозначения: $a \equiv$ A; $b \equiv$ B; $p \equiv$ P; $V_0 \equiv$ V0:

Программа:

```
10 PRINT "VANDER"
20 PRINT "КРИВАЯ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА"
30 SCREEN 2
40 A=1.36E5
50 B=3.85E-2
60 R=8.3E3
70 T=100
80 LINE (0,260)-(0,0),5
90 LINE (0,70)-(630,70),5
100 FOR T=30 TO 210 STEP 20
110 FOR V0=1.1*B TO 12*B STEP B*.02
120 P=R*T/(V0-B)-A/V0^2
130 PSET (V0*1.5E3,P/1E5+70)
140 NEXT V0
150 NEXT T
160 GOTO 160
```

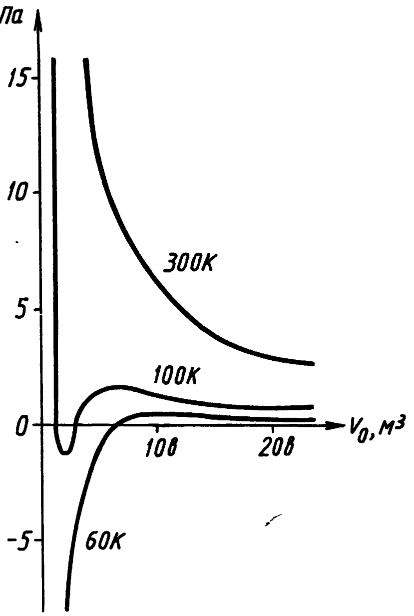


Рис. 94

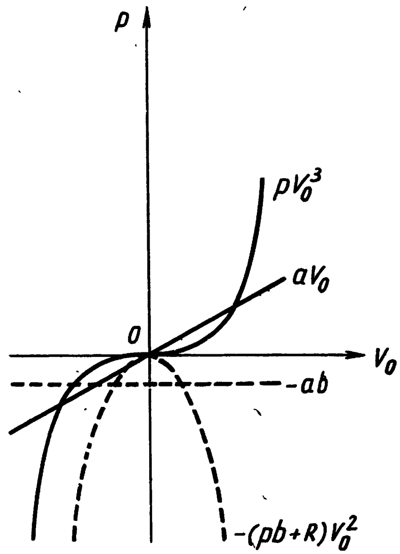


Рис. 95

2.8.6. Объем V_0 количества вещества, равного 1 кмоль, находится по формуле (2.8.5), которая ведет к кубическому уравнению

$$F(x)=F(V_0)=pV_0^3-(pb+R)V_0^2+aV_0+aV_0-ab=0. \quad (5.61)$$

Будем решать это уравнение по рекомендациям, данным в разделе 4.4. Зависимость отдельных членов левой части этого уравнения от объема V_0 дана на рисунке 95. Из рисунка видно, что корень V_0 должен лежать где-то правее $V_0=0$. Таким образом, отделение корня выполнено. Уточнение корня делается по одной из программ раздела 4.4.

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	. . .	1	2	3	. . .	A	B	C	D
Сначала Потом		ΔV_0	a	b		0 V_0	p	R	0 Сумма

Подпрограмма:

50 ИПА ИПА Fx^2 × ИПВ × ПД
57 ИПВ ИП3 × ИПС + ИПА Fx^2 × ИПД ↔ — ПД
69 ИП2 ИПА × ИПД + ПД
75 ИП2 ИП3 × ИПД ↔ — В/0

Задавая начальное значение $V_0=0$, $\Delta V_0=10^{-2}$ и используя подпрограмму для вычисления $F(x)$, получим $V_0 \sim 10^{-1}$ м³.

Поскольку количество вещества азота, равное 1 кмоль, соответствует массе, равной 28 кг (у нас 0,2 кг), объем V будет равен не 10^{-1} м³, а $10^{-1}\cdot 0{,}2/28 \approx 7\cdot 10^{-4}$ м³$=0{,}7$ л.

2.8.7. Выразив температуру в кельвинах и построив график зависимости $p(T)$, видим (рис. 96, *а*), что эта зависимость нелинейная. Попробуем ее аппроксимировать экспонентой:

$$p=p_0 e^{AT} \tag{5.62}$$

или $\ln p=\ln p_0+AT$. Введя обозначения: $\ln p\equiv \mathrm{Y}$; $\ln p_0\equiv \mathrm{M}$; $A\equiv K$; $T\equiv \mathrm{X}$, получим (в функциональном масштабе) линейную зависимость:

$$\mathrm{Y}=\mathrm{M}+\mathrm{KX}. \tag{5.63}$$

Расширим таблицу данных:

t, °C	-5	0	...
$X=T$, К	268	273	...
p, Па	$3{,}96\cdot 10^2$	$6{,}02\cdot 10^2$	...
$Y=\ln p$	5,98	6,40	...

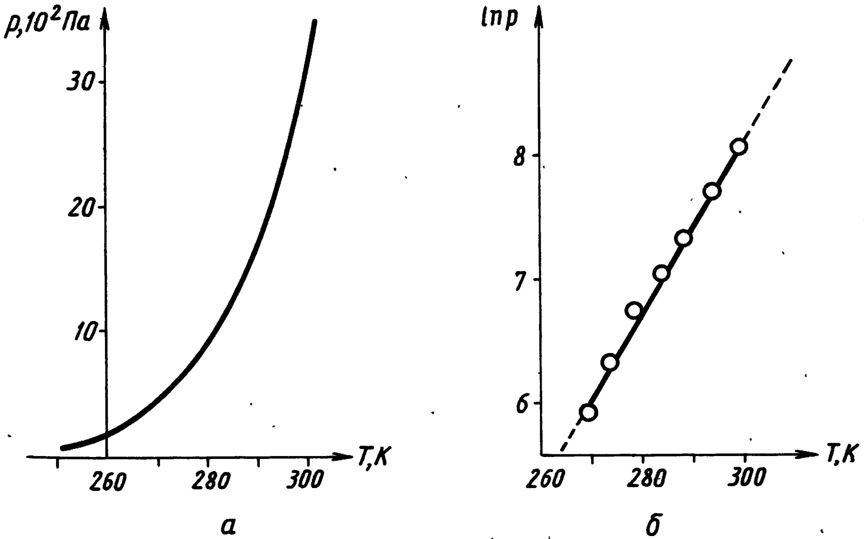


Рис. 96

Получим точки на графике Y (X) (рис. 96, *б*). Видим, что формула (5.62) подобрана удачно. Можно на глаз провести прямую и найти M и K, а тем самым и p_0, и A. Но лучше подобрать M и K методом наименьших квадратов (см. раздел 4.9), и тогда получим $M=-12{,}3$.

Так как $p_0=e^M$, то, нажимая клавишу Fe^x, получим $p_0=4{,}5\cdot10^{-6}$ Па, а для $K=A$ получим $6{,}8\cdot10^{-2}K^{-1}$. Таким образом, зависимость $p(T)$ близка к $p=4{,}5\cdot10^{-6}\exp(6{,}8\cdot10^{-2}T)$.

2.8.8. В данной задаче очень сильная зависимость $\eta(t)$, или $\eta(T)$. Но только теперь эта зависимость падающая. Попробуем ее аппроксимировать:

$$\eta=\eta_0e^{AT},\ \ln\eta=\ln\eta_0+AT. \tag{5.64}$$

Здесь A — отрицательная величина. Действуя, как в предыдущей задаче, получим $\eta=\eta_0\exp(AT)$, где $\eta_0=2\cdot10^{19}$ сантипуаз; $A=-7{,}5\cdot10^{16}$ K^{-1}.

2.9.1. Известно, что сила Кулона $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$. По несложным программам для ПМК и ПЭВМ можно вычислить силу F в данной точке r. Затем, увеличивая r на Δr, снова вычислить F. По полученным точкам на ПЭВМ можно вычертить график:

```
1 PRINT "KULCN"
2 PRINT "ЗАК.КУЛОНА"
5 SCREEN 2
10 Q1=5E-8
20 Q2=3E-8
30 Z=8.85E-12
35 LINE (0,0)-(600,0),5
36 LINE (0,0)-(0,230),5
40 FOR R=1E-2 TO 1E-1 STEP 1E-3
50 F=Q1*Q2/(2*PI*Z*R^2)
60 PSET (R*5E3,F*1E3),8
70 NEXT R
80 GOTO 80
```

В данном случае использованы обозначения: $q_1\equiv$Q1; $q_2\equiv$Q2; $\varepsilon_0\equiv$Z; $r\equiv$R. Множитель $A=5E2$ подобран так, чтобы первое значение F * A было не более 100 (см. раздел 3.16).

Для экспериментальной проверки какого-либо закона нужно выбрать такой функциональный масштаб, чтобы на прямую линию (в случае справедливости закона) ложились точки (см. раздел 4.10). В данном случае следовало бы по осям откладывать не F и r, а F и r^{-2}.

2.9.2. Силовая линия — линия, касательная к которой показывает направление вектора напряженности (или вектора силы, действующей на заряд) в каждой точке электрического поля (рис. 97, *а*). Сила $\vec F$ — векторная сумма сил $\vec F_1$ и $\vec F_2$. Тангенс угла наклона касательной есть производная dy/dx. В то же время это отношение проекций сил F_y/F_x. Каждая проекция силы $\vec F$ складывается из проекций $\vec F_1$ и $\vec F_2$ (рис. 97, *б*):

$$F_x=F_{1x}-F_{2x}=F_1\frac{x}{r_1}-F_2\frac{l-x}{r_2};\ F_y=F_{1y}+F_{2y}=F_1\frac{y}{r_1}+F_2\frac{y}{r_2}. \tag{5.65}$$

Таким образом, $\frac{dy}{dx}=\frac{F_1y/r_1+F_2y/r_2}{F_1x/r_1-F_2(l-x)/r_2}$.

Подставив F_1 и F_2 из закона Кулона, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{q_1y/r_1^3+q_2y/r_2^3}{q_1x/r_1^3-q_2(l-x)/r_2^3}\equiv f(x,\ y), \qquad (5.66)$$

где $r_1=\sqrt{x^2+y^2}$; $r_2=\sqrt{(l-x)^2+y^2}$.

Это дифференциальное уравнение решается методом, рекомендованным в разделе 4.6.

Так, например, постепенным наращиванием y_n на некоторое Δy и вычислением y_{n+1} и x_{n+1} имеем

$$x_{n+1}=x_n+\Delta x;\ dy=f(x,\ y)\,dx;\ y_{n+1}=y_n+f(x_n,\ y_n)\,\Delta x. \qquad (5.67)$$

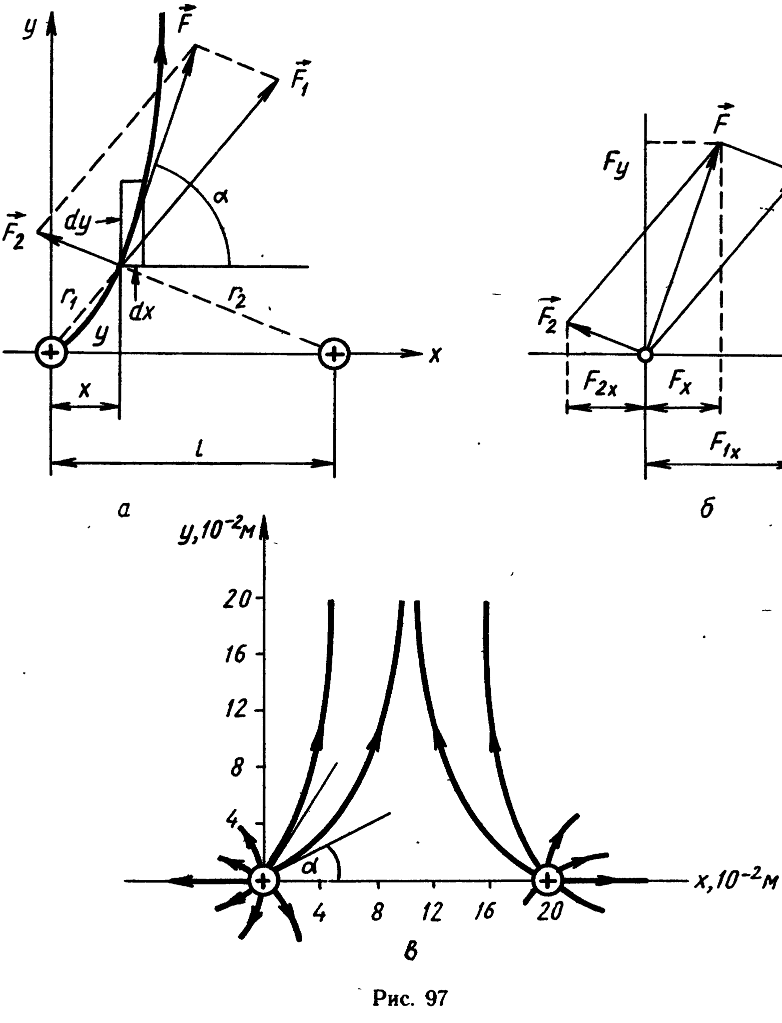


Рис. 97

Так будут найдены два ряда значений: $x_0, x_1, x_2, \ldots$ и $y_0, y_1, y_2, \ldots$, что и является численным ответом, т. е. искомой зависимостью $y(x)$. Следует только подумать над тем, как задать начальные x_0 и y_0. Предположить, что они равны нулю, нельзя, так как значение силы F_1 уйдет в бесконечность. Поэтому начнем с точки A с координатой $x_0 = \Delta x$, а y_0 найдем из $\Delta y / \Delta x = \operatorname{tg} \alpha_0$, задав угол выхода силовой линии из заряда α_0. (Этот угол можно задать произвольно, поэтому и силовых линий может быть сколько угодно.)

Итак, задав α_0 и $x_0 = \Delta x$, распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	А	В	С	Д
Сначала	—	$x_0 = \Delta x$	—	Δx	α_0	—	—	q_1	q_2	—	l	—	—	N
Потом	N	x	y_0			r_1		r_2						

Программа:

```
00 ИП4 F tg ИП1×П2 . . . . . . . . . . . y0
05 ИПД ПО . . . . . . . . . . . . . . . зарядка счетчика циклов
07 ИП1 Fx² ИП2 Fx²+F√ П5 . . . . . . . . r1
14 ИПА ИП1−Fx² ИП2 Fx²+F√ П6 . . . . . . r2
23 ИПА ИП1−ИП8×ИП6Fx²÷ИП6÷П9
34 ИП7 ИП1×ИП5 Fx²÷ИП5÷ИП9−П9 . . . знаменатель
45 ИП8 ИП2×ИП6Fx²÷ИП6÷ПВ
54 ИП7 ИП2×ИП5Fx²÷ИП5÷ИПВ+ . . . . числитель
64 ИП9÷ . . . . . . . . . . . . . . . . f
66 ИП3×ИП2+П2 . . . . . . . . . . . y
71 ИП1 ИП3+П1 . . . . . . . . . . . . x
75 FLO [07] ИП1 С/П ИП2 С/П БП [05]
```

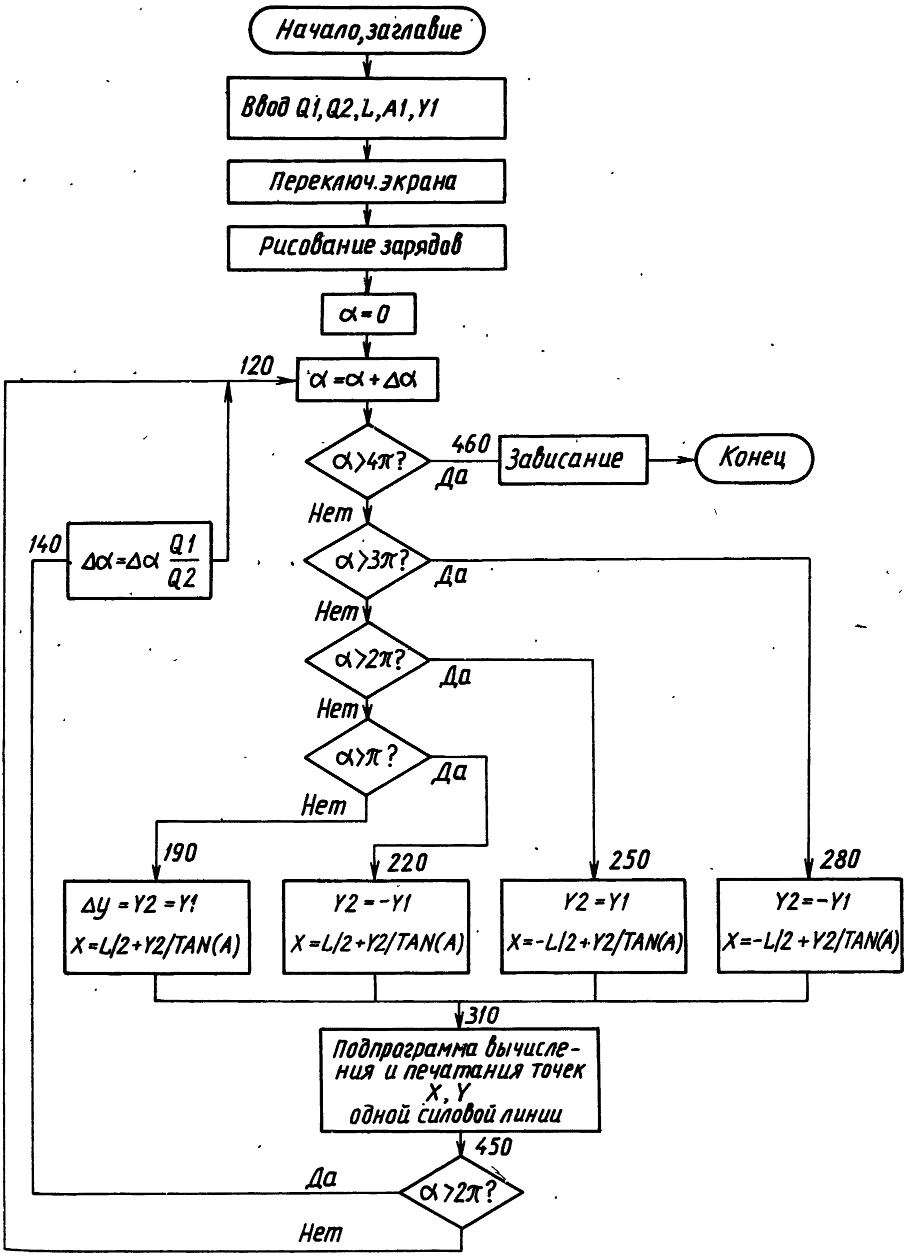
Взяв любой угол, например $\alpha_0 = 30°$ (нельзя брать 90°, так как $\operatorname{tg} 90° = \infty$); $x_0 = \Delta x = 4 \cdot 10^{-3}$м; $N = 5$, получим

x	2,4	4,4	6,4	8,4	10,4
y	$1{,}4 \cdot 10^{-2}$	2,7	4,4	8,8	ЕГГОГ

Построив эту кривую, берем $\alpha = 60°$ и т. д. (рис. 97, *в*); вычисление одной пары точек занимает около 3 мин, так что задачу лучше решать на ПЭВМ.

Программа вычерчивания одной силовой линии для ПЭВМ аналогична. (В варианте, приведенном ниже, задается не Δx, а Δy и затем Δx отыскивается по формулам (5.66) и (5.67).)

Если же надо получить на дисплее всю картину поля, то придется ввести более сложную программу (с перебором начальных углов около каждого заряда). При составлении такой программы надо подумать о том, чтобы в знаменателях не получались нули. Кроме того, переходя от одной области пространства к другой, необходимо проследить за значениями начальных координат и знаками приращений во избежание ошибок. Строим алгоритм:



Составляем по нему **программу**:

```
10 PRINT "FORCL8"
20 PRINT "СИЛОВ.ЛИНИИ ДВУХ ЗАР."
30 Q1=1
40 Q2=4
50 L=200
60 A1=.5
70 Y1=2
80 SCREEN 2
90 CIRCLE (420,130),5,8,,,.64
100 CIRCLE (220,130),5,8,,,.64
110 A=0
120 A=A+A1
130 GOTO 150
140 A=A+A1*Q1/Q2
150 IF A>4*PI THEN 470
160 IF A>3*PI THEN 280
170 IF A>2*PI THEN 250
180 IF A>PI THEN 220
190 Y2=Y1
200 X=L/2+Y2/TAN(A)
210 GOTO 310
220 Y2=-Y1
230 X=L/2+Y2/TAN(A)
240 GOTO 310
250 Y2=Y1
260 X=-L/2+Y2/TAN(A)
270 GOTO 310
280 Y2=-Y1
290 X=-L/2+Y2/TAN(A)
300 GOTO 310
310 FOR Y=Y2 TO 260/Y2 STEP Y2
320 X3=X-L/2
330 X4=X+L/2
340 R1=SQR(X3*X3+Y*Y)
350 R2=SQR(X4*X4+Y*Y)
360 R5=R1*R1*R1
370 R6=R2*R2*R2
380 FX=Q1*X3/R5+Q2*X4/R6
390 FY=(Q1/R5+Q2/R6)*Y
400 IF FY=0 THEN 120
410 X1=Y2*FX/FY
420 X=X+X1
430 PSET (X+320,Y*.64+130)
440 NEXT Y
450 IF A>2*PI THEN 140
460 GOTO 120
470 GOTO 470
480 END
```

Шаг по y (Y1) можно брать любой. От этого зависит плотность точек, которыми будет изображена силовая линия.

Заряды можно брать в любых условных единицах, так как любые множители, преобразующие в другую систему единиц, сократятся в формуле (5.66).

Усилия, которые придется затратить при вводе этой программы и ее отладке, окупятся, так как, меняя исходные данные, можно будет получать поля для различных соотношений между зарядами. На рисунке 98 дано изображение поля для случая $Q2=4*Q1$.

Другой способ решения этой задачи сводится к вычислению потенциала в определенных точках, которые являются скалярной (а не векторной) суммой потенциалов, создаваемых отдельными зарядами, что упрощает вычисления. Затем напряженность поля находится по формуле (2.9.4). Таким образом, в каждой точке надо найти $\varphi(x, y)= =\varphi_1+\varphi_2=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$, затем так же найти $\varphi(x+\Delta x, y)$. Величина $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\varphi(x+\Delta x, y)-\varphi(x, y)}{\Delta x}$ при малых Δx дает нам проекцию E_x. Аналогично следует найти E_y. Составляющая $E_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ в задаче равна нулю.

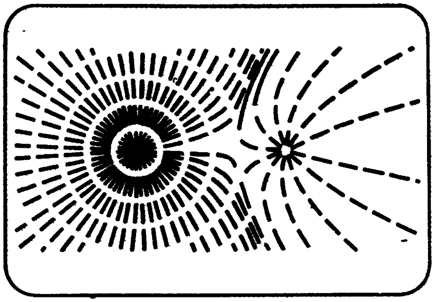


Рис. 98

Составьте такую программу самостоятельно.

2.9.3. Изменив знак q_2, получим рисунок 99, *а, б*, действуя по аналогичной программе для ПМК:

x	$0{,}4\cdot10^{-2}$	$2{,}4\cdot10^{-2}$	$4{,}4\cdot10^{-2}$	6,4	8,4	10,4	12,4	14,4
y		$1{,}4\cdot10^{-2}$	$2{,}4\cdot10^{-2}$	3,2	3,8	4,0	3,76	3,1

Полный ответ дан на рисунке 99, *в*.

2.9.4. Вычисление потенциалов зарядов значительно проще, чем напряженностей поля, так как потенциалы складываются алгебраически, а не векторно. Потенциалы равны:

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2;\quad \varphi_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1};\quad \varphi_2=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}, \tag{5.68}$$

где $r_1=\sqrt{x^2+y^2}$; $r_2=\sqrt{(l-x)^2+y^2}$.

Таким образом, $$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{q_2}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}\right). \tag{5.69}$$

Вычислим потенциал φ в точке, например $x=y=l/4=0{,}05$ м. Получим $\varphi=1840{,}3$ В. Затем зафиксируем этот потенциал и будем менять x и находить y из выражения (5.69), которое окажется уравнением относительно y при данных φ, q_1, q_2, l и x. Решать это уравнение придется методами, рассмотренными в разделе 4.4. Приведем уравнение (5.69) к виду $F(y)=0$. Тогда

$$F(y)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}\right)-\varphi=0. \tag{5.70}$$

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
Сначала Потом	—	Δy	φ	q_1	x	ε_0	—	$F(a)$	—	—	a y	l

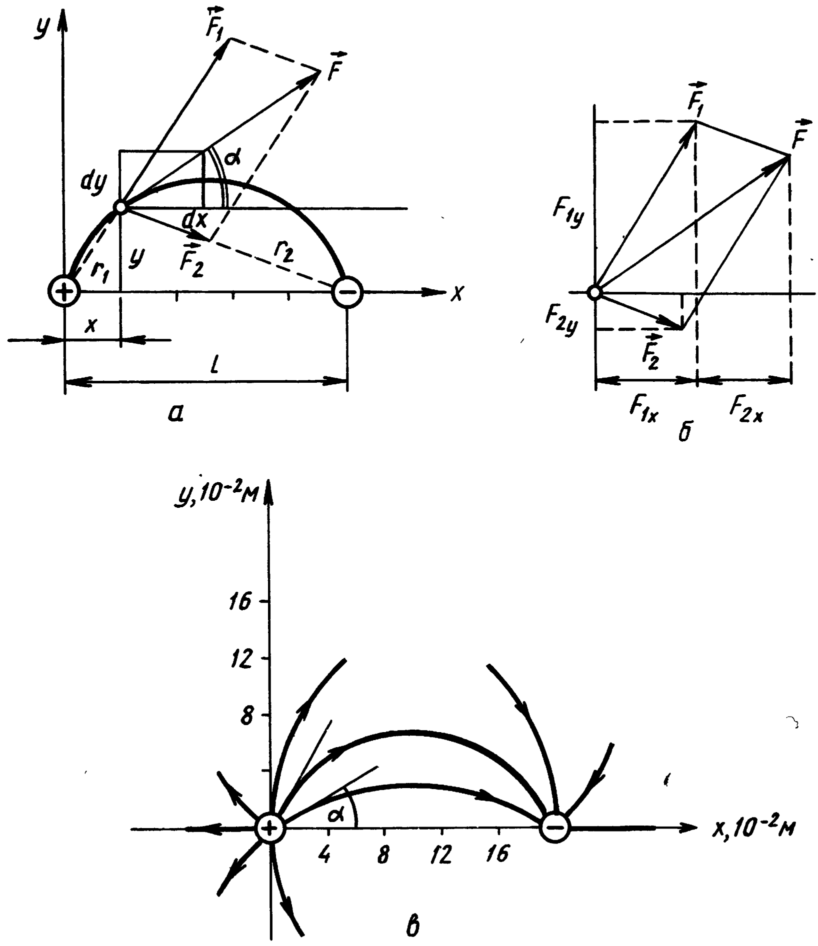


Рис. 99

Подпрограмма:

50 ИПВ ИП4 — Fx^2ИПА Fx^2 + F$\sqrt{\ }$ F1/x ПД . . . вторая дробь
60 ИП4 Fx^2 ИПА Fx^2 + F$\sqrt{\ }$ F1/x ИПД + . . . скобка
69 ИП3 × 4 ÷ Fπ ÷ ИП5 ÷ ИП2 — В/0 . . . . $F(y)$

(вводится с шага 50: F АВТ БП50 F ПРГ ввод этой подпрограммы F АВТ).

Так как корень будет где-то вблизи $y = 0{,}05$, возьмем начальную точку поиска: $a = 0{,}02$; $\Delta y = 0{,}001$. Пользуясь программой уточнения корня (см. раздел 4.4), находим, что при $x = 0{,}06$ координата $y \approx 0{,}043$.

При других x получается

x	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,04	0,02	0	—0,02	—0,04	—0,05
y	0,05	0,043	0,032	0,018	Корня нет	0,058	0,064	0,065	0,06	0,05	0,035

Это и есть след от эквипотенциальной поверхности. Вид этой кривой дан на рисунке 100. Затем надо получить поверхности для других значений φ. Например, для $\varphi=1\,500$ В получается кривая *2* (см. рис. 100).

2.9.5. Решение аналогично решению задачи 2.9.3.

2.9.6. Ответ не приводится.

2.9.7. Напряженность поля заряженной нити на расстоянии r равна: $E=\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}$. Если заряд частицы Q, то сила, действующая на нее, будет равна: $F=EQ$. В точке a (рис. 101) на частицу действуют со стороны нити *1* (показано сечение нити) сила F_1 (составляющие по осям F_3 и F_4) и сила F_2 со стороны нити *2* (составляющие по осям F_5 и F_6). Расстояния от частицы до нитей: $r_1=\sqrt{x^2+(A/2+y)^2}$; $r_2=$ $=\sqrt{x^2+(A/2-y)^2}$. Для нахождения проекций составим пропорции:

$$\frac{F_3}{F_1}=\frac{x}{r_1};\ \frac{F_4}{F_1}=\frac{A/2+y}{r_1};\ \frac{F_5}{F_2}=\frac{x}{r_2};\frac{F_6}{F_2}=\frac{A/2-y}{r_2};$$

$$F_x=F_3+F_5;\ F_y=F_4-F_6.$$

Следует тщательно проверить, учитывая знаки x и y, что и в точках b, c, d, a', b', c', d' эти соотношения будут иметь место и давать правильные знаки для всех сил. Далее программа должна содержать вычисления ускорений по x и по y, скоростей v_x и v_y, координат x и y по рекомендациям разделов 4.6 и 4.7. Ниже приведена программа для ПЭВМ, составленная при обозначениях: $\rho\equiv$R∅; $r_1\equiv$R1; $r_2\equiv$R2;

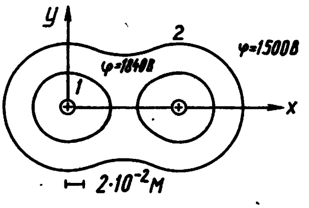


Рис. 100

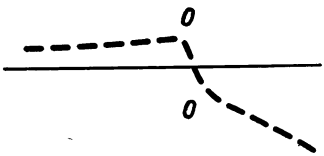


Рис. 102

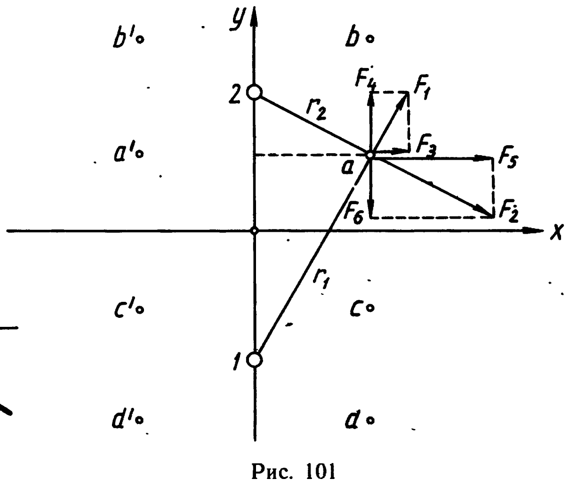


Рис. 101

$\varepsilon_0 \equiv E\emptyset$; $v_x \equiv V1$; $v_y \equiv V2$; X9 и Y9 — экранные координаты (с переносом центра изображения в центр экрана и множителями K и $K1$, подбирающими размер изображения, чтобы оно умещалось на экране). Программа проста и в то же время позволяет найти сложные решения. В ней организован перебор нескольких значений P. Наиболее интересные траектории, характер которых без компьютера трудно было бы предугадать даже качественно, получаются при $P \sim 0{,}6$ мм, особенно если слегка поварьировать значение ρ.

Программа:

```
1 PRINT "EL
10 PRINT "ЭЛЕКТРОН"
20 A=.02
30 L=.05
40 INPUT "R0=";R0
50 Q=-1.6E-19
60 E0=8.85E-12
70 M=9E-31
80 FOR P=0 TO .015 STEP .005
90 V1=1E7
100 V2=0
110 X=-L
120 Y=P
130 T=0
140 T1=2E-11
150 N=10
160 K=5E3
170 K1=K*.64
180 SCREEN 2
190 COLOR 8,1,1
200 LINE (0,130)-(639,130),5
210 CIRCLE (L*K,130-A/2*K1),2,8
220 CIRCLE (L*K,130+A/2*K1),2,8
230 FOR I=0 TO N
240 R1=SQR(X*X+(A/2+Y)*(A/2+Y))
250 R2=SQR(X*X+(A/2-Y)*(A/2-Y))
260 Z=R0*Q/(2*PI*E0)
270 F1=Z/R1
280 F2=Z/R2
290 F3=F1*X/R1
300 F4=F1*(A/2+Y)/R1
310 F5=F2*X/R2
320 F6=F2*(A/2-Y)/R2
330 W1=(F3+F5)/M
340 W2=(F4-F6)/M
350 V1=V1+W1*T1
360 V2=V2+W2*T1
370 X=X+V1*T1
380 Y=Y+V2*T1
390 T=T+T1
400 NEXT I
410 X9=(X+L)*K
420 Y9=Y*K1+130
430 PSET (X9,Y9),8
440 IF X9<0 THEN 490
450 IF X9>639 THEN 490
460 IF Y9<0 THEN 490
470 IF Y9>263 THEN 490
480 GOTO 220
490 NEXT P
500 END
```

Особое внимание, как и всегда при решении дифференциальных уравнений, следует уделить выбору величины $\Delta t \equiv T1$. Для скорости электрона $v_x = 10^7$ м/с расстояние L порядка нескольких Å будет пройдено за время приблизительно 10^{-9} с. Следовательно, Δt не должно превышать 10^{-11} с. Одна из траекторий, полученных на экране дисплея, приведена на рисунке 102.

2.10.1. Так как $U = iR = iR_0(1 + \alpha t(i))$, то удобнее построить $U(i)$, а потом, если это нужно, поменять оси координат местами. Задав i, надо ввести $t(i)$, а затем считать по этой формуле U. Для ПМК будем каждый раз останавливать машину для вывода i, ввода $t(i)$ и вывода U.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4
Сначала Потом	i	Δi	R_0	α	—

Программа:

00 ИП0 ИП1+П0 i
04 С/П ИП3×1+ИП2×ИП0×С/П . . . . U
14 БП $\boxed{00}$

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод операндов; В/0 С/П; запись i; ввод $t(i)$; С/П; запись U; С/П и т. д.

Ответ дан на рисунке 103. Из графика видно, что закон Ома в какой-то мере выполняется только для $i \lesssim 0{,}1$ А ($U \lesssim 10$ В). Далее формула $i = U/R$ есть лишь формула для вычисления R при данном i (или U) — не более того.

Для решения задачи на ПЭВМ удобно заложить сначала все значения $t(i)$ из рисунка 16 в массив или блок ДАТА, а затем ими пользоваться по очереди (см. раздел 3.17 или решение задачи 2.3.5). Ниже приводится **программа** при обозначениях: $i \equiv$ I; $\Delta i \equiv$ T1; $R_0 \equiv$ R0; $\alpha \equiv$ A:

```
1 PRINT "OHM"
2 PRINT "OTKЛ.OT ЗАК.OMA"
10 A=5.1E-3
20 R0=50
25 I1=.02
30 SCREEN 2
40 LINE (0,260)-(0,0),5
50 LINE -(630,0),5
60 FOR N=1 TO 21
65 I=I1*N
70 READ T
80 R=R0*(1+A*T)
90 U=I*R
100 P=I*U
110 PSET (I*1E3,T*80),5
120 PSET (I*1E3,R*3),6
130 PSET (I*1E3,U*6),7
140 PSET (I*1E3,P*10),8
150 NEXT N
160 GOTO 160
```

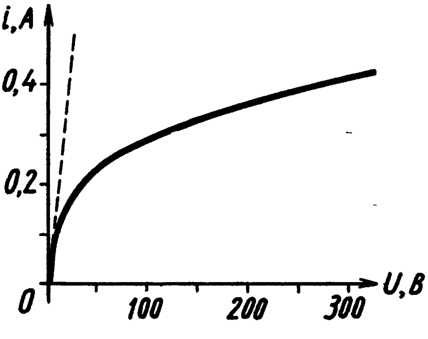


Рис. 103

```
170 DATA 0,0,0,.15,.1,.2,.25,.3
180 DATA .4,.5,.65,.75,1,1.25,1.4
190 DATA 1.7,2,2.25,2.4,2.6,2.7
```

2.10.2. Из закона Ома для полной цепи $i=\mathscr{E}/(R+r)$, где R — внешнее сопротивление; r — внутреннее, а $iR=U$ — напряжение на клеммах источника, следует $U=\mathscr{E}-ri$, т. е. линейная зависимость между i и U ($\mathscr{E}$ и r — константы). Используем раздел 4.10, считая $y\equiv U$; $M\equiv\mathscr{E}$; $K\equiv r$; $x\equiv i$.

Ответ. $\mathscr{E}=5{,}5$ В; $i_к=0{,}72$ А; $r=\mathscr{E}/i_к$.

Отложите все точки на графике $U(i)$ и проведите прямую по точкам на глаз по линейке. В какой мере результат соответствует тому, что получено методом наименьших квадратов?

2.10.3. Общее сопротивление будет равно сумме: $R=R_м+R_п$. Задачу можно решать двумя способами.

Один способ — искать экстремум функции $R(T)$, пользуясь разделом 4.5. В этом случае нужно только составить простую подпрограмму для вычисления $R(T)\equiv F(x)$ для ПМК, а для ПЭВМ записать формулу нахождения $R(T)$ в строке 180 и ввести параметры этой функции (для ПМК — в ячейки памяти 8...В, для ПЭВМ — в строку 20). В остальном же следует пользоваться разделом 4.5.

Другой способ — продифференцировать $R(T)$ по T и приравнять производную нулю. В данном примере возникает трансцендентное уравнение, которое надо решать, пользуясь разделом 4.4.

Ответ. $\Delta T=50$ К при $T_0=300$ К; $R_{min}=308$ Ом при $T=550$ К. Его можно уточнить, взяв меньшее ΔT.

2.10.4. При параллельном соединении

$$R(T)=\frac{R_мR_п}{R_м+R_п}=\frac{R_0\alpha TR_0'\exp[W/(kT)]}{R_0\alpha T+R_0'\exp[W/(kT)]}\equiv F(x). \qquad (5.71)$$

Возможны те же два способа решения.

Подпрограмма для вычисления $R(T)$:

50 ПС ИП8×ИП9×ПД . . . . $R_0\alpha T$
56 ИПВ ИПС÷Fe^{x}ИПА×П7 . . . . . . $R_0'\exp[W/(kT)]$
63 ИПД+ИПД÷ИП7÷F1/x В/0 . . . . . $R(T)$

Ответ. $\Delta T=10$ К при $T_0=300$ К; $R_{max}=154$ Ом при $T=340$ К.

2.10.5. Выбрав произвольно направления всех токов вверх, получим из первого закона Кирхгофа:

$$i_1+i_2+i_3=0. \qquad (5.72)$$

Выбрав два контура ($\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, R) и ($\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_3$) и обходя их по часовой стрелке, из второго закона Кирхгофа имеем

$$i_1r_1-i_2r_2-i_2R=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2;\ i_1r_1-i_3r_3=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3. \qquad (5.73)$$

Это ведет к системе трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} i_1+i_2+i_3=0; \\ i_1r_1-i_2(r_2+R)=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2; \\ i_1r_1-i_3r_3=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_3, \end{cases} \qquad (5.74)$$

типа системы (4.2.1) в разделе 4.2. Только под x, y, z надо понимать i_1, i_2, i_3, а коэффициенты будут (в виде матрицы) такими:

1	1	1	0
0,013	−5,387	0	0,015
0,013	0	−0,021	−0,016

Эту систему надо решать по одной из программ раздела 4.2. Например, введя обозначения: $i_1 \equiv X$; $i_2 \equiv Y$; $i_3 \equiv Z$; $r_1 \equiv R1$; $r_2 \equiv R2$; $r_3 \equiv R3$; $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 \equiv B$; $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 \equiv C$, — можно воспользоваться программой:

```
1 PRINT "RAZCEP"
10 PRINT "РЕШ.СИСТ.3 ЛИН.УР.С 3 НЕИЗ."
20 A1=1
21 A2=1
22 A3=1
23 A=0
30 B1=.013
31 B2=-5.387
32 B3=0
33 B=.015
40 C1=.013
41 C2=0
42 C3=-.021
43 C=-.016
50 D=A1*B2*C3+A2*B3*C1+A3*B1*C2-A3*B2*C1-A1*B3*C2-A2*B1*C3
60 D1=A*B2*C3+A2*B3*C+A3*B*C2-A3*B2*C-A*B3*C2-A2*B*C3
70 D2=A1*B*C3+A*B3*C1+A3*B1*C-A3*B*C1-A1*B3*C-A*B1*C3
80 D3=A1*B2*C+A2*B*C1+A*B1*C2-A*B2*C1-A1*B*C2-A2*B1*C
165 PRINT TAB(5)"R="-B2-.017
170 PRINT "X="D1/D
180 PRINT "Y="D2/D
190 PRINT "Z="D3/D
195 PRINT "U="2.015-D1/D*.013
200 END
```

Ответ. $i_1 = -0{,}468$; $i_2 = -0{,}004$; $i_3 = 0{,}472$ А. Напряжение на клеммах работающего источника тока из закона Ома для полной цепи равно: $U = \mathscr{E} - ir$. В нашем случае $U = \mathscr{E}_1 - i_1 r_2 = \mathscr{E}_3 - i_3 r_3 = 2{,}021$ В.

2.10.6. Задачу лучше решать на ПЭВМ по программе SYSTUR из раздела 4.2. В отличие от предыдущей задачи коэффициент будет переменным. Поэтому в программе SYSTUR несколько строк заменим:

```
1 PRINT "RAZCE2"
20 A1=1
21 A2=1
22 A3=1
23 A=0
28 FOR R=3 TO 5.7 STEP .3
30 B1=.013
31 B2=-.017-R
32 B3=0
33 B=.015
40 C1=.013
41 C2=0
42 C3=-.021
43 C=-.016
50 D=A1*B2*C3+A2*B3*C1+A3*B1*C2-A3*B2*C1-A1*B3*C2-A2*B1*C3
60 D1=A*B2*C3+A2*B3*C+A3*B*C2-A3*B2*C-A*B3*C2-A2*B*C3
70 D2=A1*B*C3+A*B3*C1+A3*B1*C-A3*B*C1-A1*B3*C-A*B1*C3
80 D3=A1*B2*C+A2*B*C1+A*B1*C2-A*B2*C1-A1*B*C2-A2*B1*C
```

```
165 PRINT TAB(5)"R="-B2-.017
170 PRINT "X="D1/D;"Y="D2/D;"Z="D3/D;"U="2.015-D1/D*.013
197 NEXT R
200 END
```

Протокол диалога:

```
     R= 3
X=-.4662765 Y=-6.980973E-03 Z= .4732575 U= 2.021062
     R= 3.3
X=-.4666655 Y=-6.351117E-03 Z= .4730166 U= 2.021067
     R= 3.6
X=-.4669902 Y=-5.825511E-03 Z= .4728157 U= 2.021071
     R= 3.9
X=-.4672651 Y=-5.380252E-03 Z= .4726453 U= 2.021075
     R= 4.2
X=-.4675011 Y=-4.998225E-03 Z= .4724993 U= 2.021078
     R= 4.5
X=-.4677058 Y=-4.666853E-03 Z= .4723727 U= 2.02108
     R= 4.8
X=-.467885 Y=-4.376688E-03 Z= .4722616 U= 2.021083
     R= 5.1
X=-.4680432 Y=-4.120492E-03 Z= .4721637 U= 2.021085
     R= 5.400001
X=-.468184 Y=-3.892632E-03 Z= .4720766 U= 2.021086
```

2.10.7. Эта задача на решение трансцендентного уравнения. Поскольку в правой части уравнения — резко растущая функция (кривая *1* на рис. 104), а слева — постоянная величина (линия *2*), корень T следует искать от 0 в сторону положительных значений T. Для уточнения корня воспользуемся одной из программ раздела 4.4. Но сначала распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	. . .	7	. . .	А
Сначала Потом	$j_н$	ΔT	A	B	k		— $F(a)$		$a\equiv T_0$ T

Для ПМК подпрограмма вычисления $F(T)=j_н-BT^2\exp[-A/(kT)]$ будет:

50 ИП2 ИП4 ÷ ИПА ÷ /—/ Fe^x
57 ИПА Fx^2 × ИП3 ×
62 ИП0 ↔ — В/0

Ответ. $T=1\,608$ К.

2.11.1. Выпишем соотношения, очевидные из рисунка 105:

$$\begin{cases} R=r\cos\beta+a\cos\varphi;\ \cos\beta=\sin\alpha=(R-a\cos\varphi)/r; \\ r^2=R^2+a^2-2Ra\cos\varphi;\ dl=Rd\varphi. \end{cases} \tag{5.75}$$

Подставим r и $\sin\alpha$ в закон Био — Савара — Лапласа:

$$dH=\frac{iRd\varphi}{4\pi r^2}\cdot\frac{R-a\cos\varphi}{r}=\frac{iR}{4\pi}\cdot\frac{R-a\cos\varphi}{(R^2+a^2-2Ra\cos\varphi)^{3/2}}\,d\varphi. \tag{5.76}$$

Все слагаемые $d\vec{H}$ имеют одно направление в точке A. Поэтому

$$H=\frac{iR}{2\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\frac{R-a\cos\varphi}{(R^2+a^2-2Ra\cos\varphi)^{3/2}}\equiv\frac{iR}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}y(\varphi)\,d\varphi. \tag{5.77}$$

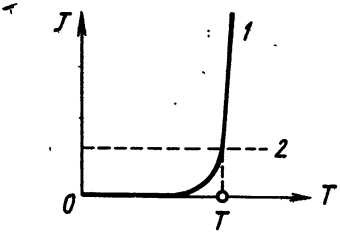


Рис. 104

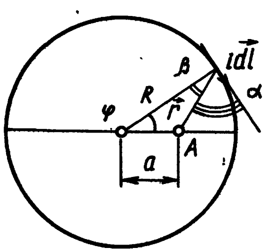


Рис. 105

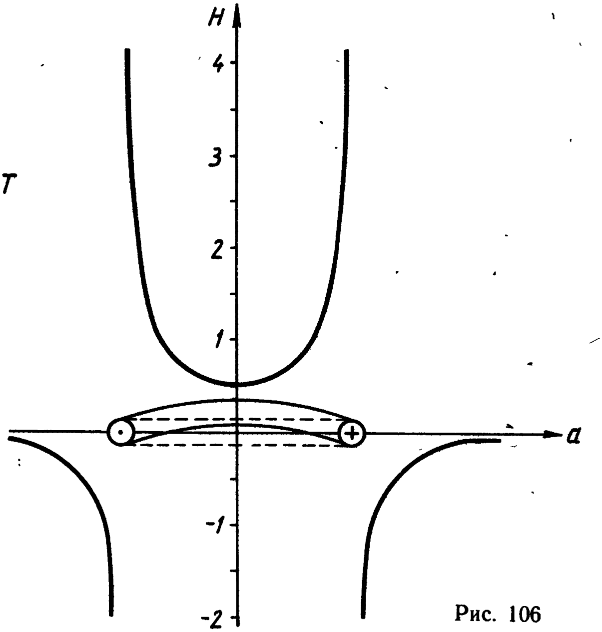


Рис. 106

Вычислим интеграл методом трапеций (см. раздел 4.3), для чего $y(\varphi)$ будем вычислять для каждого φ по подпрограмме, предварительно распорядившись памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	А	Д
Сначала Потом	—	φ_1	φ_2	$\Delta\varphi$	i	R	a	— y_1	0 Σ

Подпрограмма:

50 ИП5 Fx^2 ИП6 Fx^2+П7 . . . . (R^2+a^2)
56 ИП1 F cos П8 . . . . $\cos\varphi$
59 ИП6×ИП5×2×/—/ ИП7+П9 . . . $(R^2+a^2-2Ra\cos\varphi)$
69 Fx^2 ИП9×F$\sqrt{\ }$ ПВ . . . . $(\text{-»-})^{3/2}$
74 ИП8 ИП6×ИП5↔— . . . . числитель
80 ИПВ ÷ В/0 . . . . дробь, $y(\varphi)$

Программа:

00 ИП1 ПП $\boxed{50}$ ПА . . . . y_1

04 ИП2 ПП $\boxed{50}$ . . . . y_n

07 ИПА+2÷ПД . . . . $(y_1+y_2)/2$
12 ИП1 ИП3+П1 . . . . наращивание φ

16 ИП2 — Fx$\geqslant$0 $\boxed{32}$ . . . . условие окончания

20 ИПД ИП3$\times$ИП4$\times$ИП5$\times$2$\div$Fπ$\div$С/П . . Н

32 ИП1 ПП $\boxed{50}$ ИПД+ПД БП $\boxed{12}$

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ БП 50 F ПРГ; ввод подпрограммы; F АВТ; ввод i, R, a, φ_2, $\Delta\varphi$; 0 П1, ПД В/0 С/П — — —; — — — H; замена a, 0 П1 ПД В/0 С/П — — — и т. д.

Ответ для $i=1$; $R=1$; $\Delta\varphi=0{,}2$ рад дан на рисунке 106. Только рисунок 21, *в* будет правильным.

Для ПЭВМ на Бейсике при использовании обозначений: $i \equiv$J; $\varphi \equiv$F; $\Delta\varphi \equiv$F5; $a \equiv$A **программа:**

```
1 PRINT "VITOK"
2 PRINT "МАГН.ПОЛЕ ВИТКА"
5 SCREEN 2
10 J=1
20 R=1
30 F5=.2
31 LINE (0,130)-(640,130),5
32 LINE (320,0)-(320,260),5
35 FOR A=-2.4 TO 2.4 STEP .031
40 F=0
50 GOSUB 500
60 Y1=Y
70 F=PI
80 GOSUB 500
90 Y2=Y
100 S=(Y1+Y2)/2
110 FOR F=F5 TO PI-F5 STEP F5
120 GOSUB 500
130 S=S+Y
140 NEXT F
150 H=J*R*S*F5/(2*PI)
160 PSET (A*100+320,H*20+130)
165 NEXT A
170 GOTO 170
500 Y=(R-A*COS(F))/SQR((R^2+A^2-2*R*A*COS(F))^3)
510 RETURN
```

Шаг изменения a в строке 35 будем брать таким, чтобы в знаменателе выражения (5.77) не попадать на нули.

2.11.2. Из формулы 2.11.2 следует

$$\Phi = B\,S_з = \frac{i\,N\,\mu_0}{l_з/S_з + l_c/(\mu_c S_c)}, \qquad (5.78)$$

где $S_з$, $l_з$ — площадь поперечного сечения и длина зазора; S_c, l_c, μ_c — площадь, длина и магнитная проницаемость сердечника. Задача сводится к многократному вычислению B из этой формулы.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сначала Потом	—	i	N	$l_з$	$S_з$	l_c	S_c	μ_c	$\Delta l_з$	μ_0

Программа для ПМК:

00 ИП3 ИП4÷ПА . . . . $S_з/l_з$
04 ИП5 ИП6÷ИП7÷ИПА+ПВ . . . знаменатель
12 ИП1 ИП2×ИПВ÷ИП4÷ИП9×С/П . . B
22 ИП3 ИП8+П3 БП $\boxed{00}$ . . . . . изменение $l_з$ и возвращение к началу

Программа для ПЭВМ:

```
1 PRINT "ELMAGN"
2 PRINT "ЭЛЕКТРОМАГНИТ"
10 S1=1E-2
20 L1=.83
30 S2=1E-3
40 I=.2
50 M=1200
55 M0=1.26E-6
60 N=1E3
70 FOR L2=0 TO 4E-3 STEP1E-3
80 C=I*N*M0
90 Z=L2/S2+L1/M/S1
100 F=C/Z
110 B=F/S2
120 PRINT L2,B
130 NEXT L2
140 END
```

Ответ.

$l_з$, мм	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	2	3	4
B, Тл	3,6	1,49	0,94	0,68	0,53	0,44	0,24	0,12	0,08	0,06

2.11.3. Выразим D и t через N. Обозначим число витков в одном слое через n, число слоев — через m, диаметр провода — через d. Тогда $N=nm$; $l=dn$; $t=dm=dN/n=Nd^2/l$; $D=\delta+t$. Для определения N надо решить уравнение

$$F(x)=F(N)=L(3D+9l+10t)-\mu_0 D^2 N^2=0. \qquad (5.79)$$

Если подставить выражения для t и D через N, то относительно N получим уравнение 4-й степени. Решать его надо методами, предложенными в разделе 4.4. Для нахождения $F(N)$ на ПМК распорядимся сначала памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
Сначала Потом	$\mu\mu_0$	ΔN	δ	l	d	— t	— D	— $F(a)$	—	—	a N	L

Подпрограмма:

50 ИПА Fx² ИПА×ИП3÷П5 . . . . t
57 ИП2+П6 . . . . D
60 ИПА×Fx² ИП0×П8 . . . . второй член
66 ИП6 3×ИП3 9×+ИП5 1 0× + ИПВ× . . первый член
80 ИП8—В/0 . . . . $F(x)$

Взяв для начала $N_0=a=0$; $\Delta N=100$ (в СИ: $\mu_0=1{,}26\cdot10^{-6}$; $\delta=8\cdot10^{-3}$; $l=3\cdot10^{-2}$; $d=2\cdot10^{-4}$; $L=10^{-3}$), получим по одной из программ раздела 4.4 $N=1600$. Результат можно уточнить, взяв $a=1500$; $\Delta N=10$; $N=1540$. Дальнейшее уточнение бессмысленно, так как формула приближенная, а данные показаны с небольшой точностью. Величину t можно извлечь из ЯП5: $t\approx2$ мм, а D — из ЯП6: $D\approx1$ см. Итак, надо намотать $m=N/n=Nd/l=\frac{1540\cdot2\cdot10^{-4}}{3\cdot10^{-2}}\approx10$ слоев, конечно, при условии плотной и аккуратной намотки. Использование ПЭВМ излишне.

2.11.4. На частицу действует сила Лоренца: $\vec{F}=q[\vec{v},\vec{B}]$. Так как эта сила всегда перпендикулярна скорости, следовательно, ускорение будет только нормальным; скорость не будет меняться по величине, но изменится по направлению. Траектория — окружность, радиус которой можно найти из уравнения движения: $mv^2/r=qvB$. Отсюда или из $m\omega^2r=qvB=q\omega rB$ следует $\omega=qB/m$; $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi m}{qB}$, так что частота ω и период T не зависят от скорости v и от радиуса траектории. Радиус $r=\frac{mv}{qB}$ пропорционален скорости частицы, так что ответ легко находится и без применения ЭВМ. (Однако, если условия задачи будут чуть усложнены, например введено трение, аналитическое решение может стать сразу невозможным. Тогда придется решать дифференциальные уравнения. Общий подход к решению дифференциальных уравнений движения дан в разделах 2.4, 2.5 и 4.7.) При наличии графического дисплея ЭВМ может смоделировать постепенное перемещение частицы для разных значений v. Введем обозначения: $m\equiv$M; $q\equiv$Q; $\omega\equiv$W; $T\equiv$T9. Далее возьмем в качестве $\Delta T\equiv$T1 какую-то часть периода, например $T1=T9/300$, и будем последовательно, наращивая $\varphi=\omega t$, вычислять координаты y и z (рис. 107): $y=r\sin\varphi$; $z=r(1-\cos\varphi)$. Для того чтобы траектории умещались на экране, введем подходящий множитель K так, чтобы экранные координаты X8 и Y8 не выходили за пределы экрана, а траектории начи-

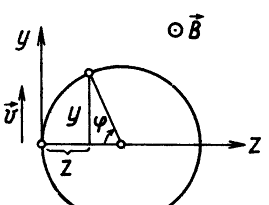


Рис. 107

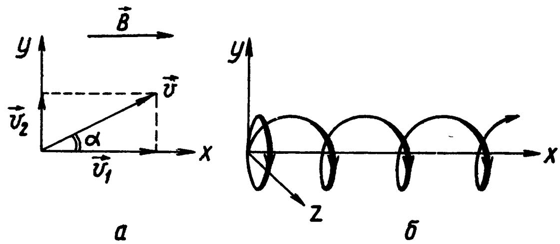


Рис. 108

нались из точки с экранными координатами (100, 130). (При вертикальных размерах для комплекса УК-НЦ необходимо вводить множитель 0,64.) Тогда **программа** для ПЭВМ следующая:

```
1 PRINT "TRMAG1"
10 PRINT "ДВИЖ.ЧАСТ.В МАГН.ПОЛЕ ПРИ V ПЕРП.В"
20 SCREEN 2
30 M=9E-31
40 Q=1.6E-19
50 B=.1
80 W=Q*B/M
90 T9=2*PI/W
100 K=2E5
110 FOR V=.2E7 TO 1.6E7 STEP .2E7
112 F=0
114 T=0
120 R=M*V/(Q*B)
130 T1=T9/300
140 F=F+W*T1
150 Y=R*SIN(F)
160 Z=R*(1-COS(F))
170 T=T+T1
180 X8=Z*K+100
190 Y8=Y*K*.64+130
200 PSET (X8,Y8),8
205 IF T>T9 THEN 220
210 GOTO 140
220 NEXT V
230 GOTO 230
240 END
```

2.11.5. Расширим программу к решению задачи 2.11.4 добавлением равномерного смещения по оси x: $x=x_0+v_1t$. Вместо окружности в плоскости y, z, как в предыдущей задаче, получится спираль, вытянутая вдоль оси x (рис. 108, *а, б*).

Для изображения этой трехмерной спирали на двумерном плоском экране воспользуемся приемом, описанным в разделе 3.16. Введем экранные координаты, в которых частица, имеющая координаты x, y, будет изображаться не в точках x, y, а сместится вправо по x и вниз — по y в зависимости от координаты z.

Программа:

```
10 PRINT "TRMAG2"
20 PRINT "ДВИЖ.ЧАСТ.В МАГН.ПОЛЕ ПРИ V НЕ ПЕРП.В"
30 SCREEN 2
40 M=9E-31
50 Q=1.6E-19
60 B=1
70 LINE (100,160)-(600,160),5
80 LINE (100,160)-(100,263),5
90 LINE (100,160)-(400,160-200/2.8*.64),5
100 W=Q*B/M
110 T9=2*PI/W
120 K=1E7
130 V=1E6
140 S=.2
150 FOR A=1 TO PI/2 STEP S
160 V1=V*COS(A)
170 V2=V*SIN(A)
180 F=0
190 T=0
200 X=0
210 R=M*V2/(Q*B)
```

```
220 T1=T9/200
230 F=F+W*T1
240 T=T+T1
250 Y=R*SIN(F)
260 Z=R*(1-COS(F))
270 X=X+V1*T1
280 X8=(X+Z/1.4)*K+100
290 Y8=(Y-Z/2.8)*K*.64+160
300 PSET (X8,Y8),8
310 IF X8>600 THEN 330
320 GOTO 230
330 NEXT A
340 GOTO 340
350 END
```

2.11.6. Решение не приводится.

2.12.1. Это задача на многократное вычисление по формулам при небольшом числе данных, но большом числе необходимых ответов. Будем шагами менять частоту и проводить вычисления по формулам в следующем порядке: ω, z, $\cos\varphi$, i, U_c, U_L, P (условные обозначения на Бейсике соответственно: W, Z, CF, I, UC, UL, P). Используем ПМК. Распорядимся памятью:

ЯП	2	3	4	5	6	7	8
Сначала Потом	R	L	C	U	ω $1/(\omega C)$	— ωL	— z

Программа:

00 Fπ×2×П6 . . . . ω
05 ИП3×П7 . . . . ωL
08 ИП6 ИП4×F1/x П6 . . . . $1/(\omega C)$
13 ИП7−Fx² ИП2 Fx²+F√ П8 . . . . z
21 ИП2÷F1/x С/П . . . . вывод $\cos\varphi$
25 ИП5 ИП8÷П8 С/П . . . . вывод i
30 ИП6×С/П . . . . вывод U
33 ИП8 ИП7×С/П . . . . вывод U_L
37 ИП8 Fx² ИП2×С/П . . . . вывод P

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ В/0; ввести R, L, C и U в ЯП2...ЯП5; ввести на экран (в РгХ) частоту f и пустить программу (С/П). В местах, отмеченных С/П, программа останавливается, высвечивая на индикаторе $\cos\varphi$, i, U_c и т. д. Затем надо ввести новое f на экран, нажать В/0, С/П и т. д.

Для ПЭВМ ($\varphi \equiv F$; частота меняется в пределах от $F1$ до $F2$ шагом F8):

Программа:

```
1 PRINT "REZNAP"
2 PRINT "РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ"
10 R=10
20 L=14.2E-6
30 C=1.2E-9
40 F2=2E6
50 U=20
```

```
60 F8=F2/10
70 F1=F8
80 FOR F=F1 TO F2 STEP F8
90 W=2*PI*F
100 Z=SQR(R^2+(W*L-1/W/C)^2)
110 CF=R/Z
120 I=U/Z
130 UC=I/W/C
140 UL=I*W*L
150 P=I^2*R
160 PRINT F;UC;UL;I;P;CF
170 NEXT F
180 END
```

Ответ дан на рисунке 109.

2.12.2. Находим z, L, μ, $\cos\varphi$ и R:

$$z=U/i;\ R=P/i^2;\ \cos\varphi=R/z;\ L=\sqrt{z^2-R^2}/\omega;\ \mu=Ll/(\mu_0 N^2 S). \quad (5.80)$$

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	А
Сначала Потом	l	S	μ_0	N	ω	U	i	P	— z	— R	— L

Программа:

00 ИП5 ИП6 ÷ П8 С/П . . . . z
05 ИП7 ИП6 Fx² ÷ П9 С/П . . . . R
11 ИП8 ÷ С/П . . . . $\cos\varphi$
15 ИП8 Fx² ИП9 Fx² — F√ ИП4 ÷ ПА С/П . . . L
25 ИП0 × ИП2 ÷ ИП3 Fx² ÷ ИП1 ÷ С/П . . . . μ

Ответ.

z	439	251	. . .	72,5
R	6	6	. . .	6,2
$\cos\varphi$	0,014	0,024	. . .	0,086
L	1,4	0,8	. . .	0,23
μ	1110	634	. . .	182

Величины μ и L уменьшаются в связи с насыщением железа, а R чуть увеличивается в связи с нагреванием.

Всю таблицу и графики сразу можно получить с помощью ПЭВМ.

2.12.3. Задача на простое многократное вычисление по формуле (2.12.2). Для ПМК распорядимся памятью:

ЯП	. . .	2	3	4	5	. . .	8
Сначала Потом		L	C	R_0 R	— $R^2/4L^2$		ΔR

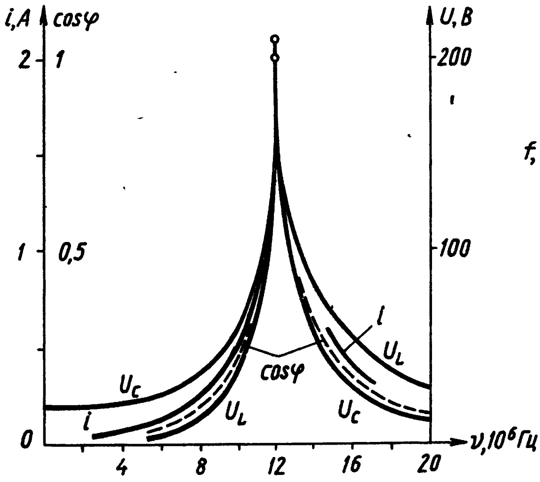


Рис. 109

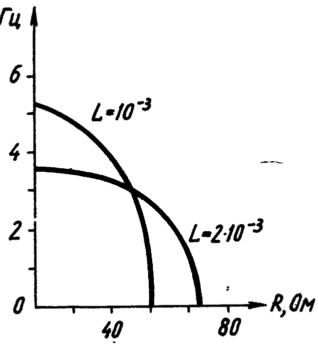


Рис. 110

Программа:

00 ИП4 ИП2÷Fx^2 4÷П5 . . . . $R^2/4L^2$

07 ИП2 ИП3×F1/x ИП5−F$\sqrt{\ }$ . . . . . $\sqrt{\ }$

14 Fπ ÷ 2 ÷ С/П . . . . вывод f

17 ИП4 ИП8 + П4 БП $\boxed{01}$ . . . . . . наращивание R

Программа для ПЭВМ на языке Бейсик:

```
1 PRINT "KOLKON"
2 PRINT "КОЛЕБ.КОНТУР"
10 C=.97E-6
20 ' SCREEN 2
30 FOR L=1E-3 TO 2E-3 STEP 1E-3
40 FOR R=0 TO 90 STEP 15
50 D=1/L/C-R*R/4/L^2
60 IF D<0 THEN 100
70 F=SQR(D)/2/PI
75 PRINT L,R,F
80 ' PSET (R*10,F/10)
90 NEXT R
100 NEXT L
110 ' GOTO 110
120 END
```

Ответ дан на рисунке 110. При больших R частота резко стремится к нулю (срыв колебаний).

2.12.4. Если бы конденсатор заряжался от источника тока с постоянным напряжением U_0 (рис. 111), то

$$\begin{cases} i=\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{U_0-U}{R}; \; C\dfrac{dU}{dt}=\dfrac{U_0-U}{R}; \\ -\dfrac{d(U_0-U)}{U_0-U}=\dfrac{1}{RC}dt; \; \ln(U_0-U)=-\dfrac{1}{RC}+\ln(\mathrm{const}); \end{cases} \qquad (5.81)$$

$$U_0-U=U_0e^{-t/RC}; \; U=U_0(1-e^{-t/RC}). \qquad (5.82)$$

Это соответствует кривой *1* на рисунке 112. В нашем случае (см. рис. 24) питающее напряжение непостоянно:

$$U_{\sim} = U_0 \cos \omega t. \qquad (5.83)$$

Когда $U_{\sim}$ больше напряжения на конденсаторе U, то

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{U_{\sim} - U}{R} = \frac{U_0 \cos \omega t - U}{R} = C\,\frac{dU}{dt}. \qquad (5.84)$$

Если $U_{\sim} \leqslant U$ или $U_{\sim} < 0$, ток $i = 0$. Так что эффективны только те напряжения, которые на нижнем графике рисунка 112 отмечены жирной линией, а напряжение на конденсаторе поднимается по кривой *2*.

Уравнение (5.84) — более сложное дифференциальное уравнение, чем уравнение (5.82). Будем решать его, пользуясь разделом 4.6.

Итак,

$$\frac{dU}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{RC}(U_0 \cos \omega t - U) & \text{при } U_0 \cos \omega t > U, \\ 0 & \text{при } U_0 \cos \omega t \leqslant U \end{cases} \qquad (5.85)$$

или

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + f(t_n,\ U_n)\,\Delta t & \text{при } U_0 \cos \omega t > U, \\ U_{n+1} = U_n & \text{при } U_0 \cos \omega t \leqslant U. \end{cases} \qquad (5.86)$$

Распорядимся памятью для ПМК:

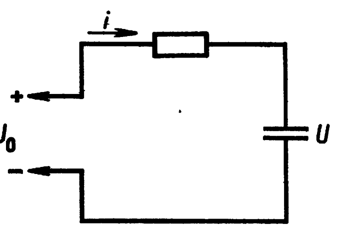


Рис. 111

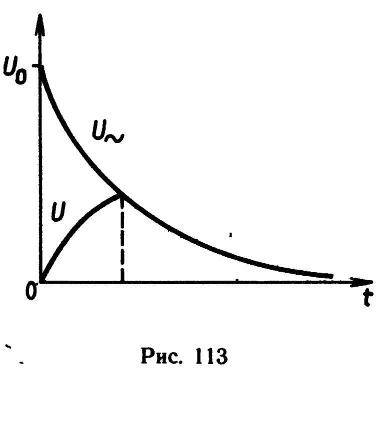


Рис. 113

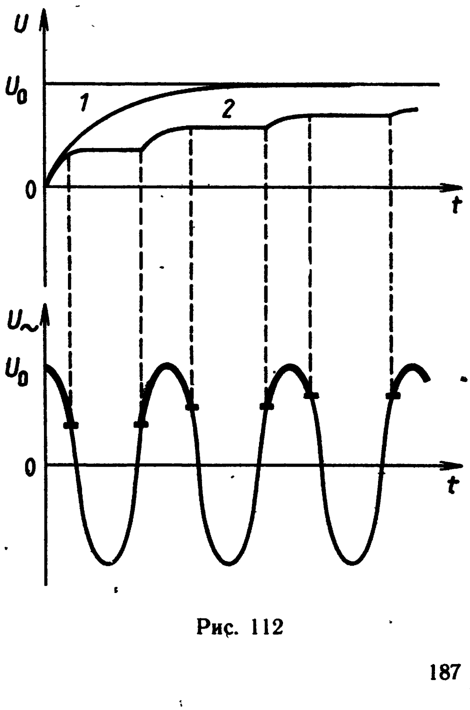


Рис. 112

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
Сначала	R	C	U	ω	0	Δt	0	—	—	—	$U_{кон}$
Потом					t		U		$\frac{1}{RC}$	$f(t, U)$	

Программа:

00 $С_х$ П4 П6 . . . . очистка ячеек

03 ИП0 ИП1 $\times$ F1/X П8 . . . . . $(RC)^{-1}$

08 ИП3 ИП4 $\times$ Fcos ИП2 $\times$ . . . $U_0 \cos \omega t$

14 ИП6 — ИП8 $\times$ П9 . . . . . . $f(t, U)$

19 Fx<0 $\boxed{23}$ $С_х$ П9 ИП9 . . . . . условие: $i=0$

24 ИП5 $\times$ ИП6 + П6 . . . . . . U_{n+1} по (5.86)

29 ИПА —Fx⩽0 $\boxed{35}$ ИП4 С/П. . $U-U_{кон} \geqslant 0$? вывод t

35 ИП4 ИП5 + П4 БП $\boxed{08}$ . . . наращивание времени и повторение

Инструкция. Переключатель «Р—Г» — в положение «Р»; F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод $R=5\cdot 10^4$; $C=1\cdot 10^{-6}$; $U_0=220\cdot\sqrt{2}$; $\omega=314$; Δt ($\ll$ периода !, например $5\cdot 10^{-3}$ с); $U_{кон}$; В/0 С/П.

Ответ. Время равно 0,18 с. Если бы зарядка производилась от источника постоянного напряжения, т. е. до 200 В, то согласно формулам (5.82) конденсатор зарядился бы за время, равное 0,05 с.

Для решения этой же задачи на ПЭВМ, введя обозначения: $U_0 \equiv$ U0; $\omega \equiv$ W; $t \equiv$ T; $\Delta t \equiv$ T3; $U_{кон} \equiv$ U9,— можно использовать **программу**:

```
1 PRINT "ZARKON"
10 PRINT "ЗАРЯДКА КОНД. ОТ ВЫПР."
20 R=5E4
30 C=1E-6
40 U0=220*SQR(2)
50 W=2*PI*50
60 U9=200
70 U=0
80 T=0
90 T3=1E-3
100 F=(U0*COS(W*T)-U)/(R*C)
110 IF F>0 THEN 130
120 F=0
130 U=U+F*T3
```

```
140 IF U<U9 THEN 170
150 PRINT "T="T
160 END
170 T=T+T3
180 GOTO 100
```

2.12.5. Решение аналогично решению предыдущей задачи, только формула (5.83) заменяется формулой $U_{\sim}=U_0e^{-\beta t}$ и окончанием задачи следует считать момент, когда $U=U_{\sim}$ (рис. 113). Дифференциальное уравнение и приближенная формула (см. раздел 4.6):

$$i=\frac{dQ}{dt}=C\frac{dU}{dt}=\frac{U_{\sim}-U}{R};\ U_{n+1}=U_n+\frac{U_0e^{-\beta t}-U}{RC}\Delta t. \qquad (5.87)$$

Для ПМК распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сначала Потом	R	C	U_0	β	0 t	Δt	0 U	—	— RC	— $f(t_n,\ U_n)$

Программа:

00 C_x П4 П6 . . . . очистка ячеек
03 ИП0 ИП1 × П8 . . . . RC
07 ИП3 ИП4 × /—/ Fe^x ИП2 × . . $U_0e^{-\beta t}$
14 ИП6 — ИП8 ÷ П9 . . . . $f(t_n,\ U_n)$
19 Fx<0 $\boxed{23}$ ИП4 С/П . . . . . . условие окончания
23 ИП9 ИП5 × ИП6 + П6 . . . . наращивание U
29 ИП4 ИП5 + П4 БП $\boxed{07}$ . . . . наращивание t и повторение

Ответ. $t=0{,}28$ при $\Delta t=10^{-2}$ с. Такой результат калькулятор выдает через 5 мин работы.

2.12.6. Примем максимальное значение y за 1. Тогда исследуемую функцию внутри одного периода можно записать так:

$$y=1*\mathrm{i/N}.$$

Для ПЭВМ можно воспользоваться таблицей 4.8.2, но следует соответствующим образом заменить содержание строки, где вводится функция y.

Ответ (спектр) приведен на рисунке 114.

Таким образом, мы видим, что благодаря наличию резких изломов на кривой (см. рис. 25, *а*) в спектре присутствуют очень высокие гармоники.

2.12.7. Примем, что $y(t)$ меняется от -1 до $+1$ (рис. 115). Запишем уравнение пунктирной линии. Это прямая с угловым коэффициентом $2/(T/2)=4/T$, где T — период: $y'=(4/T)\,t$. Поскольку $t=(i/N)\,T$, то $y'=4i/N$. Прямая $y(t)$ проходит ниже на 1: $y=(4i/N)-1$. Так, для i — от 0 до $N/2$, затем $y=3-4i/N$. Ис-

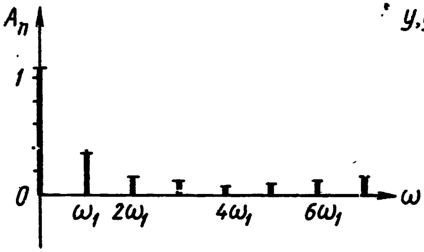


Рис. 114

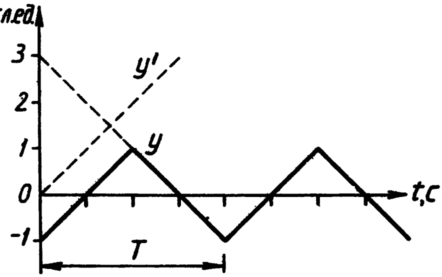


Рис. 115

пользуем ту же программу, что и в предыдущей задаче, но сделаем замену и добавления:

```
100 IF I>=N/2 THEN 106
102 Y=4*I/N-1
104 GOTO 110
106 Y=3-4*I/N
```

Ответ:

НОМЕР МАХ ГАРМОНИКИ N1=8
ЧИСЛО УЧАСТКОВ N=12

ГАРМ. N= .000
AN=2.000E—12 BN= .000 ANN=2.000E—12 ФИН= .000
ГАРМ. N=1.000
AN=—8.293E—01 BN=1.263E—11 ANN=8.293E—01 ФИН= =—1.523E—11
ГАРМ. N=2.000
AN=2.000E—11 BN=2.590E—11 ANN=3.272E—11 ФИН= =9.132E—01
ГАРМ. N=3.000
AN=—1.111E—01 BN=3.193E—11 ANN=1.111E—01 ФИН= =—2.874E—10
ГАРМ. N=4.000
AN=1.900E—11 BN=9.800E—12 ANN=2.138E—11 ФИН= =4.762E—01
ГАРМ. N=5.000
AN=—5.954E—02 BN=2.727E—11 ANN=5.954E—02 ФИН= =—4.579E—10
ГАРМ. N=6.000
AN=—1.000E—12 BN=2.333E—11 ANN=2.335E—11 ФИН= =—1.528
ГАРМ. N=7.000
AN=—5.954E—02 BN=1.827E—11 ANN=5.954E—02 ФИН= =—3.068E—10
ГАРМ. N=8.000
AN=—2.300E—11 BN=2.180E—11 ANN=3.169E—11 ФИН= =—7.586E—01

Мы видим, что нулевая гармоника равна нулю (a_n и A_n получились неточно равными нулю из-за погрешности метода). Это значит, что постоянной составляющей нет (кривая симметрична относительно оси t). Равны также нулю и все четные гармоники.

(Нарисуйте самостоятельно спектр заданной функции.)

Полезно разложить в спектр такую же ломаную линию, но приподнятую над осью t, а также полезно рассмотреть случай, когда при $t=0$ функция не равна 0, а принимает максимальное значение.

2.12.8. Как и предыдущие, эта задача решается по одной из программ раздела 4.8. Функция $y_i=1$ от $t=0$ до $t=T/4$ (4 — скважность), затем $y_i=0$. Поэтому подпрограмма для нахождения y_i для ПМК будет очень простой:

70 ИП1 4÷	$N/4$
73 ИП3 — Fx<0 $\boxed{79}$	$N/4-i<0$?
77 БП $\boxed{25}$	если «Да», то конец суммирования
79 1 В/0	если «Нет», то $y_i=1$

Ответ:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	0,5	0,29	−0,06	−0,13	0	0,03	−0,06	−0,07	0	−0,006
b_n	0	0,35	0,3	0,07	0	0,09	−0,09	0,007	0	0,06
A_n	0,5	0,45	0,31	0,15	0	0,09	0,11	0,07	0	0,06

Спектр приведен на рисунке 116. Отметим, что если скважность обозначить ξ, то ξ-, 2ξ-, 3ξ-я и т. д. составляющие спектра равны нулю. Это характерно для прямоугольных импульсов.

2.12.9. Функция имеет вид

$$y=\begin{cases}\sin 2\pi(t/T)=\sin 2\pi(i/N) & (t<T/2,\ i<N/2);\\ 0 & (t\geqslant T/2,\ i\geqslant N/2).\end{cases} \tag{5.88}$$

Используем подпрограмму для ПМК:

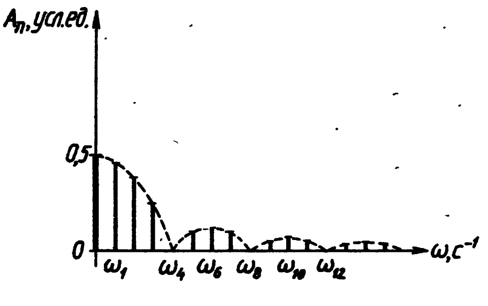


Рис. 116

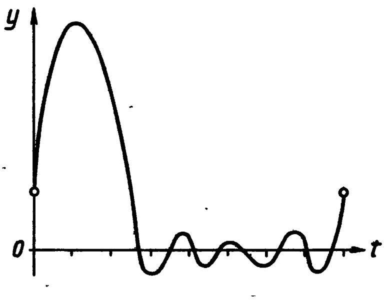


Рис. 117

70 ИП1 2 $\div$ ИП3 $-$ Fx<0 $\boxed{79}$ . . . $i<N/2$?
77 C_x В/0 . . . . $y=0$, если «Да»
79 2 Fπ $\times$ ИП1 $\div$ ИП3 $\times$ F sin В/0 $y=\sin 2\pi i/N$, если «Нет»

Для ПЭВМ надо ввести строки

```
110 IF I>=N/2 THEN Y=0 ELSE 112
111 GOTO 120
112 Y=SIN(2*PI*I/N)
```

Ответ при $N=20$:

n	0	1	2	3	4
a_n b_n A_n φ_n	0,63 0 0,63 0	0 0,5 0,5 1,57	$-0{,}22$ 0 0,22 0	. . . .	. . . .

2.12.10. На ПМК вычисления будут громоздкими в связи с тем, что необходимо ввести большое количество чисел. Задачу лучше решать на ПЭВМ. Введем в программу для ПЭВМ, приведенную в таблице 4.8.2, строки:

```
100 READ Y
102 DATA 0, .85, 1, .75, .5, .75, 1, .85, 0
104 DATA —.85, —1, —.75, —.5, —.75, —1, —.85, 0
195 RESTORE
```

Здесь в блок DATA записаны 17 значений функции y, взятых из графика. Строкой 100 из этого блока по очереди будут браться y_i. Строка 195 нужна для установки счетчика DATA на нуль. Ответ.

n	0	1	2	3	4	5
a_n b_n	≈ 0 ≈ 0	≈ 1 ≈ 0	≈ 0 ≈ 0	$\approx 0{,}5$ ≈ 0	≈ 0 ≈ 0	≈ 0 ≈ 0

Из этого ответа следует, что кривая на рисунке 26 состоит всего из двух синусоид с частотами: $\omega_1=2\pi/T=628$ с$^{-1}$ и $\omega_3=3\omega_1=1\,884$ с$^{-1}$ ($\nu_1=100$ и $\nu_3=300$ Гц) — и амплитудами 1 и 0,5.

2.12.11. Следует пользоваться программами синтеза, приведенными в разделе 4.8. Ответ тем будет ближе к рисунку 25, *г*, чем больше будет взято гармоник. Поэтому лучше решать задачу на ПЭВМ.

2.12.12. Если взять только 4 гармоники, то получается сигнал, изображенный на рисунке 117.

2.13.1. Из формулы (2.13.1) следует

$$\vartheta=2\arcsin\left(n\sin\frac{A}{2}\right)-A. \qquad (5.89)$$

Распорядимся памятью ПМК:

ЯП	0	1	2	3
Сначала Потом	A_0 A	n	ΔA	Δn

Угол A для призм может меняться от очень малых значений (клин) до 60° и более. Возьмем $A_0=0$ и будем увеличивать его ступенями на $\Delta A=10°$. Для решения первой части задачи составляем для ПМК программу (переключатель «Р—Г» — в положение «Г»):

00 ИП0 2 ÷ F sin ИП1 ×
06 F arcsin 2 × ИП0 — С/П
12 ИП0 ИП2 + П0 БП $\boxed{00}$

Для ПЭВМ **программа** при обозначениях: $\Delta A \equiv A1$; $n \equiv N$; $\Delta n \equiv N1$; $\vartheta \equiv T$):

```
1 PRINT "UBOTKL"
2 PRINT "УГОЛ ОТКЛ. В ПРИЗМЕ"
10 N=1.5
20 SCREEN 2
30 LINE (0,260)-(0,0),5
40 LINE -(630,0),5
50 FOR A=0 TO 60 STEP 1
60 AP=A*PI/180
70 Z=N*SIN(AP/2)
75 P=1-Z^2
76 IF P<0 THEN 120
80 TP=2*ATN(Z/SQR(P))-AP
90 T=TP*180/PI
100 PSET (A*5,T*5)
110 NEXT A
120 GOTO 120
```

Если отсутствует встроенная функция arcsin, но есть arctg, то используется соотношение

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(см. строки 75, 76 и 80).

Ответ первой части задачи дан на рисунке 118, *а*. Для получения ответа на ПМК на второй вопрос заложим в ЯП0 $A=60°$, в ЯП1 — $n-1$ и заменим строку программы:

12 ИП1 ИП3 + П1 БП $\boxed{00}$

А на ПЭВМ образуем цикл не по A, а по N.

Ответ дан на рисунке 118, *б*. Последнее значение угла равно 120°; затем следует сообщение об ошибке, что можно понять, глядя на рисунок 27 (для получения $\vartheta=120°$ лучи должны скользить уже по поверхности призмы, т. е. при $n \geqslant 2{,}0$ такой ход лучей

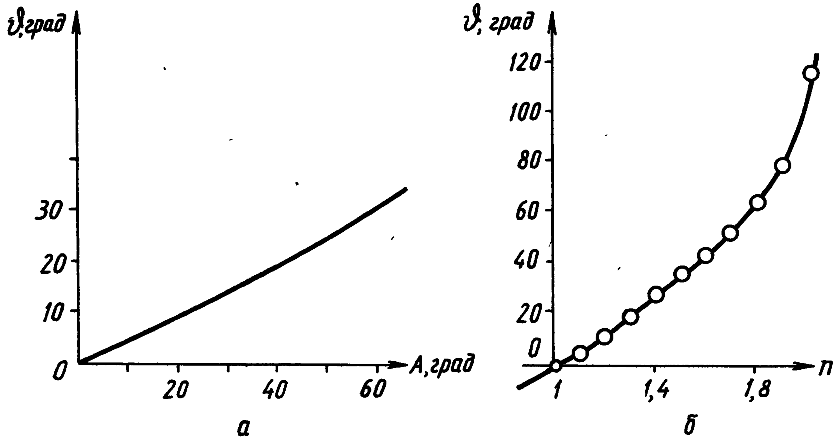


Рис. 118

невозможен). А вот случай $n<1$ имеет смысл (окружающая среда оптически плотнее, чем тело призмы).

2.13.2. Воспользуемся формулой (5.89).

Распорядимся памятью для ПМК, всякий раз вводя новое n, взятое из рисунка 28:

ЯП	0	1
Сначала Потом	A	n

Программа:

00 ИП02 $\div$ F sin ИП1 $\times$ F arcsin 2 $\times$ ИП0 — С/П

На ПЭВМ для составления таблицы $n(\lambda)$ при обозначениях: $\lambda \equiv L$; $n \equiv N$; $\vartheta \equiv T$ — введем **программу:**

```
1 PRINT "DISP"
2 PRINT "ДИСПЕРСИЯ ПРИЗМЫ"
10 DIM A*(7)
20 FOR I=1 TO 7
30 READ A*(I)
40 NEXT I
50 A=60*PI/180
60 FOR L=420 TO 700 STEP 10
70 IF L<760 AND L>=620 THEN 80 ELSE 90
80 PRINT "L=";L;"HM";A*(1)
90 IF L<620 AND L>=590 THEN 100 ELSE 110
100 PRINT "L=";L;"HM";A*(2)
110 IF L<590 AND L>=575 THEN 120 ELSE 130
120 PRINT "L=";L;"HM";A*(3)
130 IF L<575 AND L>=510 THEN 140 ELSE 150
140 PRINT "L=";L;"HM";A*(4)
150 IF L<510 AND L>=480 THEN 160 ELSE 170
160 PRINT "L=";L;"HM";A*(5)
170 IF L<480 AND L>=450 THEN 180 ELSE 190
180 PRINT "L=";L;"HM";A*(6)
190 IF L<450 AND L>=390 THEN 200 ELSE 210
```

```
200 PRINT "L=";L;"HM";A*(7)
210 INPUT "N=";N
220 Z=N*SIN(A/2)
230 T=2*ATN(Z/SQR(1-Z^2))-A
240 PRINT "T=";T*180/PI
250 NEXT L
260 DATA "  (КРАСН.)"
270 DATA "  (ОРАНЖ.)"
280 DATA "  (ЖЕЛТЫЙ)"
290 DATA "  (ЗЕЛЕН.)"
300 DATA "  (ГОЛУБ.)"
310 DATA "  (СИНИЙ )"
320 DATA "  (ФИОЛЕТ.)"
330 END
```

Но можно сразу ввести все необходимые значения в блок DATA, а также добиться, чтобы машина вычертила график $\vartheta(\lambda)$.

Ответ дан на рисунке 119.

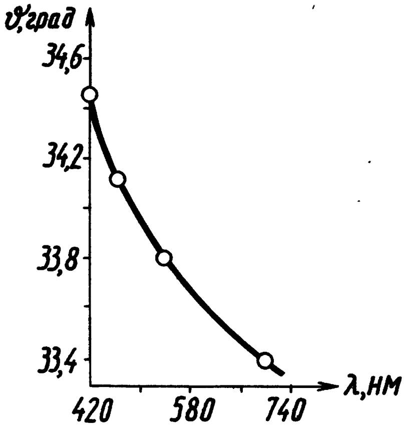


Рис. 119

2.13.3. Эта задача сложна для решения аналитическим путем. Можно только написать соотношения для перехода от слоя к слою и найти Δl (рис. 120). Переход же от Δl к l приводит к сложному интегралу. Воспользуемся тем, что ЭВМ может проделать большое число вычислений Δl для каждого слоя и все время может наращивать l_n. Так как показатель преломления убывает с высотой, то луч при переходе в следующий слой отклоняется больше от перпендикуляра к границе раздела (рис. 120):

$$\alpha_0=\pi/2-u; \tag{5.90}$$

$$\sin\alpha_0=\cos u; \tag{5.91}$$

$$\sin\alpha_{M+1}=N_M\sin\alpha_M/N_{M+1}; \tag{5.92}$$

$$\Delta l=\Delta z\,\mathrm{tg}\,\alpha_M=\Delta z\sin\alpha_M/\sqrt{1-\sin^2\alpha_M}; \tag{5.93}$$

$$l_{M+1}=l_M+\Delta l; \tag{5.94}$$

$$N_{M+1}=N_M-g\Delta z. \tag{5.95}$$

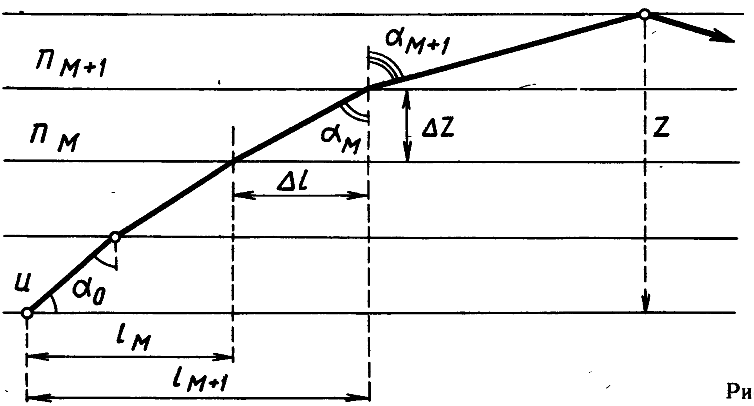


Рис. 120

Распорядимся памятью для ПМК:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сначала Потом	—	u	g	n_0 $n_м$	Δz	—	—	— $\sin\alpha_0$ $\sin\alpha_м$	0 $l_м$	— $n_{м+1}$

Программа:

00 ИП1 F cos П7 . . . . $\sin\alpha_0$ по (5.90), (5.91)

03 Fx^2 1 ↔ — ИП7 ↔ ÷ ИП4 ×. Δl по (5.93)
13 ИП8 + П8. . . . . $l_М$ по (5.94)
16 ИП2 ИП4 × ИП3 ↔ — П9 . . $n_{М+1}$ по (5.95)
23 ИП7 ↔ ÷ ИП3 × П7 . . . . $\sin\alpha_{М+1}$ по (5.92)

29 1 — Fx≥0 $\boxed{37}$ . . . . $\sin\alpha_{М+1}\geqslant 0$? (условие полного отражения, точка A)

33 ИП8 2 × С/П . . . . вывод l

37 ИП9 П3 ИП7 БП $\boxed{03}$. . . . . замена $n_М$ на $n_{М+1}$ и переход к преломлению в следующем слое

Переключатель «Р—Г» находится в положении «Г»!

О т в е т. $l=19$ км при $\Delta z=50$ м (ответ поступает через 3 мин работы ПМК).

При меньших Δz результат будет точнее, но время расчета окажется несколько большим.

Введите в программу дополнение для расчета высоты точки A.

Программа для ПЭВМ аналогична:

```
10 PRINT "MIRAZ"
20 PRINT "МИРАЖ"
30 SCREEN 2
40 LINE (0,263)-(0,0)
50 LINE -(639,0)
60 FOR U=.5 TO 1.5 STEP .5
70 A=COS(U*PI/180)
80 H=1
90 N=1.0004
100 X=0
110 Z=0
120 Z=Z+H
130 X=X+ABS(H*A/SQR(1-A*A))
140 N1=N
150 N=1+.0004*EXP(-.05*Z)
160 A1=A
170 A=A*N1/N
180 IF A<1 THEN 210
190 A=A1
200 H=-H
210 PSET (X/15,Z*4),U*2+5
220 IF Z>0 THEN 120
230 NEXT
240 GOTO 240
```

2.13.4. Решение подобно решению предыдущей задачи, только необходимо добавить пересчет u_0 (ЯПО) $\rightarrow u$ по формуле

$$\sin u_0/\sin u = n_0 \tag{5.96}$$

и добавить строку для накопления z в ЯП5:

Программа:

00 ИП0 F sin ИП3 $\div$	$\sin u$
04 Fx^2 1 $\leftrightarrow$ — F$\sqrt{}$ П7	$\sin \alpha_0$
10 Fx^2 1 $\leftrightarrow$ — F$\sqrt{}$ ИП7 $\leftrightarrow$ $\div$ ИП4 $\times$ . .	Δl
20 ИП8 $\div$ П8	$l_М$
23 ИП5 ИП4 + П5	$z_М$
27 ИП2 ИП4 $\times$ ИП3 $\leftrightarrow$ — П9 . . .	$n_{М+1}$
34 ИП7 $\leftrightarrow$ $\div$ ИП3 $\times$ П7	$\sin \alpha_{М+1}$
40 1 — F$x\geqslant 0$ $\boxed{50}$	условие отражения
44 ИП8 2 $\times$ С/П ИП5 С/П	если «Да», то вывод l, z
50 ИП9 П3 ИП7 БП $\boxed{10}$	если «Нет», то замена $n_М$ и переход

Для ПЭВМ можно (при обозначениях: $u_0 \equiv U\emptyset$; $g \equiv G$; $n \equiv N$; $n_{М+1} \equiv N1$; $\Delta z \equiv Z1$; $l \equiv L$) использовать, например, такую **программу**

```
1 PRINT "SWETOW"
10 PRINT "СВЕТОВОД"
20 INPUT "U0(ГРАД)";U0
30 G=.5
40 N=1.5
50 Z1=.001
60 Z=0
70 L=0
80 U0=PI*U0/180
90 S=SIN(U0)/N
100 S1=SQR(1-S^2)
105 L1=Z1*S1/SQR(1-S1^2)
110 L=L+L1
120 Z=Z+Z1
130 N1=N-G*Z1
140 S1=N*S1/N1
150 IF S1>=1 THEN GOTO 180
160 N=N1
170 GOTO 105
180 PRINT 2*L,Z
190 END
```

Ответ.

СВЕТОВОД
U$\emptyset$ (ГРАД) = 20
1.720 8.000E−02

2.13.5. Из формулы (2.13.2) следует

$$dn = -2azdz;\ n_{М+1} = n_М - 2az\Delta z. \tag{5.97}$$

В соответствии с этим, заложив a в ЯП2, надо заменить для ПМК строку начиная с шага 27:

27 ИП2 2 $\times$ ИП5 $\times$ ИП4 $\times$ ИП3 $\leftrightarrow$ — П9

Все остальное оставить так же, но нумерация шагов везде увеличится на 4, в том числе в адресе перехода после команды $Fx \geqslant 0$.

Время счета на калькуляторе при $\Delta z = 0{,}02$ не менее 4 мин; поэтому здесь было бы гораздо лучше использовать ПЭВМ, преобразовав программу SWETOW, приведенную в решении задачи 2.13.4, и заменить строки 30 и 130.

Ответ. Для $u = 30°$; $l = 3{,}2$ мм; $z = 0{,}36$.

2.13.6. Используем программу, приведенную в решении задачи 2.13.4 до шага 44, но не будем выводить l и z. Вместо этого поставим проверку: $z < r$? Если «Да», то надо увеличить u_0 на Δu_0 (введем $r \to$ ЯПА; $\Delta u_0 \to$ ЯПВ; $n_0 \to$ ЯПС); если «Нет», т. е. $z \geqslant r$, то следует вывести u_0 и остановиться:

40 1 — $Fx \geqslant 0$ $\boxed{60}$ . . . если отражение, то 44; если «Нет», то $\boxed{60}$, т. е. переход к преломлению в следующем слое.

44 ИП5 ИПА — $Fx < 0$ $\boxed{65}$

49 ИП0 ИПВ + П0 ИПС П3 0 П5 П8 БП $\boxed{00}$ ... если $z < r$, то u_0 увеличивается на Δu_0 и все начинается сначала; если $z \geqslant r$, то следует вывести u_0 и конец

60 ИП9 П3 ИП7 БП $\boxed{10}$

65 ИП0 С/П

Для каждого u_0 полностью решается задача типа 2.13.4; поэтому в целом данная задача займет сравнительно большое машинное время, особенно при малых Δz и Δu_0. При $u_0 = 20°$; $\Delta u_0 = 2°$; $\Delta z = 0{,}03$ ответ получится $u_{0\,\max} = 28°$. Это и есть апертура световода с точностью до 2°.

2.13.7. Эта задача на многократное вычисление по формулам:

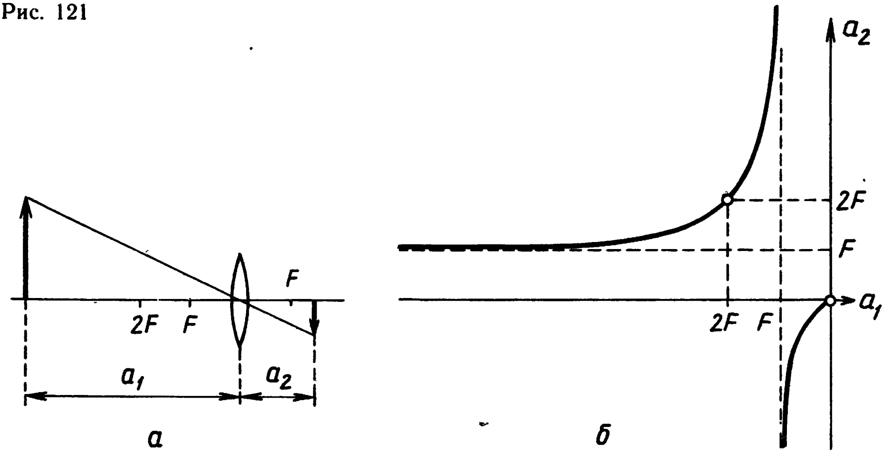
$$\begin{cases} \dfrac{1}{-a_1} + \dfrac{1}{a_2} = \dfrac{1}{F}; \\ a_2 = (F^{-1} + a_1^{-1})^{-1}. \end{cases} \tag{5.98}$$

Здесь учтено правило знаков: расстояния влево от линзы (рис. 121, a) считаются отрицательными, вправо — положительными.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3
Сначала Потом	F	a_1	Δa_1	—

Рис. 121



Программа:

00 ИП0 F1/x ИП1 F1/x+F1/x С/П

07 ИП1 ИП2+П1 БП $\boxed{00}$

Ответ дан на рисунке 121, *б*.

Дополните эту программу вычислением увеличения линзы. Как оно зависит от фокусного расстояния при фиксированном расстоянии от линзы до предмета?

2.13. 8...10. Ответы не приводятся.

2.13.11. Ответ для одного из случаев (X1 = 0; Y1 = 100; AL = 15°; M1 = 1,5) дан на рисунке 122.

2.13.12...13. Ответы не приводятся.

2.14.1. Пусть $I_1 = I_2 = 1$. Используем связь между $\Delta\varphi$ и разностью хода ($2h$): $\Delta\varphi/(2h) = 2\pi/\lambda$. Из рисунка 123 $(R-h)^2 + r^2 = R^2$. Учитывая, что $h \ll R$, получим $h = r^2/(2R)$. Здесь r — радиус некоторого кольца — геометрического места точек, где h и, следовательно, результат интерференции одинаковы. Таким образом,

$$I = 2\left(1 + \cos\frac{4\pi h}{\lambda}\right).$$

Машина должна рисовать концентрические окружности радиусами r, которые постепенно нарастают от нуля; яркость каждой линии (для черно-белого, но полутонового дисплея) пусть будет C. Если имеется всего восемь полутонов (например, в комплексе УК-НЦ), то имеет смысл положить $C = 2I$, так как I меняется от 0 до 4.

Введем обозначения: $h \equiv$ H; $\lambda \equiv$ L; $r \equiv$ R1.

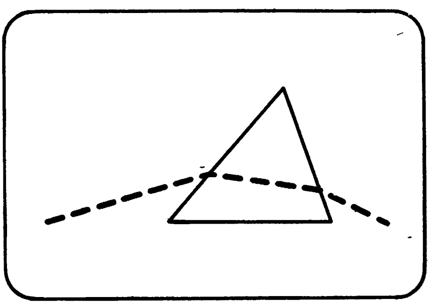


Рис. 122

Программа:

```
10 PRINT "KOLCA"
20 PRINT "КОЛЬЦА НЬЮТОНА"
25 L=6E-7
30 R=5
40 SCREEN 2
50 COLOR 8,1,1
60 ' LINE (0,263)-(0,0),5
70 ' LINE-(639,0),5
80 FOR R1=0 TO .01 STEP 5E-5
90 H=R1*R1/2/R
100 F=4*PI*H/L
110 I=2*(1+COS(F))
120 C=INT(ABS(2*I))
130 ' PRINT R1,I
140 ' PSET(R1*6E4,I*50),8
150 CIRCLE (310,130),R1*6E4,C,,,.64
160 NEXT R1
170 GOTO 170
180 END
```

Затруднение может вызвать выбор пределов изменения r. Мы же хотим, чтобы в этих пределах поместилось несколько колец. Это означает, что на отрезке $2h$ должно помещаться, например 30λ:

$$r_{max}=\sqrt{2Rh_{max}}=\sqrt{2\cdot 5\cdot 15\cdot 6\cdot 10^{-7}}\approx 10^{-2}\ \text{м}.$$

Коэффициент $6\cdot 10^4$ в строке 150 выбран так, чтобы r_{max} помещалось на экране. Необходимость в коэффициенте эллиптичности (0,64) связана с искажениями, даваемыми конкретным дисплеем (УК-НЦ).

Блокированные строки 60, 70, 130, 140 можно использовать для получения графика зависимости $I(r)$. Нужно будет только убрать (или блокировать) строку 150.

На рисунке 124 дано изображение с экрана дисплея.

При наличии цветного графического дисплея можно смоделировать на нем картину, которая должна получиться при освещении колец белым светом.

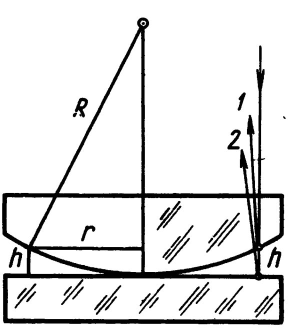


Рис. 123

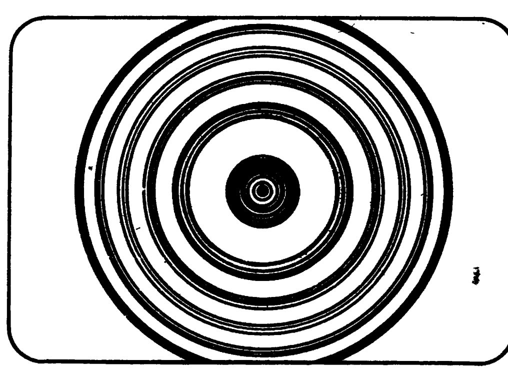


Рис. 124

2.14.2. Разность хода $L_2 - L_1$ (рис. 125) находится из геометрии: $l_1 = \sqrt{L^2 + l_3^2}$; $l_3^2 = x^2 + (y - a/2)^2$; $l_2 = \sqrt{L^2 + l_4^2}$; $l_4^2 = x^2 + (y + a/2)^2$; $z = l_2 - l_1$. В результате интерференции интенсивность $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi = 2(1 + \cos\Delta\varphi)$, если считать $I_1 = I_2 = 1$. Разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi z/\lambda$.

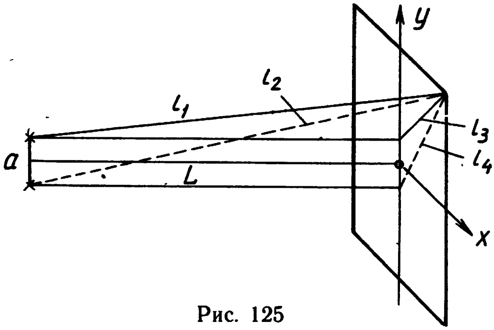


Рис. 125

Будем расставлять точки по всему экрану (сканировать экран, т. е. чертить строку за строкой, меняя x и y), и машина должна высветить каждую точку оттенком, номер которого C пропорционален интенсивности.

Известно, что расстояние между полосами $d = \lambda L/a$. В нашем случае $d \sim 6 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-2}/10^{-4} \sim 6 \cdot 10^{-5}$ м. Чтобы на рассматриваемом участке экрана помещалось несколько полос, следует взять этот участок размером порядка $6 \cdot 10^{-4}$ м (в соответствующих пределах менять x и y).

При обозначениях: $l_1 \equiv$ L1; $l_2 \equiv$ L2; $l_3^2 \equiv$ L3; $l_4^2 \equiv$ L4; $a \equiv$ A; $\lambda \equiv$ LØ; $z \equiv$ L2—L1; $\Delta\varphi \equiv$ F — **программа** для ПЭВМ:

```
10 PRINT "INTERS
20 PRINT "ИНТЕРФ.ОТ ДВУХ ИСТ.
30 A=1E-4
40 L=.04
50 L3=L*L
60 L0=6E-7
70 K=1E5
80 SCREEN 2
90 FOR Y=-8E-4 TO 8E-4 STEP 3E-5
100 Y1=Y-A/2
110 Y2=Y+A/2
120 Z1=Y1*Y1
130 Z2=Y2*Y2
140 FOR X=-3E-3 TO 3E-3 STEP 4E-5
150 L1=SQR(L3 +X*X+Z1)
160 L2=SQR(L3+X*X+Z2)
170 F=2*PI*(L1-L2)/L0
180 I=2*(1+COS(F))
190 C=INT(ABS(2*I))
200 PSET (X*K+320,Y*K+130),C
210 NEXT X
220 NEXT Y
230 GOTO 230
240 END
```

В строке 70 коэффициент K взят таким, чтобы размер картины примерно соответствовал размеру экрана.

2.14.3. $x = L\varphi$ (φ в рад!). Для вычислений на ПМК распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сначала Потом	φ_0 φ	$\Delta\varphi$	b	λ	L	— x	— θ	—	—	—

Программа:

00 ИП4 ИП0×П5 С/П x
05 ИП0 F sin ИП2×Fπ×ИП3÷П6 . . . . Θ
14 F sin ИП6÷Fx² С/П . . . . I_φ
19 ИП0 ИП1+П0 БП $\boxed{00}$ . . . . наращивание φ и переход на начало

Угол дифракции всегда порядка λ/b, в нашем случае он порядка 10^{-3} рад. Поэтому возьмем $\Delta\varphi=2\cdot10^{-4}$ рад; $\varphi_0=2\cdot10^{-4}$ рад. (Нельзя начинать с $\varphi=0$, так как получается деление на нуль.) Результат приведен на рисунке 126. Следует обратить внимание на то, что центральный максимум вдвое шире боковых и значительно интенсивнее при таком соотношении λ и b. Уменьшив b, полезно проследить за тем, как изменится результат. Удобнее, конечно, работать на ПЭВМ.

Программа:

```
1 PRINT "DIFSCH"
2 PRINT "ДИФР.НА ЩЕЛИ"
10 B=1E-4
20 L=4
```

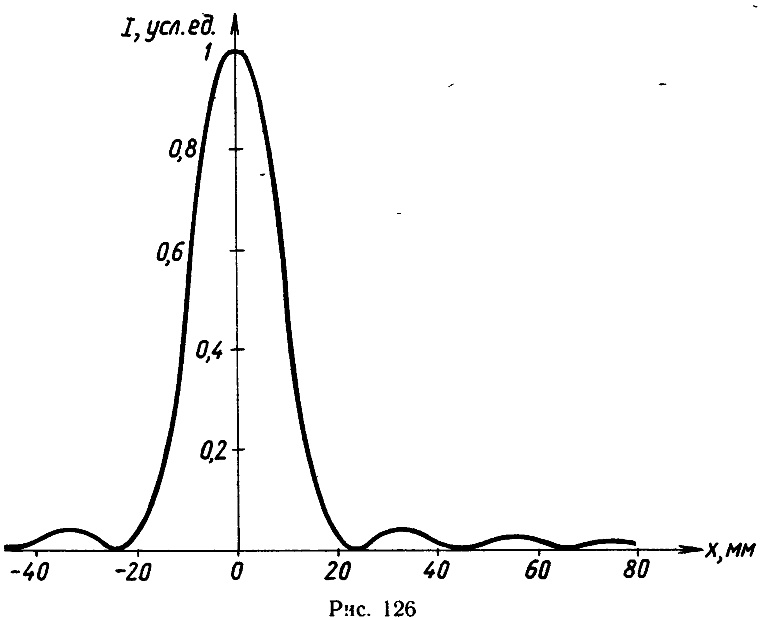


Рис. 126

```
30 I0=1
40 L0=5.5E-7
50 SCREEN 2
60 LINE (0,0)-(630,0),5
70 LINE (315,0)-(315,260),5
80 FOR F=-1.5E-2 TO 1.5E-2 STEP 1E-4
90 T=PI*B*SIN(F)/L0
100 I=I0*SIN(T)^2/T^2
110 PSET (F*2E4+315,I*260)
120 NEXT F
130 GOTO 130
```

2.14.4. Аналогично решению предыдущей задачи и используя $x = L\varphi$ и формулы (2.14.2), можно составить аналогичную программу для ПМК. Однако теперь линии будут уже, и для выявления их формы придется делать вычисления через шаг $\Delta\varphi$, меньший, чем в предыдущем случае, что займет много времени. Поэтому для решения этой задачи лучше использовать ПЭВМ. Введем обозначения: $x \equiv$ X; $\varphi \equiv$ F; $\Delta\varphi \equiv$ F1; $b \equiv$ B; $\lambda \equiv$ LØ; $d \equiv$ D; $\psi \equiv$ P; $\Theta \equiv$ T. Тогда **программа** для вычерчивания графика может быть такой:

```
1 PRINT "DIFRE"
2 PRINT "ДИФР.РЕШ."
10 L=4
20 I0=1
30 B=.1E-3
40 L0=5.5E-7
50 INPUT "N=";N
60 D=3E-4
70 SCREEN 2
80 LINE (0,0)-(630,0),5
90 FOR F=-1E-2 TO 1E-2 STEP 1E-5
100 Z=PI*SIN(F)/L0
110 P=Z*D
120 T=Z*B
130 U=SIN(T)^2/T/T
140 V=(SIN(N*P)/SIN(P))^2
150 I=I0*U*V
160 X=L*F
170 PSET (X*7E3+315,I*10)
180 NEXT F
190 GOTO 190
```

Ответ дан в виде изображения на экране дисплея (рис. 127).

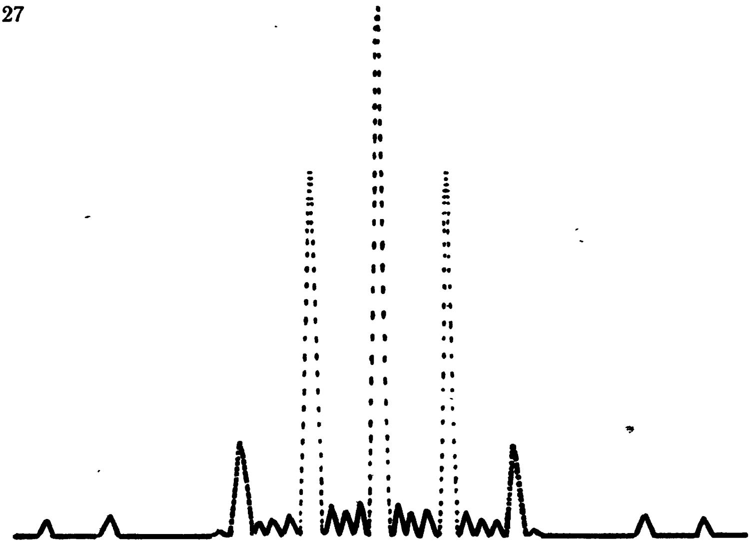
2.15.1. Функция вправо и влево от максимума при $\lambda = 0{,}55$ мкм напоминает падающую экспоненту e^{-Az}. Будем отсчитывать z от $\lambda = 0{,}55$, а чтобы спад был одинаковым и при z, и при $-z$, напишем $V = Be^{-Az^2}$ (кривая Гаусса). Переходя к λ, имеем

$$V = Be^{-A(\lambda - 0{,}55)^2}. \tag{5.99}$$

Теперь подберем такие значения параметров A и B, чтобы кривая, полученная из расчетов по формуле (5.99), минимально отличалась бы от экспериментальной. Для этого выберем функциональный масштаб:

$$\begin{gathered} \ln V = \ln B - A(\lambda - 0{,}55)^2;\ y = M + Kx; \\ y \equiv \ln V;\ M \equiv \ln B;\ K \equiv -A;\ x \equiv (\lambda - 0{,}55)^2. \end{gathered} \tag{5.100}$$

Рис. 127



Пересчитаем вручную на калькуляторе V в y, а λ — в x и занесем числа в таблицу:

λ, мкм	0,4	0,44	0,48	0,52	0,55	0,6	0,64	0,68	0,72
V, лм/Вт	0	31	112	437	625	375	100	18	0
x_i	$2{,}25\cdot10^{-2}$	$1{,}21\cdot10^{-2}$	$0{,}49\cdot10^{-2}$	$0{,}09\cdot10^{-2}$	0	$0{,}25\cdot10^{-2}$	$0{,}8\cdot10^{-2}$	$1{,}69\cdot10^{-2}$	$2{,}89\cdot10^{-2}$
y_i	—	3,43	4,72	6,08	6,43	5,93	4,61	2,89	—

Можно эти точки (y_i, x_i) отложить на графике с функциональным масштабом (рис. 128, *а*). Проведем на этом графике наилучшим способом прямую $y=M+Kx$ и найдем M и K, но не на глаз, а методом наименьших квадратов (см. раздел 4.9 и решение задачи 2.2.5). Тогда для нашего набора пар точек (y_i, x_i) получаем оптимальные параметры: $K=-2{,}136\cdot10^2$ мкм$^{-2}$; $M=6{,}25$, т. е. $A=2{,}136\times$ $\times10^2$ мкм$^{-2}$; $B=518$ лм/Вт.

Чтобы посмотреть, как заданная на рисунке 34 кривая совпадает с вычисленной по формуле (5.99), посчитаем на калькуляторе V в нескольких точках.

Программа:

00 ИП4—Fx² ИП2×/—/Fe^x ИП3×С/П,

заложив A в ЯП2, B — в ЯП3, число 0,55 — в ЯП4, а λ вводя каждый раз в РгХ.

Или на ПЭВМ

```
1 PRINT "GAUSS"
2 PRINT "КРИВАЯ ГАУССА"
10 A=2.136E2
20 B=518
30 FOR L0=.4 TO .8 STEP .04
40 V=B*EXP(-A*(L0-.55)^2)
50 PRINT L0,V
60 NEXT L0
70 END
```

Получаем

λ	0,4	0,44	0,48	0,52	0,55	0,6	0,64	0,68	0,72
V	4	39	181	427	518	303	92	14	1

На рисунке 128, *б* показана эта Гауссова кривая. (Если необходимо, чтобы на центральном участке совпадение было лучше, надо взять больше исходных точек на этом участке.)

2.15.2. В системе СИ значение $A \equiv 2\pi c^2 h = 3{,}73 \cdot 10^{-16}$. Занесем его в ЯП2. Значение $B \equiv hc/k = 1{,}43 \cdot 10^{-2}$ занесем в ЯП3. Автоматически наращиваемое на шаг значение λ будем помещать в ЯП5. Пусть в ЯП7 хранится значение T. Тогда **программа** для ПМК будет следующая:

00 ИП5 ИП4+П5	наращивание λ
04 5↔Fx^y П8	λ^5
08 ИП3 ИП5÷ИП7÷Fe^x-1 — П6 .	знаменатель
17 ИП2 ИП8÷	числитель
20 ИП6÷С/П БП $\boxed{00}$	дробь, r (λ, T) и переход к вычислению следующей точки

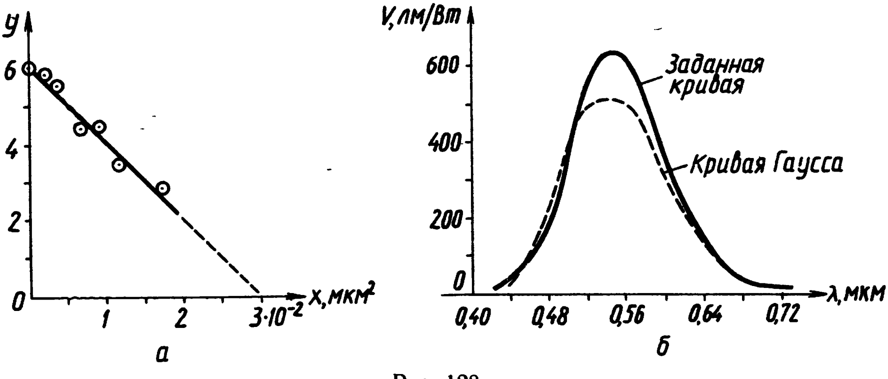


Рис. 128

Текущее значение λ можно узнать, нажав между остановом и новым пуском клавишу ИП5. Для перехода на новую температуру следует снова заложить 0 в ЯП5 и T — в ЯП7.

О т в е т дан на рисунке 129, где заштрихована видимая область. Видно, что при 1 000 K (≈700 °C) излучение в видимой области ничтожно, а при 2 000 K (≈1 700 °C) заметно. Однако и при этой температуре почти вся энергия уносится с нагретого тела инфракрасным излучением.

Применение ПЭВМ для решения этой задачи излишне.

2.15.3. Для построения семейства кривых Планка при разных температурах на графическом дисплее ПЭВМ можно воспользоваться **программой** при обозначениях ($c \equiv$ C; $\lambda \equiv$ L, $h \equiv$ H; $k \equiv$ K; $r \equiv$ R):

```
10 PRINT "PLANK1"
20 PRINT "СЕМЕЙСТВО КРИВ.PLANKA"
30 C=3E8
40 K=1.38E-23
50 H=6.6E-34
60 L1=3E-8
70 M=1E8
80 M1=1E-9
90 SCREEN 2
110 FOR N=0 TO 7
120 X3=100-N*10
130 Y3=80-N*5
140 LINE (X3,Y3)-(X3+500,Y3),5
150 LINE (X3,Y3)-(X3,Y3+160),5
160 T=1700-N*100
170 FOR L=2E-7 TO 5E-6 STEP L1
180 Z=2*PI*C*C*H/L/L/L/L/L
190 W=H*C/K/T/L
200 R=Z/(EXP(W)-1)
210 PSET (X3+L*M,Y3+R*M1),8
220 NEXT L
230 NEXT N
240 GOTO 240
250 END
```

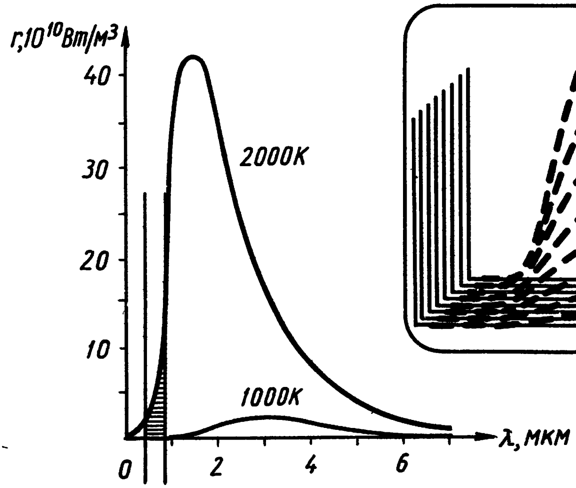


Рис. 129

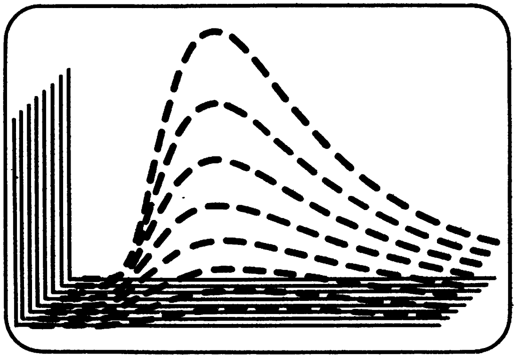


Рис. 130

Ответ дан на рисунке 130.

2.15.4. Задача сводится к вычислению определенного интеграла:

$$W(T)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}\cdot\frac{d\lambda}{\exp(hc/(kT))-1}. \qquad (5.101)$$

Прибегнем к численному методу, предложенному в разделе 4.3, например к методу трапеций, который при наличии ПМК или ПЭВМ приводит к ответу очень быстро.

Для вычисления подынтегральной функции для ПМК распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	A	...	Д
Сначала	—	λ_1	λ_2	$\Delta\lambda$	A	B	T	—	—		—		0
Потом		λ							λ^5		y_1		Σ

где $A\equiv 2\pi c^2 h=3{,}73\cdot 10^{-16}$ (в СИ); $B\equiv hc/k=1{,}43\cdot 10^{-2}$ (в СИ).

Тогда

$$R(T)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{A}{\lambda^5[\exp(B/(\lambda T))-1]}d\lambda=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} y\,d\lambda. \qquad (5.102)$$

Подпрограмма:

```
50 ИП1 Fx² Fx² ИП1×П8 . . . . . . .   λ⁵
56 ИП5 ИП1÷ИП6÷Fe^x 1— . . . . . .   exp(B/(λT))—1
64 ИП8×ИП4↔÷ В/0 . . . . . . . . .   y(λ)
```

Следуя разделу 4.3, получаем, что излучение в видимой области 0,2 Вт/м^2 при 1 000 К ($\approx$700 °С) и $\approx$530 Вт/м^2 при 2 000 К. Всего же во всем диапазоне длин волн излучается при 1 000 К около 53 кВт/м^2, а при 2 000 К$\approx$1 МВт/м^2. Еще раз убеждаемся, что при этих температурах в основном энергия излучается в ИК-диапазоне. Заметим, что при вычислениях λ_1 нельзя брать в точности 0; следует взять хотя бы $\lambda_1=\Delta\lambda$, λ_2 вместо ∞ следует взять достаточно большим. В нашем случае можно взять $\lambda_2=10$ мкм $=10\cdot 10^{-6}$ м. Видно, что R (2000) приблизительно в 16 раз больше, чем R (1000), как и должно быть согласно закону Стефана — Больцмана. Сравните также площади под кривыми на рисунке 129.

Примечание. Справедливость закона Стефана — Больцмана можно продемонстрировать и не проводя вычислений. Если в формуле (2.15.1) сделать замену переменных: $x\equiv\frac{hc}{\lambda kT}$; $\lambda=\frac{hc}{xkT}$; $d\lambda=-\frac{hc}{x^2kT}dx$, то

$$R(T)=\frac{2\pi k^4}{h^3c^2}T^4\int\frac{x^3dx}{e^x-1}.$$

Поскольку определенный интеграл — это просто число, а первая дробь — размерная константа, то величина R зависит только от величины T (пропорциональна T^4). Можно найти и константу Стефана — Больцмана σ в формуле $R=\sigma T^4$. Известно, что значение данного интеграла в пределах от 0 до ∞ равно $\pi^4/15$, а размерную константу тоже легко вычислить. Однако если необходимо знать долю излучения в интервале от $\lambda_1 \neq 0$ до $\lambda_2 \neq \infty$, то применение вычислительной техники неизбежно.

2.15.5. Задача на нахождение экстремума функции $r(\lambda)$. Численный метод дан в разделе 4.5. Подпрограмму нахождения $r(\lambda)$ можно использовать такую же, что и в решении предыдущей задачи, но придется иначе расположить числа в памяти, поскольку в программе поиска экстремума ЯП 0—7 заняты.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	А	В	С	Д
Сначала Потом	λ_1 λ	— λ_2	— λ_3	— $r(\lambda_1)$	— $r(\lambda_2)$	— $r(\lambda_3)$	$\Delta\lambda$	— $r(\lambda_3)-r(\lambda_2)$	— λ^5	—	A	B	T	

Подпрограмма:

50 ИП0 Fx^2 Fx^2 ИП0×П8 . . . . λ^5
56 ИПВ ИП0÷ИПС÷Fe^x 1— . . . . . . $\exp(B/\lambda T)-1$
64 ИП8×ИПА↔ ÷ В/0

Остальную программу можно скопировать из раздела 4.5.

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ БП50 F ПРГ; ввод подпрограммы; F АВТ; ввод (λ_1, $\Delta\lambda$, A, B, T) В/0 С/П ———.

Взяв $\lambda_1=\Delta\lambda=2\cdot10^{-7}$ м; для $T=2\,000$ К через 5 мин получим $\lambda_{max}=3{,}2$ мкм, что соответствует закону Вина: $\lambda_{max}\approx3\cdot10^{-3}/T$. Для $T=2\,000$ К $\lambda_{max}=1{,}8$ мкм.

Максимум сместился в сторону коротких длин волн приблизительно в два раза, что также соответствует закону смещения Вина. При новых вычислениях следует заложить снова начальное значение λ_1. Ответ можно уточнить, взяв меньшее $\Delta\lambda$, а для сокращения времени вычислений — взяв более совершенную программу.

Другой метод решения этой задачи — продифференцировать $r(\lambda, T)$ по λ. Приравняв $dr/d\lambda$ нулю, получим уравнение относительно λ, которое тоже придется решать численным методом (см. раздел 4.4), так как уравнение получается трансцендентным.

Время вычислений существенно сокращается, если их делать на ПЭВМ.

2.15.6. Подводимая за время dt энергия Pdt расходуется на нагрев паяльника: $dQ=cmdT$, где dT — приращение температуры, и на окружающую среду расходуется $[A(T-T_{ср})+S(T^4-T^4_{ср})]\,dt$. Так что дифференциальное уравнение, определяющее нарастание температуры со временем, будет:

$$dT=\frac{P-A(T-T_{ср})-S(T^4-T^4_{ср})}{cm}\,dt.$$

Если не учитывать потери на излучение ($S=0$), то уравнение легко интегрируется, но при температуре 300...400 °С ($T \sim 600...700$ К) эти потери велики (ST^4 превышает 10 Вт), и пренебрегать ими нельзя. В этом случае простое решение может быть получено только численным методом. Полученное дифференциальное уравнение решается методом, описанным в разделе 4.6. Приведем программу для ПЭВМ, в которой строки 70 и 80 вводятся или отменяются (постановка апострофа) в зависимости от того, учитываются ли потери на излучение. Строки 20, 170 и 185 нужны для получения графика. Если их отменить, а ввести строку 160, то получится таблица чисел по **программе:**

```
10 PRINT "ПАЯЛЬНИК"
20 SCREEN 2
30 P=40
40 M=.1
50 C=4E2
60 A=.05
70 S=3.4E-10
80 ' S=0
90 T0=293
100 T8=10
110 T=T0
120 FOR T7=0 TO 1E3 STEP T8
130 Z=P-A*(T-T0)-S*(T*T*T*T-T0*T0*T0*T0)
140 T1=Z*T8/C/M
150 T=T+T1
160 ' PRINT T7,T
170 PSET (T7*.5,(T-T0)*.5)
180 NEXT T7
185 GOTO 185
190 END
```

Ответ. За первые 400 с паяльник нагревается до 500 К (~ 200 °С), и далее практически его температура не меняется. Если бы не учитывались потери на излучение, его температура была бы значительно больше. Более точное решение можно получить, взяв $\Delta t=1$ с, но выводя на экран только каждую N-ю пару чисел (N взять, например, 50 — см. раздел 4.6).

2.15.7. Решение подобно решению предыдущей задачи, но необходимо добавить условия включения и выключения нагревателя регулятором. Кроме того, в приведенной ниже программе организовано вычерчивание графика зависимости $T(t)$ (строки 130...150 и 230) и графической сетки (строки 160...180).

Программа:

```
1 PRINT "IRON2
10 PRINT "УТЮГ С РЕГУЛЯТОРОМ"
20 P0=1.5E3
30 M=1
40 C=4E2
50 A=2
60 S=3.4E-9
70 T1=600
80 T2=650
90 T0=293
100 T8=1
110 T=T0
120 P=P0
```

```
130 K1=.5
140 K2=.5
150 SCREEN 2
160 FOR N1=0 TO 12
170 LINE (50*N1,0)-(50*N1,263),5
180 NEXT N1
190 FOR N2=0 TO 5
200 LINE (0,50*N2)-(639,50*N2),5
210 NEXT N2
220 FOR T7=0 TO 1200 STEP T8
230 Z=P-A*(T-T0)-S*(T*T*T*T-T0*T0*T0*T0)
240 T9=Z*T8/C/M
250 T=T+T9
260 IF T>T2 THEN P=0
270 IF T<T1  THEN P=P0
280 T7=T7+T8
290 PSET (T7*K1,(T-T0)*K2)
300 NEXT T7
310 GOTO 310
320 END
```

Здесь использованы обозначения: время — $t \equiv$ T7; $\Delta t \equiv$ T8; температура — T; $\Delta T =$ T1; $T_{ср} =$ TØ.

Ответ приведен на рисунке 131.

2.15.8. Сведем ожидаемую зависимость $P/S = R = \sigma T^n$ к линейной, применив функциональный масштаб (см. раздел 4.9):

$$\lg (P/S) = \lg \sigma + n \lg T. \tag{5.103}$$

Введя обозначения: $\lg (P/S) \equiv$ y; $\lg \sigma \equiv$ M; $n \equiv$ K; $\lg T \equiv$ x, получим

$$y = M + Kx. \tag{5.104}$$

Расширим таблицу данных, приведенных в задаче:

t, °C	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700
T, К	937	1073	1173	1273	1373	1473	1573	1673	1773	1873	1973
$\lg T = x$	2,99	3,03	3,07	3,10	3,14	3,17	3,20	3,22	3,25	3,27	3,29
P, Вт	11	17	23	35	47	61	82	105	130	170	210
$(P/S)\cdot 10^{-5}$, Вт/м^2	1,1	1,7	2,3	3,5	4,7	6,1	8,2	10,5	13,0	17,0	21,0
$\lg (P/S) = y$	5,04	5,23	5,36	5,54	5,67	5,785	5,81	6,02	6,11	6,23	6,31

Экспериментальные точки x_i, y_i отложим на графике $y(x)$ (рис. 132). Проведем через эти точки прямую не на глаз, а используя метод наименьших квадратов. По одной из приведенных в разделе 4.9 программ получим $M = -7{,}3$; $K = 4{,}1$. Затем находим: $\sigma = 10^M = 5\cdot 10^{-8}$; $n = K = 4{,}1$, что очень близко к тем константам, которые должны стоять в законе Стефана — Больцмана ($\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4); $n = 4{,}0$). Из рисунка 132 также видно, что тангенс угла наклона близок к 4.

Следует обратить внимание на то, что подобный способ обра-

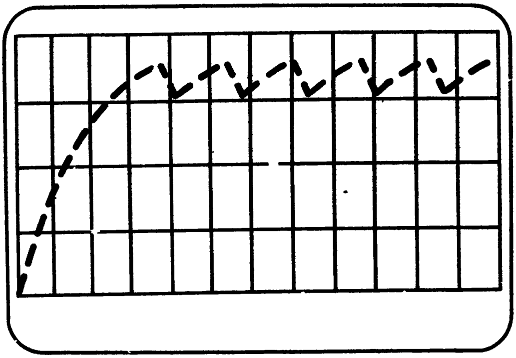


Рис. 131

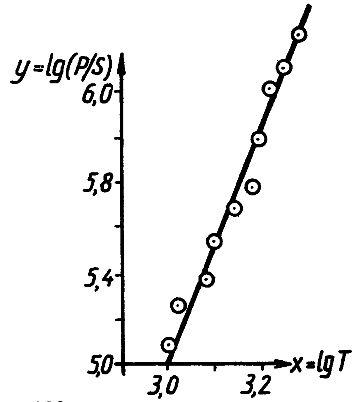


Рис. 132

ботки зависимостей, полученных экспериментально (выбор функционального масштаба и обработка методом наименьших квадратов), является основным при проверке физических закономерностей и определении параметров, входящих в формулы.

2.15.9. Уравнение волны возьмем в виде $E=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$. Положим в данный момент $t=0$. Тогда $E=A\cos(2\pi x/\lambda)$. Возьмем произвольное начальное значение амплитуды, например $A=A_0=80$ (такой размер хорошо будет укладываться на экране дисплея).

В пластине скорость распространения v, а следовательно, и $\lambda=vT$ уменьшатся в n раз. Кроме того, интенсивность света будет уменьшаться по закону: $I=I_0e^{-\mu x}$. Поскольку $I_0\sim A_0^2$ и $I\sim A^2$, то для амплитуды получится $A=A_0e^{-\mu x/2}$. Чтобы пластина хорошо была видна на экране, возьмем увеличение $K=4\cdot 10^7$. Пусть начало пластины имеет координату $X1$, а конец — $X2$. Тогда вычисление $E\equiv Y$ производится строкой 230 **программы:**

```
10 PRINT "WOLNA
20 PRINT "ИЗОБРАЖ.ВОЛНЫ В ПОГЛ.СРЕДЕ"
30 A0=80
40 L0=5E-7
50 N1=1.8
60 X1=5E-6
65 X2=1E-5
80 M=4E5
90 K=4E7
100 SCREEN 2
110 LINE (X1*K,240)-(X2*K,30),5,BF
120 FOR X=0 TO 1.5E-5 STEP 5E-9
130 IF X>X2 THEN 210
140 IF X>X1 THEN 180
150 A=A0
160 N=1
170 GOTO 230
180 A=A0*EXP(-M*(X-X1)/2)
190 N=1.8
200 GOTO 230
210 A=A0*EXP(-M*(X2-X1)/2)
220 N=1
230 Y=A*COS(2*PI*X*N/L0)
```

```
240 PSET (X*K,Y+130)
250 NEXT X
260 GOTO 260
270 END
```

Рисование пластины здесь реализуется строкой 110, а рисование волны — строкой 240. Результат приведен на рисунке 133.

2.15.10. Задача на многократные вычисления по формуле и вычерчивание графика. Используем ПМК.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6
	N (10^{28})	e $(1{,}6\cdot10^{-19})$	ε_0 $(8{,}8\cdot10^{-12})$	m $(9\cdot10^{-31})$	ω_0 (10^{16})	ω (10^{15})	$\Delta\omega$ (10^{15})

Программа:

00 ИП0 ИП1 Fx² ИП2 ÷ ИП3 ÷ П7 . . . . $Ne^2/(\varepsilon_0 m)$
09 ИП4 Fx² ИП5 Fx² — ИП7 ↔ ÷ . . . . дробь
17 1 + F√ С/П . . . . n
21 ИП5 ИП6 + П5 БП $\boxed{00}$ . . . . наращивание ω

О т в е т дан на рисунке 134. (В н и м а н и е! Нельзя брать $\omega\approx\omega_0$.)

2.15.11. Согласно (2.15.2) зависимость $n(\lambda)$ будет такой:

$$n=\sqrt{1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(2\pi c)^2(1/\lambda_0^2-1/\lambda^2)}}. \qquad (5.105)$$

Здесь все величины известны (см. задачу 2.15.6 и ее решение), кроме λ_0. Сведем эту нелинейную зависимость $n(\lambda)$ к линейной путем замены переменных:

$$n^2-1=\frac{Ne^2}{(2\pi c)^2\varepsilon_0 m(1/\lambda_0^2-1/\lambda^2)};\quad \frac{1}{n^2-1}=\frac{(2\pi c)^2\varepsilon_0 m}{Ne^2}(1/\lambda_0^2-1/\lambda^2);$$
$$\frac{1}{n^2-1}\equiv y;\quad \frac{(2\pi c)^2\varepsilon_0 m}{Ne^2\lambda_0^2}\equiv M;\quad -\frac{(2\pi c)^2\varepsilon_0 m}{Ne^2}\equiv K; \qquad (5.106)$$

$$1/\lambda^2=x;\quad y=M+Kx. \qquad (5.107)$$

В задаче дано 7 пар точек, следовательно, мы получим 7 пар точек x_i; y_i:

$x_i\equiv1/\lambda^2$	20,7	16,0	11,1	8,16	6,25	4,94	$4{,}00\cdot10^{12}$
$y_i\equiv1/(n^2-1)$	0,800	1,396	1,950	2,273	2,711	2,894	3,101

Теперь применим метод наименьших квадратов для подбора M и K (см. раздел 4.9). Получим $M=3{,}53$; $K=-1{,}34\cdot10^{-13}$. Отсюда по формуле

$$\lambda_0=\frac{2\pi c}{e}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{NM}} \qquad (5.108)$$

находим: $\lambda_0=1{,}8\cdot10^{-7}$ м. Далее по формуле (5.105) можно рассчитать и всю кривую $n(\lambda)$ в диапазоне, например, от $\lambda=0$ до $\lambda=2$ мкм. Однако следует помнить, что погрешность экстраполяции тем больше, чем больше диапазон экстраполяции. Результат экстраполяции по заданным в задаче данным $n(\lambda)$ и по формуле (5.105) приведен на рисунке 135.

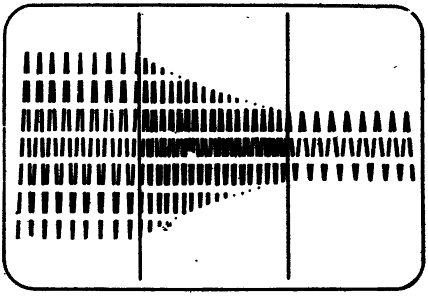


Рис. 133

2.16.1. Задача на многократные вычисления по формуле (2.16.1). Разделим весь возможный диапазон скоростей (от 0 до c) на N частей. Используя ПМК, распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5
Сначала Потом	Счетчик циклов	c	N	m_0	— c/N	— v

Программа:

00 ИП1 ИП2 ÷ П4 П5 v
05 Fx^2 ИП1 Fx^2 ÷ 1 ↔ — $F\sqrt{\ }$ . . . . $\sqrt{\ }$
13 ИП3 ↔ ÷ С/П . . . . m
17 FL0 $\boxed{21}$ C_xF1/x . . . . сообщение об окончании вычислений ("ЕГГОГ")
21 ИП5 ИП4 ÷ П5 БП $\boxed{05}$ . . . .

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод $3\cdot10^8$ П1 N П2 П0, m_0 П3; В/0 С/П ——— С/П ——— С/П ———.

Ответ дан в виде графика на рисунке 136.

Вычертить график по программе может ПЭВМ.

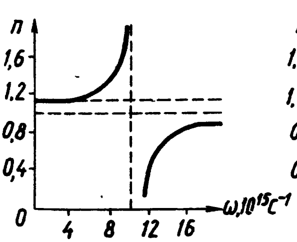


Рис. 134

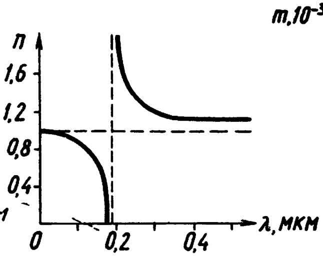


Рис. 135

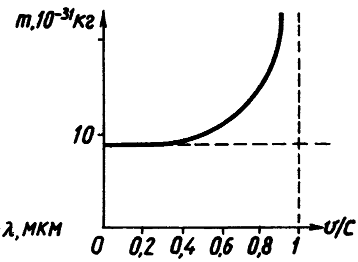


Рис. 136

Программа:

```
1 PRINT "MASSA"
2 PRINT "ЗАВИС.МАССЫ ОТ СКОР."
10 SCREEN 2
20 C=3E8
30 M0=9E-31
35 J=1
40 N=600
45 LINE (0,0)-(600,0),5
46 LINE (0,0)-(0,230),5
50 FOR V=0 TO C-C/N STEP C/N
60 M=M0/SQR(1-(V/C)^2)
70 PSET (V/6E5,18*M/M0),8
80 NEXT V
90 GOTO 90
```

2.16.2. Задача на многократные вычисления по формуле

$$v=c\sqrt{1-(m_0/m)^2}=c\sqrt{1-(1/N)^2}. \tag{5.109}$$

Направим в ПМК $c=3\cdot10^8$ м/с в ЯП1. Будем набирать N на экран (в РгX) и действовать по программе:

00 F1/x Fx²1 ↔ —F$\sqrt{\ }$ ИП1×С/П

Ответ дан на рисунке 137.

2.16.3. Для многократных вычислений по формуле (2.16.1) используем ПМК.

Распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5
	—	l_0 $(0{,}8\cdot10^{-15})$	Δl $(0{,}1\cdot10^{-15})$	$\hbar$ $(1{,}05\cdot10^{-34})$	m $(6{,}64\cdot10^{-23})$	$U-E$ $(2\cdot10^{-13})$ $(10\cdot10^{-13})$

Программа:

00 ИП5 ИП4×2×F$\sqrt{\ }$
06 2×ИП1×ИП3÷/—/
13 Fe^x С/П
15 ИП1 ИП2+П1 БП $\boxed{00}$

Ответ дан на рисунке 138.

2.16.4. Сила Кулона равна:

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}. \tag{5.110}$$

В данном случае это сила отталкивания. Так же как и в задаче 2.5.9, будем приближенно считать, что масса ядра $_{79}Au^{197}$ (197 а.е.м.) много больше массы α-частицы m (4 а.е.м. $=4\cdot1{,}66\times\times10^{-27}$ кг), так что ядро не сдвигается. Если выбрать систему отсчета так, как показано на рисунке 139, *а, б,* то

$$F_x=Fx/r,\ F_y=Fy/r,\ r=\sqrt{x^2+y^2}, \tag{5.111}$$

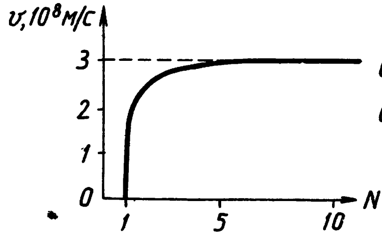


Рис. 137

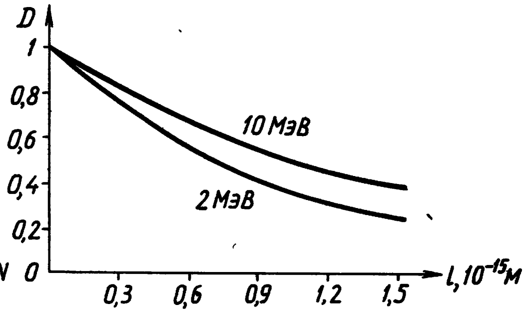


Рис. 138

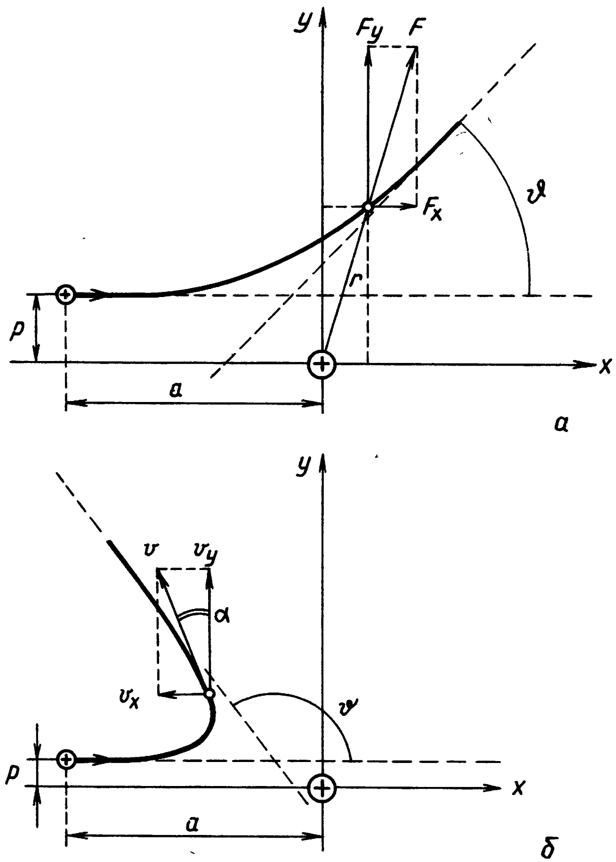


Рис. 139

и уравнения движения по осям x и y будут:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = m\dfrac{dv_x}{dt} = F_x, \quad v_x = \dfrac{dx}{dt}; \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = m\dfrac{dv_y}{dt} = F_y, \quad v_y = \dfrac{dy}{dt}. \end{cases} \tag{5.112}$$

Начальные условия: при $t=0$ $x=-a$; $y=p$; $v_{y_0}=0$. Скорость v_{x0} найдем из формулы $T_0=mv_{x0}^2/2$, где $T_0=4$МэВ; $v_{x0}=\sqrt{2T_0/m}=$ $=\sqrt{2\cdot 4\cdot 1{,}6\cdot 10^{-13}/(4\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27})}=1{,}39\cdot 10^7$ м/с.

Для решения этих дифференциальных уравнений напишем приближенные соотношения:

$$\begin{cases} v_{x,\,n+1}=v_{x,n}+(F_x/m)\,\Delta t; \\ v_{y,\,n+1}=v_{y,n}+(F_y/m)\,\Delta t; \end{cases} \qquad (5.113)$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+v_x\Delta t; \\ y_{n+1}=y_n+v_y\Delta t; \\ t_{n+1}=t_n+\Delta t. \end{cases}$$

Используем программы, аналогичные приведенным в решении задачи 2.5.9, заменяя формулы для вычисления сил.

Для ПМК распорядимся памятью:

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
Сначала	Счетчик циклов	$-a$	p	v_{x0}	0	—	Δt	—	—	$\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 m}$	N	—
Потом		x	y	v_x	v_y	r^2 F/m						r

Коэффициент $\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 m}$ для α-частицы ($q_1=2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл) и для ядра ${}_{79}\mathrm{Au}^{197}$ ($q_2=79\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл) равен (сосчитаем на калькуляторе в ручном режиме) 5,48 (в СИ). Расстояние a следует взять много больше p (частица летит издалека), например $a=10^{-14}$ м. При скоростях порядка 10^7 м/с и расстояниях порядка 10^{-15} м времена будут $\sim 10^{-22}$ с. Поэтому возьмем для начала $\Delta t=2\cdot 10^{-23}$ с, а $N=5$.

Программа:

00 ИПА П0	заполнение счетчика
02 ИП1 Fx^2 ИП2 Fx^2 + П5 F $\sqrt{\ }$ ПВ	r^2, r
10 ИП9 ИП5 ÷ П5	F/m
14 ИП1 × ИПВ ÷	F_x/m
18 ИП6 × ИП3 + П3	v_x
23 ИП6 × ИП1 + П1	x
28 ИП5 ИП2 × ИПВ ÷	F_y/m
33 ИП6 × ИП4 + П4	v_y
38 ИП6 × ИП2 + П2	y
43 FL0 $\boxed{02}$	обращение к счетчику
45 ИП1 С/П ИП2 С/П БП $\boxed{00}$	вывод x, y

Ответ:

x, м	$-8{,}9$	$-8{,}5$	$-8{,}7$	$-9{,}6$	$-11\cdot10^{-15}$
y, м	2,1	2,3	2,7	3,3	$4{,}0\cdot10^{-15}$

Уходит около 70 с на расчет одной точки. Эти точки следует отложить на графике. Тогда будет видно, что получается гипербола типа изображенной на рисунке 139, *б* (x все время отрицателен и всегда $F_x<0$).

Угол α (см. рис. 139, *б*) можно найти после вычисления траектории до достаточно больших $|x|$ и y (по сравнению с $|a|$ и p) по формулам

$$\operatorname{tg}\alpha=|v_x|/v_y;\quad \alpha=\operatorname{arctg}(|v_x|/v_y),$$

нажав клавиши (переключатель — в положении «Р»):

ИП3 /—/ ИП4 $\div$ F arctg

В нашем примере $\alpha\approx1{,}1$ рад $\approx62°$. Следовательно, угол рассеяния $\vartheta=\alpha+90°=152°$.

Программа для ПЭВМ строится по тому же алгоритму при обозначениях: $F_x\equiv$FX; $F_y\equiv$FY; $v_x\equiv$VX; $v_y\equiv$VY; $\alpha\equiv$AL; $\theta\equiv$TE; $\Delta t\equiv$T1; $\varepsilon_0\equiv$EØ; кинетическая энергия K.

Программа:

```
1 PRINT "RASSAL"
2 PRINT "РАССЕЯНИЕ АЛЬФА-ЧАСТИЦ"
10 Q1=2*1.6E-19
20 Q2=79*1.6E-19
30 M=4*1.67E-27
40 J0=8.85E-12
50 A=5E-14
60 P0=5E-15
70 K=4E6*1.6E-19
80 V0=SQR(2*K/M)
90 F1=Q1/J0*Q2/4/PI
100 T1=5E-23
110 SCREEN 2
120 CIRCLE (A*1E16,10),4,8,,,.64
130 FOR P=P0 TO 10*P0 STEP P0
140 X=0
150 Y=P
160 VX=V0
170 VY=0
180 R2=(A-X)^2+Y^2
190 R=SQR(R2)
200 FX=-F1/R2*(A-X)/R
210 VX=VX+FX*T1/M
220 X=X+VX*T1
230 FY=F1/R2*Y/R
240 VY=VY+FY*T1/M
250 Y=Y+VY*T1
260 X8=X*1E16
270 Y8=Y*1E16*.64+10
280 IF X8>630 THEN 320
290 IF X8<0 THEN 320
300 IF Y8>260 THEN 320
310 PSET (X8,Y8)
```

```
315 GOTO 190
320 NEXT P
330 GOTO 330
```

2.16.5. Будут получаться траектории — гиперболы (рис. 140). При больших p они подобны изображенным на рисунке 139, *а*, при малых — на рисунке 139, *б*. В программе, приведенной в решении предыдущей задачи, уже организован перебор разных значений p. Значения для p, меньшие чем $2\cdot10^{-15}$ м, брать не следует, так как начинает уже сказываться неточечность ядра и начинаются отклонения от закона Кулона. Следовательно, и наши расчеты становятся неверными. Начиная с $p\leqslant10^{-15}$ и $\vartheta\gtrsim150°$ на опыте будут получаться отклонения, не соответствующие таким расчетам. (Именно отсюда Резерфорд в 1911 г. и оценил впервые размер ядра: $\sim10^{-15}$ м.)

2.16.6. Для многократных вычислений по формуле (2.16.3) и для получения ответа в нм переведем R в нм$^{-1}$:
$R=1{,}097373\cdot10^{-2}$ нм$^{-1}$ и распорядимся памятью ПМК (оставляя ЯП0 и ЯП1 для счетчиков циклов):

ЯП	0	1	2	3	4	5
Сначала Потом			m	n	— $1/n^2$	R

Программа:

00 ИП3 Fx^2 F1/x П4 . . . . $1/n^2$
04 ИП2 Fx^2 F1/x . . . . $1/m^2$
07 ИП4 $\leftrightarrow$ — . . . . скобка
10 ИП5$\times$F1/x С/П . . . . λ

Инструкция. F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод $R\to$ ЯП5, $n\to$ ЯП3, $m\to$ ЯП2; В/0 С/П.

Более совершенная программа с автоматическим перебором всех значений m от $n+1$ до указанного числа линий в серии и перебором значений n от начального до указанного числа серий (при условии, что число линий заложено в ЯП0 и ЯПА, число серий — в ЯП1, а n (начальное) — в ЯП3) может быть такой:
Программа:

00 ИП3 Fx^2 F1/X П4 . . . . $1/n^2$
04 ИП3 1 + П2 . . . . установка начального m
08 Fx^2 F1/x ИП4 $\leftrightarrow$ — . . . . скобка
13 ИП5 $\times$ F1/x С/П . . . . вывод λ
17 FL0 $\boxed{23}$ FL1 $\boxed{29}$ . . . . запрос счетчика циклов
21 C_x F 1/x . . . . сообщение об окончании вычислений («ЕГГОГ»)

23 ИП2 1 + П2 БП $\boxed{08}$ . . . . наращивание m

29 ИП3 1 + П3 . . . . наращивание n

33 ИПА П0 БП $\boxed{00}$ . . . . восстановление счетчика по m и переход к началу

В этом случае для получения всех линий достаточно много раз нажать клавишу С/П.

Ответ. $\lambda = 121{,}5$ нм $= 1215$ Å ($n=1$; $m=2$); 102 нм ($n=1$; $m=3$) и т. д.; $\lambda = 2673{,}7$ нм $= 26{,}7$ мкм ($n=5$; $m=13$).

Программа для вычислений на ПЭВМ:

```
1 PRINT "WODOR"
10 PRINT "ВЫЧИСЛ. ДЛИН ВОЛН ИЗЛ. ВОДОР."
20 R=1.097373E-02
30 FOR N=1 TO 4
40 PRINT "N="N
50 FOR M=N+1 TO N+6
60 X=R*(1/(N^2)-1/(M^2))
70 PRINT TAB(5) "M="M;",L="1/X
90 NEXT M
100 NEXT N
110 END
```

Протокол диалога:

```
N= 1
     M= 2 ,L= 121.5023
     M= 3 ,L= 102.5176
     M= 4 ,L= 97.20184
     M= 5 ,L= 94.92366
     M= 6 ,L= 93.73034
     M= 7 ,L= 93.02518
N= 2
     M= 3 ,L= 656.1123
     M= 4 ,L= 486.0092
     M= 5 ,L= 433.9367
     M= 6 ,L= 410.0702
     M= 7 ,L= 396.9075
     M= 8 ,L= 388.8073
N= 3
     M= 4 ,L= 1874.607
     M= 5 ,L= 1281.469
     M= 6 ,L= 1093.521
     M= 7 ,L= 1004.672
     M= 8 ,L= 954.3452
     M= 9 ,L= 922.658
N= 4
     M= 5 ,L= 4050.076
     M= 6 ,L= 2624.449
     M= 7 ,L= 2164.95
     M= 8 ,L= 1944.037
     M= 9 ,L= 1816.927
     M= 10 ,L= 1735.747
```

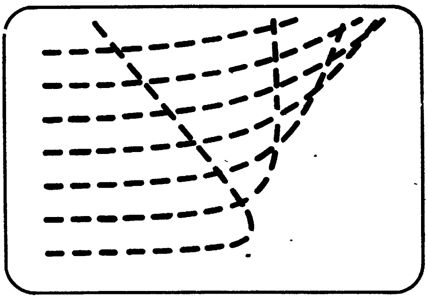


Рис. 140

Имея графический цветной дисплей, легко можно получить на экране изображение цветных линий спектра. Для этого после вычисления каждой длины волны надо добиваться, чтобы машина вычерчивала на экране вертикальную черточку (оператор LINE). При этом надо указать цвет (оператор COLOR), руководствуясь таблицей 5.1.

Таблица 3.3.1

Перемещение содержимого регистров стека ПМК при различных операциях

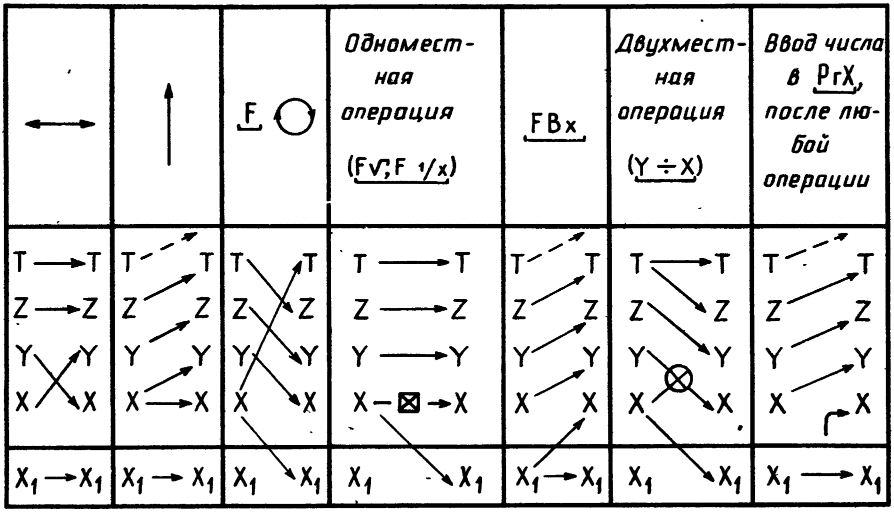


Таблица 3.3.2

Пример перемещений в стеке при вычислениях

$P_г$	T	0	0	0	0	0	6	6					
	Z	0	0	0	6	6	2	2	6				
	Y	0	6	6	2	2	5	5	2	6	18		
	X	6	6	2	2	5	5	4	9	18	6	3	1,73
Операция		6	↑	2	↑	5	↑	4	+	×	↔	÷	F√

Таблица 3.4.1

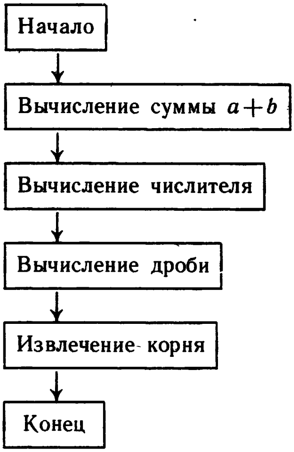
Коды основных команд калькуляторов БЗ-34, МК-56

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	—	L	C	Г	E
0				3				7				/—/	ВП	C_x	↑
1	+	−	×	÷	↔	F 10^x	Fe^x	F lg	F ln				F sin	F cos	F tg
2															
3															
4					П4			П7			ПА	ПВ	ПС	ПД	
5	С/П	БП	В/0	ПП										FLO	
6					ИП4			ИП7			ИПА	ИПВ	ИПС	ИПД	

Таблица 3.4.2

Программа многократных вычислений по формуле $\sqrt{(a+b)\,c/d}$

1. Алгоритм:



2. Распределение памяти:

ЯП	0	1	2	3. . .	5. . .	А	В	С	Д
Число	a	b	c	d	Δc				

3. Программа:

Шаг (адрес)	Команда (операция)	Код	Комментарии
00	→ ИП0	60	
01	ИП1	61	— $(a+b)$
02	+	10	
03	ИП2	62	— числитель
04	×	12	
05	ИП3	63	— дробь
06	÷	13	
07	F $\sqrt{\ }$	21	
08	С/П	50	
09	БП	51	
10	00	00	

4. *Инструкция.* F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод операндов (a П0, b П1, c П2, d П3); В/0 С/П ———

5. *Тест.* $a=4$, $b=5$, $c=2$, $d=6$. Ответ. 1,7320508 через 4 с

Таблица 3.4.3

Сокращенная форма записи программы для ПМК

00 ИП0 ИП1 + ...	$(a+b)$
03 ИП2 ×	числитель
05 ИП3 ÷	дробь
07 F$\sqrt{\ }$ С/П БП 00	ответ, остановка для вывода ответа и переход на нулевой шаг для новых вычислений

Таблица 3.5.1

Усовершенствование программы, приведенной в таблице 3.4.2 (автоматическое изменение параметра)

3.	Адрес	Команда	Код	
	00	ИП0	60	
	01	ИП1	61	
	02	+	10	
	03	ИП2	62	
	04	×	12	
	05	ИП3	63	
	06	÷	13	
	07	F$\sqrt{\ }$	21	
	08	С/П	50	
	09	ИП2	62	— наращивание *c*
	10	ИП5	65	
	11	+	10	
	12	П2	42	
	13	БП	51	
	14	00	00	

4. *Инструкция.* F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод операндов (*a* П0; *b* П1, *c* П2, *d* П3, Δc П5); В/0 С/П——— С/П——— С/П———.

Программа вычисления суммы $z=\sum\limits_{n=0}^{N}(n+5{,}2)^2$

2.	ЯП	0	1	2	3	....	Д
	Сначала		5,2	N	0		0
	Потом				n		Σ

3. Программа:

00	ИП3	63	— достать n из ЯП3
01	ИП1	61	
02	+	10	— $(n+5{,}2)^2$
03	Fx^2	22	
04	ИПД	6Г	
05	+	10	— наращивание Σ
06	ПД	4Г	
07	ИП3	63	
08	ИП2	62	— $n-N$
09	—	11	
10	$Fx\geqslant 0$	59	— до перехода к следующему циклу делается проверка: все ли циклы уже выполнены ($n\geqslant N$?)
11	Нет $\boxed{14}$ Да	14	— если «Нет», то $\boxed{14}$
12	ИПД	6Г	— если «Да», то вывести на экран сумму из ЯПД и стоп
13	С/П	50	
14	ИП3	63	
15	1	01	— наращивание n
16	+	10	
17	П3	43	
18	БП	51	— безусловный переход . . .
19	$\boxed{01}$	01	— . . . по адресу $\boxed{01}$

4. *Инструкция.* F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод операндов; В/0 С/П . . . .

5. *Тест.* При $N=2$ $z=117{,}32$ (14 с); при $N=100$ $z=393601{,}04$ (8 мин)

Таблица 3.5.3

Использование команды FL0 для организации циклов

1. $\sum_{n=0}^{N}(n+5,2)^2$

2.

ЯП	0	1	2	3	...	Д
Сначала	$(N+1)$	5,2	—	0		0
Потом				n		Σ

3.

00 ИП3 ИП1 + Fx^2 . . . . . . вычисление $(n+5,2)^2$

04 ИПД + ПД . . . . наращивание суммы Σ

07 FL0 $\boxed{11}$ . . . . если не все циклы выполнены (в ЯП0 еще не 0), то $\boxed{11}$

09 ИПД С/П . . . . если все циклы выполнены, то вывести на экран сумму из ЯПД и стоп

11 ИП3 1 + П3 . . . . наращивание n

15 БП $\boxed{01}$ . . . . безусловный переход на шаг $\boxed{01}$

5. *Тест*. При $N=100$ $z=393601,04$ (6 мин)

Таблица 3.5.4

Клавиши-команды ПМК

	Клавиши	Режим	
		АВТ	ПРГ
Ввод данных	0, 1, ..., 9	Ввести цифры 0, 1, ..., 9	То же, но по программе
	C_x	Стереть с экрана	—»—
	/—/	Изменить знак	—»—
	ВП	Ввести порядок	—»—
Операция	↑	Поднять по стеку	—»—
	↔	Поменять местами содержимое X и Y	—»—
	+, −, ×, ÷	Сложить (вычесть... разделить Y на X)	—»—
	F sin, F $\sqrt{\ }$	Взять синус, извлечь корень из X ...	—»—
	FB_x	Восстановить предыдущее X	—»—
	П0, П1, ..., ПД	Положить в ЯП0, 1...Д	—»—
	ИП0, ИП1, ..., ИПД	Достать из ЯП0, 1...Д	—»—
Безусловный переход	БП61	Переход на адрес 61	—»—
	ПП, ПП50	Пошаговое прохождение	Переход на подпрограмму, расположенную по адресу 50
	В/0	Установка на нулевой шаг программы	Возврат из подпрограммы
	$\overrightarrow{ШГ}$ ($\overleftarrow{ШГ}$)	Шаг по программе вперед (назад)	
	С/П	Стоп-пуск	То же, но по программе
Условные переходы, циклы, косвенные переходы	Fx<0 23	Переходы по условию (если $x<0$, то через шаг; если «Нет», то по адресу 23)	—»—
	FL 0 04	Организация циклов (из содержимого ЯП0 вычесть 1, и если 0, то через шаг, если не 0, то возврат на адрес 04)	—»—
	КИП0	Косвенные переходы	—»—

Примечание. Команды БП60, ПП50, Fx<0 23, FL 0 04 являются двойными (занимают в программе два шага). При переделке программ их надо перебирать полностью вместе с указанным адресом. Например, заменить БП60 на БП61 или Fx<0 23 на Fx⩾0 23 можно, перебрав полностью два шага БП и 61 или Fx⩾0 и 23.

Таблица 3.7.1

Наиболее часто используемые команды и операторы языка Бейсик

LET X=2 — оператор ввода, присвоения: присвоить переменной X значение 2 (символы "LET" часто опускают)

PRINT ("искомая величина равна" Z) — оператор вывода информации из машины. Команда: напечатать дословно текст в кавычках и величину Z. Вместо Z может стоять выражение, которое надо вычислить, а напечатать требуется только результат

DEF FNY (X) — ввести определение функции пользователя

STOP — остановиться

END — конец программы, остановиться

LIST — распечатать всю программу

LIST 13 — распечатать строку 13 программы

LIST 13—20 — распечатать часть программы от строки 13 до строки 20

INPUT D 2 — останов машины для ввода численного значения величины D 2

GOTO 500 — безусловный переход на строку 500

GOSUB 600 — переход на подпрограмму, расположенную со строки 600

RETURN — возврат из подпрограммы

IF A< > B THEN 120 — оператор условного перехода: если $A \neq B$, то переход на строку 120; если нет (в данном случае, если A=B), то переход на следующую строку

IF A=B THEN PRINT "A=B. Вы достигли желаемого": END, после THEN можно непосредственно поставить любой другой оператор, остальное — как в предыдущем случае

FOR I =3 TO Z STEP. 1
FOR I =X TO 21.5 STEP. 5 } — проделать все, что стоит в программе, вплоть до оператора NEXT несколько раз, каждый раз наращивая I от начального значения до конечного шагами, указанными после STEP. Если шаг не указан, то он будет равен 1. По достижении конечного значения I машина выйдет из цикла, т. е. будет выполнять операции, указанные в строках за NEXT. Может быть несколько циклов, вложенных друг в друга

PRINT TAB (A+B ⌐ 2 * SIN (X)) + — напечатать на расстоянии, равном $A+B^2 \sin x$ от левого края бумаги, знак +

DIM A5 (99) — объявить массив, выделить место для массива A5 в 100 чисел

DATA 1.3, 1.5, 1.8E — 6, X2, A+B * C, 17 — занести ряд чисел именно в этой последовательности в особый блок памяти "DATA"

READ A1, A2, A3, A4 — присвоить переменным A1, A2 и т. д. значения из блока DATA именно в такой последовательности. В программе этот оператор может повторяться: READ A5, A6. Тогда произойдет присвоение: A5=A+B * C, A6=17, поскольку счетчик DATA стоял на цифре 4 после считывания первых четырех чисел. Но если в программе поставить оператор RESTORE, то счетчик встанет на начало и READ A5, A6 будет означать присвоение: A5=1.3, A6=1.5

RESTORE — сбросить счетчик блока DATA

REWIND — перемотать магнитную ленту на начало

SAVE — записать на магнитную ленту всю программу

SAVE "INT" — записать на магнитный диск или ленту программу, находящуюся в данный момент в ОЗУ, присвоив ей имя INT

LOAD "INT" или OLD "INT" — загрузить в ОЗУ машины с магнитного накопителя программу, названную ранее INT. Вся старая программа, имеющаяся в данный момент в ОЗУ, стирается, кроме интерпретатора языка Бейсик

NEW — стереть всю программу в ОЗУ (для ввода новой программы с клавиатуры)

Таблица 3.10.1

Встроенные функции ПЭВМ

SIN COS TAN ASN (arcsin) ACS ATN HSN (sh — синус гиперболический) HCS HTN AHS (arcsh) AHC AHT	DEG — перевести в градусы RAD — —»— в радианы ABS — взять абсолютное значение EXP — e^x EXT — 10^x LOG — ln — натуральный LGT — lg — десятичный SQR — $\sqrt{}$ INT — взять целую часть от числа SGN — взять знак числа RND — случайное число между 0 и 1

Таблица 3.11.1

Программа «ВОДОРОД» для вычисления длины волны водорода на ПЭВМ (Бейсик)

1. Используется формула Бальмера:

$$\lambda^{-1}=R(1/n^2-1/m^2)$$

Возьмем значения: $n=2$; $m=3$

3. **Программа:**

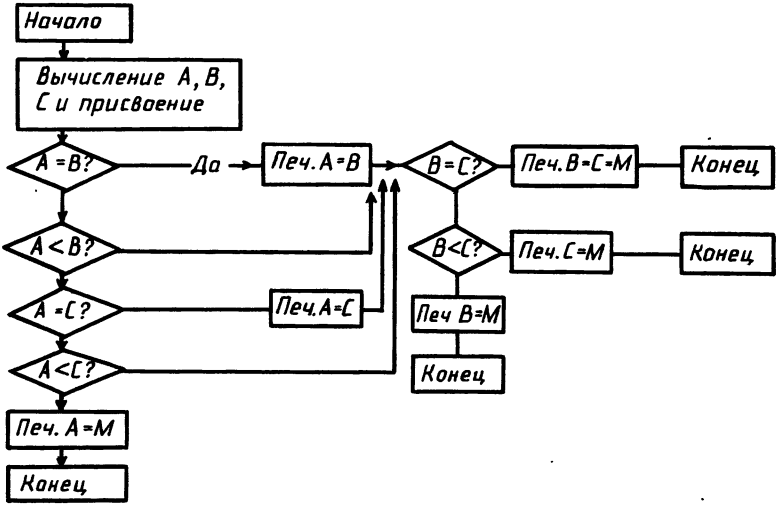
```
1 PRINT "289"
3 PRINT "WODO1"
10 PRINT "ВЫЧИСЛ.ДЛ.ВОЛНЫ ОДНОЙ ЛИНИИ"
20 R=1.097373E-02
30 N=2
50 M=3
60 X=R*(1/N/N-1/M/M)
70 PRINT "L="1/X
110 END
```

4. *Инструкция.* 1) Подготовьте машину к работе на языке Бейсик с помощью инструкции к данной ПЭВМ и получите сообщение о готовности. 2) Введите программу, набирая строки с номерами. В конце каждой строки делайте возврат каретки (ВК). 3) Пустите машину на счет, набирая (без номера строки) оператор RUN («беги, выполняй») и ВК

5. *Тест.* При заданных значениях операндов машина должна вывести ответ: L=6.5611*E*02*НМ*, что означает $\lambda=656{,}11$ нм

Программа «ВЫБОР» для выбора наибольшего числа из трех чисел на ПЭВМ (Бейсик)

1. *Алгоритм:*



Если «Да», то здесь осуществляются все переходы по линиям вправо от условия (условие выполняется); если «Нет», то вниз (условие не выполняется). Сначала берется первое число и сравнивается с последующими. Если оно оказывается меньше хотя бы одного из них, то оно выбрасывается и программа работает с другим числом, и т. д. (алгоритм легко расширить на любое число чисел)

3.

```
1 PRINT "WYBOR"
10 PRINT "ВЫБОР НАИБ. ЧИСЛА"
20 INPUT "A=";A
30 INPUT "B=";B
40 INPUT "C=";C
50 IF A=B THENGOTO 60 ELSE 80
60 PRINT "A=B"
70 GOTO 150
80 IF A<B THEN 150
90 IF A=C THEN GOTO 100 ELSE GOTO 120
100 PRINT "A=C"
110 GOTO 150
120 IF A<C THEN GOTO 150
130 PRINT "A=МАКС=",A
140 STOP
150 IF B=C THEN GOTO 160 ELSE GOTO 180
160 PRINT "B=C=МАКС=",B
170 STOP
180 IF B<C THEN GOTO 190 ELSE 210
190 PRINT "C=МАКС=",C
200 STOP
210 PRINT "B=МАКС=",B
220 END
```

4. *Инструкция.* Введите программу, просмотрите ее оператором LIST (ВК) и дайте команду RUN (ВК). Машина спросит: A=. После ответа (и ВК) она спросит: B= и т. д. После введения C (и ВК) машина выполнит сравнение и даст ответ

Таблица 4.1.1

Многократное решение квадратного уравнения (нахождение только действительных корней)

1. $ax^2+bx+c=0$; $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
2.   ЯП | . . . A B C D   Число | . . . a b c $\sqrt{b^2-4ac}$
3. Программа: 00 ИПВ Fx² 4 ИПА × ИПС × —F√ ПD . . . . $\sqrt{b^2-4ac}$ 10 ИПВ /—/ ИПD+2÷ИПА÷ С/П . . . . . . x_1 19 ИПВ /—/ ИПD—2÷ИПА÷ С/П . . . . . . x_2
4. *Инструкция.* F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод ($a\to$ПА, $b\to$ПВ, $c\to$ПС); В/0 С/П____ вывод x_1; С/П____ вывод x_2. Ввод новых значений a, b, c В/0 С/П____ и т. д.   Если возникают затруднения при вводе программы, ее проверке и т. д., то следует программу записать подробно (с кодами) так, как в таблице 3.5.2 и ранее   **5.** *Тесты.* 1. $x^2-4x-5=0\to x_1=5$; $x_2=-1$ 2. $x^2-4x+5=0$ Ответ. ″ЕГГОГ″ (нет действительных корней)

Таблица 4.1.2

Программа "КВУР" для решения квадратного уравнения на ПЭВМ (Бейсик)

1. $ax^2+bx+c=0$, например: $1{,}1x^2-10x+0{,}9=0$

3. **Программа:**

```
1 PRINT "KVUR"
2 PRINT "РЕШ.КВАДР.УРАВНЕНИЯ"
10 DATA 1.1,-10,.9
20 READ A,B,C
30 IF A<>0 THEN 120
40 IF B<>0 THEN 100
50 IF C<>0 THEN 80
60 PRINT "РЕШ.БЕСК. МНОГО"
70 GOTO 7999
80 PRINT "РЕШ. НЕТ"
90 GOTO 7999
100 PRINT "КОР. ОДИН X=";-C/B
110 GOTO 7999
120 E=2*A
130 D=B^2-2*E*C
140 IF D<>0 THEN 170
150 PRINT "КОР. КРАТНЫЕ X1=X2=";-B/E
160 GOTO 7999
170 D1=SQR(ABS(D))
180 IF D<0 THEN 220
190 PRINT "КОР.ДЕЙСТВ. X1=";(-B+D1)/E
200 PRINT "X2=";(-B-D1)/E
210 GOTO 7999
220 PRINT "КОР.КОМП.СОПР."
230 PRINT "X1=";-B/E "+1*";ABS(D1/E)
240 PRINT "X2=";-B/E "-1*";ABS(D1/E)
7999 END
```

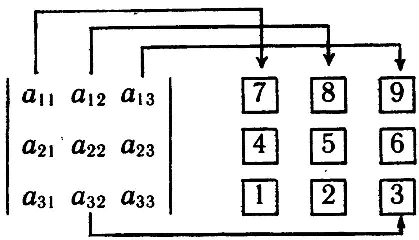
4. *Инструкция.* Ввести строки 1, 2. Ввести "10 DATA" и здесь через запятую ввести свои коэффициенты A, B, C. Ввести все остальные строки программы: LIST, RUN, . . .

5. Ответ:

КОР. ДЕЙСТВ. X1 = 9.000
X2 = 9.091E − 02

Программа нахождения корней трех линейных уравнений с тремя неизвестными (ПМК)

2. Размещение коэффициентов:



3. Программа 1:

00	ИП7	ИП5	ИП3	×	×	П0
06	ИП8	ИП6	ИП1	×	×	ИП0+П0
14	ИП9	ИП4	ИП2	×	×	ИП0+П0
22	ИП9	ИП5	ИП1	×	×	ИП0 ↔ — П0
31	ИП7	ИП6	ИП2	×	×	ИП0 ↔ — П0
40	ИП8	ИП4	ИП3	×	×	ИП0 ↔ — С/П

Программа 2:

50	ИПА	ИПD	÷ С/П
54	ИПВ	ИПD	÷ С/П
58	ИПС	ИПD	÷ С/П

4. *Инструкция.* F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы 1; F АВТ; ввод коэффициентов по приведенной выше схеме (a_{11} П7, a_{12} П8 и т. д.) В/0 С/П ____; Записать Δ в ЯПD. Заменить содержимое ЯП7, ЯП4 и ЯП1 свободными членами: b_1, b_2, b_3; В/0 С/П ____ Записать Δ_1 в ЯПА и т. д., $\Delta_2 \to$ ЯПВ, $\Delta_3 \to$ ЯПС. Затем БП 50 С/П ____ вывод x С/П ____ вывод y С/П ____ вывод z

5. *Тест.*

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1; \\ x+3y+2z=2; \\ 2x+y+3z=3; \end{cases}$$

$\Delta=18$ $x=0$
$\Delta_1=0$ $y=0$
$\Delta_2=0$ $z=1$
$\Delta_3=18$

Таблица 4.2.2

Программа решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

1. $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1$;
$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2$;
$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3$

3. При обозначениях:

$$a_{11}\equiv \mathrm{A1} \quad a_{12}\equiv \mathrm{A2} \quad a_{13}\equiv \mathrm{A3} \quad b_1\equiv \mathrm{A}$$
$$a_{21}\equiv \mathrm{B1} \quad a_{22}\equiv \mathrm{B2} \quad a_{23}\equiv \mathrm{B3} \quad b_2\equiv \mathrm{B}$$
$$a_{31}\equiv \mathrm{C1} \quad a_{32}\equiv \mathrm{C2} \quad a_{33}\equiv \mathrm{C3} \quad b_3\equiv \mathrm{C}$$

в соответствии с разделом 4.2 **программа** на языке Бейсик:

```
1 PRINT "SYSTUR"
10 PRINT "РЕШ.СИСТ.3 ЛИН.УР.С 3 НЕИЗ."
20 INPUT A1,A2,A3,A
30 INPUT B1,B2,B3,B
40 INPUT C1,C2,C3,C
50 D=A1*B2*C3+A2*B3*C1+A3*B1*C2-A3*B2*C1-A1*B3*C2-A2*B1*C3
60 D1=A*B2*C3+A2*B3*C+A3*B*C2-A3*B2*C-A*B3*C2-A2*B*C3
70 D2=A1*B*C3+A*B3*C1+A3*B1*C-A3*B*C1-A1*B3*C-A*B1*C3
80 D3=A1*B2*C+A2*B*C1+A*B1*C2-A*B2*C1-A1*B*C2-A2*B1*C
90 IF D<>0 THEN 170
100 IF D1<>0 THEN 150
110 IF D2<>0 THEN 150
120 IF D3<>0 THEN 150
130 PRINT "РЕШ.НЕ ОПРЕДЕЛЕНО"
140 STOP
150 PRINT "СИСТ.НЕ ИМЕЕТ РЕШ."
160 STOP
170 PRINT "X=",D1/D
180 PRINT "Y=",D2/D
190 PRINT "Z=",D3/D
200 END
```

5. *Тест*

```
SYSTUR
 3  2  1  1
 1  3  2  2
 2  1  3  3
X=              0
Y=              0
Z=              1
```

Таблица 4.3.1

Программа взятия определенного интеграла методом прямоугольников для ПМК

1. $\int_{x_1}^{x_2} y\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \bar{y}_i \Delta x_i$

2. ЯП	1	2	3	4	5	6	7	8	..	D
Сначала	x_1	x_2	Δx	A	B	—	—	—		0
Потом	x						Ax^2			$\sum y_i$

3. Программа:

00 ПП $\boxed{50}$ . . . . вычисление по подпрограмме, расположенной по адресу $\boxed{50}$

02 ИП3 × . . . . площадь полоски: $y_i \Delta x$

04 ИПД+ПД . . . . наращивание интегральной суммы

07 ИП1 ИП3+П1 . . . . . . наращивание x (получение x_i)

11 ИП2 — Fx=0 $\boxed{00}$ . . . . сравнение x_i с x_2; если x_i еще не равно x_2, то переход по адресу $\boxed{00}$

15 ИПД С/П . . . . если x_i равно x_2, то вывод суммы на экран и стоп

3а. Подпрограмма зависит от вида подынтегральной функции. Например, для $I = \int_0^{10} (Ax^2 + Bx)\,dx$ при условии, что параметры A и B будут положены соответственно в ЯП 4 и 5, **подпрограмма** будет такой:

50 ИП1 Fx^2 ИП4 × П7 . . . Ax^2

55 ИП1 ИП5 × . . . . Bx

58 ИП7 + В/0 . . . . (Ax^2+Bx) и возврат из подпрограммы

4. *Инструкция.* F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ БП 50 F ПРГ; ввод подпрограммы; F АВТ; ввод операндов (x_1 П1, x_2 П2, Δx П3, 0 ПD, А П4, В П5) В/0 С/П ___ ___

5. *Тест.* При $A=30$; $B=20$; $\Delta x=0{,}5$ ответ: $I=10200$ через 3 мин (вместо точного значения 11 000)

Таблица 4.3.2

Программа "ИНТ-ПР" для взятия определенного интеграла методом прямоугольников на ПЭВМ (Бейсик)

1. $I=\int\limits_{X1}^{X2} YdX \approx \sum YS = S\sum Y \equiv SZ$, где S — шаг (Δx);

Y — значение функции при данном x (y_i) — см. табл. 4.3.1

3. **Программа** для $I=\int\limits_0^{10}(Ax^2+Bx)\,dx$:

```
1 PRINT "INTPR"
10 PRINT "ИНТ.МЕТ.ПРЯМОУГ."
20 Z=0
30 INPUT "X1=";X1
40 INPUT "X2=";X2
50 INPUT "N=";N
55 S=(X2-X1)/N
60 INPUT "A=";A
70 INPUT "B=";B
80 FOR X=X1 TO X2-S STEP S
90 GOSUB 500
100 Z=Z+Y
110 NEXT X
120 I=Z*S
130 PRINT "I=",I
140 END
500 Y=A*X^2+B*X
510 RETURN
```

4. *Инструкция.* 1) Введите программу, причем в строке 500 замените, если надо, подынтегральную функцию. 2) Распечатайте программу для проверки оператором LIST. 3) Дайте команду RUN. 4) Ответьте на вопросы машины. 5) После получения последнего ответа (и ВК) машина вычислит интеграл (при малом шаге это может занять большое время) и напечатает ответ

5. Пример протокола для случая $I=\int\limits_0^{10}(30x^2+20x)\,dx$:

RUN
ОПР. ИНТ. МЕТОДОМ ПРЯМОУГ.
X1=0
X2=10
N=1E3
A=30
B=20
I=1.095E 04

Таблица 4.3.3

Программа взятия определенного интеграла методом трапеций на ПМК (см. табл. 4.3.1)

1. $I \approx \left(\frac{y_1 + y_n}{2} + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} \right) \Delta x$

2.

ЯП	0	1	2	3	4	5	6 ...	A ...	D
Сначала	—	x_1	x_2	Δx	—	—	—	—	Σ
Потом								y_1	

3. Программа:

00 ИП1 ПП $\boxed{50}$ ПА . . . . y_1

04 ИП2 ПП $\boxed{50}$ . . . . y_n

07 ИПА + 2 ÷ ПД . . . . $(y_1+y_n)/2$

12 ИП1 ИП3 + П1 . . . . наращивание x

16 ИП2 —Fx⩾0 $\boxed{24}$ . . . . не дошли ли до x_2? Если не дошли, то $\boxed{24}$

Да

20 ИПД ИП3 × С/П . . . . если «Да», то вычисление $\Sigma\, \Delta x$ и стоп

24 ИП1 ПП $\boxed{50}$ . . . . y_{n+1}

27 ИПД + ПД . . . . наращивание Σ

30 БП $\boxed{12}$ . . . . переход по адресу $\boxed{12}$

3. Подпрограмма — см. табл. 4.3.1

Таблица 4.3.4

Вариант программы взятия определенного интеграла с использованием команды FL0

3.	
00 ИП1 ПП $\boxed{50}$ ПА	y_1
04 ИП2 ПП $\boxed{50}$	y_n
07 ИПА + 2 ÷ ПД	$(y_1+y_n)/2$
12 ИП1 ИП3 + П1	наращивание x
16 ПП $\boxed{50}$	очередное значение y
18 ИПД + ПД	наращивание Σ
21 FL0 $\boxed{12}$	выполнено ли столько циклов, сколько указано в ЯП0? Если нет, то — $\boxed{12}$
23 ИПД ИП3 × С/П	вычисление $\Sigma\,\Delta x$ и стоп
Подпрограмма с шага 50 зависит от вида подынтегральной функции — см. пункт 3а в табл. 4.3.1	
4. *Инструкция.* Отличается от таблицы 4.3.1 тем, что для варианта с FL0 необходимо заложить в ЯП0 число шагов, на которые разбит отрезок $[x_1,\ x_2]$, минус 1.	
5. *Тест.* В том же примере и при тех же условиях, что в таблице 4.3.1, ответ: I=10 212 через 2,5 мин	

Таблица 4.3.5

Программа "ИНТТР" ("INTTR") для взятия определенного интеграла методом трапеций на ПЭВМ (Бейсик)

1.

$$I=\left(\frac{y(x_1)+y(x_1+S)}{2}+\frac{y(x_1+S)+y(x_1+2S)}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{y(x_1+2S)+y(x_1+3S)}{2}+\ldots+\frac{y(x_2-S)+y(x_2)}{2}\right)*S=$$

$$=\left(\frac{y(x_1)+y(x_2)}{2}+y(x_1+S)+y(x_1+2S)+\ldots+y(x_2-S)\right)*S$$

(Обозначения точек и отрезков см. на рисунке 45)

2. Программа для $y=Ax+Bx$:

```
1 PRINT "INTTR"
10 PRINT "ИНТ.МЕТ.ТРАП."
20 Z=0
30 INPUT "X1=";X1
40 INPUT "X2=";X2
50 INPUT "N=";N
55 S=(X2-X1)/N
60 INPUT "A=";A
70 INPUT "B=";B
80 FOR X=X1+S TO X2-S STEP S
90 GOSUB 500
100 Z=Z+Y
110 NEXT X
120 X=X1
130 GOSUB 500
140 Y1=Y
150 X=X2
160 GOSUB 500
170 Y2=Y
180 I=((Y1+Y2)/2+Z)*S
190 PRINT "I=",I
200 END
500 Y=A*X^2+B*X
510 RETURN
```

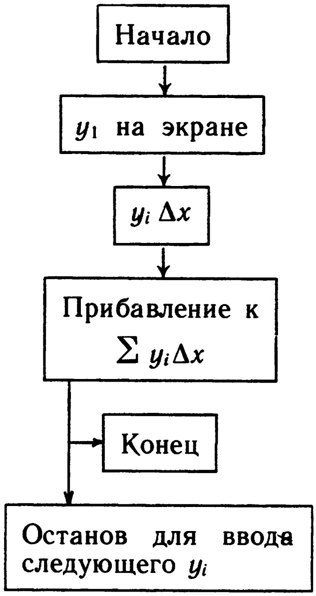
4. *Инструкция* та же, что в таблице 4.3.2

Таблица 4.3.6

Программа вычисления определенного интеграла, когда подынтегральная функция задана в виде последовательности чисел (для ПМК)

1. Алгоритм: $\int_{x_1}^{x_2} y dx \approx \sum y_i \Delta x$

(метод прямоугольников).



2.

ЯП	... 3	... D
Число	Δx	Σ

3.

00 ИП3 × . . . . $y_i \Delta x$
02 ИПД + ПД С/П . . . . наращивание суммы и остановка для ввода следующего y_i
06 БП $\boxed{00}$ . . . . переход к повторению программы

4. *Инструкция.* F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; вывод Δx; П3 О ПD y_1; В/0 С/П ——— y_2 С/П ——— y_3 С/П ——— ответ на экране

55. *Тест.* Для приведенных в разделе 4.4 x_i и y_i ответ: $I=228$

Таблица 4.3.7

Программа "ИНТЧИС" для взятия определенного интеграла при задании подынтегральной функции в виде ряда чисел на ПЭВМ (Бейсик)

1. Алгоритм: см. табл. 4.3.6

2. **Программа:**

```
1 PRINT "INTSHI"
10 PRINT "ОПР. ИНТ. ОТ ФУНКЦИИ, ЗАД. ЧИСЛОМ"
20 Z=0
30 INPUT "X1=";X1
40 INPUT "X2=";X2
50 INPUT "S=";S
60 FOR X=X1 TO X2-S STEP S
70 INPUT "Y=";Y
80 Z=Z+Y*S
90 NEXT X
100 PRINT "ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТ. ЗАКОНЧЕНО, I=",Z
110 END
```

4. *Инструкция.* 1) Введите программу. 2) Распечатайте программу для проверки оператором LIST. 3) Дайте команду RUN. 4) Ответьте на вопросы машины. 5) После введения последнего значения Y (и ВК) машина даст ответ

5. Пример протокола:

```
RUN
ОПР. ИНТ. ОТ ФУНКЦИИ, ЗАД. ЧИСЛ.
X1=0
X2=5
S=1
Y=1
Y=1
Y=1
Y=1
Y=1
ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТ. ЗАКОНЧЕНО, 1=5.00
```

Таблица 4.4.1

Решение приведенного кубического уравнения вида $y^3+py+q=0$

2.

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7
Сначала	p	q	—	—	—	—	—	—
Потом			$q/2$	$p/3$	$\left(\frac{q}{2}\right)^2$	$\left(\frac{p}{3}\right)^3$	$\sqrt{\ }$	1/3

3. Программа:

00 ИП1 2 $\div$ П2 Fx^2 П4 . . . . $(q/2)^2$

06 ИП0 3 $\div$ П3 $\uparrow$ $\uparrow$ $\times$ $\times$ П5 . . . . $(p/3)$ и $(p/3)^3$

15 ИП4 + F$\sqrt{\ }$ П6 . . . . $\sqrt{(q/2)^2+(p/3)^3}$

19 ИП2 $-$F$x<0$ $\boxed{33}$ /—/ 3 F1/x П7 $\leftrightarrow$ Fx^y /—/ П8 БП $\boxed{39}$ . . . .

$\leftrightarrow$ Fx^y /—/ первый кубический корень, если под корнем отрицательное число

33 3 F 1/x П7 $\leftrightarrow$ Fx^y П8 . . . . —»— если положительное

39 ИП2 ИП6 + F$x\geqslant 0$ $\boxed{50}$ ИП7 $\leftrightarrow$ Fx^y /—/

БП $\boxed{54}$ . . . . второй кубический корень, если под корнем отрицательное число

50 /—/ ИП7 $\leftrightarrow$ Fx^y . . . . —»— если положительное

54 ИП8 + С/П

5. *Тест.* $y^3+5y+5=0$; действительный корень $y=-0{,}86$ (18 с)

Таблица 4.4.2

Программа решения уравнения для ПМК простейшим методом

1. Алгоритм ясен из текста

2.

ЯП	...	1	...	7	...	A	...
Сначала		Δx		—		a	
Потом				$F(a)$		x	

3. Программа:

00 ПП $\boxed{50}$ П7 . . . . $F(a)$

03 ИПА ИП1 + ПА . . . . . наращивание x

07 ПП $\boxed{50}$ . . . . $F(x)$

09 ИП7 × Fx<0 $\boxed{03}$ . . . если $F(a)\,F(x)\geqslant 0$, то $\boxed{03}$

13 ИПА С/П . . . . если $F(a)F(x)<0$, то $F(x)$ изменила знак, т. е. пройден корень. Тогда вывести x и стоп

3а. Подпрограмма, располагаемая с шага $\boxed{50}$, зависит от вида $F(x)$. Для $F(x)=3\sin x-x=0$:

50 ИПА F sin 3 × ИПА — В/0

4. *Инструкция.* F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; БП 50 F ПРГ; ввод подпрограммы; F АВТ; ввод операндов (Δx П1, a ПА); В/0 С/П ____ (переключатель "Р — Г"— в положении "Р")

5. *Тест.* Для уравнения $3\sin x-x=0$ при $a=2$ $\Delta x=0{,}2$; корень $x\approx 2{,}4$ (18 с). Следует вернуться на шаг назад ($a=2{,}2$) и взять $\Delta x=0{,}01$ и т. д.

Таблица 4.4.3

Программа решения уравнения $3 \sin x = x$ на ПЭВМ (Бейсик)

1. Алгоритм. Для изоляции корней просим машину сначала грубо вычертить график зависимости $F(x)$. Для данного конкретного уравнения $F(x) = 3 \sin x - x$ график чертится по приведенной ниже программе UR1. Затем ищем корни, например, по простейшей программе UR2

3. **Программа** UR1 для изоляции корней вычерчиванием графика:

```
1 PRINT "UR1
10 PRINT "ВЫЧЕРЧИВ.ГРАФИКА"
20 INPUT "A=";A
30 INPUT "B=";B
40 INPUT "S=";S
50 SCREEN 2
52 LINE (0,130)-(630,130),5
54 LINE (315,0)-(315,260),5
60 FOR X=A TO B STEP S
70 Z=(3*SIN(X)-X)
100 PSET (X*20+315,Z*20*.64+130)
105 NEXT X
110 GOTO 110
```

(Числа 10 и 5 добавлены в строке 70 для обеспечения удобного масштаба — см. раздел 3.16)

(Для решения других уравнений надо заменить строку 70)

3а. **Программа** UR2 для уточнения корня уравнения $3 \sin x = x$ на отрезке $[A, B]$ шагами S:

```
10 PRINT "УТОЧН. КОРНИ НА ОТР.[A,B]"
20 INPUT "A=";A
30 INPUT "B=";B
40 INPUT "S=";S
50 X=A
60 GOSUB 500
70 T1=T
80 X=X+S
90 GOSUB 500
100 IF T1*T<0 THEN GOTO 110 ELSE GOTO 80
110 PRINT ,X
120 END
500 T=3*SIN(X)-X
510 RETURN
```

(Для уточнения корней других уравнений заменить строку 500)

Таблица 4.4.4

Программа для решения уравнения методом половинного деления на ПМК

1. Алгоритм: После изоляции корня и определения отрезка $[a, b]$ этот отрезок делится пополам. Если $F(a)\,F\left(a+\frac{b-a}{2}\right)>0$, то делается переход на вторую половину отрезка; если нет, то эта половина вновь делится пополам и т. д. до такого размера отрезка Δx, когда $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|<\varepsilon$, где ε — желаемая точность.

2.

ЯП	...	A	B	C	D
Число		a	$(b-a)$	n	ε^2

где n — любое число, совпадающее по знаку с $F(a)$

3. Программа:

00	ИПВ ...	вызов $(b-a)$
01	2 ÷ ПВ	деление отрезка пополам
04	↑ ИПА + ПА	к левому концу отрезка прибавить (если изменен знак, то убавить) половину. Получается x. Он закладывается вместо a в ПА
08	÷ Fx^2	половина отрезка делится на x и находится $(\Delta x/x)^2$
10	ИПД — $Fx<0$ $\boxed{16}$	$(\Delta x/x)^2$ сравнивается с ε^2
14	ИПА С/П	если $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|<\varepsilon$, то достать x и стоп
16	ПП $\boxed{50}$	если «Нет», то вычисление $F(x)$
18	ИПС ↔ ПС	достать n и заложить в ПС $F(x)$ вместо n
21	× $Fx<0$ $\boxed{00}$	$F(x)n$. Если отрицательная, то $F(x)$ изменила знак и корень в левой половине отрезка
24	ИПВ /—/ БП $\boxed{01}$	если «Нет», то корень справа. Тогда достаем $(b-x)$, делим пополам и т. д. Если «Да», то достаем $(b-x)$. Меняем у него знак, делим пополам, прибавляем к x и тем самым смещаем влево на половину отрезка

Таблица 4.5.1

Программа для поиска экстремума функции $F(x)$ на ПМК простейшим методом

1. Берут некоторое значение x_0 левее точки ожидаемого экстремума. Вычисляют $F(x)$ в точках $x_1 = x_0$

$$(F_1);\; x_2 = x_0 + \Delta x\ (F_2) \text{ и } x_3 = x_0 + 2\Delta x\ (F_3).$$

Находят знак выражения $(F_3 - F_2) * (F_2 - F_1)$. Если он положительный (приращения одного знака), то смещают точки x_1, x_2, x_3 на Δx и процедуру повторяют. Если же знак $(F_3 - F_2) * (F_2 - F_1)$ отрицательный, то выводят x_2 и останавливаются

2.

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7
Сначала	x_0	—	—	—	—	—	Δx	—
Потом	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3		$(F_3 - F_2)$

3. Программа:

00 ИП0 ИП6 + П1 ИП6 + П2 . . . . . по x_1 находятся x_2 и x_3

07 ИП0 ПП $\boxed{50}$ П3 . . . . F_1

11 ИП1 ПП $\boxed{50}$ П4 . . . . F_2

15 ИП2 ПП $\boxed{50}$ П5 . . . . F_3

19 ИП4 — П7 . . . . $(F_3 - F_2)$

22 ИП4 ИП3 — . . . . $(F_2 - F_1)$

25 ИП7 × $Fx<0$ $\boxed{31}$ ИП1 С/П . . . . если экстремум достигнут, то вывести x_2 и останов

31 ИП1 П0 ИП2 П1 ИП6 + П2 . . . . . если «Нет», то x_1 заменить на x_2, x_2 — на x_3, а x_3 увеличить на шаг

38 ИП4 П3 ИП5 П4 БП $\boxed{15}$ . . . . . . вычисленные ранее F_2 и F_3 кладем на места F_1 и F_2, а новое F_3 вычисляем по подпрограмме

Подпрограмма для $F(x) = x^2 e^{-x^2}$:

50 Fx^2 П8 |—| Fe^x ИП8 × В/0

4. *Инструкция.* F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод x_0 П0 Δx П6 В/0 С/П

5. *Тест.* Проверим работу программы для случая, когда ответ известен. Так, при $F(x) = x^2 e^{-x^2}$ производная $dF/dx = 2x^2 e^{-x^2} - x^2 2x e^{-x^2}$ равна 0 при $x = 1$. Это точный ответ. Приближенный расчет по приведенной программе при $x_0 = 0{,}1$; $\Delta x = 0{,}1$ дает через 2 мин о т в е т: $x = 1{,}0$. Для уточнения можно теперь взять $x_0 = 0{,}95$; $\Delta x = 0{,}001$

Таблица 4.5.2

Программа для поиска экстремума функции, заданной аналитически на ПЭВМ (Бейсик)

1. Алгоритм. Наличие экстремума означает смену знака первой производной. В этом случае $(F_3-F_2)*(F_2-F_1)\leqslant 0$. Эту ситуацию и должна обнаружить программа

---

3. Программа:

```
1 PRINT "EXTREM"
10 PRINT "ПОИСК ЭКСТР.F(X)"
20 A=1
30 B=1
40 C=1
50 X1=0
60 X2=100
70 S=.05
80 FOR X=X1 TO X2 STEP S
90 Z=X
100 GOSUB 250
110 F1=F
120 Z=X+S
130 GOSUB 250
140 F2=F
150 Z=Z+S
160 GOSUB 250
170 F3=F
180 IF (F3-F2)*(F2-F1)<=0 THEN GOTO 190 ELSE 210
190 PRINT "X=";X;"F=";F
200 STOP
210 IF X>=X2 THEN GOTO 220 ELSE 240
220 PRINT "В ЭТОМ ИНТ. ЭКС. НЕТ"
230 STOP
240 NEXT X
250 F=SIN(Z)
260 RETURN
270 END
```

---

4. *Инструкция.* При вводе программы в строке 250 задать свою функцию, в строках 20...40— ее параметры, в строках 50...70— интервал и шаг поиска. В процессе работы менять содержание этих строк

---

5. Пример протокола:
:RUN
ПОИСК ЭКСТР. F (X)
X=1.500000000 F=9.995736030E—01

Таблица 4.8.1

Программа для спектрального анализа на ПМК периодической функции $y(t)$, заданной аналитически

1. $a_n=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cos\frac{2\pi ni}{N}$; $b_n=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \sin\frac{2\pi ni}{N}$;

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2};\quad \varphi=\mathrm{arctg}\,(b_n/a_n).$$

n — номер гармоники;

$N=\frac{T}{\Delta t}$ —число участков, на которые разбивается период (N должно быть много больше n)

2.

ЯП	1	2	3	4	5	...	А	В	С	Д
Сначала	N	n	—	—	—		—	—	—	—
Потом			i	$\frac{2\pi n}{N}$	$\frac{2}{N}$		y_i	$\frac{2\pi ni}{N}$	$\sum y_i \sin\ldots$	$\sum y_i \cos\ldots$

3. **Программа**

00. 0 П3 ПС ПД . . . . очистка накопителей
04. 2 Fπ × ИП1 ÷ ИП2 × П4 . . . $2\pi n/N$
12. 2 ИП1 ÷ П5 . . . . $2/N$
16. ИП3 1 + П3 . . . . наращивание i
20. ИП1 ↔ —Fx<0 $\boxed{48}$ . . . . если $(N-i)\geqslant 0$, то — $\boxed{48}$
25. ИПД ИП5 × П6 С/П . . . . вывод a_n
30. ИПС ИП5 × П7 С/П . . . . вывод b_n
35. Fx² П8 ИП6 Fx² ИП8+F√ С/П . . . вывод A_n
43. ИП7 ИП6 ÷ F arctg С/П . . . . вывод φ_n
48. ПП $\boxed{70}$ ПА . . . . y_i
51. ИП4 ИП3 × ПВ . . . . $2\pi ni/N$
55. F cos ИПА × ИПД+ПД . . . . наращивание $\sum y_i \cos\ldots$
61. ИПВ F sin ИПА × ИПС+ПС . . . . . наращивание $\sum y_i \sin\ldots$
68. БП $\boxed{16}$

3а. Подпрограмму вычисления y_i заложить с шага 70 по 98, параметры функции y заложить в ЯП 6...9

4. *Инструкция.* F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ БП 70 F ПРГ; ввод подпрограммы вычисления y_i; F АВТ; ввод операндов (N П1, n П2) В/0 С/П ——— вывод a_n; С/П ——— вывод b_n; С/П ——— вывод A_n; С/П ——— вывод φ_n

5. *Тест.* Разложить монохроматический сигнал: $y_i = \sin \omega t$. При $N=10$; $n=1$ ответ: $a_1=1$; $b_1=0$; $A_1=1$; $\varphi_1=0$. При $n=2$ ответ: $a_2=0$; $b_2=0$; $A_2=0$ и т. д.

Таблица 4.8.2

Программа "SPECAN" для спектрального анализа периодической функции $y(t)$, заданной аналитически, на ПЭВМ (Бейсик)

1. Расчетные формулы см. в таблице 4.8.1

3. **Программа** для спектрального анализа функции $y = \sin^2 \omega t$

```
1 PRINT "SPECAN"
10 PRINT "СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ"
20 INPUT "НОМЕР ГАРМОНИКИ N1=";N1
30 INPUT "ЧИСЛО УЧАСТКОВ N=";N
40 P1=0
50 P2=0
60 K=2/N
70 L=K*PI*N1
80 FOR I=1 TO N
90 M=L*I
100 Y=(SIN(2*PI*I/N))^2
110 C1=Y*(COS(M))*K
120 P1=P1+C1
130 C2=Y*(SIN(M))*K
140 P2=P2+C2
150 NEXT I
160 PRINT "AN="P1
170 PRINT "BN="P2
180 PRINT "ANN="SQR(P1^2+P2^2)
190 PRINT "FIN="ATN(P2/P1)
```

См. также программу в решении задачи 2.12.6

4. *Инструкция.* 1) Ввести программу, причем в строке 100 набрать анализируемую функцию. 2) Распечатать программу командой LIST. 3) Запустить программы командой RUN. 4) Ответить на вопросы машины. 5) После получения последнего ответа машина выдает a_n, b_n, A_n и φ_n для данного n. 6) Для получения других гармоник снова запустить программу командой RUN

5. Пример протокола:

```
: RUN
СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
НОМЕР ГАРМОНИКИ N1=0
ЧИСЛО УЧАСТКОВ N=20
AN=1.000
BN= .000
ANN=1.000
ОСТАНОВ В СТРОКЕ 240
: RUN
СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
НОМЕР ГАРМОНИКИ N1=2
ЧИСЛО УЧАСТКОВ N=20
AN=-5.000E-01
BN=-7.600E-13
```

ФИN= .000 :RUN СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НОМЕР ГАРМОНИКИ NI=1 ЧИСЛО УЧАСТКОВ N=20 AN=3.420E−12 BN=−1.430E−12 ANN=3.707E−12 ФИN=−3.960E−01	ANN=5.000E−01 ФИN=1.520E−12 :RUN СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НОМЕР ГАРМОНИКИ NI=3 ЧИСЛО УЧАСТКОВ N=20 AN=4.190E−12 BN=−2.000E−12 ANN=4.643E−12 ФИN=−4.453E−01

Таблица 4.8.3

Программа для синтеза сигнала по его спектру на ПМК

1. $y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$

2.

ЯП	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D
Сначала	—	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	ω_1	—	0
Потом													$\omega_1 t$	Σ

3. **Программа:**

00 ИПВ × ПС . . . . $\omega_1 t$
03 F cos ИП1 × ПД . . . . $a_1\cos\omega_1 t$
07 ИПС F sin ИП6 × . . . . $b_1\sin\omega_1 t$
11 ИПД + ПД . . . . накопление Σ
14 ИПС 2 × П0 . . . . $2\omega_1 t$
18 F cos ИП2 × ИПД + ПД . . . . к Σ добавляется $a_2\cos 2\omega_1 t$
24 ИП0 F sin ИП7 × ИПД + ПД . . . к Σ добавляется $b_2\sin 2\omega_1 t$
31 ИПС 3 × П0 . . . . $3\omega_1 t$
35 F cos ИП3 × ИПД +ПД . . . . к Σ добавляется $a_3\cos 3\omega_1 t$
41 ИП0 F sin ИП8 × ИПД + ПД . . . к Σ добавляется $b_3\sin 3\omega_1 t$
48 ИПС 4 × П0 F cos ИП4 × ИПД + ПД
58 ИП0 F sin ИП9 × ИПД + ПД
65 ИПС 5 × П0 F cos ИП5 × ИПД + ПД
75 ИП0 F sin ИПА × ИПД + С/П
и т. д.

4. *Инструкция.* F АВТ В/0 F ПРГ; ввод программы; F АВТ; ввод операндов (a_1 П1, a_2 П2, ... и т. д.) ввод t на экран В/0 С/П — — —
Для перехода к другому t следует "обнулить" ЯПD (0 ПD)

Таблица 4.8.4

Программа "СИНТЕЗ" для синтеза сигнала по его спектру (a_n, b_n) на ПЭВМ (Бейсик)

1.

$$y_i=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t_i+$$

$$+b_n\sin n\omega_1 t_i)=\frac{a_0}{2}+\sum\left(a_n\cos\frac{2\pi n i}{K}+b_n\ \ldots\right),$$

где K — число участков; $t_i=\frac{T}{K}I$; $\omega_1 t=2\pi\frac{T}{K}$

3. Программа:

```
1 PRINT "SINT"
2 PRINT "СИНТЕЗ Ф.ПО ЕЕ СПЕКТРУ"
10 INPUT "КОЛИЧ.ГАРМОНИК M=";M
20 INPUT "ЧИСЛО ТОЧЕК НА ПЕРИОДЕ K=";K
30 SCREEN 2
40 LINE (0,130)-(630,130),5
50 LINE (0,0)-(0,260),5
60 FOR I=1 TO K
70 READ A0
80 YI=A0/2
90 FOR N=1 TO M
100 F=2*PI*N*I/K
110 READ AN,BN
120 YI=YI+AN*COS(F)+BN*SIN(F)
130 NEXT N
140 PSET (I*20,YI*100+130)
150 RESTORE
160 NEXT I
170 GOTO 170
1000 DATA 1,0,0,-.5,0,0,0,0,0
```

4. *Инструкция.* Ввод программы. В строке 30 после DATA набрать через запятую значения всех коэффициентов: a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... и т. д. Ответить на вопросы машины. После вычислений машина выдает y_i в виде графика

Таблица 4.9.1

Коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности 95% в зависимости от числа измерений

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	... ∞
t	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	... 2

Таблица 4.9.2

Программа для вычисления погрешности непосредственного измерения

1. См. раздел 4.9

3. **Программа:**

```
1 PRINT "POGR1"
2 PRINT "ПОГРЕШН.ПРЯМОГО ИЗМЕР."
3 PRINT "ПРИ НАЛИЧИИ РАЗБРОСА"
4 PRINT "(СЛУЧАЙНАЯ ПОГРЕШН.)"
10 INPUT "ЧИСЛО ИЗМЕРЕНИЙ N=";N
20 INPUT "КОЭФФ.СТЬЮД.ДЛЯ P=0.95 И N ИЗ ТАБЛ. = ";T
60 S1=0
70 S2=0
80 FOR I=1 TO N
90 READ XI
100 S1=S1+XI
110 NEXT I
120 XS=S1/N
130 RESTORE
140 FOR I=1 TO N
150 READ XI
160 S2=S2+(XI-XS)^2
170 NEXT I
180 S=SQR(S2/(N-1))
190 DX=T*S/SQR(N)
200 PRINT "X="XS"+ -"DX"С ВЕРОЯТН.95%"
210 PRINT "ОТНОСИТ.ПОГР.РАВНА"DX*100/XS"%"
220 END
1000 DATA 13,18,15,16
```

4. *Инструкция.* Ввести программу в машину (с клавиатуры или с диска). Ввести оператором DATA все полученные при многократных измерениях значения величины:

1000 DATA 10.1, 10.0, 10.2, 10.1, ...

Далее запустить программу командой RUN и ответить на вопросы машины

5. *Тест.* Получены значения:

10.1, 10.0, 10.2, 10.1, 10.0, 10.3, 10.05, 10.05, 10.1, 10.1 $N=10$; $T=2.26$ (из таблицы 4.9.1 для $P=0{,}95$)

Ответ. Искомая величина равна 10.1 ± 0.06; относительная погрешность 0.6%

Таблица 4.10.1

Программа для обработки данных эксперимента методом наименьших квадратов на ПМК

1. $A=\sum_i x_i$; $B=\sum y_i$; $C=\sum_i x_i^2$; $D=\sum_i x_i y_i$;

N — число измерений;

$$M=\frac{BC-AD}{NC-A^2};\ K=\frac{B-NM}{A}$$

2.

ЯП	0	1	...	5	...	A	B	C	D
Сначала	x_i	y_i		N		0	0	0	0
Потом						A	B	C	D

3. **Программа I** (накопление сумм):

00 ИП0 ИПА + ПА . . . . наращивание A
04 ИП1 ИПВ + ПВ . . . . —»— B
08 ИП0 Fx^2 ИПС + ПС . . . . —»— C
13 ИП0 ИП1 × ИПД + ПД . . . . —»— D
19 ИП5 1 + П5 . . . . —»— N

23 С/П БП $\boxed{00}$

Программа II (вычисление M и K)

50 ИП5 ИПС × ИПА Fx^2—П7 . . . . NC—A^2
57 ИПА ИПД × П6 ИПВ ИПС × ИП6 . . . . BC—AD
66 ИП7 ÷ С/П . . . . M
69 ИП5 × ИПВ — /—/ . . . . B—NM
74 ИПА ÷ С/П . . . . K

4. *Инструкция.* F АВТ В/0 F ПРГ; ввод 1-й программы; F АВТ БП 50 F ПРГ; ввод 2-й программы; F АВТ 0 ПА ПВ ПС ПД П5 x_1 П0 y_1 П1 В/0 С/П x_2 П0 y_2 П1 С/П x_3... ввести все пары; БП 50 С/П ——— M С/П ——— K

5. *Тест.*

x_i	1	2	3
y_i	1	2	3,3

Ответ. $M=-0,2$; $K=1,15$

Таблица 4.10.2

Программа "MNK" для обработки результатов наблюдений методом наименьших квадратов на ПЭВМ (Бейсик)

<table>
<tr><td>

1. Расчетные формулы см. в таблице 4.10.1

</td></tr>
<tr><td>

3. Программа:

```
1 PRINT "MNK1"
3 PRINT "МЕТОД НАИМ.КВАДРАТОВ"
10 INPUT "ВВЕДИТЕ КОЛ. ПАР ДАННЫХ N=";N
20 A=0
30 B=0
40 C=0
50 D=0
60 FOR I=1 TO N
70 INPUT "X,Y";X,Y
80 A=A+X
90 B=B+Y
100 C=C+X^2
110 D=D+X*Y
120 NEXT I
130 M=(B*C-A*D)/(N*C-A^2)
140 K=(B-N*M)/A
150 PRINT "K=";K;"M=";M
160 END
```

</td></tr>
<tr><td>

4. *Инструкция.* Ввод программы, LIST, RUN, ответы на вопросы машины, ... результат

</td></tr>
<tr><td>

5. Пример протокола:

: RUN
ВВЕДИТЕ КОЛ. ПАР ДАННЫХ N=3
X, Y=1,1
X, Y=2,2
X, Y=3,3.33
K=1.165 M=—2.200E—01

</td></tr>
</table>

Таблица 5.1

Цвет — длина волны

Цвет	λ, нм	Цвет	λ, нм
Красный	760—620	Голубой	510—480
Оранжевый	620—590	Синий	480—450
Желтый	590—575	Фиолетовый	450—390
Зеленый	575—510		

Таблица 5.2

Программа решения задачи 2.5.6 на языке Паскаль

```
a>type burs.bak

program ball;
  var v,a,b,m,t1,g,a2,a1,x,y,t,vx,
      vy,f,fx,fy,pi:  real;
  begin v:=20;a:=0.1;b:=0;m:=0.2;
        t1:=0.25;g:=9.81;pi:=3.141596;
        a2:=10*pi/180;a1:=a2;
 begin while(a1<90*pi/180) do
      begin
   x:=0;y:=0;t:=0;
 vx:=v*cos(a1); vy:=v*sin(a1);
   while(y>=0) do begin
    f:=-a*v-b*v*v*v;fx:=f*vx/v;
    vx:=vx+fx*t1/m;x:=x+vx*t1;
    fy:=f*vy/v-m*g;vy:=vy+fy*t1/m;
    y:=y+vy*t1; t:=t+t1;
    v:=sqrt(sqr(vx)+sqr(vy));
      end;
    writeln('a1',a1*180/pi,x);
    a1:=a1+a2;
                                end;
end;end.
```

Таблица 5.3

Программа для решения задачи 2.5.6 на языке Фортран

```
a>basic
      REAL V,A,B,M,T1,G,A2,X,Y,T,VX,VY,F,FX,FY
      V=20
      A=0.1
      B=0.
      M=0.2
      T1=0.25
      G=9.81
      PI=3.141596
      A2=10*PI/180
      A1=A2
      DO 1 A1=10*PI/180,90*PI/180,A2
      X=0
      Y=0
      T=0
      VX=V*COS(A1)
      VY=V*SIN(A1)
2     F=-A*V-B*V**3
      FX=F*VX/V
      VX=VX+FX*T1/M
      X=X+VX*T1
      FY=F*VY/V-M*G
      VY=VY+FY:T1/M
      Y=Y+VY*T1
      T=T+T1
      V=SQRT(VX**2+VY**2)
      IF(Y.GE.0) GOTO 2
4     FORMAT(2F5.2)
      PRINT 4,(A2,X)
1     CONTINUE
      END
```

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Gould, J. Tobochnic. An Introduction to Computer Simulation Methods. Application to Physical Systems.— Addison — Wesley Publ. Comp. MA, 1987.*

2. Гринчишин Я. Т., Ефимов В. И., Ломакович А. Н. Алгоритмы и программы на Бейсике.— М.: Просвещение, 1988.

3. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.— М.: Наука, 1985.

4. Трохименко Я. К. Программирование микрокалькуляторов «Электроника МК-52» и «Электроника МК-61».— Киев: Технiка, 1987.

5. Кетков Ю. Л. Диалог на языке Бейсик для мини- и микро-ЭВМ.— М.: Наука, 1988.

6. Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ.— М.: Наука, 1987.

7. Уолш Б. Настоящий Бейсик.— М.: Радио и связь, 1987.

8. Александров В. В., Шнейдеров В. С. Рисунок, чертеж, картина на ЭВМ.— Л.: Машиностроение, 1987.

9. Гардан И., Люка М. Машинная графика.— М.: Мир, 1987.

10. Волков Е. А. Численные методы.— М.: Наука, 1987.

11. Бахвалов Н. С. и др. Численные методы.— М.: Наука, 1987.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Бурсиан Эрик Викторович

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРА

Зав. редакцией *В. А. Обменина*
Редактор *О. В. Серышева*
Младший редактор *О. В. Агапова*
Художник *О. М. Шмелев*
Художественный редактор *В. М. Прокофьев*
Технический редактор *Н. А. Киселева*
Корректоры *И. А. Корогодина, Л. С. Вайтман*

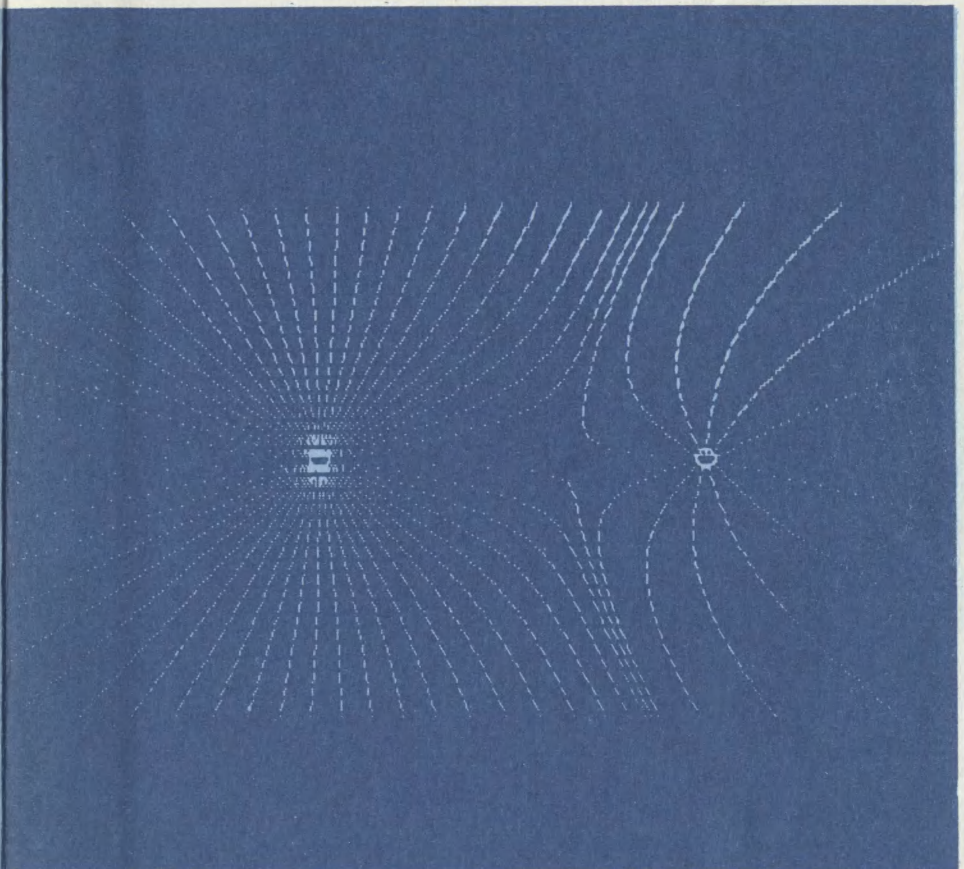
ИБ № 13448

Сдано в набор 24.09.90. Подписано к печати 18.06.91. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. офсетная № 2. Гарнит. Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,0 + 0,25 форз. Усл. кр.-отт. 16,75. Уч.-изд. л. 13,97 + 0,26 форз. Тираж 40 000 экз. Заказ 889. Цена 2 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и массовой информации РСФСР. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства печати и массовой информации РСФСР. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

```
10 PRINT "FORCL8"
20 PRINT "СИЛОВ.ЛИНИИ ДВУХ ЗАР."
30 Q1=1
40 Q2=4
50 L=200
60 A1=.5
70 Y1=2
80 SCREEN 2
90 CIRCLE (420,130),5,8,,,.64
100 CIRCLE (220,130),5,8,,,.64
110 A=0
120 A=A+A1
130 GOTO 150
140 A=A+A1*Q1/Q2
150 IF A>4*PI THEN 470
160 IF A>3*PI THEN 280
170 IF A>2*PI THEN 250
180 IF A>PI THEN 220
190 Y2=Y1
200 X=L/2+Y2/TAN(A)
210 GOTO 310
220 Y2=-Y1
230 X=L/2+Y2/TAN(A)
240 GOTO 310
250 Y2=Y1
260 X=-L/2+Y2/TAN(A)...
```



2 р. 40 к.

Э. В. Бурсиан

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРА