Учебное пособие
для педагогических
институтов

Л. Я. Куликов
А. И. Москаленко
А. А. Фомин

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Л.Я.Куликов
А.И.Москаленко
А.А.Фомин

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

*Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов физико-математических специальностей педагогических институтов*

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1993

ББК 22.14
К90

**Рецензенты:**

кафедра алгебры Тульского госпединститута им. Л. Н. Толстого (зав. кафедрой кандидат физико-математических наук, доцент **С. А. Пихтильков**);
кандидат физико-математических наук **М. М. Лесохин**

**Куликов Л. Я. и др.**

К90 Сборник задач по алгебре и теории чисел: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Л. Я. Куликов, А. И. Москаленко, А. А. Фомин.— М.: Просвещение, 1993.— 288 с.: ил.— ISBN 5-09-002697-1.

Книга представляет собой сборник задач по курсу алгебры и теории чисел для педагогических институтов. Авторы при составлении упражнений уделяли особое внимание развитию у будущих учителей математического мышления, умения анализировать, владению методами доказательств. Каждая глава содержит теоретические сведения, необходимые для решения задач. Ответы и указания к решению помогут читателю в его самостоятельной работе.

$К\frac{4309000000-329}{103(03)-93}$ **24—92 инф. п. 92** **ББК 22.14+22.13**

**ISBN 5-09-002697-1** © Куликов Л. Я. и другие, 1993

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Имеющиеся сборники задач по алгебре и теории чисел, как правило, содержат задачи по отдельным темам курса, поэтому студентам приходится использовать несколько различных источников даже в течение одного семестра. Кроме того, существующие задачники в основном рассчитаны на студентов университетов и не учитывают специфику математической подготовки студентов педагогических институтов.

В предложенном сборнике задач по алгебре и теории чисел большое внимание уделяется закреплению и прояснению основных понятий, а также контролю их усвоения. В связи с этим в сборник включено значительное число простых упражнений тренировочного характера. В нем содержатся как оригинальные, так и фольклорные задачи. Многие из задач заимствованы из университетских задачников, но, как правило, доказательство утверждения, содержащегося в задаче, является результатом решения серии более простых задач. Часто формулировке общего утверждения предшествует серия упражнений, в которых рассматриваются конкретные примеры, различные случаи. Учитываются также интересы тех студентов, которые проявляют способности к исследовательской работе, поэтому в сборнике имеются вопросы поискового характера, задачи повышенной трудности, некоторые из них взяты из различных сборников олимпиадных задач. В некоторые параграфы включены задачи, идейно связанные с содержанием данного раздела задачника, но по форме имеющие вид «школьных» задач (доказательство тождеств и неравенств, признаки делимости целых чисел, разложение многочленов в произведение неразложимых сомножителей и т. д.). Такие задачи могут быть использованы и в средней школе, в особенности в условиях предполагаемой специализации. Общее количество задач превышает необходимый минимум, что предоставляет определенную свободу преподавателям. Авторы сознательно шли на некоторый параллелизм, когда близкие по содержанию задачи включались в разные разделы задачника, чтобы подчеркнуть взаимосвязи тем. Большинство задач снабжено ответами, решениями или указаниями к решению.

Авторы стремились к автономности задачника. Как правило, необходимые для решения задач понятия сформулированы в условиях задач или в начале соответствующего параграфа. Обозначения также разъясняются в условиях тех задач, где они встречаются. Те понятия, которые не определены в задачнике, можно найти в любом учебнике, содержащем соответствующие разделы.

Авторы учитывают тот факт, что высшая школа сейчас переживает период реформ, программы многих курсов пересматриваются и существенно изменяются. Однако они уверены, что предлагаемый сборник, содержащий большое количество задач по традиционным разделам алгебры и теории чисел, будет полезен и в условиях работы по новым программам, во всяком случае до тех пор, пока не будут написаны новые задачники.

Сборник составлен на базе опыта преподавания в МПГУ имени В. И. Ленина. Преподаватели других педагогических институтов, которые будут использовать его в своей работе, возможно обнаружат в нем какие-то недостатки. Авторы будут признательны всем, кто сообщит о своих замечаниях и предложениях.

# ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

## § 1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ. ПРЕДИКАТЫ. КВАНТОРЫ. ЗАПИСЬ УТВЕРЖДЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ЛОГИЧЕСКИХ СИМВОЛОВ

**1.1.1.** Среди следующих высказываний укажите истинные:

а) если 1 является корнем уравнения $\sqrt{x}=x-1$, то 1 — корень уравнения $x=(x-1)^2$;

б) если $x_1$, $x_2$ — действительные корни уравнения $2x^2+42x+446=0$, то $x_1+x_2=-21$;

в) если $a$ — целый корень уравнения $x^3+7x^2+48x+$ $+97=0$ с целыми коэффициентами, то 97 делится на $a$;

г) если натуральное число $x$ делится на 3, то $2^x$ делится на 8;

д) если в четырехугольнике диагонали равны, то этот четырехугольник — ромб;

е) если в четырехугольнике диагонали перпендикулярны, то этот четырехугольник — ромб;

ж) существует действительное число $x$, такое, что $x^2+2x-3=0$;

з) если $a^2$ — корень уравнения $x^2+3x-2=0$, то $a$ — корень уравнения $x^4+3x^2-2=0$;

и) если 9 — корень уравнения $x^2+3x-2=0$, то 3 — корень уравнения $x^4+3x^2-2=0$.

**1.1.2.** Пусть $p$ — высказывание «сегодня ясно», $q$ — «сегодня идет дождь», $r$ — «сегодня идет снег», $s$ — «сегодня пасмурно». Переведите на обычный язык следующие предложения:

а) $p \to \neg(q \vee r)$; г) $(s \to q) \vee p$;
б) $s \leftrightarrow \neg p$; д) $s \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$;
в) $s \wedge (r \vee q)$; е) $(s \leftrightarrow q) \wedge \neg r$.

**1.1.3.** Расставьте все скобки, указав порядок выполнения операций в следующих формулах логики высказываний:

а) $(p \to q) \to \neg r \wedge (\neg s \vee t)$;

б) $(\neg p \to q \wedge r) \to \neg s \vee p$;
в) $p \to (q \to \neg r) \wedge (s \to \neg p \vee q)$;
г) $(p \vee q) \wedge \neg s \to p \vee q \vee \neg s$;
д) $p \wedge q \to \neg(s \wedge t) \vee (p \wedge \neg q)$.

**1.1.4.** Удалите лишние скобки в следующих формулах:

а) $(((p \to q) \vee r) \wedge (p \to (s \to r)))$;
б) $((p \wedge q) \to ((r \vee s) \to (q \wedge r)))$;
в) $((\neg p) \to (((q \wedge r) \wedge (\neg s)) \vee (q \vee r)))$;
г) $((\neg p) \wedge ((q \to r) \to (s \to (p \vee (\neg r)))))$;
д) $((p \to (\neg q)) \wedge ((p \vee (\neg q)) \to (s \vee (\neg t))))$.

**1.1.5.** Сколько строк содержит истинностная таблица для формулы логики высказываний с двумя, тремя, $n$ переменными? Заполните вход в истинностной таблице для формулы с тремя переменными.

**1.1.6.** Заполните истинностную таблицу для каждой из следующих формул логики высказываний:

а) $(p \vee q) \wedge ((p \to q) \to r)$;
б) $(p \vee q \to \neg r) \to p$;
в) $(p \to q) \wedge \neg p \to \neg q$;
г) $\neg p \wedge q \to p \vee q$;
д) $(p \to q) \wedge (r \to q) \to (p \vee r \to q)$;
е) $(p \to q) \wedge (p \to r) \to (p \to q \wedge r)$;
ж) $p \vee q \to (p \to r \wedge q)$;
з) $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$;
и) $p \to \neg(q \wedge r)$;
к) $r \to (r \to q)$;
л) $(p \wedge q) \to (s \wedge \neg s \to p \vee s)$.

**1.1.7.** Что можно сказать об истинностном значении высказывания ($|p|$ — истинностное значение $p$):

а) $\neg p \wedge q \leftrightarrow p \vee q$, если $|p \to q| = Л$;
б) $p \to (\neg r \to \neg q)$, если $|p \to (q \to r)| = И$;
в) $p \to \neg t$, если $(p \to q) = И$, $|\neg s \to \neg q| = И$, $|t \to \neg s| = И$;
г) $p \to \neg s$, если $|p \to q| = И$, $|\neg s \to \neg q| = Л$;
д) $p \to v$, если $|p \vee q \to r \vee s| = И$, $|s \vee r \to v| = И$?

**1.1.8.** Проверьте, что следующие формулы логики высказываний являются тавтологиями:

а) $(p \to q) \wedge p \to q$;
б) $(p \to q) \wedge (r \to s) \to (p \wedge r \to q \wedge s)$;
в) $(p \to q) \vee (r \to s) \to (p \wedge r \to q \vee s)$;
г) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$;
д) $(p \to q) \leftrightarrow \neg p \vee q$;
е) $(p \to q) \wedge (r \to q) \leftrightarrow (p \vee r \to q)$;

ж) $(p \wedge q) \to r \leftrightarrow p \to (q \to r)$;
з) $(p \wedge q) \to r \leftrightarrow (p \wedge \neg r) \to \neg q$;
и) $\neg(p \to q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$;
к) $(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$;
л) $p \to (\neg p \to q)$;
м) $p \to (q \to p)$;
н) $(\neg p \to p) \to p$;
о) $(p \to q) \to (p \wedge r \to q \wedge r)$;
п) $(p \to q) \wedge (r \to s) \to (p \vee r \to q \vee s)$;
р) $\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)$.

**1.1.9.** Являются ли тавтологиями следующие формулы логики высказываний:

а) $(p \to q) \wedge (\neg r \to \neg q) \wedge (t \to \neg r) \to (p \to \neg t)$;
б) $(p \to q) \wedge (q \to p) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r \to p$;
в) $(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to t) \to r \vee t$;
г) $(p \to (q \to r)) \wedge (\neg t \vee p) \wedge \neg q \to (t \to r)$;
д) $(p \to q) \wedge (r \to q) \wedge (t \to p \vee r) \wedge t \to q$;
е) $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (\neg t \vee p) \wedge r \to (t \to q)$;
ж) $(p \to q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r \to \neg p$;
з) $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r \to (\neg q \to p)$?

**1.1.10.** Какие из следующих формул логики высказываний являются тавтологиями, противоречиями, не являются ни тем ни другим:

а) $p \leftrightarrow p$;
б) $p \to \neg p$;
в) $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$;
г) $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$;
д) $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \neg(p \to r)$;
е) $(p \to q) \to r$;
ж) $((p \to q) \to p) \to p$?

**1.1.11.** Каково наибольшее число формул из приведенных ниже, которые могут одновременно принимать истинностное значение И:

а) $p$;
б) $q$;
в) $\neg q \wedge \neg p$;
г) $p \to \neg q$;
д) $p \leftrightarrow q$;
е) $(p \vee \neg q) \wedge \neg (p \wedge \neg q)$?

**1.1.12.** Докажите эквивалентность формул логики высказываний:

а) $p \vee q \equiv \neg p \to q$;
б) $p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$;
в) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$;
г) $(p \to q \wedge \neg q) \to \neg p \equiv$ И;
д) $p \to (q \to p \wedge q) \equiv$ И;
е) $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$;
ж) $\neg p \wedge (p \vee q) \to q \equiv$ И;
з) $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$;
и) $(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$;
к) $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv p$.

**1.1.13.** Докажите, что девять формул логики высказываний от высказывательных (т. е. пропозициональных) переменных $p$ и $q$ могут одновременно принимать значение И только в том случае, когда по крайней мере две из них эквивалентны.

**1.1.14.** Пусть $C$ — формула, в которой выделено некоторое вхождение формулы $A$, а $C'$ — формула, полученная из $C$ заменой этого вхождения формулы $A$ на формулу $B$. Докажите, что если $A \leftrightarrow B$ — тавтология, то $C \leftrightarrow C'$ тоже тавтология.

**1.1.15.** Пусть формула $A$ построена из высказывательных переменных $p_1, p_2, \ldots, p_n$ только при помощи знаков $\neg$, $\vee$, $\wedge$, а формула $A^*$ получена из $A$ заменой каждого вхождения символа $\vee$ символом $\wedge$ и наоборот и заменой каждого вхождения $p_i$ вхождением $\neg p_i$ и наоборот. Докажите, что формула $\neg A \leftrightarrow A^*$ — тавтология.

**1.1.16.** Докажите, что никакая формула логики высказываний, при построении которой используются только знаки логических операций $\vee$, $\wedge$, не является ни тавтологией, ни противоречием.

**1.1.17.** Докажите, что для любой формулы логики высказываний существует эквивалентная ей формула, построенная только при помощи одной из следующих пар знаков логических операций:

а) $\neg, \rightarrow$; б) $\neg, \vee$; в) $\neg, \wedge$.

**1.1.18.** Среди следующих предложений укажите высказывания, предикаты и те предложения, которые не являются ни тем ни другим:

а) квадрат есть прямоугольник с равными сторонами;

б) прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые;

в) если целое число $k$ делится на 8, то $k$ делится на 12;

г) если целое число $k$ делится на 4, то $k$ делится на 2;

д) каждое целое число, делящееся на 4, делится на 2;

е) каждое целое число, делящееся на 8, делится на 12;

ж) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

з) $n^3-n$ делится на 3;

и) $x^2+2$;

к) $x^2>2$;

л) существует такое целое число $x$, что $x+y^2=3$ и $x\cdot y=2$;

м) число 12 можно представить в виде суммы $12=p_1+p_2$, где $p_1$, $p_2$ — некоторые простые числа;

н) $x$ делится на $y$;

о) $\frac{x}{y}$;

п) $\sqrt{1-5}>3$.

**1.1.19.** Каковы допустимые значения свободных переменных в следующих предикатах:

а) $k$ делится на 5;
б) $x>1$;
в) $\sqrt{x+1}>x$;
г) $|x|=3$;
д) $d$ — наибольший общий делитель $a$ и $b$;
е) $\frac{x^2-1}{x^2-4}>1$;
ж) существует число $x$, такое, что $x^2=y$;
з) $\ln(x^2+3x+2)>0$;
и) $x$ — столица $y$;
к) $x$ — столица России;
л) Вашингтон — столица $x$?

**1.1.20.** Среди следующих выражений укажите высказывания, предикаты, числовые формы. Для каждого предиката укажите все наборы значений входящих в него свободных переменных, удовлетворяющие данному предикату (допустимые значения каждой свободной переменной — все действительные числа):

а) $x+2$;
б) $x+2>3$;
в) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
г) $(a+b)^2$;
д) $x$ — число букв в слове «математика»;
е) для любого $x$ выполняется неравенство $x>y$;
ж) существует такое действительное число $x$, что $x^2+3x+2=0$;
з) существует такое действительное число $x$, что $x^2+ax+b=0$;
и) $\sin x$;
к) $\sin x>x$;
л) $\sin x<2$;
м) для всякого $x$ существует такой $y$, что $x\cdot y=z$.

**1.1.21.** Равносильны ли следующие предикаты:

а) $x^2-2x-3>0$ и $x>3\vee x<-1$ $(x\in\boldsymbol{R})$;
б) $|x|>5$ и $x^2>29$ $(x\in\boldsymbol{N})$;
в) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}=3$ и $(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1})^2=9$ $(x\in[1{,}5;\ \infty))$;
г) $\sqrt{x+2}=1-x$ и $x+2=(1-x)^2$ $(x\in[-2;\ \infty))$;
д) $\sqrt{3x-3}=x-1$ и $3x-3=(x-1)^2$ $(x\in[1;\ \infty))$;
е) $x^2<16$ и $(x<4)\wedge(-4<x)$ $(x\in\boldsymbol{Z})$;
ж) $x^3<27$ и $x<3$ $(x\in\boldsymbol{R})$;

з) $\frac{x^2-1}{13}<2$ и $x<2$ $(x\in\mathbf{Z})$;

и) $\sin x>3$ и $x^2+1<1$ $(x\in\mathbf{R})$;

к) $\lg(x^2+2x+3)>0$ и $x^2+2x+3>0$ $(x\in\mathbf{R})$;

л) $(\exists x)\, x^2+ax+1<0$ и $a>2$ $(a\in\mathbf{R})$?

**1.1.22.** Приведите пример таких предикатов $P(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, чтобы один из них был логическим следствием другого $(x, y, z\in\mathbf{N})$.

**1.1.23.** Приведите примеры одно-, двух- и трехместных тождественно ложных, тождественно истинных и выполнимых (но не тождественно истинных) предикатов.

**1.1.24.** Приведите примеры предикатов $A(x)$ и $B(x)$, где $x$ — целочисленная переменная, таких, что:

а) предикаты $A(x)$ и $B(x)$ не тождественно истинны, а $A(x)\vee B(x)$ — тождественно истинный предикат;

б) $A(x)$ и $B(x)$ — выполнимые предикаты, а $A(x)\wedge B(x)$ — невыполнимый предикат.

**1.1.25.** Перечислите свободные и связанные переменные в каждой из следующих формул:

а) $(\forall x)\, P(x)$;

б) $(\forall x)\, P(x)\to P(y)$;

в) $P(x)\to(\exists y)\, P(y)$;

г) $(\exists x)\,(A(x)\wedge B(x))$;

д) $(\exists x)\,(\forall y)\,((P(x)\wedge Q(y))\to R(z))$;

е) $(\exists x)\,(\exists y)\,(P(x, y)\wedge Q(z))$.

**1.1.26.** Примем следующие обозначения для предикатов: $P(x)$ — «$x$ — простое число», $E(x)$ — «$x$ — четное число», $D(x, y)$ — «$y$ делится на $x$», $I(x, y)$ — «$x$ равно $y$». Переведите на обычный язык:

а) $P(7)$;

б) $E(2)\wedge P(2)$;

в) $(\forall x)\,(D(2, x)\to E(x))$;

г) $(\exists x)\,(E(x)\wedge D(6, x))$;

д) $(\forall x)\,(\neg E(x)\to\neg D(2, x))$;

е) $(\forall x)\,(P(x)\to(\exists y)\,(E(y)\wedge D(x, y)))$;

ж) $(\exists x)\,(E(x)\wedge P(x)\wedge(\forall y)\,(E(y)\wedge P(y)\to I(x, y)))$;

з) $(\forall x)\,(\forall y)\,(P(y)\wedge D(x, y)\to I(x, y)\vee I(x, 1))$;

и) $(\forall x)\,(\neg I(1, x)\to(\exists y)\,(P(y)\wedge D(y, x)))$.

**1.1.27.** Прочитайте следующие высказывания о целых положительных числах, укажите, какие из них истинные и какие ложные. Для каждого ложного высказывания запишите при помощи логических символов опровергающее его истинное высказывание (приняты обозначения: $P(x)$ — «$x$ — простое число», $x/y$ — «$y$ делится на $x$», $x\not/\,y$ — «$y$ не делится на $x$»):

а) $(\forall x)\,(P(x)\to 2\not/\,x)$;

б) $(\forall x)\,(\neg P(x)\wedge x\neq 1\to(\forall y)\,(P(y)\to x\not/\,y))$;

в) $(\forall x)(2/x \to (\forall y)(x/y \to 2/y))$;
г) $(\forall x)(\forall y)(x/y \vee y/x)$;
д) $(\exists x)(\forall y)(x/y)$;
е) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot y/z \to x/z \wedge y/z)$;
ж) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x/z \wedge y/z \to x \cdot y/z)$;
з) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x/(y+z) \to x/y \wedge x/z)$;
и) $(\forall x)(\exists y)(P(y) \wedge y \times x)$;
к) $(\forall x)(\exists y)(P(y) \wedge y/x)$;
л) $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x) \to y/x)$.

**1.1.28.** Запишите следующие высказывания о натуральных числах при помощи логических символов, используя следующие обозначения для предикатов: НОД $(a, b)=1$ — «$a$ и $b$ — взаимно простые числа», $d=$ НОД $(a, b)$ — «$d$ — наибольший общий делитель $a$ и $b$», а также обозначения из задачи 1.1.27:

а) если $x$ делится на $y$, $y$ делится на $z$, то $x$ делится на $z$;

б) если два простых числа делятся друг на друга, то они равны;

в) если число делится на два взаимно простых числа, то оно делится на их произведение;

г) если $a$ и $b$ делятся на $c$, то $a+b$ и $a-b$ делятся на $c$;

д) если $a$ и $b$ — оба четные или оба нечетные, то $a+b$ и $a-b$ четные;

е) любое число делится на 6 тогда и только тогда, когда его квадрат делится на 6;

ж) если $d=$ НОД $(a, b)$, то $a$ и $b$ делятся на $d$ и $d$ делится на любой общий делитель $a$ и $b$;

з) 2 — наименьшее простое число;

и) простое число, отличное от 2, нечетно;

к) два числа, делящиеся друг на друга, совпадают;

л) любое число, отличное от 1, имеет хотя бы один простой делитель.

**1.1.29.** Пользуясь знаками арифметических операций $(+, \cdot)$ и отношений $(<, \leqslant, =)$, запишите при помощи логических символов следующие высказывания о действительных числах:

а) если произведение двух чисел равно нулю, то хотя бы один из сомножителей равен нулю;

б) для всякого числа существует число, превосходящее данное;

в) существуют такие числа, что их сумма больше их произведения;

г) не существует числа, являющегося корнем трехчлена $x^2+2x+3$;

д) можно найти числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=1, \\ 3x-2y=0; \end{cases}$$

е) сумма любого числа, отличного от нуля, с обратным к нему числом больше 2;

ж) обе части равенства можно разделить на число, отличное от нуля;

з) квадрат любого числа, отличного от нуля, положителен;

и) из любого положительного числа можно извлечь квадратный корень, причем существуют два различных значения корня;

к) существует ровно одно положительное значение квадратного корня из положительного числа;

л) уравнение $x^2-5x+6=0$ имеет в точности два различных корня;

м) система уравнений $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=0 \end{cases}$ не имеет решений.

**1.1.30.** Каждое из следующих высказываний запишите при помощи логических символов, определите, истинно оно или ложно, ответ обоснуйте:

а) существует такое целое $x$, что $x^2-4=0$;

б) существует единственное положительное число $x$, для которого $x^2-4=0$;

в) существует такое рациональное число $x$, что $x^2+x+1=0$;

г) для любого действительного числа $x$ существует такое действительное число $y$, что $y^2=x$;

д) для любого целого $x$ существует такое целое $y$, что $x=2y$ или $x=2y+1$;

е) для любого целого $x$ если $x>2$, то $x^2>9$;

ж) для любых действительных чисел $x$ и $y$ если $x<y$ и $y\neq 0$, то $\frac{x}{y}<1$.

**1.1.31.** Используя только предикаты $x/y$ и $x=y$, запишите при помощи логических символов следующие предикаты от переменных, принимающих натуральные значения:

а) $x$ — простое число;

б) $a$ и $b$ — взаимно простые числа;

в) $x$ имеет ровно два различных простых делителя;

г) $p$ и $q$ — простые числа-близнецы.

**1.1.32.** Приведите пример такого предиката $Q(x)$, чтобы было истинным каждое из следующих высказываний:

а) $(\exists x)\, Q(x)$;
б) $(\forall x)(\exists y)(Q(x) \vee Q(y))$;
в) $(\exists x)(\exists y)(Q(x) \wedge \neg Q(y))$;
г) $(\forall x)\, Q(x) \to (\exists y)\, Q(y)$.

**1.1.33.** Выясните, для любых ли предикатов $R(x)$, $Q(x)$, $P(x, y)$ следующие высказывания истинны. Если нет, то приведите примеры предикатов, для которых высказывание ложно:

а) $(\forall x)(\exists y)\, P(x, y) \to (\exists y)(\forall x)\, P(x, y)$;
б) $(\exists y)(\forall x)\, P(x, y) \to (\forall x)(\exists y)\, P(x, y)$;
в) $(\forall x)(\forall y)\, P(x, y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\, P(x, y)$;
г) $(\forall x)(R(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\forall x)\, R(x) \vee (\forall y)\, Q(y)$;
д) $(\exists x)(R(x) \wedge Q(x)) \to (\exists x)\, R(x) \wedge (\exists y)\, Q(y)$;
е) $(\exists x)\, R(x) \wedge (\exists y)\, Q(y) \to (\exists x)(R(x) \wedge Q(x))$;
ж) $(\forall x)(\forall y)(R(x) \vee Q(y)) \leftrightarrow (\forall x)\, R(x) \vee (\forall y)\, Q(y)$;
з) $(\forall x)(R(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x)\, R(x) \to (\forall y)\, Q(y)$;
и) $(\forall x)\, Q(x) \leftrightarrow (\exists x)\, Q(x)$;
к) $(\exists x)(\exists y)\, P(x, y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\, P(x, y)$.

## § 2. ВЗАИМНО ОБРАТНЫЕ И ВЗАИМНО ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ТЕОРЕМЫ. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

**1.2.1.** Для каждого из следующих утверждений о натуральных числах дайте три разные формулировки, используя слова «достаточно», «необходимо», «только тогда, когда»:

а) если $a$ делится на 24, то $a$ делится на 2 и на 3;

б) если $a$ делится на 20 и на 30, то $a$ делится на 60;

в) если произведение двух чисел делится на простое число $p$, то хотя бы один из сомножителей делится на это простое число;

г) если $a$ делится на два различных простых числа, то $a$ делится и на их произведение;

д) если два числа делятся друг на друга, то они равны;

е) если $a$ делится на $b$, то наибольший общий делитель $a$ и $b$ равен $b$;

ж) если число имеет ровно два различных делителя, то оно простое.

**1.2.2.** Сформулируйте каждое из следующих утверждений о натуральных числах при помощи слов «если ..., то...»:

а) для того чтобы число делилось на 12, достаточно, чтобы оно делилось на 6 и на 4;

б) $a^2$ делится на 12 только в том случае, когда $a$ делится на 6;

в) для того чтобы $a^2$ делилось на 900, достаточно, чтобы $a$ делилось на 10 и на 6;

г) для того чтобы $a$ делилось на $b$, необходимо, чтобы $a$ делилось на любой простой делитель $b$;

д) число имеет не более двух различных делителей только тогда, когда оно простое или равно 1;

е) для того чтобы произведение нескольких сомножителей было четным, достаточно, чтобы хотя бы один из сомножителей был четным;

ж) для того чтобы $a$ делилось на произведение $bc$, необходимо, чтобы $a$ делилось на $b$ и $c$.

**1.2.3.** Для каждого из следующих утверждений сформулируйте обратное к нему, противоположное и противоположное к обратному утверждению:

а) квадратное уравнение имеет корни только в том случае, когда его дискриминант неотрицателен;

б) если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то его корни совпадают;

в) сумма корней квадратного трехчлена $x^2+px+q$ равна $-p$, а произведение корней равно $q$;

г) целый корень квадратного трехчлена $x^2+px+q$ с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена;

д) квадратный трехчлен с неотрицательным дискриминантом можно разложить в произведение линейных множителей;

е) если дискриминант квадратного трехчлена положителен, то существует точка, в которой значение трехчлена отрицательно.

**1.2.4.** Для каждого из утверждений, полученных при решении упражнения 1.2.3, укажите, истинно оно или ложно, дайте обоснования ответов.

**1.2.5.** Для каждого из утверждений упражнений 1.2.1 и 1.2.2 сформулируйте обратное утверждение. Определите, какие из полученных утверждений истинны и какие ложны, дайте обоснования своих ответов. Везде, где это возможно, сформулируйте истинные утверждения при помощи слов «тогда и только тогда».

**1.2.6.** Известно, что высказывание: «Для того чтобы матрица была обратимой, необходимо, чтобы ее определитель был отличен от нуля» — истинно. Истинность каких из следующих высказываний можно утверждать, исходя из данного условия (никакого знания теории матриц для ответа не требуется):

а) для того чтобы матрица была необратимой, достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю;

б) для того чтобы определитель матрицы был отличен от нуля, достаточно, чтобы матрица была обратимой;

в) для того чтобы определитель матрицы был равен нулю, достаточно, чтобы эта матрица была необратимой;

г) матрица обратима тогда и только тогда, когда определитель ее не равен нулю;

д) определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда она необратима?

**1.2.7.** Известно, что истинно утверждение: «Если в квадратной матрице две строки равны, то ее определитель равен нулю», а обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Исходя из этих данных, определите, какие из следующих утверждений истинны и какие ложны:

а) определитель квадратной матрицы равен нулю только в том случае, если в ней две строки равны;

б) для того чтобы определитель матрицы был равен нулю, достаточно, чтобы две ее строки были равны;

в) для того чтобы определитель квадратной матрицы был равен нулю, необходимо, чтобы две ее строки были равны;

г) определитель квадратной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда две ее строки равны;

д) если определитель квадратной матрицы отличен от нуля, то все его строки попарно различны;

е) если все строки квадратной матрицы попарно различны, то ее определитель отличен от нуля.

## § 3. МНОЖЕСТВО. ПОДМНОЖЕСТВО

**1.3.1.** Какие из следующих высказываний истинны и какие ложны? Дайте обоснование ответа:

а) $2^{12} \in \{5037, 4095, 38\}$;

б) $128 \in \{12, 29, 46, 63, \ldots, 216\}$;

в) $55 \in \{1, 3, 6, 10, 15, \ldots, 1275\}$;

г) $\sqrt{5} \in \boldsymbol{Q}$;

д) $\pi \in \boldsymbol{R}$;

е) $\pi \in \boldsymbol{Q}$;

ж) $\sin\frac{\pi}{6}\in\boldsymbol{Q}$;

з) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ\cdot\lg \operatorname{tg} 2^\circ\cdot\ldots\cdot\lg \operatorname{tg} 89^\circ\in\boldsymbol{Z}$;

и) $0{,}1010010001\ldots\in\boldsymbol{Q}$;

к) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}\in\boldsymbol{Q}$;

л) $\varnothing\in\varnothing$;

м) $\varnothing\in\{\varnothing\}$;

н) $1\in\{\{1,2\}\}$;

о) $\{1,\ 2\}\in\{\{1,\ 2\}\}$;

п) $\{1,\ 2\}\in\{\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ 1,\ 2\}$.

**1.3.2.** Приведите примеры таких множеств $A$, $B$, $C$, чтобы были истинными следующие высказывания:

а) $A\in B\wedge B\in C\wedge A\notin C$;

б) $A\in B\wedge B\in C\wedge A\in C$.

**1.3.3.** Какие из следующих высказываний истинны? Дайте обоснование ответа:

а) $4352\in\{x\in\boldsymbol{N}\mid x$ делится на $18\}$;

б) 27; 24; $624\in\{y\in\boldsymbol{N}\mid(\exists n\in\boldsymbol{N})\ y^n$ делится на $18\}$;

в) $8\in\{x\mid x$ — последняя цифра в десятичной записи числа, являющегося квадратом целого числа$\}$;

г) $8\in\{x\in\boldsymbol{N}\mid$ не существует простого числа $p$, такого, что $x^2+4\geqslant p\geqslant x^2\}$;

д) 0; 5; $-5\in\{x\in\boldsymbol{R}\mid(\exists y\in\boldsymbol{R})\ x=y^2+3y-2\}$;

е) $a\in\{x\mid x$ — тупоугольный треугольник$\}$, где $a$ — треугольник со сторонами 12, 15, 20.

**1.3.4.** Перечислите элементы следующих множеств:

а) $\{x\in\boldsymbol{R}\mid x^2-3x+2=0\}$;

б) $\{x\in\boldsymbol{R}\mid x^2+1=0\}$;

в) $\left\{x\in\boldsymbol{R}\,\middle|\,\frac{2x}{x^2+1}<3\right\}$;

г) множество всех двузначных натуральных чисел, делящихся на 5, но не делящихся на 10;

д) множество четных чисел от 0 до 20;

е) множество всех чисел от 0 до 30, которые можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел;

ж) множество всех последовательностей, содержащих все числа 1, 2, 3, 4, 5, и только эти числа, в которых четные и нечетные числа чередуются;

з) множество всех трехзначных телефонных номеров, сумма цифр которых равна 3;

и) множество всех корней уравнения $x^2+6x+9=0$;

к) множество всех действительных значений $a$, при которых система $\begin{cases} -3x+ay=5, \\ (a+6)x+3y=7 \end{cases}$ несовместна.

**1.3.5.** Какие из следующих множеств конечны и какие бесконечны? Для каждого конечного множества перечислите все его элементы:

а) $\{x \in \boldsymbol{R} \mid x^2-5x+4=0\}$;
б) $\{x \in \boldsymbol{N} \mid x^2-5x+4>0\}$;
в) $\{x \in \boldsymbol{N} \mid x/24\}$;
г) $\{x \in \boldsymbol{N} \mid (\exists y \in \boldsymbol{N})\ 2x+3y=24\}$;
д) $\{x \in \boldsymbol{N} \mid (\exists y \in \boldsymbol{Z})\ 2x+3y=24\}$.

**1.3.6.** Каждое из следующих множеств задайте в виде некоторого интервала числовой прямой:

а) $\{x \in \boldsymbol{R} \mid (\exists y \in \boldsymbol{R})\ x^2+y^2=1\}$;
б) $\left\{x \in \boldsymbol{R} \mid (\exists y)\ x=\frac{y+1}{y^2+1}\right\}$;
в) $\{a \in \boldsymbol{R} \mid (\exists x \in \boldsymbol{R})\ 3x^2+2ax+a<0\}$;
г) $\left\{x \in \boldsymbol{R} \mid x>0 \wedge (\forall n \in \boldsymbol{N})\ x<\frac{1}{n}\right\}$.

**1.3.7.** Каждое из следующих множеств задайте как множество всех значений переменной, удовлетворяющих подходящему одноместному предикату:

а) $\{2, 4, 6, 8, ..., 32\}$;
б) {м, о, н, е, ж, т, с, в};
в) {Киев, Минск, Кишинев, Таллинн, Вильнюс, Рига, Москва, Тбилиси, Ереван, Баку, Ташкент, Ашхабад, Душанбе, Алма-Ата, Бишкек};
г) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$;
д) множество всех четных чисел;
е) множество всех нечетных чисел;
ж) $[-2, 3]$.

**1.3.8.** Равны ли множества:

а) $\{2, 4, 5\}$ и $\{2, 4, 2, 5\}$;
б) $\{1, 2\}$ и $\{\{1, 2\}\}$;
в) $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 1, 2, 1\}$;
г) $\{1, 2, 3\}$ и $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
д) $\{\{1, 2\}, 3\}$ и $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$?

**1.3.9.** Равны ли множества:

а) $\{x \in \boldsymbol{R} \mid x^2-2x-2=0\}$ и $\{x \in \boldsymbol{Q} \mid x^2-2x-2=0\}$;
б) $\{x \in \boldsymbol{Z} \mid 4/x \wedge 6/x\}$ и $\{x \in \boldsymbol{Z} \mid 24/x\}$;
в) $\{x \in \boldsymbol{Z} \mid 4/x \wedge 15/x\}$ и $\{x \in \boldsymbol{Z} \mid 20/x \wedge 30/x\}$;

г) $\{x \in \mathbf{Z} \mid 12/x\}$ и $\{x \in \mathbf{Z} \mid 12/x^2\}$;
д) $\{x \in \mathbf{Z} \mid 15/x\}$ и $\{x \in \mathbf{Z} \mid 15/x^2\}$;
е) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0\}$ и $\{1, 2, 3, 4\}$;
ж) $\left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \frac{1}{x-2} < 1\right\}$ и $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 3\}$;
з) $\{x \in \mathbf{R} \mid 6 \leqslant x \leqslant 5\}$ и $\varnothing$;
и) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$ и $\varnothing$?

**1.3.10.** Какие из следующих высказываний истинны и какие ложны? В каждом случае дайте обоснование ответа:

а) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\} \subseteq \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 4 \geqslant 0\}$;
б) $\{x \in \mathbf{R} \mid x - 4 \geqslant 0\} \subseteq \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 4 \geqslant 0\}$;
в) $\{x \in \mathbf{R} \mid x - 2 \geqslant 0\} \subseteq \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 4 \geqslant 0\}$;
г) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x + 2 = 0\} \subseteq \varnothing$.

**1.3.11.** Перечислите все элементы каждого из следующих множеств:

а) $\{x \mid x \subseteq \{1\}\}$;
б) $\{x \mid x \subseteq \{1, 2\}\}$;
в) $\{x \mid x \subseteq \{1, 2, 3\}\}$;
г) $\{x \mid x \subseteq \varnothing\}$.

Выскажите предположение о числе элементов в множестве $\{x \mid x \subseteq \{1, 2, \dots, n\}\}$.

**1.3.12.** Перечислите все подмножества множества $A$:

а) $A = \{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$;
б) $A = \{\{1\}, \{2\}, 1, 2\}$;
в) $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

**1.3.13.** Вставьте между множествами символ $\in$ или $\subseteq$ так, чтобы получилось истинное высказывание:

а) $\{1\}\ \{1, \{1, 2\}\}$;
б) $\{1, 2\}\ \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$;
в) $\{1, 2\}\ \{1, 2, \{1, 2\}\}$;
г) $\varnothing\ \{1, 2, \{1\}, \{\varnothing\}\}$;
д) $\varnothing\ \{\{\varnothing\}\}$;
е) $\varnothing\ \{\varnothing\}$.

**1.3.14.** Приведите пример множеств $A$, $B$, $C$, таких, чтобы выполнялись условия:

а) $A \in B$, $B \notin C$, $A \subseteq C$;
б) $A \in B$, $A \notin C$, $C \subseteq B$;
в) $A \subseteq B$, $B \in C$, $A \notin C$.

**1.3.15.** Докажите каждое из следующих утверждений:

а) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;
б) $A \subseteq B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$;
в) $A \subset B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$;
г) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

## § 4. АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

**1.4.1.** Найдите $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $\bar{A}$, $\bar{B}$:

а) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 5, 4\}$, $U=\{0, 1, 2, ..., 9\}$;
б) $A=\{x|x$ делится на $2\}$, $B=\{x|x$ делится на $3\}$, $U=\boldsymbol{N}$.

**1.4.2.** Пусть $U$ — множество точек плоскости, на которой задана декартова система координат:

$$A=\{\langle x, y\rangle\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\},\ B=\{\langle x, y\rangle\,|\,0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

Найдите множества $A\cap B$, $A\cup B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, изобразите их на плоскости.

**1.4.3.** Найдите пересечение множества всех прямоугольников и множества всех ромбов; множества всех параллелограммов и множества всех четырехугольников с равными диагоналями.

**1.4.4.** Найдите множество всех $a\in\boldsymbol{R}$, таких, чтобы пересечение множеств

$$A=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,x^2-3ax+6=0\},\ B=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,ax-5=0\}$$

было непусто.

**1.4.5.** Пусть $P(x)$, $Q(x)$ — предикаты, определенные на множестве $U$. Обозначим через $\overline{P(x)}$ множество всех значений переменной $x$, удовлетворяющих предикату $P(x)$. Докажите:

а) $\overline{P(x)\vee Q(x)}=\overline{P(x)}\cup\overline{Q(x)}$;
б) $\overline{P(x)\wedge Q(x)}=\overline{P(x)}\cap\overline{Q(x)}$;
в) $\overline{\neg P(x)}=U\setminus\overline{P(x)}$;
г) $\overline{P(x)\to Q(x)}=U\Leftrightarrow\overline{P(x)}\subset\overline{Q(x)}$.

**1.4.6.** Докажите, что если $A\subseteq B$, то для любого множества $C$ имеют место включения $A\cap C\subseteq B\cap C$ и $A\cup C\subseteq B\cup C$.

**1.4.7.** Докажите, что для любых множеств $A$ и $B$ имеет место включение $A\cap B\subseteq A\cup B$.

**1.4.8.** Докажите основные теоретико-множественные тождества:

а) $A=A$;
б) $A\cup A=A$;
в) $A\cup B=B\cup A$;
г) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;
д) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
е) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$;
ж) $A\cup\bar{A}=U$;
з) $A\cup U=U$;
и) $A\cup\varnothing=A$;
к) $\bar{U}=\varnothing$.

Проиллюстрируйте их на диаграммах Эйлера — Венна.

**1.4.9.** Докажите следующие тождества:

а) $A\setminus B=A\cap\bar{B}$;
б) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\cap(A\cup\bar{C})$;

в) $(A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$;
г) $A\cap B=A\cap(\bar{A}\cup B)$;
д) $(A\cup B)\cap(\bar{B}\cup A)=A$;
е) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$;
ж) $(A\setminus B)\cup(\bar{A}\setminus\bar{B})=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$;
з) $(\bar{A}\setminus\bar{B})\cup(\bar{B}\setminus\bar{A})=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$;
и) $(A\setminus\bar{B})\cup(\bar{A}\setminus B)=(B\cup\bar{A})\cap(A\cup\bar{B})$;
к) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$;
л) $B\cup(A\setminus B)=A\cup B$;
м) $B\cap(A\setminus B)=\varnothing$;
н) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;
о) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
п) $\overline{A\setminus B}=\bar{A}\cup B$.

**1.4.10.** Найдите множество $X$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $A\setminus X=A\wedge A\cup X=U$;
б) $A\cap X=\varnothing\wedge A\cup X=U$;
в) $A\setminus(A\setminus X)=\varnothing$;
г) $A\setminus X=\varnothing\wedge A\cup X=A$;
д) $A\setminus(A\setminus X)=\varnothing\wedge\bar{A}\cap\bar{X}=\varnothing$.

**1.4.11.** Пусть $A$, $B$, $C$ — такие множества, что $B\subseteq A\subseteq C$. Найдите множество $X$, удовлетворяющее условиям $A\cap X=B\wedge A\cup X=C$.

**1.4.12.** Пусть $A$, $B$, $C$ — такие множества, что $B\subseteq A$, $A\cap C=\varnothing$. Найдите множество $X$, удовлетворяющее условиям $A\setminus X=B\wedge X\setminus A=C$.

**1.4.13.** Симметрической разностью множеств $A$ и $B$ называется множество $A\dot{-}B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Докажите:

а) $A\dot{-}B=B\dot{-}A$;
б) $(A\dot{-}B)\dot{-}C=A\dot{-}(B\dot{-}C)$;
в) $A\cap(B\dot{-}C)=(A\cap B)\dot{-}(A\cap C)$;
г) $A\dot{-}\varnothing=A$;
д) $A\dot{-}A=\varnothing$.

Изобразите симметрическую разность на диаграмме Эйлера — Венна и проиллюстрируйте доказанные тождества.

**1.4.14.** Каждое из следующих утверждений либо докажите, либо покажите при помощи диаграмм Эйлера — Венна, что оно не всегда верно:

а) $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$;
б) $(A\setminus B)\cup B=A$;
в) $(A\cup B)\setminus B=A$;
г) $(A\cap B)\setminus A=\varnothing$;
д) $(A\setminus B)\cup C=(A\cup C)\setminus(B\cup C)$;
е) $(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\subseteq B$;
ж) $B=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\Rightarrow A=\varnothing$

**1.4.15.** Докажите, что условие $A\subseteq B$ равносильно каждому из следующих условий:

а) $A\cap B=A$; б) $A\cup B=B$;

в) $\bar{B} \subseteq \bar{A}$;
г) $\bar{A} \cup B = U$;
д) $A \cap \bar{B} = \varnothing$;
е) $(B \setminus A) \cup A = B$;
ж) $(\exists X)\, A \cup X = B$.

**1.4.16.** Верно ли, что:

а) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$;
б) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$;
в) $A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$?

**1.4.17.** Докажите:

а) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow A \subseteq C$;
б) $A = B \Leftrightarrow A \dotminus B = \varnothing$;
в) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$;
г) $(A \cup B) \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;
д) $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$;
е) $A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \varnothing$;
ж) $A \setminus B = A \cap B \Leftrightarrow A = \varnothing$;
з) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$;
и) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \setminus B \subseteq C$;
к) $C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B$;
л) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$;
м) $A \subseteq B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$.

**1.4.18.** Докажите:

а) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$;
б) $B \subseteq A \wedge C = A \setminus B \Rightarrow A = B \cup C$;
в) $A \not\subseteq B \wedge A \cap C = \varnothing \Rightarrow A \cup C \not\subseteq B \cup C$;
г) $C = A \setminus B \Rightarrow B \cap C = \varnothing$;
д) $A \not\subseteq B \Rightarrow A \setminus B \neq \varnothing$;
е) $B \cap C = \varnothing \wedge A \cap C \neq \varnothing \Rightarrow A \setminus B \neq \varnothing$;
ж) $A \cup B = A \Rightarrow A \cap B = B$.

**1.4.19.** Для каждого из основных тождеств (см. 1.4.8) запишите двойственное ему тождество, т. е. тождество, полученное заменой каждого знака $\cup$ на $\cap$ и каждого знака $\cap$ на $\cup$. Выведите полученные тождества из основных.

**1.4.20.** Используя только основные тождества и условие $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$, докажите:

а) $A \cap B \subseteq A$, $A \subseteq A \cup B$;
б) $\varnothing \subseteq A$, $A \subseteq U$;
в) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$;
г) $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cap B$;
д) $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$;
е) $A \cup B = U \wedge A \cap B = \varnothing \Rightarrow B = \bar{A}$.

**1.4.21.** Объединением семейства множеств $A_i$ $(i\in I)$ называется множество $\bigcup\limits_{i\in I} A_i=\{x\mid(\exists j\in I)\ x\in A_j\}$. Пересечением семейства множеств $A_i$ $(i\in I)$ называется множество $\bigcap\limits_{i\in I} A_i=$ $=\{x\mid(\forall j\in I)\ x\in A_j\}$. Найдите $\bigcup\limits_{n\in N}[-n, n]$.

**1.4.22.** Пусть $X_\alpha=\{x\in \boldsymbol{R}\mid x>\alpha\}$. Найдите $\bigcap\limits_{\alpha\in N} X_\alpha$, $\bigcup\limits_{\alpha\in N} X_\alpha$.

**1.4.23.** Приведите пример:

а) последовательности непустых множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, такой, что $X_1\supset X_2\supset\ldots \wedge \bigcap\limits_{n\in N} X_n=\varnothing$;

б) последовательности множеств, отличных от универсального множества $U$, такой, что $X_1\subset X_2\subset\ldots\wedge\bigcup\limits_{n\in N} X_n=U$;

в) семейства множеств, такого, что пересечение любого конечного числа множеств из этого семейства непусто, а пересечение всех множеств пусто.

## § 5. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

**1.5.1.** Перечислите элементы множеств $A\times B$, $B\times A$:

а) $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4, 5\}$;
б) $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$;
в) $A=\{1\}$, $B=\{1, 2, 3\}$;
г) $A=\varnothing$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$.

**1.5.2.** Пусть $A=\{$и, л$\}$. Перечислите элементы множеств $A^3$, $A^4$.

**1.5.3.** Докажите, что если $A$, $B$ — конечные множества, то $|A\times B|=|A|\cdot|B|$ ($|X|$ — число элементов в множестве $X$). Приведите пример таких множеств $A$ и $B$, чтобы $A\times B$ состояло из 8 элементов.

**1.5.4.** Определим упорядоченную пару $\langle a, b\rangle$ как множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Докажите, что $\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle$ тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$.

**1.5.5.** Пусть на плоскости задана декартова система координат. Изобразите на плоскости следующие множества:

а) $[a, b]\times[c, d]$, где $a, b, c, d\in \boldsymbol{R}$ и $a<b$, $c<d$;
б) $[a, b]^2$.

**1.5.6.** Пусть $A$, $B\subseteq C$. Докажите, что $A\times B=(A\times C)\cap$ $\cap(C\times B)$.

**1.5.7.** Докажите, что подмножество $C$ множества $A\times B$ является прямым произведением некоторого подмножества $A_1$ множества $A$ и подмножества $B_1$ множества $B$ тогда и только тогда, когда для любых пар $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$ из $C$ пары $\langle a, d\rangle$, $\langle c, b\rangle$ также принадлежат $C$.

**1.5.8.** Докажите, что множество $\{\langle x, y\rangle \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid x^2+y^2=1\}$ не является прямым произведением двух подмножеств множества $\boldsymbol{R}$.

**1.5.9.** Пусть $A$, $B$, $C$, $D$ — непустые множества. Докажите:

а) $A\subseteq B \wedge C\subseteq D \Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times D$;
б) $A\times C=B\times D \Leftrightarrow A=B \wedge C=D$.

**1.5.10.** Докажите следующие тождества:

а) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$;
б) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$;
в) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;
г) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$;
д) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;
е) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

**1.5.11.** Покажите, что следующие равенства верны не для любых множеств $A$, $B$, $C$:

а) $A\times B=B\times A$; б) $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$.

**1.5.12.** Докажите, что $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$. Покажите, что существуют такие множества $A$, $B$, $C$, $D$, для которых равенство $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$ неверно. При каких условиях это равенство верно?

**1.5.13.** Докажите, что для любых непустых множеств $A$, $B$, $C$ из равенства $(A\times B)\cup(B\times A)=C\times C$ следует, что $A=B=C$.

**1.5.14.** Перечислите все элементы бинарного отношения $\rho$ и нарисуйте его граф:

а) $x\rho y \Leftrightarrow x<y$ на множестве $A=\{1, 2, 3, 4\}$;
б) $x\rho y \Leftrightarrow x/y$ на множестве $A=\{5, 6, ..., 15\}$;
в) $x\rho y \Leftrightarrow y=x+1$ на множестве $A=\{1, 2, ..., 10\}$.

**1.5.15.** Для каждого из следующих бинарных отношений, определенных на множестве $\boldsymbol{R}$, найдите область определения, область значений и нарисуйте декартову диаграмму, т. е. изобразите на плоскости множество всех точек $\langle x, y\rangle$, таких, что $x\rho y$:

а) $x\rho y \Leftrightarrow x\leqslant y$;
б) $x\rho y \Leftrightarrow x=y$;
в) $x\rho y \Leftrightarrow x<y$;
г) $x\rho y \Leftrightarrow x^2+4y^2\leqslant 1$;
д) $x\rho y \Leftrightarrow y^2=x$;
е) $x\rho y \Leftrightarrow x^2=y$;
ж) $x\rho y \Leftrightarrow x^2=y^2$;
з) $x\rho y \Leftrightarrow x+y=1$;
и) $x\rho y \Leftrightarrow y=\log_2 x$;
к) $x\rho y \Leftrightarrow y=\sin x$.

**1.5.16.** Для бинарного отношения $\rho$ между элементами множеств $A$ и $B$ найдите область определения $D(\rho)$, область значений $\mathrm{Im}(\rho)$:

а) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{3\}\}$, $a\rho X \Leftrightarrow a\in X$;
б) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{12, 16\}$, $a\rho b \Leftrightarrow a/b$;
в) $A=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{Q}$, $(a, b)\rho c \Leftrightarrow c=\frac{a}{b}$;
г) $A=\mathbf{N}\setminus\{0\}$, $B=\mathbf{Q}\setminus\{0\}$, $a\rho b \Leftrightarrow a\cdot b\in\mathbf{Z}$;
д) $A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{Q}$, $a\rho b \Leftrightarrow a\cdot b=1$;
е) $A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{Q}$, $a\rho b \Leftrightarrow b=2^a$.

**1.5.17.** Для каждого из следующих бинарных отношений выясните, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) оно обладает и какими не обладает. Дайте обоснование ответа.

1. Отношения определены на множестве $\mathbf{R}$:

а) $x\rho y \Leftrightarrow x^2=y^2$;
б) $x\rho y \Leftrightarrow x^2+y^2=1$;
в) $x\rho y \Leftrightarrow xy>1$;
г) $x\rho y \Leftrightarrow y=|x|$;
д) $x\rho y \Leftrightarrow x^2+x=y^2+y$;
е) $x\rho y \Leftrightarrow x-y\in\mathbf{Z}$.

2. Отношения определены на множестве $\mathbf{Z}$:

а) $x\rho y \Leftrightarrow x\leqslant y+1$;
б) $x\rho y \Leftrightarrow x^2+y^2=1$;
в) $x\rho y \Leftrightarrow 3/(x+y)$;
г) $x\rho y \Leftrightarrow 3/(x-y)$;
д) $x\rho y \Leftrightarrow 2x=3y$.

3. Отношения определены на множестве $\mathbf{Z}^+$:

а) $x\rho y \Leftrightarrow y=x+1$;
б) $x\rho y \Leftrightarrow x/y\wedge x\neq y$;
в) $x\rho y \Leftrightarrow x/y$;
г) $x\rho y \Leftrightarrow$ НОД $(x, y)\neq 1$;
д) $x\rho y \Leftrightarrow x\neq y$;
е) $x\rho y \Leftrightarrow (\exists z\in\mathbf{N})\, x\cdot y=z^2$.

4. Отношения определены на множестве $P(\mathbf{Z})$:

а) $X\rho Y \Leftrightarrow X\cap Y=\varnothing$;
б) $X\rho Y \Leftrightarrow X\subset Y$;
в) $X\rho Y \Leftrightarrow X\cap Y\neq\varnothing$.

5. Отношения определены на множестве всех прямых плоскости:

а) $x\rho y \Leftrightarrow x$ параллельна $y$;
б) $x\rho y \Leftrightarrow x$ перпендикулярна $y$;
в) $x\rho y \Leftrightarrow x$ пересекается с $y$.

**1.5.18.** Какова характеристическая особенность декартовой диаграммы рефлексивного отношения; симметричного отношения; антисимметричного отношения, определенного на множестве $\mathbf{R}$?

**1.5.19.** Какова характеристическая особенность графа рефлексивного отношения; симметричного отношения; транзитивного отношения?

**1.5.20.** Для каждого бинарного отношения $\rho$ из упражнения 1.5.17 найдите $\rho^{-1}$, $\rho\circ\rho$, $\rho^{-1}\circ\rho^{-1}$, $\rho\circ\rho^{-1}$, $\rho^{-1}\circ\rho$.

**1.5.21.** Пусть

$\rho_1=\{\langle x, y\rangle \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid x=y^2\}$, $\rho_3=\{\langle x, y\rangle \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid x\cdot y>0\}$,
$\rho_2=\{\langle x, y\rangle \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid x+y=0\}$, $\rho_4=\{\langle x, y\rangle \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid x+y\in \boldsymbol{Z}\}$.

Найдите всевозможные композиции $\rho_i\circ\rho_k$, где $i, k=1, 2, 3, 4$.

**1.5.22.** Покажите, что равенство $\varphi\circ\psi=\psi\circ\varphi$ верно не для любых бинарных отношений.

**1.5.23.** Пусть $X$ — произвольное множество и $1_X=\{\langle a, a\rangle \mid a\in X\}$. Докажите, что для любого бинарного отношения $\rho$ между элементами множеств $A$ и $B$ выполняются равенства $1_B\circ\rho=\rho \wedge \rho\circ 1_A=\rho$.

**1.5.24.** Докажите, что для любого бинарного отношения $\rho$ выполняются условия: $D(\rho^{-1})=\mathrm{Im}(\rho)$ и $\mathrm{Im}(\rho^{-1})=D(\rho)$.

**1.5.25.** Пусть $\varphi$, $\psi$, $\chi$ — бинарные отношения, определенные на некотором множестве. Докажите следующие утверждения:

а) если $\varphi$, $\psi$ — симметричные отношения, то $(\varphi\cup\psi)^{-1}$ — симметричное отношение;

б) если $\varphi$, $\psi$ — симметричные отношения, то $(\varphi\cap\psi)^{-1}$ — симметричное отношение;

в) если $\varphi$, $\psi$ — антисимметричные отношения, то $(\varphi\cap\psi)^{-1}$ — антисимметричное отношение;

г) $(\varphi\setminus\psi)^{-1}=\varphi^{-1}\setminus\psi^{-1}$;

д) $(\varphi\cap\psi)\circ\chi\subset(\varphi\circ\chi)\cap(\psi\circ\chi)$;

е) $(\varphi\circ\psi)^{-1}=\psi^{-1}\circ\varphi^{-1}$;

ж) $(\varphi\setminus\psi)\circ\chi\supseteq(\varphi\circ\chi)\setminus(\psi\circ\chi)$;

з) $(\varphi\cup\psi)^{-1}=\varphi^{-1}\cup\psi^{-1}$;

и) $(\varphi\cap\psi)^{-1}=\varphi^{-1}\cap\psi^{-1}$;

к) $(\varphi\cup\psi)\circ\chi=(\varphi\circ\chi)\cup(\psi\circ\chi)$.

**1.5.26.** Приведите примеры бинарных отношений:

а) рефлексивных и транзитивных, но не антисимметричных;

б) транзитивных и симметричных, но не рефлексивных;

в) рефлексивных и транзитивных, но не симметричных;

г) рефлексивных и симметричных, но не транзитивных.

**1.5.27.** Докажите, что если $\rho$ — транзитивное и симметричное бинарное отношение на множестве $A$, область определения которого совпадает с $A$, то $\rho$ рефлексивно.

## § 6. ОТОБРАЖЕНИЕ. КОМПОЗИЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

**1.6.1.** Для каждого из следующих бинарных отношений исследуйте, является ли оно всюду определенным, функциональным; ответ обоснуйте:

а) $\left\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid y=\frac{1}{\sin x+3}\right\}$;
б) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}^+\times\mathbf{R} \mid y^2=x\}$;
в) $\left\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}^+\times\mathbf{R} \mid x=\frac{y-1}{y+1}\right\}$;
г) $\{\langle x, y\rangle \in [-1, 1]\times\mathbf{R} \mid x=\sin y\}$;
д) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid x=\lg y\}$;
е) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{Q}^+\times\mathbf{Z} \mid y$ — десятая цифра после запятой в десятичном разложении $x\}$;
ж) $\{\langle x, Y\rangle \in [-1, 1]\times P(\mathbf{R}) \mid Y=\{y\in\mathbf{R} \mid \sin y=x\}\}$;
з) $\left\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{Q}^+\times\mathbf{R} \mid (\exists p, q\in\mathbf{N})\, x=\frac{p}{q}\wedge y=\sqrt[q]{2^p}\right\}$;
и) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid x<y\leqslant x+1\}$;
к) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid x/y\}$;
л) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid x=y^2\}$;
м) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid y=|x|\}$;
н) $\{\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \in (\mathbf{R}\times\mathbf{R})\times\mathbf{R} \mid z=2^x\cdot y\}$;
о) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^+ \mid y=x^2+|x|+2\}$;
п) $\{\langle x, \langle y, z\rangle\rangle \in \mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}) \mid y=x\wedge z=x+1\}$;
р) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N} \mid y=x^2+x+1\}$;
с) пусть $A$ — множество всех прямых, проходящих через начало координат; $\rho=\{\langle x, y\rangle \in A\times\mathbf{R} \mid y$ — угловой коэффициент прямой $x\}$.

**1.6.2.** Приведите примеры отображений:

а) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$;
б) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$;
в) $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$;
г) $\mathbf{R}\to\{0, 1\}$;
д) $\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$;
е) $\mathbf{R}\to\mathbf{N}$;
ж) $\mathbf{N}\to\{0, 1\}$.

**1.6.3.** Докажите, что каждое из следующих бинарных отношений является отображением $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ и найдите его образ:

а) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid y=x^2-1\}$;
б) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid y=\sin x+1\}$;
в) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid y=2^x\}$;
г) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid y=\log_2|x|\}$;
д) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid y=x^2-x-1\}$;
е) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid y=2^{x^2+3x+4}\}$;
ж) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid y=\log_2(x^2+3x+3)\}$;

з) $\left\{\langle x,\ y\rangle \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid y=\frac{1}{\sin x+3}\right\}$.

**1.6.4.** Найдите $f(A)$, где $A=\{\langle x,\ y\rangle \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \mid y=2x+3\}$, для следующих отображений:

а) $f\colon \langle x,\ y\rangle \mapsto \langle y,\ x\rangle$;
б) $f\colon \langle x,\ y\rangle \mapsto \langle -y,\ -x\rangle$;
в) $f\colon \langle x,\ y\rangle \mapsto \langle x,\ -y\rangle$;
г) $f\colon \langle x,\ y\rangle \mapsto \langle -x,\ y\rangle$;
д) $f\colon \langle x,\ y\rangle \mapsto \langle y-2,\ x+2\rangle$.

Изобразите на плоскости множества $A$ и $f(A)$. Каков геометрический смысл указанных отображений?

**1.6.5.** Найдите прообраз множества $\{0\}$ при следующих отображениях $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$:

а) $x\mapsto \sin x$; б) $x\mapsto \lg(x^2+1)$; в) $x\mapsto x^2+x+2$.

**1.6.6.** Для каждого из следующих отображений исследуйте, является ли оно инъективным, сюръективным. Ответ обоснуйте:

а) $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ x\mapsto x^2+3x+5$;
б) $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ x\mapsto x^2-x-1$;
в) $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ x\mapsto 2^{x^2+3x+4}$;
г) $f\colon \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z},\ \langle a,\ b\rangle\mapsto a+b$;
д) $f\colon \boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z},\ a\mapsto\langle a,\ a\rangle$;
е) пусть $A$ — конечное множество; $f\colon P(A)\to\boldsymbol{N},\ x\mapsto |x|$;
ж) $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ x\mapsto x^7+x+1$;
з) $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ x\mapsto \log_2(x^2+4x+5)$;
и) $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ x\mapsto 2x^5-1$;
к) $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ x\mapsto 3^{2x}+x$;
л) $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}\ x\mapsto x^3+3x$.

**1.6.7.** Укажите все сюръективные отображения множества $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ на множество $B=\{a,\ b\}$. Существуют ли инъективные отображения $A$ в $B$?

**1.6.8.** Найдите все отображения множества $A=\{1, 2\}$ в себя, укажите, какие из них инъективны, сюръективны.

**1.6.9.** Пусть $f$ — отображение конечного множества $A$ в себя. Докажите, что $f$ инъективно тогда и только тогда, когда $f$ сюръективно.

**1.6.10.** Пусть $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ — конечное множество. Определим отображение $\chi\colon P(A)\to\{0,\ 1\}^n$ следующим образом. Если $B\subseteq A$, то $\chi(B)=\langle \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n\rangle$, где $\alpha_i=0$, если $a_i\notin B$, и $\alpha_i=1$, если $a_i\in B$. Докажите, что $\chi$ — биекция. Используя этот результат, докажите, что $|P(A)|=2^n$.

**1.6.11.** Пусть $\chi$ — отображение, определенное в предыдущей задаче. Как найти $\chi(B \cap C)$, $\chi(B \cup C)$, $\chi(\bar{B})$, если известны $\chi(B)$, $\chi(C)$? Для каких подмножеств $B$ множества $A$ все координаты $\chi(B)$ равны между собой?

**1.6.12.** Движением называется отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояние между точками. Докажите, что всякое движение — биекция.

**1.6.13.** Пусть $A$ и $B$ — конечные множества, $|A|=m$, $|B|=n$.

а) Сколько существует бинарных отношений между элементами множеств $A$ и $B$?

б) Сколько существует отображений $A$ в $B$?

в) При каких $m$ и $n$ существует инъективное отображение $A$ в $B$?

г) При каких $m$ и $n$ существует сюръективное отображение $A$ в $B$?

д) При каких $m$ и $n$ существует биекция $A$ на $B$?

**1.6.14.** Докажите, что существует биекция $A \times B$ на $B \times A$; $(A \times B) \times C$ на $A \times (B \times C)$.

**1.6.15.** Пусть существуют биекции $A$ на $A'$ и $B$ на $B'$. Докажите, что существует биекция $A \times B$ на $A' \times B'$.

**1.6.16.** Пусть существуют биекции $A$ на $A'$ и $B$ на $B'$ и пусть $A \cap B = \varnothing$ и $A' \cap B' = \varnothing$. Докажите, что существует биекция $A \cup B$ на $A' \cup B'$.

**1.6.17.** Для каждого отношения $\varphi$ из упражнения 1.6.1, которое является отображением, найдите $D(\varphi^{-1})$ и $\mathrm{Im}(\varphi^{-1})$. Укажите, для каких $\varphi$ отношение $\varphi^{-1}$ всюду определено; функционально.

**1.6.18.** Пусть $\varphi$ — отображение множества $A$ в множество $B$. Докажите:

а) $\varphi^{-1}$ всюду определено тогда и только тогда, когда $\varphi$ — сюръективное отображение;

б) $\varphi^{-1}$ функционально тогда и только тогда, когда $\varphi$ — инъективное отображение;

в) $\varphi^{-1}$ — отображение множества $B$ в множество $A$ тогда и только тогда, когда $\varphi$ — биекция.

**1.6.19.** Пусть $\alpha$: $x \mapsto x^2$; $\beta$: $x \mapsto x^3$ — отображения $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Найдите $\alpha \circ \beta$ и $\beta \circ \alpha$.

**1.6.20.** Даны отображения $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$: $\alpha$: $x \mapsto \sin x$, $\beta$: $x \mapsto x^2$. Найдите $\alpha \circ \beta$ и $\beta \circ \alpha$.

**1.6.21.** Пусть $\alpha$: $x \mapsto x+1$, $\beta$: $x \mapsto 2^x$ — отображения $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{R}$. Найдите $\alpha \circ \beta \circ \alpha$, $\alpha^2 \circ \beta$, $\alpha \circ \beta^2$, $\beta \circ \alpha \circ \beta$. Являются ли отображениями $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{R}$ отношения $\alpha^{-1}$, $\beta^{-1}$?

**1.6.22.** Пусть $\alpha$, $\beta$ — отображения $\boldsymbol{Q}$ в $\boldsymbol{Q}$: $\alpha(x)=x+1$, $\beta(x)=2x$. Рассмотрим множество $A$, содержащее 0 и все числа, являющиеся образами 0 при всевозможных отображениях, равных композиции любого конечного числа отображений $\alpha$, $\beta$, $\alpha^{-1}$, $\beta^{-1}$. Какие числа из $\boldsymbol{Q}$ принадлежат множеству $A$?

**1.6.23.** Докажите:

а) композиция инъективных отображений — инъективное отображение:

б) композиция сюръективных отображений — сюръективное отображение.

**1.6.24.** Пусть композиция двух отображений — инъективное (сюръективное) отображение. Что можно сказать о каждом из сомножителей?

**1.6.25.** Для каких отображений $\alpha$ истинно высказывание:

а) $(\forall\beta, \gamma)\, \alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma \to \beta = \gamma$;

б) $(\forall\beta, \gamma)\, \beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha \to \beta = \gamma$?

**1.6.26.** Пусть $\sigma_A$ — множесто всех отображений $A$ в $A$. Докажите, что если $\alpha$ из $\sigma_A$ является инъективным отображением, то существует $\beta \in \sigma_A$, такое, что $\beta \circ \alpha = 1_A$; если $\alpha$ сюръективно, то существует $\gamma \in \sigma_A$, такое, что $\alpha \circ \gamma = 1_A$.

**1.6.27.** Докажите, что для того, чтобы отношение $\rho$ между элементами множеств $A$ и $B$ было биекцией $A$ на $B$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho^{-1} \circ \rho = 1_A$ и $\rho \circ \rho^{-1} = 1_B$.

**1.6.28.** Пусть $\varphi$: $A \to B$. Определим $\varphi_*$: $P(A) \to P(B)$ и $\varphi^*$: $P(B) \to P(A)$ следующим образом: если $X \subseteq A$, то $\varphi_*(X) = \{\varphi(x) | x \in X\}$; если $Y \subseteq B$, то $\varphi^*(Y) = \{x \in A | \varphi(x) \in Y\}$. Каким должно быть отображение $\varphi$ для того, чтобы выполнялось равенство:

а) $\varphi^* \circ \varphi_* = 1_{P(A)}$; б) $\varphi_* \circ \varphi^* = 1_{P(B)}$*

## § 7. ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И РАЗБИЕНИЯ

**1.7.1.** Докажите, что каждое из следующих отношений является отношением эквивалентности, и найдите классы эквивалентности:

а) пусть $A = \{1, 2, 3\}$, на множестве $P(A)$ задано бинарное отношение $X\rho Y \Leftrightarrow |X| = |Y|$;

б) пусть $Q(x)$ — одноместный предикат, определенный на множестве $M$, на $M$ задано бинарное отношение $a\rho b \Leftrightarrow \Leftrightarrow Q(a) \leftrightarrow Q(b)$;

в) на множестве $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ задано бинарное отношение $\langle a, b\rangle \rho \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a + d = b + c$;

г) на множестве $\boldsymbol{N}_0 \times \boldsymbol{N}_0$ задано бинарное отношение $\langle a, b\rangle\ \rho\ \langle c, d\rangle \Leftrightarrow ad = bc$;

д) на множестве $\boldsymbol{R}$: $a\rho b \Leftrightarrow a^2=b^2$;

е) на множестве $\boldsymbol{R}$: $a\rho b \Leftrightarrow a-b\in \boldsymbol{Z}$;

ж) пусть $M$ — некоторое множество, на $P(M)$ определено бинарное отношение $X\rho Y \Leftrightarrow X \dot{-} Y$ — конечное множество;

з) на множестве $\boldsymbol{Q}$: $a\rho b \Leftrightarrow (\exists k\in \boldsymbol{Z})\, a=2^k b$;

и) на множестве $\sigma_R$ всех отображений $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{R}$ определено отношение $f\rho g \Leftrightarrow (\exists c\in \boldsymbol{R})(\forall\in \boldsymbol{R})\, f(x)=g(x)+c$;

к) на множестве $\sigma_R$ определено отношение $f\rho g \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall x)\, f(x)=0 \leftrightarrow g(x)=0$.

**1.7.2.** На множестве $\boldsymbol{N}$ задано бинарное отношение $a\rho b \Leftrightarrow$ последняя цифра в десятичной записи числа $a$ совпадает с последней цифрой в десятичной записи числа $b$. Докажите, что $\rho$ — отношение эквивалентности. Сколько элементов в фактор-множестве $\boldsymbol{N}/\rho$?

**1.7.3.** На $\boldsymbol{R}$ задано бинарное отношение $a\rho b \Leftrightarrow a^2+a=$ $=b^2+b$. Докажите, что $\rho$ — отношение эквивалентности. Сколько элементов может содержать класс эквивалентности? Существует ли класс эквивалентности, состоящий из одного элемента?

**1.7.4.** Докажите, что отношение $\langle a, b\rangle \rho \langle c, d\rangle \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$ является отношением эквивалентности на множестве $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$. Найдите классы эквивалентности и изобразите их на координатной плоскости.

**1.7.5.** Пусть $\varphi\colon A\to B$ — отображение. Определим на множестве $A$ бинарное отношение $a\rho b \Leftrightarrow \varphi(a)=\varphi(b)$. Докажите, что $\rho$ — отношение эквивалентности. Опишите классы эквивалентности. Для какого отображения $\varphi$ каждый класс эквивалентности состоит точно из одного элемента?

**1.7.6.** Пусть $n\in \boldsymbol{N}_0$. Определим на $\boldsymbol{Z}$ бинарное отношение $a\equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n/(a-b)$ (читается: $a$ сравнимо с $b$ по модулю $n$). Докажите, что такое отношение является отношением эквивалентности и фактор-множество, обозначаемое $\boldsymbol{Z}_n$, состоит из $n$ классов: $[0], [1], \ldots, [n-1]$ (эти классы обозначают $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$ и называют классами вычетов по модулю $n$).

**1.7.7.** Укажите, в какой из классов вычетов $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$ попадает каждое число: 307, $-38$, 25, $-40$, $-1037$, 13, 85, $-15$, 43, если:

а) $n=10$; б) $n=2$; в) $n=5$; г) $n=7$; д) $n=6$.

**1.7.8.** Докажите, что два целых числа $a$ и $b$ сравнимы по модулю $n$ тогда и только тогда, когда существуют такие целые числа $q_1, q_2, r$, что $a=nq_1+r \wedge b=nq_2+r \wedge 0\leqslant$ $\leqslant r<n$.

**1.7.9.** Придумайте минимальное отношение эквивалентности $\rho$ на множестве $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ так, чтобы $1\rho 2$ и $2\rho 3$.

**1.7.10.** Пусть $\rho_1$ — отношение сравнимости по модулю 6, $\rho_2$ — отношение сравнимости по модулю 4. Найдите отношение $\rho_1 \cap \rho_2$.

**1.7.11.** Покажите, что пересечение отношений эквивалентности, определенных на некотором множестве $A$, является отношением эквивалентности.

**1.7.12.** Докажите, что если $\rho$ — отношение эквивалентности, то $\rho^{-1}$ — также отношение эквивалентности.

**1.7.13.** Докажите, что если $\rho$ — отношение эквивалентности, то истинны следующие утверждения ($[x]_\rho$ — класс эквивалентности, порожденный элементом $x$):

а) $x \in [x]_\rho$; б) $x\rho y \Leftrightarrow [x]_\rho = [y]_\rho$.

**1.7.14.** Какие из следующих подмножеств множества $P(\boldsymbol{R})$ образуют разбиение $\boldsymbol{R}$? Для каждого разбиения задайте при помощи двуместного предиката соответствующее отношение эквивалентности:

а) $\{\{x \in \boldsymbol{R} \mid x > 0\}, \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < 0\}\}$;
б) $\{\{x \in \boldsymbol{R} \mid x > 0\}, \{0\}, \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < 0\}\}$;
в) $\{\{x \in \boldsymbol{R} \mid |x| = x\}, \{x \in \boldsymbol{R} \mid |x| = -x\}\}$;
г) $\{(n, n+1) \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$;
д) $\{[n, n+1] \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$;
е) $\{(n, n+1] \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$.

**1.7.15.** Докажите, что $M$ — разбиение множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Перечислите все элементы отношения эквивалентности $\rho$, соответствующего разбиению $M$, постройте граф $\rho$:

а) $M = \{\{1\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4, 6, 7\}\}$;
б) $M = \{\{1, 7\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{3\}\}$;
в) $M = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$;
г) $M = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}\}$.

Каким образом по графу отношения эквивалентности можно найти классы эквивалентности?

**1.7.16.** Пусть $M_1 = \{A_1, \ldots, A_n\}$ и $M_2 = \{B_1, \ldots, B_m\}$ — два разбиения множества $C$. Докажите, что множество всех непустых подмножеств вида $A_i \cap B_j$ также является разбиением множества $C$. Какое отношение эквивалентности соответствует этому разбиению, если разбиению $M_1$ соответствует отношение $\rho_1$, а разбиению $M_2$ — отношение $\rho_2$?

## § 8. ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА

Под отношением порядка на множестве $A$ понимается нестрогий порядок, т. е. рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение на $A$.

**1.8.1.** Докажите, что отношение делимости на множестве $\boldsymbol{N}$ является отношением порядка. Является ли это отношение линейным порядком? Является ли отношением порядка отношение делимости на множестве $\boldsymbol{Z}$?

**1.8.2.** Докажите, что отношение $x\rho y \Leftrightarrow x/y \vee x<y$ на множестве $\boldsymbol{N}$ является линейным порядком.

**1.8.3.** Для каких множеств $A$ множество $\langle P(A), \subseteq\rangle$ является линейно упорядоченным?

**1.8.4.** Зафиксируем $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$, $c_1 \neq c_2$. На множестве линейных двучленов рассмотрим отношение $(a_1x+b_1)\,\rho\,(a_2x+b_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a_1c_1+b_1 \leqslant a_2c_1+b_2) \wedge (a_1c_2+b_1 \leqslant a_2c_2+b_2)$. Докажите, что $\rho$ — отношение порядка. Покажите, что данное отношение не является линейным порядком.

**1.8.5.** На множестве всевозможных разбиений данного множества рассмотрим отношение $K\rho L \Leftrightarrow (\forall A \in K)(\exists B \in L)$ $A \subseteq B$. Докажите, что $\rho$ — отношение порядка. Является ли $\rho$ линейным порядком?

**1.8.6.** Пусть $A$ — непустое конечное множество. На $P(A)$ рассмотрим отношение $X\rho Y \Leftrightarrow |X| \leqslant |Y|$. Является ли $\rho$ отношением порядка?

**1.8.7.** Пусть $Q(x)$ — предикат, определенный на некотором множестве $M$. Рассмотрим на $M$ отношение $a\rho b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |Q(a) \to Q(b)| = \text{И}$. Является ли $\rho$ отношением порядка?

**1.8.8.** На множестве всех отображений $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{R}$ рассмотрим отношение $f\rho g \Leftrightarrow (\forall x \in \boldsymbol{R})\ f(x) \leqslant g(x)$. Является ли $\rho$ отношением порядка?

**1.8.9.** На множестве всех отображений $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{R}$ рассмотрим отношение $f\rho g \Leftrightarrow \{x \in \boldsymbol{R} \mid f(x)=0\} \subseteq \{x \in \boldsymbol{R} \mid g(x)=0\}$. Является ли $\rho$ отношением порядка?

**1.8.10.** Пусть множество $A$ является объединением возрастающей последовательности своих подмножеств $\varnothing = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$. На множестве $A$ определим отношение $a\rho b \Leftrightarrow (\exists i, j)\ a \in X_i \wedge b \in X_j \wedge a \notin X_{i-1} \wedge b \notin X_{j-1} \wedge$ $\wedge\, i \leqslant j$. Является ли $\rho$ отношением порядка?

**1.8.11.** Пусть $f$ — отображение $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{R}$. Рассмотрим на $\boldsymbol{R}$ отношение $a\rho b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$. Приведите примеры таких отображений $f$, для которых отношение $\rho$ является отношением порядка, и примеры таких $f$, что $\rho$ не является отношением порядка. Каким свойством должно обладать отображение $f$ для того, чтобы $\rho$ было отношением порядка?

**1.8.12.** Докажите, что отношение $\langle a;\ b\rangle\,\rho\,\langle c,\ d\rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a<c\vee(a=c\wedge b\leqslant d)$ является линейным порядком на множестве $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

**1.8.13.** По аналогии с упражнением 1.8.12 определите линейный порядок на множестве $A\times B$, если $\langle A,\ \rho_1\rangle$ и $\langle B,\ \rho_2\rangle$ — линейно упорядоченные множества.

**1.8.14.** Перечислите всевозможные линейные порядки на множестве $\{1,\ 2\}$; на множестве $\{1,\ 2,\ 3\}$. Выскажите предположение о числе линейных порядков на множестве из $n$ элементов.

**1.8.15.** Пусть $\rho_1$ — отношение порядка на множестве $A$, $\rho_2$ — отношение порядка на множестве $B$. Докажите, что отношение на множестве $A\times B$, определенное следующим образом: $\langle a_1,\ b_1\rangle\ \rho\ \langle a_2,\ b_2\rangle \Leftrightarrow a_1\rho_1a_2\wedge b_1\rho_2b_2$, есть отношение порядка.

**1.8.16.** Докажите, что если отношение $\rho$, определенное на множестве $A$, антирефлексивно и транзитивно, то отношение $\tau$, определенное следующим образом: $x\tau y\Leftrightarrow x\rho y\vee x=y$, является отношением порядка на множестве $A$. Докажите, что если $\tau$ — отношение порядка, то отношение $\rho$, определенное следующим образом: $x\rho y\Leftrightarrow x\tau y\wedge x\neq y$, антирефлексивно и транзитивно.

**1.8.17.** Пусть $\langle A,\ \tau\rangle$, $\langle B,\ \sigma\rangle$ — линейно упорядоченные множества и $A\cap B=\varnothing$. Определим на множестве $A\cup B$ отношение следующим образом: $x\rho y\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\vee$ $\vee(x\in A\wedge y\in A\wedge x\tau y)\vee(x\in B\wedge y\in B\wedge x\sigma y)$. Докажите, что $\langle A\cup B,\ \rho\rangle$ — линейно упорядоченное множество.

**1.8.18** (теорема о предпорядке). Пусть $\tau$ — рефлексивное и транзитивное отношение на множестве $A$. Определим отношение $\rho$ на $A$ следующим образом: $a\rho b\Leftrightarrow a\tau b\wedge b\tau a$. Докажите, что $\rho$ — отношение эквивалентности и если $a\tau b$, то для любых элементов $a_1\in[a]_\rho$ и $b_1\in[b]_\rho$ имеет место $a_1\tau b_1$. Таким образом, можно определить бинарное отношение $\bar{\tau}$ на фактор-множестве $A/\rho$: $[a]_\rho\bar{\tau}\,[b]_\rho\Leftrightarrow a\tau b$. Докажите, что $\bar{\tau}$ — отношение порядка.

**1.8.19.** Примените теорему о предпорядке к следующим отношениям:

а) отношение делимости на $\mathbf{Z}$;
б) отношение из упражнения 1.8.9;
в) отношение из упражнения 1.8.10.

**1.8.20.** Пусть $A$ — непустое множество. Придумайте такое отображение $f\colon\ P(A)\to P(A)$, чтобы выполнялось условие $(\forall X,\ Y\in P(A))\ X\subseteq Y\leftrightarrow f(X)\supseteq f(Y)$.

**1.8.21.** Пусть $\langle A,\ \leqslant\rangle$ — упорядоченное множество и $B\subseteq A$. Элемент $a\in A$ называется верхней гранью $B$, если $b<a$ для любого $b\in B$. Если существует хотя бы одна верхняя

грань $B$, то $B$ называется ограниченным сверху множеством. Точной верхней гранью $B$ называется наименьший элемент множества всех верхних граней $B$. Аналогично определяются нижняя и точная нижняя грани $B$, а также ограниченное снизу множество. Докажите, что если каждое непустое ограниченное сверху подмножество множества $A$ имеет точную верхнюю грань, то каждое непустое ограниченное снизу подмножество имеет точную нижнюю грань.

**1.8.22.** В каждом из следующих упорядоченных множеств укажите все минимальные и все максимальные элементы; найдите наибольший и наименьший элементы, если они есть, или докажите их отсутствие:

а) $\langle P(\{0, 1\}), \subseteq \rangle$;

б) $\langle P(\{a, b, c\}) \subseteq \rangle$;

в) $\langle \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}, \subseteq \rangle$;

г) $\langle D(12), \rho \rangle$, где $D(12)$ — множество всех натуральных делителей числа 12, $\rho$ — отношение делимости;

д) $\langle D(30), \rho \rangle$, $\rho$ — отношение делимости.

**1.8.23.** Пусть $F$ — множество всех непустых конечных подмножеств множества $\boldsymbol{N}$. Какие элементы упорядоченного множества $\langle F, \subseteq \rangle$ являются минимальными? Докажите, что $\langle F, \subseteq \rangle$ не содержит максимальных элементов.

**1.8.24.** Докажите, что в линейно упорядоченном множестве элемент является максимальным (минимальным) тогда и только тогда, когда он является наибольшим (наименьшим).

**1.8.25.** Докажите:

а) упорядоченное множество содержит не более одного наибольшего (наименьшего) элемента;

б) если упорядоченное множество содержит наибольший (наименьший) элемент, то он является единственным максимальным (минимальным) элементом этого множества.

**1.8.26.** Приведите пример упорядоченного множества, имеющего ровно один максимальный (минимальный) элемент, но не имеющего наибольшего (наименьшего) элемента.

# ГЛАВА 2. АЛГЕБРЫ

## § 1. БИНАРНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ. АЛГЕБРЫ.

**2.1.1.** Определены ли на множествах $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $2\boldsymbol{Z}$, $2\boldsymbol{Z}+1$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^+$, $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ следующие операции:

а) $\langle a, b\rangle \mapsto a+b$;
б) $\langle a, b\rangle \mapsto a-b$;
в) $\langle a, b\rangle \mapsto a\cdot b$;
г) $\langle a, b\rangle \mapsto \frac{a}{b}$;
д) $\langle a, b\rangle \mapsto \frac{a+b}{2}$;
е) $\langle a, b\rangle \mapsto \sqrt{ab}$;
ж) $\langle a, b\rangle \mapsto ab-ba$;
з) $\langle a, b\rangle \mapsto \min\{a, b\}$;
и) $\langle a, b\rangle \mapsto \max\{a, b\}$;
к) $\langle a, b\rangle \mapsto a^b$;
л) $\langle a, b\rangle \mapsto a$?

**2.1.2.** Пусть на конечном множестве $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ определена бинарная операция $\circ$. Таблица, состоящая из $n$ строк и $n$ столбцов, в которой на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит элемент множества $A$, равный $a_i \circ a_j$, называется таблицей умножения или таблицей Кэли. Составьте таблицы Кэли:

а) для операции нахождения наименьшего общего кратного на множестве $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;

б) для операции нахождения наибольшего общего делителя на множестве $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;

в) для операции объединения множеств на $P(\{1, 2\})$;

г) для операции пересечения множеств на $P(\{1, 2\})$;

д) для композиции функций $x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{x+1}{x-1}$, $\frac{1-x}{1+x}$, $\frac{1+x}{1-x}$, $-\frac{1}{x}$, $-x$;

е) для композиции симметрий ромба относительно диагоналей и центра и тождественного преобразования.

**2.1.3.** На множестве $Z_n$ классов вычетов по модулю $n$ определим операции сложения и умножения следующим образом:

$$\bar{k}+\bar{l}=\overline{k+l};\quad \bar{k}\cdot\bar{l}=\overline{k\cdot l}.$$

Докажите, что эти определения корректны, т. е. если $\bar{k}_1=\bar{k}_2$ и $\bar{l}_1=\bar{l}_2$, то $\overline{k_1+l_1}=\overline{k_2+l_2}$ и $\overline{k_1\cdot l_1}=\overline{k_2\cdot l_2}$. Составьте таблицу Кэли для сложения на множестве $Z_3$; для умножения на множестве $Z_5$.

**2.1.4.** Запишите при помощи логических символов следующие свойства бинарной алгебраической операции:

а) коммутативность и некоммутативность;

б) ассоциативность и неассоциативность;

в) наличие нейтрального элемента и его отсутствие;

г) симметризуемость данного элемента и несимметризуемость;

д) симметризуемость любого элемента данной алгебры и отрицание этого условия.

**2.1.5.** Какие из операций из упражнения 2.1.1 обладают свойством коммутативности; ассоциативности?

**2.1.6.** Какие из следующих операций коммутативны; ассоциативны:

а) операция нахождения наибольшего общего делителя на множестве $\boldsymbol{N}$;

б) операция нахождения наименьшего общего кратного на множестве $\boldsymbol{N}$;

в) $\langle\langle a, b\rangle; \langle c, d\rangle\rangle\mapsto\langle a+c, b+d\rangle$ на $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$;

г) $\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle\mapsto\langle ac+bd, ad+bc\rangle$ на $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$?

**2.1.7.** На множестве $\boldsymbol{R}^+$ рассмотрим операцию: $\langle a, b\rangle\mapsto\sqrt{ab}$. Обозначим $a\circ b=\sqrt{ab}$. Какие из следующих утверждений истинны для алгебры $\langle \boldsymbol{R}^+, \circ\rangle$:

а) $(\exists e)(\forall a)\, a\circ e=e\circ a=a$;

б) $(\forall a)(\exists e)\, a\circ e=e\circ a=a$?

**2.1.8.** Докажите, что в алгебре $\langle \boldsymbol{N}, \circ\rangle$, где $a\circ b=\max\{a, b\}$, существует нейтральный элемент. Укажите все симметризуемые элементы.

**2.1.9.** Докажите, что в алгебре $\langle \boldsymbol{N}, \circ\rangle$, где $a\circ b=\min\{a, b\}$, нет нейтрального элемента.

**2.1.10.** Для операций из упражнения 2.1.1, определенных на множестве $\boldsymbol{R}$, выясните, существует ли нейтральный элемент. Если существует, то укажите все симметризуемые элементы.

**2.1.11.** Для следующих операций, определенных на множестве $\boldsymbol{R}$, докажите:

а) операция $\max\{a, b\}$ дистрибутивна относительно операции $\min\{a, b\}$;

б) операция $\min\{a, b\}$ дистрибутивна относительно операции $\max\{a, b\}$;

в) операция $\min\{a, b\}$ ($\max\{a, b\}$) дистрибутивна относительно себя;

г) операция $\frac{a+b}{2}$ дистрибутивна относительно себя;

д) операция $ab-ba$ дистрибутивна относительно сложения; умножения.

**2.1.12.** Для операций а) — г), определенных на множестве $\boldsymbol{R}$, и операций д), е), определенных на $\boldsymbol{R}^+$, проверьте, какие из следующих утверждений истинны:

а) операция сложения дистрибутивна относительно операции $ab-ba$;

б) операция умножения дистрибутивна относительно операции $ab-ba$;

в) операция умножения дистрибутивна относительно операции вычитания;

г) операция вычитания дистрибутивна относительно операции умножения;

д) операция $\sqrt{ab}$ дистрибутивна относительно операции сложения;

е) операция $\sqrt{ab}$ дистрибутивна относительно операции умножения.

**2.1.13.** Как по таблице Кэли определить, есть ли в алгебре левый, правый, двусторонний нейтральный элемент? Как определить, коммутативна ли операция?

**2.1.14.** Для каждой алгебры из упражнения 2.1.2 выясните, есть ли в ней нейтральный элемент, укажите все симметризуемые элементы. Какие из операций коммутативны?

## § 2. ПОДАЛГЕБРЫ. ГОМОМОРФИЗМЫ И ИЗОМОРФИЗМЫ АЛГЕБР

**2.2.1.** Даны алгебры: $\langle \boldsymbol{Z}, +, \cdot \rangle$; $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$; $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot \rangle$; $\langle \boldsymbol{Z}, +, \cdot, 1 \rangle$; $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot, 1 \rangle$, где «$+$», «$\cdot$» — обычные операции сложения и умножения чисел, «1» — нульарная операция — выделение числа 1. Проверьте, является ли подалгеброй каждой из этих алгебр следующее подмножество множества $\boldsymbol{Z}$:

а) $2\boldsymbol{Z}$; г) $\{0\}$;
б) $2\boldsymbol{Z}+1$; д) $\{-1, 0, 1\}$;
в) $\boldsymbol{N}$; е) $\{k\in\boldsymbol{Z} \mid k<0\}$;
ж) $\{k\in\boldsymbol{Z} \mid k<m\}$, где $m$ — фиксированное положительное число;
з) $\{k\in\boldsymbol{Z} \mid k<m\}$, где $m$ — фиксированное отрицательное число;
и) $\{km \mid k\in\boldsymbol{Z}\}$, где $m$ — фиксированное целое число;
к) $\{1\}$.

**2.2.2.** Назовем матрицей таблицу $\begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$, в которой $a$, $b$, $c$, $d\in\boldsymbol{R}$. Две матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ называются равными, если $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$, $d_1=d_2$. Определим операции сложения и умножения матриц и операцию перехода к противоположной матрице:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix},$$

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

Множество всех матриц будем обозначать $M(2, \boldsymbol{R})$. Даны алгебры: $A_1=\langle M(2, \boldsymbol{R}), +, \cdot\rangle$; $A_2=\langle M(2, \boldsymbol{R}), \cdot\rangle$; $A_3=\langle M(2, \boldsymbol{R}), +\rangle$; $A_4=\langle M(2, \boldsymbol{R}), \cdot, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle$; $A_5=\langle M(2, \boldsymbol{R}), +, -\rangle$, где нульарная операция — выделение единичной матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Проверьте, является ли подалгеброй каждой из этих алгебр следующее множество матриц:

а) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d\in\boldsymbol{Z}\right\}$;

б) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c\in\boldsymbol{R}\right\}$;

в) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b\in\boldsymbol{R}\right\}$;

г) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix} \middle| \; k, a, b\in\boldsymbol{R}\right\}$;

д) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; ad-bc\neq0;\ a, b, c, d\in\boldsymbol{R}\right\}$;

е) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, ad-bc=1;\ a,\ b,\ c,\ d\in \boldsymbol{R}\right\}$;

ж) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,\ b,\ c,\ d\geqslant 0\right\}$;

з) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$;

и) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$;

к) $\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \middle| \, a\in \boldsymbol{Q}\right\}$;

л) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

**2.2.3.** Приведите примеры подалгебр (не менее трех) в каждой из следующих алгебр:

а) $\langle \boldsymbol{Z}, +, \cdot\rangle$; б) $\langle \boldsymbol{Z}, +, \cdot, 0\rangle$; в) $\langle \boldsymbol{Z}_6, +, \cdot\rangle$; г) $\langle M(2, \boldsymbol{R}), +, \cdot\rangle$; д) $\langle \boldsymbol{Q}, \cdot, 1\rangle$; е) $\langle \boldsymbol{R}^+, \cdot, 1, ^{-1}\rangle$ (здесь «$^{-1}$» — унарная операция перехода к обратному числу, «0», «1» — нульарные операции — выделение числа 0 и числа 1 соответственно).

**2.2.4.** Докажите, что в алгебре $\langle \boldsymbol{Z}, +, -, 1\rangle$, где «$-$» — операция вычитания, существует ровно одна подалгебра. Приведите еще примеры алгебр с таким свойством.

**2.2.5.** Даны следующие отображения $\boldsymbol{Z}$ в $\boldsymbol{Z}$:

а) $m\mapsto m+1$;
б) $m\mapsto 3m$;
в) $m\mapsto -m$;
г) $m\mapsto \begin{cases} 1, \text{ если } m<0, \\ 2^m, \text{ если } m\geqslant 0; \end{cases}$
д) $m\mapsto |m|$;
е) $m\mapsto -|m|$;
ж) $m\mapsto m^2$;
з) $m\mapsto m$;
и) $(\forall m)\, m\mapsto 0$;
к) $(\forall m)\, m\mapsto 1$.

Какие из этих отображений являются гомоморфными (изоморфными) отображениями алгебр: 1) $\langle \boldsymbol{Z}, +\rangle \to \langle \boldsymbol{Z}, +\rangle$; 2) $\langle \boldsymbol{Z}, +\rangle \to \langle \boldsymbol{Z}, \cdot\rangle$; 3) $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot\rangle \to \langle \boldsymbol{Z}, \cdot\rangle$; 4) $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot\rangle \to \langle \boldsymbol{Z}, +\rangle$?

**2.2.6.** Даны следующие отображения $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{R}$:

а) $x\mapsto x^2$;
б) $x\mapsto 2^x$;
в) $x\mapsto \begin{cases} \ln x^2, \text{ если } x\neq 0, \\ 0, \text{ если } x=0; \end{cases}$
г) $x\mapsto -x$;
д) $x\mapsto \sin x$;
е) $x\mapsto x$;
ж) $x\mapsto 5x$;
з) $x\mapsto |x|$;
и) $x\mapsto \frac{x}{2}$;
к) $x\mapsto 0$;
л) $x\mapsto 1$.

Какие из этих отображений являются гомоморфными (изоморфными) отображениями алгебр: 1) $\langle \mathbf{R}, +\rangle$ в $\langle \mathbf{R}, +\rangle$; 2) $\langle \mathbf{R}, +\rangle$ в $\langle \mathbf{R}, \cdot\rangle$; 3) $\langle \mathbf{R}, \cdot\rangle$ в $\langle \mathbf{R}, \cdot\rangle$; 4) $\langle \mathbf{R}, \cdot\rangle$ в $\langle \mathbf{R}, +\rangle$?

**2.2.7.** Какие из следующих отображений являются изоморфными отображениями указанных алгебр:

а) $f\colon \langle \mathbf{Z}, +\rangle \to \langle \mathbf{Z}, +\rangle$, $f(a)=a+1$;
б) $f\colon \langle \mathbf{Z}, +\rangle \to \langle \mathbf{Z}, +\rangle$, $f(a)=2a$;
в) $f\colon \langle \mathbf{Z}, +\rangle \to \langle \mathbf{Z}, +\rangle$, $f(a)=-a$;
г) $f\colon \langle \mathbf{N}, +\rangle \to \langle \mathbf{N}, \cdot\rangle$, $f(a)=2^a$;
д) $f\colon \langle \mathbf{R}^+, \cdot\rangle \to \langle \mathbf{R}^+, \cdot\rangle$, $f(a)=\frac{1}{a}$;
е) $f\colon \langle \mathbf{R}^+, \cdot\rangle \to \langle \mathbf{R}, \cdot\rangle$, $f(a)=\frac{1}{a}$;
ж) $f\colon \langle \mathbf{R}^+, \cdot\rangle \to \langle \mathbf{R}, +\rangle$, $f(a)=\ln a$;
з) $f\colon \langle \mathbf{Z}, +\rangle \to \langle \mathbf{Z}_n, +\rangle$, $f(a)=\bar{a}$?

**2.2.8.** Докажите изоморфность следующих алгебр:

а) $\langle \mathbf{R}^+, +\rangle$ и $\langle \mathbf{R}^-, +\rangle$ $(\mathbf{R}^-=\{x\in\mathbf{R}\mid x<0\})$;
б) $\langle \{a+b\sqrt{2}\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}, +\rangle$ и $\langle \{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}, +\rangle$;
в) $\langle \{r\in\mathbf{Q}\mid 2r\in\mathbf{Z}\}, +\rangle$ и $\langle \mathbf{Z}, +\rangle$;
г) $\langle \{a\in\mathbf{R}\mid a>1\}, \cdot\rangle$ и $\langle \{a\in\mathbf{R}\mid 0<a<1\}, \cdot\rangle$;
д) $\left\langle \left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, x\in\mathbf{R}\right\}, \cdot\right\rangle$ и $\langle \mathbf{R}, +\rangle$.

**2.2.9.** Пусть $\langle A, \circ\rangle$, $\langle B, *\rangle$ — изоморфные алгебры, «$\circ$», «$*$» — бинарные операции. Докажите:

а) если в $\langle A, \circ\rangle$ операция $\circ$ коммутативна, то и в $\langle B, *\rangle$ операция $*$ коммутативна;

б) если в $\langle A, \circ\rangle$ операция $\circ$ ассоциативна, то и в $\langle B, *\rangle$ операция $*$ ассоциативна:

в) если в $\langle A, \circ\rangle$ существует нейтральный элемент, то и в $\langle B, *\rangle$ существует нейтральный элемент;

г) если в $\langle A, \circ\rangle$ каждый элемент симметризуем, то и в $\langle B, *\rangle$ каждый элемент симметризуем.

**2.2.10.** Докажите, что следующие алгебры не изоморфны:

а) $\langle \mathbf{Z}, +\rangle$ и $\langle \mathbf{N}, +\rangle$;
б) $\langle \mathbf{Z}, \cdot\rangle$ и $\langle 2\mathbf{Z}, \cdot\rangle$;
в) $\langle M(2, \mathbf{R}), \cdot\rangle$ и $\langle \mathbf{R}, \cdot\rangle$.

**2.2.11.** Пусть $\langle A, \circ\rangle$ и $\langle B, *\rangle$ — алгебры, «$\circ$», «$*$» — бинарные операции и существует сюръективное гомоморфное отображение $\langle A, \circ\rangle$ на $\langle B, *\rangle$. Какие из утверждений а) — г) из задачи 2.2.9 истинны и какие ложны? Какие из них истинны для произвольного гомоморфного отображения?

**2.2.12.** Пусть $\langle A, \circ\rangle$, $\langle B, *\rangle$, $\langle C, \triangle\rangle$ — алгебры, «$\circ$», «$*$», «$\triangle$» — бинарные операции; $\langle A, \circ\rangle \cong \langle B, *\rangle$, $\langle B, *\rangle \cong \langle C, \triangle\rangle$. Докажите, что $\langle A, \circ\rangle \cong \langle C, \triangle\rangle$. Докажите, что если $\varphi$ — изоморфное отображение $\langle A, \circ\rangle$ на $\langle B, *\rangle$, то $\varphi^{-1}$ — изоморфное отображение $\langle \boldsymbol{B}, *\rangle$ на $\langle \boldsymbol{A}, \circ\rangle$.

## § 3. ГРУППЫ. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ГРУПП. ПОДГРУППЫ. ГОМОМОРФИЗМЫ И ИЗОМОРФИЗМЫ ГРУПП

Алгебра $\langle G, *, '\rangle$ с бинарной операцией $*$ и унарной операцией $'$ называется группой, если выполняются следующие условия:

1) операция $*$ ассоциативна, т. е.
$$(\forall a, b, c \in G)(a * b) * c = a * (b * c);$$
2) в $G$ существует правый нейтральный элемент $e$, т. е.
$$(\exists e \in G)(\forall a \in G)\ a * e = a;$$
3) операция $'$ есть операция перехода к правому симметричному элементу, т. е.
$$(\forall a \in G)\ a * a' = e.$$

При мультипликативной записи бинарную операцию называют умножением и пишут $a \cdot b$ или $ab$ вместо $a * b$, унарную операцию называют операцией перехода к обратному элементу и обозначают $^{-1}$, нейтральный элемент называют единицей группы и обозначают $e$ или 1.

При аддитивной записи бинарную операцию называют сложением и пишут $a+b$, унарную операцию называют операцией перехода к противоположному элементу и обозначают $-$, нейтральный элемент называют нулем группы и обозначают 0.

**2.3.1.** Рассматривается бинарная операция сложения чисел и унарная операция перехода к противоположному числу. Какие из следующих множеств являются группами относительно указанных операций: $\boldsymbol{Z}$, $2\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{N}$, $n\boldsymbol{Z}$, $2\boldsymbol{Z}+1$, $\boldsymbol{Q}^+$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}_2 = \left\{\frac{r}{s} \,\middle|\, r, s \in \boldsymbol{Z},\ 2 \nmid s\right\}$, $\{-1, 0, 1\}$?

**2.3.2.** Рассматриваются операции умножения чисел и перехода к обратному числу. Какие из следующих множеств являются группами относительно указанных операций: $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$, $\boldsymbol{R}^+$, $\boldsymbol{Z}$, $2\boldsymbol{Z}+1$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}\setminus\{0\}$, $\{1, -1\}$, $\left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$, $\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]\setminus\{0\}$, $\{2^n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$, $\left\{\frac{r}{s} \,\middle|\, r, s \in \boldsymbol{Z}\setminus\{0\},\ 2 \nmid 5\right\}$?

**2.3.3.** Докажите, что на множестве $\boldsymbol{Z}_n$ можно определить унарную операцию «—» перехода к противоположному элементу так, чтобы алгебра $\langle \boldsymbol{Z}_n, +, - \rangle$ была группой (эту группу будем называть аддитивной группой вычетов по модулю $n$).

**2.3.4.** Рассматривается бинарная операция умножения классов вычетов. В каких из следующих множеств определена указанная операция: $\boldsymbol{Z}_8$, $\boldsymbol{Z}_8\backslash\{\bar{0}\}$, $\boldsymbol{Z}_5$, $\boldsymbol{Z}_5\backslash\{\bar{0}\}$, $\boldsymbol{Z}_6\backslash\{\bar{0}\}$, $\boldsymbol{Z}_6$, $\boldsymbol{Z}_7\backslash\{\bar{0}\}$, $\boldsymbol{Z}_7$, $\boldsymbol{Z}_9$, $\boldsymbol{Z}_9\backslash\{\bar{0}\}$, $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}\subset\boldsymbol{Z}_8$, $\{\bar{1}, \bar{5}\}\subset\boldsymbol{Z}_6$? Для множеств, в которых операция умножения классов вычетов определена, составьте таблицы умножения. В каких из полученных алгебр можно определить операцию перехода к обратному элементу?

**2.3.5.** Докажите, что алгебра $\langle M(2, \boldsymbol{R}), +, - \rangle$ является группой (см. 2.2.2).

**2.3.6.** На множестве всех матриц $M(2, \boldsymbol{R})$ рассматриваются операции сложения матриц и перехода к противоположной матрице. Какие из следующих множеств являются группами относительно указанных операций:

а) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x\in\boldsymbol{R}\right\}$; д) $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y\in\boldsymbol{R}\right\}$;

б) $\left\{\begin{pmatrix} x & x \\ 2x & 2x \end{pmatrix} \middle| \, x\in\boldsymbol{R}\right\}$; е) $\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x\in\boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \middle| \, x\in\boldsymbol{R}\right\}$; ж) $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y\in\boldsymbol{R}\right\}$;

г) $\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x, y\in\boldsymbol{R}\right\}$; з) $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y\in\boldsymbol{Q}\right\}$?

**2.3.7.** Какие из следующих множеств замкнуты относительно операции умножения матриц:

а) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x\in\boldsymbol{R}\backslash\{0\}\right\}$; г) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x\in\boldsymbol{R}\right\}$;

б) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \middle| \, x\in\boldsymbol{R}\right\}$; д) $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y\in\boldsymbol{R}\right\}$;

в) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x\in\boldsymbol{R}\right\}$; е) $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y\in\boldsymbol{R}, x^2+y^2\neq 0\right\}$?

Укажите те множества, на которых можно определить унарную операцию перехода к обратной матрице таким образом, чтобы полученная алгебра была группой.

**2.3.8.** Докажите, что каждое из следующих множеств матриц замкнуто относительно операции умножения матриц и можно так определить унарную операцию перехода к обратной матрице, что полученная алгебра является группой:

а) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, ad-bc\neq 0\right\}$;

б) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, ad-bc=1\right\}$;

в) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, ac\neq 0\right\}$;

г) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, ad\neq 0\right\}$;

д) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a^2+b^2=c^2+d^2=1;\ ac+bd=0\right\}$.

**2.3.9.** Пусть $T$ — множество всех отображений $f_{a,b}$: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, заданных правилом $f_{a,b}(x)=ax+b$, где $a$, $b\in\boldsymbol{Q}$, $a\neq 0$. Докажите, что $T$ является группой относительно операций композиции отображений и перехода к обратному отображению.

**2.3.10.** На множестве $A=\{\langle a, b\rangle \mid a, b\in\boldsymbol{Q}, b\neq 0\}$ рассмотрим операцию $\langle a_1, b_1\rangle\circ\langle a_2, b_2\rangle=\langle a_1+b_1a_2, b_1\cdot b_2\rangle$. Докажите, что на $A$ можно определить унарную операцию $^{-1}$ так, что алгебра $\langle A, \circ, ^{-1}\rangle$ является группой.

**2.3.11.** Движением называется отображение плоскости (пространства) в себя, сохраняющее расстояние между точками. Докажите, что множество всех движений образует группу относительно операций композиции отображений и перехода к обратному отображению.

**2.3.12.** Пусть $F$ — некоторая геометрическая фигура, расположенная на данной плоскости, $G$ — множество всех движений плоскости, отображающих $F$ на себя. Докажите, что $G$ — подгруппа группы всех движений плоскости. Эта подгруппа называется группой симметрий фигуры $F$.

**2.3.13.** Составьте таблицу умножения для элементов каждой из следующих групп:

а) группа вращений правильного треугольника;

б) группа вращений квадрата;

в) группа вращений правильного пятиугольника;

г) группа симметрий ромба;

д) группа симметрий правильного треугольника;

е) группа симметрий прямоугольника, не являющегося квадратом;

ж) группа симметрий квадрата.

**2.3.14.** Пусть $T$ — некоторое геометрическое тело. Докажите, что множество всех движений пространства, отображающих $T$ на себя, образует подгруппу в группе всех движений пространства. Эта подгруппа называется группой симметрий тела $T$.

**2.3.15.** Докажите, что группа симметрий куба изоморфна группе $S_4$ (см. 2.3.23).

**2.3.16.** Докажите, что группа симметрий правильного тетраэдра изоморфна подгруппе группы $S_4$, состоящей из 12 элементов.

**2.3.17.** На множестве $A=\{\langle a, b\rangle \mid a, b\in \boldsymbol{R}, a^2+b^2\neq 0\}$ определена операция $\langle a, b\rangle \circ \langle c, d\rangle = \langle ac-bd, ad+bc\rangle$. Докажите, что можно определить операцию $^{-1}$ перехода к обратному элементу так, что алгебра $\langle A, \circ, {}^{-1}\rangle$ является группой.

**2.3.18.** На множестве $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ определена бинарная операция:

а) $\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle = \langle ac, ad\rangle$;

б) $\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle = \langle ac+bd, ad+bc\rangle$.

Можно ли определить унарную операцию $^{-1}$ так, чтобы алгебра $\langle \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}, \cdot, {}^{-1}\rangle$ была группой?

**2.3.19.** Пусть $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ — группа, $t$ — фиксированный элемент из $G$. На множестве $G$ определим бинарную операцию $a*b=a\cdot t\cdot b$. Докажите, что можно определить унарную операцию $'$ так, чтобы алгебра $\langle G, *, '\rangle$ была группой.

**2.3.20.** Пусть $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ — группа. На множестве $G$ определим бинарную операцию $a*b=b\cdot a$. Докажите, что алгебра $\langle G, *, {}^{-1}\rangle$ — группа.

**2.3.21.** Пусть $\langle G_1, \cdot, {}^{-1}\rangle$ и $\langle G_2, *, '\rangle$ — группы. На множестве $G_1\times G_2$ определим бинарную операцию $\langle a, b\rangle \circ \circ \langle c, d\rangle = \langle a\cdot c, b*d\rangle$ и унарную операцию $f(\langle a, b\rangle) = \langle a^{-1}, b'\rangle$. Докажите, что $\langle G_1\times G_2, \circ, f\rangle$ — группа (эта группа называется прямым произведением групп $G_1$ и $G_2$).

**2.3.22.** Решите уравнения $x+\overline{9}=\overline{2}$; $x-\overline{5}=\overline{7}$; $3x+\overline{4}=\overline{1}$; $7x-\overline{3}=\overline{9}$ в аддитивной группе вычетов по модулю: а) 2; б) 7; в) 10 ($nx=x+\ldots+x$ ($n$ слагаемых)).

**2.3.23.** Пусть $S_n$ — множество всех подстановок множества $M=\{1, 2, \ldots, n\}$ (т. е. биекций $M$ на $M$). На $S_n$ определены операция $\circ$ — композиция отображений и унарная операция $^{-1}$ — переход к обратному отображению. Подстановку $\tau$ будем записывать в виде таблицы $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}$, в которой $\tau(1)=i_1, \ldots, \tau(n)=i_n$. Группа $\langle S_n, \circ, {}^{-1}\rangle$ называется симметрической группой степени $n$. Решите уравнения в группе $S_3$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\circ X=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix};\quad X\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\circ X\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

(напомним, что композиция отображений $\alpha \circ \beta$ — это результат последовательного выполнения сначала отображения $\beta$, затем $\alpha$).

**2.3.24.** Докажите, что каждый элемент мультипликативной группы вычетов, отличных от $\bar{0}$, по модулю 5 является целой положительной степенью элемента 2. Найдите элемент, обладающий аналогичным свойством в мультипликативной группе вычетов, отличных от 0, по модулю 7.

**2.3.25.** Пусть $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ — группа, $g$ — фиксированный элемент из $G$. Докажите, что отображение $L_g$: $G \to G$, заданное правилом $L_g(x) = g \cdot x$, является биекцией. Докажите, что множество $S = \{L_g | g \in G\}$ относительно операций композиции отображений и перехода к обратному отображению образует группу, изоморфную группе $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$.

**2.3.26.** Пусть $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ — группа. Докажите, что отображение $x \mapsto x^{-1}$ является биекцией.

**2.3.27.** Докажите, что в таблице умножения конечной группы каждый элемент группы встречается в каждой строке (столбце) ровно один раз.

**2.3.28.** Пусть $\langle G, \circ, f \rangle$ и $\langle G, \circ, h \rangle$ — группы, «$\circ$» — одна и та же бинарная операция. Докажите, что унарные операции $f$, $h$ также совпадают.

**2.3.29.** Докажите, что если $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ — группа, $e$ — единица группы $G$, то выполняются следующие условия:

а) $(\forall a, b \in G)(a \cdot b = a \to b = e) \wedge (a \cdot b = b \to a = e)$;

б) $(\forall a, b \in G)(a \cdot b = e \to b = a^{-1} \wedge a = b^{-1})$;

в) $(\forall a \in G)\, a \cdot a = e \to a = e$.

**2.3.30.** Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ — конечная алгебра с ассоциативной бинарной операцией.

а) Докажите, что если в $G$ существует правая единица и выполняется условие $(\forall a, b, c \in G)\, a \cdot b = a \cdot c \to b = c$, то на $G$ определена операция перехода к обратному элементу $^{-1}$ так, что алгебра $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ является группой.

б) Докажите, что если в $G$ выполняется условие $(\forall a, b, c \in G)\; b \cdot a = c \cdot a \to b = c$ (*), то в $G$ существует правая единица.

в) Придумайте пример конечной алгебры с ассоциативной бинарной операцией, удовлетворяющей условию (*), в которой нельзя определить операцию перехода к обратному элементу.

**2.3.31.** Докажите, что если в группе $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ для каждого элемента выполняется равенство $a^2 = e$, то $G$ — абелева группа.

**2.3.32.** Докажите, что любая группа, состоящая из трех или четырех элементов, абелева.

**2.3.33.** Пусть $\langle G, \cdot, ^{-1}\rangle$ — группа. Определим для любого целого $m$ и любого $x \in G$

$$x^m = \begin{cases} x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \ (m \text{ сомножителей}), \text{ если } m > 0, \\ e, \text{ если } m = 0, \\ x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \ldots \cdot x^{-1} \ (-m \text{ сомножителей}), \text{ если } m < 0. \end{cases}$$

Докажите, что для любых целых $m$, $n$:

а) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$; в) $(x^m)^{-1} = (x^{-1})^m = x^{-m}$;

б) $(x^m)^n = x^{mn}$; г) $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$.

**2.3.34.** Пусть $\langle G, \cdot, ^{-1}\rangle$ — абелева группа. Докажите, что для любого целого $m$ выполняется условие $(\forall x, y \in G)$ $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$. Покажите, что в неабелевой группе это условие не выполняется.

**2.3.35.** Докажите, что в группе $\langle G, \cdot, ^{-1}\rangle$ условие $(\forall a, b \in G)\,(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $G$ — абелева группа.

**2.3.36.** Какие из следующих множеств подстановок образуют подгруппу в группе $S_4$:

а) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}\right\}$;

б) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\right\}$;

в) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$;

г) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\right\}$;

д) $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix},\right.$
$\left.\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\right\}$?

**2.3.37.** Докажите, что в группе $T$ из задачи 2.3.9 подгруппой является:

а) множество всех отображений $f_{a,\,0}$;

б) множество всех отображений $f_{1,\,b}$.

**2.3.38.** Подгруппа $H$ группы $G$ называется собственной подгруппой, если $H$ содержит не менее двух элементов и не совпадает с $G$. Укажите собственные подгруппы в следующих группах:

а) аддитивной группе целых чисел;

б) мультипликативной группе рациональных чисел, отличных от нуля;

в) аддитивной группе вычетов по модулю 8;

г) мультипликативной группе $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ вычетов по модулю 8;

д) симметрической группе $S_3$;

е) симметрической группе $S_4$;

ж) мультипликативной группе положительных рациональных чисел.

**2.3.39.** Докажите, что если подгруппа $H$ аддитивной группы целых чисел содержит число 2, то $H$ содержит все четные числа.

**2.3.40.** Докажите, что если подгруппа $H$ аддитивной группы целых чисел содержит число 1 или $-1$, то $H$ совпадает с $\boldsymbol{Z}$.

**2.3.41.** Найдите наименьшую (по включению) подгруппу в мультипликативной группе действительных чисел, отличных от нуля, содержащую:

а) 2; б) $\boldsymbol{Z}\setminus\{0\}$; в) $\boldsymbol{Q}\setminus\{0\}$; г) $\boldsymbol{Z}^+$; д) $\boldsymbol{Q}^+$.

**2.3.42.** Укажите все конечные подгруппы в группе $\langle \boldsymbol{R}\setminus\{0\}, \cdot, ^{-1}\rangle$.

**2.3.43.** Докажите, что если $\langle G, \cdot, ^{-1}\rangle$ — конечная группа, то выполняется условие $(\forall a\in G)(\exists n\in \boldsymbol{Z}^+)\ a^n=e$.

**2.3.44.** Найдите в аддитивной группе вычетов по модулю 12 наименьшую подгруппу, содержащую: а) $\bar{2}$; б) $\bar{3}$; в) $\bar{4}$; г) $\bar{1}$; д) $\bar{5}$; е) $\bar{7}$; ж) $\bar{8}$. Для каких целых чисел $k$ наименьшая подгруппа группы $\boldsymbol{Z}_{12}$, содержащая $\bar{k}$, совпадает с $\boldsymbol{Z}_{12}$?

**2.3.45.** Докажите, что если $p$ — простое число, то любая ненулевая подгруппа аддитивной группы $\boldsymbol{Z}_p$ совпадает с $\boldsymbol{Z}_p$.

**2.3.46.** Докажите, что если НОД $(k, n)=1$, то любая подгруппа аддитивной группы $\boldsymbol{Z}_n$, содержащая $\bar{k}$, совпадает с $\boldsymbol{Z}_n$.

**2.3.47.** Пусть $\langle G, \cdot, ^{-1}\rangle$ — группа; $Z(G)=\{g\in G\,|\,(\forall x\in G)\ g\cdot x=x\cdot g\}$. Докажите, что $Z(G)$ — подгруппа группы $G$.

**2.3.48.** Докажите, что пересечение двух (любого непустого множества) подгрупп группы $G$ является подгруппой группы $G$.

**2.3.49.** Докажите, что следующие аддитивные группы изоморфны:

а) $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ и $\boldsymbol{Q}[\sqrt{3}]$;

б) $\boldsymbol{Z}$ и $2\boldsymbol{Z}$;

в) $2\boldsymbol{Z}$ и $3\boldsymbol{Z}$;

г) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a\in\boldsymbol{R}\right\}$ и $\boldsymbol{R}$;

д) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b\in\boldsymbol{R}\right\}$ и $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y\in\boldsymbol{R}\right\}$.

**2.3.50.** Докажите, что следующие группы изоморфны:

а) $\left\langle\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \boldsymbol{R}, x^2+y^2 \neq 0\right\}, \cdot, {}^{-1}\right\rangle$ и группа из задачи 2.3.17;

б) $\left\langle\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \boldsymbol{R}, x \neq 0\right\}, \cdot, {}^{-1}\right\rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}\backslash\{0\}, \cdot, {}^{-1}\rangle$;

в) мультипликативная группа матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \boldsymbol{R}$, и аддитивная группа действительных чисел;

г) $\langle \boldsymbol{R}^+, \cdot, {}^{-1}\rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}, +, -\rangle$.

**2.3.51.** Пусть $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ — группа, $g \in G$. Докажите, что отображение $\varphi_g: G \to G$, заданное правилом $x \mapsto g^{-1}xg$, является изоморфным.

**2.3.52.** Докажите, что если $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ — абелева группа, то отображение $G \to G$, заданное правилом $x \mapsto x^{-1}$, является изоморфным. Верно ли это утверждение для произвольной группы?

**2.3.53.** Пусть $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ — абелева группа. Докажите, что для любого целого $n$ отображение $G \to G$, заданное правилом $x \mapsto x^n$, является гомоморфным. Верно ли это утверждение для произвольной группы?

**2.3.54.** Докажите, что группы $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ и $\langle G, *, '\rangle$ из задачи 2.3.19 изоморфны; группы $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ и $\langle G, *, '\rangle$ из задачи 2.3.20 изоморфны; группа $T$ из задачи 2.3.9 изоморфна группе $A$ из задачи 2.3.10.

**2.3.55.** Пусть $\varphi$: $G \to H$ — сюръективное гомоморфное отображение абелевой группы $G$ на группу $H$. Докажите, что $H$ — абелева группа. Приведите примеры сюръективного гомоморфного отображения неабелевой группы на абелеву группу.

**2.3.56.** Пусть $\langle G, \cdot\rangle$ и $\langle H, *\rangle$ — изоморфные алгебры, «$\cdot$» и «$*$» — бинарные операции; пусть на $G$ определена унарная операция ${}^{-1}$ так, что алгебра $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ является группой. Докажите, что на $H$ можно так определить унарную операцию $'$, чтобы алгебра $\langle H, *, '\rangle$ была группой.

**2.3.57.** Пусть $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ — группа, $A$ — произвольное множество, $f$: $G \to A$ — биекция. Можно ли на $A$ определить операции так, чтобы $f$ было изоморфным отображением групп?

**2.3.58.** Придумайте на множестве $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел бинарную операцию $\circ$ и унарную операцию $'$ так, чтобы алгебра $\langle \boldsymbol{N}, \circ, '\rangle$ была группой.

**2.3.59.** Пусть $\varphi$ — гомоморфное отображение группы $G$ в группу $H$. Докажите, что $\operatorname{Im}\varphi$ — подгруппа группы $H$.

Обозначим через $e_H$ единицу группы $H$ и $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$. Докажите, что $\mathrm{Ker}\ \varphi$ — подгруппа группы $G$.

**2.3.60.** Существует ли гомоморфное отображение $\varphi$ аддитивной группы целых чисел в себя, при котором $\varphi(2)=3$; $\varphi(2)=4$?

**2.3.61.** Существует ли гомоморфное отображение $\varphi\colon \langle \boldsymbol{Z}, +, - \rangle \to \langle \boldsymbol{Q}, +, - \rangle$, при котором $\varphi(2)=3$?

**2.3.62.** Докажите, что для любого гомоморфного отображения $\varphi\colon \langle \boldsymbol{Z}, + \rangle \to \langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$ существует такое $k \in \boldsymbol{Z}$, что $(\forall a \in \boldsymbol{Z})\ \varphi(a) = ka$. Докажите, что существуют ровно два изоморфных отображения $\varphi_1\colon a \mapsto a$ и $\varphi_2\colon a \mapsto -a$ алгебры $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$ в себя.

**2.3.63.** Докажите, что не существует сюръективного гомоморфного отображения аддитивной группы рациональных чисел на аддитивную группу целых чисел.

**2.3.64.** Пусть $\varphi$ — гомоморфное отображение $\langle \boldsymbol{Q}, + \rangle$ в $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$. Докажите, что $(\forall a \in \boldsymbol{Q})\ \varphi(a) = 0$.

**2.3.65.** Пусть $\varphi$ — гомоморфное отображение аддитивной группы рациональных чисел в себя. Докажите, что $\varphi$ либо нулевой гомоморфизм, т. е. $(\forall a \in \boldsymbol{Q})\ \varphi(a)=0$, либо изоморфизм.

**2.3.66.** Докажите, что все группы, состоящие из трех элементов, изоморфны, но существуют неизоморфные группы, состоящие из четырех элементов.

**2.3.67.** Докажите, что группа $S_3$ изоморфна группе симметрий правильного треугольника.

**2.3.68.** Докажите, что группа $S_3$ не изоморфна аддитивной группе вычетов по модулю 6.

**2.3.69.** Докажите, что группа вращений квадрата не изоморфна группе симметрий ромба.

**2.3.70.** Докажите, что следующие группы не изоморфны:

а) $\langle \boldsymbol{Q}, +, - \rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q} \setminus \{0\}, \cdot, {}^{-1} \rangle$;
б) $\langle \boldsymbol{Q} \setminus \{0\}, \cdot, {}^{-1} \rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}^+, \cdot, {}^{-1} \rangle$;
в) $\langle \boldsymbol{Q}^+, \cdot, {}^{-1} \rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}^+, \cdot, {}^{-1} \rangle$;
г) $\langle \boldsymbol{R}^+, \cdot, {}^{-1} \rangle$ и $\langle \boldsymbol{R} \setminus \{0\}, \cdot, {}^{-1} \rangle$;
д) $\langle \boldsymbol{R}, +, - \rangle$ и $\langle \boldsymbol{R} \setminus \{0\}, \cdot, {}^{-1} \rangle$;
е) $\langle \boldsymbol{R}^+, \cdot, {}^{-1} \rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}, +, - \rangle$.

**2.3.71.** Пусть функция $f$ определена для всех натуральных $n$ и принимает целые неотрицательные значения. Известно, что $f$ удовлетворяет условиям:

а) $(\forall m, n) f(m+n) = f(m) + f(n) \vee f(m+n) = f(m) + f(n) + 1$;
б) $f(2) = 0$; в) $f(3) > 0$; г) $f(9999) = 3333$.

Найдите $f(1990)$.

## § 4. КОЛЬЦА. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА КОЛЕЦ. ПОДКОЛЬЦА. ГОМОМОРФИЗМЫ И ИЗОМОРФИЗМЫ КОЛЕЦ

Под кольцом в данном параграфе понимается алгебра $\langle A, +, -, \cdot \rangle$ с бинарными операциями «$+$», «$\cdot$» и унарной операцией «$-$», такая, что:

а) $\langle A, +, - \rangle$ — абелева группа;

б) операция «$\cdot$» ассоциативна;

в) операция умножения дистрибутивна относительно сложения, т. е.

$$(\forall a, b, c \in A)\, a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \wedge (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Кольцо $\langle A, +, -, \cdot \rangle$ называется кольцом с единицей, если

$$(\exists e \in A)(\forall a \in A)\, a \cdot e = e \cdot a = a.$$

**2.4.1.** Какие из следующих множеств действительных чисел замкнуты относительно главных операций кольца действительных чисел:

а) $\boldsymbol{Z}$;

б) $2\boldsymbol{Z}$;

в) $n\boldsymbol{Z}$ $(n \in \boldsymbol{Z})$;

г) $\boldsymbol{N}$;

д) $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\}$;

е) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \boldsymbol{Z}, a \geqslant 0, b \geqslant 0\}$;

ж) $\boldsymbol{R}^+$;

з) $\boldsymbol{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \boldsymbol{Q}\}$;

и) $\{a \in \boldsymbol{Z} \mid a > 5\}$;

к) $2\boldsymbol{Z} + 1$;

л) $\boldsymbol{Q}$;

м) $\{-1; 0, 1\}$;

н) $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\}$;

о) множество всех рациональных чисел, которые можно представить в виде дроби со знаменателем 2;

п) множество всех рациональных чисел, которые можно представить в виде дроби со знаменателем, равным степени числа 2;

р) множество всех рациональных чисел, которые можно представить в виде дроби с нечетным знаменателем?

**2.4.2.** Докажите, что алгебра $\langle M(2, \boldsymbol{R}), +, -, \cdot \rangle$ — кольцо («$-$» — унарная операция перехода к противоположной матрице); докажите, что это — некоммутативное кольцо с единицей и делителями нуля.

**2.4.3.** Какие из следующих множеств матриц замкнуты относительно главных операций кольца матриц $M(2, \boldsymbol{R})$:

а) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \boldsymbol{Q}\right\}$;

б) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

в) $\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \boldsymbol{Q}, c \in \boldsymbol{Z}\right\}$;

г) $\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \boldsymbol{Z}, c \in 2\boldsymbol{Z}\right\}$;

д) $\left\{\begin{pmatrix} r & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \; r \in \boldsymbol{Z}, a, b \in \boldsymbol{Q}\right\}$;

е) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a \in \boldsymbol{R}\right\}$;

ж) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \boldsymbol{R}\right\}$;

з) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \; a \in \boldsymbol{R}, b \in \boldsymbol{R}^+\right\}$;

и) $\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \boldsymbol{R}\right\}$;

к) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \boldsymbol{R}\right\}$;

л) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \boldsymbol{R}\right\}$;

м) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \boldsymbol{Q}\right\}$;

н) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a \in \boldsymbol{R}\right\}$;

о) $\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \middle| \; a \in \boldsymbol{R}\right\}$?

**2.4.4.** Докажите, что если $\langle A, +, -, \cdot \rangle$ — кольцо, $B$ — непустое подмножество $A$, замкнутое относительно всех главных операций кольца $A$, то алгебра $\langle B, +, -, \cdot \rangle$ является кольцом.

**2.4.5.** Среди колец из задачи 2.4.3 укажите кольца с единицей; коммутативные кольца.

**2.4.6.** Элемент $a$ из кольца $A$ называется левым (правым) делителем нуля, если $a \neq 0$ и существует элемент $b$ из $A$, отличный от 0, такой, что $a \cdot b = 0$ $(b \cdot a = 0)$. Докажите, что в кольце из задачи 2.4.3, а каждая ненулевая матрица является правым делителем нуля; в кольце из задачи 2.4.3, б каждая ненулевая матрица является левым делителем нуля.

**2.4.7.** Можно ли утверждать, что в кольце из задачи 2.4.3, а каждая ненулевая матрица является левым делителем нуля, а в кольце из задачи 2.4.3, б каждая ненулевая матрица является правым делителем нуля?

**2.4.8.** Есть ли делители нуля в кольцах из задач 2.4.3, г и 2.4.3, д?

**2.4.9.** Пусть в кольце $A$ элемент $a$ является левым и правым делителем нуля одновременно и $a \cdot b = 0$, причем $b \neq 0$. Всегда ли при этом выполняется условие $b \cdot a = 0$?

**2.4.10.** Найдите все делители нуля в кольце из задачи 2.4.3 ж.

**2.4.11.** Докажите, что алгебра $\langle P(M), \dot{-}, ', \cap \rangle$, где $M$ — некоторое множество, $'$ — унарная операция, ставящая каждому $X$ из $P(M)$ в соответствие его самого, является кольцом.

**2.4.12.** Докажите, что алгебра $\langle \boldsymbol{Z}_n, +, -, \cdot \rangle$ — кольцо (будем его называть кольцом вычетов по модулю $n$).

**2.4.13.** Составьте таблицы сложения и умножения для колец $\boldsymbol{Z}_3$ и $\boldsymbol{Z}_4$.

**2.4.14.** Докажите, что при любом целом положительном $n$ кольцо $\boldsymbol{Z}_n$ — коммутативное кольцо с единицей.

**2.4.15.** Приведите примеры колец вычетов, содержащих делители нуля и без делителей нуля.

**2.4.16.** Докажите, что кольцо $\boldsymbol{Z}_n$ — область целостности тогда и только тогда, когда $n$ — простое число.

**2.4.17.** Докажите, что $\bar{k}$ является делителем нуля в кольце $\boldsymbol{Z}_n$ тогда и только тогда, когда НОД $(k, n) \neq 1$.

**2.4.18.** В кольце $\boldsymbol{Z}_6$ решите уравнения:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\bar{2} + x = \bar{1}$; | 2) $\bar{4} - x = \bar{5}$; | 3) $\bar{5} + x = \bar{0}$; |
| 4) $\bar{2} \cdot x = \bar{1}$; | 5) $\bar{4} \cdot x = \bar{5}$; | 6) $\bar{5} \cdot x = \bar{0}$; |
| 7) $\bar{3} \cdot x = \bar{3}$; | 8) $\bar{3} \cdot x = \bar{2}$; | 9) $\bar{4} \cdot x = \bar{2}$; |
| 10) $\bar{5} \cdot x = \bar{1}$; | 11) $\bar{4} \cdot x = \bar{3}$; | 12) $\bar{4} \cdot x = \bar{1}$. |

**2.4.19.** Укажите в кольце $\boldsymbol{Z}_6$ все такие классы вычетов $\bar{k}$, что при любом $\bar{m}$ уравнение $\bar{k} \cdot x = \bar{m}$ разрешимо.

**2.4.20.** Докажите:

а) если НОД $(k, n) = 1$, то для любого $\bar{m}$ уравнение $\bar{k} \cdot x = \bar{m}$ разрешимо в $\boldsymbol{Z}_n$;

б) если НОД $(k, n) \neq 1$, НОД $(m, n) = 1$, то уравнение $\bar{k} \cdot x = \bar{m}$ неразрешимо в $\boldsymbol{Z}_n$;

в) уравнение $\bar{k} \cdot x = \bar{m}$ разрешимо в $\boldsymbol{Z}_n$ тогда и только тогда, когда $d/m$, где $d =$ НОД $(k, n)$.

**2.4.21.** а) В кольце $\boldsymbol{Z}_8$ укажите такой элемент $\bar{k}$, что выполняется условие

$$\bar{k} \neq \bar{0} \wedge (\exists s)\, \bar{k}^s = \bar{0}. \qquad (*)$$

б) Есть ли такой элемент в кольце $\mathbf{Z}_6$; $\mathbf{Z}_{30}$; $\mathbf{Z}_{27}$; $\mathbf{Z}_{12}$?

в) Приведите еще примеры колец вычетов, в которых существует элемент $\bar{k}$, удовлетворяющий условию (*), и примеры колец вычетов, в которых таких элементов не существует.

г) Каким условиям должно удовлетворять целое положительное число $n$ для того, чтобы в кольце $\mathbf{Z}_n$ существовал элемент, обладающий свойством (*)?

**2.4.22.** Докажите, что $2^n \equiv 1 \pmod 7$ тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 \pmod 3$.

**2.4.23.** Докажите, что: а) $34^{57}-1$ делится на 11; б) $9518^{42}-4$ делится на 5.

**2.4.24.** Найдите остаток от деления:

а) $437^{25}+214^{29}$ на 4; в) $738^4$ на 11;

б) $57\,383^4$ на 19; г) $1184^4$ на 11.

**2.4.25.** Обозначим через $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$ число $k = a_0 + 10 \cdot a_1 + \dots + 10^n \cdot a_n$, где для любого $i$ выполняется условие $0 \leqslant a_i < 10$, т. е. $a_0, a_1, \dots, a_n$ — цифры десятичной записи натурального числа $k$. Докажите, что число $k$ делится на 11 тогда и только тогда, когда $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n$ делится на 11.

**2.4.26.** Найдите значения $x$, $y$ такие, чтобы число $\overline{3x97y}$ делилось на 99.

**2.4.27.** Найдите значения $x$, $y$ такие, чтобы число $\overline{28x75y}$ делилось на 33.

**2.4.28.** Найдите значения $x$, $y$, $z$ такие, чтобы число $\overline{13xy45z}$ делилось на 792.

**2.4.29.** Найдите остаток от деления $10^n$ на 45. Выведите критерий делимости на 45.

**2.4.30.** Найдите остаток от деления 1000 на 37. Выведите критерий делимости на 37.

**2.4.31.** На множестве $\mathbf{Z}$ определены две бинарные операции:

$$a * b = a + b + 1, \quad a \circ b = ab + a + b.$$

Определите унарную операцию $'$ на $\mathbf{Z}$ так, чтобы алгебра $\langle \mathbf{Z}, *, ', \circ \rangle$ была кольцом. Докажите, что это — коммутативное кольцо с единицей.

**2.4.32.** На множестве $\mathbf{Z}$ определены две бинарные операции:

$$a * b = a + b + 5, \quad a \circ b = ab + 5a + 5b + 20.$$

Определите унарную операцию $'$ на $\mathbf{Z}$ так, чтобы алгебра $\langle \mathbf{Z}, *, ', \circ \rangle$ была кольцом. Докажите, что это — коммутативное кольцо с единицей.

**2.4.33.** Пусть $<A, +, -, \cdot>$ — кольцо, $u$ — фиксированный элемент из $A$. Определим на $A$ две бинарные операции:

$$a * b = a + b + u, \quad a \circ b = ab + au + ub + u^2 - u.$$

Докажите, что можно определить унарную операцию $'$ на $A$ так, чтобы алгебра $\langle A, *, ', \circ \rangle$ была кольцом. Докажите, что если $\langle A, +, -, \cdot \rangle$ — коммутативное кольцо с единицей, то и $\langle A, *, ', \circ \rangle$ — коммутативное кольцо с единицей.

**2.4.34.** Пусть $\langle A, +, -, \circ \rangle$ и $\langle B, +, -, \cdot \rangle$ — кольца. На множестве $A \times B$ определим операции:

$$\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle;$$
$$\langle a, b \rangle \odot \langle c, d \rangle = \langle a \cdot c, b \cdot d \rangle;$$
$$\ominus \langle a, b \rangle = \langle -a, -b \rangle.$$

Докажите, что $\langle A \times B, \oplus, \ominus, \odot \rangle$ — кольцо (кольцо $\langle A \times B, \oplus, \ominus, \odot \rangle$ называется прямым произведением колец $A$ и $B$).

**2.4.35.** Пусть $A$ и $B$ — кольца, $A \times B$ — прямое произведение колец $A$ и $B$. Какие из следующих утверждений истинны:

а) если $A$ и $B$ — коммутативные кольца, то $A \times B$ — коммутативное кольцо;

б) если $A$ и $B$ — кольца с единицей, то $A \times B$ — кольцо с единицей;

в) если $A$ и $B$ — области целостности, то $A \times B$ — область целостности?

**2.4.36.** На множестве $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$; $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$) определены операции:

$$\langle a, b \rangle * \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle;$$
$$\langle a, b \rangle \circ \langle c, d \rangle = \langle ac - bd, ad + bc \rangle;$$
$$\langle a, b \rangle' = \langle -a, -b \rangle.$$

Докажите, что $\langle \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, *, ', \circ \rangle$ ($\langle \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}, *, ', \circ \rangle$, $\langle \mathbf{R} \times \mathbf{R}, *, ', \circ \rangle$) — область целостности.

**2.4.37.** Приведите примеры:

а) бесконечного коммутативного кольца без делителей нуля (числового и нечислового);

б) бесконечного некоммутативного кольца;

в) конечного кольца с делителями нуля;

г) конечного кольца без делителей нуля;

д) бесконечного коммутативного кольца с делителями нуля;

е) коммутативного кольца без единицы;

ж) некоммутативного кольца без единицы;
з) конечного некоммутативного кольца.

**2.4.38.** Для каждого из следующих колец определите, является ли оно коммутативным кольцом; кольцом с единицей; кольцом с делителями нуля; областью целостности:

а) $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$;
б) $\mathbf{Z}\times\mathbf{Q}$ (прямое произведение колец $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}$);
в) $M(2, \mathbf{R})$;
г) $\mathbf{Z}_8$;
д) $\mathbf{Z}_5$;
е) $2\mathbf{Z}$.

**2.4.39.** Какие из следующих подмножеств кольца $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ (прямого произведения колец $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}$) являются подкольцами этого кольца:

а) $\{\langle a, 0\rangle \mid a\in\mathbf{R}\}$;
б) $\{\langle 0, a\rangle \mid a\in\mathbf{R}\}$;
в) $\{\langle a, a\rangle \mid a\in\mathbf{R}\}$;
г) $\{\langle a, 2a\rangle \mid a\in\mathbf{R}\}$;
д) $\{\langle a, b\rangle \mid a\in\mathbf{Q},\ b\in\mathbf{Z}\}$?

**2.4.40.** Приведите примеры подколец в кольце $\mathbf{Z}$; в кольце $\mathbf{Z}_6$; в кольце $\mathbf{Z}_3$.

**2.4.41.** Докажите, что если подкольцо кольца $\mathbf{Z}$ содержит число 2, то оно содержит все четные числа.

**2.4.42.** Найдите наименьшее подкольцо кольца $\mathbf{Z}$, содержащее число 15; произвольное фиксированное целое число $n$.

**2.4.43.** Докажите, что любое подкольцо кольца $\mathbf{Z}$ имеет вид $n\mathbf{Z}$.

**2.4.44.** Докажите, что если $p$ — простое число, то в кольце $\mathbf{Z}_p$ нет собственных подколец.

**2.4.45.** Докажите, что в любом кольце пересечение двух подколец является подкольцом.

**2.4.46.** Пусть $B$ — подкольцо кольца $A$. Какие из следующих утверждений истинны:

а) если $A$ — кольцо с единицей, то $B$ — кольцо с единицей;

б) если $B$ — кольцо с единицей, то $A$ — кольцо с единицей;

в) если $A$, $B$ — кольца с единицей, то единица $A$ совпадает с единицей $B$;

г) если $A$ — кольцо с делителями нуля, то $B$ — кольцо с делителями нуля;

д) если $B$ — кольцо с делителями нуля, то $A$ — кольцо с делителями нуля;

е) если $b\in B$ и является делителем нуля в $B$, то $b$ — делитель нуля в $A$;

ж) если $b\in B$ и является делителем нуля в $A$, то $b$ — делитель нуля в $B$?

**2.4.47.** Докажите, что если $A$ — область целостности, то единица любого ненулевого подкольца $B$ кольца $A$ совпадает с единицей $A$.

**2.4.48.** Докажите, что если $\langle A, +, -, \cdot\rangle$ — кольцо, $a \in A$, то отображение $f\colon A \to A$, заданное правилом $f(x) = x + a$, является биекцией.

**2.4.49.** Докажите, что если в кольце $A$ выполняется условие $(\forall a \in A)\ a^2 = a$, то $A$ — коммутативное кольцо.

**2.4.50.** Докажите, что в любом кольце выполняются тождества $(\forall m, n \in \boldsymbol{Z}^+)\ x^m \cdot x^n = x^{m+n}$; $(x^m)^n = x^{mn}$.
Если $A$ — коммутативное кольцо, то $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$. Покажите, что в произвольном кольце последнее равенство может не выполняться.

**2.4.51.** Докажите, что если $A$ — область целостности, то для любого ненулевого элемента $a$ выполняется условие $(\forall b, c \in A)\ a \cdot b = a \cdot c \to b = c$.

**2.4.52.** Пусть $A$ — кольцо, $a \in A$, $a \neq 0$. Докажите, что отображение $f\colon A \to A$, заданное правилом $f(x) = a \cdot x$, инъективно тогда и только тогда, когда $a$ не является левым делителем нуля.

**2.4.53.** Докажите, что в кольце с единицей любой обратимый элемент не является делителем нуля.

**2.4.54.** Пусть $A$ — кольцо с единицей, $a \in A$. Докажите, что отображение $A$ в $A$, заданное правилом $x \mapsto a \cdot x$, сюръективно тогда и только тогда, когда $a$ — обратим в $A$.

**2.4.55.** Докажите, что в любом коммутативном кольце выполняются тождества:

а) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
б) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
в) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
г) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
д) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$;
е) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

**2.4.56.** Запишите тождества, соответствующие тождествам а) — е), которые выполняются в произвольном кольце.

**2.4.57.** Какие из следующих отображений являются гомоморфизмами указанных колец:

а) $f\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_n$, $f(k) = \bar{k}$;

б) $f\colon M(2, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$;

в) $f\colon \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \boldsymbol{R}\right\} \to \boldsymbol{R}$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a - b$;

г) $f\colon \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \boldsymbol{R}\right\} \to \boldsymbol{R}$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a + b$;

д) $f\colon \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \middle| \ a,\ b \in \boldsymbol{R} \right\} \to \boldsymbol{R},\ f\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = a+b;$

е) $f\colon \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \middle| \ a,\ b \in \boldsymbol{R} \right\} \to \boldsymbol{R},\ f\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = a-b;$

ж) $f\colon \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \ a,\ b \in \boldsymbol{R} \right\} \to \boldsymbol{R},\ f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a;$

з) $f\colon \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \ a,\ b \in \boldsymbol{R} \right\} \to \boldsymbol{R},\ f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = b;$

и) $f\colon \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \ a,\ b \in \boldsymbol{R} \right\} \to \boldsymbol{R},\ f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a+b;$

к) $f\colon \boldsymbol{Q}[\sqrt{2}] \to \boldsymbol{Q},\ f(a+b\sqrt{2}) = a;$

л) $f\colon \boldsymbol{Q}[\sqrt{2}] \to \boldsymbol{Q}[\sqrt{2}],\ f(a+b\sqrt{2}) = b;$

м) $f\colon \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(\langle a,\ b\rangle) = a;$

н) $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R},\ f(a) = \langle 0,\ a\rangle;$

о) $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R},\ f(a) = \langle a,\ a\rangle;$

п) $f\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Q}[\sqrt{2}],\ f(a) = a;$

р) $f\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z},\ f(a) = 0;$

с) $f\colon \boldsymbol{R} \to M(2,\ \boldsymbol{R}),\ f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

т) $f\colon \boldsymbol{Q}[\sqrt{2}] \to \boldsymbol{Q}[\sqrt{2}],\ f(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2};$

у) $f\colon \boldsymbol{R} \to M(2,\ \boldsymbol{R}),\ f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix};$

ф) $f\colon \boldsymbol{Z} \to 2\boldsymbol{Z},\ f(a) = 2a$

(здесь $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ — прямое произведение колец)?

**2.4.58.** Какие из следующих утверждений истинны для любого кольцевого гомоморфизма $f\colon A \to B$:

а) $f(O_A) = O_B;$

б) $(\forall a \in A)\, f(-a) = -f(a);$

в) если $A$ — кольцо с единицей $e$, то $f(e) = e'$, где $e'$ — единица кольца $B$?

**2.4.59.** Пусть $f\colon A \to B$ — гомоморфное отображение колец. Докажите, что $\operatorname{Im} f$ — подкольцо кольца $B$. Обозначим $\operatorname{Ker} f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$. Докажите, что $\operatorname{Ker} f$ — подкольцо кольца $A$. Найдите $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ для гомоморфизмов из задачи 2.4.57.

**2.4.60.** Докажите, что следующие кольца изоморфны:

а) $\boldsymbol{Q}$ и $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \ a \in \boldsymbol{Q} \right\};$

б) прямое произведение колец $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ и $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \ a,\ b \in \boldsymbol{R} \right\};$

в) $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ и $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \boldsymbol{Q}\right\}$;

г) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \boldsymbol{Z}\right\}$ и $\langle \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}, *, ', \circ \rangle$ — кольцо из задачи 2.4.36;

д) $\boldsymbol{R}$ и $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \boldsymbol{R}\right\}$; е) $\boldsymbol{Q}$ и $\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \middle| a \in \boldsymbol{Q}\right\}$.

**2.4.61.** Пусть $\langle \boldsymbol{Z}, *, ', \circ \rangle$ — кольцо из задачи 2.4.32. Докажите, что отображение $f\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$, заданное правилом $f(a) = a + 5$, является изоморфным отображением кольца $\langle \boldsymbol{Z}, *, ', \circ \rangle$ на кольцо $\langle \boldsymbol{Z}, +, -, \cdot \rangle$.

**2.4.62.** Пусть $A_1$ и $A_2$ — изоморфные кольца. Докажите:

а) если $A_1$ — кольцо с единицей, то $A_2$ — кольцо с единицей;

б) если $A_1$ — коммутативное кольцо, то $A_2$ — коммутативное кольцо;

в) если $A_1$ — кольцо без делителей нуля, то $A_2$ — кольцо без делителей нуля.

**2.4.63.** Докажите, что алгебра, изоморфная кольцу, является кольцом.

**2.4.64.** Пусть $f\colon A_1 \to A_2$ — гомоморфное отображение колец. Какие из утверждений а) — в) задачи 2.4.62 истинны?

**2.4.65.** Пусть $f\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ — отображение, заданное правилом $f(x) = x + 3$. Проверьте, что $f$ — биекция. Определите на $\boldsymbol{Z}$ операции $*$, $'$, $\circ$ так, чтобы $f$ было изоморфным отображением алгебры $\langle \boldsymbol{Z}, *, ', \circ \rangle$ на алгебру $\langle \boldsymbol{Z}, +, -, \cdot \rangle$.

**2.4.66.** На множестве $A = \{1, 2, 3\}$ определите операции $*$, $'$, $\circ$ так, чтобы получилась алгебра, изоморфная кольцу $\boldsymbol{Z}_3$.

**2.4.67.** Пусть $\langle A, +, -, \cdot \rangle$ — кольцо и $f\colon A \to B$ — биекция множества $A$ на множество $B$. Докажите, что можно определить на $B$ операции $*$, $'$, $\circ$ так, чтобы алгебра $\langle B, *, ', \circ \rangle$ была кольцом, изоморфным кольцу $\langle A, +, -, \cdot \rangle$.

**2.4.68.** Придумайте такие операции $*$, $'$, $\circ$ на $\boldsymbol{N}$, чтобы алгебра $\langle \boldsymbol{N}, *, ', \circ \rangle$ была кольцом, изоморфным кольцу целых чисел.

**2.4.69.** Докажите, что следующие кольца не изоморфны:

а) $\boldsymbol{Z}$ и $2\boldsymbol{Z}$;

б) $\boldsymbol{R}$ и $M_n(2, \boldsymbol{R})$;

в) $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Q}$;

г) $\boldsymbol{R}$ и прямое произведение колец $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$;

д) $\boldsymbol{Z}$ и кольцо из задачи 2.4.1 (п);

е) $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ и $\boldsymbol{Q}[\sqrt{3}]$;

ж) $2\boldsymbol{Z}$ и $3\boldsymbol{Z}$;

з) $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$.

## § 5. СИСТЕМА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

**2.5.1.** Обозначим $1+1=2$; $(2+1)+1=4$. Докажите, что $2+2=4$; $2\cdot 2=4$.

**2.5.2.** Докажите, что алгебра $\langle \boldsymbol{N}, +, \cdot\rangle$ обладает следующими свойствами:

а) операция сложения коммутативна и ассоциативна;

б) операция умножения коммутативна и ассоциативна;

в) операция умножения дистрибутивна относительно сложения.

**2.5.3.** Определим на $\boldsymbol{N}$ бинарное отношение «$\leqslant$»: $a\leqslant b \Leftrightarrow (\exists c)\, a+c=b$. Докажите, что $\langle \boldsymbol{N}, \leqslant\rangle$ — линейно упорядоченное множество.

**2.5.4.** Положим $a<b \Leftrightarrow a\leqslant b \wedge a\neq b$. Докажите, что для любых $a$, $b$, $c$, $d$ из $\boldsymbol{N}$ выполняются условия:

а) $a<b \rightarrow a+1\leqslant b$;
б) $a\leqslant b \wedge c\leqslant d \rightarrow a+c\leqslant b+d$;
в) $a<b \wedge c\leqslant d \rightarrow a+c<b+d$;
г) $a\leqslant b \wedge c\neq 0 \rightarrow ac\leqslant bc$;
д) $a<b \wedge c\neq 0 \rightarrow ac<bc$;
е) $a<b \wedge c<d \rightarrow ac<bd$;
ж) $0\leqslant a$;
з) $a\leqslant 0 \rightarrow a=0$.

**2.5.5.** Докажите, что для произвольных натуральных чисел выполняются условия: если $a_1\leqslant b_1, \ldots, a_n\leqslant b_n$, то $a_1\cdot\ldots\cdot a_n\leqslant b_1\cdot\ldots\cdot b_n$; если $a_1<b_1, \ldots, a_n<b_n$, то $a_1\cdot\ldots\cdot a_n< <b_1\cdot\ldots\cdot b_n$.

**2.5.6.** Пусть $\varphi$: $\boldsymbol{N}\rightarrow\boldsymbol{N}$ — биекция, причем выполняется условие: $(\forall a, b\in\boldsymbol{N})\ a\leqslant b \leftrightarrow \varphi(a)\leqslant\varphi(b)$.
Докажите, что $\varphi$ — тождественное отображение.

**2.5.7.** Докажите, что композиция любого конечного числа биекций является биекцией.

**2.5.8.** Докажите теоретико-множественные тождества:

а) $A\cap(B_1\cup\ldots\cup B_n)=(A\cap B_1)\cup\ldots\cup(A\cap B_n)$;
б) $\overline{A_1\cup\ldots\cup A_n}=\bar{A}_1\cap\ldots\cap\bar{A}_n$;
в) $A\cup(B_1\cap\ldots\cap B_n)=(A\cup B_1)\cap\ldots\cap(A\cup B_n)$;
г) $\overline{A_1\cap\ldots\cap A_n}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\ldots\cup\bar{A}_n$.

**2.5.9.** Докажите равносильность формул логики высказываний:

а) $p\wedge(q_1\vee\ldots\vee q_n)\equiv(p\wedge q_1)\vee\ldots\vee(p\wedge q_n)$;
б) $\neg(p_1\vee\ldots\vee p_n)\equiv\neg p_1\wedge\ldots\wedge\neg p_n$;

в) $p\vee(q_1\wedge\ldots\wedge q_n)\equiv(p\vee q_1)\wedge\ldots\wedge(p\vee q_n)$;

г) $\neg(p_1\wedge\ldots\wedge p_n)\equiv\neg p_1\vee\ldots\vee\neg p_n$.

**2.5.10.** Докажите, что если $|A|=n$, то $|P(A)|=2^n$.

**2.5.11.** Докажите, что $|S_n|=n!$.

**2.5.12.** Докажите (индукцией по $n$), что если $|A|=m$, $|B|=n$, то $|A\times B|=mn$.

**2.5.13.** Докажите, что если $|A_1|=k_1$, ..., $|A_n|=k_n$, то $|A_1\times\ldots\times A_n|=k_1\cdot\ldots\cdot k_n$.

**2.5.14.** Чему равно число всевозможных бинарных отношений между элементами множеств $A$ и $B$, если $|A|=m$, $|B|=n$?

**2.5.15.** Пусть $|A|=m$, $|B|=n$, $m\leqslant n$. Докажите индукцией по $m$, что:

а) число инъективных отображений множества $A$ в множество $B$ равно $n(n-1)\ldots(n-m+1)$;

б) число всевозможных отображений множества $A$ в $B$ равно $n^m$.

**2.5.16.** Докажите:

а) $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

г) $1+3+5+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$;

д) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

е) $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+(n-1)\cdot n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

ж) $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$;

з) $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$;

и) $1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

**2.5.17.** Пусть $k\leqslant n$. Обозначим через $C_n^k$ число $k$-элементных подмножеств множества, состоящего из $n$ элементов. Докажите:

а) $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$ $(k\geqslant1)$;

б) $C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}$;

в) $1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$.

**2.5.18** (бином Ньютона). Докажите, что для любых $a$, $b \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{Z}^+$:

а) $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$;

б) $(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + (-1)^n b^n$.

**2.5.19.** Докажите, что для любого натурального $n$:

а) $n^3 - n$ делится на 3; в) $n^7 - n$ делится на 7.
б) $n^5 - n$ делится на 5;

Верно ли, что для любого натурального $n$ разность $n^9 - n$ делится на 9?

**2.5.20.** Докажите неравенства:

а) $n^2 < 2^n$ для любого натурального $n > 4$;
б) $2^n < n!$ для любого натурального $n \geqslant 4$;
в) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ для любого натурального $n > 1$.

**2.5.21.** Докажите индукцией по $n$ неравенство Бернулли $(1+a)^n \geqslant 1 + na$, где $a$ — любое действительное число, большее $(-1)$.

**2.5.22.** Докажите, что для любых натуральных чисел $a$, $b$, $c$ выполняется неравенство $ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

**2.5.23.** Докажите, что для любых натуральных $a$, $b$ выполняется неравенство:

а) $a^n b + ab^n \leqslant a^{n+1} + b^{n+1}$ для любого натурального $n$;
б) $(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n + b^n)$ для любого натурального $n > 1$.

**2.5.24.** Докажите, что $2^{2n+1} \cdot 3^{n+3} + 1$ делится на 11 при любом натуральном $n$.

**2.5.25.** Докажите, что $3^{2n} + 2^{6n-5}$ делится на 11 при любом целом положительном $n$.

**2.5.26.** Докажите, что $3^{2n} \equiv 2^n \pmod 7$ при любом натуральном $n$.

**2.5.27.** Докажите, что $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ делится на 7.

# ГЛАВА 3. ПОЛЯ. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

## § 1. ПОЛЯ. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПОЛЕЙ. ПОДПОЛЕ ПОЛЯ

**3.1.1.** Какие из следующих колец являются полями: $\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$; $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]$; $M(2,\ \boldsymbol{R})$; $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle|\ a,\ b\in\boldsymbol{R}\right\}$; $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle|\ a\in\boldsymbol{R}\right\}$; $\left\{a\in\boldsymbol{Q} \mid (\exists k\in\boldsymbol{Z})(\exists n\in\boldsymbol{N})\ a=\frac{k}{2^n}\right\}$?

**3.1.2.** Докажите, что кольцо всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, $a$, $b\in\boldsymbol{Q}$, является полем.

**3.1.3.** Докажите, что кольцо всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a$, $b\in\boldsymbol{Q}$, является полем. Покажите, что это поле содержит такой элемент $x$, что $x^2=-E$, где $E$ — единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**3.1.4.** Докажите, что кольцо всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $a\in\boldsymbol{R}$, является полем. Докажите, что это поле изоморфно полю действительных чисел.

**3.1.5.** На множестве $\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}$ определены операции:

$$\langle a,\ b\rangle+\langle c,\ d\rangle=\langle a+c,\ b+d\rangle;$$
$$\langle a,\ b\rangle\cdot\langle c,\ d\rangle=\langle ac-bd,\ ad+bc\rangle;$$
$$-\langle a,\ b\rangle=\langle -a,\ -b\rangle.$$

Докажите, что $\langle \boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q},\ +,\ -,\ \cdot\rangle$ — поле, изоморфное полю из задачи 3.1.3.

**3.1.6.** На множестве $\boldsymbol{Q}$ рассмотрим операции «$+$», «$-$», «$*$», где $a*b=2ab$. Докажите, что алгебра $\langle\boldsymbol{Q},\ +,\ -,\ *\rangle$ — поле, изоморфное полю $\langle\boldsymbol{Q},\ +,\ -,\ \cdot\rangle$.

**3.1.7.** Какие из колец $\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_3$, $\boldsymbol{Z}_4$, $\boldsymbol{Z}_5$, $\boldsymbol{Z}_6$ являются полями?

**3.1.8.** Пусть $\bar{k} \in \boldsymbol{Z}_n$, рассмотрим отображение $f\colon \boldsymbol{Z}_n \to \boldsymbol{Z}_n$, определенное правилом $f(\bar{m}) = \bar{k} \cdot \bar{m}$. Докажите, что $f$ — биекция тогда и только тогда, когда НОД $(k, n) = 1$.

**3.1.9.** Докажите, что $\bar{k}$ обратим в кольце $\boldsymbol{Z}_n$ тогда и только тогда, когда НОД $(k, n) = 1$.

**3.1.10.** Докажите, что кольцо $\boldsymbol{Z}_n$ является полем тогда и только тогда, когда $n$ — простое число.

**3.1.11.** Докажите, что если $\langle A, +, -, \cdot \rangle$ — ненулевое конечное кольцо и $a \in A$, то отображение $f\colon A \to A$, заданное правилом $f(x) = a \cdot x$, является биекцией тогда и только тогда, когда $a \neq 0$ и $a$ не является левым делителем нуля. Верно ли аналогичное утверждение для бесконечного кольца?

**3.1.12.** Докажите, что в конечном кольце с единицей ненулевой элемент $a$ обратим тогда и только тогда, когда $a$ не является делителем нуля.

**3.1.13.** Докажите, что конечная область целостности является полем.

**3.1.14.** Пусть $a$, $b$, $c$ — элементы поля $F$. Докажите, что из равенства $ab = ac$ следует равенство $b = c$ тогда и только тогда, когда $a \neq 0$.

**3.1.15.** Пусть $a$ — ненулевой элемент поля. Докажите, что для любых целых чисел $m$, $n$ выполняются равенства $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

**3.1.16.** Докажите, что любое подполе поля $\boldsymbol{Q}$ совпадает с $\boldsymbol{Q}$.

**3.1.17.** Докажите, что $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ — наименьшее подполе поля $\boldsymbol{R}$, содержащее $\sqrt{2}$.

**3.1.18.** Докажите, что любое подполе поля $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ есть либо $\boldsymbol{Q}$, либо $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$.

**3.1.19.** Докажите, что пересечение любой совокупности подполей поля $F$ есть подполе поля $F$.

**3.1.20.** Докажите, что единица любого ненулевого подкольца поля $F$ совпадает с единицей поля $F$.

**3.1.21.** Докажите, что кольцо, изоморфное полю, является полем.

**3.1.22.** Пусть $f\colon F \to A$ — кольцевой гомоморфизм, причем $F$ — поле. Докажите, что $f$ либо инъективное отображение, либо нулевой гомоморфизм, т. е. $(\forall x \in F)\, f(x) = 0$.

**3.1.23.** Пусть $f\colon F \to A$ — ненулевой кольцевой гомоморфизм, причем $F$ — поле. Докажите, что подкольцо $\operatorname{Im} f$ кольца $A$ является полем.

**3.1.24.** Докажите, что тождественное отображение является единственным ненулевым гомоморфным отображением поля $\boldsymbol{Q}$ в себя.

**3.1.25.** Докажите, что любое поле, состоящее из двух (трех) элементов, изоморфно полю $Z_2 (Z_3)$.

## § 2. УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПОЛЯ

**3.2.1.** Докажите, что в любом упорядоченном поле выполняются следующие условия:

а) $a \leqslant b \Leftrightarrow a - b \leqslant 0$, $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$;
б) $a \leqslant b \Leftrightarrow -a \geqslant -b$, $a < b \Leftrightarrow -a > -b$;
в) $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b > 0$;
г) $a + c < b + c \Rightarrow a < b$;
д) $a - b < a - c \Rightarrow b > c$;
е) $a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0 \Rightarrow a \cdot b \geqslant 0$, $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$;
ж) $(\forall a)\, a \neq 0 \rightarrow a^2 > 0$;
з) пусть 1 — единица поля, тогда $1 > 0$;
и) $(\forall a)\, a + 1 > a$;
к) $(\forall n \in Z^+)\, n1 > 0$;
л) $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$, $a < 0 \Leftrightarrow a^{-1} < 0$;
м) $a > b > 0 \Rightarrow a^{-1} < b^{-1}$, $a < b < 0 \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$;
н) $a \neq 0 \vee b \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 0$;
о) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$;
п) $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$, $a < b < 0 \Rightarrow a^2 > b^2$;
р) $c > 0 \wedge ac < bc \Rightarrow a < b$;
с) $a > b > 0 \Rightarrow (\forall c > 0)\, a^{-1}c < b^{-1}c$;
т) $(\forall n \in Z^+)(a^n = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1)$;
у) $a < b \Rightarrow (\exists c)\, a < c < b$;
ф) $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$;
х) если хотя бы один из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отличен от нуля, то $a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0$.

**3.2.2.** Пусть $\langle F, +, -, \cdot, < \rangle$ — упорядоченное поле, $a \in F$. Определим $|a| = a$, если $a \geqslant 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Докажите:

а) $(\forall a \in F)\, |a| \geqslant 0$;
б) пусть $a \geqslant 0$, тогда $|x| \leqslant a \Leftrightarrow x \leqslant a \wedge x \geqslant -a$;
в) $(\forall x, y) |x + y| \leqslant |x| + |y|$;
г) $(\forall x, y) |x - y| \geqslant |x| - |y|$.

**3.2.3.** Докажите, что в любом упорядоченном поле уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений (1 — единица поля).

**3.2.4.** Пусть $\langle F, +, -, \cdot, < \rangle$ — упорядоченное поле, $F^+ = \{a \in F \mid a > 0\}$. Докажите, что алгебра $\langle F^+, \cdot, ^{-1} \rangle$ является группой.

**3.2.5.** Докажите, что не существует такого бинарного отношения $\rho$ на множестве $Z_p$, где $p$ — простое число, чтобы алгебраическая система $\langle \boldsymbol{Z}_p, +, -, \cdot, \rho \rangle$ была упорядоченным полем.

**3.2.6.** Докажите, что подполе упорядоченного поля является упорядоченным полем.

**3.2.7.** Пусть $\langle F, +, -, \cdot, < \rangle$ — упорядоченное поле и поле $\langle K, +, -, \cdot \rangle$ изоморфно полю $\langle F, +, -, \cdot \rangle$. Докажите, что поле $K$ можно упорядочить, т. е. на $K$ можно определить бинарное отношение «$<$» так, чтобы алгебраическая система $\langle K, +, -, \cdot, < \rangle$ была упорядоченным полем.

**3.2.8.** Пусть $\langle F, +, -, \cdot, < \rangle$ — упорядоченное поле, 1 — единица поля $F$, $A = \{n1 \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$. Докажите, что $A$ замкнуто относительно всех главных операций в $F$ и $\langle A, +, -, \cdot \rangle$ — кольцо, изоморфное кольцу целых чисел.

**3.2.9.** Пусть $\langle F, +, -, \cdot, < \rangle$ — упорядоченное поле, $K = \{(n1)(m1)^{-1} \mid n, m \in \boldsymbol{Z}, m \neq 0\}$. Докажите, что $K$ — подполе поля $F$, изоморфное полю рациональных чисел. Докажите, что $(n1)(m1)^{-1} > 0$ в $F$ тогда и только тогда, когда $\frac{n}{m} > 0$ в $\boldsymbol{Q}$.

**3.2.10.** Докажите, что поле рациональных чисел можно упорядочить только одним способом, т. е. если $\rho$ — отношение на $\boldsymbol{Q}$, такое, что алгебраическая система $\langle \boldsymbol{Q}, +, -, \cdot, \rho \rangle$ является упорядоченным полем, то для любых $a, b \in \boldsymbol{Q}$ выполняется условие $a \rho b \Leftrightarrow a < b$.

**3.2.11.** Докажите, что поле $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ можно упорядочить двумя и только двумя способами.

**3.2.12.** Докажите, что поле действительных чисел можно упорядочить только одним способом.

**3.2.13.** Докажите, что тождественное отображение является единственным изоморфным отображением поля действительных чисел на себя.

## § 3. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Пусть $F$ — поле, 1 — единица поля $F$, пусть квадрат каждого элемента из $F$ отличен от $-1$. Поле $K$ называется комплексным расширением поля $F$, если выполняются следующие условия:

а) $F$ — подполе поля $K$;

б) в $K$ существует такой элемент $u$, что $u^2 = -1$;

в) каждый элемент $z$ из $K$ можно представить в виде $z = a + bu$, где $a, b \in F$.

**3.3.1.** Докажите, что если $K$ — комплексное расширение поля $F$, то $K$ — минимальное поле, содержащее $F$ и элемент $u$, т. е. любое подполе поля $K$, содержащее $F$ и элемент $u$, совпадает с $K$.

**3.3.2.** Докажите, что в комплексном расширении $K$ поля $F$ любой элемент однозначно представим в виде $a+bu$, где $a, b \in F$.

**3.3.3.** Предположим, что $K$ — поле, содержащее поле действительных чисел $\mathbf{R}$ в качестве подполя, и $K$ содержит элемент $u$, такой, что $u^2=-1$. Докажите, что для любых $a, a_1, b, b_1 \in \mathbf{R}$ выполняются условия:

а) $a+bu=a_1+b_1u$ тогда и только тогда, когда $a=a_1$ и $b=b_1$;

б) $(a+bu)+(a_1+b_1u)=(a+a_1)+(b+b_1)u$;

в) $-(a+bu)=(-a)+(-b)u$;

г) $(a+bu)\cdot(a_1+b_1u)=(aa_1-bb_1)+(ab_1+a_1b)u$;

д) $(a+bu)\cdot(a-bu)=a^2+b^2$;

е) если $a+bu\neq 0$, то $a^2+b^2>0$ и $\frac{1}{a+bu}=\frac{a}{a^2+b^2}+\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)u$;

ж) множество $D$ всех элементов $a+bu$ в $K$, где $a, b\in\mathbf{R}$, образует подполе поля $K$.

**3.3.4.** Пусть $F$ — поле, в котором квадрат каждого элемента отличен от $-1$, пусть $F$ — подполе поля $K$, причем в $K$ существует элемент $u$, такой, что $u^2=-1$. Докажите, что множество $\{a+bu \mid a, b\in F\}$ образует подполе поля $K$, являющееся комплексным расширением поля $F$.

**3.3.5.** Рассмотрим множество всех выражений вида $\bar{a}+\bar{b}j$, где $\bar{a}, \bar{b}\in \mathbf{Z}_3$. Будем считать, что $\bar{0}+\bar{b}j=\bar{b}j$, $\bar{a}+\bar{0}j=\bar{a}$; если все элементы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ из $\mathbf{Z}_3$ отличны от $\bar{0}$, то считаем, что $\bar{a}+\bar{b}j=\bar{c}+\bar{d}j$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}=\bar{c}$ и $\bar{b}=\bar{d}$. Определим на множестве $\mathbf{Z}_3[j]=\{\bar{a}+\bar{b}j \mid \bar{a}, \bar{b}\in\mathbf{Z}_3\}$ операции:

$$(\bar{a}+\bar{b}j)+(\bar{c}+\bar{d}j)=(\bar{a}+\bar{c})+(\bar{b}+\bar{d})j;$$
$$-(\bar{a}+\bar{b}j)=(-\bar{a})+(-\bar{b})j;$$
$$(\bar{a}+\bar{b}j)\cdot(\bar{c}+\bar{d}j)=(\bar{a}\bar{c}-\bar{b}\bar{d})+(\bar{a}\bar{d}+\bar{b}\bar{c})j.$$

Составьте таблицы сложения и умножения для $\mathbf{Z}_3[j]$. Проверьте, что в $\mathbf{Z}_3$ квадрат каждого элемента отличен от $-1$ и что $\langle \mathbf{Z}_3[j], +, -, \cdot\rangle$ — поле, являющееся комплексным расширением поля $\mathbf{Z}_3$.

**3.3.6.** Проверьте, что в поле $\mathbf{Z}_7$ квадрат каждого элемента отличен от $-\bar{1}$. По аналогии с предыдущей задачей постройте комплексное расширение поля $Z_7$. Сколько элементов содержит такое расширение?

**3.3.7.** Пусть $K_1$, $K_2$ — комплексные расширения поля $F$; $u_1$, $u_2$ — элементы из $K_1$, $K_2$ соответственно, такие, что $u_1^2=u_2^2=-1$. Докажите, что отображения $f_1$ и $f_2$ из $K_1$ в $K_2$, заданные правилами $f_1(a+bu_1)=a+bu_2$, $f_2(a+bu_1)=$ $=a-bu_2$, являются изоморфными отображениями полей.

**3.3.8.** Пусть $F_1$ и $F_2$ — изоморфные поля, $K_1$ и $K_2$ — их комплексные расширения. Докажите, что $K_1$ и $K_2$ — изоморфные поля.

**3.3.9.** Докажите, что поле $K$ матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b\in \boldsymbol{R}$, является комплексным расширением поля $F$ матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a\in \boldsymbol{R}$. Укажите изоморфное отображение поля $K$ на поле комплексных чисел.

**3.3.10.** Пусть $k$ — отрицательное действительное число, докажите, что множество $L$ всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}$ с действительными $a$, $b$ образует поле, которое является комплексным расширением поля матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a\in \boldsymbol{R}$. Укажите изоморфное отображение поля $L$ на поле $K$ из предыдущей задачи; укажите изоморфное отображение поля $L$ на поле комплексных чисел.

**3.3.11.** Докажите, что $\boldsymbol{Z}[i]=\{a+bi \mid a, b\in \boldsymbol{Z}\}$ — наименьшее подкольцо поля комплексных чисел, содержащее все целые числа и число $i$ (кольцо $\boldsymbol{Z}[i]$ называется кольцом целых гауссовых чисел). Укажите кольцо матриц, изоморфное кольцу $\boldsymbol{Z}[i]$.

**3.3.12.** Докажите, что $Q[i]=\{a+bi \mid a, b\in \boldsymbol{Q}\}$ — комплексное расширение поля рациональных чисел. Докажите, что в $\boldsymbol{Q}[i]$ нет подполей, кроме $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q}[i]$.

**3.3.13.** Любое подполе поля комплексных чисел называется числовым полем. Докажите, что любое числовое поле содержит все рациональные числа.

**3.3.14.** Любое подкольцо поля комплексных чисел называется числовым кольцом. Докажите, что любое числовое кольцо с единицей содержит все целые числа.

**3.3.15.** Пусть $f$ — изоморфное отображение поля комплексных чисел на себя. Докажите, что $f(i)=i$ или $f(i)=-i$.

**3.3.16.** Докажите, что существуют ровно два изоморфных отображения кольца $\boldsymbol{Z}[i]$ (поля $\boldsymbol{Q}[i]$) на себя:

а) $a+bi\mapsto a+bi$; б) $a+bi\mapsto a-bi$.

**3.3.17.** Вычислите:

а) $(7-3i)^3$; в) $\dfrac{(1+2i)^3-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

б) $\dfrac{2-5i}{1-\sqrt{3}i}$; г) $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$.

**3.3.18.** Вычислите для любого целого положительного $n$:

а) $i^n$; б) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^n}$; в) $\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$.

**3.3.19.** Обозначим через $\bar{z}=a-bi$ число, сопряженное числу $z=a+bi$. Найдите:

а) $\dfrac{z+\bar{z}}{2}$; б) $\dfrac{z-\bar{z}}{2}$; в) $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}\,(z\neq 0)$.

**3.3.20.** Решите уравнения:

а) $(1-i)\,\bar{z}-3iz=2-i$; г) $z\cdot\bar{z}+3\,(z+\bar{z})=7$;

б) $z\cdot\bar{z}+2\bar{z}=3+2i$; д) $z\cdot\bar{z}+3\,(z+\bar{z})=3i$.

в) $z\cdot\bar{z}+3\,(z-\bar{z})=4+3i$;

**3.3.21.** Решите систему уравнений:

а) $ix+(1+i)y=3-i,$
$(1-i)x-(6-i)y=4;$

б) $(2+i)x-(3+i)y=i,$
$(3-i)\bar{x}+(2+i)\bar{y}=-i.$

**3.3.22.** Докажите:

а) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$; в) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$;

б) $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$; г) $\bar{\bar{z}}=z$.

**3.3.23.** Докажите, что отображение, заданное правилом $z\mapsto z$, является изоморфным отображением поля комплексных чисел на себя.

**3.3.24.** Докажите, что если $z_1$ и $z_2$ — мнимые числа (число $z=a+bi$ называется мнимым, если $b\neq 0$), то они сопряжены тогда и только тогда, когда их произведение и их сумма — действительные числа.

**3.3.25.** Выведите формулу для решения квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ для случая, когда:

а) $a$, $b$, $c$ — комплексные числа;

б) $a$, $b$, $c$ принадлежат произвольному полю $F$, в котором выполняется условие $1+1\neq 0$.

**3.3.26.** Решите уравнения (в поле комплексных чисел):

а) $x^2+3+4i=0$; в) $x^2+2x+3=0$;

б) $x^2-5+12i=0$; г) $x^2-(3+2i)x+5+i=0$;

д) $x^4-6x^2+25=0$;
е) $x^4+34x^2+289=0$;
ж) $x^2-(4+3i)x+1+5i=0$;
з) $x^2+5x+9=0$;
и) $x^2+x+1+i=0$;
к) $x^3+1=0$;
л) $x^4+1=0$.

**3.3.27.** Докажите:

а) $|z|=|\bar{z}|$;
б) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$;
в) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$;
г) $|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$.

Каков геометрический смысл неравенств в), г)? Для каких комплексных чисел $z_1$, $z_2$ имеет место равенство в); г)?

**3.3.28.** Докажите, что для любых целых чисел $a$, $b$, $c$, $d$ произведение сумм квадратов $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ можно представить как сумму квадратов $k^2+l^2$ целых чисел $k$, $l$.

**3.3.29.** На комплексной плоскости найдите все точки, изображающие комплексные числа $z$, удовлетворяющие следующим условиям:

а) $|z|<1$;
б) $|z|\geqslant 1$;
в) $|z+i|=3$;
г) $|i-z|<1$;
д) $|z|<\left|\frac{z}{2}\right|+1$;
е) $|z|=\left|z+\frac{1}{3i}\right|$;
ж) $|z-i|<|z+2-3i|$;
з) $|z-1|^2+|z+1|^2=4$;
и) $\arg z=\frac{\pi}{4}$;
к) $\arg z=\pi$;
л) $\arg(z-i)=\frac{\pi}{3}$;
м) $\begin{cases}|z-i|=1,\\ \arg z=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

**3.3.30.** Пусть $a$ и $b$ — фиксированные комплексные числа, причем $a\neq b$. На комплексной плоскости найдите все точки, изображающие комплексные числа $z$, для которых $\frac{z-a}{z-b}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, где $\varphi$ принимает произвольные действительные значения.

**3.3.31.** Пусть $z_0$, $z_1$, $z_2\in\boldsymbol{C}$. Покажите, что равенство $|z_2-z_1|^2=|z_1-z_0|^2+|z_2-z_0|^2$ имеет место тогда и только тогда, когда $z_2-z_0=\lambda i(z_1-z_0)$, где $\lambda$ — некоторое действительное число. Дайте геометрическое истолкование исследуемому равенству.

**3.3.32.** Покажите, что для любых комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ выполняется равенство $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$. Выясните геометрический смысл этого равенства.

**3.3.33.** Используя геометрическое истолкование действий над комплексными числами, найдите длины сторон и внутренние углы треугольника, вершинами которого являются точки $z_1=3+i$; $z_2=5+3i$; $z_3=(7-2\sqrt{3})+3i$.

**3.3.34.** Вершинами треугольника являются точки, изображающие комплексные числа $z_1$, $z_2$, $z_3$. Найдите все комплексные числа, соответствующие точкам, дополняющим данный треугольник до параллелограмма.

**3.3.35.** Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z-25i|\leqslant 15$, найдите число, имеющее наименьший положительный аргумент.

**3.3.36.** Дайте геометрическую интерпретацию для следующих отображений:

а) $z\mapsto \bar{z}$; в) $z\mapsto i\bar{z}$;

б) $z\mapsto iz$; г) $z\mapsto rz$, $r>0$;

д) $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\mapsto \cos\varphi+i\sin\varphi$;

е) $z\mapsto -\bar{z}$; ж) $z\mapsto \frac{1}{\bar{z}}(z\neq 0)$.

**3.3.37.** Докажите, что бинарное отношение $\rho$ на множестве всех комплексных чисел, заданное следующим образом: $z_1\rho z_2 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$, является отношением эквивалентности. Изобразите классы эквивалентности на плоскости.

**3.3.38.** Докажите, что отношение $\rho$, определенное на множестве всех комплексных чисел, отличных от нуля, следующим образом: $z_1\rho z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}\in \boldsymbol{R}$ $(\boldsymbol{R}^+)$, является отношением эквивалентности. Изобразите классы эквивалентности на плоскости.

**3.3.39.** Представьте в тригонометрической форме следующие числа: $1$; $-1$; $i$; $-i$; $1+i$; $1-i$; $1+\sqrt{3}i$; $\sqrt{3}-i$; $2+7i$; $-\cos\alpha+i\sin\alpha$; $\sin\alpha-i\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha-i$; $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

**3.3.40.** Пусть $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ — тригонометрическая форма комплексного числа $z\neq 0$. Представьте в тригонометрической форме число $z^{-1}$. Докажите формулу Муавра: для любого целого $n$ выполняется равенство

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

**3.3.41.** Найдите расстояние между точками, изображающими на комплексной плоскости числа:

а) $0$ и $5+i$; б) $1$ и $i$; в) $3+2i$ и $\frac{1}{2}-2i$.

**3.3.42.** Выразите в виде многочлена от $\sin x$ и $\cos x$:

а) $\sin 7x$; б) $\cos 6x$; в) $\sin 5x+\cos 3x$

**3.3.43.** Докажите, что множество всех корней $n$-й степени из единицы образует подгруппу в мультипликативной группе всех комплексных чисел, отличных от нуля. Составьте таблицы умножения для группы корней $n$-й степени из единицы для $n=3;\ 4;\ 6$.

**3.3.44.** Докажите, что группа корней 4-й степени из единицы изоморфна аддитивной группе вычетов по модулю 4.

**3.3.45.** Составьте таблицу умножения для корней 5-й степени из единицы. Докажите, что группа корней 5-й степени из единицы изоморфна группе $\langle \mathbf{Z}_5,\ +,\ -\rangle$.

**3.3.46.** Докажите, что для любого $n$ группа корней $n$-й степени из единицы изоморфна аддитивной группе вычетов по модулю $n$.

**3.3.47.** Докажите, что множество всех корней всех целых положительных степеней из единицы образует подгруппу в мультипликативной группе всех комплексных чисел, отличных от нуля.

**3.3.48.** Докажите, что $\frac{i-1}{\sqrt{2}}$ — первообразный корень 8-й степени из единицы.

**3.3.49.** Сколько первообразных корней 5-й степени из единицы среди всех корней 10-й степени из единицы?

**3.3.50.** Докажите, что комплексное число $\omega$ является первообразным корнем $n$-й степени из единицы тогда и только тогда, когда $n$ — наименьшее целое положительное число, удовлетворяющее условию $\omega^n=1$.

**3.3.51.** Пусть $\omega$ — первообразный корень 20-й степени из единицы. Первообразным корнем какой степени из единицы является $\omega^6$?

**3.3.52.** Для каждого из следующих чисел $z$ укажите, первообразным корнем какой степени из единицы оно является:

а) $z=\cos\frac{54\pi}{180}+i\sin\frac{54\pi}{180}$; в) $z=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}$;

б) $z=\cos\frac{99\pi}{90}+i\sin\frac{99\pi}{90}$; г) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

**3.3.53.** Найдите сумму и произведение всех корней $n$-й степени из единицы ($n>1$).

**3.3.54.** Пусть $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, где $n$ — целое положительное число. Покажите, что комплексное число $z$ является первообразным корнем $n$-й степени из единицы тогда и только тогда, когда $z=\omega^m$ для некоторого натурального числа $m$, взаимно простого с $n$.

**3.3.55.** Найдите все первообразные корни $n$-й степени из единицы:

а) $n=2$; б) $n=3$; в) $n=4$; г) $n=5$; д) $n=6$; е) $n=8$; ж) $n=12$; з) $n=20$.

**3.3.56.** Докажите, что корень $n$-й степени из единицы

$$\omega_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

является первообразным корнем степени $\frac{n}{d}$ из единицы, где $d=\text{НОД}(n, k)$.

**3.3.57.** Докажите, что если $m$ и $n$ взаимно просты, то многочлены $x^m-1$ и $x^n-1$ имеют единственный общий корень.

**3.3.58.** Докажите, что если $m$ и $n$ взаимно просты, то все корни степени $mn$ из единицы получаются умножением корней $n$-й степени из единицы на корни $m$-й степени из единицы.

**3.3.59.** Докажите, что если $m$ и $n$ взаимно просты, то произведение первообразного корня $m$-й степени из единицы на первообразный корень $n$-й степени из единицы является первообразным корнем $mn$-й степени из единицы.

**3.3.60.** Докажите, что если произведение первообразного корня $m$-й степени из единицы на первообразный корень $n$-й степени из единицы является первообразным корнем $mn$-й степени из единицы, то $m$ и $n$ взаимно просты.

**3.3.61.** Пусть $z$ — корень $n$-й степени из комплексного числа $a$, $\omega$ — первообразный корень $n$-й степени из единицы. Докажите, что числа $z\cdot\omega^k$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, — это в точности все попарно различные корни $n$-й степени из $a$.

**3.3.62.** Решите уравнения:

а) $x^5-2=0$; д) $x^4+1+i\sqrt{3}=0$;
б) $x^8-5x^4-6=0$; е) $x^6+i=0$;
в) $x^3+i=0$; ж) $x^5-1=0$.
г) $x^3+2+2i=0$;

**3.3.63.** Представьте в алгебраической форме числа $z$, такие, что:

а) $z^3=-i$; в) $z^3=-2-2i$;
б) $z^6=-i$; г) $z^4=-1-i\sqrt{3}$.

# ГЛАВА 4. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

## § 1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

**4.1.1.** Вычислите линейные комбинации векторов $a_1=(-1, 0, 1, 0)$, $a_2=(-3, 2, 0, 1)$, $a_3=(2, -2, 1, -1)$, $a_4=(0, 2, -3, 1)$ в $\boldsymbol{R}^4$:

а) $a_1+a_2+a_3+a_4$;
б) $a_1+a_2+2a_3+a_4$;
в) $3a_1+a_2+3a_3+2a_4$;
г) $a_1-a_2-a_3+a_4$;
д) $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3+\lambda_4 a_4$, где $\lambda_i \in \boldsymbol{R}$.

**4.1.2.** Выразите вектор в виде линейной комбинации других векторов (векторы $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ из упражнения 4.1.1):

а) $a_4$ через $a_1, a_2, a_3$; в) $a_4$ через $a_1$, $a_2$;
б) $a_3$ через $a_1, a_2, a_4$; г) $a_3$ через $a_1$, $a_2$.

**4.1.3.** Найдите вектор $x$ из уравнения $a_1+2a_2+3a_3+$ $+4a_4+x=0$ (векторы $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ из упражнения 4.1.1).

**4.1.4.** Укажите два различных набора чисел $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$, таких, что $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3+\lambda_4 a_4=0$ для векторов $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ из 4.1.1. Укажите три различных таких набора; четыре.

**4.1.5.** Для векторов $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ из упражнения 4.1.1 запишите следующие условия в виде системы линейных уравнений относительно переменных $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$:

а) $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3+\lambda_4 a_4=0$;
б) $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3=0$;
в) $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2=(-15, 8, 3, 4)$;
г) $\lambda_3 a_3+\lambda_4 a_4=a_1$.

**4.1.6.** Системы линейных уравнений можно записывать в векторной форме. Например, система уравнений $x_1+x_2+$ $+x_3=1$, $2x_1-x_2+x_3=2$ равносильна условию $x_1(1,2)+$ $+x_2(1, -1)+x_3(1, 1)=(1, 2)$. Запишите в векторной форме системы линейных уравнений из упражнения 5.5.2.

**4.1.7.** Установите, линейно зависимы или нет следующие системы векторов в соответствующих арифметических векторных пространствах над полем рациональных чисел:

а) $(1, 1)$, $(2, 2)$;

б) $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 2)$;

в) $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$;

г) $(0, 0, 0)$;

д) $(1, 1, 1)$;

е) $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 3)$;

ж) $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 2)$, $(0, 0, 1)$;

з) $(1, 2, 3, 4)$, $(-1, -2, -3, -4)$.

и) $(1, 0, 1, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1, 1)$;

к) $(1988, 1989)$, $(8891, 9891)$, $(11, 111)$;

л) $(2, -4, 6)$, $(3, -6, 9)$;

м) $(1, 4, 2)$, $(2, 5, 8)$, $(3, 6, 6)$;

н) $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$;

о) $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(2, 8, 6)$;

п) $(-1, 2, -2, 1)$, $(2, -1, 3, 0)$, $(4, 1, 5, 2)$;

р) $(1, 0, 2)$, $(-1, 1, -1)$, $(1, 1, 3)$;

с) $(1, 0, 2)$, $(-1, 1, -1)$, $(1, 1, 3+\varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0$.

**4.1.8.** Докажите, что в $n$-мерном арифметическом векторном пространстве над полем $F$ линейно независимы следующие системы векторов:

а) $e_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $e_2=(0, 1, \ldots, 0)$, . . . . . . , $e_n=(0, 0, \ldots, 1)$;

б) $f_1=(1, 1, \ldots, 1)$, $f_2=(0, 1, \ldots, 1)$, . . . . . . . , $f_n=(0, 0, \ldots, 1)$.

**4.1.9.** Докажите, что система векторов $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависима, если:

а) она содержит нулевой вектор;

б) она содержит два одинаковых вектора;

в) она содержит два вектора, которые различаются скалярным множителем;

г) один из векторов линейно выражается через предыдущие (последующие);

д) какая-то ее подсистема линейно зависима.

**4.1.10.** Покажите, что система из одного вектора линейно независима тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой.

**4.1.11.** Покажите, что система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов равен другому, умноженному на скаляр.

**4.1.12.** Покажите, что векторы $(\alpha, \beta)$ и $(\gamma, \delta)$ двумерного арифметического векторного пространства над некоторым полем образуют линейно зависимую систему тогда и только тогда, когда $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$.

**4.1.13.** Каким условиям должны удовлетворять скаляры $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, чтобы система векторов $(1, \alpha, \alpha^2)$, $(1, \beta, \beta^2)$, $(1, \gamma, \gamma^2)$ трехмерного арифметического векторного пространства была линейно независимой?

**4.1.14.** Пусть $V$ — векторное пространство над числовым полем. Покажите, что если система векторов $a$, $b$, $c$ пространства $V$ линейно независима, то система векторов $a+b$, $a+c$, $b+c$ также линейно независима.

**4.1.15.** Верно ли предыдущее утверждение, если поле скаляров является полем вычетов по модулю два?

**4.1.16.** В двумерном арифметическом векторном пространстве над полем вычетов по модулю три найдите все линейно независимые системы из двух векторов, содержащие вектор $(1, 1)$.

**4.1.17.** В трехмерном арифметическом векторном пространстве над полем вычетов по модулю два найдите все линейно независимые системы из двух векторов, содержащие вектор $(1, 1, 1)$. Укажите несколько таких систем из трех векторов.

**4.1.18.** Покажите, что система ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_m$ векторного пространства $V$ линейно независима тогда и только тогда, когда $a_k \notin L(a_1, \ldots, a_{k-1})$ для всех $k=2, \ldots, m$.

**4.1.19.** Пусть $F_q$ — конечное поле, состоящее из $q$ элементов, и $V=F_q^n$. Сколько существует различных линейно независимых систем из $k$ векторов $(k \leqslant n)$ пространства $V$, если:

а) системы, различающиеся порядком, считаются различными;

б) системы, различающиеся лишь порядком, считаются одинаковыми?

**4.1.20.** Что означает линейная зависимость (линейная независимость) для системы:

а) из трех геометрических векторов;

б) из двух геометрических векторов;

в) из одного вектора?

**4.1.21.** Для каждого натурального числа $n$ укажите линейно независимую систему из $n$ векторов:

а) в пространстве многочленов над данным полем $F$;

б) в пространстве $F^\infty$ бесконечных последовательностей элементов поля $F$ с покомпонентными операциями сложения и умножения на скаляры поля $F$: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)+(\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)=(\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_n+\beta_n, \ldots)$, $\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)=(\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n, \ldots)$;

в) в пространстве дифференцируемых функций;

г) в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$.

**4.1.22.** а) Является ли система чисел $1, \sqrt{2}$ линейно зависимой системой векторов в пространстве $\boldsymbol{R}$ над $\boldsymbol{Q}$?

б) Тот же вопрос для пространства положительных действительных чисел, в котором сумма векторов есть произведение чисел $a \oplus b = ab$; умножение на скаляр есть возведение в степень $\alpha a = a^{\alpha}$.

**4.1.23.** Покажите, что в векторном пространстве над полем вычетов по модулю два любые различные ненулевые вектора образуют линейно независимую систему.

## § 2. РАНГ И БАЗИС СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

**4.2.1.** Определите ранг системы векторов в упражнении 4.1.1.

**4.2.2.** Определите ранг для каждой из систем в упражнении 4.1.7, пункты а) — л).

**4.2.3.** Укажите все возможные базисы для каждой из систем векторов в упражнении 4.1.7, пункты а) — л).

**4.2.4.** Докажите линейную независимость следующей «ступенчатой» системы векторов $n$-мерного арифметического векторного пространства над полем $F$:

$$\begin{array}{llllllllll}
a_1 = (\alpha_{11}, & \ldots, & \alpha_{1p-1}, & \alpha_{1p}, & \ldots, & \alpha_{1q}, & \ldots & & , & \alpha_{1n}),\\
a_2 = (\ 0\ , & \ldots, & 0\ , & \alpha_{2p}, & \ldots, & \alpha_{2q}, & \ldots & & , & \alpha_{2n}),\\
a_3 = (\ 0\ , & \ldots, & 0\ , & 0\ , & \ldots, & \alpha_{3q}, & \ldots & & , & \alpha_{3n}),\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
a_m = (0, & \ldots & & & & , & 0\ , & \ldots, & \alpha_{mr}, \ldots, & \alpha_{mn}).
\end{array}$$

Здесь $1 < p < q < \ldots < r \leqslant n$; $\alpha_{2p}$, $\alpha_{3q}$, ..., $\alpha_{mr}$ — ненулевые элементы поля $F$. Хотя бы один из скаляров $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1p-1}$ отличен от нуля.

**4.2.5.** Покажите, что элементарные преобразования системы векторов, т. е. прибавление к какому-либо вектору системы другого вектора, умноженного на скаляр, и умножение какого-либо вектора системы на ненулевой скаляр, не меняют ранга системы векторов.

**4.2.6.** Вычислите ранг системы арифметических векторов над полем комплексных чисел, приведя ее к ступенчатому виду элементарными преобразованиями:

а) $(0, 1, 2, 3)$, $(0, 1, 3, 4)$;

б) $(0, 1, 2, 3)$, $(1, 2, 3, 0)$;

в) $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$;

г) $(1, 1, 1)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$;

д) $(1, 1, 1)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$, $(2, 3, 5)$;

е) $(i, i, 1, 0)$, $(1, 2, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 1+i)$;

ж) $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $(e, \pi)$;

з) $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 2)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$;

и) $(1, 2, 1, 2)$,
$(1, 3, 2, 3)$,
$(1, 2, -2, -3)$,
$(3, 7, 1, 2)$;

к) $(1, 1, 2, 1, 3)$,
$(1, 2, 4, 0, 1)$,
$(1, 1, 3, 1, 1)$,
$(1, 0, 1, 2, 3)$;

л) $(1, 1, 1)$,
$(\alpha, \beta, \gamma)$,
$(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$;

м) $(1, 2, 1, 3)$,
$(-1, 1, 0, 1)$,
$(3, 0, 1, 1)$;

н) $(1, 2, 1, 3)$,
$(-1, 1, 0, 1)$,
$(3, 0, 1, 1+\varepsilon)$, где $\varepsilon \neq 0$;

о) $(\alpha, \beta)$,
$(\gamma, \delta)$;

п) $(1+i, 1-i; -1+i, -1-i)$,
$(-1+i, 1+i, -1-i, 1-i)$,
$(2i, 2, -2, -2i)$,
$(3+i, 1-3i, -1+3i, -3-i)$.

**4.2.7.** Найдите ранг системы арифметических векторов над полем вычетов по модулю три:

а) $(1, 0, 0)$,
$(0, 1, 0)$,
$(0, 0, 1)$;

б) $(1, 1, 1, 0)$,
$(1, 1, 0, 1)$,
$(1, 0, 1, 1)$,
$(0, 1, 1, 1)$;

в) $(1, 1, 2)$,
$(2, 0, 1)$,
$(1, 1, 0)$;

г) $(1, 2, 2, 0, 1)$,
$(2, 1, 1, 0, 2)$.

**4.2.8.** Укажите какой-либо базис для каждой из систем векторов в упражнении 4.1.7, пункты а) — л).

**4.2.9.** Укажите какой-либо базис системы векторов в упражнениях 4.1.1 и 4.1.7, пункты м) — с).

**4.2.10.** Укажите какой-либо базис для каждой системы векторов в упражнениях 4.2.6 и 4.2.7.

**4.2.11.** Найдите все возможные базисы для каждой из систем векторов в упражнениях 4.1.7, пункты а) — л) и 4.2.6, пункты а) — з).

**4.2.12.** Покажите, что ранг системы векторов $a_1, \ldots, a_n, b$ совпадает с рангом системы векторов $a_1, \ldots, a_n$ тогда и только тогда, когда $b \in L(a_1, \ldots, a_n)$.

**4.2.13.** Покажите, что если ранг системы векторов $a_1, \ldots, a_n, b$ совпадает с рангом системы $a_1, \ldots, a_n$ и равен $n$, то вектор $b$ единственным образом выражается как линейная комбинация векторов $a_1, \ldots, a_n$.

**4.2.14.** Покажите, что если вектор $b$ однозначно выражается как линейная комбинация системы векторов $a_1, \ldots, a_n$, то система $a_1, \ldots, a_n$ линейно независима.

## § 3. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

**4.3.1.** Вычислите:

а) $(7,7)\cdot\left(\begin{pmatrix}1&2&0&7\\7&0&2&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3&2&3&1\\1&4&3&3\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\right)$;

б) $\left(\begin{pmatrix}1&2&0&7\\7&0&2&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3&2&3&1\\1&4&3&3\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}7\\1\\-2\\8\end{pmatrix}$.

**4.3.2.** Вычислите $AB$ и $BA$:

а) $A=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B=(0,\ 0,\ 0)$;

б) $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix}$, $B=(1,\ 0,\ 2,\ -1)$;

в) $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix}$, $B=(2,\ 1,\ 3,\ -1)$;

г) $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\3\end{pmatrix}$, $B=(1,\ 2,\ 2,\ 1)$;

д) $A=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\-2&0&-4&2\\1&0&2&-1\\3&0&6&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\-4&-2&-6&2\\2&1&3&-1\\6&3&9&-3\end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\-4&-2&-6&2\\2&1&3&-1\\6&3&9&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\-2&-4&-4&-2\\1&2&2&1\\3&6&6&3\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$;

з) $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$;

и) $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ . & . & .\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$;

к) $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & 0\\ . & . & .\\ 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\mu_1 & \dots & 0\\ . & . & .\\ 0 & \dots & \mu_n\end{pmatrix}$;

л) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$.

**4.3.3.** Вычислите:

а) $$\left(\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)^2+8\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)^3;$$

б) $$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 9 & 9 & 9 & 9\\ 4 & 4 & 7 & 8\\ 5 & 9 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 9 & 4 & 5\\ 1 & 9 & 4 & 9\\ 1 & 9 & 7 & 1\\ 1 & 9 & 8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix};$$

в) $$\left(\begin{pmatrix}1001 & 1002 & 999\\ 998 & 1001 & 1003\\ 1003 & 1000 & 999\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix}+\right.$$
$$\left.+\begin{pmatrix}7 & 3 & -5\\ -6 & 6 & 8\\ 3 & -6 & -5\end{pmatrix}\right)^2;$$

г) $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}1 & 0 & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & c\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix}a & b\\ -\bar b & \bar a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\ -\bar d & \bar c\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\ -d & c\end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix}a & b\\ -\bar b & \bar a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar a & -b\\ \bar b & a\end{pmatrix}$, где $a$, $b$, $c$, $d$ — комплексные числа, $\bar{a}$ — число, комплексно сопряженное числу $a$.

**4.3.4.** Найдите значение многочлена $f(x)=x^2+x+2$ от матрицы $A$, т. е. вычислите $f(A)=A^2+A+2E$, где $E$ — единичная матрица подходящего размера:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

**4.3.5.** Вычислите:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2-(a+b)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**4.3.6.** Матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & \alpha' & \beta' \\ 0 & 1 & \gamma' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ называются (верхними) унитреугольными:

а) вычислите $AB$ и $BA$;

б) покажите, что $AB=BA$ тогда и только тогда, когда $\alpha\gamma'=\alpha'\gamma$.

**4.3.7.** Пусть $A$ — $(m\times n)$-матрица. Покажите, что:

а) если произведения $AB$ и $BA$ существуют, то $B$ — $(n\times m)$-матрица;

б) если при этом $AB=BA$, то обе матрицы квадратные одинакового порядка.

**4.3.8.** Две квадратные матрицы $A$ и $B$ одинакового размера называются перестановочными, если $AB=BA$. Покажите, что множество матриц, перестановочных с данной матрицей, замкнуто относительно всех главных операций, т. е. относительно сложения матриц, умножения матриц и умножения матрицы на скаляр.

**4.3.9.** Пусть $A$ и $B$ — квадратные матрицы одинакового порядка над числовым полем. Докажите равносильность следующих утверждений:

а) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;
б) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$;
в) матрицы $A$ и $B$ перестановочны.

**4.3.10.** Докажите, что если матрицы $A$ и $B$ перестановочны, то $(A+B)^n=A^n+\binom{n}{1}A^{n-1}B+\binom{n}{2}A^{n-2}B^2+\ldots+B^n$

для любого целого положительного числа $n$, где $\binom{n}{k}$ — число сочетаний из $n$ по $k$.

**4.3.11.** Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей $A$:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.3.12.** Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ над некоторым полем. Рассмотрите случаи:

а) $b=c=a-d=0$; г) $b\neq 0$, $c=0$;
б) $b=c=0$, $a-d\neq 0$ д) $b\neq 0$, $c\neq 0$.
в) $b=0$, $c\neq 0$;

**4.3.13.** Покажите, что множество унитреугольных матриц порядка $n$, т. е. матриц, у которых на главной диагонали стоят единицы, а ниже главной диагонали — нули, замкнуто относительно умножения.

**4.3.14.** Найдите все унитреугольные матрицы третьего порядка, перестановочные:

а) с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) со всеми унитреугольными матрицами третьего порядка.

**4.3.15.** Покажите, что матрицы размера $m\times n$ с элементами из поля $F$ образуют векторное пространство над этим полем относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на скаляр. Найдите размерность этого пространства.

**4.3.16.** Пусть $A$ — квадратная матрица порядка $n$ над некоторым полем $F$. Докажите, что существует многочлен $f(x)$ с коэффициентами из поля $F$, степень которого не превосходит $n^2$, такой, что $f(A)=0$.

**4.3.17.** Обозначим через $E_{ij}$ квадратную матрицу порядка $n$, у которой в $i$-й строке на $j$-м месте стоит единица, а все остальные элементы — нули. Докажите, что:

а) совокупность матриц $E_{ij}$, $j$, $i=1, \ldots, n$ образует базис пространства матриц $F^{n\times n}$;

б) $E_{ij}\cdot E_{kl}=0$, если $j\neq k$, $E_{ij}\cdot E_{jk}=E_{ik}$.

**4.3.18.** Пусть $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$. Вычислите:

а) $E_{ij}A$; б) $AE_{ij}$; в) $E_{ii}AE_{jj}$; г) $E_{ij}AE_{ij}$; д) $E_{ij}AE_{kl}$.

**4.3.19.** Покажите, что если квадратные порядка $n$ матрицы $A=\|\alpha_{ij}\|$ и $E_{ij}$ перестановочны, то $\alpha_{ii}=\alpha_{jj}$, $\alpha_{jk}=0$ при $k\neq j$, $\alpha_{mi}=0$ при $m\neq i$.

**4.3.20** (лемма Шура). Покажите, что $(n\times n)$-матрица $A$ перестановочна со всеми матрицами такого же размера тогда и только тогда, когда она скалярная, т. е. $A=\lambda E$, где $E$ — единичная матрица.

**4.3.21.** Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы вне главной диагонали нулевые. Покажите, что если квадратная матрица перестановочна со всеми диагональными того же порядка, то она сама является диагональной.

**4.3.22.** Пусть $A$ — диагональная матрица и все элементы ее главной диагонали попарно различны. Покажите, что любая матрица, перестановочная с матрицей $A$, также диагональная.

**4.3.23.** Пусть $A$ — ненулевая квадратная матрица над полем $F$. Покажите, что любая матрица того же порядка над тем же полем может быть представлена как линейная комбинация матриц вида $E_{ij}AE_{kl}$.

**4.3.24.** $A=\|\alpha_{ij}\|$ — квадратная матрица порядка $n$, $E$ — единичная того же порядка. Матрицы $E_{(i)+\lambda(k)}=E+\lambda E_{ik}$ $(i\neq k)$ и $E_{\lambda(i)}=E+(\lambda-1)E_{ii}$ $(\lambda\neq 0)$ называются элементарными. Перемножьте:

а) $E_{(i)+\lambda(k)}A$; б) $AE_{(i)+\lambda(k)}$;
в) $E_{\lambda(i)}A$; г) $AE_{\lambda(i)}$.

Каким элементарным преобразованиям соответствуют данные действия?

**4.3.25.** Покажите, что для любой $(m\times n)$-матрицы $A$ найдется $(m\times m)$-матрица $B$, такая, что $BA$ ступенчатая. $BA$ называется ступенчатой, если ее строки составляют ступенчатую систему векторов (см. упр. 4.2.4).

**4.3.26.** Пусть $A$ — произвольная $(m\times n)$-матрица. На какую матрицу нужно домножить слева матрицу $A$, чтобы это соответствовало действию:

а) вычеркивания $i$-й строки матрицы $A$;
б) приписывания нулевой строки снизу;
в) перемены местами $i$-й и $j$-й строк?

**4.3.27.** На какую матрицу нужно домножить справа матрицу $A$, чтобы это соответствовало действию:

а) вычеркивания $i$-го столбца;
б) приписывания нулевого столбца справа;
в) перемены местами $i$-го и $j$-го столбцов?

**4.3.28.** Покажите, что для любой $(m\times n)$-матрицы $A$ ранга $r$:

а) найдется $(r\times m)$-матрица $B$, такая, что $BA$ приведенная ступенчатая. При этом $BA$ определена однозначно;

б) найдутся $(r\times m)$-матрица $B$ и $(n\times r)$-матрица $C$, такие, что $BAC$ единичная порядка $r$.

**4.3.29.** Покажите, что любую $(m\times n)$-матрицу $A$ ранга $r$ можно представить в виде $A=PQ$, где $P$ — $(m\times r)$-матрица, $Q$ — $(r\times n)$-матрица.

**4.3.30.** Представление матрицы, полученное в предыдущем упражнении, называется скелетным разложением. Найдите скелетные разложения следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.3.31.** Проверьте следующие свойства операции транспонирования:

а) ${}^t({}^tA)=A$;
б) ${}^t(\alpha A)=\alpha\,{}^tA$;
в) ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$;
г) ${}^t(A^{-1})=({}^tA)^{-1}$,
если $A^{-1}$ существует;
д) ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$;
е) ранг ${}^tA=$ ранг $A$.

$A$, $B$ — матрицы над полем $F$, $\alpha\in F$.

**4.3.32.** Покажите, что ранг произведения двух матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.

**4.3.33.** Покажите, что матричные уравнения $AX=B$, $XA=B$ неразрешимы, если ранг $A$ меньше ранга $B$.

**4.3.34** (неравенство Сильвестера). Ранги квадратных порядка $n$ матриц $A$ и $B$ равны соответственно $r$ и $s$. Докажите, что ранг произведения этих матриц не меньше чем $r+s-n$.

**4.3.35.** Матрица $A$ называется симметрической, если ${}^tA=A$. Покажите, что:

а) для всякой матрицы $A$ матрицы ${}^tAA$ и $A{}^tA$ симметрические;

б) для всякой квадратной матрицы $A$ матрица $A+{}^tA$ симметрическая;

в) произведение двух симметрических матриц является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны.

**4.3.36.** Матрица $A$ называется кососимметрической, если ${}^tA=-A$. Покажите, что:

а) для любой квадратной матрицы $A$ матрица $A-{}^tA$ кососимметрическая;

б) произведение двух кососимметрических матриц одинакового размера является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны.

**4.3.37.** Покажите, что в векторном пространстве $F^{n\times n}$ квадратных матриц порядка $n$ над полем $F$:

а) симметрические матрицы составляют подпространство, которое обозначим $U$, найдите его размерность:

б) кососимметрические матрицы составляют подпространство $V$, найдите его размерность;

в) если $F$ — числовое поле, то $F^{n\times n}=U\oplus V$;

г) если $F$ — поле вычетов по модулю два, то $U=V$.

**4.3.38.** Покажите, что если квадратная матрица $A$ перестановочна со всеми симметрическими матрицами того же порядка, то $A$ — скалярная матрица, т. е. $A=\lambda E$, где $\lambda$ — скаляр, $E$ — единичная матрица.

**4.3.39.** Найдите $A^n$ для всех целых положительных чисел $n$:

а) $\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 0 & \beta\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & \alpha & \beta\\ 0 & 1 & \gamma\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

**4.3.40.** Матрица $A$ называется идемпотентной, если $A^2=A$. Докажите, что обратимая матрица является идемпотентной тогда и только тогда, когда она единичная.

**4.3.41.** Опишите все идемпотентные матрицы второго порядка над произвольным полем.

**4.3.42.** Матрица $A$ называется инволютивной, если $A^2=E$. Опишите все инволютивные матрицы второго порядка над произвольным полем.

**4.3.43.** Пусть $A$ — квадратная матрица с числовыми элементами. Покажите, что:

а) если $A$ — идемпотентная матрица, то $2A-E$ инволютивна;

б) если $A$ — инволютивная матрица, то $\frac{1}{2}(A+E)$ идемпотентна;

в) если $A$ — идемпотентная матрица, то $E-A$ также идемпотентная ($E$ — единичная матрица).

**4.3.44.** Матрица $A$ называется нильпотентной, если $A^n=0$ для некоторого целого положительного $n$. Покажите, что если $A$ — нильпотентная матрица, то матрицы $E+A$ и $E-A$ обе обратимы ($E$ — единичная матрица).

**4.3.45.** Пусть $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ — нильпотентная матрица с числовыми элементами. Используя тождество из 4.3.5, покажите, что:

а) $ad-bc=0$; г) $a+d=0$;

б) $A^2=(a+d)A$; д) $A^2=0$.

в) $A^n=(a+d)^{n-1}A$

для любого $n>0$;

**4.3.46.** Опишите все нильпотентные матрицы второго порядка над полем комплексных чисел.

**4.3.47.** Проверьте, что система линейных уравнений над некоторым полем

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n&=\beta_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{m1}x_1+\ldots+\alpha_{mn}x_n&=\beta_m\end{aligned}$$

равносильна матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

которое называется матричной формой данной системы линейных уравнений.

**4.3.48.** Пусть $A$ — $(m \times n)$-матрица и $B$ — $(m \times k)$-матрица над некоторым полем. $X$ — $(n \times k)$-матрица, элементы которой считаются переменными величинами. Покажите, что уравнение $AX = B$ равносильно $k$ системам линейных уравнений, каждая из которых имеет основную матрицу $A$, а столбец свободных членов — один из столбцов матрицы $B$.

**4.3.49.** Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**4.3.50.** Решите матричное уравнение $AX = E$, где $E$ — единичная матрица подходящего размера:

а) $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 11 & -8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**4.3.51.** Решите и исследуйте уравнение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

относительно переменных $x$, $y$, $z$, $u$.

**4.3.52.** Решите и исследуйте уравнение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## § 4. ОБРАТИМЫЕ МАТРИЦЫ. ГРУППЫ МАТРИЦ

**4.4.1.** Пусть $A$ — квадратная матрица порядка $n$ и ранга $n$ над полем $F$. Проведем справа от матрицы $A$ вертикальную черту и припишем единичную матрицу того же порядка. Совершая элементарные преобразования над строками полученной $(n\times 2n)$-матрицы, придем к такой матрице, у которой слева от черты стоит единичная матрица (почему это можно сделать?). Тогда справа от черты получим матрицу $A^{-1}$. Обоснуйте предложенный способ нахождения обратной матрицы.

**4.4.2.** Найдите обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.4.3.** Найдите обратные матрицы для элементарных матриц из 4.3.24.

**4.4.4.** Найдите обратную матрицу. При каких ограничениях на параметры матрица обратима:

а) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}$?

**4.4.5.** Найдите обратную матрицу над полем рациональных чисел:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.4.6.** Обратимы ли матрицы в упражнении 4.4.5 над полем вычетов по модулю два?

**4.4.7.** Обратимы ли матрицы в упражнении 4.4.5 по модулю пять? Найдите обратные.

**4.4.8.** Найдите обратную матрицу над полем рациональных чисел:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 1 \\ 1 & 9 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 8 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 49 & 8 & 9 & -65 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.4.9.** Решите упражнение 4.4.8 над полем вычетов по модулю три.

**4.4.10.** Решите упражнение 4.4.8 над полем вычетов по модулю семь.

**4.4.11.** Запишите систему линейных уравнений над полем рациональных чисел в матричной форме и решите ее, используя обратную матрицу (см. упр. 4.4.5):

а) $\begin{aligned} x_1+4x_2+5x_3&=4, \\ x_2+9x_3&=0, \\ x_1+4x_2+9x_3&=4; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1+x_2\phantom{+9x_3}&=0, \\ x_2+9x_3&=8, \\ 3x_1+4x_2+5x_3&=4; \end{aligned}$

в) $\begin{aligned} x_1+x_2+7x_3&=0, \\ x_1\phantom{+x_2}+x_3&=0, \\ 9x_1+7x_2+x_3&=50. \end{aligned}$

**4.4.12.** Решите матричное уравнение $AX=B$ над полем вычетов по модулю семь, если

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**4.4.13.** Решите матричное уравнение $AXB=E$ над полем вычетов по модулю три ($E$ — единичная матрица), если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**4.4.14.** Покажите, что множество обратимых квадратных матриц порядка $n$ над полем $F$ образует по умножению группу. Эта группа называется общей линейной группой и обозначается $GL(n,F)$.

**4.4.15.** Опишите обратимые диагональные матрицы. Покажите, что множество таких матриц порядка $n$ над полем $F$ образует подгруппу общей линейной группы. Эта группа называется диагональной и обозначается $D(n, F)$.

**4.4.16.** Покажите, что множество матриц над полем $F$ вида $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ образует подгруппу общей линейной группы, изоморфную аддитивной группе поля $F$.

**4.4.17.** Покажите, что множество матриц над полем $F$ вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ образует подгруппу общей линейной группы, изоморфную аддитивной группе поля $F$.

**4.4.18.** Покажите, что множество матриц над полем действительных чисел вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ образует подкольцо кольца матриц, изоморфное полю комплексных чисел.

**4.4.19.** Покажите, что множество матриц над полем действительных чисел вида $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ образует подгруппу общей линейной группы, изоморфную группе поворотов плоскости вокруг фиксированной точки.

**4.4.20.** Опишите обратимые верхне треугольные матрицы, т. е. матрицы, у которых ниже главной диагонали стоят нули. Покажите, что множество таких матриц порядка $n$ над полем $F$ образует группу по умножению. Эта группа называется треугольной и обозначается $T(n, F)$.

**4.4.21.** а) Покажите, что множество верхне унитреугольных матриц, т. е. верхне треугольных матриц, у которых на главной диагонали стоят единицы, порядка $n$ над полем $F$ образует подгруппу группы обратимых треугольных матриц. Эта группа называется унитреугольной и обозначается $UT(n, F)$.

б) Покажите, что $UT(3, \mathbf{Q})$ — группа без кручения, т. е. $A^n \neq E$ ни для какого целого положительного $n$, $E$ — единичная матрица, $A \in UT(3, \mathbf{Q})$, $A \neq E$.

в) Сколько элементов содержит группа $UT(3, F)$, если поле $F$ состоит из $q$ элементов?

**4.4.22.** Покажите, что если $A$ — обратимая матрица, то $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

**4.4.23.** Докажите, что обратная матрица к симметрической (кососимметрической) сама является симметрической (кососимметрической).

**4.4.24.** Квадратная матрица $A$ порядка $n$ над полем $F$ называется ортогональной, если $A^{-1} = {}^tA$. Покажите, что множество ортогональных матриц порядка $n$ над полем $F$ образует подгруппу общей линейной группы. Эта группа называется ортогональной и обозначается $O(n, F)$.

**4.4.25.** Опишите диагональные ортогональные матрицы.

**4.4.26.** Опишите ортогональную группу второго порядка над полем действительных чисел.

**4.4.27.** Пусть $A$ — произвольных размеров матрица над числовым полем. Обозначим через $A' = {}^t\bar{A}$ матрицу, полученную из $A$ транспонированием и заменой всех элементов на комплексно-сопряженные. Покажите, что:

а) $(A+B)' = A' + B'$; в) $(cA)' = \bar{c}A'$;
б) $(AB)' = B'A'$; г) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$,

где $\bar{c}$ — число, комплексно-сопряженное к числу $c$, $A$ и $B$ — матрицы, над которыми выполнимы соответствующие операции.

**4.4.28.** Матрица $A$ с числовыми элементами называется эрмитовой, если $A' = A$. Покажите, что для любой матрицы $A$ произвольных размеров с числовыми элементами $AA'$ эрмитова.

**4.4.29.** Покажите, что квадратная матрица с действительными элементами эрмитова тогда и только тогда, когда она симметрическая.

**4.4.30.** Опишите диагональные эрмитовы матрицы.

**4.4.31.** Матрица $A$ с комплексными элементами называется унитарной, если $A' = A^{-1}$. Покажите, что для матрицы с действительными элементами унитарность равносильна ортогональности.

**4.4.32.** Опишите диагональные унитарные матрицы.

**4.4.33.** Покажите, что унитарные матрицы порядка $n$ образуют группу по умножению. Эта группа называется унитарной и обозначается $U(n)$.

**4.4.34.** Опишите группу $U(2)$.

**4.4.35.** а) Покажите, что множество $\boldsymbol{H}$ матриц с комплексными элементами вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ является подкольцом кольца квадратных матриц второго порядка над полем комплексных чисел.

б) Покажите, что в кольце $\boldsymbol{H}$ всякая ненулевая матрица обратима и обратная к ней снова лежит в $\boldsymbol{H}$.

в) Ненулевое кольцо, в котором всякий ненулевой элемент обратим, называется телом. Таким образом, кольцо $\boldsymbol{H}$ является телом и называется телом кватернионов. Покажите, что тело кватернионов является векторным пространством над полем действительных чисел. Найдите его размерность и укажите какой-либо базис.

г) Для найденного вами базиса составьте таблицу умножения.

**4.4.36.** Найдите пересечение мультипликативной группы кватернионов, т. е. группы всех отличных от нуля кватернионов по умножению, и группы $U(2)$.

**4.4.37.** Рассмотрим множество ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ над некоторым числовым полем $F$. Покажите, что это множество:

а) замкнуто относительно умножения;

б) содержит нейтральный элемент относительно умножения $e$, найдите его;

в) вместе с каждой матрицей $A$ содержит матрицу $B$, такую, что $AB=BA=e$;

г) является группой относительно умножения, изоморфной мультипликативной группе поля $F$.

**4.4.38.** Пусть $A$ — ненулевая идемпотентная матрица порядка $n$ над полем $F$ (см. упр. 4.3.40). Рассмотрим множество $S$ матриц вида $\alpha A$, где $\alpha \in F$ и $\alpha \neq 0$.

а) Для каких матриц $A$ множество $S$ состоит из обратимых матриц?

б) Покажите, что множество $S$ является группой по умножению, изоморфной мультипликативной группе поля $F$.

**4.4.39.** а) Может ли быть группой по умножению множество матриц, состоящее только из необратимых матриц? Является ли такая группа подгруппой общей линейной группы?

б) Обязательно ли является группой по умножению какое-либо множество обратимых матриц?

в) Может ли быть группой по умножению множество матриц, в котором содержатся как обратимые, так и необратимые матрицы?

## § 5. ПОДСТАНОВКИ

Подстановкой степени $n$ называется взаимно однозначное отображение множества $M=\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя. Отображение $\varphi$: $M \to M$ можно рассматривать как бинарное отношение $\varphi \subseteq M \times M$, т. е. как некоторое множество упорядоченных пар, которое в данном случае удобно записывать следующим образом: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}$.

**4.5.1.** Какие из следующих бинарных отношений являются подстановками:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$?

**4.5.2.** Какие из подстановок в предыдущем упражнении равны между собой? Запишите их в каноническом виде, т. е. чтобы верхняя строка была записана в порядке возрастания номеров.

**4.5.3.** Перемножьте подстановки:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

**4.5.4.** В предыдущем упражнении перемножьте подстановки в обратном порядке.

**4.5.5.** Найдите обратные подстановки:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

**4.5.6.** а) Выпишите все подстановки второй степени.

б) Выпишите все подстановки степени три.

в) Докажите, что число подстановок степени $n$ равно $n!$.

**4.5.7.** Пусть $1 \leqslant i_1, \dots, i_k \leqslant n$ — различные натуральные числа. Подстановка $\varphi \in S_n$ называется циклом, если $\varphi(i_1)=i_2$, $\varphi(i_2)=i_3$, ..., $\varphi(i_k)=i_1$, а на остальных числах $\varphi$ действует тождественно, т. е. $\varphi(j)=j$. Цикл $\varphi$ обозначается $(i_1 \dots i_k)$, число $k$ называется длиной цикла $\varphi$, множество $\{i_1, \dots, i_k\}$ называется множеством цикла $\varphi$. Два цикла называются независимыми, если пересечение их множеств пусто. Представьте подстановку в виде произведения независимых циклов:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 4 & 5 & 3 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$; г) $(18)(17)(16)(15)(14)(13)(12)$;

д) $(32)(31)(38)(37)(36)(35)(34)$;

е) $(12)(23)(34)(45)(56)(67)(78)$.

**4.5.8.** Покажите, что любую подстановку можно представить в виде произведения попарно независимых циклов. Докажите, что независимые циклы перестановочны.

**4.5.9.** Вычислите $\varphi^n$:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix}^6$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&1\end{pmatrix}^7$;

в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&5&6&7&4\end{pmatrix}^{11}$; г) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&4&7&5&6&1&3\end{pmatrix}^{101}$;

д) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}^n$;

**4.5.10.** Докажите, что для каждой подстановки $\sigma$ степени $n$ найдется такое целое положительное число $k \leqslant n!$, что $\sigma^k = \varepsilon$, где $\varepsilon$ — тождественная подстановка. Наименьшее число с этим свойством называется порядком подстановки $\sigma$.

**4.5.11.** Вычислите порядок цикла длины $k$.

**4.5.12.** Вычислите порядок подстановки, если она разложена в произведение попарно независимых циклов длины $k_1, \ldots, k_m$.

**4.5.13.** Пусть $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n$ — попарно различные целые числа. Вычислите:

а) $(i_1 i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{k-1} i_k)$;

б) $(1 i_1)(1 i_k) \ldots (1 i_2)(1 i_1)$, если все числа $i_1, \ldots, i_k$ отличны от 1;

в) $(i_1 i_k) \ldots (i_1 i_3)(i_1 i_2)$.

**4.5.14.** Вычислите

$$\begin{pmatrix}i_1 & \ldots & i_n\\ j_1 & \ldots & j_n\end{pmatrix}(i_1 \ \ldots \ i_n)\begin{pmatrix}i_1 & \ldots & i_n\\ j_1 & \ldots & j_n\end{pmatrix}^{-1}.$$

**4.5.15.** Покажите, что каждая подстановка степени $n > 1$:

а) разложима в произведение транспозиций, т. е. циклов длины 2;

б) разложима в произведение транспозиций вида $(1k)$;

в) разложима в произведение транспозиций вида $(k\ k+1)$.

**4.5.16.** Пусть $E_{ij}$ обозначает матрицу размера $n \times n$, у которой в $i$-й строке на $j$-м месте стоит единица, а на остальных местах — нули (см. упр. 4.3.17). Обозначим $U_\sigma = \sum_{k=1}^{n} E_{\sigma(k)k}$. Найдите матрицы $U_\sigma$ для каждой подстановки третьей степени.

**4.5.17.** а) Покажите, что соответствие $\sigma \mapsto U_\sigma$ есть инъективный гомоморфизм $S_n \to GL(n, F)$, где $GL(n, F)$ — общая линейная группа (см. упр. 3.2.14).

б) Покажите, что для любой подстановки $\sigma$ $U_\sigma^{-1}={}^tU_\sigma$, т. е. $U_\sigma$ — ортогональная матрица.

**4.5.18.** Найдите число инверсий в подстановке и определите ее знак:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&8&3&4&5&6&7&2&9\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&7&4&5&6&3&8&9\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&4&5&6&7&8&9&1\end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\9&8&7&6&1&5&4&3&2\end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix}5&9&8&7&6&4&3&2&1\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\n&n-1&n-2&\dots&1\end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n-1&n\\2&3&4&\dots&n&1\end{pmatrix}$.

**4.5.19.** Какая подстановка в $S_n$ имеет наименьшее число инверсий, какая — наибольшее?

**4.5.20.** Подберите $i$ и $k$ так, чтобы подстановка $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&3&1&i&4&6&k&2&9\end{pmatrix}$ оказалась: а) четной; б) нечетной.

**4.5.21.** Определите знак цикла длины $k$.

**4.5.22.** Назовем декрементом подстановки $\sigma$ разность между числом перемещаемых элементов, т. е. таких, что $\sigma(i)\neq i$, и числом циклов в разложении подстановки $\sigma$ в произведение попарно независимых циклов (см. упр. 4.5.8). Покажите, что четность подстановки совпадает с четностью ее декремента.

**4.5.23.** Разложите следующие подстановки в произведение независимых циклов, по декременту определите четность:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&3&8&4&5&6&2&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&6&2&8&7&3&5&4\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&6&4&5&3&2&1\end{pmatrix}$.

**4.5.24.** Покажите, что наименьшее число транспозиций, в произведение которых может быть разложена подстановка, равно декременту этой подстановки.

**4.5.25.** Покажите, что множество четных подстановок степени $n$ образует подгруппу группы $S_n$. Эта группа называется знакопеременной и обозначается $A_n$.

**4.5.26.** Найдите число элементов в группе $A_n$.

**4.5.27.** Выпишите все элементы группы $A_3$.

**4.5.28.** Выпишите все элементы группы $A_4$.

## § 6. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

**4.6.1.** Пользуясь определением, запишите в развернутом виде определители второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

**4.6.2.** Группируя слагаемые, проверьте следующие равенства:

а) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

б) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**4.6.3.** С какими знаками входят данные произведения в определители соответствующих порядков:

а) $a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$; б) $a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$; в) $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$;
г) $a_{12}\,a_{23}\,a_{34}\,a_{45}\,a_{56}\,a_{67}\,a_{78}\,a_{81}$;
д) $a_{18}\,a_{27}\,a_{36}\,a_{45}\,a_{54}\,a_{63}\,a_{72}\,a_{81}$?

**4.6.4.** Какие значения должны принимать $i$ и $k$, чтобы произведение $a_{17}a_{23}a_{31}a_{4i}a_{54}a_{66}a_{7k}a_{82}a_{99}$ входило в определитель девятого порядка:

а) со знаком «плюс»;
б) со знаком «минус»?

**4.6.5.** Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} \end{vmatrix}$

**4.6.6.** Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \\ 0 & -1 & a_3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$;

к) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

**4.6.7.** Чему может быть равен определитель порядка $n$, в котором только $n$ элементов отличны от нуля?

**4.6.8.** Пусть $\sigma \in S_n$. Найдите определитель матрицы $U_\sigma$ (4.5.16).

**4.6.9.** Вычислите определитель треугольной матрицы порядка $n$.

**4.6.10.** Как изменится определитель матрицы порядка $n$, если все ее элементы заменить на противоположные?

**4.6.11.** Покажите, что для квадратной матрицы порядка $n$ $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

**4.6.12.** Как изменится определитель матрицы порядка $n$, если:

а) какие-либо две строки (два столбца) поменять местами;

б) первый столбец поставить на последнее место, а остальные сдвинуть влево, сохраняя их расположение;

в) столбцы записать в обратном порядке;

г) к последнему столбцу прибавить все остальные?

**4.6.13.** Как связаны между собой определитель комплексной матрицы $A$ и определитель матрицы $\bar{A}$, которая получается из $A$ заменой всех элементов на комплексно-сопряженные?

**4.6.14.** Покажите, что определитель эрмитовой матрицы (см. упр. 4.4.28) есть действительное число.

**4.6.15.** а) Пусть в поле $F$ не выполняется равенство $1+1=0$. Покажите, что определитель кососимметрической матрицы (см. упр. 4.3.36) нечетного порядка равен нулю.

б) Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ над полем вычетов по модулю два. Является ли данная матрица кососимметрической?

**4.6.16.** Числа 194, 291, 388 делятся на 97. Докажите, что определитель матрицы $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 9 & 1 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix}$ делится на 97.

**4.6.17.** Докажите, что $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ делится на 275.

**4.6.18.** Найдите какие-либо решения уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

## § 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МЕТОДОМ ПРИВЕДЕНИЯ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ

**4.7.1.** Прибавление к строке (столбцу) матрицы другой строки (столбца), домноженной на какой-либо скаляр, не меняет определителя этой матрицы. Совершая преобразования, не меняющие определителя матрицы, мы можем привести эту матрицу к треугольному виду и вычислить ее определитель как произведение элементов главной диагонали. Вычислите указанным методом определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

д) $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; е) $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

ж) $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ c_4 & c_3 & c_2 & \lambda+c_1 \end{vmatrix}$;

л) $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ c_m & c_{m-1} & \dots & c_2 & \lambda+c_1 \end{vmatrix}$.

**4.7.2.** Попытайтесь найти закономерность в упражнении 4.7.1, д, е, ж и опишите последовательность определителей $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n, \dots$.

**4.7.3.** Пусть $a_1, \dots, a_n$ — целые положительные числа.

а) Вычислите $(a_1\, a_2\, a_3) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 \\ 0 & -1 & a_3 \end{vmatrix}$.

б) Вычислите $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 \end{vmatrix}$.

в) Найдите частное $\dfrac{(a_1\, a_2\, a_3\, a_4)}{(a_1\, a_2\, a_3)}$.

г) Сформулируйте теорему, представляющую конечные цепные дроби в виде частного двух определителей.

д) Сопоставьте результаты этого упражнения с упражнениями 4.7.1, пункты д, е, ж.

## § 8. РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СТРОКЕ ИЛИ СТОЛБЦУ

**4.8.1.** Элементами матрицы служат знаки «плюс» и «минус», причем в $i$-й строке на $j$-м месте стоит «плюс», если $i+j$ — четное число, в противном случае — знак «минус». Составьте такую матрицу порядка: а) три; б) четыре; в) пять.

**4.8.2.** Вычислите определитель, раскладывая по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 4 & x & y & x & 3 \\ 0 & b & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & y & z & c & 0 \\ 5 & z & u & y & 4 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

**4.8.3.** Дан определитель

$$(a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5)=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_5 \end{vmatrix}.$$

Разложите: а) по первому столбцу (строке);

б) по последнему столбцу (строке).

**4.8.4.** Определитель

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вандермонда.

а) Вычитая из каждой строки предыдущую, домноженную на $x_n$, и раскладывая затем по последнему столбцу, получите соотношение $\Delta(x_1, \ldots, x_n)=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdot\ldots\times$ $\times(x_n-x_{n-1})\,\Delta(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

б) Индукцией по $n$ докажите, что $\Delta(x_1, \ldots, x_n)=\prod(x_j-x_i)$.

## § 9. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

**4.9.1.** Пусть $A$ — обратимая матрица. Покажите, что:

а) $\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}$;

б) для любого целого числа $n$ $|A^n|=|A|^n$.

**4.9.2.** Покажите, что определитель ортогональной матрицы (см. упр. 4.4.24) равен $\pm 1$.

**4.9.3.** Покажите, что модуль определителя унитарной матрицы (см. упр. 4.4.31) равен единице.

**4.9.4.** Покажите, что:

а) множество квадратных матриц порядка $n$ над полем $F$, у которых определитель равен единице, образует группу по умножению. Эта группа называется специальной линейной группой и обозначается $SL(n, F)$;

б) множество ортогональных матриц порядка $n$ над полем $F$, у которых определитель равен единице, образует группу по умножению. Эта группа называется специальной ортогональной группой и обозначается $SO(n, F)$;

в) множество унитарных матриц с определителем единица над полем комплексных чисел образует группу по умножению. Эта группа называется специальной унитарной группой и обозначается $SU(n)$.

**4.9.5.** Опишите группу $SO(2, \mathbf{R})$ (см. упр. 4.4.26).

**4.9.6.** Опишите группу $SU(2)$ (см. упр. 4.4.34). Покажите, что $SU(2)$ является подгруппой мультипликативной группы кватернионов (см. упр. 4.4.35 и 4.4.36).

**4.9.7.** Вычисляя определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

двумя способами (как определитель произведения или как произведение определителей), докажите тождество

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

**4.9.8.** Покажите, что если каждое из чисел представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел, то таким же свойством обладает их произведение.

**4.9.9.** Вычисляя определитель произведения матриц разными способами, выведите тождества, аналогичные тождеству упражнения 4.9.7:

а) $\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -2d & c \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -5d & c \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c \end{pmatrix}$;

**4.9.10.** Аналогично упражнению 4.9.8 сформулируйте теоретико-числовые следствия, вытекающие из тождеств предыдущего упражнения.

**4.9.11.** Вычислите определитель матрицы $A$ посредством умножения ее на матрицу $B$:

а) $A=B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$, $B={}^tA$;

г) $A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_0^2 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \dots & & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ — различные комплексные корни степени $n$ из единицы, $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}$ — многочлен с числовыми коэффициентами.

**4.9.12.** Используя упражнение 4.9.11, г, вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ c & 0 & a & b \\ b & c & 0 & a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

## § 10. МИНОРЫ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ, ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАТРИЦА

**4.10.1.** Сколько квадратных подматриц порядка $k$ имеет $(m\times n)$-матрица?

**4.10.2.** Подматрицу квадратной матрицы назовем главной, если она получается вычеркиванием строк и столбцов с одинаковыми номерами, определитель главной подматрицы называется главным минором. Сколько главных подматриц порядка $k$ имеет квадратная матрица порядка $n$?

**4.10.3.** Найдите коэффициент при $x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}$ $(1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n)$ в определителе

$$\begin{vmatrix} x_1-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & x_2-\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \dots & x_n-\alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

**4.10.4.** Матрица $A^*$, полученная из квадратной матрицы $A$ порядка $n$ над некоторым полем заменой каждого элемента на его алгебраическое дополнение и последующим транспонированием, называется присоединенной. Покажите, что:

а) $AA^*=A^*A=|A|E$, где $E$ — единичная матрица;

б) ${}^t(A^*)=({}^tA)^*$;

в) $|A^*|=|A|^{n-1}$;

г) $|A^*|=0$ тогда и только тогда, когда $|A|=0$;

д) если $|A|\neq 0$, то $A$ — обратимая матрица и $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$;

е) если $A$ — треугольная матрица, то $A^*$ также треугольная;

ж) если $A$ — симметрическая или кососимметрическая матрица, то $A^*$ также симметрическая или кососимметрическая.

**4.10.5.** Найдите присоединенную матрицу $A^*$, а также обратную $A^{-1}$, если $|A|\neq 0$:

а) $\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}a&0&a\\0&a&0\\a&0&a\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}0&b&0\\b&0&b\\0&b&0\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

**4.10.6.** Решите системы линейных уравнений в упражнении 5.5.1 при помощи правила Крамера.

**4.10.7.** Решите систему, пользуясь правилом Крамера ($(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0$):

а) $\begin{aligned}x_1+x_2&=1,\\ ax_1+bx_2&=d;\end{aligned}$ б) $\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=1,\\ ax_1+bx_2+cx_3&=d,\\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3&=d^2.\end{aligned}$

**4.10.8.** Решите и исследуйте систему уравнений

$$ax+by=c,$$
$$a'x+b'y=c'.$$

**4.10.9.** Пусть $A^*$ — матрица, присоединенная к квадратной матрице $A$ порядка $n$. Покажите, что:

а) если ранг $A$ меньше $n-1$, то $A^*$ есть нулевая матрица;

б) если ранг $A$ равен $n-1$, то ранг $A^*$ равен единице;

в) если $A$ имеет ранг $n$, то такой же ранг имеет $A^*$.

**4.10.10.** Пусть матрицы $A$ и $A^{-1}$ являются целочисленными. Докажите, что $|A|=|A^{-1}|=1$ или $|A|=|A^{-1}|=-1$.

**4.10.11.** Пусть $A$ — целочисленная матрица. Докажите, что если $|A|=\pm 1$, то $A^{-1}$ также является целочисленной.

**4.10.12.** Докажите следующее утверждение. Пусть $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n}), \ldots, (\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn})$ — линейно независимая система векторов над некоторым полем. Вектор $x=(x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда принадлежит линейной оболочке данной системы, когда все миноры $k+1$ порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kn} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$ равны нулю.

**4.10.13.** Пользуясь предыдущим упражнением, задайте линейную оболочку данной системы векторов системой однородных линейных уравнений:

а) $(1, 2, -1)$; б) $(a, b, c)$;

в) $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$; г) $(a, b, c)$, $(a', b', c')$.

**4.10.14.** Докажите, что квадратная матрица $A$ ортогональна тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) $|A|=1$ и каждый элемент матрицы $A$ совпадает со своим алгебраическим дополнением;

б) $|A|=-1$ и каждый элемент матрицы $A$ равен своему алгебраическому дополнению с противоположным знаком.

**4.10.15.** Пусть $\sigma=\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_n \\ j_1 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$ — некоторая подстановка. Вычеркнем в этой подстановке столбец $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$. Затем в верхней строке уменьшим все числа, большие числа $i$, на единицу, а в нижней строке уменьшим все числа, большие $j$, также на единицу. Получим подстановку $\sigma' \in S_{n-1}$. Покажите, что

$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{i+j} \operatorname{sgn} \sigma'$. Выполните указанную операцию с последним столбцом подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$.

**4.10.16.** Докажите, что ненулевая квадратная матрица $A$ над полем действительных чисел порядка $n \geqslant 3$ ортогональна тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) каждый элемент матрицы $A$ совпадает со своим алгебраическим дополнением;

б) каждый элемент матрицы $A$ равен своему алгебраическому дополнению с противоположным знаком.

# ГЛАВА 5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

## § 1. РАНГ МАТРИЦЫ

**5.1.1.** Пусть $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{m1} & \dots & & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ — $(m\times n)$-матрица над некоторым полем. Покажите, что:

а) если система векторов-строк $A_1=(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, A_m=(\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn})$ линейно независима, то $m\leqslant n$;

б) если система векторов-столбцов $A^1=\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \dots, A^n=\begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ линейно независима, то $n\leqslant m$;

в) если линейно независима как система строк, так и система столбцов, то $m=n$.

**5.1.2.** Пусть $r$ — ранг $(m\times n)$-матрицы. Покажите, что $r\leqslant\min(m, n)$.

**5.1.3.** Покажите, что вычеркивание одной строки (одного столбца) не меняет ранга матрицы тогда и только тогда, когда вычеркнутая строка (столбец) линейно выражается через остальные строки (столбцы).

**5.1.4.** Покажите, что приписывание к матрице одной строки (столбца) либо не изменяет ранга матрицы, либо увеличивает его на единицу.

**5.1.5.** Докажите, что если ранг матрицы $A$ не изменяется от приписывания к ней любого столбца матрицы $B$ с тем же числом строк, то он не меняется от приписывания к матрице $A$ всех столбцов матрицы $B$.

**5.1.6.** Как может измениться ранг матрицы, если изменить один элемент этой матрицы?

**5.1.7.** Пусть $A$ — $(m \times n)$-матрица и $B$ — $(m \times (n+k))$-матрица, получающаяся из матрицы $A$ в результате приписывания $k$ новых столбцов. Докажите, что:

а) если строки матрицы $B$ линейно зависимы, то и строки матрицы $A$ линейно зависимы;

б) если строки матрицы $A$ линейно независимы, то и строки матрицы $B$ линейно независимы;

в) ранг матрицы $A$ не превосходит ранга матрицы $B$.

**5.1.8.** В матрице $A$ выберем линейно независимую систему из $k$ строк и линейно независимую систему из $k$ столбцов. Пересечение этих двух систем представляет собой $(k \times k)$-подматрицу $B$ матрицы $A$.

а) Покажите, что если ранг матрицы $A$ равен $k$, то ранг матрицы $B$ также равен $k$.

б) Покажите на примере, что если ранг матрицы $A$ больше $k$, то ранг матрицы $B$ может быть меньше $k$.

**5.1.9.** Вычислите ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$.

**5.1.10.** Покажите, что если $(m \times n)$-матрица $\|\alpha_{ij}\|$ имеет ранг 1, то существуют скаляры $\beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, такие, что $\alpha_{ij} = \beta_i \gamma_j$ для любых $i, j$.

## § 2. СТУПЕНЧАТЫЕ МАТРИЦЫ

Ступенчатой матрицей называется $(m \times n)$-матрица следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{1k_1} & \dots & \alpha_{1k_2} & \dots & \alpha_{1k_3} & \dots & & & \alpha_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \alpha_{2k_2} & \dots & \alpha_{2k_3} & \dots & & & \alpha_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & & & 0 & \dots & \alpha_{3k_3} & \dots & & & \alpha_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & & & & & \dots & & \alpha_{sk_s} & \dots & \alpha_{sn} \\ 0 & \dots & 0 & & & & & & & & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & & & & & & & & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_s \leqslant n$, элементы $\alpha_{1k_1}, \ldots, \alpha_{sk_s}$, первые ненулевые элементы соответствующих строк, называются ведущими элементами строк матрицы $A$. Столбцы с номерами $k_1, \ldots, k_s$, т. е. столбцы, содержащие ведущие элементы строк, называются ведущими столбцами матрицы $A$.

**5.2.1.** Покажите, что ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

**5.2.2.** Покажите, что система ведущих столбцов ступенчатой матрицы является базисом системы столбцов данной матрицы.

**5.2.3.** Покажите, что с помощью элементарных преобразований строк матрицы, т. е. умножения какой-либо строки на ненулевой скаляр или прибавления к какой-либо строке другой строки, умноженной на скаляр, можно поменять любые две строки местами, не меняя остальных строк.

**5.2.4.** Приведите с помощью элементарных преобразований строк данную матрицу с рациональными коэффициентами к ступенчатому виду:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 7 \\ 6 & -12 & -3 & 15 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -3 \\ 7 & -1 & -3 & -3 \\ 5 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 6 \\ 6 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & -11 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} -10 & 5 & 17 & 11 \\ 5 & -5 & -8 & -18 \\ 5 & 5 & -10 & 32 \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 35 & 1 & -7 & -40 \\ 35 & -1 & -7 & 30 \end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 35 & 1 & -7 & -40 \\ 35 & -1 & -7 & 30 \end{pmatrix}$.

**5.2.5.** Матрицы е) и ж) в упражнении 5.2.4 приведите к ступенчатому виду:

а) над полем вычетов по модулю два;

б) над полем вычетов по модулю три.

**5.2.6.** Матрицы з), и), к) в упражнении 5.2.4 приведите к ступенчатому виду над полем вычетов по модулю пять.

**5.2.7.** Матрицы к) и л) в упражнении 5.2.4 приведите к ступенчатому виду над полем вычетов по модулю семь.

**5.2.8.** Пусть некоторая цепочка элементарных преобразований строк матрицы приводит ее к ступенчатому виду. Покажите, что если у матрицы вычеркнуть несколько последних столбцов, то та же цепочка преобразований приведет полученную матрицу к ступенчатому виду.

**5.2.9.** После приведения матрицы $A$ к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк последний столбец окажется ведущим тогда и только тогда, когда при вычеркивании последнего столбца матрицы $A$ ранг матрицы $A$ уменьшится на единицу.

**5.2.10.** Будем последовательно вычеркивать столбцы матрицы $A$, начиная с последнего. Предположим, что числа $0 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant n$ — это в точности номера столбцов, вычеркивание которых уменьшало ранг матрицы на единицу. Покажите, что если матрицу $A$ привести к ступенчатому виду, то ведущими столбцами окажутся в точности столбцы с номерами $k_1, \ldots, k_s$.

**5.2.11.** Покажите, что номера ведущих столбцов не зависят от способа приведения матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк.

**5.2.12.** Приведите следующие матрицы к ступенчатому виду и исследуйте зависимость ранга от параметров $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$:

а) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

**5.2.13.** Приведенной ступенчатой матрицей называется ступенчатая матрица без нулевых строк, у которой в ведущих столбцах все элементы равны нулю, кроме ведущих элементов, равных единице. С помощью элементарных преобразований строк, включая вычеркивание нулевых строк, приведите матрицы в упражнении 5.2.4 к приведенному ступенчатому виду.

**5.2.14.** Элементарными преобразованиями строк приведите следующие матрицы к приведенному ступенчатому виду:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & -7 & 3 \\ -1 & 2 & -8 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

**5.2.15.** Две матрицы называются строчечно-эквивалентными, если одна из них может быть получена из другой в результате цепочки элементарных преобразований строк. Докажите, что ненулевая матрица строчечно-эквивалентна одной и только одной приведенной ступенчатой матрице.

**5.2.16.** Докажите, что квадратная $(n \times n)$-матрица $A$ строчечно-эквивалентна единичной $(n \times n)$-матрице, тогда и только тогда, когда ранг матрицы $A$ равен $n$.

**5.2.17.** Покажите, что матрица ранга $r$ элементарными преобразованиями строк и столбцов (включая вычеркивание нулевых строк и столбцов) может быть приведена к единичной $(r \times r)$-матрице.

## § 3. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Однородной системой линейных уравнений называется система уравнений следующего вида с коэффициентами из некоторого поля $F$:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=0, \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1+\ldots\qquad\qquad+\alpha_{mn}x_n=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Матрица $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ называется основной матрицей данной системы. Обозначим через $A^1=\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \ldots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}$, ..., $A^n=\begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \ldots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ $m$-мерные арифметические векторы-столбцы основной матрицы данной системы. Исходная система однородных линейных уравнений равносильна векторному равенству

$$x_1A^1+\ldots+x_nA^n=0, \qquad (2)$$

которое называется векторной формой данной системы. $n$-мерный арифметический вектор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\in F^n$ называется решением системы (1), если $\lambda_1A^1+\ldots+\lambda_nA^n=0$, или, что то же самое, в поле $F$ выполнены равенства

$$\begin{gathered} \alpha_{11}\lambda_1+\ldots+\alpha_{1n}\lambda_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\lambda_1+\ldots+\alpha_{mn}\lambda_n=0. \end{gathered}$$

**5.3.1.** Покажите, что система (1) всегда имеет решение. Если система (1) имеет единственное решение, то система векторов $A^1$, ..., $A^n$ линейно независима и $n\leqslant m$.

**5.3.2.** Покажите, что множество решений системы (1) образует подпространство $n$-мерного арифметического векторного пространства над полем $F$.

**5.3.3.** Базис пространства решений системы (1) называется фундаментальной системой решений данной однородной системы линейных уравнений. Покажите, что если однородная система линейных уравнений (1) имеет ненулевые решения, то она обладает хотя бы одной фундаментальной системой решений.

**5.3.4.** Предположим, что основная матрица системы (1) имеет приведенный ступенчатый вид, причем $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leqslant n$ — номера ведущих столбцов, а $0 \leqslant l_1 < \ldots < l_s \leqslant n$ — номера остальных столбцов ($r+s=n$). Переменные $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ будем называть главными, а переменные $x_{l_1}, \ldots, x_{l_s}$ — свободными переменными. Покажите, что для любого набора скаляров из поля $F$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ существует единственное решение системы (1), при котором $x_{l_1} = \lambda_1, \ldots, x_{l_s} = \lambda_s$.

Если главные переменные оставить в левой части равенства, а свободные перенести в правую, то полученная система формул (3) называется общим решением системы (1):

$$\left\{\begin{array}{l} x_{k_1} = \beta_{11} x_{l_1} + \ldots + \beta_{1s} x_{l_s}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k_r} = \beta_{r1} x_{l_1} + \ldots + \beta_{rs} x_{l_s}. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Метод последовательного исключения переменных (метод Гаусса) состоит в том, что с помощью элементарных преобразований данной системы, т. е. умножения одного из уравнений системы на ненулевой скаляр, прибавления к одному уравнению другого, умноженного на скаляр, вычеркивания уравнений вида $0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$, мы получаем эквивалентную систему линейных уравнений, основная матрица которой имеет приведенный ступенчатый вид. Перенос в правую часть свободных переменных дает, наконец, общее решение исходной системы.

**5.3.5.** Покажите, что при решении системы (1) описанным выше методом система (1) однозначно определяет общее решение (3), т. е. числа $k_i$, $l_j$ и скаляры $\beta_{ij}$ не зависят от способа приведения основной матрицы системы (1) к приведенному ступенчатому виду.

**5.3.6.** Пусть $\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{s1} & \ldots & \lambda_{ss} \end{pmatrix}$ — произвольная ($s \times s$)-матрица ранга $s$. Полагаем $x_{l_1} = \lambda_{i1}, \ldots, x_{l_s} = \lambda_{is}$, затем по формулам (3), которые являются общим решением системы (1), вычисляем значения главных переменных и получаем решение системы (1) $a_i$. Покажите, что $a_1, \ldots, a_s$ — фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений (1).

**5.3.7.** Является ли соответствие между фундаментальными системами решений и $(s\times s)$-матрицами ранга $s$, построенное в предыдущем упражнении, взаимно однозначным?

**5.3.8.** Покажите, что уравнение $\beta_1x_1+\ldots+\beta_nx_n=0$ является следствием однородной системы линейных уравнений $\alpha_{i1}x_1+\ldots+\alpha_{in}x_n=0$, $i=1, \ldots, m$, т. е. всякое решение системы служит решением данного уравнения тогда и только тогда, когда это уравнение есть линейная комбинация уравнений данной системы.

**5.3.9.** Найдите общее решение и какую-либо фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений над полем рациональных чисел:

а) $\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+4x_4&=0,\\ x_1-2x_2-x_3+2x_4&=0,\\ 2x_1-4x_2+x_3+7x_4&=0,\\ 6x_1-12x_2-3x_3+15x_4&=0;\end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1-x_2\qquad\qquad&=0,\\ x_1+x_2-2x_3\qquad&=0,\\ x_1-x_2+x_3-x_4&=0;\end{aligned}$

в) $\begin{aligned} 3x_1-6x_2-x_3+5x_4&=0,\\ 2x_1-4x_2-3x_3+3x_4&=0,\\ x_1-2x_2-3x_3\qquad&=0;\end{aligned}$ г) $\begin{aligned} 3x_1+x_2-4x_3\qquad&=0,\\ 4x_1-2x_2+x_3-3x_4&=0,\\ 2x_1-2x_2+x_3-x_4&=0;\end{aligned}$

д) $\begin{aligned} x_1-2x_2-4x_3-x_4&=0,\\ 2x_1-4x_2-7x_3-x_4&=0;\end{aligned}$ е) $\begin{aligned} x_1-3x_2+5x_3-3x_4&=0,\\ 7x_1-x_2-3x_3-3x_4&=0,\\ 5x_1-x_2-3x_3-x_4&=0.\end{aligned}$

**5.3.10.** Какие из систем уравнений в предыдущем упражнении эквивалентны, т. е. имеют одинаковые множества решений?

**5.3.11.** Найдите общее решение и какую-либо фундаментальную систему решений однородного линейного уравнения от четырех переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ над полем комплексных чисел:

а) $x_1+x_2+x_3+x_4=0$; б) $x_1+x_2=0$;
в) $ix_1+(-1+i)x_4=0$; г) $x_3+x_4=0$;
д) $(1+i)x_2+(1-i)x_3=0$; е) $x_2-ix_3=0$.

**5.3.12.** Найдите общее решение и какую-либо фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений над полем комплексных чисел:

а) $\begin{aligned} -2x_2+x_3+x_4&=0,\\ x_2-2x_3+x_4&=0,\\ -3x_1+x_2+x_3+x_4&=0;\end{aligned}$

б) $\begin{aligned} -x_1+x_2+x_3+x_4&=0,\\ -2x_1+2x_2+x_3-2x_4&=0,\\ 7x_3+8x_4&=0;\end{aligned}$

в) $(-1-i)x_1+x_2+x_3+x_4=0,$
$ix_2-ix_3=0,$
$(-1-i)x_1+x_3+x_4=0;$

г) $x_1+2x_2-3x_3+3x_4=0,$
$3x_1+2x_2-x_3+x_4=0,$
$x_1+x_2-2x_3+2x_4=0;$

д) $x_1+ix_2+x_3+x_4=0,$
$x_1-x_2+ix_3+2x_4=0,$
$(1-i)x_1+(1+i)x_2+(1-i)x_3=0.$

**5.3.13.** Покажите, что если однородная система линейных уравнений имеет только нулевое решение над полем рациональных чисел, то она имеет только нулевое решение над любым числовым полем.

**5.3.14.** Так как любое числовое поле $F$ содержит поле рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$, то арифметическое $n$-мерное векторное пространство $\boldsymbol{Q}^n$ естественно вложено в $F^n$. Покажите, что:

а) система векторов $a_1, \ldots, a_m \in \boldsymbol{Q}^n$ линейно независима тогда и только тогда, когда эта система линейно независима в $F^n$;

б) ранг системы векторов $a_1, \ldots, a_m \in \boldsymbol{Q}^n$ в пространстве $\boldsymbol{Q}^n$ такой же, как и в пространстве $F^n$;

в) любой базис пространства $\boldsymbol{Q}^n$ является также базисом в $F^n$.

**5.3.15.** Пусть дана однородная система линейных уравнений с рациональными коэффициентами, имеющая ненулевые решения. Покажите, что любая фундаментальная система решений над полем рациональных чисел является фундаментальной системой решений над любым числовым полем, в частности над полем комплексных чисел.

**5.3.16.** Покажите, что однородная система линейных уравнений с рациональными, в частности целыми, коэффициентами, имеющая ненулевые решения, обладает целочисленной фундаментальной системой решений.

**5.3.17.** Покажите, что если ранг основной матрицы однородной системы линейных уравнений на единицу меньше числа переменных, то любые два решения этой системы пропорциональны.

**5.3.18.** Покажите, что в любом решении однородной системы линейных уравнений $k$-е переменное равно нулю тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы уменьшается на единицу при вычеркивании $k$-го столбца.

**5.3.19.** Различным способом выбирая множества свободных переменных, получите различные общие решения данных систем:

а) $x_1+2x_2 \qquad +5x_4 \qquad +8x_6=0,$
$3x_2+x_3+6x_4 \qquad +9x_6=0,$
$4x_2 \qquad +7x_4+x_5+x_6=0;$

б) $x_1-2x_2-4x_3-x_4=0,$
$2x_1-4x_2-7x_3-x_4=0.$

**5.3.20.** Всеми возможными способами разделите множество переменных на главные и свободные и выразите главные переменные через свободные:

а) $x_1+x_2+x_3+x_4=0;$ б) $x_1+x_2-2x_3-2x_4=0,$
$x_2 \qquad -2x_4=0,$
$2x_1-x_2-4x_3+2x_4=0.$

**5.3.21.** Решите следующие системы линейных уравнений над полем рациональных чисел:

а) $2x_1+x_2-3x_3-5x_4=0,$
$x_1+2x_2+3x_3-4x_4=0,$
$-x_1+2x_2+9x_3 \qquad =0;$

б) $3x_1-x_2-3x_3+6x_4=0,$
$6x_1-2x_2-3x_3+8x_4=0,$
$6x_1-2x_2+3x_3 \qquad =0;$

в) $x_1+5x_2-x_3-x_4=0,$
$x_1+5x_2-2x_3+4x_4=0.$
$x_1+5x_2+x_3-11x_4=0;$

г) $-10x_1+5x_2+17x_3+11x_4=0,$
$5x_1-5x_2-8x_3-18x_4=0,$
$5x_1+5x_2-10x_3+32x_4=0;$

д) $35x_1+x_2-7x_3-40x_4=0,$
$35x_1-x_2-7x_3+30x_4=0;$

е) $7x_1+7x_2+7x_3+7x_4=0,$
$35x_1+x_2-7x_3-40x_4=0,$
$35x_1-x_2-7x_3+30x_4=0.$

**5.3.22.** В упражнении 5.3.21 системы а) и б) решите над полем вычетов по модулю два.

**5.3.23.** В упражнении 5.3.21 системы а), б), в) решите над полем вычетов по модулю три.

**5.3.24.** В упражнении 5.3.21 системы в), г), д) решите над полем вычетов по модулю пять.

**5.3.25.** В упражнении 5.3.21 системы д) и е) решите над полем вычетов по модулю семь.

**5.3.26.** Пусть имеются две системы векторов пространства $F^n$:

$$a_1=(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}), \qquad b_1=(\beta_{11}, \ldots, \beta_{1n}),$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$a_m=(\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn}), \qquad b_k=(\beta_{k1}, \ldots, \beta_{kn}).$$

Предположим, что система $b_1, \ldots, b_k$ является фундаментальной системой решений следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n=0,$$
$$\ldots$$
$$\alpha_{m1}x_1+\ldots+\alpha_{mn}x_n=0.$$

Покажите, что линейная оболочка первой системы векторов $L(a_1, \ldots, a_m)$ совпадает с множеством решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \beta_{11}x_1+\ldots+\beta_{1n}x_n&=0,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\\ \beta_{k1}x_1+\ldots+\beta_{kn}x_n&=0. \end{aligned}$$

**5.3.27.** Задайте подпространство $L(a_1, a_2, a_3)$ в $\boldsymbol{Q}^4$ однородной системой линейных уравнений:

а) $a_1=(2, 1, -3, -5)$, $a_2=(1, 2, 3, -4)$, $a_3=(-1, 2, 9, 0)$;

б) $a_1=(3, -1, -3, 6)$, $a_2=(6, -2, -3, 8)$, $a_3=(6, -2, 3, 0)$;

в) $a_1=(1, 5, -1, -1)$, $a_2=(1, 5, -2, 4)$, $a_3=(1, 5, 1, -11)$;

г) $a_1=(-10, 5, 17, 11)$, $a_2=(5, -5, -8, -18)$, $a_3=(5, 5, -10, 32)$;

д) $a_1=(35, 1, -7, -40)$, $a_2=(35, -1, -7, 30)$, $a_3=(70, 0, -14, -10)$;

е) $a_1=(7, 7, 7, 7)$, $a_2=(35, 1, -7, -40)$, $a_3=(35, -1, -7, 30)$.

**5.3.28.** Задайте одномерное подпространство $L(a)$ в $\boldsymbol{C}^4$ однородной системой линейных уравнений:

а) $a=(1, 1, 1, 1)$; б) $a=(1, 1, 0, 0)$;
в) $a=(i, 0, 0, -1+i)$; г) $a=(0, 0, 1, 1)$;
д) $a=(0, 1, -i, 0)$.

**5.3.29.** Выполните упражнение 5.3.27:

а) над полем вычетов по модулю два — а), б);
б) над полем вычетов по модулю три — а), б);
в) над полем вычетов по модулю пять — в), г), д);
г) над полем вычетов по модулю семь — г), д).

**5.3.30.** Найдите базис пересечения $L(a_1, a_2, a_3)\cap$ $\cap L(b_1, b_2, b_3)$ подпространств четырехмерного арифметического векторного пространства над полем рациональных чисел:

а) $a_1=(0, -2, 1, 1)$, $b_1=(2, 1, -3, -5)$,
$a_2=(0, 1, -2, 1)$, $b_2=(1, 2, 3, -4)$,
$a_3=(-3, 1, 1, 1)$, $b_3=(-1, 2, 9, 0)$;

б) $a_1=(-1, 1, 1, 1)$, $b_1=(3, -1, -3, 6)$,
$a_2=(-2, 2, 1, -2)$, $b_2=(6, -2, -3, 8)$,
$a_3=(0, 0, 7, 8)$, $b_3=(6, -2, 3, 0)$;

в) $a_1=(1, 2, -3, 3)$, $b_1=(1, 5, -1, -1)$,
$a_2=(3, 2, -1, 1)$, $b_2=(1, 5, -2, 4)$,
$a_3=(1, 1, -2, 2)$, $b_3=(1, 5, 1, -11)$;

г) $a_1=(0, -2, 1, 1)$, $b_1=(-1, 1, 1, 1)$,
$a_2=(0, 1, -2, 1)$, $b_2=(-2, 2, 1, -2)$,
$a_3=(-3, 1, 1, 1)$, $b_3=(0, 0, 7, 8)$;

д) $a_1=(0, -2, 1, 1)$, $b_1=(1, 2, -3, 3)$,
$a_2=(0, 1, -2, 1)$, $b_2=(3, 2, -1, 1)$,
$a_3=(-3, 1, 1, 1)$, $b_3=(1, 1, -2, 2)$;

е) $a_1=(-1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $b_1=(1,\ 2,\ -3,\ 3)$,
$a_2=(-2,\ 2,\ 1,\ -2)$, $b_2=(3,\ 2,\ -1,\ 1)$,
$a_3=(0,\ 0,\ 7,\ 8)$, $b_3=(1,\ 1,\ -2,\ 2)$.

**5.3.31.** Сколько решений имеет однородная система линейных уравнений ранга $r$ с $n$ переменными над конечным полём из $q$ элементов?

**5.3.32.** Сколько различных фундаментальных систем решений имеет однородная система линейных уравнений ранга $r$ с $n$ переменными над конечным полем из $q$ элементов (различающиеся порядком фундаментальные системы считаются различными)?

**5.3.33.** Исследуйте зависимость решений от параметров в следующих системах линейных уравнений:

а) $\alpha x+\beta y=0,\quad \gamma x+\delta y=0;$

б) $x+\alpha y+\beta z=0,\quad y+\gamma z=0,\quad z=0;$

в) $x+y+z=0,\quad \alpha x+\beta y+\gamma z=0,\quad \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2z=0;$

г) $x+\alpha y+\alpha^2z=0,\quad x+\beta y+\beta^2z=0,\quad x+\gamma y+\gamma^2z=0;$

д) $\alpha x+y=0,\quad x+\alpha y+z=0,\quad y+\alpha z=0;$

е) $x_1+\alpha x_2+2x_3+3x_4=0,\quad x_1+x_2-2x_3-2x_4=0,\quad 3x_1+x_2+2x_3+4x_4=0.$

## § 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЛИНЕЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Рассмотрим систему линейных уравнений с коэффициентами из поля $F$:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n&=\beta_1,\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\\ \alpha_{m1}x_1+\ldots+\alpha_{mn}x_n&=\beta_m.\end{aligned}\qquad (1)$$

Матрица $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}$ называется основной матрицей системы (1).

Матрица $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m\end{pmatrix}$ называется расширенной матрицей системы (1). $A^1=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \dots\\ \alpha_{m1}\end{pmatrix}$, ..., $A^n=\begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\ \dots\\ \alpha_{mn}\end{pmatrix}$ — векторы-столбцы основной матрицы системы (1), $b=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \dots\\ \beta_m\end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Решением системы (1) называется $n$-мерный арифметический вектор $(x_1, ..., x_n)$, координаты которого удовлетворяют всем уравнениям системы (1).

Система линейных уравнений (1) равносильна уравнению $x_1A^1+...+x_nA^n=b$, которое называется векторной формой системы (1).

**5.4.1.** Система линейных уравнений (1) имеет решение тогда и только тогда, когда $b \in L(A^1, ..., A^n)$. Докажите.

**5.4.2** (теорема Кронекера — Капелли). Система (1) совместна, т. е. имеет хотя бы одно решение, тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы. Докажите.

**5.4.3.** Система (1) с фиксированной основной матрицей $A$ совместна при любом векторе-столбце свободных членов тогда и только тогда, когда ранг системы векторов-столбцов $A^1, ..., A^n$ равен $m$. Докажите.

**5.4.4.** Если система (1) имеет единственное решение, то $n \leqslant m$ и система векторов-столбцов $A^1, ..., A^n$ линейно независима. Докажите.

**5.4.5.** Докажите, что следующие условия равносильны:

а) система линейных уравнений (1) с фиксированной основной матрицей $A$ имеет единственное решение при любом векторе-столбце свободных членов;

б) $m=n$, и система векторов-столбцов основной матрицы $A^1, ..., A^n$ линейно независима;

в) система векторов-столбцов $A^1, ..., A^n$ составляет базис арифметического векторного пространства $F^m$.

**5.4.6.** Систему линейных уравнений (1) с помощью элементарных преобразований, т. е.:

1) умножения какого-либо уравнения на ненулевой скаляр;

2) прибавления к какому-либо уравнению другого, умноженного на скаляр;

3) вычеркивания уравнений вида $0x_1+...+0x_n=0$, приведем к некоторой системе линейных уравнений, расширенная матрица которой имеет приведенный ступенчатый вид.

Докажите, что:

а) полученная система равносильна системе (1), т. е. их множества решений совпадают;

б) система (1) несовместна тогда и только тогда, когда столбец свободных членов в полученной системе является ведущим;

в) полученная система однозначно определяется системой (1), т. е. не зависит от способа приведения к приведенному ступенчатому виду.

Если в полученной приведенной ступенчатой системе оставить в левой части главные переменные, т. е. те, которые соответствуют ведущим столбцам, а свободные, т. е. остальные, перенести в правую часть, то мы получим так называемое общее решение системы линейных уравнений (1), конечно, если данная система совместна:

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= \beta_{11}x_{l_1}+\ldots+\beta_{1s}x_{l_s}+\gamma_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k_r} &= \beta_{r1}x_{l_1}+\ldots+\beta_{rs}x_{l_s}+\gamma_r. \end{aligned} \qquad (2)$$

**5.4.7.** Покажите, что если система линейных уравнений (1) совместна и имеет общее решение (2), то:

а) число $r$ равно рангу основной и рангу расширенной матрицы системы (1);

б) $\gamma_1=\ldots=\gamma_r=0$ тогда и только тогда, когда система однородная;

в) для любого набора скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ существует единственное решение системы (1), при котором $x_{l_1}=\lambda_1, \ldots, x_{l_s}=\lambda_s$.

**5.4.8.** Сколько решений имеет совместная система линейных уравнений, ранг основной матрицы которой равен $r$, с числом переменных $n$ над конечным полем, содержащим $q$ элементов?

**5.4.9.** Решите следующие системы линейных уравнений:

а) $\begin{aligned} x_1-x_2+x_3&=2, \\ x_1+x_2-x_3&=0, \\ x_1+2x_2-x_3&=2; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=6, \\ x_1-x_2-x_3&=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3&=1; \end{aligned}$

в) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=6, \\ 2x_1-3x_2+x_3&=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=7; \end{aligned}$ г) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=6, \\ 2x_1-3x_2+x_3&=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5. \end{aligned}$

**5.4.10.** Найдите общее решение и одно частное решение для следующих систем линейных уравнений:

а) над полем вычетов по модулю два:

1) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=1, \\ x_1+x_3&=1, \\ x_2+x_4&=0; \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=1, \\ x_1+x_3&=1, \\ x_2+x_4&=1; \end{aligned}$

б) над полем вычетов по модулю три:

1) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1,\\ 2x_1+x_2+x_3&=1,\\ 2x_2+2x_3&=1;\end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=1,\\ 2x_1+x_2+2x_3&=2,\\ 2x_1+2x_2+x_3&=0;\end{aligned}$

в) над полем вычетов по модулю пять:

1) $\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3&=1,\\ x_1+3x_2+4x_3&=2,\\ x_1+4x_2+x_3&=3;\end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=2,\\ 2x_1+3x_2+4x_3&=1,\\ 3x_1+2x_3&=0.\end{aligned}$

**5.4.11.** Покажите, что если система линейных уравнений с $n$ переменными над полем $F$ совместна, то множество ее решений $M$ является линейным многообразием, т. е. если фиксировать какое-либо частное решение $a\in M$, то множество векторов вида $c-a$, где $c$ пробегает множество $M$, образует подпространство векторного пространства $F^n$.

**5.4.12.** Покажите, что линейное многообразие $M$ решений системы линейных уравнений имеет вид:

а) $M=a+L$, где $a$ — какое-либо частное решение, $L$ — подпространство решений ассоциированной однородной системы, т. е. однородной системы линейных уравнений, основная матрица которой совпадает с основной матрицей исходной системы линейных уравнений:

б) $M=a+L(a_1, \ldots, a_s)$, где $a$ — какое-либо частное решение системы, $a_1, \ldots, a_s$ — фундаментальная система решений ассоциированной однородной системы линейных уравнений.

**5.4.13.** Задайте системой линейных уравнений в $\boldsymbol{Q}^4$ линейное многообразие $a+L$, где $L$ — пространство решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-x_4&=0,\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4&=0:\end{aligned}$$

а) $a=(1, 2, 3, 4)$; б) $a=(4, 3, 2, 1)$;
в) $a=(7, 0, -2, -1)$; г) $a=(10, 1, -3, -4)$.

**5.4.14.** Задайте линейное многообразие $a+L(a_1, a_2, a_3)$ в $\boldsymbol{Q}^4$ системой линейных уравнений, $a=(1, 2, 3, 4)$:

а) $a_1=(1, 1, 1, 1)$, $a_2=(1, 1, 0, 0)$, $a_3=(0, 1, 1, 0)$;
б) $a_1=(1, -1, 2, 3)$, $a_2=(1, 1, 0, 1)$, $a_3=(1, -1, 3, 0)$;
в) $a_1=(1, 1, 2, 2)$, $a_2=(0, 1, 1, 2)$, $a_3=(-1, -1, -1, 1)$.

**5.4.15.** Пусть $L$ — подпространство размерности $r$ $n$-мерного векторного пространства $V$ над полем $F$. Обозначим через $V/L$ множество всех линейных многообразий с направлением $L$. Для любых $M$, $N \in V/L$ и $\alpha \in F$ определим:

$$\begin{aligned} M+N &= \{x+y \mid x \in M,\ y \in N\}, \\ \alpha M &= \{\alpha x \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

Докажите, что относительно так определенных операций $V/L$ является векторным пространством над полем $F$. Найдите его размерность.

## § 5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

**5.5.1.** Решите следующие системы линейных уравнений над полем рациональных чисел:

а) $-7x_1+5x_2=3,$
$\quad 11x_1-8x_2=-5;$

б) $7x_1-3x_2=1,$
$\quad 3x_1+x_2=5;$

в) $3x_1-4x_2=2,$
$\quad -4x_1+5x_2=-3;$

г) $10x_1+9x_2=29,$
$\quad 11x_1+10x_2=32;$

д) $4x_1-2x_2=2,$
$\quad 6x_1-3x_2=3;$

е) $6x_1+2x_2=10,$
$\quad 9x_1+3x_2=10.$

**5.5.2.** Решите следующие системы линейных уравнений над полем рациональных чисел:

а) $$\begin{aligned} x_1+2x_2-4x_3-x_4&=-1,\\ x_1+x_2-x_3-2x_4&=0,\\ 2x_1+x_2+x_3-5x_4&=1; \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} x_1+2x_2-5x_3+4x_4&=0,\\ x_1+x_2-3x_3+3x_4&=1,\\ 2x_1+x_2-4x_3+5x_4&=3; \end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3-7x_4&=0,\\ x_1+2x_2+x_3-5x_4&=-1,\\ 2x_1+4x_2+x_3-8x_4&=-3; \end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3+2x_4&=5,\\ x_1-x_2+x_3&=3,\\ 2x_1-2x_2+x_3-2x_4&=4; \end{aligned}$$

д) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2+7x_3-7x_4&=3,\\ -x_1+2x_2-8x_3+5x_4&=-3,\\ x_1-x_2+5x_3-4x_4&=2; \end{aligned}$$

е) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_4&=5,\\ -x_1+2x_2-3x_3&=-4,\\ x_1-x_2+x_3+x_4&=3. \end{aligned}$$

**5.5.3.** Решите следующие системы линейных уравнений над полем рациональных чисел:

а) $$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=0,\\ x_1-x_2+x_3&=2,\\ -x_1+x_2+x_3&=4; \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2-x_3&=3,\\ -x_1+2x_2-x_3&=-3,\\ -x_1-x_2+3x_3&=2; \end{aligned}$$

в) $\begin{aligned} 2x_1-3x_2+3x_3&=-2, \\ 2x_1-x_2+x_3&=2, \\ x_1+x_2+x_3&=6; \end{aligned}$ г) $\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=0, \\ x_1-x_2+x_3&=4, \\ -x_1+x_2+x_3&=2; \end{aligned}$

д) $\begin{aligned} 2x_1-x_2-x_3&=-3, \\ -x_1+2x_2-x_3&=3, \\ -x_1-x_2+3x_3&=2; \end{aligned}$ е) $\begin{aligned} 2x_1-3x_2+3x_3&=3, \\ 2x_1-x_2+x_3&=5, \\ x_1+x_2+x_3&=6. \end{aligned}$

**5.5.4.** Решите следующие системы линейных уравнений над полем рациональных чисел:

а) $\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3-x_4&=1, \\ x_1+3x_2-x_3-x_4&=0, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4&=1, \\ x_1+x_2-x_3+x_4&=2; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3-x_4&=1, \\ x_1+3x_2-x_3-x_4&=0, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4&=-1, \\ x_1+x_2-x_3+x_4&=2; \end{aligned}$

в) $\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3-x_4&=1, \\ x_1+3x_2-x_3-x_4&=0, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4&=0, \\ x_1+x_2-x_3+x_4&=2; \end{aligned}$ г) $\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3-2x_4&=0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4&=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4&=6, \\ 3x_1-x_2-3x_3-x_4&=0; \end{aligned}$

д) $\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3-2x_4&=0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4&=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4&=6, \\ 3x_1+x_2\qquad -2x_4&=6; \end{aligned}$ е) $\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3-2x_4&=0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4&=0, \\ 3x_1-x_2-3x_3-x_4&=0, \\ 5x_1-x_2-4x_3-4x_4&=1. \end{aligned}$

**5.5.5.** Исследуйте систему линейных уравнений над полем:

$$\begin{aligned} ax+by&=c, \\ a'x+b'y&=c'. \end{aligned}$$

**5.5.6.** Решите систему в положительных действительных числах:

$$\frac{x_1^3x_3}{x_2x_4}=2,$$
$$\frac{x_1x_2^3}{x_3x_4}=1,$$
$$\frac{x_1^3x_3^3}{x_2^2x_4^2}=2,$$
$$\frac{x_1x_2x_4}{x_3}=4.$$

**5.5.7.** Решите и исследуйте системы над числовым полем:

а) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3\qquad &=a, \\ x_1+x_2\qquad +x_4&=b, \\ x_1\qquad +x_3+x_4&=c, \\ x_2+x_3+x_4&=d; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\qquad &=a, \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\qquad +\frac{1}{x_4}&=b, \end{aligned}$

в) $\begin{aligned} \frac{1}{x_1}\qquad +\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}&=c, \\ \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}&=d. \end{aligned}$

**5.5.8.** Решите системы над полем действительных чисел:

а) $$\begin{aligned} bx+ay \phantom{+az} &= c,\\ cx \phantom{+ay} + az &= b,\\ cy+bz &= a, \quad abc\neq 0; \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} (b+c)(y+z)-ax &= b-c,\\ (c+a)(x+z)-by &= c-a,\\ (a+b)(x+y)-cz &= a-b, \quad a+b+c\neq 0; \end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n &= 1,\\ x_1 \phantom{+x_2} +x_3+\ldots+x_n &= 2,\\ x_1+x_2 \phantom{+x_3} +\ldots+x_n &= 3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-1} \phantom{+x_n} &= n; \end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned} x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3+\alpha^3 &= 0,\\ x_1+\beta x_2+\beta^2x_3+\beta^3 &= 0,\\ x_1+\gamma x_2+\gamma^2x_3+\gamma^3 &= 0, \end{aligned}$$ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ попарно различны;

д) $$\begin{aligned} x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3+\alpha^3x_4+\alpha^4 &= 0,\\ x_1+\beta x_2+\beta^2x_3+\beta^3x_4+\beta^4 &= 0,\\ x_1+\gamma x_2+\gamma^2x_3+\gamma^3x_4+\gamma^4 &= 0,\\ x_1+\delta x_2+\delta^2x_3+\delta^3x_4+\delta^4 &= 0, \end{aligned}$$ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ попарно различны;

е) $$\begin{aligned} x\sin\alpha+y\sin 2\alpha+z\sin 3\alpha &= \sin 4\alpha,\\ x\sin\beta+y\sin 2\beta+z\sin 3\beta &= \sin 4\beta,\\ x\sin\gamma+y\sin 2\gamma+z\sin 3\gamma &= \sin 4\gamma, \quad \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\neq 0. \end{aligned}$$

# ГЛАВА 6. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

## § 1. ПРИМЕРЫ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

**6.1.1.** Проверьте, выполняются ли аксиомы векторного пространства для следующих алгебр:

а) основное множество состоит из одного элемента (символа 0), поле скаляров $F$ произвольное. Главные операции определены следующим образом: $0+0=0$,

$$\lambda 0=0;$$

б) арифметическое $n$-мерное векторное пространство. Пусть $F$ — произвольное поле. На множестве $F^n=\{(\alpha_1, ..., \alpha_n) | \alpha_1, ..., \alpha_n \in F\}$ определим операции:

1) сложение:

$$(\alpha_1, ..., \alpha_n)+(\beta_1, ..., \beta_n)=(\alpha_1+\beta_1, ..., \alpha_n+\beta_n);$$

2) умножение на скаляры поля $F$:

$$\lambda(\alpha_1, ..., \alpha_n)=(\lambda\alpha_1, ..., \lambda\alpha_n);$$

в) основное множество и сложение определены, как в предыдущем упражнении, умножение на скаляры определено по-другому:

$$\lambda(\alpha_1, ..., \alpha_n)=(\lambda\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n);$$

г) множество всех векторов некоторой плоскости с операциями сложения и умножения на действительные числа. Сложение геометрических векторов и умножение векторов на числа определены обычным образом;

д) множество всех векторов плоскости с операциями сложения и умножения на рациональные числа;

е) множество всех векторов пространства с операциями сложения и умножения на действительные числа;

ж) множество всех векторов пространства с операциями сложения и умножения на числа из какого-либо фиксированного подполя действительных чисел;

з) множество всех векторов плоскости с операциями сложения и умножения на целые числа;

и) множество всех векторов плоскости с бинарной операцией вычитания и операциями умножения на действительные числа.

**6.1.2.** Операции сложения функций и умножения функции на число определены обычным образом, т. е. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$. Являются ли векторными пространствами:

а) множество $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{R}}$ всех функций из множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$ в множество комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ над полем комплексных чисел;

б) то же самое множество над полем действительных чисел, над полем рациональных чисел;

в) множество $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{C}}$ всех функций из $\boldsymbol{C}$ в $\boldsymbol{R}$ над полем действительных чисел;

г) то же самое множество над полем рациональных чисел, над полем комплексных чисел;

д) множество непрерывных действительнозначных функций на отрезке $[0, 1]$ над полем действительных чисел;

е) множество $F^S$ всех функций из некоторого произвольного множества $S$ в основное множество поля $F$ над данным полем $F$;

ж) множество $F^\infty$ бесконечных последовательностей элементов поля $F$ с покомпонентными операциями сложения и умножения на скаляры поля $F$: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)+(\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)=(\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_n+\beta_n, \ldots)$, $\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)=(\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n, \ldots)$?

**6.1.3.** Установите изоморфизм между векторным пространством $F^\infty$ (упр. 6.1.2, ж) и пространством функций из множества натуральных чисел в основное множество поля $F$ (упр. 6.1.2, е).

**6.1.4.** Установите изоморфизм между арифметическим векторным пространством $F^n$ и пространством функций из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в поле $F$.

**6.1.5.** Пусть $P$ — подполе поля $F$. Покажите, что $F$ является векторным пространством над полем $P$, если сложение векторов и умножение вектора на скаляр суть соответственно сложение и умножение внутри поля $F$.

Примечание. Важные частные случаи:

1. Поле комплексных чисел является векторным пространством над полем действительных чисел, а также над полем рациональных чисел.

2. Поле действительных чисел является векторным пространством над полем рациональных чисел.

3. Любое числовое поле является векторным пространством над полем рациональных чисел.

4. Любое поле является векторным пространством над самим собой.

**6.1.6.** На множестве положительных действительных чисел $R^+$ определим следующие операции:

1. «Сложение»: $a \oplus b = ab$ (т. е. обычное умножение).
2. «Умножение» на рациональные числа: $\alpha a = a^\alpha$ (т. е. обычное возведение в степень).

Проверьте выполнение аксиом векторного пространства над полем рациональных чисел.

**6.1.7.** Установите изоморфизм векторного пространства, введенного в предыдущем упражнении, и пространства действительных чисел над полем рациональных чисел.

**6.1.8.** Множество всех многочленов с коэффициентами из поля $F$ образует векторное пространство над полем $F$ относительно операций сложения многочленов и умножения многочленов на скаляры поля $F$. Докажите.

**6.1.9.** На множестве матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ с элементами из некоторого поля $F$ определим операции:

1. Сложение: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\alpha' & \beta+\beta' \\ \gamma+\gamma' & \delta+\delta' \end{pmatrix}$.
2. Умножение на скаляры: $\lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{pmatrix}$.

а) Покажите, что данная алгебра является векторным пространством над полем $F$.

б) Покажите, что данное векторное пространство изоморфно $F^4$ — четырехмерному арифметическому векторному пространству над полем $F$.

В упражнениях 6.1.10—6.1.15 не нужно проверять выполнение аксиом векторного пространства. Достаточно показать, что данное множество замкнуто относительно главных операций, поэтому является подпространством некоторого большего пространства, а следовательно, и само является векторным пространством над тем же самым полем.

**6.1.10.** Является ли множество всех арифметических $n$-мерных векторов $(x_1, \ldots, x_n)$ в $F^n$, удовлетворяющих данному условию, векторным пространством над полем $F$:

а) $x_1 = 0$;
б) $x_1 = x_n = 0$;
в) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$;
г) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$;
д) $x_1 = 1$;
е) $x_1 \cdot x_n = 0$;
ж) $x_1 - x_2 - \ldots - x_n = 0$;
з) $x_1 + \ldots + x_n = 1$;
и) $x_1 x_n = 1$;
к) $0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$;
л) $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$;
м) $x_1^2 - x_n^2 = 0$?

**6.1.11.** Мы считаем, что начало каждого вектора плоскости (пространства) отнесено в некоторую фиксированную точку (начало координат). Определите, является ли данное множество векторов плоскости (пространства) векторным пространством над полем действительных чисел относительно обычных операций над векторами:

а) множество, состоящее из одного нулевого вектора;

б) множество векторов плоскости, концы которых лежат на прямой, проходящей (не проходящей) через начало координат;

в) множество векторов пространства, концы которых лежат на прямой, проходящей (не проходящей) через начало координат;

г) множество векторов пространства, концы которых лежат на плоскости, проходящей (не проходящей) через начало координат;

д) множество векторов плоскости, концы которых лежат: 1) в первой четверти системы координат; 2) в первой или в третьей четверти.

**6.1.12.** Является ли векторным пространством над полем действительных чисел данное множество функций относительно обычных операций над функциями (упр. 6.1.2):

а) множество дифференцируемых функций;

б) множество дважды дифференцируемых функций;

в) множество дважды дифференцируемых функций $f$, для которых $f''+f=0$;

г) множество непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющих условию: 1) $f(0)=0$; 2) $f(0)=f(1)=0$; 3) $f(0)=0$ или $f(1)=0$; 4) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$?

**6.1.13.** Множество бесконечных последовательностей элементов поля $F$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\alpha_{n-1}+\alpha_n=\alpha_{n+1}$ (см. упр. 6.1.2, ж), $n=2, 3, \ldots$.

**6.1.14.** Является ли векторным пространством над полем рациональных чисел множество чисел вида:

а) $a+bi$, $a$, $b$ — рациональные;

б) $a+b\sqrt{2}$, $a$, $b$ — рациональные;

в) $a+b\sqrt[3]{2}$, $a$, $b$ — рациональные;

г) $a+b\pi$, $a$, $b$ — рациональные;

д) $a+bi$, $a$, $b$ — целые;

е) $a+bi$, $a$, $b$ — действительные неотрицательные?

**6.1.15.** Для каждого из следующих множеств многочленов с действительными коэффициентами проверьте, будет ли это множество векторным пространством над $\boldsymbol{R}$ относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число:

а) множество всех многочленов степени меньшей или равной $n$, пополненное нулевым многочленом (для нулевого многочлена степень не определяется);

б) множество всех многочленов данной степени $n$;

в) множество всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условию: 1) $f(0)=1$; 2) $f(1)=0$; 3) $2f(0)-3f(1)=0$; 4) $f(1)+\ldots+f(k)=0$; 5) $f''(x)=0$.

**6.1.16.** Установите изоморфизм между пространством многочленов с действительными коэффициентами степени меньшей или равной $n$ с арифметическим векторным пространством $\boldsymbol{R}^{n+1}$.

**6.1.17.** а) Покажите, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ с действительными элементами является векторным пространством над полем действительных чисел относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число (см. упр. 6.1.9).

б) Покажите, что это пространство изоморфно арифметическому векторному пространству $\boldsymbol{R}^2$.

**6.1.18.** а) Выпишите все векторы двумерного арифметического пространства над полем вычетов по модулю два.

б) Выпишите все векторы трехмерного арифметического векторного пространства над тем же полем.

в) Выпишите все векторы двумерного векторного арифметического пространства над полем вычетов по модулю три.

г) Сколько векторов содержит $n$-мерное арифметическое векторное пространство над конечным полем $F_q$, состоящим из $q$ элементов?

**6.1.19.** Покажите, что коммутативность сложения вытекает из остальных аксиом векторного пространства.

**6.1.20.** Приведите пример алгебры, в которой выполняются все аксиомы векторного пространства, кроме последней: $1a=a$, для любого вектора $a$.

**6.1.21.** а) Покажите, что в векторном пространстве над полем вычетов по модулю два для любого вектора $a$ $a+a=0$.

б) В векторном пространстве над полем вычетов по модулю три для любого вектора $a$. $a+a+a=0$.

## § 2. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

**6.2.1.** Покажите, что следующие векторные пространства не являются конечномерными:

а) пространство всех геометрических векторов относительно операций сложения и умножения на рациональные числа (см. упр. 6.1.1, г);

б) пространство всех функций из множества действительных чисел в себя над полем действительных чисел (векторные пространства, указанные в упр. 6.1.2, а — г);

в) пространство непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ над полем действительных чисел (см. упр. 6.1.2, д);

г) пространство $F^S$, если $S$ — бесконечное множество, над полем $F$ (см. упр. 6.1.2, е);

д) пространство $F^\infty$ над полем $F$ (см. упр. 6.1.2, ж);

е) пространство комплексных (действительных) чисел над полем рациональных чисел (см. упр. 6.1.5);

ж) пространство всех многочленов с коэффициентами из поля над данным полем.

**6.2.2.** Для следующих векторных пространств найдите какой-либо базис и тем самым определите размерность:

а) $n$-мерное арифметическое пространство над произвольным полем (см. упр. 6.1.1, б);

б) пространство геометрических векторов над полем действительных чисел (см. упр. 6.1.1, е);

в) пространство $F^S$, где $S$ — конечное множество, над данным полем $F$ (см. упр. 6.1.2, е);

г) пространство комплексных чисел над полем действительных чисел (см. упр. 6.1.5);

д) поле как векторное пространство над самим собой (см. упр. 6.1.5);

е) пространство матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ с элементами из поля $F$ над полем $F$ (см. упр. 6.1.9);

ж) пространство многочленов, степень которых не превосходит $n$, с коэффициентами из поля $F$ над полем $F$ (см. упр. 6.1.15, а);

з) пространство последовательностей действительных чисел, для которых $\alpha_{n+1}=\alpha_n+\alpha_{n-1}$, $n\geqslant 2$, над полем действительных чисел (см. упр. 6.1.13).

**6.2.3.** Найдите какой-либо базис и определите размерность подпространств арифметического $n$-мерного векторного пространства $F^n$, состоящих из векторов $(x_1, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяют следующему условию (см. упр. 6.1.10):

а) $x_1=0$;
б) $x_1=x_n=0$;
в) $x_1=x_2=x_3=0$;
г) $x_1=x_2+\ldots+x_n$;
д) $x_1=\ldots=x_n$;
е) $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$;
ж) $0x_1+\ldots+0x_n=0$;
з) $\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n=0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n\in F$;
и) $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

**6.2.4.** Определите размерность векторного пространства многочленов с коэффициентами из поля $F$, степень которых не превосходит $n$ и которые дополнительно удовлетворяют условию (см. упр. 6.1.15, в):

а) $f(0)=0$; г) $2f(0)=3f(1)$;
б) $f(1)=0$; д) $f(1)+\ldots+f(k)=0$;
в) $f(0)=f(1)=0$; е) $f''(x)=0$;
ж) одновременно выполняются условия е) и г).

**6.2.5.** В каждом из пространств, указанных в упражнении 6.1.14, а — г:

а) найдите какой-либо базис;
б) найдите по два различных базиса;
в) покажите, что число различных базисов в каждом из этих пространств бесконечно.

**6.2.6.** Покажите, что любая линейно независимая система из $n$ векторов составляет базис $n$-мерного векторного пространства.

**6.2.7.** Какие из следующих систем векторов составляют базис пространства $C^3$:

а) $(1,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 0,\ 1)$; б) $(1,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 1)$; в) $(1,\ 2,\ 3)$, $(3,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 1)$;

г) $(1,\ 1,\ 1)$, $(-1,\ i,\ -i)$, $(1,\ -1,\ -1)$; д) $(1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2)$, $(1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon)$, $(1,\ 1,\ 1)$; е) $(1,\ 1+i,\ 1-i)$, $(i,\ -1+i,\ 1+i)$, $(1+i,\ 2i,\ 2)$,

где $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$?

**6.2.8.** При каких числах $\lambda$ система векторов $(\lambda,\ 1,\ 0)$, $(1,\ \lambda,\ 1)$, $(0,\ 1,\ \lambda)$ образует базис:

а) пространства $Q^3$; б) пространства $R^3$?

**6.2.9.** При каких значениях $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ данная система векторов образует базис арифметического векторного пространства над полем действительных чисел:

а) $(1,\ \alpha,\ \beta)$, $(0,\ 1,\ \gamma)$, $(0,\ 0,\ 1)$; б) $(\alpha,\ \beta)$, $(\gamma,\ \delta)$; в) $(1,\ 1,\ 1)$, $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, $(\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2)$;

г) $(1,\ \alpha,\ \alpha^2)$, $(1,\ \beta,\ \beta^2)$, $(1,\ \gamma,\ \gamma^2)$; д) $(1,\ 2,\ 3)$, $(3,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 1+\alpha)$?

**6.2.10.** Выпишите все базисы двумерного арифметического пространства над полем вычетов по модулю два.

**6.2.11.** Покажите, что система ненулевых векторов $a_1$, ..., $a_n$ $n$-мерного векторного пространства является базисом тогда и только тогда, когда $a_k \notin L(a_1, ..., a_{k-1})$ для каждого $k=2, 3, ..., n$.

**6.2.12.** Поле $F_q$ состоит из $q$ элементов. Сколько различных базисов содержит $n$-мерное арифметическое векторное пространство над полем $F_q$? Базисы, состоящие из одних и тех же векторов, но различающиеся порядком, в котором они выписаны, считаются различными.

**6.2.13.** Найдите число различных базисов векторного пространства $F^n$:

а) $F=\mathbf{Z}_2$, $n=2, 3, 4, 5$; б) $F=\mathbf{Z}_3$, $n=2, 3, 4$.

## § 3. ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

**6.3.1.** Пусть $M$ — некоторая система векторов пространства $V$ над полем $F$. Покажите, что множество всех линейных комбинаций вида $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n$, где $a_1$, ..., $a_n$ — векторы из $M$, $\lambda_1$, ..., $\lambda_n \in F$, $n \in N$, замкнуто относительно всех главных операций. Полученное подпространство векторного пространства $V$ называется линейной оболочкой системы $M$ и обозначается $L(M)$.

**6.3.2.** Пусть $M$ — произвольное множество векторов пространства $V$, $U$ — подпространство этого пространства. Докажите равносильность следующих утверждений:

а) $U$ порождается множеством $M$, т. е. $U=L(M)$;

б) $U$ — наименьшее подпространство (по включению) пространства $V$, содержащее множество $M$;

в) $U$ совпадает с пересечением всех подпространств пространства $V$, содержащих множество $M$.

**6.3.3.** Покажите, что $L(M)=M$ тогда и только тогда, когда $M$ — подпространство.

**6.3.4.** Покажите, что размерность линейной оболочки системы векторов совпадает с рангом этой системы.

**6.3.5.** Покажите, что если систему арифметических векторов $S$ привести элементарными преобразованиями (см. упр. 4.2.5) к ступенчатому виду (см. упр. 4.2.4), то ненулевые векторы полученной системы составят базис векторного пространства $L(S)$.

**6.3.6.** Пользуясь методом предыдущего упражнения, найдите какой-либо базис и определите размерность векторного пространства $L(a_1, ..., a_n)$ над полем комплексных чисел:

а) $a_1=(1,\ -2,\ 1,\ 4)$,
$a_2=(1,\ -2,\ 1,\ 2)$,
$a_3=(2,\ -4,\ 1,\ 7)$,
$a_4=(6,\ -12,\ -3,\ 15)$;

б) $a_1=(3,\ 1,\ -4,\ 0)$,
$a_2=(4,\ -2,\ 1,\ -3)$,
$a_3=(2,\ -2,\ 1,\ -1)$;

в) $a_1=(3,\ -6,\ -1,\ 5)$,
$a_2=(2,\ -4,\ -3,\ 3)$,
$a_3=(1,\ -2,\ -3,\ 0)$;

г) $a_1=(1,\ -3,\ 5,\ -3)$,
$a_2=(7,\ -1,\ -3,\ -3)$,
$a_3=(5,\ -1,\ -3,\ -1)$,
$a_4=(13,\ -5,\ -1,\ -7)$;

д) $a_1=(-1-i,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$a_2=(0,\ i,\ -i,\ 0)$,
$a_3=(-1-i,\ 0,\ 1,\ 1)$;

е) $a_1=(1,\ i,\ 1,\ 1)$,
$a_2=(1,\ -1,\ i,\ 2)$,
$a_3=(1-i,\ 1+i,\ 1-i,\ 0)$,
$a_4=(-1-i,\ 2,\ -2i,\ -3)$;

ж) $a_1=(1,\ \alpha,\ 2,\ 3)$,
$a_2=(1,\ 1,\ -2,\ -2)$,
$a_3=(3,\ 1,\ 2,\ 4)$, $\alpha\in\boldsymbol{C}$.

**6.3.7.** Опишите линейные оболочки следующих систем векторов в пространстве $\boldsymbol{R}^5$:

а) $(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$,
$(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$,
$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$;

б) $(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$,
$(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$,
$(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$;

в) $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$;

г) $(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$,
$(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)$,
$(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$;

д) $(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$,
$(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)$,
$(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)$,
$(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)$;

е) $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$(0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)$,
$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$.

**6.3.8.** Выпишите все векторы, входящие в линейную оболочку данной системы векторов четырехмерного векторного арифметического пространства над полем вычетов по модулю два:

а) $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$;

б) $(1,\ 0,\ 0,\ 1)$;

в) $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$;

г) $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$,
$(0,\ 0,\ 0,\ 1)$;

д) $(1,\ 0,\ 0,\ 1)$,
$(0,\ 0,\ 0,\ 1)$;

е) $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$(0,\ 0,\ 0,\ 1)$;

ж) $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$,
$(0,\ 0,\ 0,\ 1)$,
$(0,\ 1,\ 1,\ 0)$;

з) $(1,\ 0,\ 0,\ 1)$,
$(0,\ 0,\ 0,\ 1)$,
$(0,\ 1,\ 1,\ 0)$.

и) $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$(0,\ 1,\ 1,\ 1)$,
$(1,\ 0,\ 0,\ 1)$.

**6.3.9.** Две системы векторов называются эквивалентными, если их линейные оболочки совпадают. Покажите, что эквивалентные системы векторов имеют одинаковый ранг.

**6.3.10.** Верно ли обратное, т. е. две системы, имеющие одинаковый ранг, эквивалентны?

**6.3.11.** Укажите эквивалентные системы векторов в упражнении 6.3.8.

**6.3.12.** Какие из следующих систем векторов пространства $\boldsymbol{R}^3$ эквивалентны между собой:

а) $(0, 0, 0)$; б) $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(3, 3, 3)$; в) $(2, 2, 2)$;

г) $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$; д) $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$; е) $(2, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, -3, 2)$;

ж) $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 2)$, $(0, 0, 1)$; з) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$; и) $(1, 2, 1)$, $(3, 2, 3)$, $(1, 1, 1+\varepsilon)$,

где $\varepsilon$ — любое действительное число?

**6.3.13.** Покажите, что если три вектора связаны между собой соотношением $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — ненулевые скаляры основного поля, то системы векторов $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ эквивалентны.

## § 4. СУММА И ПРЯМАЯ СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ

**6.4.1.** Пусть $U$ и $V$ — подпространства некоторого векторного пространства. Покажите, что $U+V=L(U\cup V)$.

**6.4.2.** Покажите, что операция сложения на множестве подпространств данного векторного пространства обладает следующими свойствами:

а) $U+V=V+U$;

б) $U+(V+L)=(U+V)+L$;

в) $U+V=U$ тогда и только тогда, когда $V\subset U$.

**6.4.3.** Покажите, что пересечение любой совокупности подпространств данного векторного пространства само является подпространством этого пространства.

**6.4.4.** Пусть $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s$ — векторы векторного пространства $V$. Покажите, что $L(a_1, \ldots, a_k)+L(b_1, \ldots, b_s)=$ $=L(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s)$.

**6.4.5.** Пользуясь предыдущим упражнением, а также упражнением 6.3.5, найдите какой-либо базис, а также размерность суммы подпространств $U+V=L(a_1, \ldots, a_k)+$ $+L(b_1, \ldots, b_s)$ в соответствующем арифметическом пространстве:

а) $a_1=(1, 1, 1)$, $b_1=(0, 1, 1)$, $b_2=(0, 0, 1)$; б) $a_1=(1, 1, 1)$, $b_1=(1, 0, 1)$, $b_2=(1, 1, 0)$; в) $a_1=(1, 2, 3)$, $a_2=(1, 1, 1)$, $b_1=(1, 1, 1)$, $b_2=(3, 2, 1)$;

г) $a_1=(1, 0, 1, 2)$,
$a_2=(1, 1, 0, 1)$,
$a_3=(1, 1, 1, 0)$,
$b_1=(3, 2, 2, 3)$,
$b_2=(2, 1, 2, 2)$;

д) $a_1=(1, 1, 1, 1)$,
$a_2=(1, 0, 0, 0)$,
$b_1=(0, 1, -2, 1)$,
$b_2=(0, 2, 0, -2)$;

е) $a_1=(1, 2, 1, 0)$,
$a_2=(-1, 1, 1, 1)$,
$b_1=(2, -1, 0, 1)$,
$b_2=(1, -1, 3, 7)$.

**6.4.6.** Докажите формулу Грассмана $\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V$, где $U$ и $V$ — подпространства некоторого векторного пространства.

**6.4.7.** Вычислите размерность пересечения для каждой пары подпространств в упражнении 6.4.5.

**6.4.8.** Какие пары подпространств в упражнении 6.4.5 составляют прямую сумму?

**6.4.9.** Найдите разложение вектора (1, 2, 3) по сумме $U+V$ для первых трех пунктов упражнения 6.4.5.

**6.4.10.** Покажите, что в предыдущем упражнении разложения единственные в первых двух случаях. В последнем случае найдите несколько различных разложений.

**6.4.11.** Пусть $U=L(a)$, где $a=(1, 1, 1)$; $V=\{(x_1, x_2, x_3)|x_1+x_2+x_3=0\}$. Покажите, что $U$ и $V$ составляют прямую сумму в $\boldsymbol{R}^3$. Найдите разложение вектора $b=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ по сумме $U\oplus V$.

**6.4.12.** Пусть $U=L(a)$, где $a=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $V=\{(x_1, \ldots, x_n)|\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n=0\}$. Покажите, что $U$ и $V$ составляют прямую сумму в $F^n$. Найдите разложение вектора $b=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ по сумме $U\oplus V$.

**6.4.13.** Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — базис векторного пространства $V$, $k$ — целое положительное число, меньшее $n$. Покажите, что $V=L(a_1, \ldots, a_k)\oplus L(a_{k+1}, \ldots, a_n)$.

**6.4.14.** Пусть $V$ есть прямая сумма конечномерных подпространств $U_1$ и $U_2$. Покажите, что приписывание базиса подпространства $U_2$ к базису подпространства $U_1$ дает базис пространства $V$.

**6.4.15.** Покажите, что если система векторов $a$, $b$ линейно независима, то $L(a, b)=L(a)\oplus L(b)$.

**6.4.16.** Пусть $L$ и $U$ — различные одномерные подпространства двухмерного векторного пространства $V$. Докажите, что $V=L\oplus U$.

**6.4.17.** Пусть $L$ и $U$ — различные двумерные подпространства трехмерного векторного пространства $V$. Покажите, что $V=L+U$ и $L\cap U$ есть одномерное подпространство.

**6.4.18.** Пусть $L$ и $U$ — различные $n$-мерные подпространства $(n+1)$-мерного векторного пространства $V$ $(n \geqslant 1)$. Покажите, что $V = L + U$ и $L \cap U$ есть $(n-1)$-мерное подпространство.

**6.4.19.** Покажите, что если $a_1, \ldots, a_n$ — базис векторного пространства $V$, то $V = L(a_1) \oplus \ldots \oplus L(a_n)$.

**6.4.20.** Пусть $a_1 \in U_1, \ldots, a_n \in U_n$ — ненулевые векторы подпространств векторного пространства $V$. Покажите, что если $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$, то система векторов $a_1, \ldots, a_n$ линейно независима.

**6.4.21.** Покажите, что сумма подпространств $U$ и $V$ — прямая, если хотя бы один из векторов суммы однозначно представляется в виде $a = u + v$, где $u \in U$, $v \in V$.

**6.4.22.** Сформулируйте и докажите аналогичный результат для суммы $U_1 + \ldots + U_n$.

**6.4.23.** Пусть векторное пространство $V$ является суммой своих подпространств $U_1, \ldots, U_n$. Покажите, что $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$ тогда и только тогда, когда $(U_1 + \ldots + U_k) \cap U_{k+1} = 0$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

**6.4.24.** Пусть $V = U \oplus L$, где $V$ — трехмерное пространство, а $U$, $L$ — его ненулевые подпространства. Докажите, что одно из подпространств $U$, $L$ одномерное, а другое — двумерное.

**6.4.25.** Пусть $U$ и $L$ — подпространства $n$-мерного векторного пространства $V$, имеющие размерности $k$ и $s$ соответственно. Докажите, что:

а) если $L \cap U = 0$ и $k + s = n$, то $V = U \oplus L$;

б) если $V = U + L$ и $k + s = n$, то $V = U \oplus L$.

**6.4.26.** Пусть $V = U_1 + \ldots + U_m$, где $U_1, \ldots, U_m$ — подпространства $n$-мерного векторного пространства $V$, имеющие размерности $k_1, \ldots, k_m$ соответственно. Докажите, что $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ тогда и только тогда, когда $n = k_1 + \ldots + k_m$.

**6.4.27.** Пусть $C$ — пространство непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$. Покажите, что $C = U \oplus V$, где:

а) $U$ — подпространство функций, обращающихся в нуль в точке 0, $V$ — подпространство констант;

б) $U$ — подпространство функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0, 1]$, $V$ — подпространство линейных функций.

**6.4.28.** Найдите разложение функций $e^x$ в виде

$$e^x = f(x) + g(x),$$

где $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ для обоих разложений пространства $C$, указанных в предыдущем упражнении.

## § 5. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. ИЗОМОРФИЗМЫ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

**6.5.1.** Найдите координатную строку вектора (1, 2, 3) относительно базиса:

а) $a_1=(1, 1, 1)$, $a_2=(0, 1, 1)$, $a_3=(0, 0, 1)$; б) $b_1=(1, 1, 1)$, $b_2=(0, 1, 1)$, $b_3=(1, 0, 1)$.

**6.5.2.** Найдите координатную строку каждого из векторов $a_1$, $a_2$, $a_3$ относительно базиса $b_1$, $b_2$, $b_3$ (упр. 6.5.1).

**6.5.3.** Найдите координатную строку каждого из векторов $b_1$, $b_2$, $b_3$ относительно базиса $a_1$, $a_2$, $a_3$ (упр. 6.5.1).

**6.5.4.** Найдите координатные строки единичных векторов $e_1=(1, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0)$, $e_3=(0, 0, 1)$ относительно базиса:

а) $a_1$, $a_2$, $a_3$; б) $a_3$, $a_1$, $a_2$; в) $b_1$, $b_2$, $b_3$ (упр. 6.5.1).

**6.5.5.** Покажите, что числа $1+i$, $1-i$ образуют базис пространства комплексных чисел над полем действительных чисел. Разложите числа $i$, 1, $-1+\sqrt{3}i$ по данному базису.

**6.5.6.** Покажите, что последовательности $e_1=(0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$ и $e_2=(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ образуют базис пространства последовательностей действительных чисел, удовлетворяющих условию $\alpha_{n+1}=\alpha_n+\alpha_{n-1}$, $n\geqslant 2$ (упр. 6.1.13). Разложите последовательности $a=(2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$, $b=(3, 2, 5, 7, \ldots)$ по данному базису.

**6.5.7.** Покажите, что в пространстве многочленов не более чем третьей степени над некоторым полем следующие системы многочленов образуют базисы:

а) $1, x, x^2, x^3$; б) $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$;
в) $1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3$.

**6.5.8.** Найдите координатные строки многочленов $x^2$ и $x^3$ относительно каждого из трех данных базисов (упр. 6.5.7).

**6.5.9.** Докажите, что ранг системы векторов $a_1, \ldots, a_m$ $n$-мерного векторного пространства над полем $F$ равен рангу системы арифметических векторов $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$, $i=1, \ldots, m$, пространства $F^n$, где $a_i=\alpha_{i1}e_1+\ldots+\alpha_{in}e_n$ — разложение векторов по некоторому фиксированному базису $e_1, \ldots, e_n$.

**6.5.10.** Сколько векторов содержит $n$-мерное векторное пространство над конечным полем из $q$ элементов?

**6.5.11.** Пусть $U$ и $V$ — $n$-мерные векторные пространства над одним и тем же полем; $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ — базисы соответственно $U$ и $V$. Покажите, что существует единственный изоморфизм $f: U\to V$, такой, что $f(a_1)=b_1, \ldots, f(a_n)=b_n$.

**6.5.12.** Пусть $U$ и $V$ — $n$-мерные пространства над конечным полем из $q$ элементов. Сколько существует различных изоморфизмов $U$ на $V$?

**6.5.13.** Пусть $U$ и $V$ — конечномерные векторные пространства над полем $F$. Покажите, что существует хотя бы один мономорфизм пространства $U$ в пространство $V$ тогда и только тогда, когда $\dim U \leqslant \dim V$.

**6.5.14.** Пусть $U$ и $V$ — векторные пространства размерности $k \leqslant n$ соответственно над конечным полем из $q$ элементов. Сколько существует различных мономорфизмов из $U$ в $V$?

**6.5.15.** Пусть $U$ и $V$ — конечномерные векторные пространства над полем $F$. Докажите, что существует хотя бы один эпиморфизм пространства $U$ на $V$ тогда и только тогда, когда $\dim U \geqslant \dim V$.

**6.5.16.** Пусть $U$ и $V$ — пространства над конечным полем из $q$ элементов размерности $m$ и $n$ соответственно. Сколько существует различных гомоморфизмов пространства $U$ в пространство $V$?

**6.5.17.** Пусть $U$ и $V$ — векторные пространства над полем $F$. Покажите, что множество всех гомоморфизмов из $U$ в $V$ является векторным пространством над полем $F$, если главные операции определить следующим образом:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$

для любых гомоморфизмов $f$, $g$, векторов $x \in U$, скаляров $\lambda \in F$.

**6.5.18.** Пусть $U$ и $V$ — векторные пространства над полем $F$, в которых выделены базисы соответственно $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$. Покажите, что существует единственный гомоморфизм $f_{ij}\colon U \to V$, такой, что $f_{ij}(a_i)=b_j$, $f_{ij}(a_k)=0$ при $k \neq i$.

**6.5.19.** Покажите, что набор гомоморфизмов $\{f_{ij} \mid i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m\}$ составляет базис пространства всех гомоморфизмов из $U$ в $V$. Какова размерность этого пространства?

**6.5.20.** Пусть $V$ — векторное пространство над полем $F$, которое не является конечномерным. Покажите, что для любого конечномерного над $F$ векторного пространства $U$ существует хотя бы один мономорфизм пространства $U$ в $V$.

## § 6. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО СО СКАЛЯРНЫМ УМНОЖЕНИЕМ. ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

**6.6.1.** Пусть $a$ — ненулевой вектор векторного пространства $R^3$ со стандартным скалярным умножением. Какова размерность подпространства, ортогонального вектору $a$?

**6.6.2.** В пространстве $Q^2$ со стандартным скалярным умножением укажите какое-либо ненулевое подпространство, в котором скалярный квадрат любого вектора отличен от единицы.

**6.6.3.** Пусть $V$ — векторное пространство с невырожденным скалярным умножением, $a_1, \ldots, a_m$ — линейно независимая система векторов пространства $V$. Докажите, что если ненулевой вектор $b$ ортогонален векторам $a_1, \ldots, a_m$, то система $a_1, \ldots, a_m, b$ также линейно независима.

**6.6.4.** Вычислите скалярное произведение векторов арифметического векторного пространства со стандартным скалярным умножением:

а) $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$; б) $(1, 2, \ldots, n)$, $(1, 1, \ldots, 1)$; в) $(-1, 1, \ldots, -1, 1)$, $(1, 2, \ldots, 2n-1, 2n)$.

**6.6.5.** Дополните систему векторов до ортогонального базиса:

а) $(1, 1, 1)$, $(-1, 0, 1)$; б) $(1, 2, 3)$; в) $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$.

**6.6.6.** Дополните систему векторов до ортонормированного базиса:

а) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; б) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

**6.6.7.** Применяя процесс ортогонализации, найдите ортогональный базис пространства, натянутого на данную систему векторов:

а) $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 2)$; б) $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 2, 3, 4)$;

в) $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 2)$, $(1, 0, 0, 0)$; г) $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 1, 1)$.

**6.6.8.** Примените процесс ортогонализации к системе векторов 1, $x$, $x^2$, $x^3$, $x^4$ векторного пространства многочленов с действительными коэффициентами со скалярным умножением:

$$fg=\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx.$$

**6.6.9.** Пусть $U$ и $V$ — подпространства конечномерного векторного пространства $L$ с невырожденным скалярным умножением. Докажите, что:

а) $L=U\oplus U^{\perp}$; б) $(U^{\perp})^{\perp}=U$;
в) $(U+V)^{\perp}=U^{\perp}\cap V^{\perp}$; г) $(U\cap V)^{\perp}=U^{\perp}+V^{\perp}$.

**6.6.10.** Найдите угол между двумя векторами четырехмерного стандартного евклидова пространства:

а) (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1); б) (0, 0, 0, −1), (1, 1, 1, 1);
в) (2, 1, 3, 2), (1, 2, −2, 1); г) (1, 2, 2, 3), (3, 1, 5, 1).

**6.6.11** (теорема Пифагора). Пусть $a$ и $b$ — взаимно ортогональные векторы евклидова пространства. Покажите, что $\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2$.

**6.6.12.** Покажите, что для любых векторов $a$ и $b$ евклидова пространства $\|a+b\|^2+\|a-b\|^2=2(\|a\|^2+\|b\|^2)$.

**6.6.13.** Пусть $a$ и $b$ — векторы евклидова пространства. Докажите, что $|ab|=\|a\|\cdot\|b\|$ тогда и только тогда, когда эти векторы линейно зависимы.

**6.6.14.** Определителем Грама векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклидова пространства называется определитель

$$g(a_1, \ldots, a_n)=\begin{vmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & \ldots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & \ldots & a_2a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_na_1 & a_na_2 & \ldots & a_na_n \end{vmatrix}.$$

Докажите, что определитель Грама не изменяется в процессе ортогонализации, т. е. если векторы $a_1, \ldots, a_n$ перейдут в результате ортогонализации в векторы $b_1, \ldots, b_n$, то $g(a_1, \ldots, a_n)=g(b_1, \ldots, b_n)=\|b_1\|^2\cdot\ldots\cdot\|b_n\|^2$.

**6.6.15.** Докажите, что определитель Грама любой совокупности векторов евклидова пространства:

а) неотрицателен;

б) равен нулю тогда и только тогда, когда система линейно зависима;

в) не превосходит произведения квадратов длин векторов системы, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы попарно ортогональны или один из них нулевой.

**6.6.16.** Докажите, что определитель Грама двух векторов равен квадрату площади параллелограмма, построенного на этих векторах, определитель Грама трех векторов равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на этих векторах.

**6.6.17** (неравенство Адамара). Пусть $A=\|\alpha_{ij}\|$ — квадратная $(n\times n)$-матрица с действительными элементами. Докажите, что $|A|^2\leqslant\prod\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^2$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда система строк матрицы $A$ ортогональна либо одна из строк нулевая.

# ГЛАВА 7. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

## § 1. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ МАТРИЦАМИ

**7.1.1.** На плоскости фиксируется точка — начало координат, геометрические векторы отождествляются с точками плоскости — концами этих векторов, если их начала отнесены в начало координат. Таким образом, плоскость с фиксированным началом координат является векторным пространством над полем действительных чисел (упр. 6.1.1, г). Является ли следующее преобразование плоскости линейным отображением данного векторного пространства:

а) поворот плоскости на некоторый угол вокруг начала координат;

б) параллельный перенос на ненулевой вектор;

в) тождественное преобразование;

г) центральная симметрия с центром в начале координат (с каким-либо другим центром);

д) ортогональное проектирование на некоторую прямую, проходящую через начало координат (не проходящую через начало координат);

е) проектирование на прямую, проходящую через начало координат, параллельно какой-либо другой прямой, проходящей через начало координат;

ж) отображение, переводящее каждый вектор в нулевой вектор (в какой-либо фиксированный ненулевой вектор);

з) гомотетия с центром в начале координат;

и) симметрия относительно какой-либо прямой, проходящей через начало координат (не проходящей через начало координат)?

**7.1.2.** Какие из следующих преобразований арифметического векторного пространства $\boldsymbol{R}^3$ являются линейными? В случае линейности найдите матрицу данного линейного оператора относительно стандартного базиса единичных векторов (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1):

а) $\varphi(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1)$;
б) $\varphi(x_1, x_2, x_3)=(x_1+1, x_2+2, x_3+3)$;
в) $\varphi(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2+x_3, x_1+x_2, x_3)$;
г) $\varphi(x_1, x_2, x_3)=(x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3)$;
д) $\varphi(x_1, x_2, x_3)=(x_1, x_1, 0)$;
е) $\varphi(x_1, x_2, x_3)=(kx_1, kx_2, kx_3)$, $k\in\mathbf{R}$;
ж) $\varphi(x_1, x_2, x_3)=(k_1x_1, k_2x_2, k_3x_3)$, $k_1, k_2, k_3\in\mathbf{R}$.

**7.1.3.** Найдите ранг и дефект линейного оператора в 7.1.2, а, в, д.

**7.1.4.** Укажите какой-либо базис ядра и базис образа линейного оператора в 7.1.2, а, в, д.

**7.1.5.** Пусть векторное пространство $V$ раскладывается в прямую сумму $V=U\oplus L$. Тогда любой вектор $a\in V$ однозначно представляется в виде суммы $a=u+l$, где $u\in U$, $l\in L$.

а) Положим $\varphi(a)=u$. Покажите, что $\varphi$ есть идемпотентный, т. е. $\varphi^2=\varphi$, линейный оператор пространства $V$. Найдите ядро и образ оператора $\varphi$. Этот оператор называется оператором проектирования пространства $V$ на подпространство $U$ параллельно подпространству $L$.

б) Положим $\psi(a)=u-l$. Покажите, что $\psi$ есть линейный оператор, удовлетворяющий условию $\psi^2=\varepsilon$, где $\varepsilon$ — тождественный оператор пространства $V$. Оператор $\psi$ называется оператором отражения пространства $V$ относительно подпространства $U$ параллельно подпространству $L$.

**7.1.6.** Пусть $V$ — векторное пространство над числовым полем. Покажите, что:

а) если $\varphi$ — оператор проектирования, то $2\varphi-\varepsilon$ — оператор отражения;

б) если $\psi$ — оператор отражения, то $\frac{1}{2}(\psi+\varepsilon)$ — оператор проектирования.

**7.1.7.** Докажите, что линейный оператор $\varphi$ векторного пространства $V$ является проектированием тогда и только тогда, когда $\varphi^2=\varphi$.

**7.1.8.** Докажите, что линейный оператор $\psi$ векторного пространства $V$ над числовым полем является оператором отражения тогда и только тогда, когда $\psi^2=\varepsilon$.

**7.1.9.** Опишите линейные операторы одномерного векторного пространства.

**7.1.10.** Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — базис векторного пространства $V$. Покажите, что для любого набора векторов $b_1, \ldots, b_n$ пространства $V$ существует единственный линейный оператор $\varphi$, такой, что $\varphi(a_1)=b_1$, $\varphi(a_2)=b_2$, ..., $\varphi(a_n)=b_n$.

**7.1.11.** Используя упражнение 7.1.10, постройте в двумерном векторном пространстве ненулевые линейные операторы $\varphi$ и $\psi$, удовлетворяющие следующему условию:

а) $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$; в) $\varphi\psi = \varphi$, $\psi\varphi = \psi$, $\varphi \neq \psi$.
б) $\psi\varphi = 0$, $\varphi\psi \neq 0$;

**7.1.12.** Найдите матрицу линейного оператора, переводящего стандартный базис $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ в набор векторов $a_1$, $a_2$, $a_3$, относительно стандартного базиса:

а) $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (4, 1, 4)$, $a_3 = (5, 9, 9)$;
б) $a_1 = (1, 0, 3)$, $a_2 = (1, 1, 4)$, $a_3 = (0, 9, 5)$;
в) $a_1 = (7, -10, 3)$, $a_2 = (-2, 9, 1)$, $a_3 = (5, -1, 4)$.

**7.1.13.** В условиях предыдущего упражнения найдите матрицу обратного оператора, т. е. оператора, переводящего векторы $a_1$, $a_2$, $a_3$ соответственно в $e_1$, $e_2$, $e_3$, относительно стандартного базиса $e_1$, $e_2$, $e_3$. Всегда ли существует обратный оператор?

**7.1.14.** Найдите матрицу линейного оператора, переводящего векторы $a_1$, $a_2$ соответственно в $b_1$, $b_2$, относительно стандартного базиса $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$:

а) $a_1 = (1, 1)$, $b_1 = (1, 2)$, $a_2 = (0, 1)$, $b_2 = (2, 1)$;
б) $a_1 = (1, 2)$, $b_1 = (\alpha, \beta)$, $a_2 = (1, 1)$, $b_2 = (\gamma, \delta)$.

**7.1.15.** Найдите матрицу линейного оператора из упражнения 7.1.14 относительно базиса $a_1$, $a_2$.

**7.1.16.** Покажите, что умножения квадратных матриц второго порядка а) слева, б) справа на данную матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ являются линейными операторами пространства матриц второго порядка. Найдите матрицы этих операторов относительно базиса

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**7.1.17.** Покажите, что дифференцирование является линейным оператором пространства многочленов степени, не превосходящей $n$, от одной переменной с действительными коэффициентами. Найдите матрицу этого оператора относительно базиса $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

**7.1.18.** Линейный оператор $\varphi$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 18 & 67 \\ -7 & -26 \end{pmatrix}$ относительно базиса $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (3, 7)$. Линейный оператор $\psi$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ относительно базиса $b_1=(1, 1)$, $b_2=(0, 1)$. Найдите матрицу оператора $\varphi+\psi$ относительно базиса $a_1$, $a_2$.

**7.1.19.** Линейный оператор $\varphi$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ относительно базиса $a_1=(1, 2)$, $a_2=(3, 7)$. Линейный оператор $\psi$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ относительно базиса $b_1=(1, 1)$, $b_2=(0, 1)$. Найдите матрицу оператора $\varphi\psi$ относительно базиса $a_1$, $a_2$.

## § 2. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ. УСЛОВИЯ, ПРИ КОТОРЫХ МАТРИЦА ПОДОБНА ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ

**7.2.1.** Найдите собственные значения и собственные векторы операторов проектирования и отражения (7.1.5).

**7.2.2.** Докажите, что линейный оператор конечномерного векторного пространства обратим тогда и только тогда, когда нулевой скаляр не является его собственным значением.

**7.2.3.** Пусть $\varphi$ — обратимый линейный оператор. Докажите, что для любого линейного оператора $\psi$ того же векторного пространства:

а) операторы $\psi$ и $\varphi^{-1}\psi\varphi$ имеют одинаковые собственные значения;

б) операторы $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ имеют одинаковые собственные значения.

**7.2.4.** Покажите, что отображение, переводящее функцию в ее производную, является линейным оператором векторного пространства действительнозначных функций, определенных и имеющих производные любого порядка на всей числовой прямой. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора дифференцирования.

**7.2.5.** Составьте характеристическое уравнение и найдите собственные значения следующих матриц над полем рациональных чисел:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**7.2.6.** Найдите собственные значения и собственные векторы следующих матриц над полем действительных чисел:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \neq \pi k$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**7.2.7.** Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ над полем комплексных чисел для действительных $\alpha$, не являющихся целыми кратными числа $\pi$.

**7.2.8.** Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — матрица над полем $F$. Покажите, что скаляр $\lambda \in F$ есть собственное значение матрицы $A$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0.$$

**7.2.9.** Найдите все квадратные матрицы второго порядка над полем $F$, каждая из которых реализуется как матрица оператора проектирования двумерного векторного пространства над полем $F$ на одномерное подпространство относительно некоторого базиса (7.1.5).

**7.2.10.** Найдите все квадратные матрицы второго порядка над полем $F$, каждая из которых реализуется как матрица оператора отражения двумерного векторного пространства над полем $F$, относительно одномерного подпространства (см. 7.1.5).

**7.2.11.** Найдите диагональную матрицу, подобную над полем рациональных чисел матрице:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**7.2.12.** Найдите диагональную матрицу, подобную над полем действительных чисел матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**7.2.13.** Найдите диагональную матрицу, подобную над полем комплексных чисел матрице $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

**7.2.14.** Пусть $\alpha$ — действительное число, не являющееся целым кратным числа $\pi$. Докажите, что матрица $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ не подобна действительной диагональной матрице.

**7.2.15.** Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица над полем $F$ и $\alpha\neq 0$. Докажите, что матрица $A$ не подобна диагональной.

# ГЛАВА 8. ГРУППЫ И КОЛЬЦА

## § 1. ПОЛУГРУППЫ, МОНОИДЫ, ГРУППЫ

**8.1.1.** Докажите, что если бинарная операция $\circ$, определенная на множестве $A$, ассоциативна, то для любых элементов $a$, $b$, $c$, $d$ из $A$ выполняются равенства

$$(a \circ b) \circ (c \circ d) = a \circ ((b \circ c) \circ d);$$
$$((a \circ b) \circ c) \circ d = a \circ ((b \circ c) \circ d).$$

Сколькими способами можно расставить скобки в произведении четырех сомножителей?

**8.1.2.** Пусть $M$ — непустое множество, $\Sigma_M$ — множество всех отображений множества $M$ в себя. На $\Sigma_M$ определена операция композиции отображений $\circ$. Докажите, что алгебра $\langle \Sigma_M, \circ \rangle$ — полугруппа с единицей.

**8.1.3.** Пусть $\langle M, \cdot, e \rangle$ — моноид. Для каждого элемента $a \in M$ рассмотрим отображение $L_a$: $M \to M$, $L_a(x) = a \cdot x$. Докажите, что отображение $f$: $M \to \Sigma_M$, определенное правилом $f(a) = L_a$, является изоморфным вложением, т. е. $f$ — инъективное гомоморфное отображение моноидов. Приведите примеры моноидов, для которых $L_a$ — биекция при любом $a$; примеры моноидов, для которых $L_a$ для некоторых элементов $a$ не являются биекцией.

**8.1.4.** Докажите, что на каждом из следующих подмножеств $M$ множества $M(n, \mathbf{R})$ всех $n \times n$-матриц с действительными элементами определена операция умножения матриц:

а) множество всех необратимых матриц;

б) множество всех матриц, у которых последняя строка нулевая;

в) множество всех матриц, у которых последний столбец нулевой;

г) множество всех матриц, у которых последняя строка и последний столбец нулевые;

д) множество всех матриц, у которых все элементы равны между собой;

е) множество всех матриц, у которых сумма всех элементов каждой строки равна нулю.

Какие из этих полугрупп являются моноидами? Какие из них являются подмоноидами моноида $\langle M(n, \mathbf{R}), \cdot, E\rangle$, где $E$ — единичная матрица?

**8.1.5.** Докажите, что в моноиде $\langle A, \cdot, e\rangle$ для любого элемента $a$ и для любых целых неотрицательных $m$, $n$ выполняются равенства $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

**8.1.6.** Докажите, что в моноиде $\langle A, +, 0\rangle$ для любого элемента $a$ и для любых целых неотрицательных $m$, $n$ выполняются равенства $(m+n)a = ma + na$; $(mn)a = m(na)$.

**8.1.7.** Пусть $\langle G, \cdot\rangle$ — конечная полугруппа, в которой имеют место левый и правый законы сокращения, т. е.

$$(\forall a, b, c \in G)(a \cdot b = a \cdot c \rightarrow b = c) \wedge (b \cdot a = c \cdot a \rightarrow b = c).$$

Докажите, что на $G$ определена операция перехода к обратному элементу, так что алгебра $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ — группа.

**8.1.8.** Пусть $\langle G, \cdot\rangle$ — полугруппа, для которой отображения $L_a$ и $R_a$ множества $G$ в себя, заданные правилами $L_a(x) = a \cdot x$, $R_a(x) = x \cdot a$, сюръективны для любого элемента $a$ из $G$. Докажите, что на $G$ определена операция перехода к обратному элементу, так что алгебра $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ является группой.

**8.1.9.** Пусть $\langle A, +, -, \cdot\rangle$ — кольцо с единицей. Обозначим через $A^*$ множество всех обратимых элементов кольца $A$. Докажите, что множество $A^*$ замкнуто относительно операций умножения и перехода к обратному элементу и алгебра $\langle A^*, \cdot, {}^{-1}\rangle$ является группой. Эту группу называют мультипликативной группой кольца $A$.

**8.1.10.** Пусть $F$ — поле. Обозначим через $M(n, F)$ множество всех $n \times n$-матриц с элементами из $F$. Проверьте, что $M(n, F)$ является кольцом относительно обычных операций над матрицами. Докажите, что это — кольцо с единицей и при $n \geqslant 2$ оно некоммутативно и содержит делители нуля. Найдите мультипликативную группу кольца $M(n, F)$ (ее обозначают $GL(n, F)$ и называют общей линейной группой).

**8.1.11.** Найдите:

а) мультипликативную группу кольца $\mathbf{Z}_8$; $\mathbf{Z}_5$; $\mathbf{Z}_{12}$;

б) мультипликативную группу кольца $\mathbf{Z}_p$, если $p$ — простое число;

в) мультипликативную группу кольца $\mathbf{Z}$; $\mathbf{Q}$; $\mathbf{Z}[i]$;

г) мультипликативную группу произвольного поля.

**8.1.12.** Пусть $F$ — поле. Докажите, что каждое из следующих множеств матриц является подгруппой в группе $GL(n, F)$:

а) $SL(n, F)=\{A\in M(n, F) \mid \det A=1\}$ (специальная линейная группа);

б) $T(n, F)=\{A=\|\alpha_{ij}\|\in M(n, F) \mid (\forall i, j)(i>j\to\alpha_{ij}=0)\wedge \wedge\alpha_{ii}\neq 0\}$ (треугольная группа матриц);

в) $UT(n, F)=\{A=\|\alpha_{ij}\|\in T(n, F) \mid (\forall i)\,\alpha_{ii}=1\}$ (унитреугольная группа матриц);

г) $D(n, F)=\{A=\|\alpha_{ij}\|\in M(n, F) \mid (\forall i, j)(i\neq j\to\alpha_{ij}=0)\wedge \wedge\alpha_{ii}\neq 0\}$.

**8.1.13.** Докажите, что множество $O(n)=\{A\in M(n, \boldsymbol{R}) \mid {}^tA\cdot A=E\}$ является подгруппой группы $GL(n, \boldsymbol{R})$ ($O(n)$ называется ортогональной группой).

**8.1.14.** Докажите, что множество всех унитреугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \alpha_{3,n-1} & \alpha_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $\alpha_{i,i+1}=0$ для любого $i$, образует подгруппу в группе $UT(n, \boldsymbol{R})$.

**8.1.15.** Составьте таблицу Кэли для группы $GL(2, \boldsymbol{Z}_2)$.

**8.1.16.** Докажите, что множество $A_n$ всех четных подстановок $n$-й степени образует подгруппу группы $S_n$.

**8.1.17.** Докажите, что если подгруппа $H$ группы $S_n$ содержит все четные подстановки и хотя бы одну нечетную, то $H=S_n$.

**8.1.18.** Докажите, что если подгруппа $H$ группы $S_n$ содержит хотя бы одну нечетную подстановку, то число элементов в $H$ четное.

**8.1.19.** Пусть $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ — группа, $H$ — непустое подмножество множества $G$, замкнутое относительно умножения и удовлетворяющее условию $(\forall h\in H)(\exists k\in\boldsymbol{Z}^+)\,h^k=e$. Докажите, что $H$ — подгруппа группы $G$.

**8.1.20.** Пусть $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ — группа, $H$ — непустое конечное подмножество множества $G$, замкнутое относительно умножения. Докажите, что $H$ — подгруппа группы $G$.

**8.1.21.** Пусть $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ — группа и $f\colon G\to S_G$ — отображение в группу $S_G$ всех биекций $G$ на себя, заданное правилом $f(g)=L_g$, где $L_g(x)=g\cdot x$. Докажите, что $f$ — изоморфное вложение.

8.1.22. Используя отображение $f$ из задачи 8.1.21, найдите в группе $S_4$ подгруппу, изоморфную аддитивной группе вычетов по модулю 4; в группе $S_5$ найдите подгруппу, изоморфную мультипликативной группе корней 5-й степени из единицы.

## § 2. ПОРЯДОК ЭЛЕМЕНТА ГРУППЫ. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

8.2.1. Найдите порядки элементов:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ в группе $GL(2, \boldsymbol{R})$;

б) $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}$ в группе $GL(2, \boldsymbol{Z}_3)$;

в) $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ в группе $GL(2, \boldsymbol{Z}_5)$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ в группе $GL(2, \boldsymbol{C})$.

8.2.2. В группе $GL(2, \boldsymbol{R})$ укажите два элемента конечного порядка и два элемента бесконечного порядка.

8.2.3. Приведите примеры элементов конечного порядка в группе $GL(3, \boldsymbol{R})$ (не только диагональные матрицы).

8.2.4. Найдите порядок каждого элемента в группах $\boldsymbol{Z}_8^*$; $\boldsymbol{Z}_{12}^*$; $\boldsymbol{Z}_7^*$.

8.2.5. Найдите порядок каждого элемента в группе корней $n$-й степени из единицы, если $n=5$; 6; 8; 9; 12.

8.2.6. В мультипликативной группе комплексных чисел $\boldsymbol{C}^*$ найдите все элементы порядка 2; 4; 8.

8.2.7. Докажите, что порядок $\omega_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ в группе корней $n$-й степени из единицы равен $\frac{n}{\text{НОД}(k, n)}$.

8.2.8. Проверьте, что в группе $SL(2, \boldsymbol{R})$ элементы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ имеют порядки 4 и 3 соответственно. Покажите, что $A \cdot B$ — элемент бесконечного порядка. Может ли в абелевой группе произведение элементов конечного порядка быть элементом бесконечного порядка?

8.2.9. Пусть $G_1 \times G_2$ — прямое произведение групп $G_1$ и $G_2$, $a$ — элемент конечного порядка $m$ из группы $G_1$, $b$ — элемент конечного порядка $n$ из $G_2$. Чему равен порядок элемента $\langle a, b \rangle$ из $G_1 \times G_2$?

**8.2.10.** Какие из следующих утверждений истинны и какие ложны? Ответ обоснуйте:

а) в конечной группе каждый элемент имеет конечный порядок;

б) в бесконечной группе каждый элемент имеет бесконечный порядок;

в) бесконечная группа может содержать конечную неединичную подгруппу;

г) в любой группе произведение элементов конечного порядка является элементом конечного порядка;

д) в любой группе произведение элементов бесконечного порядка является элементом бесконечного порядка;

е) в абелевой группе произведение элементов конечного порядка является элементом конечного порядка.

**8.2.11.** Пусть $\langle G, \cdot, ^{-1}\rangle$ — группа, $a \in G$, $o(a)=n<\infty$. Докажите, что для любого целого $k$ равенство $a^k=e$ выполняется тогда и только тогда, когда $n/k$.

**8.2.12.** Пусть $\langle G, \cdot, ^{-1}\rangle$ — группа, $a$ — элемент конечного порядка $n$ из $G$. Докажите, что для любых целых $k$ и $l$ равенство $a^k=a^l$ выполняется тогда и только тогда, когда $k \equiv l \pmod{n}$.

**8.2.13.** Пусть $f\colon G_1 \to G_2$ — гомоморфное отображение групп. Докажите, что для любого элемента $a$ конечного порядка из группы $G_1$ выполняется условие $o(f(a))/o(a)$. Приведите примеры, когда $o(f(a))=o(a)$ и когда $o(f(a))<$ $<o(a)$. Покажите, что элемент бесконечного порядка может при гомоморфизме отображаться и в элемент бесконечного порядка, и в элемент конечного порядка.

**8.2.14.** Пусть $\tau \in S_n$. Рассмотрим бинарное отношение $\rho$ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, определенное следующим образом: $i\rho j \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbf{Z})\ i=\tau^k(j)$.

а) Докажите, что $\rho$ — отношение эквивалентности и класс эквивалентности $[i]_\rho$, порожденный элементом $i$, состоит из попарно различных элементов $i$, $\tau(i)$, $\ldots$, $\tau^{k-1}(i)$, где $k$ — наименьшее положительное целое число, такое, что $\tau^k(i)=i$.

б) Пусть $\{1, 2, \ldots, n\}=[i_1]_\rho \cup \ldots \cup [i_s]_\rho$ — разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$ на классы эквивалентности по $\rho$. Каждому классу эквивалентности $[i_t]_\rho=\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, где $j_r=\tau^{r-1}(i_t)$, сопоставим подстановку $\sigma_t$, которая переводит $j_1$ в $j_2$, $j_2$ в $j_3$, $\ldots$, $j_k$ в $j_1$, а остальные элементы оставляет на месте. Такую подстановку назовем циклом длины $k$ и будем ее записывать в виде $(j_1 j_2 \ldots j_k)$. В частности, классу эквивалентности, состоящему из одного элемента, соответствует цикл длины 1, т. е. тождественная подстановка. Покажите, что $\tau=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\ldots\cdot\sigma_s$.

в) Покажите, что если $\sigma_1=(i_1\ldots i_k)$, $\sigma_2=(j_1\ldots j_l)$ — независимые циклы, т. е. не содержат общих элементов, то $\sigma_1\cdot\sigma_2=\sigma_2\cdot\sigma_1$.

г) Докажите, что любая подстановка $\tau\in S_n$ представима в виде произведения попарно независимых циклов и такое представление однозначно.

**8.2.15.** Разложите в произведение независимых циклов следующие подстановки:

а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&1&2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&1&6&5&4&2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&5&7&4&6&1&3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&6&5&7&2&4&3\end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&1&5&6&9&2&8&7&4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\9&8&7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$.

**8.2.16.** Докажите, что порядок цикла равен его длине.

**8.2.17.** Докажите, что если $\tau=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\ldots\cdot\sigma_k$ — разложение подстановки $\tau$ в произведение независимых циклов, то порядок $\tau$ равен наименьшему общему кратному длин циклов $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$.

**8.2.18.** Вычислите $\tau^k$, если:

а) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&1&3&5&2&6\end{pmatrix}$, $k=137$;

б) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&3&1&8&6&9&4&5&2\end{pmatrix}$, $k=-51$;

в) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\9&5&4&3&1&7&6&8&2\end{pmatrix}$, $k=352$.

**8.2.19.** Пусть $\sigma=(i_1i_2\ldots i_k)$ — цикл. Докажите, что $\sigma=(i_1i_2)(i_1i_3)\ldots(i_1i_k)$.

**8.2.20.** Пусть $\tau\in S_n$ и $\tau=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\ldots\cdot\sigma_k$ — разложение $\tau$ в произведение независимых циклов длины $l_1, l_2, \ldots, l_k$ соответственно, включая и циклы длины 1. Докажите, что $\operatorname{sgn}\tau=(-1)^{n-k}$.

**8.2.21.** Пусть $\langle G, \cdot, {}^{-1}\rangle$ — группа, $M\subseteq G$. Говорят, что $G$ порождается множеством $M$, если любой элемент из $G$ можно представить в виде $a_1^{k_1}\ldots a_n^{k_n}$, где $k_1, \ldots, k_n$ — целые числа, $a_1, \ldots, a_n$ — элементы из $M$, необязательно различные. Покажите, что группа $\langle Q^+, \cdot, {}^{-1}\rangle$ порождается множеством всех простых чисел.

**8.2.22.** Укажите множество порождающих элементов для группы $\langle \boldsymbol{Q}^*, \cdot, ^{-1} \rangle$.

**8.2.23.** Докажите, что группа $S_n$ порождается всеми транспозициями $(ij)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

**8.2.24.** Докажите, что группа $S_n$ порождается транспозициями $(12), (13), \ldots, (1n)$.

**8.2.25.** Докажите, что группа $A_n$ порождается трехчленными циклами $(123), (124), \ldots, (12n)$.

**8.2.26.** Докажите, что группа $GL(n, F)$ порождается множеством всех элементарных матриц порядка $n$.

**8.2.27.** Для каждой из следующих групп определите, является ли она циклической группой:

а) $\langle \boldsymbol{Z}, +, - \rangle$; б) $\langle \boldsymbol{Q}, +, - \rangle$; в) $\langle \boldsymbol{Q}^*, \cdot, ^{-1} \rangle$;
г) $\langle 6\boldsymbol{Z}, +, - \rangle$; д) $\langle \{6^n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}, \cdot, ^{-1} \rangle$;
е) $\langle \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\}, +, - \rangle$;
ж) $\langle \boldsymbol{Z}_4, +, - \rangle$; з) $\langle \boldsymbol{Z}_7^*, \cdot, ^{-1} \rangle$;
и) $\langle \boldsymbol{Z}_8^*, \cdot, ^{-1} \rangle$; к) $\langle \boldsymbol{Z}_9^*, \cdot, ^{-1} \rangle$.

**8.2.28.** Докажите, что группа $S_n$ при любом $n > 2$ не циклическая.

**8.2.29.** Докажите, что множество всех поворотов плоскости вокруг фиксированной точки $O$ на углы $\frac{2\pi k}{10}$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, является циклической группой (рассматриваются операции композиция отображений и переход к обратному отображению). Каков порядок этой группы?

**8.2.30.** Докажите, что множество всех поворотов плоскости вокруг точки $O$ на углы $\frac{2\pi k}{\sqrt{2}}$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, является циклической группой относительно операций композиции отображений и перехода к обратному отображению. Каков порядок этой группы?

**8.2.31.** Докажите, что для любого целого положительного числа $n$ существует циклическая группа порядка $n$.

**8.2.32.** Какие из следующих утверждений истинны:

а) каждая циклическая группа абелева;
б) каждая абелева группа циклическая;
в) каждый элемент циклической группы, отличный от единичного элемента, является ее порождающим;
г) каждая группа порядка $n < 4$ циклическая;
д) каждая группа порядка $n \leqslant 4$ циклическая?

**8.2.33.** Найдите в группе $\langle \boldsymbol{Z}_{30}, +, - \rangle$ подгруппу, порожденную элементом $\overline{25}$; в $\langle \boldsymbol{Z}_{42}, +, - \rangle$ найдите подгруппу, порожденную $\overline{30}$.

**8.2.34.** Сколько порождающих элементов в группе корней 8-й степени из единицы? Представьте все элементы группы в виде целых степеней каждого из этих порождающих.

**8.2.35.** Пусть $G$ — циклическая группа порядка $n<\infty$. Докажите, что элемент $a$ из $G$ является образующим элементом $G$ тогда и только тогда, когда порядок $a$ равен $n$.

**8.2.36.** Докажите, что элемент $a^k$ из циклической группы $G=<a>$ порядка $n<\infty$ является образующим элементом $G$ тогда и только тогда, когда НОД $(k, n)=1$.

**8.2.37.** Докажите, что прямое произведение $\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_3$ групп $\langle\boldsymbol{Z}_2, +, -\rangle$ и $\langle\boldsymbol{Z}_3, +, -\rangle$ изоморфно группе $\langle\boldsymbol{Z}_6, +, -\rangle$.

**8.2.38.** Докажите, что группа $G$ конечного порядка $n$ является циклической группой тогда и только тогда, когда в ней существует элемент порядка $n$.

**8.2.39.** Пусть $G$ и $H$ — циклические группы конечных порядков $m$ и $n$ соответственно и НОД $(m, n)=1$. Докажите, что прямое произведение $G\times H$ — циклическая группа порядка $mn$.

**8.2.40.** Докажите, что группа, изоморфная циклической группе, является циклической группой.

**8.2.41.** Докажите, что группы $\langle\boldsymbol{Z}_4, +, -\rangle$ и $\langle\boldsymbol{Z}_8^*, {}^{-1}\rangle$ не изоморфны.

**8.2.42.** Докажите, что группа $\langle\boldsymbol{Z}_8^*, \cdot, {}^{-1}\rangle$ изоморфна прямому произведению групп $\langle\boldsymbol{Z}_2, +, -\rangle$ и $\langle\boldsymbol{Z}_2, +, -\rangle$.

**8.2.43.** Докажите, что прямое произведение групп $\langle\boldsymbol{Z}_2, +, -\rangle$ и $\langle\boldsymbol{Z}_4, +, -\rangle$ не изоморфно группе $\langle\boldsymbol{Z}_8, +, -\rangle$.

**8.2.44.** Какие из следующих утверждений истинны:

а) все группы порядка 3 изоморфны между собой;

б) все конечные группы одного порядка изоморфны между собой;

в) все циклические группы одного порядка изоморфны между собой;

г) прямое произведение двух циклических групп является циклической группой;

д) прямое произведение двух циклических групп, порядки которых взаимно просты, является циклической группой?

**8.2.45.** Среди следующих групп укажите все пары изоморфных между собой групп:

$\langle\boldsymbol{Z}, +, -\rangle$; $\langle\boldsymbol{Z}_6, +, -\rangle$; $\langle\boldsymbol{Z}_2, +, -\rangle$; $\langle 17\boldsymbol{Z}, +, -\rangle$;

$\langle\boldsymbol{Q}, +, -\rangle$; $\langle 3\boldsymbol{Z}, +, -\rangle$; $\langle\boldsymbol{R}, +, -\rangle$; $\langle\boldsymbol{R}^+, \cdot, {}^{-1}\rangle$;

$\langle\boldsymbol{R}^*, \cdot, {}^{-1}\rangle$; $\langle\boldsymbol{Q}^*, \cdot, {}^{-1}\rangle$; $\langle\boldsymbol{Z}^*, \cdot, {}^{-1}\rangle$.

**8.2.46.** Докажите, что любые две ненулевые подгруппы группы $\langle \mathbf{Z}, +, - \rangle$ изоморфны между собой.

**8.2.47.** Найдите все подгруппы группы $\langle \mathbf{Z}_8, +, - \rangle$; $\langle \mathbf{Z}_{12}, +, - \rangle$; $\langle \mathbf{Z}_{17}, +, - \rangle$.

**8.2.48.** Сколько различных подгрупп у группы корней $n$-й степени из единицы, если $n=4$; $n=6$; $n=15$?

**8.2.49.** Пусть $G=\langle a \rangle$ — циклическая группа с образующим элементом $a$, $o(a)=n<\infty$. Докажите, что подгруппа $H=\langle a^k \rangle$ группы $G$ совпадает с подгруппой $\langle a^d \rangle$, где $d=\text{НОД}(n, k)$.

**8.2.50.** Пусть $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ — группа, $a \in G$, $o(a)=n<\infty$. Докажите, что $\langle a^s \rangle = \langle a^t \rangle$ тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(s, n)=\text{НОД}(t, n)$.

**8.2.51.** Докажите, что в циклической группе $G=\langle a \rangle$ конечного порядка $n$ любая подгруппа порождается элементом вида $a^d$, где $d$ — делитель $n$.

**8.2.52.** Докажите, что в циклической группе $\langle a \rangle$ конечного порядка $n$ для каждого положительного делителя $d$ числа $n$ существует одна и только одна подгруппа порядка $d$.

**8.2.53.** Пусть $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ — группа, $a, b \in G$, $o(a)=m$, $o(b)=n$ и $\text{НОД}(m, n)=1$. Докажите, что $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$, $e$ — единица группы $G$.

**8.2.54.** Докажите, что пересечение циклических подгрупп группы снова является циклической подгруппой.

**8.2.55.** Докажите, что для любого $r \in \mathbf{Q}$ существует гомоморфное отображение $f$: $\langle \mathbf{Z}, +, - \rangle \to \langle \mathbf{Q}, +, - \rangle$, при котором $f(1)=r$.

**8.2.56.** Пусть $f$: $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ — гомоморфное отображение аддитивной группы рациональных чисел в себя, пусть $f(1)=r$. Докажите, что $f(k)=rk$ для любого $k \in \mathbf{Q}$.

**8.2.57.** Докажите, что для любого $r \in \mathbf{Q}$ существует гомоморфное отображение группы $\langle \mathbf{Q}, +, - \rangle$ в себя, при котором $f(1)=r$.

**8.2.58.** Является ли гомоморфным отображением группы $\langle \mathbf{Z}_4, +, - \rangle$ в группу $\langle \mathbf{Z}, +, - \rangle$ отображение $f$, при котором $f(\bar{0})=0$; $f(\bar{1})=1$; $f(\bar{2})=2$; $f(\bar{3})=3$?

**8.2.59.** Обозначим через $[k]_n$ класс вычетов по модулю $n$, порожденный числом $k$. Является ли гомоморфным отображением группы $\langle \mathbf{Z}_4, +, - \rangle$ в группу $\langle \mathbf{Z}_8, +, - \rangle$ отображение $f$:

а) $f([0]_4)=[0]_8$, $f([1]_4)=[1]_8$, $f([2]_4)=[2]_8$, $f([3]_4)=[3]_8$;

б) $f([0]_4)=[0]_8$, $f([1]_4)=[2]_8$, $f([2]_4)=[4]_8$, $f([3]_4)=[6]_8$?

**8.2.60.** Укажите все гомоморфные отображения группы $\langle \mathbf{Z}_8, +, - \rangle$ в группу $\langle \mathbf{Z}_{12}, +, - \rangle$.

**8.2.61.** Пусть $f$: $\mathbf{Z}_6 \to \mathbf{Z}_6$ — изоморфное отображение группы $\langle \mathbf{Z}_6, +, - \rangle$ на себя. Может ли выполняться равенство $f(\bar{1})=\bar{2}$; $f(\bar{1})=\bar{5}$; $f(\bar{1})=\bar{3}$?

**8.2.62.** Укажите все изоморфные отображения аддитивной группы вычетов по модулю 6 на себя.

**8.2.63.** Сколько существует различных изоморфных отображений группы $\langle \mathbf{Z}_8, +, - \rangle$ на себя?

**8.2.64.** Для каких $m$, $n$ не существует ненулевого гомоморфного отображения группы $\langle \mathbf{Z}_m, +, - \rangle$ в группу $\langle \mathbf{Z}_n, +, - \rangle$?

**8.2.65.** Пусть $G=\langle a \rangle$ — циклическая группа с образующим элементом $a$, пусть $b \in G$. Докажите, что существует одно и только одно гомоморфное отображение $f$: $G \to G$, при котором $f(a)=b$; при этом $f$ инъективно тогда и только тогда, когда $o(b)=o(a)$.

**8.2.66.** Пусть $G=\langle a \rangle$ — циклическая группа конечного порядка $n$, $H$ — произвольная группа и $b \in H$. Докажите, что гомоморфное отображение $f$: $G \to H$, такое, что $f(a)=b$, существует тогда и только тогда, когда $o(b)/n$.

**8.2.67.** Пусть $G=\langle a \rangle$ — бесконечная циклическая группа, $H$ — произвольная группа. Докажите, что для любого элемента $b$ из $H$ существует одно и только одно гомоморфное отображение $f$: $G \to H$, при котором $f(a)=b$.

## § 3. ПОДГРУППЫ И СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ. НОРМАЛЬНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ И ФАКТОР-ГРУППЫ. ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМАХ

**8.3.1.** Найдите левые и правые смежные классы группы $S_3$ по подгруппе $\left< \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right>$.

**8.3.2.** Пусть $H$ — подгруппа группы $G$. Докажите, что отображение $gH \mapsto Hg^{-1}$ является биекцией множества левых смежных классов $G$ по $H$ на множество правых смежных классов.

**8.3.3.** Докажите, что множество всех подстановок вида $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ образует подгруппу $H$ в группе $S_n$. Найдите число смежных классов $S_n$ по $H$.

**8.3.4.** Найдите смежные классы группы $\langle \mathbf{C}^*, \cdot, ^{-1} \rangle$ по подгруппе $H$ и изобразите их на комплексной плоскости: а) $H=\mathbf{R}^+$; б) $H=\mathbf{R}^*$; в) $H=\{z \in \mathbf{C} \mid |z|=1\}$.

**8.3.5.** Найдите смежные классы аддитивной группы векторов плоскости, выходящих из фиксированной точки $O$, по подгруппе векторов, лежащих на фиксированной прямой, проходящей через точку $O$. Изобразите смежные классы на плоскости.

**8.3.6.** Докажите, что группа $G$, отличная от единичной группы, не имеет собственных подгрупп тогда и только тогда, когда порядок $G$ есть простое число.

**8.3.7.** Докажите, что любая группа порядка $p$, где $p$ — простое число, является циклической группой.

**8.3.8.** Пусть $G$ — мультипликативная группа всех корней из единицы, т. е. $G$ содержит все корни $n$-й степени из единицы при всевозможных целых $n>0$. Докажите, что для всякого целого положительного $m$ группа $G$ содержит одну и только одну подгруппу порядка $m$ и что эта подгруппа циклическая.

**8.3.9.** Докажите, что для любого целого положительного $n$ группа корней $n$-й степени из единицы является единственной подгруппой порядка $n$ в группе $\langle \boldsymbol{C}^*, \cdot, ^{-1} \rangle$.

**8.3.10** (теорема Эйлера). Обозначим через $\varphi(n)$ порядок мультипликативной группы $\boldsymbol{Z}_n^*$ кольца вычетов по модулю $n$. Докажите, что для любого целого числа $k$, взаимно простого с $n$, имеет место сравнение $k^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$.

**8.3.11** (малая теорема Ферма). Докажите, что если $p$ — простое число, то для любого целого числа $k$ имеет место сравнение $k^p \equiv k \pmod p$.

**8.3.12.** Докажите, что для любого целого нечетного числа $k$, не делящегося на 5, найдется такое целое $m>0$, что число $k^m$ оканчивается единицей. Верно ли это утверждение для четных чисел; для чисел, кратных 5?

**8.3.13.** Докажите, что $3^n \equiv 1 \pmod 7$ тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 \pmod 6$.

**8.3.14.** Докажите, что число $197^{196}$ оканчивается цифрой 1.

**8.3.15.** Найдите остаток от деления: а) $32^{48}$ на 7; б) $152^{23}$ на 7; в) $37^n$ на 11 ($n \in \boldsymbol{N}$).

**8.3.16.** Докажите, что число 99...9 (22 цифры) делится на 23.

**8.3.17.** Докажите, что если $p$ — простое число, отличное от 2 и 5, то число 99...9 ($(p-1)$ цифр) делится на $p$.

**8.3.18.** Докажите, что 1001001001...001 (001 повторяется $5n+4$ раза) делится на $n = 11\,111$.

**8.3.19.** Может ли число вида 11...1 делиться на 23?

**8.3.20.** Пусть $S_n$ — симметрическая группа степени $n$, $A_n$ — множество всех четных подстановок из $S_n$. Проверьте, что $A_n$ — нормальный делитель $S_n$ и число смежных классов $S_n$ по $A_n$ равно 2. Докажите, что если $H$ — подгруппа $G$ и число смежных классов $G$ по $H$ равно 2, то $H$ — нормальный делитель $G$.

**8.3.21.** Проверьте, что группа $A_4$ состоит из тождественной подстановки, восьми трехчленных циклов и трех подстановок, каждая из которых является произведением двух независимых транспозиций.

**8.3.22.** Докажите, что если нормальный делитель группы $A_4$ содержит хотя бы один трехчленный цикл, то он совпадает с $A_4$.

**8.3.23.** Используя результаты задач 8.3.20—8.3.22, докажите, что группа $A_4$ не содержит подгрупп порядка 6, таким образом, теорема, обратная теореме Лагранжа, неверна.

**8.3.24.** Какие из следующих подгрупп являются нормальными делителями (см. 8.1.12):

а) $SL(n, \mathbf{R})$ в $GL(n, \mathbf{R})$;
б) $\{A \in GL(n, \mathbf{R}) \mid \det A > 0\}$ в $GL(n, \mathbf{R})$;
в) $T(n, \mathbf{R})$ в $GL(n, \mathbf{R})$;
г) $UT(n, \mathbf{R})$ в $T(n, \mathbf{R})$;
д) $O(n)$ в $GL(n, \mathbf{R})$;
е) $\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ в $S_n$;
ж) $A_n$ в $S_n$?

**8.3.25.** Докажите, что пересечение нормальных делителей является снова нормальным делителем.

**8.3.26.** Пусть $\langle G, \cdot, ^{-1} \rangle$ — группа, $a, b \in G$. Элементы $a, b$ называются сопряженными, если существует такой элемент $g \in G$, что $b = g^{-1}ag$. Докажите, что отношение сопряженности элементов в группе является отношением эквивалентности. Докажите, что порядки сопряженных элементов равны.

**8.3.27.** Докажите, что в группе $G$ множество $Z(G) = \{g \in G \mid (\forall x)\, g \cdot x = x \cdot g\}$ является нормальным делителем ($Z(G)$ называется центром группы $G$).

**8.3.28.** Докажите, что центр группы $GL(n, \mathbf{R})$ состоит из скалярных матриц, т. е. матриц вида $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$, где $\lambda \neq 0$.

**8.3.29.** Докажите, что центр группы $SL(n, \mathbf{R})$ состоит из одной единичной матрицы.

**8.3.30.** Докажите, что группы $GL(n, \mathbf{R})$ и $SL(n, \mathbf{R})$ не изоморфны.

**8.3.31.** Рассмотрим аддитивную группу рациональных чисел. В следующих смежных классах из фактор-группы

$\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ укажите наименьший неотрицательный представитель: $25{,}3+\boldsymbol{Z}$; $-\frac{42}{5}+\boldsymbol{Z}$; $-\frac{1}{3}+\boldsymbol{Z}$; $5+\boldsymbol{Z}$.

**8.3.32.** Найдите порядки следующих элементов в фактор-группе $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$: $3{,}75+\boldsymbol{Z}$; $4{,}6+\boldsymbol{Z}$; $\frac{2}{3}+\boldsymbol{Z}$.

**8.3.33.** Докажите, что в группе $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ любой элемент имеет конечный порядок.

**8.3.34.** Докажите, что для каждого целого положительного $n$ группа $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ содержит одну и только одну подгруппу порядка $n$ и каждая такая подгруппа циклическая.

**8.3.35.** Докажите, что группа $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ изоморфна группе всех корней из единицы (см. 8.3.8).

**8.3.36.** Докажите, что в каждом смежном классе группы $\langle \boldsymbol{C}, +, - \rangle$ по подгруппе $\langle \boldsymbol{R}, +, - \rangle$ найдется один и только один представитель, который является числом вида $bi$, $b \in \boldsymbol{R}$.

**8.3.37.** Пусть $G=\langle \boldsymbol{C}, +, - \rangle$, $H=\langle \boldsymbol{R}, +, - \rangle$. Докажите, что $G/H \cong H$.

**8.3.38.** Пусть $G=\langle \boldsymbol{Z}[i], +, - \rangle$, $H=\langle \boldsymbol{Z}, +, - \rangle$. Докажите, что $G/H \cong H$.

**8.3.39.** Сколько элементов в фактор-группе $\boldsymbol{Z}_6/\langle \bar{2} \rangle$; $\boldsymbol{Z}_{12}/\langle \bar{3} \rangle$; $\boldsymbol{Z}_{12}/\langle \bar{8} \rangle$; $\boldsymbol{Z}_{12}/\langle \bar{5} \rangle$?

**8.3.40.** Докажите, что фактор-группа циклической группы является циклической группой; если $G$ — конечная циклическая группа, то порядок любой фактор-группы делит порядок группы $G$.

**8.3.41.** Пусть $G=\langle a \rangle$ — циклическая группа, $H$ — подгруппа группы $G$ и порядок $G/H$ равен $k$. Докажите, что $H=\langle a^k \rangle$. Выведите отсюда, что любая подгруппа конечной циклической группы $G=\langle a \rangle$ порядка $n$ имеет вид $\langle a^d \rangle$, где $d$ — делитель $n$ (сравните с задачей 8.2.51).

**8.3.42.** Докажите, что следующие группы изоморфны:

а) $\boldsymbol{R}^*/\boldsymbol{R}^+$ и $S_n/A_n$;
б) $\boldsymbol{C}^*/\boldsymbol{R}^+$ и $U$ $(U=\langle \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z|=1\}, \cdot, {}^{-1} \rangle)$;
в) $\boldsymbol{C}^*/U$ и $\boldsymbol{R}^+$;
г) $U/U_n$ и $U$ $(U_n=\langle \{z \in \boldsymbol{C} \mid z^n=1\}, \cdot, {}^{-1} \rangle)$;
д) $\boldsymbol{C}^*/U_n$ и $\boldsymbol{C}^*$;
е) аддитивная группа $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ и $U$.

**8.3.43.** Докажите, что следующие группы изоморфны:

а) $GL(n, \boldsymbol{R})/SL(n, \boldsymbol{R})$ и $\boldsymbol{R}^*$;
б) $GL(n, \boldsymbol{R})/H$, где $H=\{A\} \det A=\pm 1\}$, и $\boldsymbol{R}^+$;
в) $GL(n, \boldsymbol{R})/H$, где $H=\{A \mid \det A>0\}$, и $\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{R}^+$;
г) $GL(n, \boldsymbol{C})/H$, где $H=\{A \mid |\det A|=1\}$, и $\boldsymbol{R}^+$;
д) $GL(n, \boldsymbol{C})/H$, где $H=\{A \mid \det A>0\}$, и $U$.

**8.3.44.** Для каждого из следующих отображений $\varphi$ проверьте, что оно является гомоморфным отображением групп. Найдите $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$. Укажите, изоморфизм каких групп следует по теореме о гомоморфизмах, и задайте этот изоморфизм:

а) $\varphi$: $S_n \to \{1, -1\}$, $\varphi(\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma$;
б) $\varphi$: $\boldsymbol{Z}[i] \to \boldsymbol{Z}$, $\varphi(a+bi) = b$;
в) $\varphi$: $T(n, \boldsymbol{R}) \to D(n, \boldsymbol{R})$,

$$\varphi\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

г) $\varphi$: $GL(n, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^*$, $\varphi(A) = \det A$;
д) $\varphi$: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}^*$, $\varphi(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$;
е) $\varphi$: $\boldsymbol{C}^* \to \boldsymbol{R}^*$, $\varphi(z) = |z|$;
ж) $\varphi$: $\boldsymbol{C}^* \to \boldsymbol{R}^+$, $\varphi(z) = |z|$.

**8.3.45.** Отображение группы $GL(2, \boldsymbol{Q})$ в себя задается следующим правилом: пусть $\det A = \frac{m}{n}\cdot 2^k$, где $m$, $n$ — нечетные, $k \in \boldsymbol{Z}$, тогда $\varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Докажите, что $\varphi$ — гомоморфное отображение. Найдите $\operatorname{Ker}\varphi$ и докажите, что $GL(2, \boldsymbol{Q})/\operatorname{Ker}\varphi \cong \boldsymbol{Z}$.

**8.3.46.** Пусть $\boldsymbol{Q}^{(p)} = \left\{ \frac{r}{p^n} \,\middle|\, r \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{N} \right\}$, где $p$ — фиксированное простое число. Докажите, что $\boldsymbol{Q}^{(p)}$ — группа относительно операций сложения и перехода к противоположному числу. Докажите, что бинарное отношение $\varphi$ между элементами множеств $\boldsymbol{Q}^{(p)}$ и $\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$:

$$\varphi = \left\{ \left\langle \frac{r}{p^n},\ \cos\frac{2\pi r}{p^n} + i \sin\frac{2\pi r}{p^n} \right\rangle \,\middle|\, r \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{N} \right\} —$$

является отображением и что $\varphi$ — гомоморфное отображение группы $\langle \boldsymbol{Q}^{(p)}, +, - \rangle$ в группу $\langle \boldsymbol{C}^*, \cdot, ^{-1} \rangle$. Найдите $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$.

## § 4. КОЛЬЦА. МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ГРУППА КОЛЬЦА. ХАРАКТЕРИСТИКА КОЛЬЦА

**8.4.1.** Укажите мультипликативную группу каждого из следующих колец (см. 8.1.9): $\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z}_n$; $M(n, \boldsymbol{R})$; $\boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]$; $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$; $\boldsymbol{R}$.

8.4.2. Докажите, что $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Z}_3\right\}$ — поле и его мультипликативная группа является циклической группой порядка 8.

8.4.3. Докажите, что каждое из следующих множеств является подкольцом кольца комплексных чисел:

а) $\mathbf{Z}[i]=\{a+bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$;

б) $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]=\{a+b\sqrt{3}i \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$;

в) $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]=\{a+b\sqrt{5}i \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$;

г) $\mathbf{Z}\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=\left\{\frac{a+b\sqrt{3}i}{2} \middle| a, b \in \mathbf{Z}, a \equiv b \pmod 2\right\}$;

д) $\mathbf{Z}\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\right]=\left\{\frac{a+b\sqrt{7}i}{2} \middle| a, b \in \mathbf{Z}, a \equiv b \pmod 2\right\}$;

е) $\mathbf{Z}\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i\right]=\left\{\frac{a+b\sqrt{11}i}{2} \middle| a, b \in \mathbf{Z}, a \equiv b \pmod 2\right\}$.

Покажите, что в каждом из этих колец для функции $N(z)=|z|^2$ выполняются следующие условия:

1) $N(z)$ — целое неотрицательное число;

2) $N(z_1 \cdot z_2)=N(z_1) \cdot N(z_2)$;

3) $N(z)=0$ тогда и только тогда, когда $z=0$;

4) $z$ — обратимый элемент тогда и только тогда, когда $N(z)=1$.

Найдите мультипликативную группу каждого из колец.

8.4.4. Пусть $p$ — простое число. Обозначим через $\mathbf{Q}_p$ множество всех рациональных чисел, которые можно представить в виде дроби со знаменателем, не делящимся на $p$. Докажите, что $\mathbf{Q}_p$ — подкольцо кольца рациональных чисел. Найдите мультипликативную группу кольца $\mathbf{Q}_p$. Докажите, что любой элемент $a$, отличный от 0, из $\mathbf{Q}_p$ можно представить в виде $a=p^n\varepsilon$, где $n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon \in \mathbf{Q}_p^*$.

8.4.5. Пусть $A$ — область целостности, $A[x]$ — кольцо многочленов над $A$. Докажите, что $A[x]$ — область целостности и $(A[x])^*=A^*$.

8.4.6. Пусть $A$ — кольцо с единицей $e$; $f$ — отображение $\mathbf{Z}$ в $A$, заданное правилом $f(m)=me$. Докажите, что $f$ — гомоморфное отображение колец. Для каких колец $A$ отображение $f$ инъективно?

8.4.7. Найдите характеристику каждого из следующих колец:

$\mathbf{Z}[i]$; $\mathbf{Z}[x]$; $M(2, \mathbf{Q})$; $\mathbf{Z}_6$; $M(2, \mathbf{Z}_3)$; $M(n, \mathbf{Z}_p)$; $\mathbf{Z}_n[x]$.

8.4.8. Пусть $A$ — область целостности. Докажите, что $\operatorname{char} A[x]=\operatorname{char} A$.

8.4.9. Пусть $A$ — кольцо, $\operatorname{char} A=n\neq 0$. Докажите, что $A$ содержит подкольцо, изоморфное кольцу $\mathbf{Z}_n$.

**8.4.10.** Докажите, что любое кольцо нулевой характеристики содержит подкольцо, изоморфное кольцу целых чисел.

**8.4.11.** Приведите примеры бесконечных колец ненулевой характеристики.

**8.4.12.** Докажите, что любое поле $F$ характеристики $p$ содержит подполе $K$, изоморфное полю $\mathbf{Z}_p$, и $F$ можно рассматривать как векторное пространство над $K$.

**8.4.13.** Докажите, что число элементов любого конечного поля равно степени некоторого простого числа $p$.

**8.4.14.** Докажите, что любое поле нулевой характеристики содержит подполе, изоморфное $\mathbf{Q}$.

**8.4.15.** Пусть $A$ и $B$ — области целостности, $f$ — кольцевой мономорфизм $A$ в $B$. Докажите, что $\mathrm{char}\, A = \mathrm{char}\, B$. Покажите, что для колец, не являющихся областями целостности, это утверждение, вообще говоря, неверно.

## § 5. ИДЕАЛЫ КОЛЬЦА. ФАКТОР-КОЛЬЦО. ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМАХ ДЛЯ КОЛЕЦ

**8.5.1.** Являются ли идеалами:

а) $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Z}[i]$;
б) $\{a+ai \mid a \in \mathbf{Z}\}$ в $\mathbf{Z}[i]$;
в) $3\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Z}$;
г) $\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R}\right\}$ в $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R}\right\}$;
д) $\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{Q}\right\}$ в $\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Q}\right\}$;
е) $\{(a, a) \mid a \in \mathbf{R}\}$ в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$;
ж) $\{2a+bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ в $\mathbf{Z}[i]$;
з) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R}\right\}$ в $M(2, \mathbf{R})$;
и) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R}\right\}$ в $M(2, \mathbf{R})$;
к) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R}\right\}$ в $M(2, \mathbf{R})$;
л) $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R}\right\}$ в $M(2, \mathbf{R})$;
м) $\{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$ в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$;
н) $\left\{\frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbf{Z} \wedge p \nmid n \wedge p / m\right\}$ в $\mathbf{Q}_p$;
о) $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Z}[x]$;
п) $(n\mathbf{Z})[x]$ в $\mathbf{Z}[x]$;

р) множество всех многочленов из $\mathbf{Z}[x]$ с чётным старшим коэффициентом в $\mathbf{Z}[x]$?

**8.5.2.** Являются ли идеалами кольца $\mathbf{Z}$ следующие множества:

а) $\{n \in \mathbf{Z} \mid \text{НОД}(n, 7) = 1\}$;
б) $\{n \in \mathbf{Z} \mid n/24\}$;
в) $\{n \in \mathbf{Z} \mid 6/n \wedge 24/n^2\}$;
г) $\{n \in \mathbf{Z} \mid 9/21n\}$?

**8.5.3.** Найдите все идеалы в кольце $\mathbf{Z}$; $\mathbf{Z}_8$; $\mathbf{Z}_{25}$.

**8.5.4.** Докажите, что для любого целого числа $k$ идеал $k\mathbf{Z}_n$ совпадает с $d\mathbf{Z}_n$, где $d = \text{НОД}(n, k)$.

**8.5.5.** Опишите все идеалы кольца $\mathbf{Z}_n$.

**8.5.6.** Пусть $f \colon A \to B$ — кольцевой гомоморфизм. Докажите, что $\operatorname{Ker} f$ — идеал кольца $A$. Является ли $\operatorname{Im} f$ идеалом кольца $B$?

**8.5.7.** Докажите, что кольцевой гомоморфизм $f$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

**8.5.8.** Пусть $A$ — кольцо, $T = \{a \in A \mid (\exists n \in \mathbf{Z}^+)\ na = 0\}$. Докажите, что $T$ — идеал кольца $A$.

**8.5.9.** Пусть $A$ — коммутативное кольцо, $AnnA = \{a \in A \mid (\forall x \in A)\ a \cdot x = 0\}$. Докажите, что $AnnA$ — идеал кольца $A$. Докажите, что если $A$ — кольцо с единицей, то $AnnA = \{0\}$. Приведите пример коммутативного кольца $A$, такого, что $AnnA \neq \{0\}$.

**8.5.10.** Докажите, что если $J_1$, $J_2$ — левые (правые) идеалы кольца $A$, то $J_1 \cap J_2$ — левый (правый) идеал $A$. Докажите, что пересечение любого множества идеалов является идеалом.

**8.5.11.** Пусть $J_1$, $J_2$ — идеалы кольца $A$. Суммой идеалов $J_1$ и $J_2$ называется множество

$$J_1 + J_2 = \{a \in A \mid (\exists x \in J_1)(\exists y \in J_2)\ a = x + y\}.$$

Докажите, что $J_1 + J_2$ — наименьший идеал кольца $A$, содержащий $J_1$ и $J_2$.

**8.5.12.** Укажите все целые числа, входящие в идеал $6\mathbf{Z} + 8\mathbf{Z}$, $3\mathbf{Z} + 5\mathbf{Z}$, $3\mathbf{Z} + 6\mathbf{Z}$. Всегда ли выполняется равенство $J_1 + J_2 = J_1 \cup J_2$?

**8.5.13.** Пусть $J_1$, $J_2$ — идеалы кольца $A$. Докажите, что $J_1 + J_2 = J_1 \cup J_2$ тогда и только тогда, когда $J_1 \subseteq J_2$ или $J_2 \subseteq J_1$.

**8.5.14.** Пусть $A$ — область целостности, $a$, $b \in A$. Докажите, что $(a) + (b)$ — наименьший идеал, содержащий элементы $a$, $b$, и он состоит из всех элементов вида $xa + yb$, где $x$, $y$ — произвольные элементы из $A$. Этот идеал обозначают $(a, b)$.

**8.5.15.** Пусть $A$ — кольцо, $J_1$, $J_2$ — идеалы $A$. Обозначим $J_1 \cdot J_2$ — множество всех элементов из $A$, которые можно представить в виде $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, где $x_1, \ldots, x_n \in J_1$, $y_1, \ldots, y_n \in J_2$. Докажите, что $J_1 \cdot J_2$ — идеал $A$ и $J_1 \cdot J_2 \subseteq J_1 \cap J_2$.

**8.5.16.** Докажите, что в области целостности $A$, если $(a) \cap (b) = (0)$, то $a=0$ или $b=0$.

**8.5.17.** Докажите, что $\mathbf{Z}[i] = (1) = (i) = (-i) = (-1)$.

**8.5.18.** Какие из чисел $3-5i$, $4+6i$, $-15+9i$, $5-3i$ принадлежат идеалу $(3+5i)$ кольца целых гауссовых чисел? Какие из них порождают этот идеал?

**8.5.19.** Найдите идеал (2) в $\mathbf{Z}$; в $\mathbf{Z}[i]$; в $\mathbf{Z}[x]$; в $\mathbf{Q}[x]$.

**8.5.20.** Укажите, какие включения имеют место для следующих идеалов кольца целых чисел: $3\mathbf{Z}$, $2\mathbf{Z}$, $4\mathbf{Z}$, $5\mathbf{Z}$, $6\mathbf{Z}$, $(-11)\mathbf{Z}$, $24\mathbf{Z}$, $(-4)\mathbf{Z}$, $13\mathbf{Z}$, $33\mathbf{Z}$, $12\mathbf{Z}$. Нарисуйте граф и сравните его с графом отношения делимости на множестве $\{2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 24, 33\}$.

**8.5.21.** Пусть $J$ — идеал кольца $F[x]$, где $F$ — поле. Докажите, что $J = (f(x))$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ — многочлен наименьшей степени в $J$.

**8.5.22.** Докажите, что в области целостности $A$ равенство $(a) = A$ имеет место тогда и только тогда, когда $a \in A^*$.

**8.5.23.** Докажите, что в поле нет собственных идеалов, т. е. идеалов, отличных от нулевого и самого поля.

**8.5.24.** Докажите, что если $J$ — ненулевой идеал кольца $M(2, \mathbf{R})$, то $J$ содержит матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Выведите отсюда, что $J = M(2, \mathbf{R})$.

**8.5.25.** Докажите, что кольцо $M(n, \mathbf{R})$ простое, т. е. не содержит собственных (двусторонних) идеалов.

**8.5.26.** Докажите, что если $F$ — поле, то $M(n, F)$ — простое кольцо.

**8.5.27.** Приведите примеры левых (правых) собственных идеалов в кольце $M(2, \mathbf{R})$.

**8.5.28.** Пусть $f\colon F \to A$ — эпиморфное отображение поля $F$ на ненулевое кольцо $A$. Докажите, что $f$ — изоморфное отображение.

**8.5.29.** Пусть $f\colon M(n, F) \to A$ — гомоморфное отображение кольца матриц над полем $F$ в произвольное кольцо $A$, причем $f(E) \neq 0$ ($E$ — единичная матрица). Докажите, что $f$ — мономорфизм.

**8.5.30.** Укажите несколько целых чисел, принадлежащих смежному классу $2+6\mathbf{Z}$ фактор-кольца $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

**8.5.31.** При каком условии имеет место равенство смежных классов $n+6\mathbf{Z} = 0+6\mathbf{Z}$?

**8.5.32.** При каком условии $(k+6\mathbf{Z})\cdot(l+6\mathbf{Z})=0+6\mathbf{Z}$? Приведите примеры таких целых чисел $k$ и $l$, для которых выполняется указанное равенство.

**8.5.33.** Сколько элементов в фактор-кольце $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$? Составьте таблицы сложения и умножения для элементов этого фактор-кольца.

**8.5.34.** Докажите, что для любого целого числа $a$, отличного от нуля, число элементов в фактор-кольце $\mathbf{Z}/(a)$ равно $|a|$.

**8.5.35.** Укажите числа, принадлежащие одному смежному классу по идеалу (2) в кольце $\mathbf{Z}[i]$: $-3+5i$; $7-8i$; $25+3i$; $47+10i$; $-2$; $1+i$; $1-i$; $3i$; $1$; $-1$; $2+i$; $-2+3i$.

**8.5.36.** Какие из следующих равенств имеют место в фактор-кольце $\mathbf{Z}[i]/(2)$:

а) $1+2i+(2)=1-2i+(2)$;
б) $1+(2)=i+(2)$;
в) $3i+(2)=18-i+(2)$;
г) $18-4i+(2)=0+(2)$;
д) $3-i+(2)=3+i+(2)$;
е) $3i+(2)=2+i+(2)$?

**8.5.37.** Найдите все элементы фактор-кольца $\mathbf{Z}[i]/(2)$. Составьте таблицы сложения и умножения. Покажите, что это фактор-кольцо не является областью целостности.

**8.5.38.** С каким свойством числа 2 в кольце $\mathbf{Z}[i]$ связан тот факт, что в кольце $\mathbf{Z}[i]/(2)$ есть делители нуля?

**8.5.39.** Докажите, что число 2 разлагается в кольце $\mathbf{Z}[i]$ в произведение двух необратимых сомножителей.

**8.5.40.** Какие из следующих равенств имеют место в фактор-кольце $\mathbf{Z}[i]/(3)$:

а) $1+2i+(3)=1-2i+(3)$;
б) $1+(3)=i+(3)$;
в) $3i+(3)=3+(3)$;
г) $3i+(3)=0+(3)$;
д) $3-i+(3)=3+i+(3)$?

**8.5.41.** Укажите все элементы кольца $\mathbf{Z}[i]/(3)$, составьте таблицы сложения и умножения. Докажите, что $\mathbf{Z}[i]/(3)$ — поле.

**8.5.42.** Сколько элементов содержит фактор-кольцо $\mathbf{Z}[i]/(5)$? Является ли оно полем?

**8.5.43.** Докажите, что фактор-кольцо $\mathbf{Z}[i]/(13)$ не является областью целостности.

**8.5.44.** Докажите, что если в области целостности $A$ элемент $a$, отличный от нуля, разлагается в произведение двух необратимых сомножителей, то фактор-кольцо $A/(a)$ содержит делители нуля.

**8.5.45.** Пусть $F$ — поле. Опишите все его фактор-кольца.

**8.5.46.** Докажите, что смежный класс $x^2+x+1+(x^3-1)$ является делителем нуля в кольце $\mathbf{R}[x]/(x^3-1)$.

**8.5.47.** В смежном классе $x^4-3x^3+5x^2-7x+1+(x^2-2)$

из фактор-кольца $\boldsymbol{Q}[x]/(x^2-2)$ укажите представители, степени которых меньше 4. Найдите представитель наименьшей возможной степени.

**8.5.48.** В смежном классе $x^3+3x^2-5x+2+(x^2+1)$ из фактор-кольца $\boldsymbol{R}[x]/(x^2+1)$ найдите многочлен наименьшей возможной степени.

**8.5.49.** В смежном классе $x^5-2x^3+5x^2-2x+1+(x^2+1)$ из фактор-кольца $\boldsymbol{R}[x]/(x^2+1)$ укажите многочлен наименьшей возможной степени. Сколько таких многочленов?

**8.5.50.** Среди следующих элементов фактор-кольца $\boldsymbol{R}[x]/(x^2+x+1)$ укажите равные нулю:

а) $x^3+x+1+(x^2+x+1)$; в) $x^3-1+(x^2+x+1)$;
б) $x^3+1+(x^2+x+1)$; г) $x^3+x^2+x+(x^2+x+1)$.

**8.5.51.** Приведите примеры многочленов из $\boldsymbol{R}[x]$ ($\boldsymbol{Q}[x]$), принадлежащих смежному классу $x+(x^2+1)$ из фактор-кольца $\boldsymbol{R}[x]/(x^2+1)$ ($\boldsymbol{Q}[x]/(x^2+1)$).

**8.5.52.** При каком условии в фактор-кольце $\boldsymbol{Q}[x]/(x^2)$ имеет место равенство $(f(x)+(x^2))\cdot(g(x)+(x^2))=0+(x^2)$? Приведите примеры таких многочленов $f(x)$, $g(x)$ из $\boldsymbol{Q}[x]$, для которых выполняется указанное равенство. Является ли фактор-кольцо $\boldsymbol{Q}[x]/(x^2)$ областью целостности?

**8.5.53.** При каком условии в фактор-кольце $\boldsymbol{R}[x]/(x^2+1)$ выполняется равенство $(f(x)+(x^2+1))\cdot(g(x)+(x^2+1))=0+(x^2+1)$? Есть ли делители нуля в кольце $\boldsymbol{R}[x]/(x^2+1)$?

**8.5.54.** Докажите, что в каждом смежном классе кольца $\boldsymbol{R}[x]$ по идеалу $(x)$ содержится одно и только одно действительное число. Найдите такое число в смежном классе $x^{385}-3x^{197}+\sqrt{2}x^{31}+8+(x)$.

**8.5.55.** Докажите, что кольца $\boldsymbol{R}[x]/(x)$ и $\boldsymbol{R}$ изоморфны.

**8.5.56.** Докажите, что кольца $\boldsymbol{Z}[x]/(x)$ и $\boldsymbol{Z}$ изоморфны.

**8.5.57.** Докажите, что если $A$ — область целостности, $J$ — идеал $A$, отличный от $A$, то $A/J$ является областью целостности тогда и только тогда, когда выполняется условие $(\forall a, b\in A)\ a\cdot b\in J\rightarrow a\in J\vee b\in J$.

**8.5.58.** Докажите, что идеал $(x)+(3)$ кольца $\boldsymbol{Z}[x]$ состоит из всех целочисленных многочленов со свободным членом, кратным 3. Из скольких элементов состоит фактор-кольцо $\boldsymbol{Z}[x]/(x, 3)$?

**8.5.59.** Докажите, что $\boldsymbol{Z}[x]/(x, 3)$ — поле, изоморфное полю $\boldsymbol{Z}_3$.

**8.5.60.** Идеал $J$ кольца $A$, отличный от $A$, называется максимальным идеалом, если любой идеал $K$ кольца $A$, удовлетворяющий условию $J\subseteq K\subseteq A$, совпадает с $J$ или с $A$. Докажите, что идеал $(x, 3)$ является максимальным идеалом $\boldsymbol{Z}[x]$. Является ли максимальным в $\boldsymbol{Z}[x]$ идеал $(x)$?

**8.5.61.** Пусть $A$ — область целостности, $J$ — идеал $A$. Докажите, что $A/J$ является полем тогда и только тогда, когда $J$ — максимальный идеал.

**8.5.62.** Идеал $J$ области целостности $A$ называется простым, если $A/J$ — область целостности. Приведите примеры простых идеалов в $\mathbf{Z}[x]$, не являющихся максимальными.

**8.5.63.** Пусть $A$ — кольцо, $J$ — идеал $A$. Какие из следующих утверждений истинны:

а) если $A$ — коммутативное кольцо, то и $A/J$ — коммутативное кольцо;

б) если $A$ — кольцо с единицей, то и $A/J$ — кольцо с единицей;

в) если $A$ — кольцо с делителями нуля, то и $A/J$ — кольцо с делителями нуля;

г) если $A$ — кольцо без делителей нуля, то и $A/J$ — кольцо без делителей нуля;

д) если $A$ — область целостности, то и $A/J$ — область целостности?

**8.5.64.** Проверьте, что следующие отображения являются гомоморфными отображениями колец:

а) $f\colon \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\, a,\ b \in \mathbf{R}\right\} \to \mathbf{R},\ f\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a - b;$

б) $f\colon \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \middle|\, a,\ b \in \mathbf{Q}\right\} \to \mathbf{Q},\ f\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = a + b;$

в) $f\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(\langle a,\ b\rangle) = a;$

г) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ f(a) = \langle a,\ a\rangle;$

д) $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[i],\ f(a) = a;$

е) $f\colon \mathbf{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbf{Q}[\sqrt{2}],\ f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2};$

ж) $f\colon \mathbf{Z}[x] \to \mathbf{Z},\ f(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0;$

з) $f\colon \mathbf{Q}[x] \to \mathbf{R},\ f(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0 + a_1\sqrt{2} + \ldots + a_n(\sqrt{2})^n.$

Для каждого отображения найдите ядро и образ. Укажите, какой изоморфизм следует по теореме о гомоморфизмах, и задайте этот изоморфизм.

## § 6. ПОЛЕ ЧАСТНЫХ ОБЛАСТИ ЦЕЛОСТНОСТИ

**8.6.1.** Докажите, что $\mathbf{Q}$ — поле частных кольца $\mathbf{Z}$; $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ — поле частных $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

**8.6.2.** Является ли поле комплексных чисел полем частных кольца целых гауссовых чисел?

**8.6.3.** Укажите поле частных кольца $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$. Докажите, что поле частных кольца $\boldsymbol{Z}\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$ совпадает с полем частных кольца $\boldsymbol{Z}[i\sqrt{3}]$ (см. задачу 8.4.3).

**8.6.4.** Укажите поле частных кольца $\boldsymbol{Z}[x]$. Докажите, что поля частных колец $\boldsymbol{Z}[x]$ и $\boldsymbol{Q}[x]$ совпадают.

**8.6.5.** Пусть $a$, $b$ — элементы поля $F$, $b\neq 0$. Обозначим $ab^{-1}=\frac{a}{b}$. Докажите, что в поле для любых элементов $a$, $b$, $c$, $d$, таких, что $b\neq 0$, $d\neq 0$, выполняются следующие условия:

а) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда $ad=bc$;

б) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$;

в) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

**8.6.6.** Пусть $A$ — область целостности, $F$ — поле, содержащее $A$ в качестве подкольца. Докажите, что $T=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a, b\in A,\ b\neq 0\right\}$ является подполем $F$ и что $T$ — поле частных кольца $A$.

**8.6.7.** Пусть $F$ — поле частных области целостности $A$. Докажите, что $\operatorname{char} F=\operatorname{char} A$.

**8.6.8.** Пусть $F$ — поле частных области целостности $A$. Докажите, что любой мономорфизм $\varphi\colon A\to K$, где $K$ — поле, продолжается, и притом единственным образом, до мономорфизма $\psi\colon F\to K$, т. е. существует один и только один мономорфизм $\psi\colon F\to K$, такой, что $(\forall a\in A)\,\varphi(a)=\psi(a)$.

**8.6.9.** Пусть $F_1$, $F_2$ — поля частных областей целостности $A_1$, $A_2$ соответственно. Докажите, что любой изоморфизм $\varphi\colon A_1\to A_2$ продолжается, и притом единственным образом, до изоморфизма $\psi\colon F_1\to F_2$.

## § 7. ДЕЛИМОСТЬ В ОБЛАСТИ ЦЕЛОСТНОСТИ. ПРИВОДИМЫЕ И НЕПРИВОДИМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

**8.7.1.** Докажите, что следующие условия равносильны для произвольных элементов $a$, $b$ области целостности:

а) $a$ ассоциирован с $b$;

б) существует обратимый элемент $\varepsilon$, такой, что $a=\varepsilon b$;

в) $(a)=(b)$, $(a)$ — главный идеал, порожденный элементом $a$;

г) $(\forall d)\, d/a \leftrightarrow d/b$.

**8.7.2.** Докажите, что в поле все ненулевые элементы ассоциированы между собой.

**8.7.3.** Пусть $F$ — поле. Покажите, что в каждом классе ассоциированных между собой многочленов из $F[x]$ существует один и только один многочлен со старшим коэффициентом 1.

**8.7.4.** Докажите, что элементы $2$, $-2$, $2i$, $-2i$ приводимы в кольце $\mathbf{Z}[i]$.

**8.7.5.** Докажите, что числа $13$, $-13$, $13i$, $-13i$ приводимы в кольце $\mathbf{Z}[i]$.

**8.7.6.** Докажите, что числа $3$, $-3$, $3i$, $-3i$ неприводимы в кольце $\mathbf{Z}[i]$.

**8.7.7.** Докажите, что если элемент $a$ неприводим в области целостности, то и любой элемент, ассоциированный с ним, неприводим.

**8.7.8.** Какие из следующих чисел приводимы в кольце $\mathbf{Z}[i]$: $5$; $7$; $2+i$; $1+2i$; $1+3i$; $1-3i$; $3+i$; $3-i$?

**8.7.9.** Докажите, что если $a \in \mathbf{Z}[i]$ и $N(a)$ — простое число, то $a$ неприводим в $\mathbf{Z}[i]$ (напомним, что $N(a) = |a|^2$).

**8.7.10.** Докажите, что в $\mathbf{Z}[i]$ простое число $p$ является приводимым элементом тогда и только тогда, когда $p$ можно представить в виде $p = m^2 + n^2$, где $m$, $n \in \mathbf{Z}$.

**8.7.11.** Пусть $A$ — область целостности, не являющаяся полем, $p \in A$ и $A/(p)$ — поле. Докажите, что $p$ — неприводимый элемент. Покажите, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

**8.7.12.** Пусть $p$ — простое число. Докажите, что в кольце $\mathbf{Q}_p$ (см. задачу 8.4.4) неприводимыми элементами являются $p$ и все ассоциированные с $p$, и только они.

**8.7.13.** Какие из следующих элементов приводимы в кольце $\mathbf{Z}[x]$; $\mathbf{Q}[x]$; $\mathbf{R}[x]$: $6x^2+2$; $6x^2-2$; $4x^2-1$; $x^3-2$; $6$; $1$?

**8.7.14.** Найдите все нетривиальные делители 6 в кольце $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$.

**8.7.15.** Пусть $d$ — наибольший общий делитель $a$, $b$ в области целостности $A$, $a_1$ ассоциирован с $a$, $b_1$ ассоциирован с $b$. Докажите, что $d$ — наибольший общий делитель $a_1$, $b_1$.

**8.7.16.** Пусть $A$ — область целостности и $d$ — наибольший общий делитель элементов $a$, $b$ из $A$, $d_1$ ассоциирован с $d$. Докажите, что $d_1$ также наибольший общий делитель $a$, $b$. Докажите, что любые два наибольших общих делителя элементов $a$, $b$ ассоциированы.

**8.7.17.** Пусть в области целостности $A$ имеет место равенство идеалов $(a, b) = (d)$. Докажите, что $d$ — наибольший общий делитель $a$ и $b$.

**8.7.18.** Укажите, для каких пар целых чисел $a$, $b$ выполняется равенство $(a, b)=\mathbf{Z}$.

**8.7.19.** Пусть $A$ — область целостности, $a$, $b$, $m \in A$ и $(a)\cap(b)=(m)$. Докажите, что $m$ — наименьшее общее кратное $a$ и $b$.

**8.7.20.** Найдите все пары целых положительных чисел $a$, $b$, удовлетворяющих условиям $a+b=360$, НОД $(a, b)=18$.

**8.7.21.** Пусть $a$, $b$ — взаимно простые целые числа. Найдите наибольший общий делитель следующих пар чисел:

а) $\langle a+b, a\rangle$; г) $\langle a+b, a^2+b^2\rangle$;
б) $\langle a+b, b\rangle$; д) $\langle a^m, b^n\rangle$, $m, n \in \mathbf{Z}^+$;
в) $\langle a+b, ab\rangle$; е) $\langle 3a+5b, 7a+12b\rangle$.

## § 8. ФАКТОРИАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА. КОЛЬЦА ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ. ЕВКЛИДОВЫ КОЛЬЦА

**8.8.1.** Докажите, что в любом факториальном кольце для любых элементов $a$, $b$ выполняются условия:

а) если $c$ делится на два взаимно простых элемента $a$ и $b$, то $c$ делится на их произведение $ab$;

б) если $ab$ делится на $c$, $a$ и $c$ взаимно просты, то $b$ делится на $c$;

в) если $a$ — неприводимый элемент, то для любого элемента $b$ либо $a$, $b$ взаимно просты, либо $b$ делится на $a$;

г) если $a$ и $b$ — неприводимые элементы, то либо $a$ и $b$ ассоциированы, либо $a$ и $b$ взаимно просты.

**8.8.2.** Пусть $A$ — факториальное кольцо, $a$, $b$ — ненулевые и необратимые элементы из $A$. Пусть $a=\varepsilon_1 p_1^{k_1}\ldots p_s^{k_s}$, $b=\varepsilon_2 p_1^{l_1}\ldots p_s^{l_s}$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in A^*$, $p_1, \ldots, p_s$ — попарно неассоциированные неприводимые элементы из $A$, $k_1, \ldots, k_s$, $l_1, \ldots, l_s$ — целые неотрицательные числа. Докажите, что НОД $(a, b)=$ $=p_1^{\min\{k_1, l_1\}}\ldots p_s^{\min\{k_s, l_s\}}$; НОК $(a, b)=p_1^{\max\{k_1, l_1\}}\ldots p_s^{\max\{k_s, l_s\}}$.

**8.8.3.** Пусть $A$ — факториальное кольцо, $a$, $b \in A$, $m=$ НОК $(a, b)$, $d=$ НОД $(a, b)$. Докажите, что $a\cdot b$, $m\cdot d$ — ассоциированные элементы.

**8.8.4.** Докажите, что в кольце $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ числа 2 и $1+i\sqrt{5}$ взаимно просты.

**8.8.5.** Докажите, что в $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ не существует наибольшего общего делителя чисел 6 и $2+2i\sqrt{5}$.

**8.8.6.** Пусть $a$ — приводимый элемент области целостности $A$. Докажите, что идеал $(a)$ не максимальный. Приведите пример неприводимого элемента $p$ в некоторой области целостности, такого, что $(p)$ не является максимальным идеалом.

**8.8.7.** Пусть $A$ — кольцо главных идеалов, $a \in A$, $a \neq 0$. Докажите, что $(a)$ — максимальный идеал тогда и только тогда, когда $a$ — неприводимый элемент.

**8.8.8.** Пусть $A$ — кольцо главных идеалов, $a \in A$, $a \neq 0$. Докажите, что идеал $(a)$ кольца $A$ является максимальным идеалом тогда и только тогда, когда $(a)$ — простой идеал (см. задачу 8.5.62). Верно ли это утверждение для произвольной области целостности?

**8.8.9.** Пусть $A$ — кольцо главных идеалов, $a \in A$, $a \neq 0$. Докажите, что фактор-кольцо $A/(a)$ является полем тогда и только тогда, когда $a$ — неприводимый элемент. Верно ли это утверждение для произвольной области целостности?

**8.8.10.** Докажите, что в кольце $\mathbf{Z}$ выполняются следующие условия:

а) $(10) \subset (5)$;

б) если $J$ — идеал $\mathbf{Z}$, $(10) \subseteq J \subseteq (5)$, то $J = (10)$ или $J = (5)$. Приведите еще примеры пар чисел $k$, $l$ из $\mathbf{Z}$, таких, чтобы идеалы $(k)$, $(l)$ удовлетворяли условиям а), б).

**8.8.11.** Пусть в кольце главных идеалов $A$ элементы $u$, $v$ удовлетворяют условиям а) $(u) \subset (v)$; б) если $J$ — идеал кольца $A$, $(u) \subseteq J \subseteq (v)$, то $J = (u)$ или $J = (v)$. Как связаны между собой элементы $u$, $v$?

**8.8.12.** Покажите, что в кольце $\mathbf{Z}[x]$ существует идеал $J$, такой, что $(x^2) \subset J \subset (x)$. Сравните этот результат с задачей 8.8.11.

**8.8.13.** Докажите, что идеал $(x, k)$ в кольце $\mathbf{Z}[x]$ не является главным, если $k \neq 0$; $\pm 1$.

**8.8.14.** Пусть $A$ — кольцо главных идеалов, $a$, $b \in A$ и $d$ — наибольший общий делитель $a$ и $b$. Докажите, что имеет место равенство идеалов $(a, b) = (d)$. Докажите, что для произвольной области целостности это утверждение, вообще говоря, неверно.

**8.8.15.** Пусть $A$ — кольцо главных идеалов. Докажите, что для элементов $a$, $b$ из $A$ равенство $A = (a, b)$ выполняется тогда и только тогда, когда $a$ и $b$ взаимно просты. Верно ли это утверждение для элементов произвольной области целостности?

**8.8.16.** Может ли при делении целого числа $a$ на целое число $b \neq 0$ получиться частное $q$ и некоторый остаток $r$, если:

а) $q = 19$, $a = 555$;     в) $a = 721$, $q = 39$?

б) $a = 589$, $q = 275$;

**8.8.17.** Выполните деление с остатком:

а) $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ на $x^2-3x+1$;
б) $x^3-3x^2-x-1$ на $3x^2-2x+1$;
в) $x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ на $x-1$.

**8.8.18.** Выполните деление с остатком в кольце $\boldsymbol{Z}[i]$:

а) 32 на $2+3i$;
б) $-11+13i$ на $3-i$;
в) $15+4i$ на 10;
г) $15+4i$ на $1-2i$;
д) $3+5i$ на $7+i$.

**8.8.19.** Какие из следующих многочленов принадлежат идеалу $(x^2-2)$ кольца $\boldsymbol{Q}[x]$:

а) $3x^5-4x^4+x^2-7x+1$;
б) $4x^4-3x^3+2x^2-3x+5$;
в) $\frac{3}{2}x^3-\frac{5}{6}x+2$;
г) $3x^4-\frac{1}{2}x^3-5x^2+x-2$;
д) $\frac{1}{2}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-x-2\sqrt{2}$?

**8.8.20.** Найдите целое число, порождающее идеал $(a, b)$ в $\boldsymbol{Z}$:

а) $a=342$, $b=274$; б) $a=-591$, $b=348$;
в) $a=-759$, $b=-198$.

Представьте найденное число в виде $au+bv$, $u$, $v\in\boldsymbol{Z}$.

**8.8.21.** Найдите многочлен, порождающий в $\boldsymbol{Q}[x]$ идеал $(f(x); g(x))$:

а) $f(x)=3x^3-2x+2$, $g(x)=x^2-1$;
б) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$, $g(x)=x^3+x^2-x-1$;
в) $f(x)=x^6-7x^4+8x^3-7x+7$, $g(x)=3x^5-7x^3+3x^2-7$;
г) $f(x)=x^3-1$, $g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$;
д) $f(x)=x^4-4x^3+1$, $g(x)=x^3-3x^2+1$;
е) $f(x)=x^{33}-1$, $g(x)=x^{18}-1$.

Представьте найденный многочлен в виде $f(x)u(x)+g(x)v(x)$, где $u(x)$, $v(x)\in\boldsymbol{Q}[x]$.

**8.8.22.** Найдите элемент, порождающий идеал $(a, b)$ в $\boldsymbol{Z}[i]$:

а) $a=13+2i$, $b=-5-3i$;
б) $a=5+i$, $b=-4+7i$;
в) $a=7+2i$, $b=2-7i$.

**8.8.23.** Пусть $F$ — поле, $f(x)\in F[x]$. Докажите, что многочлены $g(x)$ и $h(x)$ принадлежат одному смежному классу кольца $F[x]$ по идеалу $(f(x))$ тогда и только тогда, когда остатки от деления $g(x)$ и $h(x)$ на $f(x)$ равны.

**8.8.24.** Докажите, что кольцо $\boldsymbol{R}[x]/(x-2)$ изоморфно $\boldsymbol{R}$.

**8.8.25.** Докажите изоморфность колец:

а) $\boldsymbol{Q}[x]/(x^2-2)$ и $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$; б) $\boldsymbol{R}[x]/(x^2+1)$ и $\boldsymbol{C}$.

**8.8.26.** Докажите, что фактор-кольцо $\boldsymbol{Q}[x]/(x^2-x+1)$ является полем, и найдите смежный класс, обратный к $3x^3-2x^2+x+2+(x^2-x+1)$.

**8.8.27.** Какие из следующих колец являются полями:

а) $\boldsymbol{Z}/(105, 258)$; г) $\boldsymbol{C}[x]/(x^3+1, x^6-1)$;
б) $\boldsymbol{Z}/(135, -75)$; д) $\boldsymbol{Z}_2[x]/(x^5+x^4+\bar{1}, x^4+x^2+\bar{1})$?
в) $\boldsymbol{R}[x]/(x^3-1, x^3+2x^2+2x+1)$;

**8.8.28.** Пусть $F$ — поле, $f(x)\in F(x)$ и $\deg f(x)>0$. Докажите, что смежный класс $g(x)+(f(x))$ из фактор-кольца $F[x]/(f(x))$ обратим тогда и только тогда, когда НОД $(g(x), f(x))=1$.

**8.8.29.** Докажите, что любой ненулевой смежный класс $g(x)+(f(x))$ из $F[x]/(f(x))$, где $F$ — поле, либо обратим, либо делитель нуля.

**8.8.30.** Пусть $p(x)$ — неприводимый многочлен из кольца $F[x]$, где $F$ — поле, $f(x)$ — произвольный многочлен из $F[x]$. Докажите, что идеал $(p(x), f(x))$ совпадает либо с идеалом $(p(x))$, либо со всем кольцом $F[x]$.

**8.8.31.** Пусть $g(x)$ и $f(x)$ — неприводимые многочлены из $\boldsymbol{Q}[x]$, $a$ — их общий комплексный корень. Докажите, что многочлены $g(x)$ и $f(x)$ ассоциированы в $\boldsymbol{Q}[x]$.

**8.8.32.** Пусть $f(x), g(x)\in\boldsymbol{R}(x)$ и $f(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что $f(x)$ и $g(x)$ либо взаимно просты, либо степень их наибольшего общего делителя не меньше двух.

**8.8.33.** Пусть $a\in\boldsymbol{Q}_p$ (см. задачу 8.4.4), $a=\varepsilon p^k$, где $\varepsilon\in\boldsymbol{Q}_p^*$, $k\in\boldsymbol{N}$. Положим $N(a)=k$. Докажите, что $\boldsymbol{Q}_p$ — евклидово кольцо с евклидовой нормой $N$. Докажите, что любой идеал в $\boldsymbol{Q}_p$ имеет вид $(p^k)$, где $k\geqslant 0$.

**8.8.34.** Докажите, что для каждого числа $a=x+yi\sqrt{3}$ с рациональными $x$, $y$ найдется такое число $b$ из кольца $\boldsymbol{Z}\left[-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ (см. задачу 8.4.3), что $|a-b|^2<1$. Выведите отсюда, что кольцо $\boldsymbol{Z}\left[-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ евклидово.

**8.8.35.** Докажите, что кольцо $\boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]$ евклидово, приняв за евклидову норму $N(a+b\sqrt{2})=|a^2-2b^2|$.

**8.8.36.** Покажите, что в кольце $\boldsymbol{Z}[i\sqrt{3}]$ число 4 разлагается в произведение неприводимых сомножителей двумя существенно различными способами.

**8.8.37.** Покажите, что в кольце $\boldsymbol{Z}[i\sqrt{5}]$ число 6 разлагается в произведение неприводимых сомножителей двумя существенно различными способами.

**8.8.38.** Приведите еще примеры колец вида $\mathbf{Z}[i\sqrt{D}]$, где $D$ — целое положительное число, не делящееся на квадрат целого числа, отличного от единицы, в которых имеет место неоднозначность разложения в произведение неприводимых сомножителей.

**8.8.39.** Какие из следующих колец являются факториальными; кольцами главных идеалов; евклидовыми: $\mathbf{Z}$; $\mathbf{Z}[x]$; $\mathbf{Z}_6$; $\mathbf{Q}[x]$; $2\mathbf{Z}[x]$; $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$; $\mathbf{Z}[i]$; $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$; $\mathbf{Z}_2[x]$; $\mathbf{Q}$; $\mathbf{Z}\left[-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$?

**8.8.40.** Пусть $A$ — область целостности, $B$ — подкольцо $A$, содержащее единицу $A$. Какие из следующих утверждений истинны:

а) если $A$ — факториальное кольцо, то $B$ — также факториальное кольцо;

б) если $A$ — кольцо главных идеалов, то $B$ — кольцо главных идеалов;

в) если $A$ — евклидово кольцо, то $B$ — евклидово кольцо?

**8.8.41.** Докажите, что для любых взаимно простых чисел $m, n$ и любых целых чисел $k, l$ существует такое целое число $x$, что $x \equiv k \pmod{m}$ и $x \equiv l \pmod{n}$.

**8.8.42** (китайская теорема об остатках). Докажите, что если $n_1, \ldots, n_s$ — попарно взаимно простые числа, $k_1, \ldots, k_s$ — произвольные целые числа, то существует такое целое число $x$, что $x \equiv k_1 \pmod{n_1}, \ldots, x \equiv k_s \pmod{n_s}$.

**8.8.43.** Имеются два ведра: восьмилитровое и пятилитровое — и пустая бочка объемом 50 л. Можно ли при помощи этих ведер налить в бочку 49 л, 7 л, 11 л, 1 л?

**8.8.44.** Продавец имеет чашечные весы и гири $m$ кг и $n$ кг в неограниченном количестве.

а) Любую ли массу может взвесить при помощи этих гирь?

б) Какими должны быть гири, чтобы при их помощи можно было взвесить любую массу?

Предполагается, что любая масса измеряется целым числом килограммов.

**8.8.45.** В кольце $\mathbf{Z}_{360}$ найдите элемент, обратный к $\overline{179}$.

**8.8.46.** Докажите, что при любом целом положительном $n$ число $4^n+6n-1$ делится на 9.

**8.8.47.** Докажите, что $2x+3y$, $9x+5y$ делятся на 17 при одних и тех же значениях $x, y \in \mathbf{Z}$.

**8.8.48.** Пусть $\frac{p}{q}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1992}$, причем $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Докажите, что $p$ делится на 1993.

# ГЛАВА 9. ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ В КОЛЬЦЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

## § 1. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ. ОТНОШЕНИЕ ДЕЛИМОСТИ. ЦЕЛЫЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Деление целых чисел выполнимо не всегда. Наряду с действием деления рассматривают и другое, более общее действие, которое всегда выполнимо, а в случаях выполнимости действия деления в кольце $\mathbf{Z}$, по существу, совпадает с ним.

Разделить число $a$ на число $b$ ($b>0$) с остатком — значит представить число $a$ в виде $a=bq+r$, где $0\leqslant r<b$. Число $q$ при этом называется неполным частным, а число $r$ — остатком от деления $a$ на $b$.

**9.1.1.** Пусть даны целые числа $a$ и $b$, $b>0$. Докажите, что существует единственная пара целых чисел $q$, $r$, таких, что $a=bq+r$, $0\leqslant r<b$.

**9.1.2.** Докажите, что для данных целых чисел $a$, $b$ при $b\neq 0$ существует единственная пара целых чисел $q$, $r$, таких, что $a=bq+r$, $0\leqslant r<|b|$.

**9.1.3.** Покажите, что целое число $a$ кратно целому числу $b\neq 0$ тогда и только тогда, когда остаток от деления $a$ на $b$ равен нулю.

Говорят, что целое число $b$ делит целое число $a$, и пишут $b|a$, если $a=bq$ для некоторого целого $q$.

Вместо «$b$ делит $a$» говорят также, что $a$ делится на $b$ или что $a$ кратно $b$, и пишут $a \vdots b$. В противном случае говорят, что $a$ не делится на $b$, $b$ не является делителем $a$, и пишут $b \nmid a$.

**9.1.4.** Пусть $a$, $b$, $c$, $d$, $m$, $n$ — любые целые числа. Покажите, что:

а) $a|a$; б) $a|0$; в) $\pm 1|a$;

г) если $a|b$, $b|c$, то $a|c$, т. е. отношение делимости транзитивно;

д) если $c|a$, то $c|ab$;

е) если $c|a$, $c|b$, то $c|(a\pm b)$;

ж) если $b|a$, то $bc|ac$;

з) если $c \neq 0$, то из $bc|ac$ следует $b|a$;

и) если $a|c$ и $b|d$, то $ab|cd$;

к) если $a|b$ и $a|c$, то $a|(mb+nc)$.

**9.1.5.** Покажите, что если произведение $ab$ натуральных чисел равно единице, то $a=b=1$.

**9.1.6.** Покажите, что если целое число $a$ делит единицу, то $a=\pm 1$.

**9.1.7.** Покажите, что если целые числа $a$ и $b$ ассоциированы (т. е. $a|b$ и $b|a$), то $a=\pm b$.

**9.1.8.** Докажите, что одно из трех последовательных целых чисел делится на 3.

**9.1.9.** Докажите, что для любого целого $n$:

а) $n^3-n$ делится на 3; в) $n^7-n$ делится на 7;

б) $n^5-n$ делится на 5; г) $n^5-n$ делится на 30.

**9.1.10.** Покажите, что если целое число $n$ не делится на 7, то $n^3-1$ или $n^3+1$ делится на 7.

**9.1.11.** Докажите, что для любых целых $a$ и $b$:

а) если $a|b$ и $b \neq 0$, то $|a| \leqslant |b|$;

б) если $a|b$ и $|b|<|a|$, то $b=0$.

**9.1.12.** Докажите, что для любых целых $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство $a_1^2+\ldots+a_n^2>0$, за исключением случая, когда $a_1=\ldots=a_n=0$.

**9.1.13.** Докажите, что для любого целого $a$ и любого целого положительного $b$ существует единственное целое число $n$, такое, что $nb \leqslant a<(n+1)b$.

**9.1.14.** Докажите, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с единицей дает полный квадрат.

**9.1.15.** Докажите, что $11^{10}-1$ делится на 100.

**9.1.16.** Покажите, что из $a^2|b^2$ следует $a|b$.

Пусть $g$ — натуральное число, большее единицы, и $M=\{0, 1, \ldots, g-1\}$. Говорят, что натуральное число записано в позиционной системе с основанием $g$, если

$$a=a_s g^s+a_{s-1} g^{s-1}+\ldots+a_1 g+a_0, \tag{1}$$

где $s$ — целое неотрицательное, $a_0, \ldots, a_s \in M$ и $a_s \neq 0$.

Если каждый элемент множества $M$ обозначен специальным символом, то эти символы называются цифрами $g$-ичной позиционной системы. Представление (1) записывается сокращенно в виде $a=(a_s a_{s-1} \ldots a_1 a_0)_g$ и называется записью в $g$-ичной позиционной системе.

**9.1.17.** Пусть $g$ — данное натуральное число, большее единицы, и $M=\{0, 1, \ldots, g-1\}$. Докажите, что всякое натуральное число $a$ однозначно представимо в виде

$$a=a_s g^s+a_{s-1} g^{s-1}+\ldots+a_1 g+a_0, \text{ где } a_i \in M \text{ и } a_s \neq 0.$$

**9.1.18.** Составьте таблицу умножения в семеричной системе счисления.

**9.1.19.** Докажите, что число $A=(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{12}$ делится на 8 (на 9), если на 8 (на 9) делится число $(a_1 a_0)_{12}$, образованное двумя последними цифрами.

**9.1.20.** Покажите, что число $A=(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_g$, т. е. число $a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots + a_1 g + a_0$, делится на $g-1$, если на $g-1$ делится сумма его цифр, т. е. сумма $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.

## § 2. ИДЕАЛЫ КОЛЬЦА $Z$. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА. РАЗЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Непустое множество $I$ целых чисел называется идеалом кольца $\boldsymbol{Z}$ целых чисел, если оно замкнуто относительно вычитания, т. е. $a-b \in I$ для любых $a$, $b$ из $I$, и устойчиво относительно умножения на целые числа, т. е. $ka \in I$ для любого $a \in I$ и любого целого числа $k$. Любой идеал содержит нуль и замкнут также относительно сложения.

Пусть $n$ — любое фиксированное целое число. Проверьте, что множество $n\boldsymbol{Z}=\{nx \mid x \in \boldsymbol{Z}\}$ является идеалом кольца целых чисел. Такой идеал называется главным идеалом, порожденным числом $n$. Идеал $0\boldsymbol{Z}$ состоит только из нуля и называется нулевым идеалом.

**9.2.1.** Докажите, что $n\boldsymbol{Z}=(-n)\boldsymbol{Z}$ для каждого целого числа $n$.

**9.2.2.** Докажите, что каждый идеал кольца целых чисел является главным.

**9.2.3.** Пусть $I$ — ненулевой идеал кольца целых чисел, $d$ — наименьшее положительное число, содержащееся в $I$. Докажите, что множество $I$ состоит в точности из кратных числа $d$, т. е. $I=d\boldsymbol{Z}$.

**9.2.4.** Целые числа $a$, $b$ называются взаимно простыми, если любой их общий положительный делитель равен единице. Докажите, что если $a$, $b$ взаимно просты, то существуют такие целые числа $a$, $v$, что $au+bv=1$.

**9.2.5.** Целое число $p$, большее единицы, называется простым, если оно имеет только два натуральных делителя, именно 1 и $p$. Целое число, большее 1, называется составным, если оно имеет, кроме 1 и самого себя, другие натуральные делители. Докажите, что натуральное число $n$, большее единицы, имеет по меньшей мере один простой делитель; в частности, наименьший, больший единицы, натуральный делитель числа $n$ является простым.

**9.2.6.** Докажите, что наименьший, больший единицы, делитель составного натурального числа $n$ (он будет простым) не превосходит $\sqrt{n}$.

**9.2.7.** Пусть $n$ — целое положительное, $p$ — простое число. Докажите, что либо $n$ делится на $p$, либо $n$ и $p$ взаимно просты.

**9.2.8.** Пусть $n$ — натуральное число, большее 2. Докажите, что между $n$ и $n!$ содержится по меньшей мере одно простое число. Покажите, что отсюда следует бесконечность множества простых чисел.

**9.2.9.** Какие из чисел $P=2\cdot 3\cdot \ldots \cdot p\pm 1$ при $p=5, 7, 11, 13$ являются простыми, какие составными?

**9.2.10.** Составьте таблицы простых чисел для каждой из сотен: $1-100$, $101-200$, ..., $901-1000$.

**9.2.11.** Определите количество простых чисел в интервале от 10 001 до 10 100.

**9.2.12.** Докажите, что любое натуральное число, большее единицы, является простым или произведением простых чисел.

**9.2.13.** Докажите, что если произведение двух целых чисел делится на простое число $p$, то по крайней мере одно из этих чисел делится на $p$.

**9.2.14.** Докажите, что если произведение нескольких целых чисел делится на простое число $p$, то по меньшей мере одно из этих чисел делится на $p$.

**9.2.15.** Докажите, что каждое целое число, большее единицы, может быть представлено в виде произведения простых множителей одним и только одним способом, если отвлечься от порядка множителей.

**9.2.16.** Докажите, что каждое целое число $a$, отличное от нуля и $\pm 1$, единственным образом представимо в виде $a=\varepsilon p_1 p_2 \ldots p_n$, где $\varepsilon=\pm 1$, $p_1$, $p_2$, ..., $p_m$ — простые числа.

**9.2.17.** Пусть $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа $n$ на простые множители. Докажите, что каждый натуральный делитель $d$ числа $n$ может быть записан в виде $d=p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \ldots p_k^{\delta_k}$, где $\delta_i$ — целые числа, удовлетворяющие условиям $\delta_i \in \{0, 1, \ldots, \alpha_i\}$ для $i=1, 2, \ldots, k$.

**9.2.18.** Разложите на простые множители $26!$.

**9.2.19.** Докажите, что число $\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ целое.

**9.2.20.** Докажите, что простых чисел вида $4k-1$ бесконечно много.

**9.2.21.** Докажите, что простых чисел вида $6k-1$ бесконечно много.

**9.2.22.** Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа $n$ на простые множители. Сколько существует представлений числа $n$ в виде произведения двух взаимно простых натуральных чисел?

**9.2.23.** Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа $n$ на простые множители. Докажите, что число $\tau(n)$ натуральных делителей числа $n$ выражается формулой $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$.

**9.2.24.** Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа $n$ на простые множители. Докажите, что сумма $\sigma(n)$ всех натуральных делителей числа $n$ выражается формулой

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

**9.2.25.** Докажите, что если произведение двух целых положительных взаимно простых чисел равно квадрату целого числа, то оба сомножителя — квадраты.

**9.2.26.** Докажите, что число $(n-1)!$ не делится на $n$ только в том случае, когда $n$ — простое число или $n = 4$.

**9.2.27.** Пусть $n$ — натуральное число, большее 4. Докажите, что $n$ является простым числом только в том случае, когда $(n-1)!$ не делится на $n$.

**9.2.28.** Докажите, что существуют сколь угодно длинные участки натурального ряда, не содержащие ни одного простого числа.

**9.2.29.** Покажите, что многочлен $x^2 + x + 41$ для последовательности натуральных чисел $x = 0, 1, 2, \dots, 39$ принимает значения, являющиеся различными простыми числами.

## § 3. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

Всякое целое число, которое делит целые числа $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, называется их общим делителем. Положительный общий делитель чисел $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, делящийся на любой их общий делитель, называется наибольшим общим делителем и обозначается символом $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

**9.3.1.** Пусть $a$, $b$ — целые числа, не равные одновременно нулю. Докажите, что целые числа $a$, $b$ имеют единственный наибольший общий делитель $d$, причем $d$ можно представить в виде линейной комбинации $d = k_1 a + k_2 b$ с целыми коэффициентами $k_1$, $k_2$.

**9.3.2.** Для целых чисел $a$, $b$, $c$, не равных одновременно нулю, докажите, что $(a, b, c) = ((a, b), c)$.

**9.3.3.** Пусть $a$, $b$, $c$ — целые числа, не равные одновременно нулю. Докажите, что $(ac, bc) = (a, b) \cdot |c|$.

**9.3.4.** Даны натуральные числа $a_0$, $a_1$. Строится последовательность целых чисел $a_2=|a_0-a_1|$, $a_3=|a_1-a_2|$, $a_4=|a_2-a_3|$, ... . Докажите, что, начиная с некоторого места, она имеет вид $d$, $d$, 0, $d$, $d$, 0, ..., где $d$ — наибольший общий делитель чисел $a_0$ и $a_1$.

**9.3.5.** Пусть $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ и $b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$, где $p_1$, $p_2$, ..., $p_k$ — попарно различные простые числа, $\alpha_i$, $\beta_i$ — целые неотрицательные числа. Докажите, что $(a, b)=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{\alpha_i, \beta_i\}}$.

**9.3.6.** Пусть $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ — целые числа, не все равные нулю. Докажите, что эти числа имеют единственный наибольший общий делитель $d$, причем $d$ можно представить в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами: $d=k_1a_1+k_2a_2+...+k_na_n$.

**9.3.7.** Докажите, что если положительный общий делитель $d$ целых чисел $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ представим в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел, то $d$ является их наибольшим общим делителем.

**9.3.8.** Целые числа $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен единице. Докажите, что целые числа $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ взаимно просты тогда и только тогда, когда они не имеют общего простого делителя.

**9.3.9.** Докажите, что целые числа $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ взаимно просты тогда и только тогда, когда единица представима в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел: $1=k_1a_1+k_2a_2+...+k_na_n$, где $k_1$, $k_2$, ..., $k_n$ — целые числа.

**9.3.10.** Докажите, что если целое число делит произведение двух целых чисел и взаимно просто с одним из сомножителей, то оно делит второй сомножитель.

**9.3.11.** Пусть $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$ — целые числа, не равные одновременно нулю, и $d$ — их общий положительный делитель. Докажите, что $d$ будет наибольшим общим делителем этих чисел тогда и только тогда, когда числа $a_1/d$, ..., $a_n/d$ взаимно просты, т. е. $(a_1/d, ..., a_n/d)=1$.

**9.3.12.** Каждое рациональное число $a$, отличное от нуля, обладает представлением дробью:

$$a=\frac{m}{n},\ (m, n)=1,\ n>0. \qquad (1)$$

Докажите, что всякое другое представление $a$ дробью $a=\frac{l}{k}$ с целыми $l$, $k$ и $k>0$ получается из представления (1) в результате умножения числителя и знаменателя на число $t=(l, k)$, т. е. $l=mt$, $k=nt$.

**9.3.13.** Докажите, что если $m$ и $n$ взаимно просты, то $2^m-1$ и $2^n-1$ тоже взаимно просты.

**9.3.14.** Всякое целое число, которое делится на данные целые числа, называется их общим кратным. Положительное общее кратное данных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которое делит любое их общее кратное, называется наименьшим общим кратным и обозначается символом $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Если $m$ — целое число, то множество $m\mathbf{Z}=\{mx \mid x \in \mathbf{Z}\}$, состоящее из всех кратных числа $m$, является идеалом кольца $\mathbf{Z}$. Зная канонические разложения целых положительных чисел $a$ и $b$, найдите $[a, b]$.

**9.3.15.** Пусть $a$, $b$ — взаимно простые положительные числа. Покажите, что $[a, b]=a \cdot b$.

**9.3.16.** Пусть $a$, $b$ — целые положительные числа. Докажите, что $[a, b]=\frac{ab}{(a, b)}$.

**9.3.17.** Пусть $a$, $b$, $c$ — целые числа, отличные от нуля. Докажите, что $[[a, b], c]=[a, b, c]$.

**9.3.18.** Пусть $a$, $b$, $c$ — целые числа, отличные от нуля. Покажите, что $[ac, bc]=[a, b]\cdot|c|$.

**9.3.19.** Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые числа, отличные от нуля. Докажите, что эти числа имеют единственное наименьшее общее кратное $m$, причем $m\mathbf{Z}=a_1\mathbf{Z}\cap a_2\mathbf{Z}\cap\ldots\cap a_n\mathbf{Z}$ и $m$ является наименьшим положительным в множестве $a_1\mathbf{Z}\cap a_2\mathbf{Z}\cap\ldots\cap a_n\mathbf{Z}$.

## § 4. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА И КОНЕЧНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел применяется способ повторного деления с остатком, называемый алгоритмом Евклида. Пусть $a$, $b$ — целые числа, $b>0$, требуется найти наибольший общий делитель чисел $a$ и $b$. Выполнив деление с остатком $a$ на $b$, получим равенство $a=bq_0+r_1$. Если $r_1 \neq 0$, то, выполнив деление с остатком $b$ на $r_1$, получим равенство $b=r_1q_1+r_2$. Затем выполняется деление с остатком $r_1$ на $r_2$ и т. д. В результате повторных делений получим систему равенств

$$\begin{aligned}
a&=bq_0+r_1,\\
b&=r_1q_1+r_2,\\
r_1&=r_2q_2+r_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_{n-2}&=r_{n-1}q_{n-1}+r_n,\\
r_{n-1}&=r_nq_n,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $b>r_1>r_2>r_3>\ldots>r_n>0$.

Последний ненулевой остаток $r_n$ является наибольшим общим делителем чисел $a$ и $b$.

Последовательность равенств (1) можно записать в виде равносильной цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b}=q_0+\frac{r_1}{b},\\
&\frac{b}{r_1}=q_1+\frac{r_2}{r_1},\\
&\frac{r_1}{r_2}=q_2+\frac{r_3}{r_2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=q_{n-1}+\frac{r_n}{r_{n-1}},\\
&\frac{r_{n-1}}{r_n}=q_n.
\end{aligned}\qquad (2)$$

Поставим теперь задачу выразить отношение $\frac{a}{b}$ через одни только числа $q_0$, $q_1$, $q_2$, ..., $q_{n-1}$, $q_n$. На основании равенств (2) находим:

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\dots\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}.\qquad (3)$$

В этом равенстве $q_0$ — целое число, $q_1$, $q_2$, ..., $q_n$ — целые положительные числа. Выражение такого вида, как правая часть равенства (3), называется конечной цепной дробью.

Цепную дробь, стоящую в правой части равенства (3), сокращенно записывают в виде $|q_0; q_1, q_2, ..., q_n|$.

Мы видим, что алгоритм Евклида получает новое значение: с помощью алгоритма Евклида каждое рациональное число может быть представлено в виде конечной цепной дроби.

**9.4.1.** Найдите наибольшие общие делители пар чисел:

а) 607 и 477; б) 343 и 246; в) 6494 и 6303.

**9.4.2.** Найдите линейное представление наибольших общих делителей в примерах предыдущей задачи.

**9.4.3.** Разложите в цепную дробь следующие обыкновенные дроби:

а) 2,71828; б) $\frac{103\,993}{33\,102}$;

в) $\frac{99}{170}$; г) $\frac{355}{113}$.

**9.4.4.** Разложите простую дробь в цепную дробь и найдите ее подходящие дроби:

а) $\frac{247}{74}$; б) $\frac{77}{187}$; в) $\frac{333}{100}$; г) $\frac{103\,993}{33\,102}$.

**9.4.5.** Сократите следующие обыкновенные дроби, пользуясь их разложением в цепную дробь.

а) $\frac{3953}{871}$; б) $\frac{6059}{1241}$; в) $\frac{6821}{2147}$; г) $\frac{10\,027}{32\,671}$.

Пусть $|q_0;\ q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_n|$ — данная цепная дробь; дроби

$$\delta_0 = q_0,\quad \delta_1 = q_0 + \frac{1}{q_1},\qquad \delta_2 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}},\ \dots$$

называются подходящими дробями данной цепной дроби; цепная дробь $\delta_k = |q_0;\ q_1,\ \dots,\ q_k|$, где $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n\}$, называется $k$-й подходящей дробью.

Определим $P_k$ и $Q_k$ рекуррентными формулами:

$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}$, $Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$ $(k \in \{2,\ 3,\ \dots,\ n\})$ с начальными условиями $P_0 = q_0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = q_1 q_0$, $Q_1 = q_1$.

**9.4.6.** Докажите, что для подходящей дроби $\delta_k$ выполняется равенство $\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$ $(k \in \{0,\ 1,\ \dots,\ n\})$, $P_k$ и $Q_k$ называются соответственно числителем и знаменателем $k$-й подходящей дроби.

**9.4.7.** Докажите, что между числителями двух последовательных подходящих дробей выполняется равенство $P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}$.

**9.4.8.** Покажите, что $P_k$ и $Q_k$ взаимно просты и, значит, каждая дробь $P_k/Q_k$ несократима.

**9.4.9.** Покажите, что выполняется равенство $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k Q_{k-1}}$ $(k \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\})$.

**9.4.10.** Докажите, что подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую последовательность, а подходящие дроби нечетного порядка — убывающую последовательность; при этом каждая подходящая дробь четного порядка меньше любой подходящей дроби нечетного порядка.

**9.4.11.** Пусть $\alpha = \frac{a}{b}$ — рациональная несократимая дробь, $1 < k < n$. Докажите, что $\alpha$ лежит между $\delta_{k-1}$ и $\delta_k$, причем ближе к $\delta_k$, чем к $\delta_{k-1}$.

**9.4.12.** Найдите первые четыре подходящие дроби разложения в цепную дробь числа $\pi = 3{,}14159265\dots$ .

**9.4.13.** Найдите первые пять подходящих дробей разложения в цепную дробь числа $e=2{,}718281828\ldots$.

**9.4.14.** Пусть $a$, $b$ — целые положительные взаимно простые числа, $P_{n-1}/Q_{n-1}$ — предпоследняя подходящая дробь разложения $a/b$ в цепную дробь. Покажите, что диофантово уравнение $ax-by=1$ имеет частное решение $x_0=(-1)^{n-1}Q_{n-1}$, $y_0=(-1)^{n-1}P_{n-1}$, т. е. $ax_0-by_0=1$.

**9.4.15.** Пусть $a$, $b$, $c$ — целые положительные числа, $(a, b)=1$, $P_{n-1}/Q_{n-1}$ — предпоследняя подходящая дробь разложения $a/b$ в цепную дробь. Докажите, что все целые решения диофантова уравнения $ax-by=c$ получаются по формулам $x=(-1)^{n-1}cQ_{n-1}+bt$, $y=(-1)^{n-1}cP_{n-1}+at$, где $t$ — произвольное целое число.

**9.4.16.** С помощью цепных дробей (см. предыдущую задачу) найдите все целые решения уравнений:

а) $19x-15y=1$; б) $23x-17y=11$;
в) $53x-47y=11$; г) $35x-18y=3$;
д) $85x-71y=5$; е) $41x-11y=7$.

# ГЛАВА 10. СРАВНЕНИЯ

## § 1. СРАВНЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Пусть $a$, $b$ и $m$ — целые числа. Если разность $a-b$ делится на $m$, то говорят, что $a$ сравнимо с $b$ по модулю $m$, и записывают так: $a \equiv b \pmod m$. Число $m$ называется модулем сравнения.

Отношение сравнимости по модулю $m$ обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности и поэтому является отношением эквивалентности на множестве $\mathbf{Z}$ целых чисел; классы эквивалентности называются классами вычетов по модулю $m$. Класс вычетов, содержащий число $a$, обозначается символом $a \bmod m$; $a$ называется представителем этого класса вычетов.

**10.1.1.** Покажите, что целые числа $a$ и $b$ сравнимы по положительному модулю $m$ тогда и только тогда, когда при делении с остатком на $m$ они дают одинаковые остатки. Таким образом, существует $m$ классов вычетов по модулю $m$.

**10.1.2.** Покажите, что классы вычетов по модулю $m$ обладают следующими свойствами:

а) любые два класса вычетов либо совпадают, либо не пересекаются; объединение всех классов вычетов совпадает с множеством всех целых чисел;

б) если $A$ — класс вычетов по модулю $m$ и $a$ — любой элемент из $A$, то $A=a+m\mathbf{Z}=a \bmod m$;

в) классы вычетов $a \bmod m$ и $b \bmod m$ совпадают, т. е. $a \bmod m = b \bmod m$, тогда и только тогда, когда $a \equiv b \pmod m$.

**10.1.3.** Докажите следующие свойства сравнений:

а) сравнения можно почленно складывать (вычитать), т. е. если $a \equiv b$, $c \equiv d$, то $a+c \equiv b+d \pmod m$;

б) сравнения можно почленно перемножать, т. е. если $a \equiv b$, $c \equiv d$, то $ac \equiv bd \pmod m$ (в частности, обе части сравнения можно умножить на одно и то же целое число);

в) обе части сравнения можно разделить на их общий множитель, если он взаимно прост с модулем;

г) обе части сравнения и модуль можно разделить на их общий делитель;

д) если $m_1$ — делитель $m$ и $a \equiv b \pmod{m}$, то $a \equiv b \pmod{m_1}$;

е) если $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и $a \equiv b \pmod{m}$, то $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$.

**10.1.4.** Покажите, что натуральное число, записанное в десятичной системе, сравнимо по модулю 9 и по модулю 3 с суммой своих цифр.

**10.1.5.** Установите способ проверки арифметических действий при помощи числа 9.

**10.1.6.** Найдите признаки делимости целых чисел в десятичной системе счисления на 7 и 13.

**10.1.7.** Найдите признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 7, 9 в восьмеричной системе счисления.

**10.1.8.** Найдите признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13 в двенадцатеричной системе счисления.

**10.1.9.** Пусть $m$ и $n$ — взаимно простые числа. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$, $a \equiv b \pmod{n}$, то $a \equiv b \pmod{mn}$.

**10.1.10.** Пусть $(m, n) = d$. Покажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$ и $a \equiv b \pmod{n}$, то $a \equiv b \left(\mathrm{mod}\, \frac{mn}{d}\right)$.

## § 2. ПОЛНАЯ СИСТЕМА ВЫЧЕТОВ

Класс вычетов по модулю $m$, содержащий целое число $a$, обозначается через $a \bmod m$, следовательно, $a \bmod m = a + m\mathbf{Z} = \{a + km \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Любое число, принадлежащее классу вычетов, называется представителем этого класса.

Полной системой вычетов по модулю $m$ называется совокупность $m$ целых чисел, содержащая точно по одному представителю из каждого класса вычетов по модулю $m$. Совокупность чисел $0, 1, 2, \ldots, m-1$ называется системой наименьших неотрицательных вычетов. Система

$$0, \pm 1, \ldots, \pm \frac{m-1}{2} \text{ при нечетном } m,$$

$$-\frac{m}{2}+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} \text{ при четном } m$$

называется абсолютно наименьшей системой вычетов по модулю $m$.

**10.2.1.** Покажите, что каждый класс вычетов по модулю $m$ содержит в точности одно из чисел совокупности $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ всех возможных остатков от деления на $m$.

**10.2.2.** Покажите, что любой набор $m$ целых чисел, попарно несравнимых по модулю $m$, является полной системой вычетов по модулю $m$.

**10.2.3.** Пусть $a$, $b$ — целые взаимно простые числа и $a \neq 0$. Покажите, что если $x$ пробегает полную систему вычетов по модулю $m$, то $ax+b$ также пробегает полную систему вычетов по модулю $m$.

**10.2.4.** Найдите полную систему вычетов и полную систему абсолютно наименьших вычетов по модулю 30.

**10.2.5.** Найдите полную систему абсолютно наименьших вычетов по модулю 19.

**10.2.6.** Образуют ли степени $2^0$, $2^1$, $2^2$, ..., $2^{10}$ полную систему вычетов по модулю 11?

**10.2.7.** Покажите, что совокупность членов арифметической прогрессии $a$, $a+d$, $a+2d$, ..., $a+(m-1)d$ образует полную систему вычетов по модулю $m$, если $d$ и $m$ взаимно просты.

**10.2.8.** Подставляя в выражение $3x+7y$ значения $x=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и $y=0, 1, 2$, проверьте, что в результате получится полная система вычетов по модулю 21.

Обозначим через $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ множество всех классов вычетов по модулю $m$:

$$\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}=\{0 \bmod m,\ 1 \bmod m,\ \ldots,\ (m-1) \bmod m\}.$$

На этом множестве введем операции $+, -$ следующими равенствами:

$$a \bmod m + b \bmod m = (a+b) \bmod m,$$
$$-(a \bmod m) = (-a) \bmod m.$$

**10.2.9.** Покажите, что алгебра $<\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}, +, ->$ является абелевой группой. Покажите, что эта группа является фактор-группой группы $\boldsymbol{Z}$ по подгруппе $m\boldsymbol{Z}$. Группа $<\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}, +, ->$ называется аддитивной группой классов вычетов по модулю $m$.

**10.2.10.** Покажите, что аддитивная группа классов вычетов по модулю $m$ является циклической.

**10.2.11.** На множестве $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ классов вычетов определим также операцию умножения:

$$(a \bmod m)\cdot(b \bmod m) = ab \bmod m.$$

Покажите, что алгебра $<\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}, +, -, \cdot, 1 \bmod m>$ является коммутативным кольцом с единицей. Это кольцо называется кольцом классов вычетов по модулю $m$.

**10.2.12.** Покажите, что группа $<Z/mZ, +, ->$ является аддитивной группой кольца классов вычетов по модулю $m$.

**10.2.13.** Докажите, что кольцо классов вычетов по модулю $m$ является полем тогда и только тогда, когда $|m|$ — простое число.

## § 3. ПРИВЕДЕННАЯ СИСТЕМА ВЫЧЕТОВ

Всякое число из фиксированного класса вычета $a \bmod m$ имеет с модулем $m$ один и тот же наибольший общий делитель, равный $(a, m)$. В частности, если $(a, m)=1$, класс $a \bmod m$ называется классом вычетов, взаимно простым с модулем $m$.

Приведенной системой вычетов по модулю $m$ называется множество целых чисел, содержащее по одному представителю из каждого класса вычетов, взаимно простого с $m$. Пусть $n$ — целое положительное число; обозначим через $\varphi(n)$ число целых положительных чисел, не превосходящих $n$ и взаимно простых с $n$. Функция $\varphi$, определенная для всех целых положительных чисел, называется функцией Эйлера.

**10.3.1.** Покажите, что число классов вычетов по модулю $m$, взаимно простых с $m$, равно $\varphi(m)$.

**10.3.2.** Докажите, что любая система $\varphi(m)$ целых чисел, взаимно простых с $m$ и попарно не сравнимых между собой по модулю $m$, является приведенной системой вычетов по модулю $m$.

**10.3.3.** Пусть $a$ — целое число, взаимно простое с $m$, $a\neq 0$, $b_1$, $b_2$, ..., $b_s$ — приведенная система вычетов по модулю $m$. Докажите, что система $ab_1$, $ab_2$, ..., $ab_s$ тоже является приведенной системой вычетов по модулю $m$.

**10.3.4.** Покажите, что произведение любых двух классов вычетов, взаимно простых с модулем $m$, тоже есть класс вычетов, взаимно простой с $m$.

**10.3.5.** Докажите, что множество классов вычетов по модулю $m$, взаимно простых с $m$, образует относительно умножения абелеву группу. Эта группа называется мультипликативной группой классов вычетов, взаимно простых с модулем.

**10.3.6.** Пусть $p$ — простое число. Докажите, что множество ненулевых классов вычетов по модулю $p$ относительно умножения образует абелеву группу.

**10.3.7.** Пусть $(a, m)=1$ и $b_1 \bmod m$, ..., $b_s \bmod m$ — система всех классов вычетов, взаимно простых с $m$. Докажите, что $ab_1 \bmod m, \ldots, ab_s \bmod m$ также есть система всех классов вычетов, взаимно простых с $m$.

**10.3.8.** Вычет $a$ называется обратным вычету $b$ по модулю $m$, если $ab \equiv 1 \pmod m$. Вычеты $a$ и $b$ называются также взаимно обратными по модулю $m$. Покажите, что если $a$ и $b$ взаимно обратны, то $a \bmod m \cdot b \bmod m = 1 \bmod m$, т. е. классы вычетов $a \bmod m$ и $b \bmod m$ также взаимно обратны по модулю $m$.

**10.3.9.** Докажите, что группа обратимых элементов кольца классов вычетов по модулю $m$ совпадает с мультипликативной группой классов вычетов, взаимно простых с модулем $m$.

**10.3.10.** Докажите, что кольцо классов по модулю $m$ является полем в том и только в том случае, когда $m$ — простое число.

**10.3.11.** (теорема Ферма). Пусть $p$ — простое, $a$ — целое число, взаимно простое с $p$. Докажите, что $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

**10.3.12.** Пусть $p$ — простое, $a$ — любое целое число. Докажите, что $a^p \equiv a \pmod p$.

**10.3.13.** (теорема Эйлера). Пусть $a$ — целое число, взаимно простое с целым положительным $m$. Докажите, что $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

**10.3.14.** Пусть $p$ — простое и $\alpha$ — целое положительное число. Покажите, что $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

**10.3.15.** Докажите, что функция $\varphi$ мультипликативна, т. е. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ для любых целых положительных взаимно простых $m$ и $n$.

**10.3.16.** Пусть $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение положительного целого числа $m$. Докажите, что $\varphi(m) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \ldots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})$.

**10.3.17.** Проверьте, что для составного числа 341 $2^{341} \equiv 2 \pmod{341}$.

**10.3.18.** Составное число $n$, такое, что для каждого целого числа $a$ выполняется сравнение $a^n \equiv a \pmod n$, называется абсолютно псевдопростым. Докажите, что число 561 абсолютно псевдопростое.

## § 4. СРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Если сравнению

$$ax \equiv b \pmod m, \tag{1}$$

где $a$ не делится на $m$, удовлетворяет какой-либо вычет $x_0$, то этому сравнению будут удовлетворять и все числа, сравнимые с $x_0$ по модулю $m$; весь этот класс вычетов $x_0 \bmod m$ считается за одно решение сравнения (1). При таком соглашении сравнение (1) будет иметь столько решений, сколько вычетов полной системы по модулю $m$ ему удовлетворяет. Два сравнения, которым удовлетворяют одни и те же значения переменной $x$, называются равносильными.

**10.4.1.** Пусть числа $a$ и $m$ взаимно просты. Докажите, что линейное сравнение $ax \equiv b \pmod m$ имеет только одно решение.

**10.4.2.** Пусть $(a, m)=d$ и $d>1$. Докажите, что сравнение $ax \equiv b \pmod m$ разрешимо тогда и только тогда, когда $d$ делит $b$. Если $d$ делит $b$, то сравнение (1) имеет своими решениями точно $d$ классов вычетов по модулю $m$, которые составляют один класс вычетов по модулю $m/d$.

**10.4.3.** Найдите решения сравнения $ax \equiv 1 \pmod 7$ при $a=2, 3, 4, 5, 6$.

**10.4.4.** Пусть $p$ — простое число и $(a, p)=1$. Покажите, что сравнение $ax \equiv 1 \pmod p$ имеет решение $x \equiv a^{p-2} \pmod p$.

**10.4.5.** Пусть $(a, m)=1$, $m>1$. Докажите, что сравнение $ax \equiv 1 \pmod m$ имеет решение $x \equiv a^{\varphi(m)-1} \pmod m$.

**10.4.6.** Пусть $p$ — простое, $1<a<p$. Докажите, что сравнение $ax \equiv b \pmod p$ имеет решение

$$x \equiv b\,(-1)^{a-1}\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-a+1)}{1\cdot 2\dots a} \pmod p.$$

**10.4.7.** Решите сравнения:

а) $17x \equiv 10 \pmod{15}$; б) $26x \equiv 7 \pmod{13}$;
в) $16x \equiv 3 \pmod{11}$; г) $53x \equiv 5 \pmod{17}$;
д) $25x \equiv 1 \pmod{19}$; е) $28x \equiv 8 \pmod{12}$.

**10.4.8.** Решите сравнения:

а) $17x \equiv 3 \pmod{11}$; б) $13x \equiv 4 \pmod{17}$;
в) $23x \equiv 5 \pmod{19}$; г) $27x \equiv 7 \pmod{58}$.

**10.4.9.** Пусть $m>1$, $(a, m)=1$. Докажите, что сравнение $ax \equiv b \pmod m$ имеет решение $x \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod m$.

**10.4.10.** Докажите, что сравнение

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod p \qquad (2)$$

степени $n$ по простому модулю имеет не более $n$ решений.

**10.4.11.** Докажите, что если сравнение (2) имеет более $n$ решений, то все его коэффициенты делятся на $p$.

**10.4.12.** Покажите, что сравнение $x^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod p$ имеет точно $p-1$ решений, если $p$ — простое.

**10.4.13.** (теорема Вильсона). Докажите, что для каждого простого числа $p$ имеем $(p-1)!+1 \equiv 0 \pmod p$.

**10.4.14.** Пусть $m$ — целое число, большее единицы. Докажите, что $m$ будет простым тогда и только тогда, когда $(m-1)!+1 \equiv 0 \pmod m$.

**10.4.15.** Пусть $n \geqslant 2$. Докажите, что $n$ будет простым тогда и только тогда, когда $(n-2)!-1 \equiv 0 \pmod n$ (считается, что $0!=1$).

**10.4.16.** Пусть $p$ — простое число, $p=2k+1$. Докажите, что $(k!)^2+(-1)^k\equiv 0 \pmod p$.

**10.4.17.** Пусть $p$ — простое число, $d$ — натуральный делитель числа $(p-1)$. Докажите, что сравнение $x^d-1\equiv \equiv 0 \pmod p$ имеет точно $d$ решений.

## § 5. ПЕРВООБРАЗНЫЕ КОРНИ И ИНДЕКСЫ

Пусть $a$ — целое число, взаимно простое с $m$. Порядком числа $a$ по модулю $m$ называется наименьшее целое положительное число $d$, такое, что $a^d\equiv 1 \pmod m$. Если $b\equiv \equiv a \pmod m$, то $b$ имеет по модулю $m$ тот же порядок, что и $a$; таким образом, всякий элемент класса вычетов $a \bmod m$ имеет порядок $d$. Число $d$ называется также порядком класса вычетов $a \bmod m$ и обозначается через $O(a \bmod m)$. Вычет $a$ по модулю $m$, имеющий порядок $\varphi(m)$, называется первообразным корнем по модулю $m$.

**10.5.1.** Покажите, что числа $a, a^2, \ldots, a^d$ попарно несравнимы по модулю $m$, если $O(a \bmod m)=d$.

**10.5.2.** Пусть $O(a \bmod m)=d$ и $n$ — любое натуральное число. Сравнение $a^n\equiv 1 \pmod m$ выполняется тогда и только тогда, когда $n$ делится на $d$.

**10.5.3.** Пусть $O(a \bmod m)=d$. Докажите, что $\varphi(m)$ делится на $d$.

**10.5.4.** Пусть $O(a \bmod m)=d$. Докажите, что сравнение $a^s\equiv a^k$ выполняется тогда и только тогда, когда $k\equiv s \pmod d$.

**10.5.5.** Пусть $(a, b)=1$. Докажите, что если числа $O(a \bmod m)$ и $O(b \bmod m)$ взаимно просты, то $O(ab \bmod m)= =O(a \bmod m)\cdot O(b \bmod m)$.

**10.5.6.** Пусть $O(a \bmod m)=n$ и $d$ — натуральный делитель числа $n$. Докажите, что $O(a^d \bmod m)=n/d$.

**10.5.7.** Пусть $O(a \bmod m)=n$, $k$ — натуральное число, взаимно простое с $n$. Покажите, что $O(a^k \bmod m)=n$.

**10.5.8.** Пусть $O(a \bmod m)=n$, $k$ — натуральное число и $(n, k)=d$. Докажите, что $O(a^k \bmod m)=n/d$.

**10.5.9.** Докажите существование первообразных корней по модулям 2 и 4. Найдите их наименьшие положительные значения.

**10.5.10.** Докажите, что по модулю 8 первообразных корней не существует.

**10.5.11.** Докажите, что по модулю 12 первообразных корней не существует.

**10.5.12.** Пусть $p$ — простое число и $d$ — натуральный делитель числа $p-1$. Докажите, что в приведенной системе вычетов по модулю $p$ существует точно $\varphi(d)$ вычетов, имеющих порядок $d$ по модулю $p$.

**10.5.13.** Покажите, что число первообразных корней по простому модулю $p$ равно $\varphi(p-1)$.

**10.5.14.** Покажите, что группа классов вычетов, взаимно простых с простым модулем $p$, циклическая.

**10.5.15.** Пусть $g$ — первообразный корень по простому модулю $p$. Покажите, что $p-1$ степеней $g, g^2, \ldots, g^{p-1}$ представляют собой приведенную систему вычетов по модулю $p$.

**10.5.16.** Найдите наименьший положительный первообразный корень по модулю 23.

Пусть $g$ — первообразный корень по простому $p$ и $(a, p)=1$. Если $a \equiv g^k \pmod p$, то $k$ называется индексом числа $a$ по модулю $p$ при основании $g$ и обозначается через $\operatorname{ind} a$ или $\operatorname{ind}_g a$. Если $s$ — другое число, для которого $a \equiv g^s$, то $g^k \equiv g^s \pmod p$ и поэтому $k \equiv s \pmod{p-1}$. Следовательно, множество индексов данного числа $a$ по модулю $p$ является классом вычетов по модулю $p-1$.

**10.5.17.** Пусть числа $a$, $b$ взаимно просты с простым числом $p$ и $n$ — натуральное число. Докажите, что:

а) из $a \equiv b \pmod p$ следует $\operatorname{ind} a \equiv \operatorname{ind} b \pmod{p-1}$;
б) $\operatorname{ind} ab \equiv \operatorname{ind} a + \operatorname{ind} b \pmod{p-1}$;
в) $\operatorname{ind} a^n \equiv n \operatorname{ind} a \pmod{p-1}$.

**10.5.18.** Пусть $G$ — мультипликативная группа классов вычетов, взаимно простых с простым числом $p$, и $C$ — аддитивная группа классов вычетов по модулю $p-1$. Покажите, что отображение $a \bmod p \to \operatorname{ind} a \bmod (p-1)$ является изоморфизмом группы $G$ на группу $C$.

**10.5.19.** Зная, что 6 является первообразным корнем по модулю 13, составьте при основании 6 таблицу индексов по модулю 13.

**10.5.20.** Зная, что 10 является первообразным корнем по модулю 19, составьте при основании 10 таблицу индексов по модулю 19.

**10.5.21.** Покажите, что по нечетному простому модулю $p$ $\operatorname{ind}(-1) \equiv \frac{p-1}{2} \bmod (p-1)$.

**10.5.22.** Пользуясь таблицами индексов, найдите:

а) порядок 7 по модулю 29;
б) порядок 13 по модулю 47;
в) порядок 18 по модулю 4.

**10.5.23.** Решите сравнения с одной переменной, пользуясь таблицами индексов:

а) $11x \equiv 13 \pmod{31}$; г) $x^2 \equiv 32 \pmod{43}$;
б) $47x \equiv 23 \pmod{73}$; д) $x^5 \equiv 17 \pmod{29}$.
в) $53x \equiv 37 \pmod{61}$;

## § 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ПЕРИОДА, ПОЛУЧАЮЩЕГОСЯ ПРИ ОБРАЩЕНИИ ОБЫКНОВЕННОЙ ДРОБИ В ДЕСЯТИЧНУЮ

**10.6.1.** Найдите число цифр в периоде десятичных дробей, в которые обращаются обыкновенные дроби со знаменателями 3, 7, 11, 13, 17, 19, 21.

**10.6.2.** Обратите следующие периодические десятичные дроби в обыкновенные: 0,35(62); 5,1(538), 11,12(31).

**10.6.3.** Найдите знаменатель дроби, обращающейся в чистую периодическую дробь с тремя цифрами в периоде.

**10.6.4.** Пусть $p$ — простое число, отличное от 2 и 5. Докажите, что если дробь $1/p$ обращается в чистую периодическую десятичную дробь с четным цислом цифр в периоде, то цифры второй половины периода дополняют до девяти соответствующие цифры первой половины периода. Например, $\frac{1}{7} = 0,(142\,857)$.

**10.6.5.** Найдите число цифр в периоде десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная дробь со знаменателем 41; $13 \cdot 37$; $11 \cdot 13 \cdot 17$; $5 \cdot 7 \cdot 19$; $2 \cdot 11 \cdot 13$.

**10.6.6.** Каким может быть знаменатель обыкновенной дроби, обращающейся в чистую периодическую дробь с четырьмя цифрами в наименьшем периоде?

**10.6.7.** Каким может быть знаменатель обыкновенной дроби, обращающейся в чистую периодическую десятичную дробь с пятью цифрами в наименьшем периоде?

**10.6.8.** Пусть $a$, $b$ — взаимно простые целые числа. Докажите, что правильная дробь $\frac{a}{b}$ при обращении в десятичную будет чисто периодической тогда и только тогда, когда $b$ взаимно просто с 10.

# ГЛАВА 11. МНОГОЧЛЕНЫ

## § 1. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ НАД ОБЛАСТЬЮ ЦЕЛОСТНОСТИ. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ДВУЧЛЕН И КОРНИ МНОГОЧЛЕНА

**11.1.1.** Пусть $F$ — подполе поля $K$, $f(x) \in F[x]$. Какие из следующих утверждений истинны:

а) если $f(x)$ приводим над $F$, то $f(x)$ приводим над $K$;
б) если $f(x)$ приводим над $K$, то $f(x)$ приводим над $F$;
в) если $f(x)$ неприводим над $F$, то $f(x)$ неприводим над $K$;
г) если $f(x)$ неприводим над $K$, то $f(x)$ неприводим над $F$?

**11.1.2.** Какие из следующих утверждений истинны для любого многочлена $f(x)$ из $\boldsymbol{Q}[x]$:

а) если $f(x)$ имеет рациональный корень, то он приводим над $\boldsymbol{Q}$

б) если $\deg f(x) > 1$ и $f(x)$ имеет рациональный корень, то он приводим над $\boldsymbol{Q}$;

в) если $f(x)$ приводим над $\boldsymbol{Q}$, то он имеет рациональный корень;

г) если $\deg f(x) = 2$ и $f(x)$ приводим над $\boldsymbol{Q}$, то он имеет рациональный корень;

д) если $\deg f(x) = 3$ и $f(x)$ приводим над $\boldsymbol{Q}$, то он имеет рациональный корень;

е) если $\deg f(x) = 4$ и $f(x)$ приводим над $\boldsymbol{Q}$, то он имеет рациональный корень?

**11.1.3.** Пусть $F$ — поле. Докажите, что многочлен степени 2 или 3 приводим над $F$ тогда и только тогда, когда он имеет в $F$ корень. Верно ли это утверждение для произвольной области целостности?

**11.1.4.** Докажите, что многочлен $x^2 + x + 1$ приводим над $\boldsymbol{Z}_3$, но неприводим над $\boldsymbol{Z}_2$.

**11.1.5.** Напишите все многочлены степени 2 из $\boldsymbol{Z}_2[x]$. Подчеркните приводимые многочлены.

**11.1.6.** Напишите все неприводимые многочлены из $\boldsymbol{Z}_3[x]$ степени 2.

**11.1.7.** Напишите все многочлены степени 3 из $Z_2[x]$, подчеркните приводимые.

**11.1.8.** Сколько существует различных многочленов:

а) степени $n$ в $Z_2[x]$ $(n>0)$;

б) степени $n$ в $Z_p[x]$, $n>0$, $p$ — простое число;

в) степени, не превосходящей $n$, в $Z_p[x]$, $n\geqslant 0$, $p$ — простое число?

**11.1.9.** Напишите все неприводимые многочлены степени 4 из $Z_2[x]$.

**11.1.10.** Пусть $p$ — простое число. Докажите, что многочлены $x^p$ и $x$ принимают одинаковые значения при всех значениях $x$ из $Z_p$. Приведите еще примеры таких многочленов над различными полями.

**11.1.11.** Пусть $F$ — поле, $a_0, \ldots, a_n$, $b_0, \ldots, b_n$ — элементы из $F$, $a_0, \ldots, a_n$ попарно различны. Докажите, что существует один и только один ненулевой многочлен $f(x)\in F[x]$ степени, не превосходящей $n$, удовлетворяющий условиям $f(a_i)=b_i$, $i=0, 1, \ldots, n$.

**11.1.12.** Докажите, что в $Z_p[x]$ имеет место разложение $x^{p-1}-\bar{1}=(x-\bar{1})(x-\bar{2})\ldots(x-\overline{p-1})$.

**11.1.13** (теорема Вильсона). Докажите, что если $p$ — простое число, то $(p-1)!+1$ делится на $p$.

**11.1.14.** Выполните деление с остатком, используя схему Горнера:

а) $x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ на $x-1$;

б) $2x^5-5x^3+8x$ на $x+3$;

в) $4x^3+x^2$ на $x+1+i$;

г) $x^3-x^2-x$ на $x-1+2i$;

д) $x^6+(2-i)x^4+(i-1)x^3+(1+i)x^2-(1+i)x+3-i$ на $x-i$.

**11.1.15.** Используя схему Горнера, выполните деление с остатком в $Z_2[x]$; $Z_5[x]$:

а) $2x^5-3x^3+6x^2-7x-2$ на $x+2$;

б) $5x^4+3x^3-4x^2+6x-1$ на $x+3$.

**11.1.16.** Пользуясь схемой Горнера, вычислите $f(a)$:

а) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16$, $a=4$;

б) $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7$, $a=-2-i$.

**11.1.17.** Пользуясь схемой Горнера, разложите многочлен $f(x)$ по степеням $x-a$:

а) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$, $a=-1$;

б) $f(x)=x^5$, $a=1$;

в) $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90$, $a=2$;

г) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$, $a=-i$;

д) $f(x)=x^4+(3-8i)x^3-(21+18i)x^2-(33-20i)x+7+18i$, $a=-1+2i$.

**11.1.18.** Пользуясь схемой Горнера, разложите по степеням $x$:

а) $(x+3)^4-(x+3)^3+1$;

б) $(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$.

**11.1.19.** Пользуясь схемой Горнера, найдите значение многочлена и всех его производных при $x=a$:

а) $f(x)=x^5-4x^3+6x^2+8x+10$, $a=2$;

б) $f(x)=x^4-3ix^3-4x^2+5ix-1$, $a=1+2i$.

**11.1.20.** Чему равен показатель кратности корня:

а) 2 для многочлена $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;

б) $-2$ для многочлена $x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$?

**11.1.21.** Найдите такое значение коэффициента $A$, чтобы многочлен $x^5-Ax^2-Ax+1$ имел $-1$ корнем не ниже второй кратности.

**11.1.22.** Найдите такие значения $A$ и $B$, чтобы многочлен $Ax^4+Bx^3+1$ делился на $(x-1)^2$.

**11.1.23.** Найдите такие значения $A$ и $B$, чтобы многочлен $Ax^{n+1}+Bx^n+1$ делился на $(x-1)^2$.

**11.1.24.** Докажите, что для многочленов:

а) $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$;

б) $x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1$;

в) $(n-2m)x^n-nx^{n-m}+nx^m-(n-2m)$ число 1 является корнем кратности 3 $(n\geqslant 2,\ n>m)$.

**11.1.25.** Разложите многочлен $x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1$ по степеням $x-1$.

**11.1.26.** Покажите, что многочлен $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

**11.1.27.** Докажите, что многочлен $x^n-1$ не имеет кратных корней.

**11.1.28.** Пусть $f(x)$ из $\boldsymbol{Q}[x]$ неприводим над $\boldsymbol{Q}$. Докажите, что $f(x)$ не имеет кратных комплексных корней.

**11.1.29.** При каком значении $A$ многочлен $x^3-3x+A$ имеет кратные корни?

**11.1.30.** Найдите наибольший общий делитель многочлена $f(x)$ и его производной:

а) $f(x)=(x^2+x+1)^3(x-1)^4$;

б) $f(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$;

в) $f(x)=x^{m+n}-x^m-x^n+1$.

**11.1.31.** Пусть $F$ — конечное поле. Докажите, что существует такое $s \neq 1$, что значения многочленов $x$ и $x^s$ равны при любом значении $x$ из $F$.

**11.1.32.** Докажите, что если $A$ — область целостности, не являющаяся полем, то $A[x]$ не является кольцом главных идеалов.

**11.1.33.** Пусть $u_0$, $v_0$ — многочлены из $F[x]$, где $F$ — поле, удовлетворяющие равенству $fu_0+hv_0=c$, $h, f, c \in F[x]$. Найдите в $F[x]$ множество всех решений уравнения $fu+hv=c$.

**11.1.34.** Пусть $F$ — поле, $f(x)$, $g(x) \in F[x]$. Докажите, что множество всех общих кратных многочленов $f(x)$ и $g(x)$ образует идеал в $F[x]$. Каким многочленом порождается этот идеал?

**11.1.35.** Пусть $p(x)$ — неприводимый над полем $F$ многочлен, $f(x)$, $g(x)$ — многочлены из $F[x]$ и $f(x)\cdot g(x)$ делится на $(p(x))^k$. Докажите, что $(p(x))^k$ делит $f(x)$ или некоторую степень $g(x)$.

**11.1.36.** Пусть $\varphi$ — некоторое гомоморфное отображение области целостности $A$ на себя, $f(x)$ — произвольный многочлен из $A[x]$. Докажите, что существует один и только один гомоморфизм $\theta$ кольца $A[x]$ на себя, продолжающий $\varphi$, при котором $\theta(x)=f(x)$.

**11.1.37.** Найдите все автоморфизмы кольца $\mathbf{Z}[x]$; $\mathbf{Q}[x]$; $\mathbf{R}[x]$; $\mathbf{C}[x]$ над $\mathbf{C}$.

## § 2. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ФАКТОРИАЛЬНОСТЬ КОЛЬЦА МНОГОЧЛЕНОВ НАД ПОЛЕМ

**11.2.1.** Найдите все обратимые элементы в кольце $\mathbf{Q}[x, y]$, $\mathbf{Z}[x, y]$; $A[x, y]$, где $A$ — область целостности.

**11.2.2.** Приводимы ли в $\mathbf{Q}[x, y]$ следующие многочлены:

а) $3x^2-y$; б) $x^2+y^2-1$; в) $x^2+y^2+2xy$; г) $\frac{2}{3}$?

**11.2.3.** Разложите многочлены: 1) $x^2+y^2$; 2) $x^2+y^2+2x+1$; 3) $x^4+y^4$; 4) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$; 5) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ в произведение неприводимых множителей: а) в кольце $\mathbf{C}[x, y, z]$; б) в кольце $\mathbf{Z}_2[x, y; z]$.

**11.2.4.** а) Из каких многочленов состоит идеал $(x)+(y)$ в кольце $\mathbf{Q}[x, y]$?

б) Покажите, что идеал $(x)+(y)$ не является главным идеалом.

в) Является ли кольцо $\boldsymbol{Q}[x, y]$ евклидовым?

**11.2.5.** Покажите, что кольцо многочленов $F[x_1, ..., x_n]$ над полем $F$ не является кольцом главных идеалов тогда и только тогда, когда $n > 1$.

**11.2.6.** Докажите изоморфизмы колец:

а) $\boldsymbol{Q}[x, y] / ((x)+(y)) \cong \boldsymbol{Q}$;

б) $\boldsymbol{Q}[x, y] / (x+y) \cong \boldsymbol{Q}[x, y] / (x-y) \cong \boldsymbol{Q}[x, y] / (y) \cong \boldsymbol{Q}[x]$.

**11.2.7.** Является ли кольцо $\boldsymbol{Q}[x, y]$: а) евклидовым; б) кольцом главных идеалов; в) факториальным кольцом?

**11.2.8.** Верно ли, что кольцо $A[x, y]$:

а) евклидово, если $A$ евклидово;

б) кольцо главных идеалов, если $A$ — кольцо главных идеалов;

в) факториально, если $A$ факториально;

г) поле, если $A$ — поле?

## § 3. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

**11.3.1.** Докажите, что множество всех симметрических многочленов образует подкольцо кольца многочленов от $n$ переменных над данной областью целостности.

**11.3.2.** Орбитой многочлена $f \in A[x_1, ..., x_n]$ называется множество многочленов в $A[x_1, ..., x_n]$, которые получаются из $f$ действием всех подстановок группы $S_n$. Стационарной подгруппой многочлена $f$ называется подгруппа $S_n$, состоящая из подстановок, действующих на $f$ тождественно. Найдите орбиту и стационарную подгруппу следующих многочленов в кольце $\boldsymbol{Q}[x_1, x_2, x_3]$:

а) $3x_1^2x_2x_3$;

б) $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$;

в) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

**11.3.3.** Сумма элементов орбиты одночлена называется моногенным симметрическим многочленом. Сколько членов содержит моногенный симметрический многочлен $2x_1^2x_2x_3+\ldots$ в кольце $\boldsymbol{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$?

**11.3.4.** Какие из следующих многочленов являются симметрическими в кольце $\boldsymbol{Q}[x_1, x_2, x_3]$:

а) $x_1+x_2+x_3$; б) $3x_1^2+x_2+3x_3^2$; в) $x_1x_2+x_2x_1$;

г) $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$; д) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$;

е) $(x_1-x_2-x_3)(x_2-x_1-x_3)(x_3-x_1-x_2)$?

**11.3.5.** Какой из двух векторов выше в лексикографическом порядке: (1, 2, 3, 5, 1, 9) или (1, 2, 3, 5, 2, 0)?

**11.3.6.** Расположите в лексикографическом порядке по убыванию одночлены в многочлене $5x_1^3x_2^2x_3-8x_1^2x_2^5x_3+$ $+2x_2^5x_3^6-x_1^3$.

**11.3.7.** Найдите высший член многочлена:

а) $(x_2^3+x_1^2x_3-x_3^3)(x_1^2-x_1^2x_2x_3)(x_1^3x_2^2-x_1^4+x_2^4)$;

б) $2\sigma_1^4\sigma_2^3\sigma_3^2$, где $\sigma_1=x_1+x_2+x_3$, $\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $\sigma_3=x_1x_2x_3$.

**11.3.8.** Среди следующих одночленов укажите те, которые могут быть высшими членами симметрических многочленов:

а) $x_1^5x_2^3x_3^5$; б) $x_2^5x_3^4x_4^3$; в) $x_1^5x_2^5x_3^5$; г) $x_1^4x_2^4x_3$; д) $x_2^5x_3x_1^4$;

е) $x_2^5x_3^2x_1^5$.

**11.3.9.** Запишите в порядке убывания векторы степеней высших членов всех однородных симметрических многочленов степени 7 от трех переменных.

**11.3.10.** Следующие симметрические многочлены в кольце $\boldsymbol{Q}[x_1, x_2, x_3]$ выразите через основные симметрические многочлены:

а) $x_1^2+x_2^2+x_3^2$;

б) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$;

в) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

г) $(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$;

д) $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;

е) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$.

**11.3.11.** Выразите через основные симметрические многочлены следующие моногенные симметрические многочлены:

а) $x_1^2+\ldots$; б) $x_1^3+\ldots$;

в) $x_1^2x_2x_3+\ldots$; г) $x_1^2x_2^2+\ldots$;

д) $x_1^3x_2+\ldots$; е) $x_1^4+\ldots$;

ж) $x_1^2x_2^2x_3+\ldots$; з) $x_1^3x_2x_3+\ldots$;

и) $x_1^3x_2^2+\ldots$; к) $x_1^4x_2+\ldots$;

л) $x_1^5+\ldots$; м) $x_1^2x_2^2x_3x_4+\ldots$;

н) $x_1^2x_2^2x_3^2+\ldots$; о) $x_1^3x_2x_3x_4+\ldots$.

**11.3.12.** Исследуйте решение предыдущей задачи при малом числе переменных.

**11.3.13.** Найдите сумму кубов комплексных корней многочлена $2x^4-4x^3+2x^2-6x+1$.

**11.3.14.** Найдите сумму квадратов комплексных корней многочлена $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ над полем комплексных чисел.

**11.3.15.** Найдите значения основных симметрических многочленов от комплексных корней $n$-й степени из единицы.

**11.3.16.** Найдите сумму кубов корней $n$-й степени из единицы.

**11.3.17.** Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения $x^2+6x+10=0$.

**11.3.18.** Докажите, что при $a+b+c=0$ справедливы тождества:

а) $a^3+b^3+c^3=3abc$;
б) $a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=0$;
в) $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$.

**11.3.19.** Дискриминантом уравнения $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+$ $+a_n=0$ называется выражение $a_0^{2n-2}\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)^2$, где $x_1, \ldots,$ $x_n$ — корни данного уравнения. Вычислите дискриминанты уравнений:

а) $ax^2+bx+c=0$;
б) $ax^3+bx^2+cx+d=0$;
в) $x^3+px+q=0$.

**11.3.20.** Докажите, что для любых ненулевых комплексных чисел $\alpha$, $\beta$ корни уравнения $\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta=0$ удовлетворяют равенству $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-1$.

**11.3.21.** Найдите все значения $a$, при которых корни многочлена $x^3-6x^2+ax+a$ удовлетворяют равенству $(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0$.

**11.3.22.** Найдите уравнение третьей степени, корни которого удовлетворяют условиям: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-2$; $\frac{1}{x_1^2}+$ $+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=1$; $\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}+\frac{1}{x_3^4}=-1$.

**11.3.23.** Найдите условия на $p$ и $q$, чтобы корни уравнения $x^3+px+q=0$ удовлетворяли условию:

а) сумма квадратов корней равна нулю;
б) один из корней равен сумме двух других;
в) один из корней равен среднему арифметическому двух других.

## § 4. РЕЗУЛЬТАНТ ДВУХ МНОГОЧЛЕНОВ. ИСКЛЮЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

**11.4.1.** Вычислите результант двух многочленов:

а) $x^2-2$, $x^3+x-3\sqrt{2}$;
б) $2x^3-3x^2+2x+1$, $x^2+x+3$;
в) $x^3-1$, $x^2+x+1$;
г) $x^3+2x^2+2x-2$, $x^2-2x+4$.

**11.4.2.** При каких значениях $\lambda$ многочлены имеют общий корень в $\boldsymbol{C}$:

а) $x^2+\lambda x+1,\ x^2-\lambda x+1$;
б) $x^2+\lambda x+1,\ x^2+x+\lambda$;
в) $x^3+\lambda x^2-9,\ x^2+\lambda x-3$;
г) $x^3+\lambda x-1,\ x^2+(1+\lambda)x-2$;
д) $x^4+\lambda x^2+1,\ x^3+\lambda x+1$?

**11.4.3.** Исключите $x$ из системы уравнений

$$x^2-3xy+y^2-2=0,$$
$$2x^2-xy+3y^2-1=0.$$

**11.4.4.** Решите с помощью результанта следующие системы уравнений:

а) $xy^2+y^2+2=0,$
$x^2y-y+x-1=0;$
б) $x^2y-2xy-1=0,$
$xy^2+y=0;$
в) $y^2+x^2-y-3x=0,$
$y^2-6xy-x^2+11y+7x-12=0;$
г) $y^2-7xy+4x^2+13x-2y-3=0,$
$y^2-14xy+9x^2+28x-4y-5=0;$
д) $5y^2-6xy+5x^2-16=0,$
$y^2-xy+2x^2-y-x-4=0.$

**11.4.5.** Пусть хотя бы одно из чисел $a$ или $a'$ отлично от нуля. Покажите, что уравнения $ax^2+bx+c=0$, $a'x^2+b'x+c'=0$ имеют общий комплексный корень тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

**11.4.6.** Решите задачи 11.4.3 и 11.4.4 с использованием критерия 11.4.5.

**11.4.7.** Решите системы уравнений:

а) $x+y=1,$
$x^2+y^2=0;$
б) $xy=15,$
$x+y+x^2+y^2=42;$
в) $x^2+xy+y^2=4,$
$x+xy+y=2;$
г) $x+y=a+b,$
$x^2+y^2=a^2+b^2;$
д) $x^3+y^3=35,$
$x+y=5;$
е) $x^5+y^5=33,$
$x+y=3.$

**11.4.8.** Решите уравнение в действительных числах:

$$5x^2+y^2-4xy-2x+1=0.$$

**11.4.9.** Решите систему уравнений в действительных числах:

$$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx,$$
$$xyz=1.$$

**11.4.10.** Решите систему уравнений

$$2y=4-x^2,$$
$$2x=4-y^2.$$

**11.4.11.** Решите системы уравнений в действительных числах:

а) $\frac{2x_1^2}{1+x_1^2}=x_2,$ $\frac{2x_2^2}{1+x_2^2}=x_3,$ $\frac{2x_3^2}{1+x_3^2}=x_1;$

б) $2x+x^2y=y,$ $2y+y^2z=z,$ $2z+z^2x=x.$

**11.4.12.** Для любых целых положительных $n$ и действительных $a$ решите систему в действительных числах:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a,$$
$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=a^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n=a^n.$$

**11.4.13.** Для каждой пары положительных целых чисел $n$ и $k$ решите систему в неотрицательных действительных числах:

$$x_1^k+\ldots+x_n^k=1,$$
$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)=2.$$

**11.4.14.** Решите следующие системы уравнений в действительных числах:

а) $x(x+y+z)=a^2,$ $y(x+y+z)=b^2,$ $z(x+y+z)=c^2;$

б) $x(x+y+z)=a-yz,$ $y(x+y+z)=b-xz,$ $z(x+y+z)=c-xy$ $(a>0,\ b>0,\ c>0);$

в) $y+z+yz=a,$ $x+z+xz=b,$ $x+y+xy=c$ $(a>-1$ $b>-1,$ $c>-1);$

г) $yz=ax,$ $zx=by,$ $xy=cz$ $(a>0,\ b>0,\ c>0).$

# ГЛАВА 12. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ЧИСЛОВЫМИ ПОЛЯМИ

## § 1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЗАМКНУТОСТЬ ПОЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ФОРМУЛЫ ВИЕТА. РАЗЛОЖЕНИЕ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

**12.1.1.** Пусть $\sigma_{k,n}$ — $k$-й основной симметрический многочлен от $n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$.

а) Проверьте формулы:

$\sigma_{1,n}=\sigma_{1,n-1}+x_n$;

$\sigma_{n,n}=\sigma_{n-1,n-1}\cdot x_n$;

$\sigma_{k,n}=\sigma_{k,n-1}+\sigma_{k-1,n-1}\cdot x_n$.

б) Укажите способ вычисления значений основных симметрических многочленов $\sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \sigma_{3,n}, \ldots, \sigma_{n,n}$ от данных $n$ чисел за $\frac{n(n-1)}{2}$ сложений и столько же умножений.

**12.1.2.** Найдите многочлены наименьшей степени с комплексными коэффициентами, которые имеют следующие корни:

а) двойной корень 1, простые 2, 3, $1+i$;
б) тройной корень $-1$, простые 3, 4;
в) двойной корень $i$, простой $-1-i$;
г) $i$, $-i$, $1+i$, $1-i$, 2.

**12.1.3.** Найдите наибольший общий делитель многочленов:

а) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ и $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;
б) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ и $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\times$ $\times(x^4+1)$;
в) $(x^3-1)(x^2-2x+1)$ и $(x^2-1)^3$;
г) $x^m-1$ и $x^n-1$.

**12.1.4.** Пусть $f(x)=x^5-2ix^3+x\in \boldsymbol{C}[x]$.

а) Найдите какое-либо действительное положительное число $\delta$, чтобы при $|x|<\delta$ выполнялось неравенство $|f(x)|<0{,}1$.

б) Найдите целое положительное число $R$, чтобы при $|x|>R$ выполнялось неравенство $|f(x)|>750$.

**12.1.5.** Используя лемму Даламбера, найдите какое-либо комплексное число $c$, для которого $|f(c)|<|f(a)|$:

а) $f(x)=x^2+x+1$, $a=i$;
б) $f(x)=x^4-4x^3+2$, $a=0$.

**12.1.6.** Разложите на линейные множители в $\boldsymbol{C}[x]$ многочлены:

а) $x^2+x+1+i$;
б) $x^4+x^3-x-1$;
в) $x^4+3x^3+4x^2+3x+1$;
г) $x^3-6x^2+11x-6$;
д) $x^4+4$;
е) $x^4-10x^2+1$;
ж) $x^6+27$;
з) $x^n-1$;
и) $x^{m+n}-x^m-x^n+1$;
к) $x^{2n}-(2^n+3^n)x^n+6^n$.

**12.1.7.** Сумма двух корней уравнения $2x^3-x^2-7x+\lambda=0$ равна 1. Найдите $\lambda$ и корни уравнения.

**12.1.8.** Определите $\lambda$ так, чтобы один из корней уравнения $x^2-3x+\lambda=0$ равнялся удвоенному другому.

**12.1.9.** Зная, что многочлен $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+$ $+a_0\in\boldsymbol{C}[x]$ имеет корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, вычислите произведение $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$.

**12.1.10.** Пусть $b^2<4ac$, где $a$, $b$, $c$ — действительные числа. Докажите, что фактор-кольцо $\boldsymbol{R}[x]/(ax^2+bx+c)$ изоморфно полю комплексных чисел.

**12.1.11.** При каких натуральных значениях $m$ многочлен делится на $x^2+x+1$:

а) $x^{3m}+x^{3m+1}+x^{3m+2}$;
б) $x^{2m}+x^m+1$;
в) $(x+1)^m-x^m-1$;
г) $(x+1)^m+x^m+1$;
д) $(x+1)^{2m+1}+x^{m+2}$?

**12.1.12.** Докажите, что ненулевые многочлены $P$ и $Q$ с комплексными коэффициентами имеют одинаковые корни одинаковой кратности тогда и только тогда, когда функция $f(z)=|P(z)|-|Q(z)|$ имеет постоянный знак во всех точках $z\in\boldsymbol{C}$, в которых она отлична от нуля.

## § 2. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. СОПРЯЖЕННОСТЬ МНИМЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА. НЕПРИВОДИМЫЕ НАД ПОЛЕМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ МНОГОЧЛЕНЫ

**12.2.1.** Найдите многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий корни:

а) двойной корень 1, простые 2, 3, $1+i$;
б) $i-1$, $\pi$, $-1+i\sqrt{3}$;
в) тройной корень $2-3i$;
г) двойной корень $i$, простой $-1-i$.

**12.2.2.** Разложите на неприводимые множители над полем действительных чисел:

а) $x^3+x+2$; г) $x^5-1$;
б) $x^4+2x^2+4$; д) $x^4+4$;
в) $x^4-x^2+1$; е) $x^6-27$;
ж) $x^4-ax^2+1$, где $-2<a<2$.

**12.2.3.** Пусть $f$ — многочлен над полем действительных чисел, у которого старший коэффициент и свободный член имеют разные знаки. Докажите, что $f$ имеет хотя бы один действительный корень.

**12.2.4.** Многочлен $f$ с действительными коэффициентами таков, что уравнение $f(x)=x$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $f(f(x))=x$ также не имеет действительных корней.

**12.2.5.** Многочлен с действительными коэффициентами $f(x)$ удовлетворяет неравенству $f(x)\geqslant 0$ при всех действительных значениях $x$. Докажите, что найдутся многочлены с действительными коэффициентами $u(x)$ и $v(x)$, такие, что $f=u^2+v^2$.

**12.2.6.** Многочлен с неотрицательными коэффициентами $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+1$ имеет $n$ действительных корней. Докажите, что $P(2)\geqslant 3^n$.

**12.2.7.** Пусть $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, все корни которого являются чисто мнимыми, т. е. имеют вид $ai$, $0\neq a\in \mathbf{R}$. Докажите, что все корни производной $P'(x)$, кроме одного, являются также чисто мнимыми.

**12.2.8.** Найдите все пары действительных чисел $p$ и $q$, для которых многочлен $x^4+px^2+q$ имеет четыре действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

## § 3. УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ, ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

**12.3.1.** Докажите, что для корней $x_1$, $x_2$ многочлена $x^2+px-\frac{1}{2p^2}$, где $p\in\mathbf{R}$, $p\neq 0$, выполнено неравенство $x_1^4+x_2^4\geqslant 2+\sqrt{2}$.

**12.3.2.** Найдите все многочлены $x^2+px+q\in\mathbf{C}[x]$, удовлетворяющие условию $x^2+px+q=(x-p)(x-q)$.

**12.3.3.** При каких ограничениях на целые числа $p$ и $q$:

а) многочлен $x^2+px+q$ принимает при всех $x\in\mathbf{Z}$ четные (нечетные) значения;

б) многочлен $x^3+px+q$ принимает при всех $x\in\mathbf{Z}$ значения, делящиеся на 3?

**12.3.4.** Докажите, что если уравнение с целыми коэффициентами $x^2+ax+(b+1)=0$ имеет ненулевые целые корни, то число $a^2+b^2$ составное.

**12.3.5.** Для заданных действительных чисел $p$ и $q$ найдите все значения, которые многочлен $x^2+px+q$ принимает на отрезке $[-1, 1]$.

**12.3.6.** Докажите, что если корнями многочлена $x^2+px+1$ являются числа $\alpha$ и $\beta$, а корнями многочлена $x^2+qx+1$ — числа $\gamma$ и $\delta$, то справедливо равенство $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$.

**12.3.7.** Покажите, что по крайней мере одно из уравнений с действительными коэффициентами: $x^2+p_1x+q_1=0$ и $x^2+p_2x+q_2=0$ — имеет действительные корни при условии $p_1p_2=2(q_1+q_2)$.

**12.3.8.** Пусть $a$, $b$ и $c$ — действительные числа. Покажите, что корни следующих уравнений также являются действительными числами:

а) $a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)=0$;

б) $(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$.

**12.3.9.** Покажите, что если для действительных чисел $p_1$, $p_2$, $q_1$, $q_2$ выполнено неравенство $(q_1-q_2)^2+(p_1-p_2)\times(p_1q_2-p_2q_1)<0$, то квадратные трехчлены $x^2+p_1x+q_1$ и $x^2+p_2x+q_2$ имеют действительные корни и между корнями каждого из них лежит корень другого.

**12.3.10.** Решите следующие уравнения:

а) $x^3-3x+2=0$;

б) $x^3-6x+4=0$;

в) $x^3+6x^2+30x+25=0$;

г) $x^3+3x-2i=0$;

д) $x^3+9x^2+18x+28=0$;

е) $x^3+12x+63=0$.

**12.3.11.** Используя формулу Кардано, покажите, что $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-4p^3-27q^2$, где $x_1$, $x_2$, $x_3$ — корни уравнения $x^3+px+q=0$.

**12.3.12.** Решите уравнения методом Феррари:

а) $x^4+2x^3+2x^2+x-7=0$;
б) $x^4-x^3-x^2+2x-2=0$;
в) $x^4+12x+3=0$.

**12.3.13.** Найдите все комплексные $a$, $b$ и $c$, для которых справедливо равенство

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-a)(x-b)(x-c).$$

**12.3.14.** Комплексные числа $a$, $b$, $c$ являются тремя из четырех корней многочлена $x^4-ax^3-bx+c$. Найдите все такие тройки чисел $a$, $b$, $c$.

## § 4. ПРАВИЛО ЗНАКОВ ДЕКАРТА. ОТДЕЛЕНИЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ

Пусть имеется последовательность действительных чисел $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$. Будем говорить, что на $k$-м месте последовательность имеет перемену знака, если $a_{k-1}\cdot a_k<0$.

**12.4.1.** Пусть последовательность $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$, где $a_n\neq 0$, имеет $w$ перемен знака. Докажите, что образованная из нее последовательность $a_0$, $a_1-a_0$, $a_2-a_1$, ..., $a_n-a_{n-1}$, $-a_n$ имеет $w+v$ перемен знака, где $v$ — некоторое нечетное положительное число.

**12.4.2.** Пусть $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\in \boldsymbol{R}[x]$. Обозначим через $w(f)$ число перемен знака в последовательности коэффициентов $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$. Докажите, что для любого положительного числа $a$ и любого ненулевого многочлена $f$ разность $w((a-x)f(x))-w(f)$ есть положительное нечетное число.

**12.4.3.** Докажите, что если все действительные корни многочлена с действительными коэффициентами являются неположительными числами, то последовательность его коэффициентов имеет четное число перемен знака.

**12.4.4** (правило знаков Декарта). Пусть $k$ — число положительных корней с учетом кратности многочлена $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\in \boldsymbol{R}[x]$, $w$ — число перемен знака в последовательности коэффициентов $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$. Докажите, что:

а) $w\geqslant k$; б) $w-k$ есть четное число.

**12.4.5.** Покажите, что многочлен $x^8+7x^6-9x^5-x^4-3$ имеет ровно два действительных корня, один положительный и один отрицательный.

**12.4.6.** Пусть многочлен степени $n$ с действительными коэффициентами представляет из себя сумму $k$ одночленов, $k \leqslant n+1$. Докажите, что число ненулевых действительных корней $f$ с учетом кратности не превосходит $2(k-1)$.

**12.4.7.** Составьте ряд Штурма и определите число действительных корней многочлена:

а) $x^3-3x-1$; б) $x^3-x+5$;
в) $x^4-12x^2-16x-4$; г) $x^4+x^2-1$;
д) $x^4+4x^3-12x+9$; е) $x^4+2x^3+3x^2+2x-2$;
ж) $ax^2+bx+c$; з) $x^3+px+q$.

**12.4.8.** В задаче 12.4.7 отделите корни многочленов а) — е).

**12.4.9.** Используя метод Ньютона, в котором $(i+1)$-е приближение $x_{i+1}$ вычисляется через $i$-е приближение $x_i$ по формуле $x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i)$, найдите корни многочленов 12.4.7, б и 12.4.7, е с точностью до 0,1.

## § 5. МНОГОЧЛЕНЫ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**12.5.1.** Докажите, что если $\frac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем многочлена $a_0+a_1x+ +\ldots+a_nx^n$ с целыми коэффициентами, то:

а) $p$ есть делитель $a_0$;
б) $q$ есть делитель $a_n$;
в) $p-mq$ есть делитель $f(m)$ при любом целом $m$.

**12.5.2.** Найдите все рациональные корни многочленов:

а) $x^3-6x^2+15x-14$;
б) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$;
в) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$;
г) $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$;
д) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6$;
е) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$;
ж) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$.

**12.5.3.** Покажите, что многочлен $f$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечетные числа.

**12.5.4.** Покажите, что многочлен с целыми коэффициентами не имеет рациональных корней, если он принимает значение 1 при трех различных целых значениях аргумента.

12.5.5. С помощью критерия Эйзенштейна докажите неприводимость в $\boldsymbol{Q}[x]$ следующих многочленов:

а) $x^3-12$; б) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$;
в) $2x^5+6x^4-9x^2+12$; г) $x^5-12x^3+36x-12$;
д) $x^4-x^3+2x+1$; е) $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$, где $p$ — простое число.

12.5.6. С помощью редукции по модулю 2 или 3 докажите неприводимость в $\boldsymbol{Q}[x]$ следующих многочленов:

а) $4x^3+10x^2-5x+5$;
б) $x^3+31x^2+301x+3002$;
в) $3001x^3-29x^2+28x+29$;
г) $1991x^4+1993x^3+1995x^2+1997x+1999$;
д) $x^4+1999x^3+2000x^2+2001$;
е) $(2k+1)x^4+(2l+1)x^3+2mx^2+2nx+(2r+1)$, $k$, $l$, $m$, $n$, $r\in\boldsymbol{Z}$.

12.5.7. Для каких целых $m$ и $n$ многочлен $mx^3+n$ приводим над полем рациональных чисел?

12.5.8. Для каких рациональных $\alpha$ и $\beta$ многочлен $x^4+\alpha x^2+\beta$ приводим в кольце $\boldsymbol{Q}[x]$?

12.5.9. Разложите на неприводимые множители в $\boldsymbol{Q}[x]$:

а) $x^4-5x^2+6$; б) $x^4+2x^2+9$;
в) $x^4+4x^2+4$; г) $x^4+x^2+16$.

12.5.10 (теорема Л. Эйлера). Докажите, что не существует многочлена $f$ положительной степени с рациональными коэффициентами, для которого $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ...— простые числа.

12.5.11 (XXVIII Международная математическая олимпиада школьников). Пусть $f(x)=x^2+x+p$, $p\in\boldsymbol{N}$. Докажите, что если $f(0)$, $f(1)$, ..., $f([\sqrt{p/3}])$ — простые числа, то также простыми являются все числа $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(p-2)$.

12.5.12. Покажите, что при $p=2$, 3, 5, 11, 17, 41 многочлен $x^2+x+p$ удовлетворяет условию задачи 12.5.11.

12.5.13 (многочлен Л. Эйлера). Пусть $g(x)=x^2-79x+1601$. Докажите, что все числа $g(0)$, $g(1)$, ..., $g(79)$ являются простыми.

12.5.14. Докажите, что в многочлене $(1+x)^{2^n}$ все коэффициенты четные, кроме старшего коэффициента и свободного члена.

12.5.15. Найдите число нечетных коэффициентов в многочлене $(1+x)^{1025}$.

12.5.16. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, степень которого меньше $q=2^k$. Докажите, что число нечетных коэффициентов многочлена $(1+x)^q f(x)$ вдвое больше числа нечетных коэффициентов многочлена $f(x)$.

**12.5.17.** Пусть $s=\alpha_0 2^k+\alpha_1 2^{k-1}+\ldots+\alpha_k$ $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \{0, 1\})$ — разложение натурального числа $s$ по степеням двойки, $r$ — число ненулевых цифр в этом разложении. Докажите, что многочлен $(1+x)^s$ имеет $2^r$ нечетных коэффициентов.

**12.5.18.** $\binom{n}{k}$ — число сочетаний из $n$ по $k$. Докажите, что:

а) $\binom{n}{k}$ — четное число для любого $k$ от 1 до $n-1$ тогда и только тогда, когда $n=2^s$ для некоторого $s \geqslant 1$;

б) $\binom{n}{k}$ — нечетное число при любом $k$ тогда и только тогда, когда $n=2^s-1$.

**12.5.19** (XXVI Международная математическая олимпиада школьников). Пусть $0 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ — целые числа. Докажите, что количество нечетных коэффициентов у многочлена $(1+x)^{i_1}+(1+x)^{i_2}+\ldots+(1+x)^{i_n}$ не меньше, чем у многочлена $(1+x)^{i_1}$.

**12.5.20.** Пусть $p$ — простое число, $0 \leqslant \alpha_i < p$, $i=0, 1, \ldots, k$ — целые числа, $n=\alpha_0 p^k+\alpha_1 p^{k-1}+\ldots+\alpha_k$. Докажите, что у многочлена $(1+x)^n$ ровно $(\alpha_0+1)(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_k+1)$ коэффициентов не делится на $p$.

## § 6. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ПОЛЯ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

**12.6.1.** Приводимы или нет в $\boldsymbol{C}[x]$ многочлены: а) нулевой; б) нулевой степени; в) первой степени; г) второй степени; д) третьей степени? Тот же вопрос для колец $\boldsymbol{R}[x]$, $\boldsymbol{Q}[x]$, $\boldsymbol{Z}_2[x]$.

**12.6.2.** Опишите все неприводимые многочлены в $\boldsymbol{C}[x]$ и в $\boldsymbol{R}[x]$.

**12.6.3.** Приведите пример неприводимого в $\boldsymbol{Q}[x]$ многочлена второй степени, третьей степени, десятой степени, сотой степени.

**12.6.4.** Может ли неприводимый в $\boldsymbol{Q}[x]$ многочлен не иметь комплексных корней?

**12.6.5.** Могут ли взаимно простые в $\boldsymbol{Q}[x]$ многочлены иметь общий комплексный корень?

**12.6.6.** Может ли неприводимый в $\boldsymbol{Q}[x]$ многочлен иметь кратные комплексные корни?

**12.6.7.** Докажите, что для неотрицательных действительных чисел $a$ и $b$, $a^2 \geqslant b$, выполнено равенство

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

**12.6.8.** Докажите равенства:

а) $(\sqrt{12-2\sqrt{35}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{2})^2=7$;

б) $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=2$.

**12.6.9.** Докажите равенство

$$\left(\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}\right)^4=\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}.$$

**12.6.10.** Освободитесь от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; в) $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

г) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; д) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$;

е) $\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$; ж) $\frac{23}{\sqrt{1+2\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$;

з) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}+1}$; и) $\frac{\alpha}{\alpha+1}$, $\alpha^3-3\alpha+1=0$;

к) $\frac{\alpha^2-3\alpha-1}{\alpha^2+2\alpha+1}$, $\alpha^3+\alpha^2+3\alpha+4=0$;

л) $\frac{1}{3\alpha^3+\alpha^2-2\alpha-1}$, $\alpha^4-\alpha^3+2\alpha+1=0$;

м) $\frac{11}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-1}$.

**12.6.11.** Найдите минимальный многочлен для $\alpha$ над полем $F$:

а) $\alpha=-i$, $F=\boldsymbol{R}$; б) $\alpha=i\sqrt{2}$, $F=\boldsymbol{C}$;

в) $\alpha=i\sqrt{2}$, $F=\boldsymbol{Q}$; г) $\alpha=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $F=\boldsymbol{Q}$;

д) $\alpha=\sqrt[4]{2}$, $F=\boldsymbol{Q}$; е) $\alpha=\sqrt[4]{2}$, $F=\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$.

**12.6.12.** Найдите многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является следующее число:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$;

в) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$; г) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

**12.6.13.** Составьте уравнение с рациональными коэффициентами, корнем которого является $\lambda$:

а) $\lambda=\alpha^2+\alpha+1$, $\alpha^3-\alpha-1=0$;
б) $\lambda=\alpha^2+1$, $\alpha^3+2\alpha^2+2=0$;
в) $\lambda=2-\alpha^2$, $\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1=0$.

**12.6.14.** Пусть $\alpha$, $\beta$ — трансцендентные числа, $a$ и $b$ — ненулевые алгебраические. Какие из следующих чисел $a\pm b$, $a\pm\alpha$, $a\alpha$, $\alpha/a$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{\alpha}$, $\alpha\pm\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha/\beta$, $a^n$, $\alpha^n$, $ab$: а) обязаны быть алгебраическими; б) обязаны быть трансцендентными; в) могут оказаться как алгебраическими, так и трансцендентными?

**12.6.15.** Найдите степень расширения полей:

а) $\boldsymbol{Q}<\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; б) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})<\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$;
в) $\boldsymbol{R}<\boldsymbol{C}$; г) $\boldsymbol{R}<\boldsymbol{R}$.

**12.6.16.** Найдите базис и степень расширения полей: а) $\boldsymbol{Q}<\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$; б) $\boldsymbol{Q}<\boldsymbol{Q}(\sqrt[5]{2})$; в) $\boldsymbol{Q}<\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; г) $\boldsymbol{R}<\boldsymbol{R}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; д) $\boldsymbol{R}<\boldsymbol{C}$; е) $\boldsymbol{Q}<\boldsymbol{Q}$.

**12.6.17.** Пусть $\boldsymbol{Q}<F$ — расширение степени 6.

а) Может ли $F$ содержать трансцендентные числа?

б) Для каких натуральных $n$ в $F$ содержатся алгебраические числа степени $n$?

**12.6.18.** Какие из следующих полей являются алгебраически замкнутыми: $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{R}$, поле алгебраических чисел, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$, $\boldsymbol{Q}(i)$, $\boldsymbol{R}(i)$?

**12.6.19.** Какую степень может иметь конечное расширение:

а) поля действительных чисел;
б) поля комплексных чисел;
в) поля рациональных чисел?

**12.6.20.** Докажите, что если степень неприводимого над полем рациональных чисел многочлена не является степенью двойки, то его корни нельзя получить из рациональных чисел с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня.

**12.6.21.** Докажите, что уравнение $x^6+x^3+1=0$ неразрешимо в квадратных радикалах.

**12.6.22.** Докажите, что уравнение $x^5-1=0$ разрешимо в квадратных радикалах.

**12.6.23.** Докажите, что правильный пятиугольник можно построить циркулем и линейкой, а правильный девятиугольник нельзя.

# ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

## ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

### § 1

**1.1.1.** а), б), в), г), ж), з), и). Указание. б) Это утверждение о произвольных действительных числах $x_1$, $x_2$.

**1.1.5.** 4; 8; $2^n$. **1.1.6.** а)

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee q$ | $p \to q$ | $(p \to q) \to r$ | $(p \vee q) \wedge ((p \to q) \to r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| и | и | и | и | и | и | и |
| л | и | и | и | и | и | и |
| и | л | и | и | л | и | и |
| л | л | и | л | и | и | л |
| и | и | л | и | и | л | л |
| л | и | л | и | и | л | л |
| и | л | л | и | л | и | и |
| л | л | л | л | и | л | л |

**1.1.7.** а) л; б) — д) и. **1.1.9.** а), б), в), д), е), з) Тавтологии. **1.1.10.** а), г), ж) Тавтологии; д) противоречие. **1.1.11.** 4.

**1.1.13.** Указание. Доказать, что существует всего 8 различных истинностных таблиц для формул от двух высказывательных переменных, если одна из строк во всех таблицах одинакова.

**1.1.15.** У к а з а н и е. Использовать тавтологии: $\neg(p\vee q)\leftrightarrow$ $\leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$, $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q$, $\neg\neg p\leftrightarrow p$.

**1.1.17.** У к а з а н и е. Выразить все логические операции через данные. Например, в п. а) можно использовать тавтологии $p\vee q\leftrightarrow\neg p\to q$; $p\wedge q\leftrightarrow\neg(p\to\neg q)$.

**1.1.18.** а), д), е), м), п) Высказывания; к), л), н) предикаты; в), г), ж), з) можно отнести к предикатам, а можно и к высказываниям, если предполагать, что сформулировано утверждение о произвольных числах; б), и), о) не являются ни высказываниями, ни предикатами: б) — определение, и), о) — числовые формы. **1.1.21.** Равносильные предикаты: а), б), в), д), е), ж), и), к). **1.1.27.** Истинные высказывания: б), в), д), е), и).

**1.1.31.** У к а з а н и е. $p$ и $q$ называются простыми числами-близнецами, если $p$ и $q$ — простые числа и $|p-q|=2$.

**1.1.33.** Истинные высказывания: б), в), д), ж), к).

## § 2

**1.2.4.** а), б), в), д) Истинны все утверждения; г), е) истинно данное утверждение и противоположное к обратному. **1.2.5.** 1б), 1в), 1г), 1д), 1е), 1ж); 2а), 2б), 2в), 2д), 2е) Истинны оба утверждения: данное и обратное к нему. **1.2.6.** а), б). **1.2.7.** Истинны б), д), остальные ложны.

## § 3

**1.3.1.** Истинны в), д), ж), з), к), м), о), п), остальные ложны. **1.3.3.** Истинны: б) 24; $624\in\{y\in\boldsymbol{N}\mid(\exists n\in\boldsymbol{N})\ y^n$ делится на $18\}$; д) 0; $5\in\{x\in\boldsymbol{R}\mid(\exists y\in\boldsymbol{R})\ x=y^2+3y-2\}$; е). **1.3.4.** е) Всего 16 чисел; ж) всего 12 последовательностей; з) всего 10 номеров; к) $a=-3$. **1.3.5.** Конечные множества: а), в), г).

**1.3.6.** а) $[-1,\ 1]$; б) $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2},\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$; в) $(-\infty,\ 0)\cup(3,\ \infty)$; г) $\varnothing$. **1.3.8.** Равные множества: а), в). **1.3.9.** Равные множества: в), д), з). **1.3.10.** Истинны высказывания а), б), г).

## § 4

**1.4.4.** $\left\{-\frac{5}{3},\ \frac{5}{3}\right\}$. **1.4.10.** а) $X=\bar{A}$; б) $X=\bar{A}$; в) $X\subseteq\bar{A}$; г) $X=A$; д) $\bar{X}=\bar{A}$. **1.4.11.** $X=B\cup(C\setminus A)$. **1.4.12.** $X=(A\setminus B)\cup C$. **1.4.16.** Верно в).

**1.4.19.** У к а з а н и е. Для вывода двойственных тождеств использовать тождества $A=\overline{\overline{A}}$ и $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

**1.4.22.** $\bigcap\limits_{\alpha\in\boldsymbol{N}}X_\alpha=\varnothing$, $\bigcup\limits_{\alpha\in\boldsymbol{N}}X_\alpha=(0,\ \infty)$.

**1.5.12.** Равенство верно тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий: 1) $A=C$; 2) $B=D$; 3) $A\subseteq C\wedge B\subseteq D$; 4) $D\subseteq B$ и $C\subseteq A$. Указание. Если ни одно из этих условий не выполняется, то можно найти либо упорядоченную пару $\langle a, d\rangle$, такую, что $a\in A\setminus C$, $d\in D\setminus B$, либо упорядоченную пару $\langle c, b\rangle$, такую, что $c\in C\setminus A$, $b\in B\setminus D$. В обоих случаях такая пара принадлежит множеству $(A\cup C)\times(B\cup D)$, но не принадлежит $(A\times B)\cup\cup(C\times D)$.

**1.5.15.** г) $\mathrm{D}(\rho)=[-1, 1]$, $\mathrm{Im}(\rho)=\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; д) $\mathrm{D}(\rho)==[0, \infty)$, $\mathrm{Im}(\rho)=(-\infty, \infty)$.

**1.5.16.** а) $\mathrm{D}(\rho)=\{1, 2, 3, 5\}$, $\mathrm{Im}(\rho)=B$; б) $\mathrm{D}(\rho)=\{1, 2, 3, 4\}$, $\mathrm{Im}(\rho)=B$; в) $\mathrm{D}(\rho)=\boldsymbol{Z}\times(\boldsymbol{Z}\setminus\{0\})$, $\mathrm{Im}(\rho)=\boldsymbol{Q}$; г) $\mathrm{D}(\rho)=A$, $\mathrm{Im}(\rho)=B$; д) $\mathrm{D}(\rho)=\boldsymbol{Z}\setminus\{0\}$, $\mathrm{Im}(\rho)=\left\{\frac{1}{m}\;\middle|\; m\in\boldsymbol{Z}\setminus\{0\}\right\}$; е) $\mathrm{D}(\rho)==\boldsymbol{Z}$, $\mathrm{Im}(\rho)=\{2^n\,|\,n\in\boldsymbol{Z}\}$.

**1.5.17.** 1г) Не рефлексивно, не симметрично, антисимметрично и транзитивно; 2а) рефлексивно, не симметрично, не антисимметрично, не транзитивно; 2д) не рефлексивно, не симметрично, антисимметрично, не транзитивно; 3е) рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, транзитивно; 4б) не рефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно.

**1.5.18.** Декартова диаграмма рефлексивного отношения содержит прямую $x=y$; симметричного отношения симметрична относительно прямой $x=y$; антисимметричного отношения не содержит точек, симметричных относительно прямой $x=y$ и не лежащих на этой прямой.

**1.5.19.** В графе транзитивного отношения любые точки $a$ и $b$, такие, что от $a$ к $b$ можно пройти по ломаной, состоящей из ориентированных ребер, следуя по направлению стрелок, соединены также ориентированным ребром напрямую.

**1.5.20.** Указание. Если $\rho$ — симметричное отношение, то $\rho^{-1}=\rho$; если $\rho$ — транзитивное отношение, то $\rho\cdot\rho=\rho$. 1б) $x(\rho\circ\rho)y\Leftrightarrow x^2=y^2\leqslant 1$; 1в) $x(\rho\circ\rho)y\Leftrightarrow xy>0$; 2а) $x(\rho\circ\rho)y\Leftrightarrow x\leqslant y+2$; $\rho^{-1}\circ\rho=\rho\circ\rho^{-1}=\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$; 2в) $x(\rho\circ\rho)y\Leftrightarrow\Leftrightarrow 3/(x-y)$; 2д) $x(\rho\circ\rho)y\Leftrightarrow 4x=9y$; $x(\rho\circ\rho^{-1})y\Leftrightarrow x=y\wedge 2/x$; 3г) $\rho\circ\rho=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$; 3д) $\rho\circ\rho=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$; 4а) $\rho\circ\rho=P(\boldsymbol{Z})\times P(\boldsymbol{Z})$; 4в) $x(\rho\circ\rho)y\Leftrightarrow x\neq\varnothing\wedge y\neq\varnothing$; 5б) $x(\rho\circ\rho)y\Leftrightarrow x\| y$.

**1.5.21.** В таблице на пересечении $i$-й строки и $k$-го столбца указано отношение $\rho_i\circ\rho_k$:

| | $\rho_1$ | $\rho_2$ | $\rho_3$ | $\rho_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\rho_1$ | $x=y^4$ | $x+y^2=0$ | $R^+\times(\boldsymbol{R}\setminus\{0\})$ | $x+y^2\in\boldsymbol{Z}$ |
| $\rho_2$ | $\rho_1$ | $x=y$ | $xy<0$ | $x-y\in\boldsymbol{Z}$ |
| $\rho_3$ | $\boldsymbol{R}^+\times(\boldsymbol{R}\setminus\{0\})$ | $xy<0$ | $\rho_3$ | $\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{R}\setminus\{0\})$ |
| $\rho_4$ | $y+\sqrt{x}\in\boldsymbol{Z}\vee$ $\vee y-\sqrt{x}\in\boldsymbol{Z}$ | $x-y\in\boldsymbol{Z}$ | $(R\setminus\{0\})\times\boldsymbol{R}$ | $x-y\in\boldsymbol{Z}$ |

**1.5.25.** г) Решение. $a(\varphi\setminus\psi)^{-1}b\Leftrightarrow b(\varphi\setminus\psi)a\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b\varphi a\wedge\neg(b\psi a)\Leftrightarrow a\varphi^{-1}b\wedge\neg(a\psi^{-1}b)\Leftrightarrow a(\varphi^{-1}\setminus\psi^{-1})b$.

**1.5.26.** б) Указание. Такое отношение не всюду определено.

## § 6

**1.6.1.** а), б), г), к) Всюду определено, но не функционально; в), л), с) не всюду определено, но функционально; д), ж), з), и), м), н), о), п), р) всюду определено и функционально; е) если принято соглашение о том, что в десятичном разложении числа не может быть 9 в периоде, то отношение всюду определено и функционально.

**1.6.3.** а) $\operatorname{Im}(\varphi)=[-1,\ \infty)$; б) $[0,\ 2]$; в) $(0,\ \infty)$; г) $\boldsymbol{R}$; д) $\left[-\frac{5}{4},\ \infty\right)$; е) $[2\sqrt[4]{8},\ \infty)$; ж) $[\log_2 3-2,\ \infty)$; з) $\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right]$.

**1.6.4.** а) $f(A)=\left\{\langle x,\ y\rangle\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\,|\,y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right\}$, симметрия относительно прямой $y=x$; б) $f(A)=\left\{\langle x,\ y\rangle\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\,|\,y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right\}$, симметрия относительно прямой $y=-x$; в) $f(A)=\{\langle x,\ y\rangle\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\,|\,y=-2x-3\}$, симметрия относительно прямой $y=0$; г) $f(A)=\{\langle x,\ y\rangle\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\,|\,y=-2x+3\}$, симметрия относительно прямой $x=0$; д) $f(A)=\left\{\langle x,\ y\rangle\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\,|\,y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right\}$, симметрия относительно прямой $y=x+2$.

**1.6.5.** а) $\{\pi k\,|\,k\in\boldsymbol{Z}\}$; б) $\{0\}$; в) $\varnothing$.

**1.6.6.** а), б), в), е), з) Не инъективно, не сюръективно; г) не инъективно, сюръективно; д) инъективно, не сюръективно; ж), и), к), л) инъективно, сюръективно. Указание. Монотонная функция определяет инъективное отображение.

**1.6.7.** Всего 6 сюръективных отображений, инъективных отображений нет. **1.6.8.** Всего 4 отображения. **1.6.11.** Пусть $\chi(B)=\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$; $\chi(C)=\langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$. Тогда $\chi(B\cap C)=$ $=\langle\min(\alpha_1, \beta_1), \ldots, \min(\alpha_n, \beta_n)\rangle$, $\chi(B\cup C)=\langle\max(\alpha_1, \beta_1),$ $\ldots, \max(\alpha_n, \beta_n)\rangle$, $\chi(\bar{B})=\langle 1-\alpha_1, \ldots, 1-\alpha_n\rangle$.

**1.6.12.** Указание. Чтобы доказать сюръективность, рассмотреть произвольные точки $A$, $B$ плоскости и их образы $A'$, $B'$. Если $Y$ — заданная точка, то ее прообразом является такая точка $X$, что треугольник $ABX$ равен треугольнику $A'B'Y$.

**1.6.13.** а) $2^{mn}$; б) $n^m$; в) $m\leqslant n$; г) $m\geqslant n$; д) $m=n$.

**1.6.17.** Указание. Доказать, что $\mathrm{D}(\varphi^{-1})=\mathrm{Im}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi^{-1})=\mathrm{D}(\varphi)$.

**1.6.21.** $\alpha$ является отображением $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $\beta^{-1}$ — нет. **1.6.22.** Все числа вида $\frac{k}{2^n}$, где $k\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{N}$. **1.6.24.** Если композиция $\alpha\circ\beta$ двух отображений — инъективное отображение, то $\beta$ инъективно ($\alpha$, вообще говоря, нет); если $\alpha\circ\beta$ сюръективно, то $\alpha$ сюръективно ($\beta$, вообще говоря, нет). **1.6.25.** а) $\alpha$ инъективно; б) $\alpha$ сюръективно.

**1.6.27.** Указание. Доказать, что из условия $\rho\circ\rho^{-1}=$ $=1_B$ следует функциональность $\rho$; из условия $\rho^{-1}\circ\rho=1_A$ следует, что $\mathrm{D}(\rho)=A$. Аналогично для $\rho^{-1}$. **1.6.28.** а) $\varphi$ инъективно; б) $\varphi$ сюръективно.

## § 7

**1.7.1.** Одному классу эквивалентности принадлежат: а) все подмножества с одинаковым числом элементов; всего 3 класса; б) все элементы $a$ из $M$, для которых $Q(a)$ имеет фиксированное истинностное значение; всего 2 класса; в) все упорядоченные пары, имеющие одну и ту же разность между первой и второй координатами; г) все упорядоченные пары с одинаковым отношением первой координаты ко второй; д) все числа, имеющие равные модули; е) все числа с одинаковыми дробными частями; ж) все подмножества множества $M$, отличающиеся друг от друга лишь на конечное число элементов; з) все рациональные числа, представимые в виде $2^k\cdot a$, где $a$ — фиксированное целое нечетное число, $k$ — любое целое число; еще класс, состоящий из одного 0; и) все функции, отличающиеся на константу; к) все функции, имеющие одинаковое множество нулей.

**1.7.2.** 10. **1.7.3.** Класс эквивалентности может содержать 1 или 2 элемента, причем реализуются оба случая. **1.7.5.** $\varphi$ инъективно.

**1.7.8.** Указание. Применить теорему о делении с остатком для целых чисел: если $a$, $b$ — целые числа, $b\neq 0$, то существуют такие целые числа $q$, $r$, что $a=bq+r$, причем $0\leqslant r<|b|$.

**1.7.10.** $\rho_1\cap\rho_2$ — отношение сравнимости по модулю 12. **1.7.14.** б), е). **1.7.15.** В один класс попадают все точки, соединенные между собой стрелками. **1.7.16.** $\rho_1\cap\rho_2$.

## § 8

**1.8.3.** $|A|\leqslant 1$. **1.8.5.** Нет, не является. **1.8.6.** Нет, не является: $\rho$ не антисимметрично. **1.8.7.** Вообще говоря, не является: $\rho$ не антисимметрично. **1.8.8.** Да, является. **1.8.9.** Нет, не является. **1.8.10.** Нет, не является. **1.8.11.** $f$ должно быть инъективным. **1.8.13.** $\langle a_1, b_1\rangle\ \rho\ \langle a_2, b_2\rangle \Leftrightarrow (a_1\rho_1 a_2 \wedge a_1\neq a_2)\vee(a_1=a_2\wedge b_1\rho_2 b_2)$, здесь $a_1$, $a_2\in A$, $b_1$, $b_2\in B$. **1.8.14.** Число линейных порядков на множестве из $n$ элементов равно $n!$.

**1.8.21.** Указание. Доказать, что если $a$ — точная верхняя грань множества $M$ всех нижних граней подмножества $B$, то $a$ — точная нижняя грань $B$.

**1.8.22.** в) $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ — минимальные элементы, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ — максимальные; г) 1 — наименьший элемент; 12 — наибольший, так как 1 делит все делители числа 12, а 12 делится на все делители. **1.8.23.** Минимальными являются все одноэлементные подмножества.

**1.8.26.** Указание. Например, $\{a, b, c, 1, 2, 3, \ldots\}$, где отношение порядка определено следующим образом: $a<b<c$; $1<2<3<\ \ldots$ . Тогда $c$ — единственный максимальный элемент.

# ГЛАВА 2. АЛГЕБРЫ

## § 1

**2.1.2.** д

| | $x$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x-1}{x+1}$ | $\frac{x+1}{x-1}$ | $\frac{1-x}{1+x}$ | $\frac{1+x}{1-x}$ | $-\frac{1}{x}$ | $-x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x-1}{x+1}$ | $\frac{x+1}{x-1}$ | $\frac{1-x}{1+x}$ | $\frac{1+x}{1-x}$ | $-\frac{1}{x}$ | $-x$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{x}$ | $x$ | $\frac{1-x}{1+x}$ | $\frac{1+x}{1-x}$ | $\frac{x-1}{x+1}$ | $\frac{x+1}{x-1}$ | $-x$ | $-\frac{1}{x}$ |
| $\frac{x-1}{x+1}$ | $\frac{x-1}{x+1}$ | $\frac{x+1}{x-1}$ | $-\frac{1}{x}$ | $-x$ | $\frac{1}{x}$ | $x$ | $\frac{1+x}{1-x}$ | $\frac{1-x}{1+x}$ |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x+1}{x-1}$ | $\frac{x+1}{x-1}$ | $\frac{x-1}{x+1}$ | $\frac{1}{x}$ | $x$ | $-\frac{1}{x}$ | $-x$ | $\frac{1-x}{1+x}$ | $\frac{1+x}{1-x}$ |
| $\frac{1-x}{1+x}$ | $\frac{1-x}{1+x}$ | $\frac{1+x}{1-x}$ | $-x$ | $-\frac{1}{x}$ | $x$ | $\frac{1}{x}$ | $\frac{x+1}{x-1}$ | $\frac{x-1}{x+1}$ |
| $\frac{1+x}{1-x}$ | $\frac{1+x}{1-x}$ | $\frac{1-x}{1+x}$ | $x$ | $\frac{1}{x}$ | $-x$ | $-\frac{1}{x}$ | $\frac{x-1}{x+1}$ | $\frac{x+1}{x-1}$ |
| $-\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x}$ | $-x$ | $\frac{x-1}{x+1}$ | $\frac{1-x}{1+x}$ | $\frac{x+1}{x-1}$ | $\frac{x-1}{x+1}$ | $x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $-x$ | $-x$ | $-\frac{1}{x}$ | $\frac{x+1}{x-1}$ | $\frac{x-1}{x+1}$ | $\frac{1+x}{1-x}$ | $\frac{1-x}{1+x}$ | $\frac{1}{x}$ | $x$ |

е) Обозначим: $e$ — тождественное преобразование; $s$ — симметрия относительно центра; $s_1$, $s_2$ — симметрии относительно диагоналей.

| | $e$ | $s$ | $s_1$ | $s_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $s$ | $s_1$ | $s_2$ |
| $s$ | $s$ | $e$ | $s_2$ | $s_1$ |
| $s_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $e$ | $s$ |
| $s_2$ | $s_2$ | $s_1$ | $s$ | $e$ |

**2.1.4.** а) $(\forall a, b)\, a * b = b * a$, $(\exists a, b)\, a * b \neq b * a$; б) $(\forall a, b, c)\,(a * b) * c = a * (b * c)$, $(\exists a, b, c)\,(a * b) * c \neq a * (b * c)$; в) $(\exists a)(\forall b)(a * b = b) \wedge (b * a = b)$, $(\forall a)(\exists b)(a * b \neq b) \vee \vee (b * a \neq b)$; г) $(\exists b)(a * b = e) \wedge (b * a = e)$, $(\forall b)(a * b \neq e) \vee \vee (b * a \neq e)$, здесь $a$ — данный элемент, $e$ — нейтральный элемент; д) $(\forall a)(\exists b)(a * b = e) \wedge (b * a = e)$, $(\exists a)(\forall b)(a * b \neq \neq e) \vee (b * a \neq e)$.

**2.1.5.** Коммутативные операции: а), в), д), е), ж), з), и), ассоциативные операции: а), в), ж), з), и), л). **2.1.6.** Все операции коммутативны и ассоциативны. **2.1.7.** а) Ложно; б) истинно. **2.1.8.** Нейтральный элемент 0; единственный симметризуемый элемент 0.

**2.1.10.** б), д), ж), з), и), л) Нейтрального элемента нет; а) 0 — нейтральный элемент, все элементы симметризуемы; в) 1 — нейтральный элемент; все элементы, кроме 0, симметризуемы.

**2.1.12.** Истинны утверждения б), в), е).

**2.1.14.** а) 1 — нейтральный элемент и единственный симметризуемый элемент; б) 12 — нейтральный элемент и единственный симметризуемый элемент; в) $\varnothing$ — нейтральный элемент и единственный симметризуемый элемент; г) $U$ — нейтральный элемент и единственный симметризуемый элемент; д) $x$ — нейтральный элемент, каждый элемент симметризуем; е) тождественное преобразование — нейтральный элемент, каждый элемент симметризуем.

## § 2

**2.2.1.** Является подалгеброй следующих алгебр: а) $\langle \boldsymbol{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot \rangle$; б) $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot, 1 \rangle$; в) $\langle \boldsymbol{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, +, \cdot, 1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot, 1 \rangle$; г) $\langle \boldsymbol{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot \rangle$; д) —; е) $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$; ж) $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$, если $m=1$; з) $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$; и) $\langle \boldsymbol{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot \rangle$, если $m \neq \pm 1$; $\langle \boldsymbol{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, +, \cdot, 1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot, 1 \rangle$, если $m = \pm 1$; к) $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot \rangle$, $\langle \boldsymbol{Z}, \cdot, 1 \rangle$.

**2.2.2.** Является подалгеброй следующих алгебр: а) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$; б) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$; в) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$; г) $A_2$; д) $A_2, A_4$; е) $A_2, A_4$; ж) $A_1, A_2, A_3, A_4$; з) $A_1, A_2, A_3, A_5$; и) $A_2, A_4$; к) $A_1, A_2, A_3, A_5$; л) $A_2, A_4$. **2.2.5.** 1) б), в), з), и), причем в), з) — изоморфизмы; 2) и), к); 3) д), ж), з), и), к), причем з) — изоморфизм; 4) и). **2.2.6.** 1) г), е), ж), и), к); все, кроме к),— изоморфизмы; 2) б), к), л; 3) а), е), з), к), л); е) — изоморфизм; 4) к). **2.2.7.** в), д), ж). **2.2.11.** Для сюръективного гомоморфизма истинны все утверждения. Для произвольного гомоморфизма каждое утверждение, вообще говоря, ложно.

## § 3

**2.3.1.** $\boldsymbol{Z}$, $2\boldsymbol{Z}$, $n\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}_2$. **2.3.2.** $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; $\boldsymbol{R}^+$; $\boldsymbol{Q}\setminus\{0\}$; $\{1, -1\}$; $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]\setminus\{0\}$; $\{2^n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$. **2.3.4.** Операция умножения классов вычетов определена в множествах $\boldsymbol{Z}_8$, $\boldsymbol{Z}_5$, $\boldsymbol{Z}_5\setminus\{\bar{0}\}$, $\boldsymbol{Z}_6$, $\boldsymbol{Z}_7\setminus\{\bar{0}\}$, $\boldsymbol{Z}_7$, $\boldsymbol{Z}_9$, $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\} \subset \boldsymbol{Z}_8$, $\{\bar{1}, \bar{5}\} \subset \boldsymbol{Z}_6$. Операция перехода к обратному элементу определена в $\boldsymbol{Z}_5\setminus\{\bar{0}\}$, $\boldsymbol{Z}_7\setminus\{\bar{0}\}$, $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\} \subset \boldsymbol{Z}_8$, $\{\bar{1}, \bar{5}\} \subset \boldsymbol{Z}_6$. **2.3.6.** а), б), г), д), е), ж), з). **2.3.7.** Замкнуты относительно операции умножения: в), г), д), е). Являются группами: в), г), е).

**2.3.8.** д) Указание. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

**2.3.9.** Указание. $f_{c,d} = f_{a,b}^{-1}$, если $ac=1$, $ad+b=0$. **2.3.10.** Указание. $\langle 0, 1\rangle$ — единица; $\langle a, b\rangle^{-1} = \langle -ab^{-1}, b^{-1}\rangle$. **2.3.11.** См. 1.6.12. **2.3.13.** Обозначим через $r_k$ вращение плоскости вокруг центра правильного $n$-угольника на угол $\frac{2\pi k}{n}$;

а)

| | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ |
|---|---|---|---|
| $r_0$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ |
| $r_1$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_0$ |
| $r_2$ | $r_2$ | $r_0$ | $r_1$ |

б)

| | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $r_0$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |
| $r_1$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_0$ |
| $r_2$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_0$ | $r_1$ |
| $r_3$ | $r_3$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ |

в)

| | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_0$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ |
| $r_1$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | $r_0$ |
| $r_2$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | $r_0$ | $r_1$ |
| $r_3$ | $r_3$ | $r_4$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ |
| $r_4$ | $r_4$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |

г) см. 2.1.2е; д) к вращениям $r_0$, $r_1$, $r_2$ добавляются 3 симметрии относительно высот $h_1$, $h_2$, $h_3$; е) 2 осевые симметрии $s_1$, $s_2$, центральная симметрия $s$ и тождественное преобразование $e$; ж) 4 вращения: $r_0$, $r_1$, $r_2$, $r_3$; симметрии относительно диагоналей $s_1$, $s_2$; симметрии относительно прямых, соединяющих середины противоположных сторон: $s_3$, $s_4$.

д)

| | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_0$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ |
| $r_1$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_0$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_1$ |
| $r_2$ | $r_2$ | $r_0$ | $r_1$ | $h_3$ | $h_1$ | $h_2$ |
| $h_1$ | $h_1$ | $h_3$ | $h_2$ | $r_0$ | $r_2$ | $r_1$ |
| $h_2$ | $h_2$ | $h_1$ | $h_3$ | $r_1$ | $r_0$ | $r_2$ |
| $h_3$ | $h_3$ | $h_2$ | $h_1$ | $r_2$ | $r_1$ | $r_0$ |

е)

| | $e$ | $s_1$ | $s_2$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $s_1$ | $s_2$ | $s$ |
| $s_1$ | $s_1$ | $e$ | $s$ | $s_2$ |
| $s_2$ | $s_2$ | $s$ | $e$ | $s_1$ |
| $s$ | $s$ | $s_2$ | $s_1$ | $e$ |

ж)

| | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_0$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
| $r_1$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_0$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_2$ | $s_1$ |
| $r_2$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_0$ | $r_1$ | $s_2$ | $s_1$ | $s_4$ | $s_3$ |
| $r_3$ | $r_3$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $s_4$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ |
| $s_1$ | $s_1$ | $s_4$ | $s_2$ | $s_3$ | $r_0$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_1$ |
| $s_2$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_4$ | $r_2$ | $r_0$ | $r_1$ | $r_3$ |
| $s_3$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_4$ | $s_2$ | $r_1$ | $r_3$ | $r_0$ | $r_2$ |
| $s_4$ | $s_4$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ | $r_3$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_0$ |

**2.3.15.** При каждом самосовмещении куба диагональ переходит в диагональ. Таким образом, каждое самосовмещение куба можно рассматривать как подстановку на множестве из четырех элементов. Остается показать, что существуют 24 различных самосовмещений куба. Действительно, вокруг каждой из четырех диагоналей имеются 2 нетождественных вращения; вокруг каждой из трех прямых, соединяющих центры противоположных граней, имеются 3 нетождественных вращения; вокруг каждой из шести прямых, соединяющих середины противоположных ребер, имеется одно нетождественное вращение.

**2.3.16.** Всякое самосовмещение правильного тетраэдра можно представить как подстановку на множестве его вершин. У правильного тетраэдра 7 осей симметрии: 4 — прямые, соединяющие вершину с центром противоположной грани, 3 — прямые, соединяющие середины противоположных ребер. **2.3.18.** а) Нельзя, так как нет единицы; б) нельзя, так как, например, элемент $\langle 1, 1\rangle^{-1}$ не определен.

**2.3.19.** Указание. $t^{-1}$ — единица, $a'=t^{-1}\cdot a^{-1}\cdot t^{-1}$.

**2.3.22.** а) $x=\overline{1}$, $x=\overline{0}$, $x=\overline{1}$, $x=\overline{0}$; б) $x=\overline{0}$, $x=\overline{5}$, $x=\overline{6}$, нет решений; в) $x=\overline{3}$, $x=\overline{2}$, $x=\overline{9}$, $x=\overline{6}$.

**2.3.23.** $x=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$; $x=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$; $x=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$. **2.3.24.** $\overline{3}$ или $\overline{5}$.

**2.3.30.** а) Указание. Пусть $G=\{a_1, \ldots, a_n\}$ содержит $n$ различных элементов, $a_1$ — правая единица. Рассмотреть для произвольного $i$ элементы $a_i\cdot a_1$, $a_i\cdot a_2$, ..., $a_i\cdot a_n$ и доказать, что $a_i\cdot a_j=a_1$ для некоторого $j$; б) пусть $G=\{a_1, \ldots, a_n\}$. Среди элементов $a_1\cdot a_1$, $a_2\cdot a_1$, ..., $a_n\cdot a_1$ есть $a_i\cdot a_1$ равный $a_1$. Показать, что $a_i$ — правая единица; в) на произвольном конечном множестве рассмотреть, например, такую операцию: $(\forall a, b)\ a\cdot b=a$.

**2.3.31.** Указание. Рассмотреть $(ab)^{-1}$ и использовать условие $(\forall a\in G)\ a^{-1}=a$.

**2.3.32.** Указание. Пусть $G=\{e, a, b\}$. Показать, что единственный возможный случай $a\cdot b=b\cdot a=e$ и $G$ — абелева группа. Если $G$ состоит из четырех элементов и для любого $a$: $a^2=e$, то $G$ — абелева группа (см. 2.3.31). Показать, что если $a^2\neq e$ для некоторого $a$, то предположение, что $a^3=e$, приводит к тому, что в $G$ существует элемент $b$, отличный от $e$, $a$, $a^2$. Тогда $a\cdot b$ отличен от $e$, $a$, $a^2$, $b$. Таким образом, $a^3\neq e$ и $G=\{e, a, a^2, a^3\}$ — абелева группа.

**2.3.36.** а), б), г), д). **2.3.41.** а) $\{2^n | n\in \boldsymbol{Z}\}$; б) $\boldsymbol{Q}\setminus\{0\}$; в) $\boldsymbol{Q}\setminus\{0\}$; г) $\boldsymbol{Q}^+$; д) $\boldsymbol{Q}^+$. **2.3.42.** $\{-1, 1\}$.

**2.3.43.** Указание. Рассмотреть элементы $a$, $a^2$, ..., $a^{n+1}$, где $n$ — число элементов в $G$.

**2.3.44.** а) $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$; б) $\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$; в) $\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$; г) $\boldsymbol{Z}_{12}$; д) $\boldsymbol{Z}_{12}$; е) $\boldsymbol{Z}_{12}$; ж) $\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$; $k$ должно быть взаимно просто с 12.

**2.3.45.** Указание. Показать, что если подгруппа содержит $\overline{k}$ ($\overline{k}\neq\overline{0}$), то она содержит $\overline{0}$, $\overline{k}$, $2\overline{k}$, ..., $(p-1)\overline{k}$ и все эти элементы различны.

**2.3.46.** Указание. Показать, что подгруппа, содержащая $\bar{k}$ (НОД $(k, n)=1$), содержит $\bar{0}$, $\bar{k}$, $2\bar{k}$, ..., $(n-1)\bar{k}$ и все эти элементы различны.

**2.3.50.** г) Указание. Рассмотреть отображение $f$: $x \mapsto \ln x$.

**2.3.52.** Для произвольной группы утверждение неверно. Например, рассмотреть заданное отображение в группе $S_3$. **2.3.53.** Для произвольной группы утверждение неверно. Например, рассмотреть заданное отображение в группе $S_3$ при $n=2$.

**2.3.54.** Указание. Для групп из задачи 2.3.19 рассмотреть отображение $a \mapsto at^{-1}$; для групп из задачи 2.3.20 — отображение $a \mapsto a^{-1}$; отображение $T \to A$: $f_{a,b} \mapsto$ $\mapsto \langle b, a \rangle$.

**2.3.56.** Указание. Пусть $f$ — изоморфное отображение алгебры $G$ на $H$, $a \in H$, тогда $a' = f((f^{-1}(a))^{-1})$.

**2.3.57.** Да, можно: $a \circ b = f(f^{-1}(a) \cdot f^{-1}(b))$; см. 2.3.56.

**2.3.58.** Указание. Рассмотреть какую-нибудь биекцию $\boldsymbol{Z}$ на $\boldsymbol{N}$, например: $f(a)=\begin{cases} 2a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -2a-1, \text{ если } a<0. \end{cases}$ Воспользоваться 2.3.57.

**2.3.60.** Не существует гомоморфного отображения $\varphi$, при котором $\varphi(2)=3$, но существует такое, что $\varphi(2)=4$. Указание. Найти $\varphi(1)$. **2.3.61.** Существует. Указание. Найти $\varphi(1)$. **2.3.62.** Указание. $k=\varphi(1)$.

**2.3.63.** Указание. Предположить, что такое отображение $\varphi$ существует, и показать, что если $\varphi(m)=1$, то $\varphi\left(\frac{m}{2}\right)$ не определено.

**2.3.64.** Указание. Доказать, что если $\varphi(1)=k$, то $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{k}{n}$ для любого целого положительного $n$.

**2.3.65.** Указание. Показать, что $(\forall r \in \boldsymbol{Q})\, \varphi(r)=kr$, где $k=\varphi(1)$. **2.3.66.** Указание. См. указание к 2.3.32.

**2.3.68.** Указание. Использовать тот факт, что $S_3$ — неабелева группа. **2.3.69.** Указание. См. 2.3.66.

**2.3.70.** Указание. а) В $\langle \boldsymbol{Q}, +, - \rangle$ разрешимо любое уравнение вида $2x=a$; в $\langle \boldsymbol{Q}\setminus\{0\}, \cdot, {}^{-1} \rangle$ соответствующее уравнение $x^2=a$ не всегда разрешимо; б) в $\langle \boldsymbol{Q}\setminus\{0\}, \cdot, {}^{-1} \rangle$ уравнение $x^2=1$ имеет два решения, а в $\langle \boldsymbol{Q}^+, \cdot, {}^{-1} \rangle$ — только одно; в) в $\langle \boldsymbol{R}^+, \cdot, {}^{-1} \rangle$ любое уравнение вида $x^2=a$ разрешимо; в $\langle \boldsymbol{Q}^+, \cdot, {}^{-1} \rangle$ такое условие не выполняется; г) см. б); д) см. а); е) в $\langle \boldsymbol{Q}, +, - \rangle$ для любых ненулевых $a$, $b$ существуют целые $k$, $l$, отличные от 0, такие, что $ka=lb$; в $\langle \boldsymbol{R}^+, \cdot, {}^{-1} \rangle$ можно найти такие $a$, $b$, что для любых целых $k$, $l$, отличных от 0, $a^k \neq b^l$. Например, $a=10$, $b=10^r$, где $r \notin \boldsymbol{Q}$.

**2.3.71.** 663. Р е ш е н и е. Из условия следует, что $f(1)=0$, $f(3)=1$, $3333=f(9999)=f(3333\cdot 3)\geqslant 3333$. Отсюда получаем, что $f(k\cdot 3)=k$ для любого $k\leqslant 3333$. Так как $1990=3\cdot 663+1$ и $f(1990)=f(1989)$ или $f(1990)=f(1989)+1$, то возможны два случая: $f(1990)=663$ или $f(1990)=664$. Второй случай противоречит условиям задачи, так как в этом случае $f(9999+2)=f(5\cdot 1990+51)\geqslant 5\cdot 664+17=3337$, а по условию $f(9999+2)\leqslant 3334$.

## § 4

**2.4.1.** а), б), в), д), з), л), п), р). **2.4.3.** а), б), г), д), ж), и), к), л), м), н), о). **2.4.5.** Кольца с единицей: г), д), ж), к), л), м), н), о). Коммутативные кольца: ж), к), л), м), н), о). **2.4.7.** Нельзя; например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ не является левым делителем нуля. **2.4.8.** Да.

**2.4.9.** Не всегда. У к а з а н и е. В кольце $M(2, \boldsymbol{R})$, например, матрица $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ является и левым и правым делителем нуля. Найти матрицу $Y\neq 0$, такую, что $X\cdot Y=0$.

**2.4.16.** У к а з а н и е. Если $n$ — простое число и произведение целых чисел $kl$ делится на $n$, то хотя бы один сомножитель делится на $n$.

**2.4.17.** У к а з а н и е. Если произведение целых чисел $kl$ делится на $n$ и НОД $(k, n)=1$, то $l$ делится на $n$.

**2.4.18.** 1) $x=\overline{5}$; 2) $x=\overline{5}$; 3) $x=\overline{1}$; 4) нет решений; 5) нет решений; 6) $x=\overline{0}$; 7) $x=\overline{1}$; 8) нет решений; 9) $x=\overline{2}$; 10) $x=\overline{5}$; 11) нет решений; 12) нет решений. **2.4.19.** $\overline{1}$, $\overline{5}$.

**2.4.20.** а) У к а з а н и е. Доказать, что классы вычетов $\overline{k}\cdot\overline{0}$, $\overline{k}\cdot\overline{1}$, ..., $\overline{k}\cdot(\overline{n-1})$ все различны. в) Для доказательства достаточности указанного условия для разрешимости уравнения $\overline{k}\cdot x=\overline{m}$ в $\boldsymbol{Z}_n$ рассмотреть уравнение $\overline{k_1}\cdot x=\overline{m_1}$ в $\boldsymbol{Z}_{n_1}$, где $k_1=\dfrac{k}{\text{НОД}(k, n)}$, $m_1=\dfrac{m}{\text{НОД}(k, n)}$, $n_1=\dfrac{n}{\text{НОД}(k, n)}$.

**2.4.21.** а) $\overline{2}$; б) в $\boldsymbol{Z}_6$, $\boldsymbol{Z}_{30}$ такого элемента нет, в $\boldsymbol{Z}_{27}$ есть: $\overline{3}$; в $\boldsymbol{Z}_{12}$ есть: $\overline{6}$; г) если $n=p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение $n$, то $\alpha_i>1$ для некоторого $i$.

**2.4.22.** У к а з а н и е. Представить $n$ в виде $3k+i$, где $0\leqslant i<3$, и доказать, что $\overline{2}^{3k+i}=\overline{1}$ в $\boldsymbol{Z}_7$ тогда и только тогда, когда $i=0$.

**2.4.23.** У к а з а н и е. Доказать, что $\overline{34}^{57}=\overline{1}$ в кольце $\boldsymbol{Z}_{11}$; $\overline{9518}^{42}=\overline{4}$ в $\boldsymbol{Z}_5$.

**2.4.24.** а) У к а з а н и е. Рассмотреть $\overline{437}^{25}+\overline{214}^{29}$ в кольце $\mathbf{Z}_4$, найти наименьший неотрицательный представитель в этом классе вычетов.

**2.4.25.** Указание. Использовать тот факт, что $10^{2n} \equiv 1 \pmod{11}$, $10^{2n+1} \equiv -1 \pmod{11}$ для любого натурального $n$.

**2.4.26.** $x=1$, $y=7$. **2.4.27.** $x=4$, $y=7$; $x=1$, $y=4$; $x=8$, $y=0$. **2.4.28.** $x=8$, $y=0$, $z=6$. **2.4.29.** $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ делится на 45 тогда и только тогда, когда $a_0+10(a_1+\ldots+a_n)$ делится на 45. **2.4.30.** $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ делится на 37 тогда и только тогда, когда $\overline{a_3a_2a_0}+\overline{a_6a_5a_4}+\overline{a_9a_8a_7}+\ldots$ делится на 37.

**2.4.31.** Указание. $a'=-a-2$. **2.4.32.** $a'=-a-10$. **2.4.33.** $a'=-a-2u$; если $e$ — единица кольца $\langle A, +, -, \cdot \rangle$, то $(e-u)$ — единица кольца $\langle A, *, ', \circ \rangle$. **2.4.35.** а), б).

**2.4.38.** $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbf{Z}_5$ — области целостности; $\mathbf{Z}\times\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_8$ — коммутативные кольца с единицей и делителями нуля; $2\mathbf{Z}$ — коммутативное кольцо без единицы и без делителей нуля; $M(2, \mathbf{R})$ — некоммутативное кольцо с единицей и с делителем нуля. **2.4.39.** а), б), в), д).

**2.4.43.** Указание. Пусть $A$ — ненулевое подкольцо $\mathbf{Z}$, в качестве $n$ взять наименьшее положительное число, принадлежащее $A$. **2.4.46.** д), е). **2.4.47.** Если $e'$ — единица $B$, $e$ — единица $A$, то $e'\neq 0$, $e'\cdot e'=e'=e'\cdot e$, отсюда следует, что $e'(e'-e)=0$, $e'=e$.

**2.4.49.** Указание. Рассматривая равенство $(a+a)^2=a+a$, вывести $a=-a$, затем рассмотреть равенство $(a+b)^2=a+b$.

**2.4.57.** а), в), г), д), ж), з), м), н), о), п), р), с), т), у), ф).

**2.4.58.** а), б). **2.4.60.** е) Указание. $f(a)=\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$.

**2.4.64.** Все утверждения ложны. Соответствующие контрпримеры можно найти в 2.4.57. **2.4.65.** Указание. $x*y=x+y+3$; $x'=-x-6$; $x\circ y=xy+3x+3y+6$ (сравнить с 2.4.33). **2.4.66.** Один из возможных способов:

| $*$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $y$ | $y$ | $z$ | $x$ |
| $z$ | $z$ | $x$ | $y$ |

| $\circ$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| $y$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $z$ | $x$ | $z$ | $y$ |

$x'=x$;
$y'=z$;
$z'=y$.

**2.4.67.** Указание. $x*y=f(f^{-1}(x)+f^{-1}(y))$. Аналогично определяются и другие операции.

**2.4.68.** Указание. См. 2.3.58.

**2.4.69.** Указания. а) $2\boldsymbol{Z}$ — кольцо без единицы; б) $M(2, \boldsymbol{R})$ — некоммутативное кольцо; в) в $\boldsymbol{Q}$ для любого ненулевого элемента есть обратный; г) $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ — кольцо с делителями нуля; д) во втором кольце любое уравнение вида $x+x=a$ разрешимо; е) при любом изоморфизме образ $\sqrt{2}$ равен $\sqrt{2}$ или $-\sqrt{2}$, так как образ 2 равен 2; ж) при любом изоморфизме $f$ алгебры $\langle 2\boldsymbol{Z}, +\rangle$ на $\langle 3\boldsymbol{Z}, +\rangle$ $f(2)=3$ или $f(2)=-3$, но такое отображение не сохраняет операцию умножения.

## § 5

**2.5.6.** Решение. Пусть $\varphi(a)=0$, так как $a\geqslant 0$, то $0=\varphi(a)\geqslant\varphi(0)$, следовательно, $\varphi(0)=0$. Предположим, что $\varphi(a)=a$, тогда $\varphi(a+1)>a$. Пусть $\varphi(b)=a+1$, так как $\varphi(a)=a<a+1=\varphi(b)$, то $a<b$, но $\varphi(a+1)\geqslant a+1$, поэтому $a+1\geqslant b$. Отсюда выводится, что $b=a+1$.

**2.5.10.** Указание. Пусть $A=\{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$, тогда любое подмножество, содержащее $a_{n+1}$, получается из подмножества множества $\{a_1, ..., a_n\}$ добавлением элемента $a_{n+1}$, т. е. число подмножеств множества $A$, содержащих $a_{n+1}$, равно числу подмножеств, не содержащих $a_{n+1}$.

**2.5.11.** Указание. Число подстановок из $S_{n+1}$, переводящих 1 в фиксированное число $k$, равно $n!$

**2.5.12.** Указание. Если $A=\{a_1, ..., a_m\}$, $B=\{b_1, ..., b_{n+1}\}$, то ко всем парам из $A\times(B\backslash\{b_{n+1}\})$ добавится $m$ пар вида $\langle a_i, b_{n+1}\rangle$.

**2.5.13.** Указание. Если $|A_{n+1}|=k_{n+1}$, то из каждого элемента $\langle a_1, ..., a_n\rangle\in A_1\times...\times A_n$ при добавлении еще одной координаты из $A_{n+1}$ получается $k_{n+1}$ элементов вида $\langle a_1, ..., a_n, a_{n+1}\rangle\in A_1\times...\times A_n\times A_{n+1}$.

**2.5.14.** $2^{mn}$. **2.5.15.** Указание. а) Если $A=\{a_1, ..., a_m, a_{m+1}\}$, $B=\{b_1, ..., b_n\}$, $f$ — инъективное отображение $\{a_1, ..., a_m\}$ в $B$, при котором $f(a_1)=b_1$, ..., $f(a_m)=b_m$, то из $f$ можно получить $n-m$ инъективных отображений $A$ в $B$, которые на множестве $\{a_1, ..., a_m\}$ совпадают с $f$, элемент $a_{m+1}$ переводят соответственно в $b_{m+1}$, ..., $b_n$. Таким образом, из каждого инъективного отображения множества $\{a_1, ..., a_m\}$ в $B$ получается $n-m$ инъективных отображений $A$ в $B$. б) Рассуждения аналогичны пункту а), но элемент $a_{m+1}$ может отображаться в любой элемент из $B$.

**2.5.17.** Указания. а) Все $k$-элементные подмножества множества $\{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$ можно разбить на две группы:

в первую входят подмножества множества $\{a_1, ..., a_n\}$, их число равно $C_n^k$, а во вторую — подмножества, содержащие элемент $a_{n+1}$, их число равно $C_n^{k-1}$. б) Индукция по $n$, использовать а). в) Первый способ: индукция по $n$, использовать а); второй способ: использовать тот факт, что число всех подмножеств множества, состоящего из $n$ элементов, равно $2^n$.

**2.5.18.** а) Указание. Индукция по $n$, использовать 2.5.17. **2.5.19.** Указание. в) Использовать бином Ньютона (см. 2.5.18, $a$). Неверно, $2^9-2$ не делится на 9. **2.5.20.** в) Указание. Воспользоваться биномом Ньютона:

$$\left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n+1}>$$
$$>\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}+(n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{2}=$$
$$=\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}(n+1)>n!\,(n+1)=(n+1)!$$

**2.5.22.** Указание. Если $a=b$, то данное неравенство равносильно неравенству $2ac\leqslant a^2+c^2$, которое выполняется для любых $a$, $c$. Поэтому достаточно доказать утверждение $(\forall a,\ b,\ c\in\boldsymbol{N})\ a<b<c\to ab+bc+ac\leqslant a^2+b^2+c^2$. Доказать его индукцией по $c$.

**2.5.23.** а) Указание. Из неравенства $a^nb+ab^n\leqslant a^{n+1}+b^{n+1}$ следует $a^{n+1}b+a^2b^n\leqslant a^{n+2}+ab^{n+1}$ и $a^nb^2+ab^{n+1}\leqslant a^{n+1}b+b^{n+2}$. Складывая последние два неравенства, получаем: $a^2b^n+a^nb^2\leqslant a^{n+2}+b^{n+2}$.

Из неравенства $2ab\leqslant a^2+b^2$ следует $2a^{n+1}b\leqslant a^{n+2}+a^nb^2$ и $2ab^{n+1}\leqslant a^2b^n+b^{n+2}$. Складывая последние два неравенства, получаем $2(a^{n+1}b+ab^{n+1})\leqslant a^{n+2}+b^{n+2}+a^2b^n+a^nb^2$. б) Индукция по $n$, использовать а).

**2.5.24.** Доказать индукцией по $n$, что в кольце $\boldsymbol{Z}_{11}$ $\bar{2}^{2n+1}\cdot\bar{3}^{n+3}+\bar{1}=\bar{0}$.

**2.5.25.** Доказать индукцией по $n$, что в кольце $\boldsymbol{Z}_{11}$ $\bar{3}^{2n}+\bar{2}^{6n-5}=\bar{0}$.

# ГЛАВА 3. ПОЛЯ. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

## § 1

**3.1.1.** $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$, $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix} \middle| a\in\boldsymbol{R}\right\}$.

**3.1.4.** Указание. Изоморфное отображение задается правилом

$$f(a)=\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}.$$

**3.1.6.** Указание. Изоморфное отображение $f$: $\langle \boldsymbol{Q}, +, -, *\rangle \to \langle \boldsymbol{Q}, +, -, \cdot\rangle$ задается правилом $f(a)=2a$. **3.1.7.** $\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{Z}_3$, $\boldsymbol{Z}_5$. **3.1.8.** Указание. Доказать, что элементы $\overline{k}\cdot\overline{0}$, $\overline{k}\cdot\overline{1}$, ..., $\overline{k}\cdot\overline{(n-1)}$ все различны, если НОД $(k, n)=1$, и среди них есть равные, если НОД $(k, n)\neq 1$. Использовать свойство $(\forall a, b, c\in \boldsymbol{Z})$ $c/ab \wedge$ НОД $(c, a)=1 \to c/b$. **3.1.9.** См. указание к 3.1.8.

**3.1.10.** Указание. Если $n$ — составное число, то кольцо $\boldsymbol{Z}_n$ содержит делители нуля; если $n$ — простое число, то использовать 3.1.9. **3.1.11.** Неверно; рассмотреть, например, умножение на 2 в кольце $\boldsymbol{Z}$.

**3.1.12.** Указание. Пусть $A=\{a_1, ..., a_n\}$ — конечное кольцо, $a_i\neq 0$ и не является делителем нуля. Рассмотреть $a_i\cdot a_1$, ..., $a_i\cdot a_n$ и доказать, что все эти элементы различны. Вывести отсюда существование правого обратного для $a_i$. **3.1.13.** Использовать 3.1.12.

**3.1.18.** Указание. Показать, что любое подполе $T$ поля $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$ содержит все рациональные числа. Если $T\neq \boldsymbol{Q}$, то вывести из этого условия, что $\sqrt{2}\in T$. **3.1.20.** Указание. См. 2.4.47.

**3.1.22.** Указание. Если $f$ не инъективное отображение, то $f(a)=0$ для некоторого $a\neq 0$. Вывести отсюда, что $f(b)=0$ для любого $b\in F$. **3.1.23.** Указание. Использовать 3.1.22. **3.1.24.** Указание. Использовать 3.1.23 и 3.1.16.

**3.1.25.** Указание. Если $F$ — поле, состоящее из трех элементов, то один из них нулевой (0), другой — единица (1), третий элемент $a$ должен удовлетворять условию $a^2=1$.

## § 2

**3.2.5.** Указание. В любом упорядоченном поле $\langle F, +, -, \cdot, <\rangle$ выполняется условие $n1>0$ для любого целого $n>0$, где 1 — единица поля $F$. Следовательно, при любом упорядочении поля $\boldsymbol{Z}_p$ должно выполняться неравенство $\overline{0}=p\overline{1}>\overline{0}$.

**3.2.7.** Указание. Пусть $f$: $F\to K$ — изоморфное отображение колец. Тогда отношение порядка на $K$ можно определить следующим образом: $a<b \Leftrightarrow f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$.

**3.2.10.** Указание. В любом упорядоченном поле $0<1$. Отсюда следует, что при любом упорядочении поля $\boldsymbol{Q}$ для любого целого положительного числа $a$ выполняется условие $0<a$.

**3.2.11.** Указание. Показать, что существует одно и только одно упорядочение, при котором $\sqrt{2}<0$, и одно и только одно упорядочение, при котором $\sqrt{2}>0$. Для доказательства использовать тот факт, что на $\boldsymbol{Q}$ существует только одно упорядочение, а также то, что если $\sqrt{2}>0$, $a\in\boldsymbol{Q}$ и $a>0$, то $\sqrt{2}>a$ тогда и только тогда, когда $2>a^2$. Если $\sqrt{2}<0$, $a\in\boldsymbol{Q}$ и $a<0$, то $\sqrt{2}>a$ тогда и только тогда, когда $2<a^2$.

**3.2.12.** Указание. Так как любое положительное число является квадратом некоторого числа, то при любом упорядочении оно остается положительным.

**3.2.13.** Указание. Показать, что если $f$: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ — изоморфное отображение колец, то любое рациональное число переходит в себя, положительное число как квадрат некоторого числа переходит в положительное число, и, следовательно, $a<b$ влечет $f(a)<f(b)$. Далее, если предположить, что для некоторого $a$ имеет место неравенство $f(a)>a$, то для рационального $r$, такого, что $a<r<f(a)$, получится $f(a)<f(r)=r<f(a)$.

## § 3

**3.3.6.** 49.

**3.3.10.** $f$: $\boldsymbol{L}\to K$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{-k} \\ -b\sqrt{-k} & a \end{pmatrix}$;
$f$: $\boldsymbol{L}\to\boldsymbol{C}$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix}=a+b\sqrt{-k}\,i$.

**3.3.12.** Указание. Если $F$ — подполе $\boldsymbol{Q}[i]$ и $F$ содержит число $a+bi$, где $b\neq 0$, то $i\in F$ и $F=\boldsymbol{Q}[i]$. В противном случае $F=\boldsymbol{Q}$.

**3.3.15.** Указание. При любом изоморфизме $f(-1)=-1$. Отсюда следует, что $(f(i))^2=-1$. **3.3.17.** а) $154-414i$; б) $\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\sqrt{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{4}\right)i$; в) $\frac{3}{53}+\frac{21}{106}i$; г) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (указание. $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$).

**3.3.18.** а) $i^n=\begin{cases} 1, \text{ если } n\equiv 0 \pmod 4, \\ i, \text{ если } n\equiv 1 \pmod 4, \\ -1, \text{ если } n\equiv 2 \pmod 4, \\ -i, \text{ если } n\equiv 3 \pmod 4; \end{cases}$ б) $i^n$; в) $2i^{n+1}$.

**3.3.19.** а) $a$; б) $bi$; в) $(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$.

**3.3.20.** а) $z=i$; б) $z_1=(\sqrt{3}-1)-i$, $z_2=(-\sqrt{3}-1)-i$; в) $z_1=\frac{\sqrt{15}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt{15}}{2}+\frac{1}{2}i$; г) $\{x+yi\mid -7\leqslant x\leqslant 1, y=\pm\sqrt{7-6x-x^2}\}$; д) нет решений.

**3.3.21.** а) $x=\frac{11}{15}-\frac{47}{15}i$, $y=-\frac{14}{15}-\frac{4}{5}i$; б) $x=\frac{6}{41}+\frac{13}{41}i$, $y=-\frac{6}{205}-\frac{13}{205}i$.

**3.3.26.** а) $x_1=1-2i$, $x_2=-1+2i$; б) $x_1=3-2i$, $x_2=-3+2i$; в) $x_1=-1+\sqrt{2}i$, $x_2=-1-\sqrt{2}i$; г) $x_1=1-i$, $x_2=2+3i$; д) $x_1=2-i$, $x_2=-2+i$, $x_3=2+i$, $x_4=-2-i$; е) $x_1=x_2=i\sqrt{17}$, $x_3=x_4=-i\sqrt{17}$; ж) $x_1=3+2i$, $x_2=1+i$; з) $x_1=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i$, $x_2=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i$; и) $x_1=-i$, $x_2=-1+i$; к) $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; л) $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

**3.3.28.** Указание. Использовать тождество $|z_1z_2|^2=|z_1|^2|z_2|^2$.

**3.3.29.** Указание. Геометрический смысл $|z_1-z_2|$ — расстояние между точками, изображающими числа $z_1$, $z_2$.

**3.3.30.** Указание. Условие $\frac{z-a}{z-b}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, где $\varphi$ — любое действительное число, равносильно условию $|z-a|=|z-b|$.

**3.3.31.** Указание. $|z_2-z_1|^2=|z_2-z_0+z_0-z_1|^2=((z_2-z_0)+(z_0-z_1))\cdot(\overline{(z_2-z_0)}+\overline{(z_0-z_1)})=|z_1-z_0|^2+|z_2-z_0|^2 \Leftrightarrow (z_2-z_0)\overline{(z_0-z_1)}+(z_0-z_1)\overline{(z_2-z_0)}=0$. Обозначим $z_2-z_0=u$; $z_0-z_1=v$. Тогда $u\bar{v}+\bar{u}v=0$, это значит, что $u\bar{v}=\alpha i$, где $\alpha\in\boldsymbol{R}$, т. е. $u=\frac{\alpha}{|v|^2}iv$. Геометрический смысл равенства — теорема Пифагора и обратная к ней.

**3.3.32.** Геометрический смысл — сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. **3.3.33.** Углы: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{12}$; стороны: $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}-2$, $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$. **3.3.34.** $z_1+z_2-z_3$, $z_1+z_3-z_2$, $z_2+z_3-z_1$.

**3.3.35.** $12+16i$ — число, изображающееся точкой касания касательной, проведенной из начала координат к окружности, изображающей множество всех точек $z$, удовлетворяющих условию $|z-25i|\leqslant 15$.

**3.3.36.** а) Симметрия относительно оси абсцисс; б) поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки; в) композиции а) и б);

г) гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом $r$; д) точке $z$ ставится в соответствие точка пересечения прямой $Oz$ с единичной окружностью; $O$ — начало координат; е) симметрия относительно оси ординат; ж) инверсия относительно единичной окружности.

**3.3.39.** $-1=\cos\pi+i\sin\pi$; $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; $-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; $2+7i=\sqrt{53}\left(\cos\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{53}}\right)+i\sin\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{53}}\right)\right)$; $-\cos\alpha+i\sin\alpha=\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha)$; $\sin\alpha-i\cos\alpha=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{tg}\alpha-i=\frac{1}{\cos\alpha}\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, если $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha-i=-\frac{1}{\cos\alpha}\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$, если $\cos\alpha<0$.

**3.3.40.** Для натуральных $n$ доказательство проводится индукцией по $n$, для отрицательных $n$ воспользоваться формулой $z^n=(z^{-1})^{-n}$.

**3.3.41.** а) $\sqrt{26}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{89}}{2}$. **3.3.42.** а) $\sin 7x=7\cos^6 x\sin x-35\cos^4 x\sin^3 x+21\cos^2 x\sin^5 x-\sin^7 x$; б) $\cos 6x=\cos^6 x-15\cos^4 x\sin^2 x+15\cos^2 x\sin^4 x-\sin^6 x$; в) $\sin 5x+\cos 3x=\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x+\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$. Указание. Использовать формулу Муавра и бином Ньютона.

**3.3.49.** Четыре. **3.3.51.** Десятой. **3.3.52.** а) 20-й; б) 20-й; в) 24-й; г) 24-й. **3.3.53.** Сумма равна 0, произведение $(-1)^{n-1}$. **3.3.54.** Указание. Чтобы доказать, что $z^0, z^1, \ldots, z^{n-1}$ все различны, если НОД $(m, n)=1$, использовать тот факт, что $\omega^k=\omega^l$ тогда и только тогда, когда $k\equiv l \pmod n$. Если НОД $(m, n)=d\neq 1$, то $z^{\frac{n}{d}}=1$.

**3.3.55.** Указание. Использовать 3.3.54. **3.3.56.** Указание. Если $d=$ НОД $(n, k)$, то НОД $\left(\frac{n}{d}, \frac{k}{d}\right)=1$, воспользоваться 3.3.54.

**3.3.57.** Указание. Использовать следующее свойство: если произведение $kn$ целых чисел делится на $m$ и НОД $(m, n)=1$, то $k$ делится на $m$.

**3.3.58.** Указание. Показать, что если $a_1, \ldots, a_m$ — все корни $m$-й степени из 1, $b_1, \ldots, b_n$ — все корни $n$-й степени из 1, то $a_1b_1, \ldots, a_1b_n, \ldots, a_mb_1, \ldots, a_mb_n$ все различны и являются корнями $mn$-й степени из 1.

**3.3.59.** Указание. Доказать, что если $a$ — первообразный корень $m$-й степени из 1, $b$ — первообразный корень $n$-й степени из 1, то $(ab)^r=1$ тогда и только тогда, когда $r$ делится на $m$ и $r$ делится на $n$, следовательно, $r$ делится на $mn$.

**3.3.60.** Указание. Доказать, что если НОД $(m, n)=d\neq 1$, то указанное произведение является корнем степени $\frac{mn}{d}$ из 1, что противоречит утверждению из 3.3.50.

**3.3.62.** а) $x_k=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}\right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$;

б) $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_4=\sqrt[4]{6}$, $x_5=\sqrt[4]{6}i$, $x_6=-\sqrt[4]{6}i$, $x_7=-\sqrt[4]{6}$; в) $x_0=i$, $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; г) $x_0=\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$, $x_1=\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$, $x_2=\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{21\pi}{12}+i\sin\frac{21\pi}{12}\right)$;

д) $x_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $x_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $x_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$, $x_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$;

е) $x_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$, $x_1=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$, $x_2=\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}$, $x_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$, $x_4=\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}$, $x_5=\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}$; ж) $x_k=\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}$, $k=0, 1, 2, 3, 4$.

**3.3.63.** а) $z_0=i$, $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; б) $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_1=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i$, $z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}i$, $z_5=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i$; в) $z_0=\sqrt[6]{8}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}i\right)$,

$z_1=-\sqrt[6]{8}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i\right)$, $z_2=\sqrt[6]{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$;

г) $z_0=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}+\frac{\sqrt[4]{18}}{2}i$, $z_1=-\frac{\sqrt[4]{18}}{2}+\frac{\sqrt[4]{2}}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}-\frac{\sqrt[4]{18}}{2}i$,

$z_3=\frac{\sqrt[4]{18}}{2}-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}i$.

# ГЛАВА 4. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

## § 1

**4.1.1.** а) $-a_3=(-2, 2, -1, 1)$; б) $(0, 0, 0, 0)$; в) $(0, 0, 0, 0)$; г) $a_4=(0, 2, -3, 1)$. **4.1.2.** а) $a_4=-a_1-a_2-2a_3$; б) $a_3=-a_1-\frac{1}{3}a_2-\frac{2}{3}a_4$; в) $a_4=a_2-3a_1$; г) $a_3=a_1-a_2$. **4.1.3.** $x=(1, -6, 8, -3)$. **4.1.4.** Например, (1, 1, 2, 1) и (3, 1, 3, 2), а также любая их линейная комбинация.

**4.1.5.** а)
$$\begin{aligned} -\lambda_1-3\lambda_2+2\lambda_3 \qquad &=0,\\ 2\lambda_2-2\lambda_3+2\lambda_4&=0,\\ \lambda_1 \qquad +\lambda_3-3\lambda_4&=0,\\ \lambda_2-\lambda_3+\lambda_4&=0. \end{aligned}$$

**4.1.6.** а) $x_1(1, 1, 2)+x_2(2, 1, 1)+x_3(-4, -1, 1)+x_4(-1, -2, -5)=(-1, 0, 1)$. **4.1.7.** а), в), г), е), з), и), к), л), п), р) — система линейно зависима; б), д), ж), м), н), о), с) — система линейно независима. **4.1.13.** Скаляры $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ должны быть попарно различны. **4.1.15.** Верно обратное утверждение: данная система линейно зависима. Сложить векторы системы и воспользоваться упр. 6.1.21.

**4.1.16.** С каждым из следующих векторов данный вектор образует линейно независимую систему: (0, 1), (1, 0), (0, 2), (2, 0), (1, 2), (2, 1).

**4.1.17.** С любым ненулевым вектором, отличным от (1, 1, 1), данный вектор образует линейно независимую систему (см. упр. 4.1.23).

**4.1.18.** Данная система линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов линейно выражается через предыдущие, т. е. когда $a_k \in L(a_1, \ldots, a_{k-1})$ для некоторого $k$.

**4.1.19.** а) $(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{k-1})$;

б) $\frac{(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{k-1})}{k!}$. Воспользоваться предыдущим упр., а также упр. 6.1.18 и 6.5.10.

**4.1.20.** а) Векторы лежат на одной плоскости; б) векторы коллинеарны; в) вектор нулевой. **4.1.21.** а), в), г) 1, $x$, $x^2$, ..., $x^n$; б) (1, 0, 0, ...), (0, 1, 0, ...), (0, 0, 1, ...), ... . **4.1.22.** а) Система линейно независима; б) система линейно зависима.

## § 2

**4.2.1.** 2. **4.2.2.** а) 1; б) 2; в) 1; г) 0; д) 1; е) 1; ж) 3; з) 1; и) 2; к) 2; л) 1. **4.2.3.** Укажем количество различных базисов: а) 2; б) 2; в) 1; г) 0; д) 1; е) 1; ж) 6; з) 2; и) 6; к) 6; л) 2. **4.2.6.** в), п) Ранг системы равен 1; а), б), г), ж), з), м) ранг равен 2; е), д), и), к), н) ранг равен 3; л) если $\alpha=\beta=\gamma$, то ранг равен 1; если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ попарно различны, то ранг равен 3; в остальных случаях ранг равен 2; о) если $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, то ранг равен 0; если $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, то ранг равен 2; ранг равен 1 в остальных случаях.

**4.2.7.** а), б), в) 3; г) 1. **4.2.9.** Любые два из данных в 4.1.1 четырех векторов образуют базис. В пп. м), н), о), с) 4.1.7 все данные векторы в любом порядке образуют базис, в пп. п), р) 4.1.7 любые два из данных трех векторов образуют базис.

## § 3

**4.3.1.** а) (0, 0, 0, 0); б) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

**4.3.2.** а) $AB=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $BA=0$;

б) $AB=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\-2&0&-4&2\\1&0&2&-1\\3&0&6&-3\end{pmatrix}$, $BA=0$;

в) $AB=\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\-4&-2&-6&2\\2&1&3&-1\\6&3&9&-3\end{pmatrix}$, $BA=0$;

г) $AB=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\-2&-4&-4&-2\\1&2&2&1\\3&6&6&3\end{pmatrix}$, $BA=2$;

д) $AB=BA=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; е) $AB=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $BA=2A$;

ж) $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2b \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix}$; з) $AB=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1 \\ 4\lambda_2 & 5\lambda_2 & 6\lambda_2 \\ 7\lambda_3 & 8\lambda_3 & 9\lambda_3 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_2 & 3\lambda_3 \\ 4\lambda_1 & 5\lambda_2 & 6\lambda_3 \\ 7\lambda_1 & 8\lambda_2 & 9\lambda_3 \end{pmatrix}$; и) $i$-я строка матрицы $AB$ есть $i$-я строка матрицы $B$, домноженная на $\lambda_i$. $i$-й столбец матрицы $BA$ есть $i$-й столбец матрицы $B$, домноженный на $\lambda_i$; к) $AB=$ $=BA=\begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & 0 \\ . & . \quad . & . \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$;

л) $AB=BA=\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$.

**4.3.3.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b+c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} \overline{ac-bd} & \overline{ad+bc} \\ -(\overline{ad+bc}) & \overline{ac-bd} \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} a\bar{a}+b\bar{b} & 0 \\ 0 & a\bar{a}+b\bar{b} \end{pmatrix}$.

**4.3.4.** Во всех случаях $f(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **4.3.5.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**4.3.6.** а) $AB=\begin{pmatrix} 1 & \alpha+\alpha' & \beta+\beta'+\alpha\gamma' \\ 0 & 1 & \gamma+\gamma' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $AB-BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma'-\alpha'\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**4.3.11.** а) Все $(2\times2)$-матрицы; б) все диагональные матрицы, т. е. матрицы вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$; в) все матрицы вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x+z \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x+y \end{pmatrix}$.

**4.3.12.** а) Все $(2\times2)$-матрицы; б) все диагональные

(2×2)-матрицы; в) все матрицы вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & x+\frac{d-a}{c}z \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+\frac{d-a}{b}y \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} x & y \\ \frac{b}{c}y & x+\frac{d-a}{b}y \end{pmatrix}$.

**4.3.14.** а) Все матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, для которых $c\alpha - a\gamma = 0$; б) все матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.3.16.** Система матриц $E$, $A$, $A^2$, ..., $A^{n^2}$ является линейно зависимой системой векторов пространства матриц.

**4.3.18.** а) $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}E_{ik}$; б) $\sum_{m=1}^{n} \alpha_{mi}E_{mj}$; в) $\alpha_{ij}E_{ij}$; г) $\alpha_{ji}E_{ij}$; д) $\alpha_{jk}E_{il}$.

**4.3.24.** а) Прибавление к $i$-й строке $k$-й, домноженной на $\lambda$; б) прибавление к $k$-му столбцу $i$-го, домноженного на $\lambda$; в) умножение $i$-й строки на $\lambda$; г) умножение $i$-го столбца на $\lambda$.

**4.3.25.** Матрица $A$ может быть приведена к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк, которым соответствуют домножения слева на элементарные матрицы. Произведение всех участвовавших в приведении к ступенчатому виду элементарных матриц дает искомую матрицу $B$.

**4.3.26.** Во всех случаях искомой является единичная матрица, над которой произведено аналогичное действие.

**4.3.27.** См. указание к упр. 4.3.25, учитывая, что в данном процессе участвуют матрицы, которые соответствуют вычеркиванию нулевых строк (упр. 4.3.26).

**4.3.28.** Элементарными преобразованиями строк и столбцов, включая вычеркивание нулевых строк и столбцов, можно привести матрицу $A$ к единичной матрице порядка $r$ (упр. 5.2.17). Элементарные матрицы, соответствующие преобразованиям строк в данном процессе, дают в произведении искомую матрицу $B$. Элементарные матрицы, соответствующие преобразованиям столбцов,— матрицу $C$.

**4.3.29.** Элементарными преобразованиями строк и столбцов можно привести матрицу $A$ к единичной матрице $E$ размера $r \times r$. Следовательно, (обратными) элементарными преобразованиями единичная матрица приводится к матрице $A$, поэтому $A = PEQ$.

**4.3.30.** а) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1\ \ 1)$; б) — г) см. ответ к упр. 4.3.2; д) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

**4.3.32.** Матрицу $A$ размера $n\times m$ приведем к ступенчатому виду, а потом обратно с помощью элементарных преобразований строк. Получим (см. упр. 4.3.25) $A=P\cdot QA$, где $QA$ — ступенчатая, т. е. последние $n-r(A)$ ее строк нулевые. Следовательно, последние $n-r(A)$ строк матрицы $QAB$ нулевые, и поэтому ее ранг не превосходит $r(A)$. Домножение на матрицу $P$ не меняет ранга, так как соответствует набору элементарных преобразований строк. Поэтому $r(AB)\leqslant r(A)$. Далее, $r(AB)=r({}^t(AB))=r({}^tB{}^tA)\leqslant \leqslant r({}^tB)=r(B)$.

**4.3.33.** Следует из 4.3.32. **4.3.34.** Используем $A=PQ$ — скелетное разложение матрицы $A$ (упр. 4.3.29). $Q$ соответствует последовательности преобразований, из которых не более чем $n-r$ могут уменьшить ранг (вычеркивание столбцов). Поэтому $r(QB)\geqslant s-(n-r)$. Преобразования, из которых «составлена» матрица $P$, последовательно применяемые, начиная с $Q$, не изменяют ранга (вычеркиваются нулевые строки). Это же верно, если начать с $QB$. Следовательно, $r(AB)=r(PQB)=r(QB)\geqslant s+r-n$.

**4.3.39.** а) $\begin{pmatrix}1&n\alpha\\0&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&0&n\beta\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1&n\alpha&n\beta+\frac{n(n-1)}{2}\alpha\gamma\\0&1&n\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ при $n>1$;

е) $\begin{pmatrix}\cos(n\varphi)&\sin(n\varphi)\\-\sin(n\varphi)&\cos(n\varphi)\end{pmatrix}$; ж) $A$, если $n$ — нечетное; $E$, если $n$ — четное;

з) $2^{n-1}A$ при $n\equiv1\pmod 3$; $2^{n-1}\begin{pmatrix}-1&3\\-1&-1\end{pmatrix}$ при $n\equiv2\pmod 3$; $2^nE$ при $n\equiv0\pmod 3$; и) $A$ при $n\equiv1\pmod 3$; $\begin{pmatrix}-\frac12&\frac32\\-\frac12&-\frac12\end{pmatrix}$ при $n\equiv2\pmod 3$; $E$ при $n\equiv0\pmod 3$; к) $\begin{pmatrix}f_{n-2}&f_{n-1}\\f_{n-1}&f_n\end{pmatrix}$, где $f_n$, $n=1, 2, \ldots,$— элементы ряда Фибоначчи $f_{-1}=0$, $f_0=1$,

$f_1=1$, ..., который определяется следующим соотношением: $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.

**4.3.41.** Матрицы имеют вид $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, где $\alpha+\delta=1$ и $\alpha\delta-\beta\gamma=0$. **4.3.42.** Матрицы имеют вид $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, где $\alpha+\delta=0$ и $\alpha\delta-\beta\gamma=-1$. **4.3.46.** Матрицы имеют вид $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, где $\alpha+\delta=0$ и $\alpha\delta-\beta\gamma=0$.

**4.3.49.** а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; г) $x_1=1-2x_3+x_4$, где $x_3$ и $x_4$ принимают произвольные значения; д) решения нет.

**4.3.50.** а) $\begin{pmatrix}-8 & -5\\ -11 & -7\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}10 & -9\\ -11 & 10\end{pmatrix}$;

г) решения нет; д) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

**4.3.51.** Если $ad-bc=0$, то решения нет. Если $ad-bc\neq0$, уравнение имеет единственное решение $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

**4.3.52.** 1. Если $ad-bc\neq0$, то имеется единственное нулевое решение.

2. Если $a=b=c=d=0$, то любая матрица является решением.

3. Если $ad-bc=0$, то хотя бы один из элементов, например в первой строке, отличен от нуля. Тогда решением является любая матрица $\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}$, для которой $a(x,\ y)+b(z,\ u)=(0,\ 0)$. Если при этом, например, $a\neq0$, то ответ можно записать в следующем виде: $\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}z & -\frac{b}{a}u\\ z & u\end{pmatrix}$ для любых $z$, $u$.

## § 4

**4.4.2.** а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.4.4.** а) $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha$ — произвольное; б) $\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$; г) $\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\beta+\gamma\alpha \\ 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\frac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$, $\beta\neq\alpha$;

ж) $\frac{1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\begin{pmatrix} \gamma^2\beta-\gamma\beta^2 & \beta^2-\gamma^2 & \gamma-\beta \\ \alpha^2\gamma-\alpha\gamma^2 & \gamma^2-\alpha^2 & \alpha-\gamma \\ \beta^2\alpha-\beta\alpha^2 & \alpha^2-\beta^2 & \beta-\alpha \end{pmatrix}$,

$(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\neq 0$.

**4.4.5.** а) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -27 & -16 & 31 \\ 9 & 4 & -9 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 31 & 5 & -9 \\ -27 & -5 & 9 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0{,}14 & 1{,}02 & -0{,}02 \\ 1{,}84 & -0{,}74 & -0{,}12 \\ -0{,}14 & -0{,}04 & 0{,}02 \end{pmatrix}$.

**4.4.6.** Необратимы, так как каждая из них имеет ранг два.

**4.4.7.** а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; в) матрица необратима.

**4.4.8.** а) $\begin{pmatrix} 49 & 8 & 9 & -65 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -7 & -1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 1 \\ 1 & 9 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 8 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.4.9.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) матрица необратима.

**4.4.10.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.4.11.** а) $x_1=4$, $x_2=x_3=0$; б) $x_1=x_3=1$, $x_2=-1$; в) $x_1=-1$, $x_2=-6$, $x_3=1$.

**4.4.12.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **4.4.13.** $X=E$, где $E$ — единичная матрица.

**4.4.15, 4.4.20.** Диагональная (треугольная) матрица обратима тогда и только тогда, когда на главной диагонали отсутствуют нулевые элементы.

**4.4.21.** а) Произведение унитреугольных матриц есть унитреугольная матрица (упр. 4.3.13). Любая верхне унитреугольная матрица может быть приведена к единичной элементарными преобразованиями строк только следующего вида: прибавление к строке с меньшим номером строки с большим номером, домноженной на некоторый скаляр. Такие преобразования конструируют из единичной матрицы верхне унитреугольную матрицу, обратную к исходной. Следовательно, множество верхне унитреугольных матриц замкнуто относительно умножения и взятия обратной матрицы, т. е. является группой. б) Воспользоваться упр. 4.3.39. в) $q^3$.

**4.4.25.** Матрицы, у которых на диагонали стоят $\pm 1$.

**4.4.26.** Группа состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ и матриц вида $\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix}$, $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$.

**4.4.30.** Диагональные матрицы, у которых на главной диагонали стоят действительные числа. **4.4.32.** Диагональная матрица унитарна тогда и только тогда, когда модуль каждого комплексного числа, стоящего на главной диагонали, равен единице.

**4.4.34.** $U(2)$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -\Delta\bar{b} & \Delta\bar{a} \end{pmatrix}$, где $a\bar{a}+b\bar{b}=1$, $\Delta\bar{\Delta}=1$. **4.4.36.** Пересечение совпадает с группой $SU(2)$, т. е. группой унитарных матриц с определителем 1.

**4.4.37.** б) $e=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **4.4.38.** а) Только если $A$ — единичная матрица. **4.4.39.** а) Да, см. 4.4.37; нет; б) необязательно; в) не может.

## § 5

**4.5.1.** а), е) Не являются подстановками. **4.5.2.** б), д) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$; в), г) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$. **4.5.3.** а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&5&4&6&1\end{pmatrix}$; б) $\varepsilon=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&5&1&6&4\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&2&6&1\end{pmatrix}$. **4.5.4.** а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&3&5&6&1\end{pmatrix}$; б) $\varepsilon$ (тождественная подстановка); в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&5&6&3\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&5&1&6&2\end{pmatrix}$.

**4.5.5.** $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&n-1&n\\n&1&2&\ldots&n-2&n-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\n&n-1&\ldots&1\end{pmatrix}$. **4.5.6.** а) $\varepsilon=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$; б) $\varepsilon=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$; в) индукцией по $n$ доказывается утверждение: число биекций из одного $n$-элементного множества в другое равно $n!$.

**4.5.7.** а) (278)(345); б) (18)(27)(36)(45); в), г), д), е) (1 2 3 4 5 6 7 8). **4.5.8.** Если $\sigma$ не тождественная подстановка, то для некоторого $i_1$ $\sigma(i_1)=i_2\neq i_1$. Полагаем $i_3=\sigma(i_2)$ и т. д. Получим цикл $(i_1\ \ldots\ i_k)$. Если для некоторого $j_1$, не входящего в множество полученного цикла, $\sigma(j_1)\neq j_1$, то аналогично получим другой цикл $(j_1\ \ldots\ j_m)$, независимый от первого, и т. д.

**4.5.9.** а) Тождественная подстановка $\varepsilon$; б) $\varphi$; в) $\varphi^{-1}$; г) $\varphi$; д) $\varepsilon$, если $n$ — четное число, $\varphi$ в противном случае. **4.5.10.** Имеется $n!$ различных подстановок степени $n$, поэтому среди первых $n!+1$ степеней какие-либо две подстановки совпадут: $\varphi^s=\varphi^t$ $(s>t)$. Тогда $\varphi^{s-t}=\varepsilon$, причем $s-t\leqslant n!$.

**4.5.11.** $k$. **4.5.12.** Наименьшее общее кратное чисел $k_1, \ldots, k_m$. **4.5.13.** Во всех случаях $(i_1\ \ldots\ i_k)$. **4.5.14.** $(j_1\ \ldots\ j_n)$. **4.5.15.** Согласно упр. 4.5.8 любую подстановку можно разложить в произведение циклов, которые, как показано в предыдущем упражнении, нужным образом раскладываются в произведение транспозиций.

**4.5.16.** Подстановкам $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ соответствуют матрицы $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\text{ и }\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

**4.5.17.** а) Воспользуемся упр. 4.3.17; $U_\sigma U_\tau = \left(\sum_{k=1}^{n} E_{\sigma k k}\right)\left(\sum_{m=1}^{n} E_{\tau m m}\right) = \sum_{k,\,m} E_{\sigma k k} E_{\tau m m} = \sum_{m=1}^{n} E_{\sigma(\tau m)\tau m} E_{\tau m m} = \sum_{m=1}^{n} E_{(\sigma\tau)mm} = U_{\sigma\tau}$; б) ${}^t(U_\sigma) = {}^t\left(\sum_{k=1}^{n} E_{\sigma k k}\right) = \sum_{k=1}^{n} E_{k\sigma k} = \sum_{m=1}^{n} E_{\sigma^{-1}mm} = U_{\sigma^{-1}} = U_\sigma^{-1}$.

**4.5.18.** а) 3 (—); б) 2 (+); в) 0 (+); г) 11 (—); д) 7 (—); е) 8 (+); ж), з) 32 (+); и) $\frac{(n-1)n}{2}$ (+), если $n$ делится на 4 или $n-1$ делится на 4; к) $n-1$ (+), если $n$ нечетное.

**4.5.19.** 0 инверсий имеет тождественная подстановка. Наибольшее число инверсий $\frac{(n-1)n}{2}$ имеет подстановка в упр. 4.5.18, и.

**4.5.20.** а) $i=8$, $k=5$; б) $i=5$, $k=8$. **4.5.21.** $(-1)^{k-1}$, так как цикл может быть представлен как произведение $k-1$ транспозиции (упр. 4.5.13).

**4.5.22.** Если подстановка разложена в произведение независимых циклов длины $k_1, \ldots, k_n$, то ее знак равен (см. 4.5.21) $(-1)^{(k_1-1)+\ldots+(k_n-1)}$, где $d=(k_1-1)+\ldots+(k_n-1)$ как раз и есть декремент. **4.5.23.** а) (17238), $d=4$ (+); б) (263) (48) (57), $d=4$ (+); в) (18) (27) (36), $d=3$ (—).

**4.5.24.** Умножение подстановки на транспозицию не может увеличить декремент более чем на единицу, в этом можно убедиться, рассмотрев два случая, когда транспозиция перемещает элементы из одного цикла данной подстановки или из двух разных, возможно и единичной длины. Поэтому число транспозиций, входящих в разложение, не может быть меньше декремента. Разложение наименьшей длины реализуется, как видно из упр. 4.5.13, *а*.

**4.5.25.** Произведение четных подстановок есть четная подстановка. Подстановка, обратная к четной, является также четной. **4.5.26.** $\frac{n!}{2}$. Число четных подстановок равно числу нечетных, в этом можно убедиться, домножая каждую четную подстановку на некоторую фиксированную нечетную. **4.5.27.** ε, (123), (132). **4.5.28.** ε, (12) (34), (13) (24), (14) (23), восемь циклов длины три.

## § 6

**4.6.1.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

При вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться схемой, приведенной на форзаце.

**4.6.3.** а), г) Минус; б), в), д) плюс. **4.6.4.** $i=8$, $k=5\,(+)$; $i=5$, $k=8\,(-)$. **4.6.5.** а) $-2$; б) $-1$; в) $a^2+b^2$; г) 1; д) $\cos(\alpha+\beta)$; е) $a^2+b^2+c^2+d^2$; ж) $a-b$; з) $a_1a_2+1$; и) $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$.

**4.6.6.** а) 1; б) $-abc$; в) $a_1a_2a_3+a_1+a_3$; г) $a_{11}a_{22}a_{33}$; д) 0; е) 2; ж) $a^3+b^3+c^3-3abc$; з) $bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-cb^2-ac^2$; и), к) $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43})$. **4.6.7.** Нулю или произведению этих элементов со знаком «плюс» или «минус». **4.6.8.** $\operatorname{sgn}\sigma$.

**4.6.9.** Определитель равен произведению элементов главной диагонали. **4.6.10.** Определитель домножится на $(-1)^n$. **4.6.12.** а) Изменит знак; б) домножится на $(-1)^{n-1}$; в) домножится на $(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$; г) не изменится.

**4.6.13.** $\det\bar{A}=\overline{\det A}$. **4.6.14.** $\det A=\det A'=\det\bar{A}=\overline{\det A}\Rightarrow\det A\in\mathbf{R}$. **4.6.15.** а) $|A|=|{}^tA|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|\Rightarrow|A|=0$; б) 1. Над этим полем симметрические матрицы являются кососимметрическими и наоборот.

**4.6.16, 4.6.17.** К последнему столбцу прибавляем второй, домноженный на 10, и первый, домноженный на 100. Из последнего столбца выносим указанный множитель и пользуемся тем, что определитель целочисленной матрицы есть целое число. **4.6.18.** В определителе получаются две одинаковые строки, если $x=1$, $x=-1$ или $x=0$.

## § 7

**4.7.1.** а) $-1$; б) 24; в) 6; г) $-12$; д) 3; е) 5; ж) 8; з) $(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$; и) 11. К первой строке прибавить все остальные и вынести множитель 11; к) $\lambda^4+c_1\lambda^3+c_2\lambda^2+c_3\lambda+c_4$; л) $\lambda^m+c_1\lambda^{m-1}+\ldots+c_m$.

**4.7.2.** В полученной последовательности 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., которая называется рядом Фибоначчи, каждый член равен сумме двух предыдущих.

**4.7.3.** а) $a_1\left(a_2+\dfrac{1}{a_1}\right)\cdot\left(a_3+\dfrac{1}{a_2+\dfrac{1}{a_1}}\right)$;

б) $a_1\left(a_2+\frac{1}{a_1}\right)\left(a_3+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_1}}\right)\left(a_4+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_1}}}\right)$;

в) $a_4+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_1}}}$; г) пусть $a_1, \ldots, a_n$ — целые положительные числа. Конечная цепная дробь $a_n+\frac{1}{a_{n-1}+\ddots\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_1}}}$ совпадает с отношением определителей $\frac{(a_1 \ldots a_n)}{(a_1 \ldots a_{n-1})}$; д) цепная дробь длины $n$ вида $1+\frac{1}{1+\ddots\frac{1}{1}}$ равна отношению $\frac{D_n}{D_{n-1}}$, где $D_1, \ldots, D_n, \ldots$ есть ряд Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, ... .

## § 8

**4.8.2.** а) $-24$; б) $(\alpha-\gamma)^2$; в) $abc$; г) в обозначениях упр. 4.7.1 $D_5=D_4+D_3=8$.

**4.8.3.** а) В обоих случаях приходим к соотношению $(a_1a_2a_3a_4a_5)=a_1(a_2a_3a_4a_5)+(a_3a_4a_5)$ в обозначениях упр. 4.7.3; б) в обоих случаях приходим к соотношению $(a_1a_2a_3a_4a_5)=$ $=a_5(a_1a_2a_3a_4)+(a_1a_2a_3)$.

## § 9

**4.9.11.** а) $-16$; б) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-$ $-b-d)(a+d-b-c)$; в) $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$;

г) $$AB=\begin{vmatrix} f(\varepsilon_0) & f(\varepsilon_1) & \ldots f(\varepsilon_{n-1}) \\ \varepsilon_0 f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \ldots \varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_0^{n-1} f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \ldots \varepsilon_{n-1}^{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \end{vmatrix}=$$
$=f(\varepsilon_0) \ldots f(\varepsilon_{n-1})\,|B|$. Отсюда $|A|=f(\varepsilon_0) \ldots f(\varepsilon_{n-1})$.

**4.9.12.** а) $(1+2+3+4)(1-2+3-4)(1+2i-3-4i)\times$ $\times(1-2i-3+4i)=-160$; б) $a^4-b^4$; в) $((a+c)^2-b^2)\times$ $\times((a-c)^2+b^2)$; г) 125.

## § 10

**4.10.1.** $\binom{m}{k}\binom{n}{k}$, где $\binom{m}{k}$ — число сочетаний из $m$ по $k$.

**4.10.2.** $\binom{n}{k}$. **4.10.3.** Главный минор матрицы $A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \ldots \\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, который получается вычеркиванием строк и столбцов с номерами $i_1, \ldots, i_k$, взятый со знаком $(-1)^{n-k}$.

**4.10.5.** а) $-\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; г) $A^*=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a^2 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$;

д) $A^*=\begin{pmatrix} -b^2 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & -b^2 \end{pmatrix}$;

е) $\frac{1}{(b-a)(c-a)(c-b)}\begin{pmatrix} bc^2-cb^2 & b^2-c^2 & c-b \\ ca^2-ac^2 & c^2-a^2 & a-c \\ ab^2-ba^2 & a^2-b^2 & b-a \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.10.7.** а) $x_1=\frac{b-d}{b-a}$, $x_2=\frac{d-a}{b-a}$; б) $x_1=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}$, $x_2=\frac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)}$, $x_3=\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$.

**4.10.13.** а) $x_1-2x_2=0$, $2x_2+x_3=0$, $x_1+x_3=0$; б) $ax_2-bx_1=0$, $ax_3-cx_1=0$, $bx_3-cx_2=0$;

в) $-x_1-2x_2+x_3=0$;

г) $(bc'-b'c)x_1-(ac'-a'c)x_2+(ab'-a'b)x_3=0$.

## ГЛАВА 5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

### § 1

**5.1.9.** а), и) 1; г), д), ж) 2; б), е), з) 3; в) 4.

### § 2

**5.2.4.** См. ответ к упр. 5.2.13.

**5.2.5.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**5.2.6.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **5.2.7.** В обоих случаях $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**5.2.13.** а), в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б), г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{33}{4} \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 5 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -35 \end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{247}{42} \\ 0 & 1 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1265}{42} \end{pmatrix}$

**5.2.14.** а), д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; б), е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

**5.2.15.** Номера ведущих столбцов, а также сами эти столбцы в приведенной матрице не завиеят от способа приведения матрицы к приведенному ступенчатому виду, как показывает упр. 5.2.11. Остальные столбцы приведенной ступенчатой матрицы также определены однозначно (см. указание к упр. 5.3.5).

## § 3

**5.3.4.** Это решение определяется единственным образом формулами (3).

**5.3.5.** Числа $k_1, \ldots, k_r$, а следовательно, и числа $l_1, \ldots, l_s$ определяются однозначно, как показывает упр. 5.2.11. Если положить $x_{l_j}=1$, $x_{l_m}=0$ при $m \neq j$, то получится единственное решение системы, при котором $x_{k_i}=\beta_{ij}$, следовательно, скаляры $\beta_{ij}$ определены однозначно.

**5.3.8.** Линейная комбинация уравнений системы, очевидно, является следствием данной системы. Обратно, если к основной матрице системы приписать строку $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, то ранг матрицы не увеличится, иначе уменьшилась бы размерность пространства решений. Следовательно (упр. 5.1.3), данная строка линейно выражается через остальные.

**5.3.9.** а), в), д) $x_1=2x_2-3x_4$, $x_3=-x_4$, $a_1=(2, 1, 0, 0)$, $a_2=(-3, 0, -1, 1)$; б), г), е) $x_1=x_4$, $x_2=x_4$, $x_3=x_4$, $(1, 1, 1, 1)$.

**5.3.10.** Эквивалентны а), в), д); также эквивалентны б), г), е).

**5.3.11.** а) $x_1=-x_2-x_3-x_4$ $\begin{array}{l}(-1,\ 1,\ 0,\ 0),\\(-1,\ 0\ \ 1\ \ 0),\\(-1,\ 0\ \ 0\ \ 1);\end{array}$

б) $x_1=-x_2+0x_3+0x_4$ $\begin{array}{l}(-1,\ 1,\ 0,\ 0),\\(\ \ 0,\ 0,\ 1,\ 0);\\(\ \ 0,\ 0,\ 0,\ 1);\end{array}$

в) $x_1=0x_2+0x_3-(1+i)\,x_4$ $\begin{array}{l}(0,\ 1,\ 0,\ 0),\\(\ \ 0,\ \ \ \ 0,\ 1,\ 0);\\(-1-i,\ 0,\ 0,\ 1);\\(\ \ 1,\ \ \ \ 0,\ 0,\ 0).\end{array}$

г) $x_3=0x_1+0x_2-x_4$ $\begin{array}{l}(0,\ 1,\ \ \ 0,\ 0),\\(0,\ 0,\ -1,\ 1);\\(1,\ 0,\ \ \ 0,\ 0),\end{array}$

д) $x_2=0x_1+ix_3+0x_4$ $\begin{array}{l}(0,\ i,\ 1,\ 0),\\(0,\ 0,\ 0,\ 1);\end{array}$ е) уравнение е) отличается от уравнения д) множителем $1+i$.

**5.3.12.** а) $x_1=x_4$, $x_2=x_4$, $x_3=x_4$, $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$; б) $x_1=x_2$, $x_3=0$, $x_4=0$, $(1,\ 1,\ 0,\ 0)$; в) $x_1=\frac{1-i}{2}x_4$, $x_2=x_3=0$, $(i,\ 0,\ 0,\ -1+i)$; г) $x_1=x_2=0$, $x_3=x_4$, $(0,\ 0,\ 1,\ 1)$; д) $x_1=x_4=0$, $x_2=ix_3$, $(0,\ i,\ 1,\ 0)$.

**5.3.18.** Достаточно доказать это утверждение в случае, когда основная матрица системы имеет приведенный вид.

**5.3.19.** а) Полагаем свободными переменными $x_2$, $x_4$, $x_6$. Перенеся их в правую часть, сразу получим общее решение:

$$\begin{aligned}x_1&=-2x_2-5x_4-8x_6,\\x_3&=-3x_2-6x_4-9x_6,\\x_5&=-4x_2-7x_4-x_6.\end{aligned}$$

Решая эту же систему обычным методом последовательного исключения переменных, получим:

$$\begin{aligned}x_1&=-\frac{3}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5-\frac{15}{2}x_6,\\x_2&=-\frac{7}{4}x_4-\frac{1}{4}x_5-\frac{1}{4}x_6,\\x_3&=-\frac{3}{4}x_4+\frac{3}{4}x_5-\frac{33}{4}x_6.\end{aligned}$$

б) Решая исходную систему, а также равносильную ей систему $\begin{array}{l}-2x_2-4x_3+x_1-x_4=0,\\-4x_2-7x_3+2x_1-x_4=0\end{array}$ обычным образом, получим два различных общих решения:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 - 3x_4, \\ x_3 &= \quad\;\; - x_4; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4, \\ x_3 &= \qquad\quad - x_4. \end{aligned}$$

**5.3.20.** а) Любая из переменных может быть главной, остальные — свободные; б) любая пара переменных может быть принята за главные переменные, кроме пар $\{x_1, x_3\}$ и $\{x_2, x_4\}$.

**5.3.21.** а) $\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 + 2x_4, \\ x_2 &= -3x_3 + x_4; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4, \\ x_3 &= \frac{4}{3}x_4; \end{aligned}$

в) $\begin{aligned} x_1 &= -5x_2 + 6x_4, \\ x_3 &= \qquad\quad 5x_4; \end{aligned}$ г) $\begin{aligned} x_1 &= \frac{9}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, \\ x_2 &= \frac{1}{5}x_3 - 5x_4; \end{aligned}$ д) $\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{7}x_4, \\ x_2 &= \qquad\quad 35x_4; \end{aligned}$

е) $\begin{aligned} x_1 &= -\frac{247}{42}x_4, \\ x_2 &= 35x_4, \\ x_3 &= -\frac{1265}{42}x_4. \end{aligned}$

**5.3.22.** $\begin{aligned} x_1 &= x_3, \\ x_2 &= x_3 + x_4; \end{aligned}$ $\begin{aligned} x_1 &= x_2, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$ $\begin{aligned} x_1 &= x_2, \\ x_3 &= 2x_4. \end{aligned}$ **5.3.23.** $\begin{aligned} x_1 &= 2x_4, \\ x_2 &= x_4; \end{aligned}$ $\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ x_4 &= 0; \end{aligned}$ **5.3.24.** $\begin{aligned} x_1 &= x_4, \\ x_3 &= 0; \end{aligned}$ $\begin{aligned} x_3 &= 0, \\ x_4 &= 0; \end{aligned}$ $\begin{aligned} x_2 &= 0; \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$ **5.3.25.** В обоих случаях $\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ x_4 &= 0. \end{aligned}$ **5.3.27.** Например: а) $\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0; \end{aligned}$

б) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0, \\ -2x_1 + 4x_3 + 3x_4 &= 0; \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} -5x_1 + x_2 &= 0, \\ 6x_1 + 5x_3 + x_4 &= 0; \end{aligned}$

г) $\begin{aligned} 9x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0, \\ -7x_1 - 25x_2 + 5x_4 &= 0; \end{aligned}$ д) $\begin{aligned} x_1 + 5x_3 &= 0, \\ x_1 + 245x_2 + 7x_4 &= 0; \end{aligned}$

е) $-247x_1 + 1470x_2 - 1265x_3 + 42x_4 = 0$.

**5.3.28.** Например, соответствующие системы линейных уравнений в упр. 5.3.12. **5.3.30.** Решение пункта а): зададим оба подпространства однородными системами линейных уравнений:

$$1)\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \qquad 2)\ \begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Пересечение этих подпространств задается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad &= 0, \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ее фундаментальная система решений $a = (3, 4, 3, -10)$ является искомым базисом; б) $(0, 0, -3, 4)$; в) $(2, 10, -3, 3)$; г), д), е) $(0, 0, -1, 1)$, $(-1, 1, 0, 0)$.

**5.3.31.** $q^{n-r}$. **5.3.32.** $(q^{n-r}-1)(q^{n-r}-q)\ldots(q^{n-r}-q^{n-r-1})$. **5.3.33.** а) Ненулевые решения имеются только в случае $\alpha\delta-\beta\gamma=0$; б) решение $x=y=z=0$ не зависит от параметров; в), г) пространство решений имеет размерность 0, если числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ попарно различны, размерность 1, если два из трех чисел $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ совпадают, и размерность 2, если $\alpha=\beta=\gamma$; д) пространство решений имеет размерность 1 при $\alpha=0$, $\pm\sqrt{2}$, в остальных случаях — единственное нулевое решение; е) пространство решений имеет размерность 2 при $\alpha=0$ и 1 при $\alpha\neq0$.

## § 4

**5.4.8.** $(q^{n-r}-1)(q^{n-r}-q)\ldots(q^{n-r}-q^{n-r-1})$.

**5.4.9.** а) (1, 2, 3); б) (3, 2, 1); в) $x_1=-\frac{4}{5}x_3+\frac{19}{5}$, $x_2=-\frac{1}{5}x_3+\frac{11}{5}$; г) система несовместна.

**5.4.10.** а) $x_1=x_3+1$, $x_2=x_4$, (1, 1, 0, 1); система несовместна; б) система несовместна; (2, 2, 1); в) (4, 1, 0); $x_1=x_3$, $x_2=3x_3+2$, (1, 0, 1).

**5.4.13.** а), в) $x_1-2x_2+3x_3-x_4=2$, $2x_1+x_2+x_3+x_4=11$; б), г) $x_1-2x_2+3x_3-x_4=3$, $2x_1+x_2+x_3+x_4=14$. **5.4.14.** а) $x_1-x_2+x_3-x_4=-2$; б) $-5x_1+4x_2+3x_3+x_4=16$; в) $3x_1+x_2-3x_3+x_4=0$.

## § 5

**5.5.1.** а), б) (1, 2); в), г) (2, 1); д) $x_1=\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}$, (1, 1); е) система несовместна. **5.5.2.** а), д) $x_1=-2x_3+3x_4+1$, $x_2=3x_3-x_4-1$; б), е) $x_1=x_3-2x_4+2$, $x_2=2x_3-x_4-1$; в) $x_1=-2x_2+3x_4-2$, $x_3=2x_4+1$; г) $x_1=x_2+2x_4+1$, $x_3=-2x_4+2$. **5.5.3.** (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1). **5.5.4.** а) $x_1=1$, $x_2=x_4-1$, $x_3=2x_4-2$; б) (1, 1, 2, 2); в) система несовместна; г) (2, 2, 1, 1); д) $x_1=2$, $x_2=3-x_4$, $x_3=1$; е) система несовместна.

**5.5.6.** Данная система является линейной, если переменные рассматривать как векторы пространства, построенного в упражнении 6.1.6. Прологарифмировать по основанию два. $x_1=\sqrt[4]{8}$, $x_2=\sqrt[4]{8}$, $x_3=\sqrt[4]{32}$, $x_4=\sqrt[4]{128}$.

**5.5.7.** а) Сложив все уравнения, получим $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{a+b+c+d}{3}$. Вычитая из этого уравнения остальные по очереди, находим:

$$x_1=\frac{a+b+c-2d}{3},\qquad x_2=\frac{a+b+d-2c}{3},$$

$$x_3=\frac{a+c+d-2b}{3}, \quad x_4=\frac{b+c+d-2a}{3}.$$

Система имеет решение при любых $a$, $b$, $c$, $d$. б) Обозначить $y_1=\frac{1}{x_1}$, $y_2=\frac{1}{x_2}$, $y_3=\frac{1}{x_3}$, $y_4=\frac{1}{x_4}$ и воспользоваться предыдущей задачей. Система имеет решение, только если все выражения для переменных в а) ($a+b+c-2d$ и т. д.) отличны от нуля.

**5.5.8.** а) Поделить первое уравнение на $ab$, второе — на $ac$, третье — на $bc$ и сложить.

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

б) Сложив все три уравнения, находим $x+y+z=0$.

$$x=\frac{a-b}{a+b+c}, \quad y=\frac{a-c}{a+b+c}, \quad z=\frac{b-a}{a+b+c}.$$

в) Вычитая из первого уравнения по очереди остальные, получаем $x_2=-1$, $x_3=-2$, ..., $x_n=1-n$. Наконец, $x_1=1-$ $-x_2-x_3-\ldots-x_n=1+\frac{(n-1)n}{2}$. г) Воспользоваться тем, что если многочлен относительно переменной $x$ с коэффициентами $x_1$, $x_2$, $x_3$, 1

$f(x)=x_1+x_2x+x_3x^2+x^3$ имеет корни $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, то

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, сравнивая коэффициенты, находим $x_1=-\alpha\beta\gamma$, $x_2=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$, $x_3=-\alpha-\beta-\gamma$. д) Аналогично предыдущей задаче: $x_1=\alpha\beta\gamma\delta$, $x_2=-\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\delta-$ $-\alpha\gamma\delta-\beta\gamma\delta$, $x_3=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta$, $x_4=-\alpha-$ $-\beta-\gamma-\delta$. е) Воспользуемся формулами $\sin 2\alpha=$ $=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin 3\alpha=\sin\alpha(4\cos^2\alpha-1)$, $\sin 4\alpha=4\sin\alpha\times$ $\times(2\cos^3\alpha-\cos\alpha)$. Первое из уравнений перепишется следующим образом:

$$x+2y\cos\alpha+z(4\cos^2\alpha-1)=4(2\cos^3\alpha-\cos\alpha).$$

Остальные уравнения аналогично. Положим $\cos\alpha=t$, и уравнение примет вид $\frac{z-x}{8}-\frac{y+2}{4}t-\frac{z}{2}t^2+t^3=0$. Исходная система равносильна утверждению, что данное уравнение относительно $t$ имеет три корня: $t=\cos\alpha$, $t=\cos\beta$, $t=\cos\gamma$. Далее находим ответ тем же методом, как и в предыдущем упражнении:

$x=2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

$y=-2-4(\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma)$,

$z=2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$.

## ГЛАВА 6. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

### § 1

**6.1.1.** а), б), г), д), е), ж) Выполняются; з), и) не выполняются; в) не выполняются при $n>1$. **6.1.2.** а), б), в), д), е), ж) Да; г) да, нет. **6.1.7.** Изоморфизм осуществляет функция ln.

**6.1.10.** а), б), в), г), ж), к), л) Да; д), е), з), и), м) нет. **6.1.11.** а) Да; б) да (нет); в) да (нет); г) да (нет); д) нет, нет. **6.1.12.** а), б), в) Да; г1), г2) да; г3), г4) нет. **6.1.13.** Да. **6.1.14.** а), б), в), г) Да; д), е) нет.

**6.1.15.** а) Да; б) нет; в) 1) нет; 2) — 5) да. **6.1.18.** а) $(\bar{0}, \bar{0})$, $(\bar{0}, \bar{1})$, $(\bar{1}, \bar{0})$, $(\bar{1}, \bar{1})$; г) $q^n$. **6.1.19.** Доказать сначала, что $0a=0$ для любого вектора $a$, вывести отсюда, что $(-1)a=-a$. Далее, из равенства $-(a+b)=(-b)+(-a)=(-1)(b+a)= =-(b+a)$ следует, что $a+b=b+a$.

**6.1.20.** Пусть $A$ — ненулевая абелева группа, $F$ — поле. Умножение на скаляры определим по правилу $\alpha a=0$, $\alpha\in F$, $a\in A$.

### § 2

**6.2.1.** б), в), д), ж) Использовать указания к упр. 4.1.22; а), е) конечномерное векторное пространство над полем рациональных чисел должно быть счетным; г) любое конечное подмножество множества $\{f_s \mid s\in S\}$ линейно независимо, если $f_s(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\neq s,\\ 1 & \text{при } x=s.\end{cases}$

**6.2.7.** а), б), г), д). **6.2.8.** а) $\lambda\neq 0$; б) $\lambda\neq 0$, $\pm\sqrt{2}$. **6.2.9.** а) При любых; б) $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$; в), г) $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ попарно различны; д) $\alpha\neq 0$.

**6.2.10.** (1, 0), (1, 1), (1, 1), (0, 1), (0, 1); (1, 0),
(0, 1); (0, 1); (1, 0); (1, 0); (1, 1); (1, 1).

**6.2.11, 6.2.12.** Воспользоваться указаниями к упр. 4.1.18 и 4.1.19. $(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})$.

### § 3

**6.3.6.** а), в) (1, —2, 0, 3), (0, 0, 1, 1); б), г) (1, 0, 0, —1); (0, 1, 0, —1), (0, 0, 1, —1);

д) $\left(1, 0, 0, \frac{-1\pm i}{2}\right)$, (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0); е) (1, 0, 0, 0), (0, 1, $-i$, 0), (0, 0, 1, 0); ж) $a_1$, $a_2$ $(\alpha=0)$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ $(\alpha\neq 0)$.

## § 4

**6.4.7, 6.4.8.** а) $U\oplus V=\boldsymbol{R}^3$; б) $U\oplus V=\boldsymbol{R}^3$; в) $U=V$; г) $U\supset V$; д) $U\oplus V=\boldsymbol{R}^4$; е) $U\cap V=L((5,\ -2,\ -3,\ -4))$.

**6.4.9.** а) $(1,\ 1,\ 1)+(0,\ 1,\ 2)$; б) $(4,\ 4,\ 4)+(-3,\ -2,\ -1)$; в) $(1,\ 2,\ 3)+(0,\ 0,\ 0)$. **6.4.10.** Например, $(0,\ 0,\ 0)+(1,\ 2,\ 3)$, $\frac{1}{2}(1,\ 2,\ 3)+\frac{1}{2}(1,\ 2,\ 3)$.

**6.4.11.** $b=\alpha a+(b-\alpha a)$, где $\alpha=\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{3}$.

**6.4.12.** $b=\alpha a+(b-\alpha a)$, где $\alpha=\frac{\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n}{\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2}$.

**6.4.28.** а) $(e^x-1)+1$; б) $(e^x-((e-1)\,x+1))+((e-1)\,x+1)$.

## § 5

**6.5.1.** а) $(1,\ 1,\ 1)$; б) $(0,\ 2,\ 1)$.

**6.5.8.** Для $x^2$: а) $(0, 0, 1, 0)$; б) $(1, 2, 1, 0)$; в) $(1,\ -2,\ 1,\ 0)$.

**6.5.10.** Данное пространство изоморфно $n$-мерному арифметическому векторному пространству, в котором $q^n$ элементов (упр. 6.1.18, г).

**6.5.12.** Столько же, сколько различных базисов в пространстве $V$, т. е. $(q^n-1)\ldots(q^n-q^{n-1})$ (упр. 6.2.12). Зафиксировать базис в пространстве $U$ и воспользоваться упр. 6.5.11.

**6.5.14.** Столько же, сколько линейно независимых систем из $k$ элементов (важен порядок) в пространстве $V$, т. е. $(q^n-1)\ldots(q^n-q^{k-1})$ (упр. 4.1.19).

**6.5.16.** Столько же, сколько различных (упорядоченных) наборов из $m$ векторов в пространстве $V$, т. е. $q^{nm}$.

## § 6

**6.6.1.** 2. **6.6.2.** Например, подпространство, порожденное вектором $(1,\ 1)$. **6.6.4.** а) 10; б) $\frac{n(n+1)}{2}$; в) $n$.

**6.6.5.** б) Берем любое ненулевое решение уравнения $x_1+2x_2+3x_3=0$, например $(2,\ -1,\ 0)$. Ненулевое решение системы $\begin{matrix} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1-x_2\phantom{+3x_3}=0\end{matrix}$ вектор $(3,\ 6,\ -5)$ вместе с векторами $(2,\ -1,\ 0)$ и $(1,\ 2,\ 3)$ составляет ортогональный базис.

**6.6.6.** Например: а) $\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$; б) $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

**6.6.7.** а) $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$; б) $(1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $(-1,\ 2,\ 1,\ 4)$;

в) (1, 1, 1, 1), $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right)$; г) (1, 0, 1, 0), (−1, 2, 1, 4), $\left(\frac{3}{11}, \frac{5}{11}, -\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}\right)$.

**6.6.8.** $1, x, x^2-\frac{1}{3}, x^3-\frac{3}{5}x, x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35}$. **6.6.10.** а) 60°; б) 120°; в) 90°; г) 45°. **6.6.14.** На $k$-м шаге в процессе ортогонализации при замене вектора $a_{k+1}$ на $b_{k+1}$ в матрице Грама к $(k+1)$-й строке прибавляется линейная комбинация первых $k$ строк, а к $(k+1)$-му столбцу прибавляется линейная комбинация первых $k$ столбцов, что не меняет определителя Грама.

**6.6.15.** в) Воспользоваться задачей 6.6.14 и тем, что $\|b_k\| \leqslant \|a_k\|$ для любого $k=1, \ldots, n$.

**6.6.17.** $|A^tA|$ есть определитель Грама системы векторов строк матрицы $A$, далее воспользоваться задачей 6.6.15, в.

# ГЛАВА 7. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

## § 1

**7.1.1.** а) Да; б) нет; в) да; г) да (нет); д) да (нет); е) да; ж) да (нет); з) да; и) да (нет).

**7.1.2.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) не является; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) не является; д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$.

**7.1.3.** а) Ранг 3, дефект 0; в) ранг 2, дефект 1; д) ранг 1, дефект 2. **7.1.4.** а) Базис образа (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1); в) базис образа (1, 1, 0), (1,0, 1); базис ядра (1, −1, 0); д) базис образа (1, 1, 0); базис ядра (0, 1, 0), (0, 0, 1).

**7.1.5.** а) Ядро совпадает с $L$, образ — с $U$. **7.1.7.** Докажите, что если $\varphi^2=\varphi$, то $V=\operatorname{Ker}\varphi\oplus\operatorname{Im}\varphi$. **7.1.8.** Если $\psi^2=\varepsilon$, то $V=\operatorname{Ker}\left(\frac{1}{2}(\psi+\varepsilon)\right) \oplus \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}(\psi+\varepsilon)\right)$. **7.1.11.** Согласно упр. 7.1.10 зададим операторы действием на базисе $e_1$, $e_2$: а) $\varphi(e_1)=e_2$, $\varphi(e_2)=0$; б) $\varphi(e_1)=e_2$, $\varphi(e_2)=e_2$; $\psi(e_1)=e_1$, $\psi(e_2)=0$; в) $\varphi e_1=e_1$, $\varphi e_2=e_1$; $\psi e_1=e_2$, $\psi e_2=e_2$.

**7.1.12.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 \\ -10 & 9 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7.1.13 (см. упр. 4.4.5). а) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -27 & -16 & 31 \\ 9 & 4 & -9 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 31 & 5 & -9 \\ -27 & -5 & 9 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; в) обратного оператора не существует. **7.1.14.** а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2\gamma-\alpha & \alpha-\gamma \\ 2\delta-\beta & \beta-\delta \end{pmatrix}$.

**7.1.15.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \beta-\alpha & \delta-\gamma \\ 2\alpha-\beta & 2\gamma-\delta \end{pmatrix}$.

**7.1.16.** а) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & \delta & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}$.

**7.1.17.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$. **7.1.18.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **7.1.19.** $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -4 & -15 \end{pmatrix}$.

## § 2

**7.2.1.** При проектировании на подпространство $U$ параллельно $L$ ненулевые векторы $U$ (и только они) являются собственными с собственным значением 1, ненулевые векторы $L$ являются собственными с собственным значением 0. При отражении относительно подпространства $U$ параллельно $L$ ненулевые векторы $U$ являются собственными с собственным значением 1, ненулевые векторы $L$ являются собственными с собственным значением $-1$.

**7.2.2.** Оператор имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда его ядро отлично от нуля. **7.2.3.** Вектор $x$ является собственным вектором оператора $\psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi^{-1}(x)$ является собственным вектором оператора $\varphi^{-1}\psi\varphi$. То же и в б). **7.2.4.** Любое действительное число $\lambda$ является собственным значением оператора дифференцирования, собственные векторы, соответствующие ему, имеют вид $ce^{\lambda x}$, $0\neq c\in\boldsymbol{R}$.

**7.2.5.** а) $\lambda^2-1=0$, $\lambda=\pm1$; б) $\lambda^2-5\lambda-2=0$; в) $\lambda^2-2=0$; г) $(\lambda-2)(\lambda-3)=0$, $\lambda=2$, $\lambda=3$; д) $(\lambda-1)^2+1=0$. Уравнения б), в), д) не имеют решений в рациональных числах.

**7.2.6.** а) Собственные значения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$. При $\lambda=1$ собственные векторы имеют вид $c(1, -1)$, $c\neq0$, при $\lambda=3$ $c(1, 1)$, $c\neq0$; б) $\lambda_1=7$, $\lambda_2=-2$; при $\lambda=7$ $c(1, 1)$, $c\neq0$; при $\lambda=-2$ $c(4, -5)$, $c\neq0$; в) $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$; при $\lambda=0$ $c(1, -1)$,

$c\neq 0$, при $\lambda=2$ $c(1,\ 1)$, $c\neq 0$; г) собственных значений нет; д) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$; при $\lambda=1$ $c(1,\ 0,\ 0)$, $c\neq 0$; при $\lambda=2$ $c(1,\ -1,\ 0)$, $c\neq 0$; при $\lambda=3$ $c(0,\ 1,\ -1)$, $c\neq 0$; е) при $\lambda=1$ любой ненулевой вектор; ж) $\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_3=-1$; при $\lambda=1$ $c_1(1,\ 0,\ 1)+c_2(0,\ 1,\ 0)$, $c_1^2+c_2^2\neq 0$; при $\lambda=-1$ $c(1,\ 0,\ -1)$, $c\neq 0$; з) при $\lambda=2$ $c_1(-2,\ 1,\ 0)+c_2(1,\ 0,\ 1)$, $c_1^2+c_2^2\neq 0$; и) при $\lambda=2$ $c_1(1,\ 2,\ 0)+c_2(0,\ 0,\ 1)$, $c_1^2+c_2^2\neq 0$.

**7.2.7.** $\lambda_{1,2}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$; при $\lambda=\cos\alpha+i\sin\alpha$ $c(1,\ i)$, $c\neq 0$; при $\lambda=\cos\alpha-i\sin\alpha$ $c(i,\ 1)$, $c\neq 0$. **7.2.9.** $\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & 1-\alpha\end{pmatrix}\middle|\ \beta\gamma=\alpha-\alpha^2\right\}$. **7.2.10.** $\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}\middle|\ \beta\gamma=1-\alpha^2\right\}$. **7.2.11.** а) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$; г) матрица не подобна диагональной.

**7.2.12.** а) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$; г) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5+\sqrt{33} & 0\\ 0 & 5-\sqrt{33}\end{pmatrix}$. **7.2.13.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}i & 0\\ 0 & 1-\sqrt{3}i\end{pmatrix}$.

**7.2.14, 7.2.15.** Матрицы не имеют собственных базисов.

# ГЛАВА 8. ГРУППЫ И КОЛЬЦА

## § 1

**8.1.1.** Пятью способами. **8.1.4.** г), д) Моноиды; подмоноидов моноида $\langle M(n,\ \boldsymbol{R}),\ \cdot,\ E\rangle$ нет. Указание. д) Единицей является матрица, в которой каждый элемент равен $\frac{1}{n}$. **8.1.7.** См. 2.3.30.

**8.1.8.** Указание. Пусть $a$ — фиксированный элемент из $G$. Тогда в силу сюръективности $L_a$ для некоторого $x\in G$ выполняется равенство $a\cdot x=a$. Показать, что $x$ — правая единица $G$. Аналогично доказывается существование левой единицы.

**8.1.10.** $GL(n,\ F)=\{A\in M(n,\ F)\mid \det A\neq 0\}$. **8.1.11.** а) $\boldsymbol{Z}_8^*=\{\bar{1},\ \bar{3},\ \bar{5},\ \bar{7}\}$; $\boldsymbol{Z}_5^*=\{\bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4}\}$; $\boldsymbol{Z}_{12}^*=\{\bar{1},\ \bar{5},\ \bar{7},\ \overline{11}\}$; б) $\boldsymbol{Z}_p^*=\{1,\ 2,\ \ldots,\ \overline{p-1}\}$; в) $\boldsymbol{Z}^*=\{1,\ -1\}$; $\boldsymbol{Q}^*=\boldsymbol{Q}\backslash\{0\}$; $(\boldsymbol{Z}[i])^*=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$; г) $F^*=F\backslash\{0\}$.

**8.1.13.** Указание. Использовать матричное тождество ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$. **8.1.15.** Всего в $GL(2,\ \boldsymbol{Z}_2)$ шесть элементов. **8.1.18.** Указание. Доказать, что если $\tau_1,\ \ldots,\ \tau_k$ — все четные подстановки из $H$, $\sigma$ — нечетная подстановка из $H$, то $\tau_1\sigma,\ \ldots,\ \tau_k\sigma$ — все нечетные подстановки из $H$.

**8.1.20.** Указание. Используя то, что если $h \in H$, то последовательность $h, h^2, h^3, \ldots$ содержит лишь конечное число различных элементов, доказать, что $H$ удовлетворяет условию задачи 8.1.19.

## § 2

**8.2.1.** а) 2; $\infty$; $\infty$; б) 3; 4; 4; в) 5; 5; г) $\infty$; 4; 2; $\infty$; $\infty$. **8.2.4.** $\mathbf{Z}_8^*$: $o(\bar{1})=1$; $o(\bar{3})=2$; $o(\bar{5})=2$; $o(\bar{7})=2$; $\mathbf{Z}_{12}^*$: $o(\bar{1})=1$; $o(\bar{5})=2$; $o(\bar{7})=2$; $o(\overline{11})=2$; $\mathbf{Z}_7^*$: $o(\bar{1})=1$; $o(\bar{2})=3$; $o(\bar{3})=6$; $o(\bar{4})=3$; $o(\bar{5})=6$; $o(\bar{6})=2$.

**8.2.6.** $o(-1)=2$; $o(i)=o(-i)=4$; $o\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=$
$=o\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=o\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=o\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=8.$

**8.2.8.** В абелевой группе $o(a\cdot b)\leqslant o(a)\cdot o(b)$. **8.2.9.** $mn$. **8.2.10.** а) Истинно; б) ложно; в) истинно; г) ложно; д) ложно; е) истинно. **8.2.11.** Указание. Представить $k$ в виде $k=nq+r$, $0\leqslant r<n$.

**8.2.14.** г) Указание. Возможность представления следует из б). Чтобы доказать однозначность, рассмотреть произвольное представление $\tau$ в виде произведения попарно независимых циклов: $\tau=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\ldots\cdot\sigma_t$ — и доказать, что если $\sigma_j=(l_1\ \ l_2\ \ \ldots\ \ l_k)$, то $\{l_1, \ldots, l_k\}=[l_1]_\rho$, где $\rho$ — отношение эквивалентности, определенное в задаче.

**8.2.17.** Указание. Доказать, что если $\sigma_1^m\cdot\sigma_2^m\cdot\ldots\cdot\sigma_k^m=\varepsilon$, где $\varepsilon$ — тождественная подстановка, то $\sigma_i^m=\varepsilon$ для любого $i$. Вывести отсюда, что $m$ делится на длину каждого цикла $\sigma_i$. **8.2.18.** Указание. Если $\tau=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\ldots\cdot\sigma_t$ — разложение в произведение независимых циклов, то $\tau^k=\sigma_1^k\cdot\ldots\cdot\sigma_t^k$. **8.2.20.** Указание. Использовать 8.2.19 и тот факт, что умножение на транспозицию меняет знак подстановки на противоположный. **8.2.22.** $P\cup\{-1\}$, где $P$ — множество всех простых чисел. **8.2.23.** Указание. Использовать 8.2.14, г и 8.2.19. **8.2.24.** Указание. Показать, что $(ij)=(1i)(1j)(1i)$, использовать 8.2.23. **8.2.25.** Указание. Использовать 8.2.24 и равенства

$$(1j)(1i)=(1ij),\ (1ij)=(12j)(12j)(12i)(12j).$$

**8.2.26.** Указание. Доказать, что обратимую матрицу при помощи элементарных преобразований строк можно привести к единичной матрице. Использовать тот факт, что совершение элементарного преобразования равносильно умножению на элементарную матрицу.

**8.2.27.** Циклические группы: а), г), д), ж), з), к). **8.2.29.** 10. **8.2.30.** Бесконечная группа. **8.2.32.** Истинны а), г).

**8.2.33.** $\{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}\}$; $\{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{24}, \overline{30}, \overline{36}\}$.

**8.2.34.** 4 порождающих: $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7$, где $\omega_k=\cos\frac{2\pi k}{8}+$ $+i\sin\frac{2\pi k}{8}$.

**8.2.39.** Указание. Пусть $G=\langle a\rangle$, $H=\langle b\rangle$. Показать, что $o(\langle a, b\rangle)=mn$ в группе $G\times H$, далее использовать 8.2.38. **8.2.41.** Указание. $\langle \boldsymbol{Z}_4, +, -\rangle$ — циклическая группа, $\langle \boldsymbol{Z}_8^*, \cdot, ^{-1}\rangle$ — не циклическая. **8.2.43.** Указание. Группа $\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_4$ не циклическая. **8.2.44.** Истинны а), в), д).

**8.2.45.** $\langle \boldsymbol{Z}, +, -\rangle\cong\langle 17\boldsymbol{Z}, +, -\rangle\cong\langle 3\boldsymbol{Z}, +, -\rangle$; $\langle \boldsymbol{R}, +, -\rangle\cong\langle \boldsymbol{R}^+, \cdot, ^{-1}\rangle$; $\langle \boldsymbol{Z}_2, +, -\rangle\cong\langle \boldsymbol{Z}^*, \cdot, ^{-1}\rangle$. Указание. См. 2.3.70. Для того чтобы доказать, что $\langle \boldsymbol{R}^*, \cdot, ^{-1}\rangle\not\cong\langle \boldsymbol{Q}^*, \cdot, ^{-1}\rangle$, показать, что если $f$: $\boldsymbol{R}^*\to\boldsymbol{Q}$φ — изоморфное отображение групп, то найдется $a\in\boldsymbol{Q}^*$, такой, что $|a|$ не является квадратом рационального числа и $a=f(c)$, где $c>0$.

**8.2.49.** Указание. Показать, что $\langle a^k\rangle\subseteq\langle a^d\rangle$ и порядки этих групп равны. **8.2.50.** Указание. См. 8.2.49. **8.2.51.** Указание. См. 8.2.49. **8.2.52.** Указание. Показать, что если подгруппа $\langle a^k\rangle$ имеет порядок $d$, то НОД$(n, k)=\frac{n}{d}$. **8.2.53.** Указание. Показать, что если $x\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle$, то $o(x)=1$.

**8.2.55.** Указание. Представить произвольное целое число в виде кратного 1 или $-1$. **8.2.56.** Указание. Исходя из равенства $1=n\frac{1}{n}$, доказать, что $f\left(\frac{1}{n}\right)=r\frac{1}{n}$ для любого целого положительного $n$. **8.2.58.** Нет; предположив, что $f$ — гомоморфное отображение, получим $0=f(\bar{0})=$ $=f(3+1)=f(\bar{3})+f(1)=4$ — противоречие. **8.2.59.** а) Не является; б) является.

**8.2.60.** Указание. Гомоморфное отображение $f$ полностью определяется заданием элемента $f([1]_8)$, порядок которого должен быть делителем 8. **8.2.61.** Указание. При изоморфном отображении порядок элемента сохраняется. **8.2.62.** Всего два отображения. **8.2.63.** 4. **8.2.64.** НОД$(m, n)=1$.

## § 3

**8.3.1.** Левые смежные классы:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\};$$

правые смежные классы:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\},$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\}.$$

**8.3.3.** *п.* **8.3.4.** а) Лучи, выходящие из начала координат, без точки (0, 0); б) прямые, проходящие через начало координат, без точки (0, 0); в) окружности с центром в начале координат.

**8.3.5.** Смежный класс состоит из всех векторов, концы которых лежат на прямой, параллельной заданной. **8.3.6.** Указание. Для того чтобы доказать, что в любой группе, порядок которой не является простым числом, есть собственные подгруппы, рассмотреть случаи: $G$ содержит элемент бесконечного порядка; в $G$ все элементы имеют конечный порядок, но она не циклическая; $G$ — циклическая группа конечного не простого порядка. **8.3.7.** Указание. Доказать, что группа простого порядка порождается любым своим элементом, отличным от единицы. **8.3.8.** Указание. Если $H$ — подгруппа группы $G$ и порядок $H$ равен $m$, то $a^m=1$ для любого $a\in H$. Следовательно, $H$ состоит из корней $m$-й степени из 1. **8.3.9.** См. указание к 8.3.8.

**8.3.11.** Указание. Для $k$, не делящегося на $p$, вывести из теоремы Эйлера (см. 8.3.10); для $k$, делящегося на $p$, проверить непосредственно. **8.3.12.** Указание. Применить теорему Эйлера для $n=10$ (см. 8.3.10). **8.3.13.** Указание. $o(\bar{3})=6$ в группе $\langle \mathbf{Z}_7^*, \cdot, {}^{-1}\rangle$. **8.3.14.** Указание. Воспользоваться теоремой Эйлера для $n=10$ (см. 8.3.10).

**8.3.15.** а) 1; б) 3; в) 1, если $n\equiv 0 \pmod 5$; 4, если $n\equiv 1 \pmod 5$; 5, если $n\equiv 2 \pmod 5$; 9, если $n\equiv 3 \pmod 5$; 3, если $n\equiv 4 \pmod 5$. **8.3.16.** Указание. Данное число представить в виде $10^{22}-1$. **8.3.17.** См. 8.3.16. **8.3.18.** Указание. Представить $N=1+10^3+10^6+\ldots+10^{15n+12}$ и использовать условие $10^5\equiv 1 \pmod{11111}$. **8.3.19.** Может (см. 8.3.16).

**8.3.22.** Указание. Показать, что если нормальный делитель $H$ группы $A_n$ содержит $(ijk)$, то трехчленные циклы $(ikl)$, $(jkl)$, $(ilj)$ можно представить в виде $\tau^{-1}(ijk)\tau$, где $i, j, k, l\in\{1, 2, 3, 4\}$ и все различны, $\tau$ — некоторый трехчленный цикл. Далее можно воспользоваться задачей 8.2.25. **8.3.24.** а), б), г), ж).

**8.3.28.** Указание. Пусть $A=\|\alpha_{ij}\|$ принадлежит центру $GL(n, \mathbf{R})$, тогда $A$ перестановочна с любой элементарной матрицей. Вывести отсюда, что $\alpha_{jk}=0$, если $j\neq k$ и $\alpha_{ii}=\alpha_{jj}$ для любых $i$, $j$, $k$. **8.3.29.** См. указание к 8.3.28.

**8.3.30.** Указание. Использовать результаты задач 8.3.28, 8.3.29. **8.3.31.** 0, 3; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; 0. **8.3.32.** 4; 5; 3. **8.3.34.** Указание. Единственная подгруппа порядка $n$ порождается элементом $\frac{1}{n}+\mathbf{Z}$. Показать, пользуясь теоремой Лагранжа, что любой элемент из подгруппы порядка $n$ имеет вид $\frac{r}{n}+\mathbf{Z}$, где $r\in\mathbf{Z}$.

**8.3.35.** Указание. Изоморфное отображение устанавливается правилом: $\frac{r}{n}+\mathbf{Z}\mapsto\cos\frac{2\pi r}{n}+i\sin\frac{2\pi r}{n}$. **8.3.39.** 2; 3; 4; 1.

**8.3.42.** Указания. г) $f\colon(\cos\alpha+i\sin\alpha)U_n\mapsto\cos n\alpha+i\sin n\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$; д) $f\colon r(\cos\alpha+i\sin\alpha)U_n\mapsto r(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$, $r\in\mathbf{R}^+$, $\alpha\in\mathbf{R}$; е) $f\colon\alpha+\mathbf{Z}\mapsto\cos 2\pi\alpha+i\sin 2\pi\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$. **8.3.43.** г) $f\colon A\cdot H\mapsto|\det A|$, $A\in GL(n,\mathbf{C})$; д) $f\colon A\cdot H\mapsto\frac{\det A}{|\det A|}$, $A\in GL(n,\mathbf{C})$.

**8.3.45.** Указание. Изоморфизм $f\colon GL(2,\mathbf{Q})/\mathrm{Ker}\,\varphi\to\mathbf{Z}$ устанавливается следующим образом: если $A\in GL(2,\mathbf{Q})$ и $\det A=\frac{m}{n}2^k$, то $f(A\cdot\mathrm{Ker}\,\varphi)=k$. **8.3.46.** $\mathrm{Ker}\,\varphi=\mathbf{Z}$; $\mathrm{Im}\,\varphi$ — множество всех корней степени $p^n$ из 1, где $n$ пробегает все множество натуральных чисел.

## § 4

**8.4.1.** $\mathbf{Z}^*=\{-1,\ 1\}$; $\mathbf{Z}_n^*=\{\bar{k}\in\mathbf{Z}_n\mid \text{НОД}(k,\ n)=1\}$; $(M(n,\ \mathbf{R}))^*=GL(n,\ \mathbf{R})$; $\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}\setminus\{0\}$; $(\mathbf{Z}[\sqrt{2}])^*=\{-1,\ 1\}$; $(\mathbf{Q}[\sqrt{2}])^*=\mathbf{Q}[\sqrt{2}]\setminus\{0\}$; $\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\setminus\{0\}$. **8.4.2.** За образующий элемент мультипликативной группы можно взять матрицу $\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$. **8.4.3.** Мультипликативная группа кольца: а) $\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$; г) $\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1,\ -1\right\}$; б), в), д), е) $\{1,\ -1\}$.

**8.4.6.** $f$ инъективно для колец нулевой характеристики. **8.4.9.** Указание. Показать, что $\{ke\mid k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}$, где $e$ — единица кольца $A$,— подкольцо кольца $A$, изоморфное кольцу $\mathbf{Z}_n$.

**8.4.13.** Указание. Использовать 8.4.12, показать, что число элементов равно $p^n$, где $p$ — характеристика поля, $n$ — его размерность как векторного пространства над подполем, изоморфным $\mathbf{Z}_p$. **8.4.14.** Указание. Пусть $e$ — единица данного поля. Тогда подмножество $\{me\cdot(ne)^{-1} \mid m, n\in\mathbf{Z}, n\neq 0\}$ — подполе, изоморфное $\mathbf{Q}$. **8.4.15.** Указание. Рассмотреть, например, вложение кольца $A$ в прямое произведение колец $A\times B$, где $A$, $B$ — кольца различных ненулевых характеристик.

## § 5

**8.5.1.** Являются идеалами: в), г), м), н), п). **8.5.2.** Являются идеалами: в), г). **8.5.3.** $n\mathbf{Z}$; $nZ_8\,(n/8)$; $nZ_{25}\,(n/25)$. **8.5.4.** Указание. См. задачу 8.2.49. **8.5.5.** $k\mathbf{Z}_n\,(k/n)$. **8.5.6.** $\operatorname{Im} f$, вообще говоря, не является идеалом $B$. **8.5.13.** Указание. Если $J_1+J_2=J_1\cup J_2$ и $J_1\not\subseteq J_2$, то для произвольного $x\in J_2$ рассмотреть элемент $a+x$, где $a\in J_1\setminus J_2$. Показать, что $x\in J_1$. **8.5.18.** Принадлежат идеалу: $-15+9i$, $5-3i$; $5-3i$ порождает этот идеал. **8.5.20.** $k\mathbf{Z}\subseteq m\mathbf{Z} \Leftrightarrow m/k$. **8.5.21.** Указание. Если $f(x)$ — многочлен наименьшей степени в $J$, $g(x)$ — произвольный многочлен из $J$, то по теореме о делении с остатком для многочленов имеет место равенство $g(x)=f(x)\,q(x)+r(x)$, где $\deg r(x)<\deg f(x)$ или $r(x)=0$. Показать, что $r(x)\in J$, и поэтому $r(x)=0$.

**8.5.24.** Указание. Пусть $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in J$ и, например, $a\neq 0$. Тогда $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in J$. Аналогично, умножая данную матрицу слева и справа на подходящие матрицы из $M(2, \mathbf{R})$, получить матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

**8.5.25.** Указание. По аналогии с 8.5.24 показать, что любой ненулевой идеал содержит обратимую матрицу. **8.5.26.** Указание. Пусть $J$ — ненулевой идеал кольца $M(n, F)$, $A$ — ненулевая матрица из $J$, $E_{ij}$ — матрица, у которой на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит 1, а на остальных местах 0. Показать, что, умножая $A$ слева и справа на подходящие матрицы $E_{ij}$, можно получить матрицы, сумма которых является обратимой матрицей.

**8.5.35.** Указание. $a+bi$, $c+di$ принадлежат одному смежному классу тогда и только тогда, когда $a\equiv c \pmod 2$ и $b\equiv d \pmod 2$. **8.5.36.** См. 8.5.35. **8.5.38.** 2 разлагается в произведение двух необратимых элементов.

**8.5.40.** в), г). **8.5.41.** Указание. Всего 9 элементов. **8.5.42.** 25 элементов. Полем не является. **8.5.49.** $x-4$. В смежном классе единственный многочлен первой степени.

**8.5.50.** в), г). **8.5.52.** Не является, есть делители нуля. **8.5.53.** Указанное равенство выполняется тогда и только тогда, когда один из многочленов $f(x)$ или $g(x)$ делится на $x^2+1$. Делителей нуля нет.

**8.5.55.** Указание. Каждому смежному классу $f(x)+(x)$ поставить в соответствие свободный член $f(x)$. **8.5.58.** Фактор-кольцо состоит из трех элементов.

**8.5.60.** Нет, не является. **8.5.61.** Указание. Пусть $a+J$ — ненулевой класс. Показать, что $K=\{ra+x \mid r\in A, x\in J\}$ — идеал кольца $A$, удовлетворяющий условию $J\subseteq K\subseteq A$ и $J\neq K$. Следовательно, $K=A$. Вывести отсюда, что для смежного класса $a+J$ в фактор-кольце $A/J$ существует обратный ему элемент. **8.5.63.** Истинны а), б).

## § 6

**8.6.2.** Нет. **8.6.3.** $\boldsymbol{Q}[i\sqrt{3}]=\{a+bi\sqrt{3} \mid a, b\in \boldsymbol{Q}\}$. **8.6.4.** $\left\{\frac{f(x)}{g(x)} \,\middle|\, f(x), g(x)\in \boldsymbol{Z}[x], g(x)\neq 0\right\}$. **8.6.8.** Указание. $\psi(a\cdot b^{-1})=\varphi(a)\cdot(\varphi(b))^{-1}$ для любых $a$, $b\in A$, $b\neq 0$.

## § 7

**8.7.8.** 5; $1+3i$; $3+i$; $3-i$. **8.7.10.** Указание. Показать, что если $p=(a+bi)(c+di)$, где оба сомножителя необратимы, то $p^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ и, следовательно, $a^2+b^2=c^2+d^2=p$. **8.7.13.** $4x^2-1$ приводим в $\boldsymbol{Z}[x]$, $\boldsymbol{Q}[x]$, $\boldsymbol{R}[x]$; $6x^2+2$, 6 приводимы в $\boldsymbol{Z}[x]$; $6x^2-2$ приводим в $\boldsymbol{Z}[x]$, $\boldsymbol{R}[x]$; $x^2-2$ приводим в $\boldsymbol{R}[x]$. **8.7.14.** 2; 3; $-2$; $-3$; $1+i\sqrt{5}$; $1-i\sqrt{5}$; $-1-i\sqrt{5}$; $-1+i\sqrt{5}$. Указание. Если $a$ делит 6 в $\boldsymbol{Z}[i\sqrt{5}]$, то $N(a)$ делит $N(6)=36$ в $\boldsymbol{Z}$.

**8.7.20.** $\{18, 342\}$; $\{54, 306\}$; $\{126, 234\}$; $\{162, 198\}$. **8.7.21.** а) 1; б) 1; в) 1; г) 2, если $a$, $b$ нечетные; 1, если одно из чисел $a$ или $b$ четное; д) 1; е) 1. Указание. г) Если простое число $p$ делит $a+b$, $a^2+b^2$, то $p$ делит $2ab$.

## § 8

**8.8.1.** Указание. Показать, что для любых $a$, $b$ из факториального кольца $A$ можно указать представления: $a=\varepsilon p_1^{k_1}\ldots p_s^{k_s}$, $b=\delta p_1^{l_1}\ldots p_s^{l_s}$, где $\varepsilon$, $\delta\in A^*$, $k_1, \ldots, k_s$, $l_1, \ldots, l_s$ — целые неотрицательные числа, $p_1, \ldots, p_s$ — попарно неассоциированные неприводимые элементы; при этом $a/b$ тогда и только тогда, когда $k_1\leqslant l_1, \ldots, k_s\leqslant l_s$. **8.8.4.** Указание. Показать, что 2, $1+i\sqrt{5}$ неприводимы и не ассоциированы.

**8.8.5.** Указание. Все делители числа $2+2i\sqrt{5}$: 1, 2, $1+i\sqrt{5}$, $2+2i\sqrt{5}$ — и ассоциированные с ними элементы. Показать, что ни один из них не является наибольшим общим делителем 6 и $2+2i\sqrt{5}$. **8.8.8.** Нет, идеал $(x)$ в $\boldsymbol{Z}[x]$ простой, но не максимальный. **8.8.9.** См. 8.8.8. **8.8.11.** $u=pv$, где $p$ — неприводимый элемент.

**8.8.15.** Нет, см. 8.8.13. **8.8.16.** а) $b=29$, $r=4$; б) не существуют $b$ и $r$; в) не существуют $b$ и $r$. **8.8.17.** а) $q=2x^2+$ $+3x+11$, $r=25x-5$; б) $q=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$, $r=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$; в) $q=x^3-x^2+3x-3$, $r=5$. **8.8.18.** а) $q=5-7i$, $r=1-i$; б) $q=-5+3i$, $r=1-i$; в) $q=1$, $r=5+4i$; г) $q=1+7i$, $r=-i$; д) $q=0$, $r=3+5i$. Указание. Частное $q$ и остаток $r$ определяются, вообще говоря, неоднозначно. **8.8.19.** $3x^4-\frac{1}{2}x^3-5x^2+x-2$.

**8.8.20.** а) $2=274\cdot 5+342\cdot(-4)$; б) $3=(-591)\cdot(-53)+$ $+348\cdot(-90)$; в) $33=(-198)\cdot(-4)+(-759)\cdot 1$. **8.8.21.** а) $1=$ $=f(x)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)+g(x)\left(x^2-2x+\frac{1}{3}\right)$; б) $x+1=$ $=f(x)\left(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)+g(x)\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\right)$; в) $x^3+1=$ $=f(x)\left(-\frac{18}{7}x-\frac{27}{7}\right)+g(x)\left(\frac{6}{7}x^2+\frac{9}{7}x-4\right)$; г) $x^2+x+$ $+1=f(x)\left(-x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right)+g(x)\left(x^2-\frac{3}{2}x+1\right)$; д) $3=f(x)(-16x^2+37x+26)+g(x)(16x^3-53x^2-37x-23)$; е) $x^3-1=f(x)(-x^3)+g(x)(x^{18}+1)$. Указание. Многочлены $u(x)$ и $v(x)$ определяются неоднозначно. **8.8.22.** а) 1; б) $2+3i$; в) $7+2i$. **8.8.24.** Указание. Смежному классу $f(x)+(x-2)$ поставить в соответствие остаток от деления $f(x)$ на $x-2$.

**8.8.25.** Указание. Доказать, что в каждом смежном классе существует один и только один многочлен вида $ax+b$. Поставить в соответствие смежному классу $ax+b+(x^2-2)$ число $b+a\sqrt{2}$. **8.8.26.** Указание. Показать, что если $f(x)\notin(x^2-x+1)$, то существуют многочлены $u(x)$, $v(x)\in\boldsymbol{Q}[x]$, такие, что $f(x)\,u(x)+(x^2-x+1)\,v(x)=1$. Отсюда следует, что обратным к смежному классу $f(x)+(x^2-x+1)$ является класс $u(x)+(x^2-x+1)$. **8.8.27.** а), в), д). **8.8.28.** См. указание к 8.8.26. **8.8.29.** Указание. Доказать, что если НОД $(g(x), f(x))=1$, то $g(x)+(f(x))$ обратим; если НОД $(g(x), f(x))=d(x)$, $\deg d(x)>0$, то $g(x)+(f(x))$ — делитель нуля.

**8.8.31.** Указание. Использовать тот факт, что наибольший общий делитель $f(x)$, $g(x)$ является многочленом из

$\boldsymbol{Q}[x]$ и не зависит от того, над каким полем рассматриваются многочлены $f(x)$, $g(x)$: над $\boldsymbol{Q}$ или над некоторым его расширением. **8.8.33.** Указание. Пусть $a, b \in \boldsymbol{Q}_p$, $b \neq 0$. Если $N(a) \geqslant N(b)$, то $a$ делится на $b$ без остатка, если $N(a) < N(b)$, то $a = b \cdot 0 + a$, т. е. $\boldsymbol{Q}_p$ — евклидово кольцо. **8.8.34.** Указание. Показать, что можно выбрать целое число $u$ так, чтобы выполнялось условие $\left|x - \frac{u}{2}\right| < \frac{1}{4}$, и целое число $v$ так, чтобы выполнялись условия $u \equiv v \pmod 2$ и $\left|y - \frac{v}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда если $b = \frac{u + vi\sqrt{3}}{2}$, то $|a - b|^2 < 1$. Пусть $c$, $d \in \boldsymbol{Z}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $d \neq 0$. Пусть $x + yi\sqrt{3} = \frac{c}{d} \in \boldsymbol{Q}[i\sqrt{3}]$, $f$ — такое число из $\boldsymbol{Z}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, что $\left|\frac{c}{d} - f\right|^2 < 1$. Показать, что $c = df + r$, где $|r|^2 < |d|^2$.

**8.8.35.** Указание. Показать, что если $x + y\sqrt{2} \in \boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$, $u$, $v$ — целые числа, такие, что $|x - u| \leqslant \frac{1}{2}$, $|y - v| \leqslant \frac{1}{2}$, то $N((x + y\sqrt{2}) - (u + v\sqrt{2})) < 1$. Далее доказательство проводится аналогично 8.8.34. **8.8.36.** $4 = 2 \cdot 2 = (1 + i\sqrt{3}) \times (1 - i\sqrt{3})$. **8.8.39.** Факториальные: $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z}[x]$, $\boldsymbol{Q}[x]$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Z}[i]$, $\boldsymbol{Z}_2[x]$, $\boldsymbol{Z}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; кольца главных идеалов и евклидовы: $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}[x]$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Z}[i]$, $\boldsymbol{Z}_2[x]$, $\boldsymbol{Z}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

**8.8.40.** Все утверждения ложны. **8.8.41.** Указание. Показать, что существуют такие целые $t$, $s$, что $k - l = mt + ns$. Вывести отсюда существование $x$, удовлетворяющего условиям задачи. **8.8.42.** Указание. Доказать индукцией по $s$, использовать тот факт, что НОД $(n_1 \cdot \ldots \cdot n_{s-1}, n_s) = 1$, и задачу 8.8.41. **8.8.43.** Можно. **8.8.44.** Если НОД $(m, n) = 1$, то можно взвесить любую массу, в противном случае только массу, кратную $d$, где $d =$ НОД $(m, n)$.

**8.8.45.** 179. **8.8.46.** Указание. Рассмотреть 3 случая: $n \equiv 0 \pmod 3$, $n \equiv 1 \pmod 3$, $n \equiv 2 \pmod 3$. **8.8.47.** Указание. Показать, что в кольце $\boldsymbol{Z}_{17}$ уравнения $\bar{2}x + \bar{3}y = \bar{0}$ и $\bar{9}x + \bar{5}y = \bar{0}$ равносильны. **8.8.48.** Указание. Проверить, что 1993 — простое число. Рассмотреть это равенство в поле $\boldsymbol{Z}_{1993}$. Доказать, что указанная сумма совпадает с суммой всех элементов поля $\boldsymbol{Z}_{1993}$ и равна $\bar{0}$.

# ГЛАВА 9. ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ В КОЛЬЦЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

## § 1

**9.1.8.** При делении на 3 трех последовательных целых чисел $n, n+1, n+2$ получаются различные остатки: 0, 1, 2. Следовательно, одно из трех последовательных чисел дает остаток 0, т. е. делится на 3.

**9.1.9.** а) $n^3-n=(n-1)n(n+1)$; одно из трех последовательных целых чисел $n-1$, $n$, $n+1$ делится на 3. Следовательно, $n^3-n$ делится на 3. б) $n^5-n=n(n^2-1)(n^2+1)$. При делении целого числа $n$ на 5 получаются остатки: 0, 1, 2, 3, 4. Следовательно, целое число $n$ имеет одну из форм: $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$. Если $n=5k$, то $n$ делится на 5; если $n=5k+2$ или $n=5k+3$, то $(n^2+1)$ делится на 5; если $n=5k+1$ или $5k+3$, то $(n^2-1)$ делится на 5. в) $n^7-n=n(n^3-1)(n^3+1)$. Если $n$ имеет вид $7k$, то $n$ делится на 7; если $n$ имеет вид $7k+1$, $7k+2$ или $7k+4$, то $(n^3-1)$ делится на 7; если $n$ имеет вид $7k+3$, $7k+5$ или $7k+6$, то $(n^3+1)$ делится на 7. г) $n^5-n=$ $=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$. Одно из двух чисел $(n-1)$, $n$ делится на 2; одно из трех последовательных целых чисел делится на 3; следовательно, произведение $(n-1)n(n+1)$ делится на 3; $n^5-n$ делится на 5. Кроме того, различные простые числа попарно взаимно просты. Следовательно, $n^5-n$ делится на произведение $2\cdot3\cdot5$, т. е. $n^5-n$ делится на 30.

**9.1.13.** Обозначим символом $\left[\frac{a}{b}\right]$ целую часть $\frac{a}{b}$. Тогда для $n=\left[\frac{a}{b}\right]$ выполняются неравенства $nb\leqslant a<(n+1)b$.

**9.1.14.** Пусть $n-1$, $n$, $n+1$, $n+2$ — четыре последовательных целых числа. Сумма их произведения с единицей имеет вид:

$$(n-1)n(n+1)(n+2)+1=(n-1)(n+2)(n^2+n)+1= \\ =(n^2+n-1)^2.$$

**9.1.15.** Покажем, что $11^{10}-1$ делится на 100. Применим формулу бинома Ньютона:

$$(1+10)^{10}=1+\binom{1}{10}\cdot10+\binom{2}{10}\cdot10^2+\binom{3}{10}\cdot10^3+ \\ +\ldots+10^{10},$$

где биномиальный коэффициент $\binom{k}{10}$ — натуральное число, число сочетаний из 10 по $k$; в частности, $\binom{1}{10}=10$. Следовательно, каждое слагаемое правой части равенства $(1+10)^{10}-1=10\cdot 10+\binom{10}{2}\cdot 10^2+\binom{10}{3}\cdot 10^3+\ldots+10^{10}$ делится на 100 и, таким образом, $11^{10}-1$ делится на 100.

## § 2

**9.2.8.** Так как $n>2$, то целое число $m=n!-1$ больше 1 и имеет, по меньшей мере, один простой делитель $p$, $p\leqslant m$; следовательно, $p<n!$. Если допустить, что $p\leqslant n$, то $p$ будет делителем произведения $1\cdot 2\cdot 3\ldots n$, равного $n!$, и делителем разности $n!-m$, что невозможно, так как $n!-m=1$. Следовательно, $p>n$; а так как $p<n!$, то $n<p<n!$. Итак, доказано, что при $n>2$ между $n$ и $n!$ содержится хотя бы одно простое число. Отсюда следует бесконечность множества простых чисел.

**9.2.9.** Составные: $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7-1=209=11\cdot 19$, $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\times\times 11\cdot 13+1=59\cdot 509$; остальные — простые.

**9.2.10.** В каждом из первых десяти сотен имеется соответственно 25, 21, 16, 16, 17, 14, 16, 14, 15, 14 простых чисел.

**9.2.11.** 11 простых чисел.

**9.2.18.** $26=2^{23}\cdot 3^8\cdot 5^6\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 17\cdot 19\cdot 23$.

**9.2.25.** Для того чтобы натуральное число, большее 1, было квадратом, необходимо и достаточно, чтобы все показатели степени в каноническом разложении его на простые множители были четными. По условию, $ab=c^2$ и числа $a$, $b$ взаимно просты. Так как любой простой множитель числа $c^2$ содержится либо в $a$, либо в $b$, но не в обоих, то простые множители чисел $a$ и $b$ должны иметь четные показатели степени.

**9.2.26.** Если $n$ — простое, то числа $(n-1)!$ и $n$ взаимно просты и поэтому $(n-1)!$ не делится на $n$. Если составное число $n$ не равно степени простого числа, то его можно записать в виде $n=ab$; $(a, b)=1$, $1<a$, $b<n$; следовательно, $(n-1)!$ делится на $n$. Если $n=p^k$, $p$ — простое и $k>2$, то $(n-1)!$ делится на $p\cdot p^{k-1}$. Если $n=p^2$ и $p\neq 2$, то $(n-1)!$ делится на $p\cdot 2p=2n$.

**9.2.27.** Из решения задачи 9.2.26 непосредственно следует, что при $n>4$ число $n$ является простым только в том случае, когда $(n-1)!$ не делится на $n$.

**9.2.28.** Пусть $m$ — натуральное положительное число, $m>1$ (сколь угодно большое). Рассмотрим последовательность длины $m$:

$$(m+1)!+2,\ (m+1)!+3,\ (m+1)!+4,\ \ldots,\ (m+1)!+(m+1).$$

Эта последовательность не содержит ни одного простого числа.

## § 3

**9.3.13.** Наибольший общий делитель $(2^m-1,\ 2^n-1)$ равен $2^d-1$, где $d=(m,\ n)$. В частности, если $(m,\ n)=1$, то $(2^m-1,\ 2^n-1)=1$.

**9.3.19.** Пусть $I=\bigcap\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbf{Z}$ — пересечение ненулевых идеалов $a_i\mathbf{Z}$ кольца целых чисел $\mathbf{Z}$. Пересечение $I$ конечного числа ненулевых идеалов есть ненулевой идеал кольца $\mathbf{Z}$; так, например, $I$ содержит числа $\pm a_1, a_2, \ldots, a_n$, отличные от нуля. Пусть $m$ — наименьшее положительное число, принадлежащее $I$. Тогда $I=m\mathbf{Z}$. Следовательно, $m\mathbf{Z}=\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathbf{Z}$. Не трудно проверить, что $m$ является наименьшим общим кратным чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

## § 4

**9.4.1.** а) $(607,\ 477)=1$; б) $(343,\ 246)=1$; в) $(6494,\ 6303)=$ $=191$.

**9.4.2.** а) $607(-11)+47714=1$; б) $343(-71)+24699=1$; в) $6494-6303=191$.

**9.4.3.** а) $\frac{271828}{10^5}=|2;\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6,\ 10,\ 1,\ 1,\ 2|$;

б) $\frac{103993}{33102}=|3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 292|$; в) $\frac{99}{170}=|0;\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 6,\ 2|$;

г) $\frac{355}{113}=|3;\ 7{,}6|$.

**9.4.4.** а) $\frac{247}{74}=|3;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2|$; ее последовательные подходящие дроби: $\frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}, \frac{15}{4}, \frac{131}{35}, \frac{277}{74}$.

б) $\frac{77}{187}=|0;\ 2,\ 2,\ 3|$; ее последовательные подходящие дроби: $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{7}{12}$.

в) $\frac{333}{100}=|3;\ 3,\ 33|$; ее последовательные подходящие дроби: $\frac{3}{1}, \frac{10}{3}, \frac{333}{100}$.

г) $\frac{103993}{33102}=|3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 292|$; ее последовательные подходящие дроби: $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103995}{33102}$.

**9.4.5.** а) $\frac{3953}{871}=\frac{59}{13}$; б) $\frac{6059}{1241}=\frac{83}{71}$; в) дробь $\frac{6821}{217}$ несократима; г) $\frac{10027}{32671}=\frac{271}{883}$.

**9.4.12.** $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$. **9.4.13.** $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{19}{7}$.

**9.4.16.** а) $x_0=4$, $y_0=5$ — частное решение; $x=4+15t$, $y=5+19t$, где $t$ — любое целое число (общее решение).

б) $x_0=33$; $y_0=44$ — частное решение; $x=33+17t$, $y=44+23t$ — общее решение.

в) $x=88+47t$, $y=99+53t$ — общее решение.

г) $x=-3+18t$, $y=6+35t$ — общее решение.

д) $x=-25+71t$, $y=-30+85t$ — общее решение.

е) $x=-28+11t$, $y=-105+41t$ — общее решение.

# ГЛАВА 10. СРАВНЕНИЯ

## § 1

**10.1.6.** а) Число $n$, $n=a_0+10a_1+10^2a_2+\ldots+(-1)^n\,10^na_n$ делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится число $a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)\,a_k$, т. е. число $(a_0+a_2+{}$ ${}+a_4+\ldots)-(a_1+a_3+a_5+\ldots)$.

б) Для того чтобы число $n$, $n=a_0+10a_1+10^2a_2+\ldots+{}$ ${}+10^na_n$ делилось на 7, 11 или 13, достаточно, чтобы разность, образуемая первыми тремя цифрами числа $n$, и числом, образуемым оставшимися его цифрами, делилась, соответственно, на 7, 11 или 13.

## § 3

**10.3.11.** Пусть $p$ — простое число, $a$ — целое число, не делящееся на $p$. Целые числа

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (p-1)\,a \qquad (1)$$

сравнимы (в некотором порядке) по модулю $p$ с числами

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (p-1), \qquad (2)$$

поэтому произведение чисел последовательности (1) сравнимо с произведением чисел последовательности (2), т. е.

$$a^{p-1}(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(p-1))\equiv1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(p-1)\ (\mathrm{mod}\ p). \qquad (3)$$

Произведение $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(p-1)$ взаимно просто с простым числом $p$; разделив почленно на $(p-1)!$ сравнение (3), получим сравнение $a^{p-1}\equiv1\ (\mathrm{mod}\ p)$.

**10.3.12.** Сравнение $a^{p-1}\equiv1\ (\mathrm{mod}\ p)$ доказано (см. 10.3.11) в предположении $(a, p)=1$. Если умножить на $a$ обе части этого сравнения, т. е. написать

$$a^p\equiv a\ (\mathrm{mod}\ p), \qquad (2)$$

то это сравнение выполняется без всяких ограничений на целое число $a$, так как если $a$ делится на $p$, то и $a^p$ делится на $p$, т. е. сравнение (2) верно как при $(a, p)=1$, так и при $a$, делящемся на $p$.

**10.3.17.** Число 341 — составное, $341=11\cdot 31$. Легко проверить, что $2^5\equiv 1 \pmod{31}$ и $2^{10}\equiv 1 \pmod{31}$; кроме того, по теореме Ферма $2^{10}\equiv 1 \pmod{11}$. Так как 11 и 13 взаимно просты, то отсюда следует, что $2^{10}\equiv 1 \pmod{11\cdot 31}$, т. е. $2^{10}\equiv 1 \pmod{341}$. Следовательно, $2^{340}\equiv 1 \pmod{341}$ и $2^{341}\equiv$ $\equiv 2 \pmod{341}$.

**10.3.18.** $561=3\cdot 11\cdot 17$. По теореме Ферма для каждого целого числа $a$, взаимно простого с 561, выполняются сравнения: $a^2\equiv 1 \pmod 3$, $a^{10}\equiv 11 \pmod{11}$, $a^{16}\equiv 17 \pmod{17}$. Поскольку числа 3, 11, 17 попарно взаимно просты и $[2, 10, 16]=80$, то из этих сравнений вытекают сравнения: $a^{80}\equiv 1 \pmod{561}$, $a^{560}\equiv 1 \pmod{561}$. Следовательно, число 561 абсолютно псевдопростое.

## § 4

**10.4.3.** Сравнение $ax\equiv 1 \pmod 7$ при $a=2, 3, 4, 5, 6$ имеет соответственно следующие решения: $x\equiv 4 \pmod 7$; $x\equiv 5 \pmod 7$; $x\equiv 4 \pmod 7$; $x\equiv 3 \pmod 7$; $x\equiv 6 \pmod 7$.

**10.4.6.** Пусть $p$ — простое, $1<a<p$. Найдем сначала решение сравнения

$$ax\equiv 1 \pmod p. \qquad (1)$$

Имеет место сравнение:

$$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(a-1)\,a\,(-1)^{a-1}\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-a+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(a-1)\,a}\equiv$$
$$\equiv 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(a-1) \pmod p,$$

из него, разделив почленно на $a!$, получим сравнение $a(-1)^{a-1}\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-a+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(a-1)\,a}\equiv 1 \pmod p$, показывающее, что сравнение (1) имеет решение $a'$:

$$a'=(-1)^{a-1}\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-a+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot a}\equiv$$
$$\equiv 1\,(p-1)\ldots(p-a+1) \pmod p,\ \text{т. е. } a'\equiv 1 \pmod p.$$

Теперь, умножив почленно сравнение

$$ax\equiv b \pmod p \qquad (2)$$

на $a'$, получим $a'\cdot ax\equiv b\cdot a' \pmod p$, т. е. получим решение исходного сравнения (2):

$$x\equiv b\,(-1)^{a-1}\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-a+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot a} \pmod p.$$

**10.4.7.** а) $x \equiv 5 \pmod{15}$; б) сравнение $26x \equiv 7 \pmod{13}$ не имеет решений; в) $x \equiv 5 \pmod{11}$; г) $x \equiv 11 \pmod{17}$; д) $x \equiv 16 \pmod{19}$; е) $x \equiv 2, 5, 2, 11 \pmod{12}$.

**10.4.8.** а) $x \equiv 2 \pmod{11}$; б) $x \equiv 16 \pmod{17}$; в) $x \equiv 6 \pmod{19}$; г) $x \equiv 11 \pmod{58}$.

**10.4.16.** Если число $n > 2$ является простым, то по теореме Вильсона $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$. Так как $(n-1)! + 1 = (n-2)!(n-1) + 1$, то $(n-1)! + 1 = (n-2)!n - ((n-2)! - 1)$, откуда видно, что число $(n-2)! - 1$ делится на $n$, т. е. $(n-2)! - 1 \equiv 0 \pmod n$.

Пусть теперь $n$ — не простое натуральное число ($n > 4$). На основании решения задачи 9.2.26 заключаем, что $(n-1)! \equiv 0 \pmod n$ и, так как $(n-1, n) = 1$, $(n-2)! \equiv 0 \pmod n$. Следовательно, условие $(n-2)! - 1 \equiv 0 \pmod n$ не выполняется.

**10.4.17.** Пусть $p$ — простое число, $p = 2k + 1$. Тогда

$$(p-1)! = (p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-k)\cdot k! \equiv (-1)^k (k!)^2 \pmod p,$$

$$(p-1)! + 1 \equiv (-1)^k \cdot (k!)^2 + 1 \equiv 0 \pmod p,$$

откуда следует: $(k!)^2 + (-1)^k = 0 \pmod p$.

## § 5

**10.5.9.** Число 1 есть первообразный корень по модулю 2; число 3 — первообразный корень по модулю 4.

**10.5.10.** $\varphi(8) = 4$, и система чисел 1, 3, 5, 7 — есть приведенная система вычетов по модулю 8. Каждый вычет этой системы удовлетворяет сравнению $x^2 \equiv 1 \pmod 8$, следовательно, по модулю 8 первообразных корней не существует.

**10.5.16.** Число 5 является наименьшим положительным первообразным корнем по модулю 23.

**10.5.21.** Пусть $g$ — первообразный корень по нечетному простому модулю $p$. Тогда $g^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, $g^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$, следовательно, $(g^{1/2(p-1)} - 1)(g^{1/2(p-1)} + 1) \equiv 0 \pmod p$. Оба множителя не могут делиться на $p$, так как их разность равна 2. Второй множитель не делится на $p$, поскольку $g$ — первообразный корень простого числа $p$. Следовательно, $g^{1/2(p-1)} + 1 \equiv 0 \pmod p$ и $g^{1/2(p-1)} \equiv -1 \pmod p$. Это означает, что $\operatorname{ind}(-1) \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p-1}$.

**10.5.22.** а) Порядок числа 7 по модулю 29 равен 7. б) Порядок числа 13 по модулю 47 равен 23. в) Порядок числа 18 по модулю 41 равен 5.

**10.5.23.** а) Для решения сравнения $11x \equiv 13 \pmod{31}$ переходим, пользуясь таблицей индексов, к равносильному сравнению $\operatorname{ind} 11 + \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} 13 \pmod{30}$, откуда $\operatorname{ind} x \equiv 18 \pmod{30}$.

В таблице индексов по модулю 31 находим решение исходного сравнения: $x \equiv 4 \pmod{31}$.

б) Для решения сравнения $47x \equiv 23 \pmod{73}$ переходим к равносильному сравнению $\operatorname{ind} 47 + \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} 23 \pmod{72}$, $\operatorname{ind} x \equiv 15 \pmod{72}$.

В таблице индексов по модулю 31 находим решение $x \equiv 30 \pmod{73}$ исходного сравнения.

в) Сравнение $53x \equiv 37 \pmod{61}$ равносильно сравнению: $\operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} 37 - \operatorname{ind} 53 \equiv 6 \pmod{60}$, $\operatorname{ind} x \equiv 6 \pmod{60}$. В таблице индексов по модулю 61 находим решение $x \equiv 3 \pmod{61}$ исходного сравнения.

г) Сравнение $x^2 \equiv 2^5 \pmod{43}$ не имеет решений.

д) Сравнение $x^5 \equiv 17 \pmod{29}$ равносильно сравнению $5 \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} 17 \pmod{28}$, $\operatorname{ind} x \equiv 21 \pmod{28}$. В таблице индексов по модулю 29 находим решение $x \equiv 17 \pmod{29}$ исходного сравнения.

## § 6

**10.6.1.** $1/3 = 0,(3)$ и $1/11 = 0,(09)$. Следовательно, $O(10 \bmod 3) = 1$ и $O(10 \bmod 11) = 2$. Поэтому число цифр в наименьшем периоде десятичной дроби, в которую обращается несократимая обыкновенная дробь со знаменателем 3 или 11, равно, соответственно, 1 или 2.

$1/7 = 0,(142857)$, $1/13 = 0,(076923)$ и $1/21 = 0,(047619)$. Таким образом, $O(10 \bmod 7) = 6$, $O(10 \bmod 13) = 6$ и $O(10 \bmod 21) = 6$. Поэтому число цифр в наименьшем периоде десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем 7, 13 или 21, равно 6.

Порядок числа 10 по модулю 17 равен 16. Поэтому число цифр в наименьшем периоде десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем 17, равно 16.

Порядок числа 10 по модулю 19 равен 18. Поэтому число цифр в наименьшем периоде десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем 19, равно 18.

**10.6.2.** $0,35(62) = \frac{3527}{9900}$; $5,1(538) = 5\frac{1537}{9990}$; $11,12(31) = 11\frac{1219}{9900}$.

**10.6.3.** $10^3 - 1 = 27 \cdot 37$. Порядок числа 10 по модулю 27 и по модулю 37 равен 3. Обозначим через $M$ множество всех целых положительных делителей числа $10^3 - 1$, кратных 27 или 37. При $m \in M$ порядок числа 10 по модулю $m$ равен 3. Поэтому при $m \in M$ любая обыкновенная несократимая правильная дробь $a/m$ обращается в чисто периодическую десятичную дробь с тремя цифрами в периоде.

**10.6.4.** Порядок числа 10 по простому модулю $p$ (отличному от 2 и 5) равен $2n$. Тогда $10^n \equiv -1 \equiv p-1 \pmod p$, т. е. после $n$ шагов делений 1 на $p$ должен появиться остаток $p-1$.

Если теперь $10\cdot 1 = pq_1 + r_1$, то $10(p-1) = p(9-q_1) + (p-r_1)$, $0 < (p-r_1) < p$; если же теперь $10r_1 = pq_2 + r_2$, то $10(p-r_1) = p(9-q_2) + (p-r_2)$, $0 < (p-r_2) < p$, и т. д.

Таким образом, среди остатков при делении 1 на $p$ должен появиться остаток $(p-1)$ и тогда можно сказать, что первый полупериод завершен; кроме того, цифры второго полупериода дополняют цифры первого полупериода до 9.

Аналогично доказывается, когда $a$ делят на $p$, $a<p$.

**10.6.5.** $1/41 = 0,(02439)$, следовательно, $O(10 \bmod 41) = 5$. Поэтому число цифр в периоде десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем 41, равно пяти.

$O(10 \bmod 13) = 6$ и $O(10 \bmod 37) = 3$, следовательно, $O(10 \bmod (13\cdot 37)) = [6, 3] = 6$. Поэтому число цифр в наименьшем периоде десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем $13\cdot 37$, равно шести.

$O(10 \bmod 11) = 2$, $O(10 \bmod 13) = 6$ и $O(10 \bmod 17) = 16$, следовательно, $O(10 \bmod 11\cdot 13\cdot 17) = [2, 6, 16] = 48$. Поэтому число цифр в наименьшем периоде десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем $11\cdot 13\cdot 17$, равно 48.

$O(10 \bmod 7\cdot 19) = [O(10 \bmod 7), O(10 \bmod 19)] = [6, 18] = 18$. Поэтому число цифр в наименьшем периоде десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем $5\cdot 7\cdot 19$, равно 18.

$O(10 \bmod 11\cdot 13) = [O(10 \bmod 11), O(10 \bmod 13)] = [2, 6] = 6$. Поэтому число цифр в периоде десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем $11\cdot 13$ или $2\cdot 11\cdot 13$, равно шести.

**10.6.6.** $10^4 - 1 = 9\cdot 11\cdot 101$. Порядок числа 10 по модулю 101 равен четырем. Обозначим через $M$ множество всех целых положительных делителей числа $10^4 - 1$, кратных числу 101. При $m \in M$ порядок числа 10 по модулю $m$ равен четырем. Поэтому при $m \in M$ любая обыкновенная правильная дробь $a/m$ обращается в чисто периодическую десятичную дробь с четырьмя цифрами в наименьшем периоде.

**10.6.7.** $10^5 - 1 = 9\cdot 41\cdot 271$. Порядок числа 10 по модулю 41 и по модулю 271 равен пяти. Обозначим через $M$ множество всех положительных делителей числа $10^5 - 1$, кратных числу 41 или числу 271. При $m \in M$ порядок числа 10 по модулю $m$ равен пяти. Поэтому при $m \in M$ любая обыкновенная несократимая правильная дробь $a/m$ обращается в чисто периодическую дробь с пятью цифрами в периоде.

## ГЛАВА 11. МНОГОЧЛЕНЫ

### § 1

**11.1.2.** б), г), д). **11.1.8.** а) $2^n$; б) $p^n(p-1)$; в) $p^{n+1}-1$. **11.1.9.** $x^4+x^3+x^2+x+\bar{1}$; $x^4+x^3+\bar{1}$; $x^4+x+\bar{1}$. Указание. Все многочлены без свободного члена, а также все многочлены с четным числом ненулевых членов заведомо приводимы.

**11.1.10.** Указание. Воспользоваться малой теоремой Ферма (см. 8.3.11). **11.1.11.** Указание. Доказать, что система линейных уравнений $\sum_{j=0}^{n} c_j a_i^j = b_i$ $(i=0, \ldots, n)$ от переменных $c_0, \ldots, c_n$ имеет единственное решение (ее определитель отличен от 0). **11.1.12.** Указание. Доказать, что $\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{p-1}$ — корни многочлена $x^{p-1}-\bar{1}$ и других корней нет. **11.1.13.** Указание. Использовать разложение многочлена $x^{p-1}-\bar{1}$ из предыдущей задачи, приравнять свободные члены. **11.1.14.** а) $(x^3-x^2+3x-3)(x-1)+5$; б) $(2x^4-6x^3+13x^2-39x+125)(x+3)-375$; в) $(4x^2-(3+4i)x-1+7i)(x+1+i)+8-6i$; г) $(x^2-2ix-2i-5)(x-1+2i)-9+8i$; д) $(x^5+ix^4+(1-i)x^3+2ix^2-(1-i)x)\times(x-i)+3-i$.

**11.1.15.** а) $\mathbf{Z}_2[x]$: $(x^2+\bar{1})(x+\bar{2})$; $\mathbf{Z}_5[x]$: $(\bar{2}x^4+x^3+x+\bar{1})\times(x+\bar{2})+\bar{1}$; б) $\mathbf{Z}_2[x]$: $x^3(x+\bar{3})+\bar{1}$; $\mathbf{Z}_5[x]$: $(\bar{3}x^2+\bar{2}x)(x+\bar{3})+\bar{4}$. **11.1.16.** а) 136; б) $-1-44i$.

**11.1.17.** а) $(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$; б) $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$; в) $(x-2)^4-18(x-2)+38$; г) $(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)\times(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$; д) $(x+1-2i)^4-(x+1-2i)^3+2(x+1-2i)+1$. **11.1.18.** а) $x^4+11x^3+45x^2+81x+55$; б) $x^4-4x^3+6x^2+2x+8$. **11.1.19.** а) $f(2)=50$, $f^{\mathrm{I}}(2)=64$, $f^{\mathrm{II}}(2)=124$, $f^{\mathrm{III}}(2)=216$, $f^{\mathrm{IV}}(2)=240$, $f^{\mathrm{V}}(2)=120$; б) $f(1+2i)=-12-2i$, $f^{\mathrm{I}}(1+2i)=-16+8i$, $f^{\mathrm{II}}(1+2i)=-8+30i$, $f^{\mathrm{III}}(1+2i)=24+30i$, $f^{\mathrm{IV}}(1+2i)=24$.

**11.1.20.** а) 3; б) 4. **11.1.21.** $A=-5$. **11.1.22.** $A=3$, $B=-4$. **11.1.23.** $A=n$, $B=-(n+1)$.

**11.1.25.** $\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k (x-1)^{n-k}$. Указание. $x^n+x^{n-1}+\ldots+1=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=\frac{((x-1)+1)^{n+1}-1}{x-1}$. **11.1.26.** Указание. Показать, что многочлен взаимно прост со своей производной. **11.1.28.** Указание. Если $f(x)$ неприводим над $\mathbf{Q}$, то для любого многочлена $g(x)\in\mathbf{Q}[x]$ имеет место одно из двух условий: $f(x)$, $g(x)$ взаимно просты или $f(x)/g(x)$. Рассмотреть в качестве $g(x)$ многочлен $f'(x)$ — производную $f(x)$. **11.1.29.** $A=2$ или $A=-2$.

**11.1.30.** а) $(x^2+x+1)^2(x-1)^3$; б) $(x-1)^3(x+1)$; в) $x^d-1$, где $d=\text{НОД}(m,\ n)$. Указание. $x^{m+n}-x^m-x^n+1=$ $=(x^n-1)(x^m-1)=(x^d-1)^2 h(x)\cdot g(x)$, где $h(x)$, $g(x)$ — взаимно простые многочлены. Так как $x^n-1$ и $x^m-1$ не имеют кратных неприводимых множителей и $h(x)$, $g(x)$ взаимно просты, то единственный кратный множитель $x^d-1$. **11.1.31.** Указание. Пусть число элементов в $F$ равно $s$. Тогда из теоремы Лагранжа следует, что $(\forall a\in F^*)\ a^{s-1}=1$.

**11.1.32.** Указание. Пусть $a$ — необратимый ненулевой элемент из $A$. Тогда идеал $(x,\ a)$ не является главным. **11.1.33.** $u=u_0+h_1t$, $v=v_0-f_1t$, где $f_1$, $h_1$ определяются условием $f=f_1d$, $h=h_1d$, $d=\text{НОД}(f,\ h)$, $t$ — произвольный многочлен. **11.1.34.** Идеал порождается наименьшим общим кратным $f(x)$ и $g(x)$.

**11.1.37.** Указание. Любой автоморфизм $\varphi$ кольца $\mathbf{Z}[x]$ действует тождественно на $\mathbf{Z}$. Пусть $\varphi$: $x\mapsto f(x)$, показать, что $\deg f(x)=1$. Заданием образа $x$ автоморфизм $\varphi$ определяется однозначно (см. 11.1.36). Аналогичные рассуждения и для остальных колец многочленов.

## § 2

**11.2.1.** $\mathbf{Q}\backslash\{0\}$, $\{-1,\ 1\}$, $\{\alpha\in A\,|\,\alpha$ — обратим$\}$. **11.2.2.** а), б) Неприводимы; в) приводим; г) обратим. **11.2.3.** 1а) $(x+iy)(x-iy)$; 2а) $(x+iy+1)(x-iy+1)$; 3а) $\prod\limits_{i=1}^{4}(x-\alpha_i y)$, $\alpha_i=\dfrac{\pm 1\pm i}{\sqrt{2}}$; 1б) $(x+y)^2$; 2б) $(x+y+1)^2$; 3б) $(x+y)^4$; 4а, б) $3(x-y)(y-z)(z-x)$; 5а, б) $3(x+y)\times$ $\times(y+z)(x+z)$. **11.2.4.** а) Из многочленов с нулевым свободным членом; б) если $(x)+(y)=(f)$, то $f$ делит $x$ и $y$, следовательно, $f$ обратим и $(f)=\mathbf{Q}[x,\ y]=(x)+(y)$, что противоречит а); в) нет, так как в евклидовом кольце любой идеал главный.

**11.2.5.** Если $n=1$, то $F[x]$ — евклидово кольцо, а значит, кольцо главных идеалов. Если $n>1$, то идеал $(x_1)+(x_2)$ не является главным (см. 11.2.4). **11.2.6.** Рассмотрим отображение $\varphi$: $\mathbf{Q}[x,\ y]\to\mathbf{Q}[x]$, при котором $f(x,\ y)\mapsto f(x,\ x)$. По теореме о гомоморфизмах колец $\mathbf{Q}[x,\ y]/\operatorname{Ker}\varphi\cong\mathbf{Q}[x]$. Осталось доказать, что $\operatorname{Ker}\varphi=(x-y)$. Для этого нужно проверить, достаточно для однородных многочленов $g(x,\ y)$, что $g(x,\ x)=0\Rightarrow(x-y)\,|\,g(x,\ y)$. Аналогично доказываются остальные изоморфизмы. **11.2.7.** а), б) Нет; в) да. **11.2.8.** а), б), г) Нет; в) да.

## § 3

**11.3.1.** Множество симметрических многочленов замкнуто относительно всех главных операций кольца.

**11.3.2.** а) $3x_1^2x_2x_3$, $3x_1x_2^2x_3$, $3x_1x_2x_3^2$; $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}$;

б) $f$, $-f$; $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$; в) $f$; $S_3$.

**11.3.3.** $3\binom{4}{3}=12$. **11.3.4.** а), д), е).

**11.3.5.** Второй. **11.3.6.** $5x_1^3x_2^2x_3-x_1^3-8x_1^2x_2^5x_3+2x_2^5x_3^6$. **11.3.7.** а) $x_1^8x_2x_3^2$; б) $2x_1^9x_2^5x_3^2$. **11.3.8.** в), г), е). **11.3.9.** (7, 0, 0), (6, 1, 0), (5, 2, 0), (5, 1, 1), (4, 3, 0), (4, 2, 1), (3, 3, 1), (3, 2, 2).

**11.3.10.** а) $\sigma_1^2-2\sigma_2$; б) $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$; в) $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$; г) $\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1^3\sigma_3-2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2$; д) $2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3$; е) $\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2$.

**11.3.11.** а) $\sigma_1^2-2\sigma_2$; б) $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$; в) $\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$; г) $\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$; д) $\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_1\sigma_3-2\sigma_2^2+4\sigma_4$; е) $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$; ж) $\sigma_2\sigma_3-3\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$; з) $\sigma_1^2\sigma_3-2\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$; и) $\sigma_1\sigma_2^2-2\sigma_1^2\sigma_3-\sigma_2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_5$; к) $\sigma_1^3\sigma_2-3\sigma_1\sigma_2^2-\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_4-5\sigma_5$; л) $\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$; м) $\sigma_2\sigma_4-4\sigma_1\sigma_5+9\sigma_6$; н) $\sigma_3^2-2\sigma_2\sigma_4+2\sigma_1\sigma_5-2\sigma_6$; о) $\sigma_1^2\sigma_4-2\sigma_2\sigma_4-\sigma_1\sigma_5+6\sigma_6$.

Решение. б) Выпишем убывающую последовательность высших членов симметрических многочленов (3, 0, 0, ...), (2, 1, 0, ...), (1, 1, 1, 0, ...). Следовательно, $F=\sigma_1^3+A\sigma_1\sigma_2+B\sigma_3$. Составим таблицу:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | ... | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_4$ | ... | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | ... | 2 | 1 | 0 | 0 | ... | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | ... | 3 | 3 | 1 | 0 | ... | 3 |

По таблице находим систему уравнений: $2=2^3+A\cdot 2$, $3=3^3+A\cdot 3\cdot 3+B$. Откуда получаем $A=-3$, $B=3$, т. е. $x_1^3+\ldots=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$.

**11.3.12.** Например, в пункте к) полагаем $x_3=x_4=\ldots=x_n=0$. Подставив в общий ответ $\sigma_3=\sigma_4=\sigma_5=0$, получим $x_1^4x_2+x_1x_2^4=\sigma_1^3\sigma_2-3\sigma_1\sigma_2^2$. **11.3.13.** $x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=\left(\frac{4}{2}\right)^3-3\left(\frac{4}{2}\cdot\frac{2}{2}\right)+3\frac{6}{2}=11$. **11.3.14.** $a_1^2-2a_2$.

**11.3.15.** $\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_{n-1}=0$, $\sigma_n=(-1)^{n+1}$. **11.3.16.** 0 при $n\geqslant 4$, 3 при $n=3$, 0 при $n=2$, 1 при $n=1$. **11.3.17.** $x_1^2x_2^2=100$, $x_1^2+x_2^2=6^2-20$; $x^2-16x+100$. **11.3.18.** Выразить через основные симметрические многочлены и положить $\sigma_1=0$. **11.3.19.** Воспользоваться задачей 11.3.10, е и формулами Виета: а) $b^2-4ac$; б) $b^2c^2-4b^3d-4c^3a+18abcd-27a^2d^2$; в) $-4p^3-27q^2$.

**11.3.21.** $a=-9$. **11.3.22.** $5x^3+24x^2+32x+16$. **11.3.23.** а) $p=0$; б) $q=0$; в) $q=0$.

## § 4

**11.4.1.** а) 0; б) 243; в) 0; г) 252. **11.4.2.** а) 0; б) 1, $-2$; в) $-2$; г) 0, $-2$; д) $-2$. **11.4.3.** $41y^4+y^2+9=0$. **11.4.4.** а) $(1, i)$, $(1, -i)$, $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$; б) $(1, -1)$; в) $(0, 1)$, $(3, 0)$, $(2, 2)$, $(2, -1)$; г) $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(0, -1)$, $(-2, 1)$; д) $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(2, 2)$.

**11.4.5.** Выражение $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$ есть результант двух квадратных трехчленов. **11.4.7.** Системы решаются с помощью результанта, однако удобнее заменой $x+y=u$, $xy=v$. а) $\left(\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}, \frac{1}{2}\mp\frac{i}{2}\right)$; б) $(3, 5)$, $(5, 3)$, $\left(-\frac{9}{2}\pm\frac{\sqrt{21}}{2}, -\frac{9}{2}\mp\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$; в) $(0, 2)$, $(2, 0)$, $\left(-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2}i, -\frac{3}{2}\mp\frac{\sqrt{11}}{2}i\right)$; г) $(a, b)$, $(b, a)$; д) $(3, 2)$, $(2, 3)$; е) $(1, 2)$, $(2, 1)$, $\left(\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{19}}{2}i, \frac{3}{2}\mp\frac{\sqrt{19}}{2}i\right)$. **11.4.8.** После преобразования $(2x-y)^2+(x-1)^2=0$ получаем $x=1$, $y=2$. **11.4.9.** Складывая неравенства $x^2+y^2\geqslant 2xy$, $y^2+z^2\geqslant 2yz$, $z^2+x^2\geqslant 2zx$, получаем $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$, причем равенство возможно, только если $x=y=z$. Учитывая второе уравнение, имеем $x=y=z=1$.

**11.4.10.** $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-1\pm\sqrt{5}, -1\mp\sqrt{5})$. **11.4.11.** а) Если хотя бы одна из переменных принимает значение 0, то и все остальные также равны 0, это дает решение $(0, 0, 0)$. Для нахождения ненулевых решений возводим каждое уравнение в степень $-1$, складываем полученные уравнения и получаем уравнение $\left(\frac{1}{x_1}-1\right)^2+\left(\frac{1}{x_2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{x_3}-1\right)^2=0$, которое дает единственное решение $(1, 1, 1)$. б) Пусть набор $(x, y, z)$ удовлетворяет исходной системе. Если обозначить $x=\operatorname{tg} a$, где $a\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то из первого уравнения системы получаем $y=2x/(1-x^2)=\operatorname{tg} 2a$, из второго $z=\operatorname{tg} 4a$, из третьего $x=\operatorname{tg} 8a$. Отсюда $\operatorname{tg} a=\operatorname{tg} 8a$, т. е. $7a=\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. Следовательно, $a=\frac{\pi k}{7}$. При этом $x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi k}{7}\right)$, $y=\operatorname{tg}\frac{2\pi k}{7}$, $z=\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi k}{7}\right)$. Проверка показывает, что при $k\in\{-3, -2,$

$-1, 0, 1, 2, 3\}$ полученные 7 наборов чисел $x$, $y$, $z$ различны и удовлетворяют исходной системе.

**11.4.12.** Указание. Индукцией по $k$ докажите, что значения всех основных симметрических многочленов, кроме первого, в решении системы $(x_1, \ldots, x_n)$ равны нулю. Следовательно, $x_1, \ldots, x_n$ — корни уравнения $x^n - ax^{n-1} = 0$, т. е. система имеет $n$ решений: $x_i = a$, $x_j = 0$ при $i \neq j$ $(i = 1, \ldots, n)$. Другое решение. При $n \leqslant 2$ система легко решается. При $n \geqslant 3$ из второго уравнения имеем $\left(\frac{x_i}{a}\right)^2 \leqslant 1$, и, следовательно, $\left|\frac{x_i}{a}\right|^3 \leqslant \left(\frac{x_i}{a}\right)^2$ для любого $i$. Если для всякого индекса $x_i$ равно $\pm a$ или 0, решения легко находятся из первых двух уравнений. В противном случае из третьего уравнения получаем противоречие:

$$1 = \left|\sum\left(\frac{x_i}{a}\right)^3\right| \leqslant \sum\left|\frac{x_i}{a}\right|^3 < \sum\left(\frac{x_i}{a}\right)^2 = 1.$$

**11.4.13.** Из второго уравнения имеем для основных симметрических многочленов $1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n = 2$. Так как $1 = x_1^k + \ldots + x_n^k \leqslant x_1 + \ldots + x_n$, то $\sigma_2 + \ldots + \sigma_n \leqslant 0$, следовательно, $\sigma_2 = \ldots = \sigma_n = 0$. Таким образом, если $(x_1, \ldots, x_n)$ — решение системы, то $x_1, \ldots, x_n$ — корни уравнения $x^n - \sigma_1 x^{n-1} = 0$, т. ė. все $x_i$, кроме одного, равны нулю, а оставшийся равен 1.

**11.4.14.** а) Указание. Сложите все уравнения. Ответ: если $a = b = c = 0$, то системе удовлетворяет любая тройка чисел $(x, y, z)$, для которой $x + y + z = 0$. Во всех остальных случаях два решения:

$$\pm(a^2/\sqrt{a^2+b^2+c^2},\ b^2/\sqrt{a^2+b^2+c^2},\ c^2/\sqrt{a^2+b^2+c^2}).$$

б) Указание. Перепишите систему в виде $(x+z)(x+y) = a$, $(y+z)(y+x) = b$, $(z+x)(z+y) = c$ и перемножьте уравнения. Ответ: два решения:

$$\pm\left(\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right),\ \frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right),\right.$$
$$\left.\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\right).$$

в) Указание. Представьте систему в виде $(1+y)(1+z) = a+1$, $(1+x)(1+z) = b+1$, $(1+y)(1+x) = c+1$ и перемножьте уравнение. Ответ: два решения:

$$(1+x,\ 1+y,\ 1+z) = \pm\left(\sqrt{\frac{(1+b)(1+c)}{1+a}},\ \sqrt{\frac{(1+a)(1+c)}{1+b}},\right.$$
$$\left.\sqrt{\frac{(1+a)(1+b)}{1+c}}\right).$$

г) $(0,\ 0,\ 0)$, $(\sqrt{bc},\ \sqrt{ac},\ \sqrt{ab})$, $(\sqrt{bc},\ -\sqrt{ac},\ -\sqrt{ab})$, $(-\sqrt{bc},\ -\sqrt{ac},\ \sqrt{ab})$, $(-\sqrt{bc},\ \sqrt{ac},\ -\sqrt{ab})$.

# ГЛАВА 12. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ЧИСЛОВЫМИ ПОЛЯМИ

## § 1

**12.1.1.** б)

$$
\begin{tikzcd}
\sigma_{1,1} \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
\sigma_{1,2} \arrow[d] \arrow[dr] & \sigma_{2,2} \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
\sigma_{1,3} \arrow[d] \arrow[dr] & \sigma_{2,3} \arrow[d] \arrow[dr] & \sigma_{3,3} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\sigma_{1,4} & \sigma_{2,4} & \sigma_{3,4} & \sigma_{4,4} \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{tikzcd}
$$

Вертикальные стрелки соответствуют сложениям, косые — умножениям. Значения многочленов каждой горизонтали вычисляются по формулам пункта а).

Интересно отметить, что на прямое вычисление значения одного многочлена $\sigma_{2,n}$ затрачивается $\frac{n(n-1)}{2}$ умножений и на единицу меньше сложений.

**12.1.2.** а) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)=x^5-(8+i)x^4+(24+7i)x^3-(34+17i)x^2+(23+17i)x-(6+6i)$;
б) $(x+1)^3(x-3)(x-4)=x^5-4x^4-6x^3+16x^2+29x+12$;
в) $(x-i)^2(x+1+i)=x^3+(1-i)x^2+(1-2i)x-1-i$;
г) $(x-i)(x+i)(x-1-i)(x-1+i)(x-2)=x^5-4x^4+7x^3-8x^2-6x-4$. **12.1.3.** а) $(x-1)^2(x+2)$; б) $(x+1)^2(x^2+1)$; в) $(x-1)^3$; г) $x^d-1$, где $d$ — наибольший общий делитель $m$ и $n$. **12.1.4.** а) При $|x|<1$ имеем $|f(x)|\leqslant|x|^5+2|x|^3+|x|\leqslant 4|x|$. Поэтому при $\delta<\frac{0{,}1}{4}=0{,}025$ выполняется нужное неравенство; б) $|f(x)|\geqslant|x^5|-|-2ix^3+x|\geqslant|x|^5\left(1-\left(\frac{2}{|x|^2}+\frac{1}{|x|^4}\right)\right)$. При $|x|>4$ получается $|f(x)|\geqslant|x|^5\left(1-\frac{2}{16}-\frac{1}{256}\right)\geqslant\frac{3}{4}|x|^5\geqslant 3\cdot 4^4=768>750$.

**12.1.5.** а) Разложим $f(x)$ по степеням $x-i$: $f(x)=i+(2i+1)(x-i)+(x-i)^2$. Сделаем замену $x=i-\frac{i+2}{5}t$, $0<t\in\boldsymbol{R}$, учитывая, что $(2i+1)\left(-\frac{i+2}{5}\right)=-i$. Получим $f\left(i-\frac{i+2}{5}t\right)=i-it+\left(-\frac{i+2}{5}\right)^2t^2$. Далее, $\left|f\left(i-\frac{i+2}{5}t\right)\right|\leqslant$

$\leqslant |i-it|+\left|\frac{i+2}{5}\right|^2 t^2=1-t+\frac{1}{5}t^2$. При $t<1$ выполнено неравенство $f\left(i-\frac{i+2}{5}t\right)<1=|i|$. б) При $0<x<1$.

**12.1.6.** а) $(x+i)(x-i+1)$; б) $(x+1)(x-1)(x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon})$, где $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $(x+1)^2(x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon})$; г) $(x-1)(x-2)\times$ $\times(x-3)$; д) $(x-1-i)(x+1-i)(x+1+i)(x-1+i)$; е) $(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})$; ж) $(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{3}{2}+\right.$ $\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; з) $(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_1)\ \dots\ (x-\varepsilon_{n-1})$, где $\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_{n-1}$ — комплексные корни $n$-й степени из 1; и) представить многочлен в виде $(x^m-1)(x^n-1)$, далее воспользоваться п. 3; к) $(x-2\varepsilon_0)(x-3\varepsilon_0)(x-2\varepsilon_1)(x-3\varepsilon_1)\ \dots$ $\dots\ (x-2\varepsilon_{n-1})(x-3\varepsilon_{n-1})$.

**12.1.7.** По формулам Виета сумма всех корней равна $\frac{1}{2}$, поэтому один из корней должен быть равен $\frac{1}{2}-1=$ $=-\frac{1}{2}$. Подставляя $-\frac{1}{2}$ в уравнение, находим $\lambda=-3$. Корни: $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$. **12.1.8.** $\lambda=2$. **12.1.9.** $(\alpha_1+1)\dots(\alpha_n+$ $+1)=(-1)^n(-1-\alpha_1)\dots(-1-\alpha_n)=(-1)^n f(-1)=$ $=1-a_{n-1}+a_{n-2}-\dots+(-1)^n a_0$.

**12.1.10.** Пусть $\alpha$ — один из корней уравнения $ax^2+bx+$ $+c=0$. Отображение $x\mapsto\alpha$ определяет гомоморфизм кольца $\boldsymbol{R}[x]$ на поле $\boldsymbol{C}$, ядро которого совпадает с идеалом $(ax^2+bx+c)$. Искомый изоморфизм получается из теоремы о гомоморфизмах колец. **12.1.11.** а) При любых $m$; б) если $m$ не делится на 3; в) при $m\equiv\pm1\pmod 6$; г) при $m\equiv\pm2\pmod 6$; д) при любых $m$.

**12.1.12.** Если корни многочленов совпадают, то $P$ и $Q$ отличаются только скалярным множителем $Q=\alpha P$. Тогда $f(z)=(1-|\alpha|)|P(z)|$ не может принимать значения разных знаков. Обратно, пусть для определенности $f(z)\geqslant0$ для любых $z$. Тогда $\deg P\geqslant\deg Q$, так как иначе для достаточно больших по модулю $z$ $|Q(z)|>|P(z)|$. Пусть $m_0$ и $n_0$ — кратности корня $z_0$ многочленов $Q$ и $P$ соответственно. Если $m_0<n_0$, то

$$f(z)=|z-z_0|^{m_0}(|z-z_0|^{n_0-m_0}|P_0(z)|-|Q_0(z)|)$$

принимает отрицательные значения при $z$, близких к $z_0$. Следовательно, $n_0\leqslant m_0$ для любого корня $z_0$. Если многочлен $P$ имеет корни $z_1, \ldots, z_k$ кратностей $n_1, \ldots, n_k$, то такие же корни не меньшей кратности $m_1, \ldots, m_k$ имеет многочлен $Q$. Далее, $\deg P = n_1 + \ldots + n_k \leqslant m_1 + \ldots + m_k \leqslant \deg Q \leqslant \leqslant \deg P$. Следовательно, $n_1 = m_1, \ldots, n_k = m_k$ и других корней многочлен $Q$ не имеет.

## § 2

**12.2.1.** а) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)$; б) $(x^2+2x+ +2)(x-\pi)(x^2+2x+4)$; в) $(x^2-4x+13)^3$; г) $(x^2+1)^2(x^2+ +2x+2)$.

**12.2.2.** а) $(x+1)(x^2-x+2)$; б) $(x^2-\sqrt{2}x+2)(x^2+\sqrt{2}x+ +2)$; в) $(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$; г) $(x-1)\left(x^2+\left(\frac{1}{2}- -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x+1\right)\left(x^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x+1\right)$; д) $(x^2-2x+2)(x^2+ +2x+2)$; е) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)(x^2+\sqrt{3}x+3)$; ж) $(x^2-\sqrt{a+2}x+1)(x^2+\sqrt{a+2}x+1)$.

**12.2.3.** Для достаточно большого $x_0$ $f(x_0)$ и $f(0)$ имеют разные знаки. Так как $f(x)$ — непрерывная функция, то на отрезке $[0, x_0]$ она имеет хотя бы один корень. **12.2.4.** Из непрерывности функции $f$ либо $f(x)<x$ для любого $x$, либо $f(x)>x$ для любого $x$. В первом случае $f(f(x))<f(x)<x$ для любого $x$, во втором $f(f(x))>f(x)>x$ для любого $x$. Во всех случаях уравнение $f(f(x))=x$ не имеет действительных корней.

**12.2.5.** Многочлен $f(x)$ не имеет действительных корней нечетной кратности, так как иначе он менял бы знак. Следовательно, $f=g^2h$, где $h$ — многочлен, не имеющий действительных корней. Комплексные корни многочлена $h$ разделим на две группы, относя комплексно сопряженные в разные группы. Произведения линейных множителей, соответствующих корням каждой группы, образуют многочлены с сопряженными коэффициентами $r(x)+is(x)$ и $r(x)-is(x)$. Следовательно, $h=r^2+s^2$ и $f=(gr)^2+(gs)^2$.

**12.2.6.** Так как все коэффициенты многочлена $P(x)$ неотрицательные, то ни один из его корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не может быть положительным. Следовательно, многочлен имеет вид: $P(x)=(x+\beta_1)\ldots(x+\beta_n)$, где $\beta_i=-\alpha_i>0$, $i=1, \ldots, n$. Используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получаем неравенства $2+\beta_i=1+1+ +\beta_i \geqslant 3\sqrt[3]{\beta_i}$, $i=1, \ldots, n$. Учитывая, что по теореме Виета $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n=1$, получаем $P(2)=(2+\beta_1)\ldots(2+\beta_n)\geqslant 3^n\sqrt[3]{\beta_1\ldots\beta_n}= =3^n$.

**12.2.7.** Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — корни некоторого многочлена $f(x)\in \boldsymbol{C}[x]$, то по правилу дифференцирования произведения имеем $f'(x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{f(x)}{x-\alpha_k}$ или $\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{x-\alpha_k}$. Многочлен $P(x)$ имеет вид $P(x)=a(x^2+a_1^2)\dots(x^2+a_n^2)$, где $a, a_1, \dots, a_n$ — ненулевые действительные числа. Поскольку у многочлена $P(x)$ коэффициент при $x^2$ отличен от нуля, а при $x$ равен нулю, то $P'(x)$ имеет корень $x=0$ кратности 1. Пусть $P'(b+ci)=0$, $b^2+c^2\neq 0$. Если $P(b+ci)=0$, то $b+ci$ — чисто мнимое число. Если $P(b+ci)\neq 0$, то

$$0=\frac{P'(b+ci)}{P(b+ci)}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{b+i(c-a_k)}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{b-i(c-a_k)}{b^2+(c-a_k)^2},$$

где $a_{n+k}=-a_k$, $k=1, \dots, n$.

Следовательно, $b\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{b^2+(c-a_k)^2}=0$, т. е. $b=0$, и $b+ci$ — чисто мнимое число.

**12.2.8.** Условию удовлетворяют многочлены вида $x^4-10a^2x^2+9a^4$, где $a$ — произвольное действительное число, и только они. Корни таких многочленов $-3a$, $-a$, $a$, $3a$ составляют арифметическую прогрессию.

## § 3

**12.3.1.** Используя формулы Виета и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем:

$$x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-2x_1x_2(2(x_1+x_2)^2-x_1x_2)=$$
$$=p^4+\frac{1}{p^2}\left(2p^2+\frac{1}{2p^2}\right)=p^4+2+\frac{1}{2p^4}\geqslant 2+2\sqrt{p^4\frac{1}{2p^4}}=2+\sqrt{2}.$$

**12.3.2.** $x^2$, $x^2+x-2$. **12.3.3.** а) $p$ нечетно, а $q$ четно (также нечетно); б) $q\equiv 0 \pmod 3$, $p\equiv 2 \pmod 3$. **12.3.4.** Пусть $x_1$, $x_2$ — корни уравнения $x^2+ax+(b+1)=0$. Тогда $a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$ есть составное число.

**12.3.5.** Пусть $A$ — множество значений функции $P(x)$ на отрезке $[-1, 1]$. Тогда $A=[1+p+q, 1-p+q]$ при $p<-2$, $A=\left[q-\frac{p^2}{4}, 1-p+q\right]$ при $-2\leqslant p\leqslant 0$, $A=\left[q-\frac{p^2}{4}, 1+p+q\right]$ при $0\leqslant p\leqslant 2$, $A=[1-p+q, 1+p+q]$ при $p>2$.

**12.3.6.** $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=(\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2)\times(\alpha\beta+(\alpha+\beta)\delta+\delta^2)=(1+p\gamma+\gamma^2)(1-p\delta+\delta^2)=(\gamma^2+1+\gamma^2\delta^2+\delta^2)+p(\gamma-\delta-\delta\gamma^2+\gamma\delta^2)-p^2\gamma\delta=(\gamma+\delta)^2+p(\gamma-\delta)\times(1-\gamma\delta)-p^2=q^2-p^2$.

**12.3.7.** Предположим, что первое уравнение не имеет действительных корней. Тогда $p_1^2<4q_1$ и, в частности, $q_1>0$. Так как $p_1^2p_2^2=4(q_1^2+q_2^2+2q_1q_2)$, то $4p_2^2q_1>4(q_1^2+q_2^2+2q_1q_2)$ или $p_2^2q_1-4q_1q_2>(q_1-q_2)^2$ и $p_2^2-4q_2>(q_1-q_2)^2/q_1\geqslant 0$. Следовательно, второе уравнение имеет действительные корни.

**12.3.8.** а) Дискриминант уравнения равен $4(ab+ac+bc)^2-12abc(a+b+c)=2((ab-ac)^2+(ab-bc)^2+(ac-bc)^2)\geqslant 0$.

б) Если, например, $a=b$, то $f(a)=f(b)=0$. Если $a<b<c$, то $f(b)=(b-a)(b-c)<0$, а $f(c)>0$ и $f(a)>0$. Следовательно, $f$ имеет корни на интервалах $(a, b)$ и $(b, c)$.

**12.3.9.** Из неравенства, в частности, следует, что $p_1\neq p_2$. Квадратные трехчлены принимают одинаковое значение при $x=\frac{q_2-q_1}{p_1-p_2}$, причем это значение меньше нуля, действительно, $\left(\frac{q_2-q_1}{p_1-p_2}\right)^2+p_1\frac{(q_2-q_1)}{p_1-p_2}+q_1=\frac{(q_2-q_1)^2+(p_1-p_2)(p_1q_2-q_1p_2)}{(p_1-p_2)^2}<0$, поэтому оба трехчлена имеют действительные корни и между корнями каждого из них лежит корень другого.

**12.3.10.** а) $x_1=x_2=1$, $x_3=-2$; б) $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$, $x_3=2$; в) $-1$, $\frac{-5\pm 5i\sqrt{3}}{2}$; г) $i$, $i$, $-2i$; д) $-7$, $-1\pm i\sqrt{3}$; е) $-3$, $\frac{3\pm 5i\sqrt{3}}{2}$.

**12.3.11.** Пусть $x_1=u+v$, $x_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v$, $x_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v$, где $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $uv=-\frac{p}{3}$. Тогда $(x_2-x_1)(x_3-x_1)=3(u^2+v^2+uv)$, $x_3-x_2=\sqrt{3}i(v-u)$, $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=$

$$=-27(u^3-v^3)^2=-27((u^3+v^3)^2-4u^3v^3)=$$

$$=-27\left(q^2+4\frac{p^3}{27}\right)=-27q^2-4p^3.$$

**12.3.12.** а) $\frac{-1\pm\sqrt{-1\pm 2\sqrt{29}}}{2}$; б) $\pm\sqrt{2}$, $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}\pm i\sqrt{9+4\sqrt{3}}}{2}$, $\frac{-\sqrt{3}\pm i\sqrt{9-4\sqrt{3}}}{2}$.

**12.3.13.** $x^3$, $x^3+x^2-2x$, $x^3+x^2-x-1$, $x^3+\alpha x^2-\alpha^{-1}x+2\alpha^2$, где $\alpha$ — корень уравнения $\alpha^3+\alpha^2=\frac{1}{2}$. **12.3.14.** Условию удовлетворяют следующие тройки чисел: $(a, 0, 0)$, $a\in \boldsymbol{C}$, $(\varepsilon, 1, \varepsilon)$, $(\varepsilon^2, 1, \varepsilon^2)$, $(\varepsilon^2, -1, \varepsilon+1)$, $(\varepsilon, -1, \varepsilon+1)$, где $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

## § 4

**12.4.1.** Если $a_0=\ldots=a_{n-1}=0$, то $w=0$, $v=1$. Пусть $a_s$ — первый ненулевой член первой последовательности, тогда $w$ — четное число, если $a_sa_n>0$, и нечетное в противном случае. Во второй последовательности первым ненулевым числом будет также $a_s$, а последним $-a_n$, следовательно, число перемен знака во второй последовательности имеет противоположную четность и $v$ нечетно. Докажем, что $v \geqslant 0$. Действительно, пусть $k_1, \ldots, k_\omega$ — номера перемен знака в первой последовательности. Тогда во второй последовательности для каждого $r$ имеется хотя бы одна перемена знака в промежутке $k_r < i \leqslant k_{r+1}$, $r=1, \ldots, w-1$, и хотя бы одна перемена знака в промежутке $i \leqslant k_1$.

**12.4.2.** При $a=1$ утверждение прямо следует из задачи 12.4.1. Так как для любого положительного $a$ $w(f(ax)) = w(f(x))$, то общий случай сводится к случаю $a=1$ следующими равенствами:

$$w((a-y)f(y)) = w((a-ax)f(ax)) = w((1-x)f(ax))$$

и $w(f(x)) = w(f(ax))$.

**12.4.3.** Пусть $s$ — наименьший индекс, для которого $a_s \neq 0$. Тогда $a_s$ и $a_n$ имеют одинаковые знаки, иначе $f$ имел бы положительный корень (см. задачу 12.2.3). Следовательно, число перемен знака в последовательности коэффициентов четно.

**12.4.4.** Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — все положительные корни многочлена $f$. Тогда $f=(\alpha_1-x)\ldots(\alpha_k-x)Q(x)$. Пусть $w_1$ — число перемен знака в последовательности коэффициентов многочлена $Q(x)$, согласно задаче 12.4.3. $w_1$ — четное число. Согласно задаче 12.4.2 число перемен знака в последовательности коэффициентов многочлена $(\alpha_k-x)Q(x)$ равно $w_1+1+n_1$, где $n_1 \geqslant 0$ — четное число. Аналогично $w((\alpha_{k-1}-x)(\alpha_k-x)Q(x)) = w_1+2+n_1+n_2$, $n_2 \geqslant 0$ — четное число, $\ldots$ $w(f(x)) = w_1+k+(n_1+\ldots+n_k)$. Следовательно, $w-k = w_1+n_1+\ldots+n_k \geqslant 0$ есть четное число.

**12.4.5.** По правилу знаков Декарта $f(x)$ имеет ровно один положительный корень так же, как и $f(-x)=x^8+7x^6+9x^5-x^4-3$, следовательно, $f$ имеет также ровно один отрицательный корень и $f(0) \neq 0$. **12.4.6.** По правилу знаков Декарта число положительных корней не превосходит числа перемен знака последовательности из $k$ коэффициентов, которое не превосходит $k-1$. Отрицательные корни многочлена $f(x)$ являются положительными корнями многочлена $f(-x)$, поэтому их число также не превосходит $k-1$.

**12.4.7.** а) $f=x^3-3x-1$, $f_1=x^2-1$, $f_2=2x+1$, $f_3=1$; 3; б) $f=x^3-x+5$, $f_1=3x^2-1$, $f_2=2x-15$, $f_3=-1$; 1; в) $f=x^4-12x^2-16x-4$, $f_1=x^3-6x-4$, $f_2=3x^2+6x+2$, $f_3=x+1$, $f_4=1$; 4; г) $f=x^4+x^2-1$, $f_1=2x^3+x$, $f_2=-x^2+2$, $f_3=-x$, $f_4=-1$; 2; д) $f=x^4+4x^3-12x+9$, $f_1=x^3+3x^2-3$, $f_2=x^2+3x-4$, $f_3=-4x+3$, $f_4=1$; 0; е) см. 12.4.9; ж) при $a \neq 0$ $f=ax^2+bx+c$, $f_1=2ax+b$, $f_2=\frac{b^2-4ac}{4a}$. Если $b^2-$

$-4ac=0$, то один действительный корень. Если $b^2-4ac>0$, то два корня. Если $b^2-4ac<0$, нет корней. При $a=0$, $b\neq 0$ $f=bx+c$, $f_1=b$; один корень; з) $f=x^3+px+q$, $f_1=3x^2+p$, $f_2=-2px-3q$, $f_3=-4p^3-27q^2$. Если $-4p^3-27q^2>0$, то $p<0$ и $f$ имеет три корня. Если $-4p^3-27q^2<0$, то независимо от знака $p$ $f$ имеет один корень. Если $-4p^3-27q^2=0$, то $f$ и $f_1$ имеют общий корень $-\frac{3q}{2p}$ при $p\neq 0$ или 0 в противном случае.

**12.4.8.** а) $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$; б) $(-2, -1)$; в) $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(4, 5)$; г) $(-1, 0)$, $(0, 1)$. **12.4.9.** а) См. 12.4.8, б, корень $-1{,}9$; б) ряд Штурма: $x^4+2x^3+3x^2+2x-2$, $2x^3+3x^2+3x+1$, $-x^2-x+3$, $-2x-1$, $-1$, корни: $-1{,}5$; $0{,}5$.

## § 5

**12.5.1.** Для доказательства пункта в) разложим $f(x)$ по степеням $x-m$: $f(x)=f(m)+c_1(x-m)+\ldots+c_n(x-m)^n$. Подставим $\frac{p}{q}$ и домножим на $q^n$: $q^nf(m)+q^{n-1}c_1(p-mq)+\ldots+c_n(p-mq)^n=0$. Так как $p$ и $q$ взаимно просты, то $p-mq$ и $q^n$ также взаимно просты, поэтому $f(m)$ делится на $p-mq$.

**12.5.2.** а) 2; б) $-3$; в) $-3$, $\frac{1}{2}$; г) 1, $-2$, 3; д) $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$; е) рациональных корней нет; ж) двойные корни 1 и $-3$. **12.5.3.** По задаче 12.5.1 $p$ и $p-q$ одновременно нечетные числа. Следовательно, $q$ — четное число и не может равняться единице. **12.5.4.** Пусть $f(m_1)=f(m_2)=f(m_3)=1$. По задаче 12.5.1 три попарно различных целых числа $p-m_1q$, $p-m_2q$ и $p-m_3q$ являются делителями единицы и, следовательно, включаются в множество $\{-1, 1\}$.

**12.5.5.** В пунктах д), е) критерий Эйзенштейна применяется после разложения многочлена по степеням $x-1$. д) $(x-1)^4+3(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+3$; е) $(x-1)^{p-1}+\frac{p}{1!}(x-1)^{p-2}+\frac{p(p-1)}{2!}(x-1)^{p-3}+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}(x-1)^{p-4}+\ldots+p$. **12.5.6.** В пунктах а), б), в) после редукции по модулю три получается многочлен $x^3+x^2+x+2\in \mathbf{Z}_3[x]$, который не имеет корней в $\mathbf{Z}_3$ и поэтому неприводим. В пунктах в), г), д), е) провести редукцию по модулю 2 и воспользоваться задачами 11.1.7 и 11.1.9.

**12.5.7.** $m\neq 0$, и $\frac{n}{m}$ является кубом рационального числа.

**12.5.8.** Многочлен $x^4+\alpha x^2+\beta$ приводим в $\mathbf{Q}[x]$ тогда и только тогда, когда уравнение $y^2+\alpha y+\beta=0$ имеет рациональные корни $a$ и $b$ либо существуют рациональные числа $d$ и $c$, для которых $d^2=\beta$, $c^2=2d-\alpha$. В первом случае $x^4+\alpha x^2+\beta=(x^2-a)(x^2-b)$, во втором случае $x^4+\alpha x^2+\beta=(x^2+cx+d)(x^2-cx+d)$.

**12.5.9.** а) $(x^2-2)(x^2-3)$; б) $(x^2+2)^2$; в) $(x^2+2x+3)\times(x^2-2x+3)$; г) неприводимость многочлена следует из 12.5.8, так как в $\boldsymbol{Q}$ неразрешима система $z^2=16$, $y^2=2z-1$ и многочлен $u^2+u+16$ не имеет рациональных корней.

**12.5.10.** Пусть $f(0)$, $f(1)$, ...— простые числа. Многочлен $f(y)-f(x)$ делится на $y-x$ в $\boldsymbol{Q}[x, y]$, $f(y)-f(x)=(y-x)\times q(x, y)$. Для некоторого ненулевого целого $n$ $nf(y)-nf(x)=(y-x)nq(x, y)$, где $nq(x, y)$ имеет целые коэффициенты. Многочлен $f(x)$ может принимать одинаковые значения не более чем для $\deg f$ различных значений $x$. Поэтому найдется $x_0$, $0\leqslant x_0\in\boldsymbol{Z}$, для которого $f(x_0)$ не является делителем числа $n$. Тогда для всех чисел $y_k=x_0+kf(x_0)$, $k=0, 1, \ldots$, $nf(y_k)-nf(x_0)$ делится на $(x_0+kf(x_0))-x_0$ и, значит, на $f(x_0)$. Следовательно, $f(y_k)$ делится на $f(x_0)$ при $k=0, 1, \ldots$ ($f(x_0)$ простое). Так как все числа вида $f(y_k)$ также простые, то $f(y_k)=f(x_0)$ при всех $k=0, 1, 2, \ldots$, что невозможно.

**12.5.11.** По условию $p=f(0)$ — простое число, значит, $p\geqslant 2$. Выберем наименьшее натуральное число $y$, для которого $f(y)$ — составное число, и обозначим через $q$ наименьший простой делитель $f(y)$. Предположим, что $f(y)\leqslant p-2$. Тогда $q\leqslant\sqrt{f(y)}\leqslant\sqrt{(p-2)^2+(p-2)+p}<p$. Рассмотрим разность $f(y)-f(x)=(y-x)(x+y+1)$. Если $x$ пробегает значения $0, 1, 2, \ldots, y-1$, то $y-x$ пробегает значения $1, 2, \ldots, y$, а $x+y+1$ — значения $y+1, \ldots, 2y$. Поэтому в случае $q\leqslant 2y$ найдется $x$, $0\leqslant x<y$, для которого $f(y)-f(x)$ делится на $q$, и, значит, $f(x)$ делится на $q$. Но в силу выбора $y$ число $f(x)$ простое, поэтому $f(x)=q$, что невозможно, так как $q<p\leqslant x^2+x+p=f(x)$. Следовательно, $q>2y$ или $q\geqslant 2y+1$. Далее, $f(y)\geqslant q^2$, поэтому $y^2+y+p\geqslant 4y^2+4y+1$, т. е. $3y^2\leqslant p-3y-1<p$ и $y<\sqrt{\frac{p}{3}}$. Но тогда по условию $f(y)$ — простое число. Полученное противоречие показывает, что при $y\leqslant p-2$ число $f(y)$ не может быть составным.

**12.5.12.** Замечание. Неизвестно, существуют ли, кроме указанных шести, еще многочлены, удовлетворяющие условию задачи 12.5.11. **12.5.13.** Многочлен $f(x)=x^2+x+41$ (см. 12.5.12) принимает простые значения также при $x=-1, -2, \ldots, -40$. Действительно, $f(-x)=x^2-x+41=(x-1)^2+(x-1)+41=f(x-1)$. Тогда $f(x-40)$ принимает простые значения при $x=0, 1, \ldots, 79$. **12.5.14.** В кольце $\boldsymbol{Z}_2[x]$ $(1+x)^{2^n}=1+x^{2^n}$.

**12.5.15.** $1025=2^{10}+1$. В кольце $\mathbf{Z}_2[x]$ $(1+x)^{1025}=1+x+x^{1024}+x^{1025}$.

**12.5.16.** В кольце $\mathbf{Z}_2[x]$ $(1+x)^{2^k}f(x)=f(x)+x^{2^k}f(x)$. Степень любого одночлена в $f(x)$ строго меньше степени любого одночлена в $x^{2^k}f(x)$, поэтому если $w(f)$ — число нечетных коэффициентов многочлена $f$, то $w((1+x)^{2^k}f(x))=w(f)+w(x^{2^k}f)=2w(f)$.

**12.5.17.** Индукция по $r$. Пусть $\alpha_0\neq 0$, тогда $(1+x)^s=(1+x)^{2^k}(1+x)^m$, где $m=\alpha_1 2^{k-1}+\ldots+\alpha_k$. Из 12.5.16 следует, что $w((1+x)^s)=2w((1+x)^m)$, а по предположению индукции $w((1+x)^m)=2^{r-1}$.

**12.5.18.** Используйте бином Ньютона и задачу 12.5.17. **12.5.19.** Индукция по $i_n$, основание индукции очевидно. Обозначим $P(x)=(1+x)^{i_1}+\ldots+(1+x)^{i_n}$, $w(P)$ — число нечетных коэффициентов многочлена $P$. Выберем $k$ так, чтобы $2^k\leqslant i_n<2^{k+1}$. Возможны два случая:

1) $2^k\leqslant i_1<\ldots<i_n<2^{k+1}$. Тогда $P(x)=(1+x)^q\times\times((1+x)^{i_1-q}+\ldots+(1+x)^{i_n-q})$, где $q=2^k$. По задаче 12.5.16 и по предположению индукции $w(P)=2w((1+x)^{i_1-q}+\ldots+(1+x)^{i_n-q})\geqslant 2w((1+x)^{i_1-q})=w((1+x)^{i_1})$.

2) $0\leqslant i_1<\ldots<i_l<2^k\leqslant i_{l+1}<\ldots<i_n<2^{k+1}$. Тогда $P(x)=f(x)+(1+x)^q g(x)$, где $f(x)=(1+x)^{i_1}+\ldots+(1+x)^{i_l}$, $q=2^k$. Докажем, что $w(P)\geqslant w(f)$, действительно, если коэффициент при $x^s$ в многочлене $f$ нечетный, а в многочлене $P$ четный, то коэффициент при $x^s$ в многочлене $(1+x)^q g$ обязан быть нечетным, следовательно, в многочлене $P$ нечетным является коэффициент при $x^{q+s}$ (см. 12.5.16). Далее, по предположению индукции $w(f)\geqslant w((1+x)^{i_1})$.

**12.5.20.** Используя редукцию $\mathbf{Z}[x]\to\mathbf{Z}_p[x]$, проведите доказательство аналогично задаче 12.5.17.

## § 6

**12.6.1.** а), б) Не являются приводимыми, так же как и не являются неприводимыми; в) неприводимы над любым полем; г), д) приводимы над $\mathbf{C}$, могут быть как приводимы, так и неприводимы над полями $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_2$. **12.6.2.** В $\mathbf{C}[x]$ неприводимыми являются многочлены первой степени, и только они, в $\mathbf{R}[x]$ неприводимыми являются только все многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. **12.6.3.** $x^n+2$. **12.6.4.** Нет. Неприводимый многочлен имеет положительную степень и, значит, имеет хотя бы один комплексный корень.

**12.6.5.** Нет. Если $f$ и $g$ взаимно просты в $\mathbf{Q}[x]$, то существуют $u$, $v\in\mathbf{Q}[x]$, такие, что $1=uf+vg$. Если $c$ — общий комплексный корень $f$ и $g$, то $1=u(c)f(c)+v(c)g(c)=0$ в поле $\boldsymbol{C}$. **12.6.6.** Нет, так как он взаимно прост со своей производной. **12.6.8.** Воспользоваться формулами 12.6.7.

**12.6.10.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; в) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}$; г) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$; д) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$; е) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; ж) $\sqrt{1+2\sqrt{1+\sqrt{2}}}\times$ $\times(2\sqrt{1+\sqrt{2}}-1)(4\sqrt{2}-3)$; з) $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)^2$; и) с помощью алгоритма Евклида находим многочлены $u(x)$ и $v(x)$, такие, чтобы $u(x)(x+1)+v(x)(x^3-3x+1)=d(x)$, где $d(x)=$ $=$ НОД $(x+1,\ x^3-3x+1)$: $d(x)=3$, $v(x)=1$, $u(x)=-x^2+$ $+x+2$. Получаем $(-\alpha^2+\alpha+2)(\alpha+1)=3$, откуда $\frac{\alpha}{\alpha+1}=$ $=\frac{\alpha}{3}(-\alpha^2+\alpha+2)=\frac{\alpha^2-\alpha+1}{3}$, так как $\alpha^3=3\alpha-1$; к) $17\alpha^2-$ $-3\alpha+55$; л) $-3\alpha^3+8\alpha^2-10\alpha+3$; м) полагаем $\alpha=\sqrt[3]{2}$ и решаем, как в и): $2\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}-1$.

**12.6.11.** а) $x^2+1$; б) $x-i\sqrt{2}$; в) $x^2-2$; г) $x^2+x+1$; д) $x^4-2$; е) $x^2-\sqrt{2}$. **12.6.12.** а) $x^4-10x^2+1$; б) $x^6+2x^3-1$; в) $x^9-15x^6-87x^3-125$; г) $x^8-40x^6+352x^4-960x^2+576$.

**12.6.13.** а) Из $\lambda=\alpha^2+\alpha+1$ получим: $\lambda\alpha=\alpha^3+\alpha^2+\alpha=$ $=\alpha^2+2\alpha+1$, $\lambda\alpha^2=\alpha^3+2\alpha^2+\alpha=2\alpha^2+2\alpha+1$, откуда $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$, т. е. $\lambda$ есть корень многочлена $x^3-5x^2+4x-1=0$; б) $x^3-7x^2+3x-1$; в) $x^3-x^2-2x+1$, здесь $\alpha$ и $\lambda=2-\alpha^2$ — корни одного и того же многочлена.

**12.6.14.** Числа $a\pm\alpha$, $a\alpha$, $\frac{\alpha}{a}$, $\sqrt[n]{\alpha}$, $\alpha^n$ трансцендентны. Числа $\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$, $a^n$, $a\pm b$, $ab$ алгебраические. Числа $\alpha\pm\beta$, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ могут оказаться как алгебраическими, так и трансцендентными.

**12.6.15.** а) 4; б) 3; в) 2; г) 1. **12.6.16.** а) $1, \sqrt{2}$; б) $1, \sqrt[5]{2}$, $\sqrt[5]{4}, \sqrt[5]{8}, \sqrt[5]{16}$; в) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$; г), д) $1, i$; е) 1. **12.6.17.** а) Нет; б) $n=1, 2, 3, 6$. **12.6.18.** Алгебраически замкнуты $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}(i)$ и поле алгебраических чисел.

**12.6.19.** а) 1 или 2; б) 1; в) любую.

**12.6.20.** Если бы корень $\alpha$ можно было получить из рациональных чисел с помощью указанных пяти операций, то существовала бы цепочка расширений полей $\boldsymbol{Q}=F_0<F_1<$ $<\ldots<F_n=F$, в которой каждое расширение имеет степень 2, и $\alpha\in F$. Тогда $\boldsymbol{Q}<\boldsymbol{Q}(\alpha)<F$ и $[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}][F:\boldsymbol{Q}(\alpha)]=[F:\boldsymbol{Q}]$. Так как $[F:\boldsymbol{Q}]$ есть степень двойки, то число $n=[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]$ (степень многочлена) также должно быть степенью двойки.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

**Глава 11. МНОГОЧЛЕНЫ**



Учебное издание

**КУЛИКОВ ЛЕОНИД ЯКОВЛЕВИЧ,**
**МОСКАЛЕНКО АЗА ИРМОВНА,**
**ФОМИН АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ**

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ**

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Т. А. Бурмистрова, Л. М. Котова*
Младший редактор *М. К. Кузин*
Художник *П. Т. Грицюк*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технический редактор *Т. Е. Молозева*
Корректор *Н. В. Уварова*

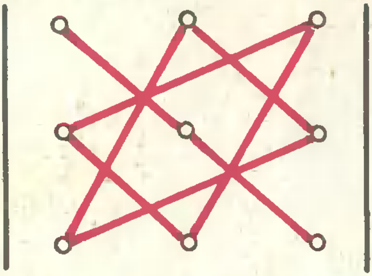
**ИБ № 12 629**

Сдано в набор 18.09.91. Подписано к печати 25.08.92. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бум. офсетная № 2. Гарнит. Литературная. Печать офсетная. Усл. печ л. 15,12. Усл. кр.-отт. 15,53. Уч.-изд л. 14,89. Тираж 26 000 экз. Заказ 1209.

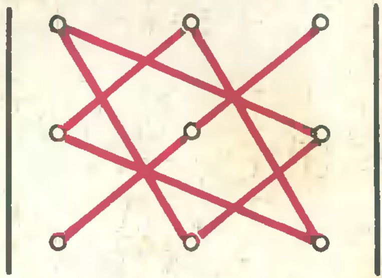
Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и информации Российской Федерации 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Отпечатано с диапозитивов Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината Министерства печати и информации Российской Федерации 410004, Саратов, ул Чернышевского, 59, на ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Министерства печати и информации Российской Федерации 142300, г Чехов Московской области

## Определитель третьего порядка



+



−

## Определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (\alpha_i - \alpha_j)$$

## Формулы Виета

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

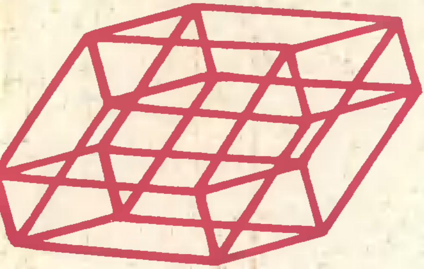
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

03116 / 3500-



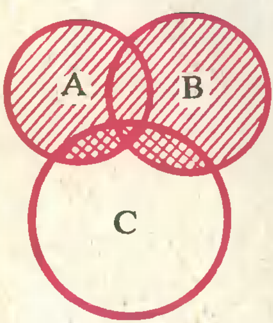
**Четырехмерный куб**

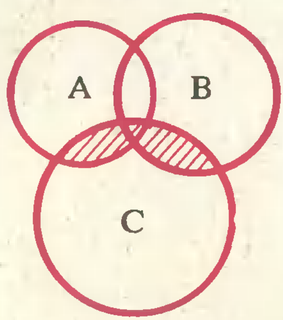
**Треугольник Паскаля**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024

$((p\to q)\wedge p)\to q$ modus ponens

**Диаграммы Эйлера-Венна**




$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$