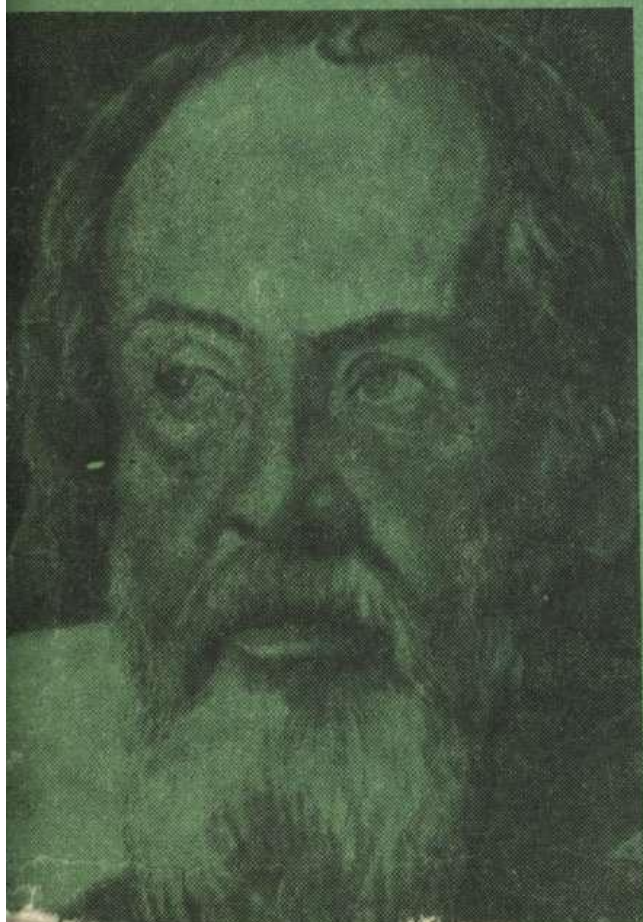
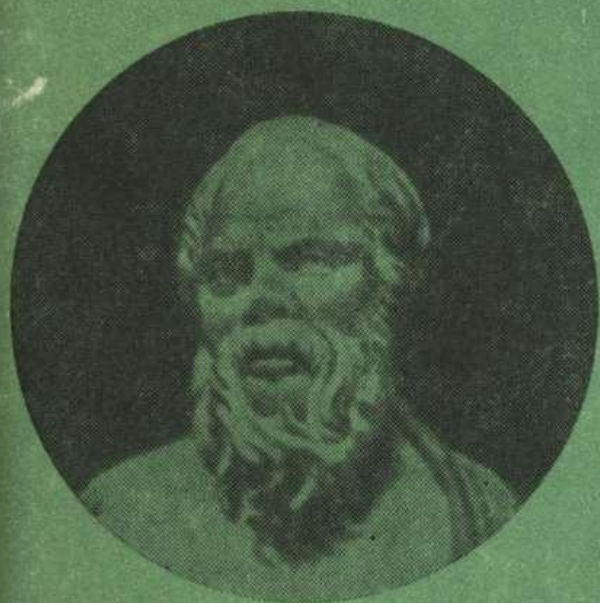
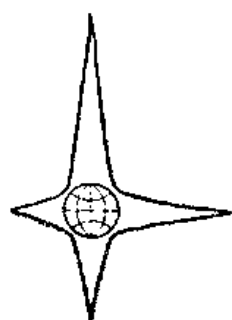


В  
МИРЕ  
НАУКИ  
И  
ТЕХНИКИ

АЛЬФРЕД РЕНЬИ

# ДИАЛОГИ О МАТЕМАТИКЕ





ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«МИР»

# DIALOGUES ON MATHEMATICS

ALFRÉD RÉNYI

*Mathematical Institute Hungarian Academy of Sciences*

HOLDEN DAY

San Francisco — Cambridge — London — Amsterdam

**АЛЬФРЕД РЕНЬИ**

**ДИАЛОГИ**

**О**

**МАТЕМАТИКЕ**

Перевод с английского  
Д. Б. Гнеденко и Е. А. Масловой

Под редакцией и с предисловием акад. АН УССР  
Б. В. Гнеденко

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1969



## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к русскому изданию . . . . .	5
Диалог о сущности математики . . . . .	21
Диалог о применениях математики . . . . .	43
Диалог о языке книги природы . . . . .	61
Послесловие . . . . .	92

---

АЛЬФРЕД РЕНЬИ

### Диалоги о математике

Редактор Т. И. Шилейко  
Художник М. Ю. Бурджелен  
Художественный редактор Ю. Л. Максимов  
Технический редактор Н. Д. Толстякова  
Корректор К. Л. Водяницкая

Сдано в производство 11/IV-69 г. Подписа-  
но к печати 24/VII 69 г. Бум. тип № 1.  
 $84 \times 108 \frac{1}{32} = 1,5$ . Усл. печ. л. 5,04. Уч.-изд. л.  
4,99. Изд. № 12/5219. Цена 25 коп. Зак. 236.

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
Москва, 1-й Рижский пер., 2

---

Ярославский полиграфкомбинат Главполи-  
графпрома Комитета по печати при Совете  
Министров СССР  
Ярославль, ул. Свободы, 97

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Диалоги о математике, предлагаемые *Книга и ее автор* вниманию советских читателей, первоначально опубликованные в некоторых физических и философских журналах, впоследствии составили книжку, изданную на венгерском, немецком, английском и других европейских языках. И статьи и сборник вызвали большой интерес среди широких кругов читателей не только благодаря оригинальной форме изложения, но и вследствие довольно глубокой трактовки методологических вопросов математики. Книгу читали не только математики, физики, биологи, инженеры, но и школьники. Каждой категории читателей она давала пищу для размышлений. В ней читатели находили ответы на многие принципиальные вопросы, возникавшие при встречах и беседах автора с учеными — физиками, математиками и биологами.

Почти двадцать пять столетий математика существует не как сборник практических рецептов, а как дедуктивная наука, в которой огромное количество содержательных результатов выводится логическим путем из ничтожного количества предложений — аксиом. Естественно, что и в самой математике и в философии с древних времен возникали и обсуждались многочисленные животрепещущие проблемы:

Каков предмет математики?

Каково ее отношение к действительности?

Как возникают ее понятия?

Каким образом математическое абстрагирование естественнонаучной или инженерной проблемы позволяет проникать глубже и точнее в течение явлений, чем непосредственное их наблюдение и экспериментальное изучение?

Какое значение имеет разработка специфического научного языка для развития самой математики и ее применений к реальным проблемам?

Все эти вопросы, а также многие другие продолжают волновать человечество и сегодня. Как и две тысячи лет назад, представители различных философских направлений отвечают на них по-разному.

Альфред Реньи, будучи убежденным материалистом, превосходным знатоком естествознания и современной математики, дает на многие философские вопросы математики определенные и обоснованные ответы. Особую силу воздействия его «Диалоги» приобретают из-за формы изложения, которая, к сожалению, почти полностью забыта современными авторами. Реньи не поучает читателя, не стремится просто вложить в него собственные мысли, а как бы беседует с ним, заранее предугадывает возможные сомнения и возражения и вкладывает их в уста собеседников. В результате читатель сам становится участником диалога — предмет изложения перестает быть чем-то внешним, навязываемым ему извне; читатель начинает воспринимать обсуждаемые проблемы как свои внутренние, близкие его интересам.

Форма диалога, так удачно использовавшаяся еще в древности Платоном, а позднее Галилеем и многими другими учеными, писателями и философами, оказалась хорошо приспособленной и к обсуждаемым проблемам. Благодаря литературному дарованию автора и прекрасному знанию им литературы и истории книжка получилась весьма интересной.

Имена собеседников в каждом из диалогов знакомы нам из истории науки. Однако в диалогах не нужно искать абсолютной исторической точности. История служит лишь канвой, фоном, на котором так естественно развивается изложение материала. Исторический фон позволяет держать читателя в постоянном напряжении. И никакого значения не имеет то обстоятельство, что царь Гиерон уже не жил в те дни, когда Рим напал на маленькие Сиракузы. Несомненно, Архимед и Гиерон не вели беседы, о которой мы читаем во втором диалоге. Но она могла бы состояться, поскольку ее содержание, а также высказываемые Архимедом идеи и положения относительно сущности прикладной математики и роли математики в человеческом познании близки духу его творчества.

Сейчас больше, чем когда-либо в прошлом, важно выяснить особенности прикладной математики. К сожалению, даже среди весьма способных математиков, интересующихся лишь абстрактно-теоретическими вопросами, существует своеобразное презрение к занятиям математика-прикладника. Они полагают, что прикладными вопросами способны заниматься лишь бесталанные люди, которые не могут дать ничего полезного абстрактной математике. Это ошибочная и, несомненно, вредная точка зрения.

В диалоге о применениях математики Архимед высказывает очень современные нам и важные мысли о месте и роли математика-прикладника как в познании природы, так и в развитии самой математики. Математик-прикладник — не узкий ремесленник, а творец очень высокого ранга. Ему необходимо не только знакомство с математикой, но и глубокое знание предмета прикладного исследования. Он должен создать математическую модель изучаемого явления и найти, а в ряде случаев просто изобрести новые методы математического исследования. Последние годы дают нам многочисленные примеры, когда вопросы практики, даже очень узкие и недостаточно четко сформулированные, приводили к созданию новых областей математических исследований и к глубокому преобразованию наших взглядов на содержание и задачи математики. К этому вопросу мы еще вернемся.

В первом диалоге собеседником Сократа — неперменного участника всех диалогов древнего философа Платона — является молодой человек по имени Гиппократ. Из курса элементарной геометрии читатель, несомненно, знает о гиппократовых луночках. Гиппократ желает углубить свои знания, и Сократ постепенно открывает ему предмет математических исследований, пути образования математических понятий, истоки которых находятся в непосредственных восприятиях окружающего нас мира. Собеседники затрагивают много острых вопросов, которые возникают как в среде учащихся, так и у тех, кто в своей работе использует математические методы. Например, почему математическое абстрагирование — казалось бы, уход от рассмотрения непосредственного предмета исследования — позволяет узнать о некоторых сторонах изучаемого объекта больше и глубже, чем без этого неперменного условия использования математики. Особенно ак-



туален в наше время вопрос, который Сократ задаст себе: «...почему ты думаешь, Сократ, что эти методы и доказательства могут быть полезны только для изучения чисел и геометрических форм? Почему ты не попытаешься убедить своих сограждан применять те же самые высокие логические стандарты в других областях знания, например в философии и политике, при обсуждении проблем повседневной личной и общественной жизни?». В настоящее время, когда происходит математизация наших знаний, этот вопрос приобретает специальный интерес. Современная организация производства и торговли, биология и медицина, экономика и военное дело уже не могут оставаться на позициях полуинтуитивных представлений, неполно определенных понятий и нечетко сформулированных вопросов. Когда перед конструктором стоит задача — создать автомат для управления технологическим процессом, для ее решения недостаточно общих идей и представлений. Машина не понимает, что значит фраза «варить сталь до готовности». Необходимы точные указания относительно условий прекращения процесса. Точно так же для автомата, который должен не допускать повышения температуры среды выше заданной границы, недостаточно одного указания о прекращении нагревания в случае аварийной ситуации. С требованиями точных количественных методов описания самых разнообразных процессов приходится сталкиваться буквально во всех областях человеческой деятельности. Крайне важно тщательно анализировать особенности математического метода, особенности математического подхода к изучению явлений природы и процессов, с которыми сталкиваются на практике.

Третий диалог дополняет и первый и второй. В нем автор останавливается на важных идеях: о необходимости разработки математических методов изучения движения; о построении математической теории случайных явлений; о невозможности исследования законов природы в отрыве от математики и ее специфического языка. Мысль Галилея о том, что великая книга природы написана на математическом языке и потому прочесть ее может только тот, кто знаком с ее знаками, за столетия, прошедшие со времени Галилея, нашла множество блестящих подтверждений. Сейчас важно подчеркнуть, что по мере возникновения новых задач познания природы само содержание математики не могло оставаться неизменным. Она, как

живой организм, развивалась и развивала новые свои ветви. На примере начал теории вероятностей об этом рассказывает Галилей в третьем диалоге.

Действительный член Академии наук Венгерской Народной Республики Альфред Реньи — один из виднейших представителей современной математики в Венгрии. Его научные интересы в первую очередь относятся к теории вероятностей и теории чисел, а также приложениям математики к физике и инженерному делу. В течение многих лет он руководит Институтом математики Академии наук Венгерской Народной Республики и является профессором Будапештского университета. Вскоре после окончания второй мировой войны Реньи почти год работал в Ленинграде под руководством академика Ю. В. Линника.

#### *Математика и история*

За тысячелетия своего существования математика прошла большой и сложный путь, на протяжении которого неоднократно изменялся ее характер, содержание и стиль изложения. От первичных представлений об отрезке прямой как кратчайшем расстоянии между двумя точками, от предметных представлений о целых числах в пределах первого десятка математика пришла к образованию многих новых понятий, позволивших описывать сложнейшие явления природы и технические процессы. Из примитивного искусства счета с помощью камешков, палочек и зарубок математика сформировалась в обширную научную дисциплину с собственным предметом изучения и специфическим методом исследования. Она выработала собственный язык, очень экономный и точный, который оказался исключительно эффективным не только внутри математики, но и в многочисленных областях ее применений.

Первичные математические представления были в обиходе у людей на самых ранних стадиях развития человеческого общества. Смутные, неоформившиеся понятия «больше», «меньше», «равно», относящиеся к конкретным предметам, представления о кратчайшем расстоянии между двумя точками, выработанные в результате длительного каждодневного опыта, вооружали первобытного человека полезными сведениями. Вероятно, представления о неравенстве числа предметов, неравенстве расстояний и размеров появились у людей раньше, чем представления о числе предметов. Формирование идеи счета в пределах

единиц относится к тому периоду истории человечества, от которого не сохранилось никаких письменных памятников. Это вполне естественно, так как речь, искусство счета, первичные навыки мышления относятся к временам гораздо более ранним, чем появление самой несовершенной письменности. Судить о развитии математических понятий на ранней стадии человеческого общества удастся лишь на основе косвенных данных — наблюдений над некоторыми племенами в XVI—XIX вв., изучения особенностей живых и мертвых языков, являющихся не только средством общения, но и памятником духовной культуры прошлого.

Хозяйственные потребности вынуждали людей совершенствовать правила счета, измерения расстояний, а также расширять объем математических понятий. Однако в течение долгого времени накопленные сведения были в какой-то мере рецептурными и не осознавались как самостоятельная ветвь знаний. Интересно отметить, что на этой ступени развития математические сведения различных народов, даже не общавшихся между собой, поразительно близки по форме и по содержанию. Правила вычисления площадей и объемов Древнего Вавилона и Древнего Египта весьма похожи на аналогичные правила Древнего Китая. Свойство сторон прямоугольного треугольника, известное под названием теоремы Пифагора, было найдено для многих частных случаев треугольников с целочисленными сторонами задолго до Пифагора, еще в Древнем Вавилоне и в Древнем Китае. На этот вопрос дан вразумительный ответ в беседе Сократа с Гиппократом (первый диалог Реньи).

Так в течение тысячелетий многочисленными неизвестными тружениками закладывался фундамент современной математики. Постепенно люди научились выполнять арифметические действия с целыми числами, а затем и с рациональными дробями, научились правильно вычислять площади довольно сложных фигур и объемы простейших тел. Уже в ту пору люди изобрели вспомогательные средства для упрощения взаимных расчетов. Пусть эти изобретения очень примитивны, но их создание стало важным элементом человеческой культуры. И если теперь человечество знает гораздо больше и мечтает о решении проблем, которые совсем недавно казались фантастическими,

то в этом велика заслуга предшествующих поколений, на опыте которых базируются все наши знания.

Примитивный математический аппарат счета и измерения, вызванный к жизни несложными потребностями охотника, скотовода, земледельца и воина тех далеких времен, оказался явно недостаточным, когда начала развиваться астрономия и далекие путешествия потребовали разработки методов ориентации в пространстве. Жизненная практика, в том числе и практика развивающихся естественных наук, стимулировала дальнейшее развитие математики. И действительно, в течение каких-нибудь двухсот лет в Древней Греции был сделан принципиально новый шаг — математика стала формироваться как дедуктивная наука. Из сборника рецептов, которыми следовало пользоваться в тех или иных житейских ситуациях, она превратилась в логически стройную систему научных знаний. В культурном развитии человечества произошел скачок, равный которому трудно найти на протяжении всей истории научных знаний. В первом диалоге Реньи математика находится на довольно высоком логическом уровне и истоки математических понятий уже не так ясны.

Интересно отметить, что крупнейший прогресс математики в Древней Греции не замедлил сказаться на математическом образовании. В Древнем Вавилоне и Древнем Египте математика преподавалась просто как система практических навыков, крайне важных для будущей работы государственного чиновника. В сохранившихся ученических «тетрадках» того времени нет даже намеков на вывод изучаемых математических правил: все основывалось на зазубривании определенной последовательности действий. Иное положение создалось в Древней Греции. Там были школы, в которых будущие ремесленники обучались математическим сведениям, необходимым для их повседневной деятельности, или, как выражался Платон, для «бытовых нужд». Существовали также школы, в которых математика изучалась как развитая в логическом отношении наука. Она, как писал Платон в своих диалогах, должна быть направлена на познание не «бытного», а «сущего». Человечество осознало важность математического познания как такового, безотносительного к задачам конкретной практики. Несомненно, что на такой подход оказали значительное влияние взгляды пифагорей-

цев, согласно которым законы природы выражаются числами. Именно к этому времени естественно отнести подразделение математики на «чистую» и «прикладную».

Предпосылки к новому бурному всплеску и последующему все возрастающему прогрессу математических знаний создала эпоха морских путешествий и развития мануфактурного производства. Эпоха Возрождения, давшая миру изумительный расцвет искусства, вызвала также развитие точных наук, в том числе и математики, появилось учение Коперника. Церковь яростно боролась с прогрессом естествознания. Именно к этому моменту приурочен третий диалог Реньи. Для математики этот период можно и должно считать началом многих важных событий. Прежде всего Галилео Галилей впервые поставил изучение движения на научные основы. Это было той искрой, от которой впоследствии вспыхнуло развитие математического анализа и всей современной математики. В значительной мере к Галилею следует отнести и начало изучения случайных явлений. В его трудах имеются далеко продвинутые идеи и результаты теории ошибок наблюдений, существенные для экспериментальных наук. К сожалению, до последнего времени историки науки проходили мимо этого факта.

Последние три столетия внесли в математику много новых идей и результатов, а также возможностей для более полного и глубокого изучения явлений природы, поэтому даже краткое их описание потребовало бы слишком много места. Содержание математики постоянно меняется. Это естественный процесс, поскольку по мере изучения природы, развития техники, экономики и других областей знания возникают новые задачи, для решения которых недостаточно прежних математических понятий и методов исследования. Возникает потребность в дальнейшем совершенствовании математической науки, расширении арсенала ее средств исследования.

#### *Прикладная математика*

Астрономы и физики раньше других поняли, что математические методы для них не только способы вычислений, но и один из основных путей проникновения в существо изучаемых ими закономерностей. В наше время математизация знаний совершает своеобразный победный марш. В результате многие науки и области знания, до самого последнего времени находившиеся вдали от использова-



ния математических средств, теперь усиленно стремятся наверстать упущенное. Причина такого внимания к математике, конечно, не в преходящей моде, а в том, что качественное изучение явлений природы, техники, экономики зачастую оказывается недостаточным. Как можно создать автоматически работающую вычислительную машину, если имеются только общие представления о длительности последствий передаваемых импульсов на элементы? Как можно автоматизировать процесс выплавки стали или крекинга нефти без знания точных количественных закономерностей этих процессов? Вот почему автоматизация вызывает дальнейшее развитие математики, оттачивание ее методов для решения огромного числа новых и трудных проблем.

Роль математики в развитии других наук и в практических областях деятельности человека невозможно установить на все времена. Изменяются не только те вопросы, которые требуют скорейшего разрешения, но и характер решаемых задач. Ленинский тезис об отсутствии абсолютного знания, о постепенном приближении наших сведений о природе к истинным закономерностям, господствующим в ней, относится и к математическому знанию. Создавая математическую модель реального процесса, мы неизбежно упрощаем его и изучаем лишь приближенную его схему. По мере уточнения наших знаний и выяснения роли ранее не учтенных факторов удается сделать более полным математическое описание процесса. Процедуру уточнения нельзя ограничить, как нельзя ограничить развитие самого знания. Математизация науки состоит не в том, чтобы исключить из процесса познания наблюдение и эксперимент. Они являются необходимыми составными частями полноценного изучения явлений окружающего нас мира. Смысл математизации знаний состоит в том, чтобы из точно сформулированных исходных предпосылок выводить следствия, доступные непосредственному наблюдению; с помощью математического аппарата не только описывать установленные факты, но и предсказывать новые закономерности, прогнозировать течение явлений, а тем самым получать возможность управления ими. Если эти предсказания оправдываются, теория укрепляет свое положение и продолжает дальнейшие выводы. Но рано или поздно, поскольку математическая теория того или иного реального явления

всегда приближенна, обязательно наступает момент, когда какое-то следствие теории не подтверждается экспериментом или какой-то новый факт не объясняется теорией. Значит, математическая теория оказалась недостаточной. Необходим пересмотр исходных предпосылок теории, изменение положений, которые раньше казались незыблемыми. Такой пересмотр приводит к новой теории, способной шире и глубже проникнуть в структуру изучаемых явлений.

Математизация наших знаний состоит не только и не столько в том, чтобы использовать готовые математические методы и результаты, а в том, чтобы начать поиски того специфического математического аппарата, который позволил бы наиболее полно описывать интересующий нас круг явлений, выводить из этого описания новые следствия, чтобы уверенно использовать особенности этих явлений на практике. Так случилось в период, когда изучение движения стало насущной необходимостью, а Ньютон и Лейбниц завершили создание начал математического анализа. Этот математический аппарат до сих пор является одним из основных орудий прикладной математики. В наши дни разработка теории управления процессами привела к ряду выдающихся математических исследований, в которых заложены основы оптимального управления детерминированными и случайными процессами.

Двадцатый век резко изменил представления о прикладной математике. Если раньше в арсенал средств прикладной математики входили арифметика и элементы геометрии, то восемнадцатый и девятнадцатый века добавили к ним мощные методы математического анализа. В наше время трудно указать хотя бы одну значительную ветвь современной математики, которая в той или иной мере не находила бы применений в великом океане прикладных проблем. По-видимому, разделение математики на прикладную и теоретическую потеряло смысл. Вероятно, не математика, а математики разделяются по своим интересам и творческой направленности на прикладников и теоретиков. Одни считают своей основной задачей преодоление трудностей, связанных с решением задач, которые не поддавались усилиям прежних поколений. Эти задачи интересуют их сами по себе, вне связи не только с прикладными вопросами, но и прогрессом математики в целом. Других волнует построение математики

в ее основах. Они стремятся так отшлифовать центральные понятия математики, чтобы охватить ими возможно более широкий круг задач. Наконец, есть математики, для которых математика и ее методы существуют не ради самих себя, а в качестве орудия познания законов природы. Конкретная практическая задача для них — лишь источник размышлений; решая ее, они разрабатывают общие приемы, позволяющие освещать широкий круг различных вопросов. Такой подход особенно важен для прогресса науки. От этого выигрывает не только данная область приложений, но и все остальные, а в первую очередь — сама теоретическая математика. Именно такой подход к математике заставляет искать новые методы, новые понятия, способные охватить новый круг проблем, он расширяет область математических исследований. Последние десятилетия дают нам множество примеров подобного рода. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить появление в математике таких теперь центральных ее ветвей, как теория случайных процессов, теория информации, теория оптимального управления процессами, теория массового обслуживания, ряд областей, связанных с электронными вычислительными машинами.

Математик-прикладник обязан владеть существом реальной задачи, уметь выбрать математический инструмент, который лучше всего подходит к ней, а если такого инструмента еще не существует, то разработать его, построить разумную математическую модель изучаемого процесса, вывести из нее необходимые следствия и найти их истолкование. Настоящий математик-прикладник не может ограничиваться каким-либо одним методом и втискивать реальную проблему в известный ему математический аппарат; для каждой реальной проблемы он должен находить те математические средства, которые наиболее соответствуют ее природе. И прав Архимед, когда во втором диалоге говорит, что по сравнению с чистыми геометриями он сделал шаг дальше, указав также на нематематические следствия из теоремы о параболе.

Я убежден, что сейчас больше, чем когда бы то ни было, мы должны обратить внимание на воспитание молодых математиков, которые в математическом аппарате, в математических методах и в результатах приучились бы видеть не просто логически стройную систему знаний, но и возможности их использования для проникновения в

тайны природы, управления техническими системами, лучшего использования материальных ресурсов. Очень важно — и это должно быть главной идеей математического образования, — чтобы возможно больше молодых математиков были способны сделать этот «следующий шаг», о котором говорит Архимед в книге Реньи.

*Математика —  
язык науки*

По-видимому, впервые четко и ярко о математике как языке науки сказал почти четыреста лет назад великий Галилео Галилей: «Философия написана в грандиозной книге, которая открыта всегда для всех и каждого, — я говорю о природе. Но понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, а знаки ее — математические формулы». Несомненно, что с тех пор наука добилась огромных успехов и математика была ее верной помощницей. Без математики многие успехи науки и техники были бы просто невозможны. Недаром один из крупнейших физиков современности В. Гейзенберг так охарактеризовал место математики в современной теоретической физике: «Первичным языком, который вырабатывают в процессе научного усвоения фактов, является в теоретической физике обычно язык математики, а именно математическая схема, позволяющая физикам предсказывать результаты будущих экспериментов»<sup>1</sup>.

Для общения и для выражения своих мыслей люди создали величайшее средство — живой разговорный язык и письменную его запись. Язык не остается неизменным — он приспосабливается к условиям жизни, обогащается словарным запасом, вырабатывает новые средства для выражения тончайших оттенков мысли. И тем не менее в ряде случаев он оказывается непригодным. В различных областях человеческой деятельности вырабатываются как бы собственные языки, специально приспособленные для точного и краткого выражения мыслей, свойственных определенному виду деятельности. При выдаче рабочего задания на изготовление нового изделия никогда не ограничиваются только словесным описанием: для уточнения размеров, формы и иных особенностей изделия необходим еще чертеж. В какой-то мере чертеж является свое-

---

<sup>1</sup> В. Гейзенберг, Физика и философия, ИЛ, М., 1963, стр. 140—141.

образным языком, приспособленным для передачи той информации, которую должен сообщить исполнителю конструктор. Он не допускает разночтений и позволяет в наглядной форме передать большое количество сведений, необходимых для успешного выполнения работы. Эта форма общения несравненно удобнее обычной словесной, поскольку словесное описание мало-мальски сложного конструктивного задания было бы настолько громоздким, что в нем мог бы запутаться сам автор. Графическое задание прочтет любой специалист, даже не владеющий русским языком.

В науке особенно важна ясность и точность выражения мыслей. Язык науки не должен создавать дополнительных трудностей при восприятии сообщаемой информации. Без этого требования не может быть науки как системы знаний, не может быть уверенности в том, что определенное утверждение или предположение не было искажено в процессе рассуждений. Необходимо также предусмотреть все мыслимые исходы и не пропустить каких-либо, кроме рассмотренных, возможностей. Научное изложение должно быть кратким и вполне определенным. Именно поэтому наука обязана разрабатывать собственный язык, способный максимально точно передавать свойственные ей особенности. Прекрасно сказал известный французский физик Луи де Бройль: «...где можно применить математический подход к проблемам, наука вынуждена пользоваться особым языком, символическим языком, своего рода стенографией абстрактной мысли, формулы которой, когда они правильно записаны, по-видимому, не оставляют места ни для какой неопределенности, ни для какого неточного истолкования»<sup>1</sup>. Но к этому нужно добавить, что математическая символика не только не оставляет места для неточности выражения и расплывчатого истолкования — математическая символика позволяет вдобавок автоматизировать проведение тех действий, которые необходимы для получения выводов. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий простой пример.

Пусть требуется решить задачу, которая формально сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. С помощью привычной алгебраической сим-

---

<sup>1</sup> Луи де Бройль, По тропам науки, ИЛ, М., 1962, стр. 326.



волики необходимые действия осуществляются очень просто. Нет нужды в каких-либо специальных рассуждениях: они выполнены раз навсегда для всех подобных систем. Применение набора стандартных правил позволяет без принципиальных затруднений довести решение каждой такой задачи до конца. Представим теперь, что мы лишены языка математических символов и в нашем распоряжении имеется только обычный словесный язык. В таком положении находятся, например, те, кто должен решать алгебраические задачи средствами элементарной арифметики. При этом немедленно возникают ненужные осложнения. Каждая задача становится особой проблемой и для нее нужно разрабатывать специальную систему рассуждений, самый простой вопрос требует серьезного умственного напряжения. Вспомним, как просто решаются сложные арифметические задачи, когда для их решения мы используем простейшую алгебраическую символику. А ведь это одна из простейших задач, с которыми приходится встречаться в науке, планировании, экономике или инженерном деле.

Математическая символика позволяет сжимать запись информации, делать ее обозримой и удобной для последующей обработки. В последние годы появилась новая линия в развитии формализованных языков, связанная с вычислительной техникой и использованием электронных вычислительных машин для управления производственными процессами. Необходимо общение с машиной, надо предоставить ей возможность в каждый момент самостоятельно выбирать правильное в данных условиях действие. Но машина не понимает обычную человеческую речь, с ней нужно «разговаривать» на доступном ей языке. Этот язык не должен допускать разночтений, неопределенности, недостаточности или чрезмерной избыточности сообщаемой информации. В настоящее время разработано несколько систем языков, с помощью которых машина однозначно воспринимает сообщаемую ей информацию и действует с учетом создавшейся обстановки. Именно это и делает электронные вычислительные машины столь гибкими при выполнении сложнейших вычислительных и логических операций.

Не произойдет ли так, что математизация науки, использование формализованных символических языков приведет к отмиранию роли обычного языка в научных и

практических работах? В действительности дело обстоит гораздо сложнее — у каждого языка есть сильные и слабые стороны. В результате каждая отрасль науки вынуждена использовать и обычный и символические языки. Чтобы проследить мысль автора во всех тонкостях, недостаточен только математический язык формул, необходим также текст, написанный или изложенный обычным языком. Язык формул не выводит нас за пределы записанных с их помощью понятий и представлений, он прекрасно приспособлен к получению следствий из предпосылок. Но на математическом языке невозможно проведение далеко идущих аналогий или неожиданных индуктивных выводов. Так его сила превращается в слабость. И здесь на помощь приходит обычный, неформализованный язык с его богатством оттенков и возможностей.

Математика развивается. В ней строятся новые кварталы и сносятся устаревшие здания. Многие мелкие строения объединяются в единые комплексы, а между отдаленными областями проводятся дороги для непосредственной взаимосвязи. Этот своеобразный мир растет вширь и вверх. Но, что особенно важно, он не замыкается в себе, а стремится установить дружеские контакты с другими областями знания и оказать им посильную помощь. Естественно, что в таком большом хозяйстве время от времени приходится проводить не только мелкие ремонтные работы, но и капитальную перестройку, чтобы устаревшие здания и узкие улицы не мешали дальнейшему развитию целого района. Время от времени математикам приходится окинуть взглядом всю математику и ее место в системе наук. При этом неизбежно появляются глубокие философские вопросы. Некоторым из них и посвящена книга Реньи. Я убежден, что ознакомление с ней принесет большую пользу читателям.

*Б. Гнеденко*



Сократ

## ДИАЛОГ О СУЩНОСТИ МАТЕМАТИКИ

Сократ. Ты кого-то ищешь, дорогой мой Гиппократ?

Гиппократ. Нет, Сократ, поскольку я уже нашел того, кого искал. Именно тебя я искал повсюду. Кто-то на агоре<sup>1</sup> сказал мне, что видел, как ты прогуливаешься вдоль реки Илиссос. Так что я шел вслед за тобой.

Сократ. В таком случае скажи, зачем ты пришел, а после я хотел бы расспросить тебя о нашей беседе с Протагором. Помнишь ли ты о ней?

Гиппократ. Как ты можешь спрашивать? И дня не прошло с тех пор без моих размышлений о ней. А сегодня я пришел к тебе за советом, поскольку эта беседа не выходит у меня из головы.

Сократ. Похоже, Гиппократ, что ты хочешь поговорить о тех же вопросах, которые я и сам хотел бы обсудить с тобой; таким образом, два предмета разговора на самом деле одно. Кажется, математики ошибаются, считая, что два никогда не равно одному.

Гиппократ. Дело в том, Сократ, что математики, как всегда, правы.

Сократ. Но ты, Гиппократ, конечно, знаешь, что я не математик. Почему же ты не задал своих вопросов знаменитому Теодору?

Гиппократ. Я просто поражен, Сократ, ты отвечаешь на мои вопросы прежде, чем я задаю их. Ведь я пришел именно для того, чтобы узнать, стоит ли мне пойти учеником к Теодору. В прошлый раз, когда я ре-

---

<sup>1</sup> Агора (греч.) — рыночная площадь и место народных собраний в древнегреческих городах.— Прим. перев.

шил стать учеником Протагора, мы пошли к нему вместе и ты направил беседу так, что стало совершенно ясно — он не знает предмета, о котором рассуждает. Разумеется, я раздумал и не пошел к нему. Эта беседа помогла мне понять, чего я не должен делать, но не показала, что же следует делать. А мне хотелось бы узнать это. Я бываю на пирах и в палестре<sup>1</sup> со своими приятелями и, осмелюсь сказать, время провожу приятно, но это не дает мне удовлетворения. Я чувствую свое невежество. Точнее говоря, я чувствую, что знания, которыми обладаю, довольно неопределенны. Во время беседы с Протагором стало ясно, что мои познания о хорошо известных вещах, таких, как здравомыслие, справедливость и доблесть, совсем бедны. Но теперь я по крайней мере полностью сознаю свое невежество.

Сократ. Я рад, дорогой мой Гиппократ, что ты так хорошо меня понимаешь. Я всегда говорю себе вполне искренне, что я ничего не знаю. *Разница между мной и большинством других людей, может, и состоит именно в том, что я не воображаю, будто знаю то, что в действительности мне неизвестно.*

Гиппократ. Это доказывает твою мудрость, Сократ. Но для меня этого недостаточно. Я очень хочу получить вполне определенные и основательные знания, и я не буду счастлив, пока не добьюсь своего. Я постоянно размышляю над природой знаний, которыми пытаюсь овладеть. А совсем недавно Театет сказал, что определенное существует только в математике, и посоветовал мне изучать математику у его учителя Теодора, самого сведущего специалиста по теории чисел и геометрии в Афинах. Мне не хотелось бы повторить ту же ошибку, когда я намеревался стать учеником Протагора. Поэтому скажи мне, Сократ, получу ли я глубокие знания, которые ищу, если стану изучать математику у Теодора?

Сократ. Если ты хочешь изучать математику, о сын Аполлодора, то определенно не сможешь сделать ничего лучшего, чем пойти к моему уважаемому другу Теодору. Но ты должен решить, действительно ли хочешь изучать математику. Никто не может знать твоих желаний лучше, чем ты сам.

---

<sup>1</sup> Палестра (греч.) — атлетическая школа для юношей. — Прим. перев.



Гиппократ. Почему ты отказываешься помочь мне, Сократ? Может быть, я неумышленно обидел тебя, не заметив этого?

Сократ. Ты не так понял меня, мой юный друг. Я не сержусь, но ты просишь меня о невозможном. Каждый должен решить самостоятельно, чем он хочет заниматься. *Я могу лишь помочь, подобно акушерке, при рождении твоего решения.*

Гиппократ. Прошу тебя, не отказывай мне, дорогой Сократ, и, если ты сейчас свободен, начнем беседу немедленно.

Сократ. Ну хорошо, если ты так настаиваешь. Укроемся под тенью того платана и начнем. *Но прежде скажи, согласен ли ты вести беседу способом, который я предпочитаю? Я буду задавать вопросы, а ты отвечать на них. В результате ты яснее поймешь, что ты уже постиг, а от этого расцветут семена знаний, имеющиеся в твоей душе.* Я надеюсь, ты не уподобишься царю Дарию, который убил управляющего рудниками за то, что тот из медного рудника добыл только медь, а не золото, как желал царь. Я надеюсь, ты всегда будешь помнить, что из рудника можно извлечь только то, что он содержит.

Гиппократ. Клянусь, что не стану ничем тебя прекать, но, ради Зевса, начнем немедленно.

Сократ. Согласен. Только ответь мне, знаешь ли ты, что такое математика? Надеюсь, ты сумеешь дать определение математики, если намереваешься изучать ее.

Гиппократ. Думаю, что любой ребенок мог бы это сделать. Математика — одна из наук, и притом одна из самых прекрасных.

Сократ. Я просил тебя описать сущность математики, а не восхвалять ее. Быть может, ты лучше поймешь, что я хочу выяснить, если мы рассмотрим какую-нибудь другую науку, хотя бы медицину. Вот если бы я спросил тебя об искусстве врачевания, ты бы ответил, что оно имеет дело со здоровьем и болезнью. И цель его — лечить больных и охранять здоровых. Не так ли?

Гиппократ. Ты прав.

Сократ. О том, как распознавать и лечить болезни, знают только врачи, да и им известно еще слишком мало. Но задача медицины и состоит как раз в том, чтобы узнать обо всем этом. А с математикой не обстоит ли дело иначе?

Гиппократ. В таком случае прошу тебя, объясни мне различие, так как я не вижу его отчетливо.

Сократ. Тогда ответь мне: искусство врачевания имеет дело с тем, что существует, или с тем, чего нет? Если бы не было врачей, то были бы болезни?

Гиппократ. Конечно, и даже больше, чем сейчас.

Сократ. Взглянем теперь на другое искусство, хотя бы на астрономию. Ты согласен с тем, что астрономы изучают движения звезд?

Гиппократ. Я уверен в этом.

Сократ. А если я спрошу тебя, имеют ли дело астрономы с тем, что существует, что ты ответишь?

Гиппократ. Я отвечу — да.

Сократ. А существовали бы звезды, если бы не было астрономов?

Гиппократ. Конечно. И даже если бы Зевс в гневе истребил все человечество, звезды все равно сияли бы в небе. Но почему мы говорим об астрономии, а не о математике?

Сократ. Не будь таким нетерпеливым, дорогой друг. Давай обсудим несколько других искусств, чтобы иметь возможность сравнить их с математикой. Как бы ты назвал человека, который знает все о живых существах, обитающих в лесах и в глубинах морей?

Гиппократ. Это ученый, изучающий живую природу.

Сократ. И ты согласен, что такие ученые изучают только те вещи, которые существуют?

Гиппократ. Согласен.

Сократ. А как ты назовешь человека, который интересуется горными породами и знает, какие из них содержат железо?

Гиппократ. Знаток минералов.

Сократ. Занимается ли он вещами, которые существуют, или же тем, чего на самом деле нет?

Гиппократ. Само собой разумеется, вещами, которые существуют.

Сократ. Можем ли мы теперь утверждать, что каждая наука занимается теми вещами, которые существуют?

Гиппократ. Кажется, это так.

Сократ. Теперь скажи мне, юный друг, что является объектом изучения математики? Какие вещи изучают математики?

Гиппократ. Я спрашивал об этом Театета. Он ответил, что математик изучает числа и геометрические формы.

Сократ. Ответ верный и нельзя найти лучшего, но можем ли мы утверждать, что числа и формы существуют?

Гиппократ. Конечно. Как могли бы мы говорить о них, если бы их не было?

Сократ. Ты прав. Но вот что меня смущает. Возьмем, например, простые числа. Существуют ли они так же, как звезды или рыбы? Существовали бы простые числа, если бы не было математиков?

Гиппократ. Я начинаю понимать, чего ты хочешь. Все не так просто, как я предполагал, и должен сознаться, что я не знаю, как надо ответить на твой вопрос.

Сократ. Поставим вопрос несколько иначе: считаешь ли ты, что звезды на небе будут появляться, если никто их не станет наблюдать, а рыбы будут продолжать плавать, если никто не станет ловить их?

Гиппократ. Конечно. Как могли бы мы говорить о них, если бы их не было?

Сократ. Тогда скажи, если бы не было математики, были бы простые числа, и если да, то где?

Гиппократ. Не знаю, что и ответить. Ясно, что, если математики думают о простых числах, значит, они существуют в их сознании, но если бы не было математиков, не могло бы быть и простых чисел.

Сократ. Значит, ты считаешь, что математики изучают несуществующие понятия?

Гиппократ. Пожалуй, мы должны допустить это.

Сократ. Если я скажу, что математики занимаются тем, что или вовсе не существует или существует, но не так, как существуют звезды или рыбы, то буду ли я прав?

Гиппократ. Вполне.

Сократ. Теперь рассмотрим этот вопрос с другой точки зрения. Я написал на восковой табличке число 37. Ты видишь его?

Гиппократ. Да.

Сократ. И можешь дотронуться до него рукой?

Гиппократ. Конечно.

Сократ. Значит, числа существуют?

Гиппократ. Ты смеешься надо мной, Сократ. Послушай! Я нарисовал на такой же табличке дракона с семью головами. Разве это означает, что он существует?

Я никогда не встречал никого, кто видел бы дракона. Я убежден, что драконы существуют только в сказках. Возможно, я ошибаюсь, и драконы действительно есть где-нибудь по ту сторону Геркулесовых столпов, чего не скажешь о том, которого я нарисовал.

Сократ. Ты прав, Гиппократ, я с тобой согласен. Значит, хотя мы говорим о числах и даже можем написать их, на самом деле они не существуют?

Гиппократ. Конечно.

Сократ. Не делай поспешных заключений. Давай решим еще один вопрос. Прав ли я, говоря, что мы можем сосчитать овец на лугах или корабли в гавани?

Гиппократ. Да.

Сократ. И овцы и корабли существуют?

Гиппократ. Несомненно.

Сократ. Но если овцы существуют, их число тоже должно существовать, не так ли?

Гиппократ. Ты смеешься надо мной, Сократ. Математики не считают овец, это дело овцеводов.

Сократ. Ты думаешь, что математики изучают не количество овец, кораблей или других реальных предметов, а числа сами по себе? И, таким образом, они интересуются только тем, что существует у них в сознании?

Гиппократ. Именно так я и думаю.

Сократ. Ты говорил, Театет считает, что математика изучает числа и геометрические формы. А формы? Если я спрошу тебя, существуют ли они, что ты ответишь?

Гиппократ. Существуют. Мы можем видеть, например, прекрасную форму сосуда и ощутить ее руками.

Сократ. Осталась одна неясность. Если ты согласишься на сосуд, что ты видишь — сосуд или его форму?

Гиппократ. И то и другое.

Сократ. То же самое происходит, когда ты смотришь на ягненка. Ведь ты видишь одновременно и ягненка и его шерсть?

Гиппократ. Это очень удачное сравнение.

Сократ. А я думаю, оно хромает, как Гефест. Ты можешь состричь шерсть с ягненка и увидеть ягненка без шерсти и шерсть без ягненка. Можешь ли ты отделить таким же образом форму сосуда от самого сосуда?

Гиппократ. Я полагаю, этого никто не может.

Сократ. И ты все еще уверен, что можно видеть геометрическую форму?

Гиппократ. Теперь я начинаю сомневаться.

Сократ. Кроме того, если математики изучают формы сосудов, значит ли, что их можно назвать гончарами?

Гиппократ. Конечно.

Сократ. Тогда, если Теодор — лучший математик, должен ли он быть также лучшим гончаром? Многие люди восхваляют его, но никто не говорил, что он хоть сколько-нибудь понимает в гончарном деле. Сомневаюсь, сможет ли он сделать даже самый простой горшок. Может быть, математики имеют дело с формами статуй или зданий?

Гиппократ. В таком случае они должны быть скульпторами и архитекторами.

Сократ. Вот, мой друг, мы и пришли к выводу, что математики, изучая геометрию, занимаются не формой реальных предметов, таких, как сосуды, а формами, которые существуют только в их сознании. Ты согласен?

Гиппократ. Я вынужден согласиться.

Сократ. Мы установили, что математики занимаются предметами, которые существуют не в действительности, а только в их мыслях. А теперь обсудим утверждение Театета, о котором ты упомянул раньше, что математика дает более надежные и заслуживающие доверия знания, чем любые другие науки. Скажи, приводил ли Театет какие-либо примеры?

Гиппократ. Да, он сказал, что никто не может знать точное расстояние от Афин до Спарты. Конечно, люди, которые путешествуют, знают, за сколько дней они проходят этот путь, но невозможно знать точное количество шагов на каком-то расстоянии. Однако любой может вычислить по теореме Пифагора длину диагонали квадрата. Театет сказал еще, что нельзя узнать точное число людей, живущих в Элладе. И если бы кто-либо попытался сделать это, то не достиг бы реального результата, потому что во время счета некоторые старые люди умирали бы и рождались бы дети, поэтому результат был бы только приближенным. Но спроси математика, сколько ребер у правильного додекаэдра, и он ответит, что у додекаэдра 12 граней и каждая имеет пять ребер. Получается 60 ребер, но так как каждое ребро принадлежит двум граням одновременно и потому считается дважды, получится 30 ребер, и эта цифра, несомненно, верная.

Сократ. Приводил ли он еще какие-нибудь примеры?



Гиппократ. Я не помню всех. Он говорил еще, что в природе нельзя найти две совершенно одинаковые вещи. Никакие два яйца не являются абсолютно одинаковыми, и даже колонны храма Посейдона отличаются одна от другой. Но можно быть совершенно уверенным, что две диагонали прямоугольника одинаковы. Он ссылаясь на Гераклита, который сказал, что все существующее постоянно изменяется и точные сведения можно получить только о понятиях, которые не изменяются, например чет и нечет, прямая и круг.

Сократ. Достаточно. Эти примеры убеждают меня, что в математике мы можем получить знания, которые несомненны, в то время как в других науках и в повседневной жизни это невозможно. Подытожим результаты нашего исследования природы математики. Прав ли я, говоря, что математика изучает несуществующие объекты и может их полностью описать?

Гиппократ. Да, именно это мы установили.

Сократ. Тогда скажи, дорогой Гиппократ, разве не удивительно, что мы знаем о предметах несуществующих больше, чем о предметах реальных?

Гиппократ. Пожалуй, это действительно странно! Я думаю, что в наши рассуждения вкралась ошибка.

Сократ. Нет, мы были предельно внимательны и проверяли каждый шаг наших рассуждений. Здесь не может быть никакой ошибки. Но я, кажется, вспомнил кое-что, и это поможет разрешить нашу задачу.

Гиппократ. Говори быстрее, я совсем сбит с толку.

Сократ. Сегодня утром я был в зале второго судьи, где жену плотника из деревни Питтос обвиняли в измене и убийстве мужа при соучастии любовника. Женщина протестовала, она клялась Артемидой и Афродитой, что невиновна, что никогда не любила никого, кроме своего мужа, и что он убит грабителями. Множество людей было вызвано в качестве свидетелей. Одни говорили, что она виновна, а другие, что нет. И было невозможно выяснить правду.

Гиппократ. Ты снова смеешься надо мной? Сначала ты сбил меня с толку, а теперь передаешь всякие рассказы.

Сократ. Не сердись, мой друг! У меня есть серьезные причины, чтобы поговорить об этой женщине, виновность которой установить невозможно. Но одно верно:

женщина существует, я видел ее собственными глазами, и все, кто был там, а многие из них ни разу в жизни не солгали, ответят тебе так же.

Гиппократ. Твоего свидетельства для меня вполне достаточно, дорогой Сократ. Пусть считается доказанным, что женщина существует. Но что общего у этого факта с математикой?

Сократ. Больше, чем ты думаешь. Скажи мне сначала: знаешь ли ты предание об Агамемноне и Клитемнестре?

Гиппократ. Эту историю знают все. В прошлом году я видел трилогию Эсхила в театре.

Сократ. Расскажи мне ее в нескольких словах.

Гиппократ. Пока Агамемнон, микенский царь, сражался под стенами Трои, его жена Клитемнестра согрешила с Эгистом, двоюродным братом мужа. После падения Трои, когда Агамемнон вернулся домой, Клитемнестра и ее любовник убили его.

Сократ. Скажи мне, Гиппократ, ты уверен, что Клитемнестра виновна?

Гиппократ. Не понимаю, зачем ты задаешь подобный вопрос? Правдивость этой истории несомненна. Согласно Гомеру, когда Одиссей был в преисподней, он встретил Агамемнона и тот сам рассказал ему о своей печальной судьбе.

Сократ. Но ты уверен, что Агамемнон, Клитемнестра и все остальные персонажи этой трагедии действительно существовали?

Гиппократ. Возможно, меня изгнали бы из общества, если бы я сказал это публично, но мое мнение таково, что по прошествии стольких веков невозможно доказать или опровергнуть правдивость гомеровских поэм. Но это совсем не относится к делу. Когда я сказал тебе, что Клитемнестра виновна, я говорил не о реальной Клитемнестре, если она действительно когда-либо существовала, а о Клитемнестре из поэмы Гомера, Клитемнестре из трилогии Эсхила.

Сократ. Могу ли я сказать, что мы ничего не знаем о реальной Клитемнестре? Даже ее существование сомнительно, но, рассматривая ее как персонаж трагедии Эсхила, мы уверены, что она была вероломна и действительно убила Агамемнона, потому что именно так рассказывает нам Эсхил.

Гиппократ. Согласен. Но к чему ты настаиваешь на этом?

Сократ. Погоди. Сначала подытожим все, что мы выяснили. Невозможно установить, виновна ли женщина во крови и плоти, живущая сегодня в Афинах, в то время как несомненно, что персонаж трагедии — Клитемнестра, которой, возможно, вообще не было на свете, виновна. Ты согласен?

Гиппократ. Я начинаю понимать, что ты хочешь сказать. Однако будет лучше, если ты сделаешь выводы.

Сократ. Заключение таково: мы знаем гораздо больше о людях, которые существуют только в нашем воображении, например о персонажах пьес, чем о реально живущих людях. Если мы говорим, что Клитемнестра виновна, то это означает, что так ее изобразил Эсхил в своей пьесе. Подобное положение и в математике. Мы уверены, что диагонали прямоугольника абсолютно одинаковы, потому что это следует из определения прямоугольника, данного математиками.

Гиппократ. Ты имеешь в виду, Сократ, что наш парадоксальный результат действительно правилен и можно иметь значительно более определенные знания о несуществующих вещах, например о математических понятиях, чем о реальных объектах? Мне кажется, теперь я понимаю, отчего так получается. Понятия, которые мы сами создали, известны нам полностью по самой их природе и мы можем о них узнать все, поскольку у них нет иной жизни, кроме как в нашем воображении. А вот объекты, существующие в реальном мире, не тождественны с нашими представлениями о них, поскольку они всегда неполны и приблизительны. Именно поэтому наши знания о действительно существующих вещах никогда не могут быть исчерпывающими или окончательными.

Сократ. Совершенно верно, дорогой мой друг, ты сказал лучше, чем смог бы это сделать я сам.

Гиппократ. Это твоя заслуга, Сократ, потому что ты помог мне понять эти вещи. Теперь я не только вижу, что Театет был совершенно прав, говоря, что я должен изучать математику, если хочу получить надежные знания, но и знаю, почему он был прав. Однако если уж ты так терпеливо разъяснял мне все до сих пор, то, прошу тебя, не покидай меня и теперь, потому что один мой вопрос, пожалуй наиболее важный, еще остался без ответа.

Сократ. Какой вопрос?

Гиппократ. Вспомни, Сократ, что я пришел просить твоего совета, должен ли я изучать математику. Ты помог мне понять, что математика и только математика может дать те основательные знания, которые я хотел бы иметь. Но какая польза от этих знаний? Ясно, что если получить некоторые знания о реальном мире, хотя бы неполные и не вполне определенные, то их значение будет несомненно и для отдельного человека и для страны в целом. Даже изучение звезд полезно, например, для мореплавателей. Но какая польза от изучения несуществующих предметов, которым как раз и занимается математика?

Сократ. Дорогой мой друг, я уверен, что ты знаешь ответ и только хочешь проверить меня.

Гиппократ. Клянусь Гераклом, я не знаю ответа. Помоги мне, прошу тебя.

Сократ. Согласен. Попытаемся найти его. Мы уже убедились, что математические понятия создаются самими математиками. Но выбирает ли математик эти понятия произвольно, как ему хочется?

Гиппократ. Я уже говорил тебе, что еще недостаточно знаю математику. Но мне кажется, математик так же свободен в выборе объектов своего исследования, как поэт в выборе персонажей своих пьес, и как поэт наделяет своих персонажей чертами, которые ему приятны, так и математик вкладывает в понятия такие свойства, какие ему хочется.

Сократ. Но тогда существовало бы столько же математических истин, сколько самих математиков. Как же ты объяснишь в таком случае то обстоятельство, что все математики изучают одни и те же понятия и проблемы? И почему нередко математики, живущие далеко один от другого и даже не знающие друг друга, открывают одни и те же истины и изучают одни и те же понятия? Если они говорят о числах, то имеют в виду одни и те же числа, а прямые, круги, квадраты, шары и правильные тела одинаковы для всех.

Гиппократ. Нельзя ли объяснить это тем, что все люди мыслят одинаковым образом и поэтому одни и те же вещи они представляют одинаково?

Сократ. Дорогой Гиппократ, мы получим удовлетворительное объяснение не раньше, чем рассмотрим пред-

мет обсуждения со всех точек зрения. Как объяснить те нередкие факты, когда математики, живущие далеко друг от друга, скажем один в Таренте, а другой на острове Самос, открывают одну и ту же истину, даже не зная один другого? И в то же время я никогда не слышал, чтобы два поэта написали одну и ту же поэму.

Гиппократ. И я никогда не слышал об этом. Но вспоминаю, что Театет рассказывал мне об очень интересной открытой им теореме о несоизмеримых величинах. Он показал теорему своему учителю Теодору, а тот в свою очередь вытащил письмо от Архитаса, где было изложено то же доказательство, почти слово в слово.

Сократ. В поэзии это невозможно. Вот видишь, появилась новая проблема. Но продолжим. Как ты объяснишь, что математики разных стран обычно согласны по поводу математических истин, в то время как о государственных вопросах персы и спартанцы, например, имеют совершенно противоположные мнения, чем в Афинах, и, более того, даже между собой мы часто не соглашаемся друг с другом?

Гиппократ. Я отвечу на твой последний вопрос. В делах, касающихся государства, заинтересован каждый, и эти частные интересы иногда очень противоречивы. Вот почему трудно прийти к соглашению. А математик руководствуется просто стремлением найти истину.

Сократ. Ты хочешь сказать, что математики пытаются найти истину, которая совершенно не зависит от их собственных интересов?

Гиппократ. Да.

Сократ. Но тогда мы ошибались, думая, что математики выбирают объекты своего изучения по собственному желанию. Выходит, объект их изучения имеет несколько форм существования, которые независимы от личности математика. Мы должны разрешить эту новую загадку.

Гиппократ. Я не знаю даже, с чего начать.

Сократ. Если у тебя еще осталось терпение, то попытаемся вместе. Скажи мне, что общего между мореплавателем, который ищет необитаемый остров, и живописцем, ищущим новую краску, которая не была бы использована раньше?

Гиппократ. Я думаю, что они обогащают человечество открытиями.

Сократ. Но в чем, по твоему мнению, состоит различие между ними?

Гиппократ. Я думаю, что мореплавателя можно назвать открывателем, а живописца — изобретателем. Мореплаватель открывает остров, который существовал раньше, только он был неизвестен, в то время как живописец изобретает новую краску, которая до этого вообще не существовала.

Сократ. Никто не смог бы ответить на этот вопрос лучше. Но, скажи мне, математик, ищущий новую истину, открывает ее или изобретает? Открыватель ли он, как мореплаватель, или изобретатель, как живописец?

Гиппократ. Я не могу ответить на этот вопрос, так как у меня еще нет никакого собственного опыта. Но Театет рассказывал мне о их совместных исследованиях с Теодором, и поэтому я думаю, что математика скорее нужно считать открывателем, хотя он имеет сходство и с изобретателем.

Сократ. Хорошо сказано. Мне кажется, что математик в равной мере открыватель и изобретатель. Но почему ты ответил так быстро? Ты хотел сказать, что математик в известном смысле является также и изобретателем?

Гиппократ. Математик сам создает понятия, которые он изучает. При этом, когда математик создает новое понятие, он поступает так же, как изобретатель. Когда же он изучает понятие, введенное им самим или кем-либо другим, или формулирует теорему — на языке математики — и доказывает ее, то он поступает как открыватель. После всего, что мне рассказал Театет, «открытие» теорем в работе математиков играет, по-видимому, бóльшую роль, чем «изобретение» понятий, так как самые простейшие понятия, например понятия числа и делимости, приводят к столь многим и глубоким проблемам, что математики до сих пор смогли решить лишь небольшую их часть.

Сократ. Очевидно, дорогой Гиппократ, твой друг Театет уже многое изучил и, как я вижу, успешно. Мне кажется, что математик больше похож на открывателя. Он — смелый мореплаватель, плавающий по неизвестному морю и исследующий его побережья, острова и водовороты. Я хотел бы только добавить, что математик в некотором роде также изобретатель, в особенности когда

он вводит новые понятия. Ведь каждый открыватель должен быть в какой-то мере изобретателем. Например, если мореплаватель хочет достичь мест, до него никем не достигнутых; он должен построить корабль, который был бы лучше других кораблей. Новые понятия, введенные математиками, подобны новым кораблям, которые поддерживают исследователя в великом море мыслей. Прежде всего математик является открывателем; изобретателем он является лишь постольку, поскольку им должен быть открыватель.

Гиппократ. Дорогой мой Сократ, я уверен, что в Афинах и, вероятно, даже во всей Элладе нет человека, который так же, как ты, владел бы искусством вести беседу. Каждый раз, когда ты обсуждаешь мои слова, ты говоришь то, о чем я, возможно, подозреваю, но не могу выразить с такой ясностью. Из твоего заключения следует, что главная цель математика — исследование секретов и загадок в море человеческого мышления. Они существуют независимо от личности математика, но не от человечества в целом. Математик может вводить по своему усмотрению новые понятия в качестве рабочего инструмента. Однако он не совсем свободен в этом, потому что новые понятия должны быть полезны для его работы. Мореплаватель тоже может построить любой корабль по своему усмотрению, но мы бы сочли его сумасшедшим, если бы он построил корабль так, что тот развалился на куски при первом же шторме. Теперь, я думаю, все ясно.

Сократ. Если ты все так ясно представляешь, попробуй снова ответить на вопрос, что же изучает математика.

Гиппократ. Попытаюсь, но, разумеется, это снова будет неполный ответ, ведь я все еще понимаю лишь часть истины.

Сократ. Тогда смело вперед, подобно отважному мореплавателю!

Гиппократ. Теперь я вижу: раньше мы ошибочно утверждали, что математика занимается вещами, которых в действительности нет. Эти вещи существуют, но не так, как существует камень или дерево. Мы их не можем увидеть, коснуться, мы можем только охватить их своими мыслями. Есть другой мир — мир математики, отличный от обычного мира, в котором мы живем. А математик —



отважный мореплаватель, не отступающий перед трудностями, опасностями и риском, подстерегающими его.

Сократ. Друг мой, твоя юношеская энергия почти сбивает меня с ног, но боюсь, что в пылу энтузиазма ты не замечаешь некоторых вопросов.

Гиппократ. Каких вопросов? Ты пожертвовал мне так много времени, но, прошу тебя, не оставляй меня на полпути и скажи, что я позабыл.

Сократ. Мне кажется, мы все еще не нашли ответа на твой вопрос. Мы оба, вероятно, теперь лучше понимаем, что такое собственно математика. Но на вопрос о смысле и цели математики, этого океана человеческих мыслей, мы еще не ответили.

Гиппократ. Ты прав. Я убедился, что при изучении математики приобретаешь надежные основополагающие знания. Когда я погружусь в этот чудесный мир, ко мне, наверное, придет то прекрасное чувство, которого до сих пор я не находил: есть истина, которая не оставляет место сомнению. Я понял, что мир математики существует в действительности и независимо от меня, пусть не в том роде, как камни и деревья, но тем не менее он существует. К чему, собственно, исследовать этот мир? Может быть, на этот раз ты отложишь в сторону свой метод и попросту ответишь на мой вопрос? Боюсь, что сам я не способен найти разумный ответ.

Сократ. Нет, мой друг, если бы даже я смог, я бы не сделал этого, и только ради твоей же пользы. Знания, получаемые без труда, ничего не стоят. До конца мы понимаем только то — возможно, с помощью извне, — что узнаем сами, подобно тому как растение может использовать только ту воду, которую оно высасывает из почвы собственными корнями.

Гиппократ. Хорошо. Продолжим наши поиски тем же методом, но помоги мне вопросом.

Сократ. Теперь я вижу, дорогой Гиппократ, что мы должны вернуться назад, если хотим продвинуться вперед.

Гиппократ. Как далеко нам следует вернуться?

Сократ. Я думаю, мы должны вернуться к тому моменту, когда мы установили, что математик имеет дело не с числом овец, кораблей или других реальных вещей, а с числами как таковыми. Не думаешь ли ты, однако, что математическое открытие, верное для простых чисел,

справедливо также и для чисел реальных предметов? Например, математик определяет, что 17 — это простое число. А разве не правда, что ты не можешь 17 живых овец равномерно распределить между людьми, если их не 17 человек?

Гиппократ. Конечно, это правда.

Сократ. Значит, то, что математик знает о числах, можно применять к действительно существующим предметам?

Гиппократ. Это так.

Сократ. А в отношении геометрии? Не опирается ли архитектор на геометрические теоремы, когда он чертит план постройки? Не использует ли он знаменитую теорему Пифагора, когда вычерчивает прямой угол?

Гиппократ. Ты прав.

Сократ. А не использует ли геометрию также землемер?

Гиппократ. Это общеизвестно.

Сократ. А корабельный плотник или кровельщик?

Гиппократ. Они поступают точно так же.

Сократ. А когда гончар делает кувшин или мореплаватель подсчитывает, сколько зерна вмещают трюмы его корабля, разве они не нуждаются в математике?

Гиппократ. Конечно, хотя, мне кажется, в делах ремесленников не требуется слишком много математики. Для большинства подобных задач достаточно знать простые правила, известные еще чиновникам египетских фараонов, и новые открытия, о которых Театет рассказывал мне с таким усердием, совсем не используются и не нужны для практических дел.

Сократ. В одном ты прав, Гиппократ, но в другом ты снова ошибаешься. Возможно, придет время, когда люди из всех математических открытий будут извлекать практическую пользу. То, что сегодня только теория, когда-нибудь сможет приобрести крайнюю необходимость для реальной жизни. Не так ли?

Гиппократ. Меня интересует настоящее.

Сократ. Ты непоследователен, Гиппократ. Если ты хочешь стать математиком, то должен осознать, что будешь работать в большей мере для будущего. А теперь вернемся к главному вопросу. Мы увидели, что познание мира идей, то есть вещей, которые не существуют, в обычном смысле этого слова, может пригодиться в по-

вседневной жизни для ответа на вопросы о реальном мире. Не удивительно ли это?

Гиппократ. Более того, непостижимо! Это действительно чудо.

Сократ. Возможно, это не так уж таинственно, и если мы вскроем сущность этого вопроса, то сможем найти подлинную жемчужину.

Гиппократ. Прошу тебя, дорогой Сократ, не говори загадками, подобно Пифии.

Сократ. Скажи мне в таком случае, удивляет ли тебя, когда кто-то, кто побывал в дальних странах, кто многое видел и многое испытал, возвращается домой и пользуется приобретенным опытом для того, чтобы дать хороший совет своим согражданам?

Гиппократ. Вовсе нет.

Сократ. Даже если страны, которые он посетил, находятся очень далеко и населены совершенно другим народом, разговаривающим на другом языке и поклоняющимся иным богам?

Гиппократ. Нет, даже в этом случае, потому что между разными народами есть много общего.

Сократ. Теперь скажи мне: если бы оказалось, что мир математики, несмотря на его особенности, в некотором смысле подобен нашему реальному миру, ты бы все еще удивлялся, что математика может применяться для изучения реального мира?

Гиппократ. В этом случае нет, но я не вижу никакого сходства между реальным миром и воображаемым миром математики.

Сократ. Ты видишь скалу на другом берегу реки, там, где река расширяется и образует как бы озеро?

Гиппократ. Вижу.

Сократ. А ты видишь отражение скалы в воде?

Гиппократ. Конечно.

Сократ. Тогда скажи, какая разница между скалой и ее отражением?

Гиппократ. Скала — твердый кусок тяжелого вещества. Она нагревается на солнце. И на ощупь грубая. Отражение нельзя потрогать. Если положить на него руку, то ощутишь только прохладную воду. На самом деле отражения не существует. Это иллюзия — и ничего больше.

Сократ. Значит, нет ничего общего между скалой и ее отражением?

Гиппократ. В определенном смысле отражение есть точная копия скалы. Контуры скалы, даже самые маленькие ее складки ясно видны в отражении. Но что из того? Неужели ты хочешь сказать, что мир математики — это отражение действительного мира в зеркале нашего мышления?

Сократ. Ты сказал очень хорошо.

Гиппократ. Но как же это возможно?

Сократ. Вспомни, как развивались абстрактные математические понятия. Мы говорили, что математики имеют дело с отвлеченными числами, а не с количествами реальных предметов. Но думаешь ли ты, что тот, кто никогда не считал действительных предметов, может постичь абстрактное понятие числа? Так и в геометрии. Ребенок приходит к понятию шара благодаря общению с круглыми предметами, например с мячами. Все основные математические понятия человечество развило таким же путем. Эти понятия выкристаллизовывались из знаний о реальном мире, и совершенно естественно, что они сохраняют следы своего происхождения, подобно тому как дети сохраняют черты своих родителей. И точно так же как дети, когда они подрастают, становятся поддержкой своих родителей, так и некоторые отрасли математики, если они достаточно разработаны, становятся полезными инструментами в исследовании действительного мира.

Гиппократ. Теперь мне вполне ясно, как познание несуществующих понятий мира математики может быть полезно в повседневной жизни. Ты оказал мне большую услугу, помогая понять это.

Сократ. Завидую тебе, дорогой мой Гиппократ, потому что мне лично хотелось бы кое-что обосновать. Вероятно, ты сможешь помочь мне.

Гиппократ. Я сделаю это с удовольствием, но боюсь, ты снова подшучиваешь надо мной. Не смущай меня просьбой о помощи, а лучше разъясни вопрос, которого я не заметил.

Сократ. Ты и сам увидишь, если попытаешься подвести итоги нашей беседы.

Гиппократ. Хорошо. Когда стало ясно, почему математика может дать определенные знания о мире, отличном от мира, в котором мы живем, то есть о мире че-

ловеческого мышления, остался вопрос о том, какова польза этого познания. Сейчас мы выяснили, что мир математики — не что иное, как отражение в нашем сознании реального мира. Теперь понятно, что каждое открытие в мире математики дает некоторую информацию о действительном мире. Я полностью удовлетворен ответом.

Сократ. Если я скажу, что ответ не вполне законченный, то сделаю это не для того, чтобы смутить тебя, а потому, что уверен — раньше или позже ты сам задашь подобный вопрос и упрекнешь меня в том, что я не обратил на него твоего внимания. Ты спросишь: «Скажи мне, Сократ, какой смысл в изучении отраженных образов, если мы можем изучать сами предметы?»

Гиппократ. Ты совершенно прав, это очевидный вопрос. Ты волшебник, Сократ. Ты способен смутить меня несколькими словами и невинным с виду вопросом разрушить здание, построенное с таким большим трудом. Я могу, конечно, ответить, что если есть возможность взглянуть на оригинал, то бессмысленно рассматривать его отражение. Но я уверен, что это доказывает только то, что наше сравнение неудачное. Конечно, ответ где-то здесь, но я не знаю, как его найти.

Сократ. Твоя догадка верна, парадокс возник из-за того, что мы считали сходство отражения и образа слишком уж близким. Сходство подобно луку — если ты натягиваешь его слишком сильно, он ломается. Оставим этот пример и выберем другой. Ты, конечно, знаешь, что путешественники и мореплаватели пользуются картами.

Гиппократ. Я знаю это по собственному опыту. Ты считаешь, что математики составляют карту реального мира.

Сократ. Да. Можешь ли ты теперь ответить на вопрос: в чем преимущество взгляда на карту по сравнению со взглядом на ландшафт?

Гиппократ. Здесь все ясно: пользуясь картой, мы изучаем огромные расстояния, которые, путешествуя, мы можем разглядеть только за многие недели или месяцы. На карте показаны не детали, а только наиболее важные предметы. Поэтому карты очень полезны, если кто-либо собирается в длительное путешествие.

Сократ. Превосходно. Но мне на ум пришло еще кое-что.

Гиппократ. Что же?

Сократ. Есть другая причина, почему изучение математических представлений мира может быть полезно. Если математики обнаруживают какое-то свойство круга, это в то же время дает нам некоторую информацию о любом объекте круглой формы. Таким образом, математический метод позволяет в одно и то же время иметь дело с различными вещами.

Гиппократ. Рассмотрим следующие примеры. Если кто-либо смотрит на город с вершины близлежащей горы, он получает более полное впечатление, чем когда прогуливается по извилистым улицам. Или, когда военачальник наблюдает за передвижением вражеской армии с холма, он получает более четкую картину положения, чем солдат на переднем крае, который видит только то, что находится непосредственно перед ним.

Сократ. Хорошо, ты лучше меня придумываешь новые сравнения, но, так как я не хочу отставать, позволь мне рассказать одну притчу. Недавно я наблюдал, как рисовал Аристофан, сын Аглафона, и живописец предупредил меня: «Если ты, Сократ, подойдешь к картине слишком близко, то увидишь лишь цветные пятна, но не увидишь всей картины».

Гиппократ. Конечно, он был прав, и ты тоже, когда не дал закончить нашу беседу, прежде чем мы достигли существа вопроса. Но, я думаю, пора возвращаться в город, так как уже темнеет, а я голоден и хочу пить. Если у тебя еще осталось терпение, я хотел бы спросить тебя кое о чем по дороге.

Сократ. Прекрасно, пойдем и можешь задать свой вопрос.

Гиппократ. Наша беседа окончательно убедила меня, что я должен изучать математику, и я очень благодарен тебе за это. Но скажи мне, почему ты сам не становишься математиком? Судя по тому, как глубоко ты понимаешь окружающую природу и сознаешь важность математики, я догадываюсь, что ты превзошел бы всех математиков Эллады, если бы занялся ею. Я был бы рад пойти к тебе учеником по математике, если бы ты согласился.

Сократ. Нет, дорогой Гиппократ, это не мое дело. Теодор знает гораздо больше о математике, чем я, и ты не сможешь найти лучшего учителя. Что касается твоего вопроса, почему я не математик, я тебе скажу причину.

Я не скрываю своего высокого мнения о математике. Я думаю, что мы, эллины, ни в каком другом искусстве не продвинулись так далеко, как в математике, и это только начало. Если мы не уничтожим друг друга в безумных войнах, мы достигнем прекрасных результатов и как открыватели, и как изобретатели. Ты спросил, почему я не присоединяюсь к тем, кто развивает эту великую науку. Отвечу тебе коротко: я один из математиков, только другого рода. Внутренний голос — ты можешь назвать это прорицанием, — к которому я всегда внимательно прислушиваюсь, спросил меня много лет назад: «Каков источник огромного успеха, достигнутого математиками в их благородной науке?» Я ответил: «Я думаю, ключ к успехам математиков лежит в их методах, высоких стандартах их логических требований, стремлении к истине без малейших компромиссов, в привычке начинать всегда с первичных принципов, с определения каждого понятия, используемого точно и лишенного внутренних противоречий». Мой внутренний голос продолжал: «Очень хорошо, но почему ты думаешь, Сократ, что эти методы мышления и доказательства могут быть полезны только для изучения чисел и геометрических форм? Почему ты не попытаешься убедить своих сограждан применять те же самые высокие логические стандарты в других областях знания, например в философии и политике, при обсуждении проблем повседневной личной и общественной жизни?» С того времени именно это стало целью моей жизни. *Я уже доказал (ты помнишь, конечно, наш спор с Протагором?), что те, кого считают мудрыми, большей частью просто невежественные глупцы. Всем их рассуждениям не хватает твердого основания, поскольку — в противоположность математикам — они используют неопределенные и полусознанные понятия.* Поэтому я нажил много врагов. И не удивительно, так как для всех, кто пользуется туманными терминами, чтобы скрыть неясность содержания, я стал живым упреком. Люди не любят тех, кто постоянно напоминает им о недостатках, которые они не способны или не желают исправлять. Придет день, когда мои враги нападут и уничтожат меня. Но пока этот день не пришел, я буду следовать моему назначению. А ты все же иди к Теодору.





## ДИАЛОГ О ПРИМЕНЕНИЯХ МАТЕМАТИКИ

Архимед. Государь! Какая неожиданность в столь поздний час! Чем я обязан чести визита царя Гиерона в мой скромный дом?

Гиерон. Архимед, дорогой друг, сегодня вечером в моем дворце был пир в честь великой победы нашего маленького города Сиракузы над могущественным Римом. Я приглашал тебя, но твое место осталось пустым. Почему же ты не пришел — ты, кому главным образом мы обязаны сегодняшней победой? Твои громадные вогнутые медные зеркала подожгли десять из двадцати больших кораблей римлян. Подобные огненным факелам, они покинули гавань, гонимые юго-западным ветром, и все затонули, прежде чем достигли открытого моря. Я не смог заснуть, не поблагодарив тебя за избавление нашего города от врага.

Архимед. Они могут вернуться назад, а мы все еще окружены на материке.

Гиерон. Поговорим об этом позднее. Сначала позволь мне передать тебе в дар лучшее, что я могу дать.

Архимед. Какое замечательное произведение искусства!

Гиерон. Поднос сделан из чистого золота; ты можешь проверить это своим методом и не найдешь в нем даже следа серебра.

Архимед. Я предполагаю, на рельефе показаны приключения Одиссея. В центре я вижу беспечных троянцев, тянущих гигантского деревянного коня в свой город — мне всегда хотелось узнать, использовали ли троянцы какую-нибудь систему блоков, чтобы выполнить такую работу. Конечно, конь на колесах, но дорога в город слишком уж крута.

Г и е р о н. Дорогой Архимед, ради Зевса, забудь на минуту свои блоки. Ты знаешь, как я был удивлен, когда тяжелый корабль, который я хотел послать царю Птолемею, ты спустил на воду простым поворотом рукоятки твоего тройного блока. Но взгляни на другие сцены, изображенные на подносе.

А р х и м е д. Я узнаю Циклопа и Цирцею, превращающую спутников Одиссея в свиней, а здесь Одиссей, привязанный к мачте корабля, слушает песню сирен (если взглядеться в его лицо, то можно как бы услышать эту соблазнительную песню). Здесь Одиссей в аду встречает тень Ахиллеса, а здесь пугается прекрасной Навсикаи и ее рабынь, и вот наконец сцена, где Одиссей, переодетый старым нищим, натягивает лук и сводит счеты с поклонниками своей жены. Изумительное произведение искусства! Благодарю тебя, мой государь, это воистину царский подарок.

Г и е р о н. Это лучшая вещь из моей сокровищницы, но ты заслужил ее. Я выбрал поднос не только за его красоту и ценность. То, что ты сделал сегодня для Сиракуз, сравнимо лишь с подвигами Одиссея. Вы оба — торжество острого ума над животной силой.

А р х и м е д. Ты заставляешь старика краснеть от смущения. Но разреши снова напомнить тебе, что война еще не закончена. Хочешь ли ты услышать мой совет?

Г и е р о н. Я, как царь, даже приказываю тебе откровенно высказать свое мнение.

А р х и м е д. Настал момент, когда тебе нужно заключить мир с Римом; с тех пор как война началась, мы никогда не были в таком благоприятном положении. Если до полуночи Марцелл не пришлет посла, то до рассвета тебе следует послать к нему своего и заключить мир к заходу солнца. Марцелл жаждет отвести войска, осаждающие город, он должен использовать их против Ганнибала. Более того, если он завтра достигнет соглашения, то сможет доложить Риму о победе, хотя бы только дипломатической, несмотря на печальное известие о потере половины флота. Когда же известие о сегодняшней битве достигнет Рима, римляне так рассвирепеют, что не удовлетворятся ничем, кроме полной победы.

Г и е р о н. Твой анализ верен. Действительно, сегодня вечером я получил послание от Марцелла, в котором он предлагает мир и отход его войск на определенных усло-

виях. Однако, если бы ты знал эти условия, ты не так сильно желал бы сделки с римлянами.

Архимед. Чего же хочет Марцелл?

Гieron. Конечно, он хочет много золота и серебра, а также десять новых кораблей вместо десяти потопленных нами сегодня. Все наши укрепления должны быть разрушены, кроме одного, в котором разместятся солдаты римского гарнизона. Он хочет, чтобы мы объявили войну Карфагену, и к тому же требует выдачи ему моего сына Гелона, дочери Елены и тебя в качестве заложников. Однако при этом он обещает, что городу и его жителям не будет причинено никакого ущерба, если мы не нарушим договора.

Архимед. Возможно, он не будет настаивать на выполнении всех условий, хотя и потребует, чтобы ты выдал ему меня.

Гieron. Ты говоришь об этом спокойно. Но, клянусь богами Олимпа, пока я жив, я не отдам в руки врагов ни своих детей, ни тебя! Я не пожалею золота и кораблей, он может их взять. Но больше всего в его условиях меня возмущает то, что, если мы согласимся с ними, мы окажемся полностью в его власти. Кто поручится мне, что он выполнит договор? Ведь он не дает мне ни одного заложника.

Архимед. Не в том дело, сдержит ли он свое слово; римляне спесивы, по крайней мере во время переговоров. Но, вероятно, ты сможешь избежать выдачи ему твоих детей.

Гieron. А ты? Готов ли ты на подобную жертву для своего города?

Архимед. Это вопрос или просьба?

Гieron. Только вопрос, конечно. Хочешь знать, что я ответил Марцеллу?

Архимед. Ты уже ответил?

Гieron. Да. Я принял все его условия, кроме одного — отдать тебя в качестве заложника. Я согласился отдать ему сына и дочь, но при условии, что он пришлет мне двух своих детей. Что касается тебя, я сказал ему, что преклонные года не позволяют тебе жить в лагере. Однако, зная, что в действительности ему нужен не ты сам, а твоя мудрость, я обещал, что ты подробно опишешь ему все свои изобретения, имеющие военное значение.

Архимед. Я ничего не буду писать о моих изобретениях относительно способов ведения войны.

Гиерон. Почему же? Если настанет мир, мы не будем больше нуждаться в них. Объясни, почему ты отказываешься писать о своих изобретениях.

Архимед. Если у тебя есть терпение, я выскажу свои доводы.

Гиерон. Готов тебя слушать. Я хочу дождаться ответа от Марцелла.

Архимед. Тогда у нас времени более чем достаточно, ведь Марцеллу нужен срок для составления ответа, который прозвучит подобно удару хлыста.

Гиерон. Ты думаешь, он прервет переговоры?

Архимед. Конечно, ты оскорбил его честь. Он никогда не простит этого — соглашение не будет достигнуто.

Гиерон. Возможно, ты прав.

Архимед. Я всегда восхищался тем, как ловко ты проникал в сердца врагов. Но на этот раз ты пренебрег своим искусством.

Гиерон. Допускаю. Возможно, я был слишком опьянен вином и победой. Но что сделано, то сделано. Теперь я хочу услышать твои доводы.

Архимед. Хотя вопрос чисто теоретический, я объясню свою точку зрения. Ты сравнил мои машины с деревянным конем троянцев. Действительно, это сравнение очень удачное, но в совершенно другом смысле. Одиссей использовал деревянного коня, чтобы вместе с греками тайно проникнуть в Трою. Я же использовал мои машины для того, чтобы в общественный разум Греции проникла мысль о том, что математика — не только ее элементы, но и наиболее утонченные части — может успешно применяться для практических целей. Должен сознаться, я долго колебался, прежде чем сделать это, потому что ненавижу войну и убийство. Но война уже началась, и это единственная возможность сделать так, чтобы меня поняли. Я пробовал иные пути, но напрасно. Позволь напомнить тебе, что несколько лет назад, когда я предложил насос для откачки воды из шахт, ты не заинтересовался. Твой управляющий сказал, что его вовсе не волнует то обстоятельство, что ноги рабов становятся мокрыми, по его словам, они сделаны не из соли. А помнишь ли, когда я предложил сделать машину для поливки полей, ты сказал мне, что труд раба обходится дешевле. А когда я

предложил использовать силу пара для управления мельницами царя Птолемея, каков был его ответ? Он сказал, что мельницы, которые служили его предкам, будут служить так же хорошо и ему. Напомнить ли другие случаи? Их по меньшей мере еще дюжина. В мирное время все мои попытки показать, на что способна математика, были напрасны. Но когда разразилась война, ты вдруг вспомнил о моих блоках, зубчатых колесах и рычагах. В мирное время каждый считал мои изобретения игрушками, недостойными серьезного, взрослого гражданина, тем более философа. Даже ты, который всегда поддерживал меня и помогал воплощать мои идеи в жизнь, относился к ним совершенно несерьезно. Ты только развлекал ими своих гостей. Затем началась война и корабли римлян закрыли гавань; я рискнул заметить, что, бросая в них камни с помощью катапульты, мы могли бы отогнать их. Ты ухватился за эту идею. Я же не смог взять назад свои слова и был вынужден идти дальше. Встав на подобный путь, я поневоле должен был продолжать. Мое отношение к этому было с самого начала противоречиво. Конечно, я был счастлив, что над моими изобретениями больше не смеялись и мне наконец удалось показать миру, как действенна математика. Но это был не тот вид деятельности, которым я хотел бы доказать практическую ценность математических идей. Я увидел людей, убитых моими машинами, и почувствовал себя виновным. Я дал торжественную клятву Афине, что никому никогда не открою секрет моих военных машин ни устно, ни письменно. Я пытался успокоить совесть, говоря себе, что новость о победе Архимеда над римлянами с помощью математики достигнет всех уголков мира, говорящего на греческом языке, это будут помнить даже тогда, когда война закончится и секреты моих военных машин будут похоронены вместе со мной.

Гиерон. Это правда, мой дорогой Архимед, я получаю вести от властителей, с которыми я поддерживаю дружеские отношения, — они интересуются твоими изобретениями.

Архимед. И что же ты отвечаешь им?

Гиерон. Я говорю, что, до тех пор пока продолжается война, на эти вопросы не могут быть даны ответы.

Архимед. Надеюсь, ты понял, почему я не обнаружую своих секретов. Мне удалось их сохранить даже от

тех, кто выполнял мои планы. Каждый знает только несколько деталей. Я рад, что ты никогда не задавал мне вопросов, потому что я вынужден был бы отказаться отвечать на них.

Гиерон. Но теперь я все же задам тебе несколько вопросов. Не бойся, я буду спрашивать не о твоих секретах, а только об основополагающих принципах.

Архимед. Думаю, что смогу ответить на такие вопросы, не преступив своей клятвы.

Гиерон. Прежде чем начать, я хотел бы спросить тебя еще кое о чем. Почему так важно было для тебя, чтобы с твоими идеями о пользе математики все согласились?

Архимед. Вероятно, я был просто глупцом, но я полагал, что мог бы изменить ход истории. Я был обеспокоен будущим Греции и думал, что, если бы мы применяли математику в больших масштабах — в конце концов математика является изобретением греков и лучшим достижением греческого ума, — мы могли бы спасти наш греческий образ жизни. Теперь, я считаю, уже поздно. Римляне завоюют не только Сиракузы, но и все остальные греческие города, наше время кончается.

Гиерон. Но даже если это случится, греческая культура не исчезнет бесследно: римляне переймут ее. Взгляни, как они уже сейчас пытаются подражать нам. Они копируют наши статуи, переводят нашу литературу — и, ты видишь, Марцелл заинтересовался твоей математикой.

Архимед. Римляне никогда ее не поймут. Они слишком практичны и не интересуются абстрактными идеями.

Гиерон. Они определенно заинтересовались ее практическим использованием.

Архимед. Но эти вещи неразделимы. Нужно быть мечтателем из мечтателей, чтобы успешно применять математику на практике.

Гиерон. Это звучит достаточно парадоксально. Я думал, прежде всего надо иметь практический склад ума, для того чтобы применять математику. Вот я и подошел к первому вопросу. Что в действительности является секретом новой науки, которую ты изобрел, — назовем ее прикладной математикой? И в чем главное различие между твоей прикладной математикой и тем видом математики — назовем ее чистой математикой, — которой обучают в школе?



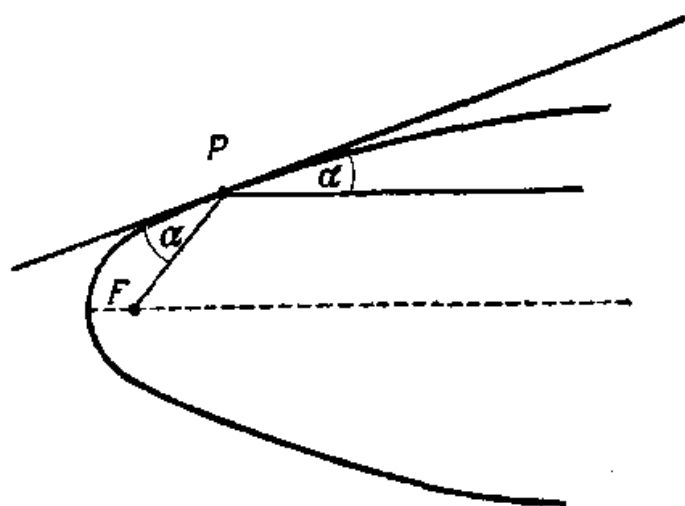
Архимед. Прости, но я разочарую тебя. Не существует иной математики, кроме той, которой наши учителя обучали нас, и не без успеха, как я вспоминаю. Прикладной математики, отличной от математики как таковой, не существует. Мой секрет так хорошо скрыт, потому что он вовсе не является секретом; его очевидность — лучшая маскировка. Он спрятан подобно золотой монете, брошенной в пыль на улице.

Гиерон. Ты хочешь сказать, что твои изумительные машины основаны на математике, которую знает каждый образованный человек?

Архимед. Ты недалек от истины.

Гиерон. Можешь ли ты привести пример?

Архимед. Хорошо. Возьмем в качестве примера зеркало, которое сегодня сослужило такую превосходную службу. Я просто использовал хорошо известное свойство параболы: если какую-нибудь точку  $P$  параболы соединить с фокусом параболы, а затем провести через  $P$  прямую, параллельную оси, то эти две линии образуют равные углы с касательной к параболе в точке  $P$ . Эту теорему можно найти в трудах моих знаменитых коллег из Александрии.



Гиерон. Трудно поверить, что ты уничтожил половину флота Марцелла с помощью простой теоремы, одной из сотен подобных ей. Я смутно помню ее, хотя и забыл доказательство.

Архимед. Вероятно, когда ты услышал одно из ее остроумных доказательств, ты понял его и, возможно,

даже восхищался его красотой и изяществом, но и только. Некоторые математики пошли дальше — они исследовали простые следствия или нашли новые доказательства, но на этом остановились. Я просто продвинулся еще на один шаг: я увидел также ее нематематические следствия.

Гиерон. Я думал, ты открыл новые законы оптики.

Архимед. Оптика — всего лишь ветвь геометрии. Я применил закон отражения лучей, уже давно известный.

Гиерон. Ты имеешь в виду, что, применяя математику, не обязательно получать новые математические результаты, надо только практические ситуации и их математические образы связывать с некоторыми хорошо известными математическими теоремами?

Архимед. Это совсем не так просто. Часто случается, что теоремы, в которой кто-то нуждается, не существует, и тогда приходится самому находить и доказывать ее. Но даже если для практической ситуации не обязательно находить математический образ, как ты говоришь (я предпочитаю называть его математической моделью), это не то же самое, что подобрать пару перчаток. Прежде всего для одной и той же практической ситуации можно сконструировать много математических моделей и выбрать наиболее подходящую из них, которая соответствует ситуации настолько близко, насколько того требует практическая цель (она может даже не соответствовать ей полностью). В то же время модель должна быть не слишком сложной и математически осуществимой. Все эти требования, конечно, противоречивы, и необходимо искусное балансирование ими. Нужно найти хорошее приближение к реальной ситуации по всем важным для наших целей пунктам и пренебречь теми, которые не важны для нас. Модель не обязана быть подобной моделируемому явлению во всех деталях, а только в тех из них, которые действительно важны. С другой стороны, одна и та же математическая модель годится для совершенно различных практических ситуаций. Например, я использовал свойства параболы при конструировании катапульты, так как путь камня, брошенного катапультой, до некоторой степени может быть аппроксимирован параболой. Я использовал параболу еще при подсчете глубины погружения корабля под действием собственного

веса. Конечно, поперечное сечение корабля не имеет точной формы параболы, но более реалистическая модель не была бы математически осуществима. Тем не менее результаты достаточно хорошо согласуются с фактами. В частности, я смог найти условия, при которых корабль, находясь под действием волн и ветра, сохранит вертикальное положение, потому что его центр тяжести будет стремиться занять самое низкое возможное положение. Пытаясь описать сложную ситуацию, можно применять очень грубую модель, так как даже она дает, по крайней мере качественно, правильные результаты. А это может иметь большее практическое значение, чем количественные результаты. Мой опыт доказывает, что самая грубая математическая модель помогает лучше понять практическую ситуацию, так как при создании математической модели мы стремимся учесть все логические возможности, однозначно определить все понятия и различить важные и второстепенные факторы.

Гиерон. Даже если математическая модель приводит к результатам, отличным от действительности, она может быть полезна, так как недостатки одной модели могут быть учтены при создании другой, лучшей модели. Мне кажется, прикладная математика похожа на войну: иногда поражение ценнее победы, так как помогает найти недостатки нашего оружия или стратегии.

Архимед. Теперь ты действительно постиг существо проблемы.

Гиерон. Расскажи мне что-нибудь еще о своих зеркалах.

Архимед. Я уже изложил тебе основную идею. После того как я пришел к мысли использовать упомянутые свойства параболы, нужно было разрешить проблемы обработки и полировки металлического зеркала в форме вогнутого параболоида вращения, однако я предпочел бы не говорить об этом. Конечно, я также должен был выбрать подходящий сплав.

Гиерон. Даже не вникая в твои секреты, я понял, что, кроме свойств параболы, ты должен многое знать о металлах и об искусстве их обработки. Выходит, что знаний математики недостаточно, если кто-то хочет применять их на деле. Не похож ли человек, желающий применять математику, на человека, пытающегося ехать верхом на двух лошадях одновременно?

Архимед Я немного тебя поправлю тот кто намерен применять математику похож на человека который хочет запрячь двух лошадей в одну повозку И это не так уж трудно сделать Конечно при этом необходимы некоторые познания как о лошадях, так и о колесницах, но каждый из твоих возничих обладает подобными знаниями



Гиерон Теперь я совершенно запутался я все время считал, что прикладная математика — это какое то таинство а ты показал, что в действительности все очень просто Но когда я убедился что это на самом деле просто, ты показал мне что все гораздо сложнее, чем я себе представлял

Архимед Принципы очевидны, но детали иногда бывают очень запутаны

Гиерон Я все еще не понимаю, что ты подразумеваешь под математической моделью Расскажи мне об этом подробнее

Архимед. Помнишь ли ты сферу, которую я построил несколько лет назад для демонстрации движения Солнца, Луны и пяти планет, с помощью которой можно показать, как происходят затмения Солнца и Луны?

Гиерон. Конечно, ведь это одна из диковин в моем дворце, которую я показываю всем гостям; каждый думает, что это нечто удивительное. Может быть, это математическая модель Вселенной?

Архимед. Нет. Я назвал бы ее физической моделью. Математические модели невидимы. Они существуют только в нашем сознании и могут быть выражены в формулах. Математическая модель Вселенной — нечто общее между действительным миром и моей физической моделью. В физической модели, например, каждая планета — крошечный шар размером с апельсин. В математической модели Вселенной планеты изображаются просто точками.

Гиерон. Мне кажется, я начинаю понимать, что именно ты имеешь в виду под математической моделью. Вернемся к примеру с лошадьми. Искусство запрягать лошадей и править ими — это совершенно не то, что разводить лошадей. Не является ли искусство прикладной математики чем-то совершенно отличным от открытия и доказательства теорем?

Архимед. Ты, конечно, прав, хотя человек, который выращивает лошадей, обычно знает о них все и может управлять ими лучше, чем кто-либо другой. Что касается математики, то я подчеркнул раньше: для успешного применения нужно глубокое понимание ее, и если кто-то хочет применить математику к новым объектам, он должен быть творческим математиком. И наоборот, интерес к применениям может помочь в чисто математических исследованиях.

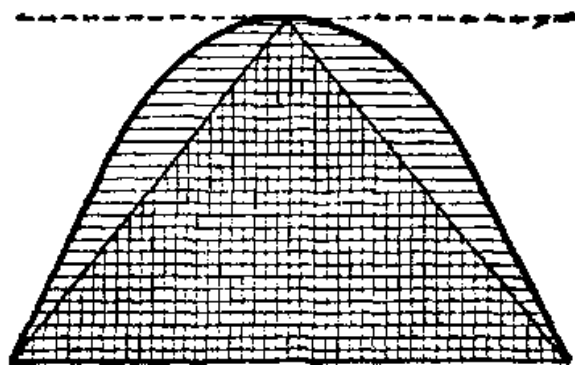
Гиерон. Как это возможно? Не приведешь ли ты какой-нибудь пример?

Архимед. Вероятно, ты помнишь, что одно время я очень интересовался механикой, а более точно — нахождением центров тяжести тел. Результаты, которые я получил, помогли мне не только построить механизмы, но и доказать новые геометрические теоремы. *Я разработал специальный метод исследования геометрических задач с помощью механики и использования центров тяжести фигур. Метод эвристический — не дающий точного доказательства, но благодаря ему многие теоремы становились*

мне ясны. Конечно, позднее теоремы, открытые посредством моего механического метода, я строго доказывал традиционными методами геометрии. Найти доказательство значительно легче, если предварительно уже получены некоторые сведения из механических аналогий и, таким образом, известно, что должно быть доказано.

Гиерон. Укажи мне какую-нибудь теорему, которую ты нашел таким странным путем.

Архимед. Площадь любого сегмента параболы равна четверем третям площади треугольника, который имеет то же основание и ту же высоту. После обнаружения результата я доказал его с помощью традиционных методов.



Гиерон. Если ты установил эти теоремы с помощью механики, зачем тебе нужно еще геометрическое доказательство?

Архимед. Когда я открыл мой метод, результаты, полученные с его помощью, были не совсем точны; позднее, анализируя случаи, когда этот метод вводил меня в заблуждение, я настолько развил его, что теперь он никогда не подводит меня. Но я еще не уверен до конца, что результаты, полученные таким путем, действительно верны. Может быть, однажды кто-нибудь докажет это. Но до сих пор я не имею полной уверенности в методе.

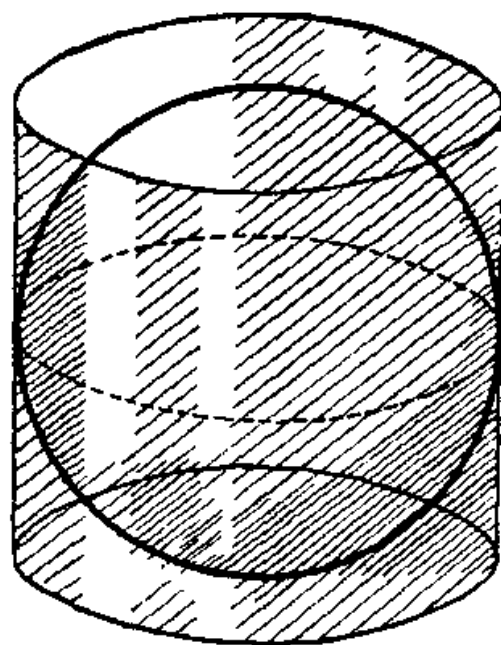
Гиерон. Но разве в прикладной математике так уж необходимы строгие доказательства? Ты сказал, что математическая модель — это только приближение к действительности. Если ты используешь приблизительно точную формулу, твои результаты будут все так же приближительны, и, во всяком случае, они никогда не могут быть абсолютно точными.

Архимед. Ты ошибаешься, мой государь. Именно потому, что математическая модель — это только прибли-

жение к действительности и всегда имеется некоторое отличие от нее, нужно остерегаться и не увеличивать это различие еще больше небрежным использованием математики. Надо быть как можно более точным. Кстати, относительно приближений существует общее заблуждение, что использование их означает отклонение от математической точности. Приближения имеют точную теорию, и результаты о приближениях, например неравенства, должны доказываться так же строго, как и тождества. Возможно, ты помнишь приближения для площади круга с заданным диаметром. Я доказал их со строгостью, обычной в геометрии.

Г и е р о н. К каким еще результатам ты пришел при помощи механического метода?

А р х и м е д. Этот метод привел меня также к открытию того, что *объем сферы равен двум третям объема описанного около нее цилиндра.*



Г и е р о н. Я слышал, ты хочешь, чтобы после смерти на твоём надгробии была начертана эта теорема. Ты считаешь ее своим самым выдающимся достижением?

А р х и м е д. Я считаю, что сам по себе метод гораздо важнее, чем любые частные результаты, которые я получил с его помощью. Ты помнишь, я однажды сказал о рычагах: *«Дайте мне точку опоры — и я сдвину земной шар»*? Конечно, на Земле нет такой точки. Однако в математике имеется точка, на которую можно опереться, — это аксиомы и логика.

Г и е р о н. Ты все время говоришь о прикладной математике, но примеры, которые ты даешь, относятся к геометрии. Как можно применять геометрию, я теперь вижу. Например, функционирование машины зависит от формы и размеров ее деталей. Путь камня, брошенного твоей катапультой, есть кривая, ты сказал, близкая к параболе. Но как обстоит дело с другими ветвями математики, скажем теорией чисел? Мне даже трудно себе представить, что она может иметь какую-нибудь практическую ценность. Конечно, я не говорю об элементах арифметики, которые используются в любых вычислениях. Я имею в виду понятия делимости, простых чисел, наименьшего кратного и другие, подобные им.

А р х и м е д. Если ты соединяешь два зубчатых колеса с разным количеством зубьев, то с наименьшим кратным сталкиваешься неизбежно. Тебе достаточно этого простого примера? Недавно я получил письмо от моего друга Эратосфена Киренского, в котором он пишет о простом, но остроумном методе (он называет его методом решета) для нахождения простых чисел. Думая о его методе, я сделал эскиз машины, которая реализует его идею. Эта машина работает с набором зубчатых колес. Ты поворачиваешь ручку несколько раз, скажем  $n$ , смотришь в отверстие и видишь просвет, значит,  $n$  — простое число; если же просвет закрыт,  $n$  — число, не являющееся простым.

Г и е р о н. Это в самом деле забавно. Когда кончится война, ты должен построить такую машину. Моим гостям она понравится.

А р х и м е д. Обязательно сделаю ее, если буду жив. Это покажет, что машины могут решать математические проблемы. Надеюсь, математики наконец-то поймут, что даже с их собственной точки зрения они могут кое-что выиграть, изучая взаимосвязь математики и машин.

Г и е р о н. Говоря о выигрышах, я вспоминаю историю о Евклиде. Один из учеников, изучавший геометрию, спросил его: *«Что я выиграю от изучения этих вещей?»* Евклид позвал своего раба и сказал: *«Дай ему монету, так как он хочет иметь доход от того, что изучает»*. Мне кажется, Евклид думал, что математикам не обязательно заботиться о практическом использовании их результатов.

А р х и м е д. Я, конечно, слышал этот анекдот, но ты



удивишься, если узнаешь, что я полностью согласен с Евклидом. На его месте я бы сказал что-нибудь в этом же роде.

Г и е р о н. Ты опять сбил меня с толку. До сих пор ты восторженно говорил о применениях математики, а теперь соглашаешься с теми, кто думает, что единственная награда, которой ученый должен добиваться, — наслаждение от познания.

А р х и м е д. Ты да и большинство других неправильно понимаете историю о Евклиде. Не думай, что он не интересовался практическими следствиями из математических результатов и считал, что они недостойны философа. Это полная бессмыслица. Он написал, ты, конечно, знаешь, книгу об астрономии под названием «Явления» и книгу об оптике; я уверен, что он также автор книги «Катоптрика» — ее я использовал при конструировании моих зажигательных зеркал. Он также интересовался механикой. Как я понимаю, Евклид хотел подчеркнуть тот замечательный факт, что математика награждает только тех, кто интересуется ею не столько из-за наград, сколько ради нее самой. Математика похожа на твою дочь Елену, которая всякий раз подозревает поклонника, что он интересуется ею только потому, что хочет стать зятем царя. Она хочет такого мужа, который любил бы ее за красоту, ум, обаяние, а не за силу и власть, которую он сможет получить, женившись на ней. Математика также открывает свои тайны только тому, кто приближается к ней с чистой любовью, ради ее собственной красоты. И те, кто делает так, вознаграждаются результатами практической важности. Но если спрашивать себя на каждом шагу: «Какая польза от этого?», то невозможно достичь многого. Ты помнишь, я сказал тебе, что римляне никогда не смогут добиться успеха в прикладной математике. Теперь ты видишь, почему: они слишком практичны.

Г и е р о н. Я думаю, что мы должны были учиться у римлян, тогда нам было бы легче воевать с ними.

А р х и м е д. Я не согласен с тобой. Если мы попытаемся одержать победу, отказавшись от собственных идей, лишь подражая нашим противникам, то мы проиграем уже до начала сражения. Даже если бы мы выиграли войну таким путем, это не было бы настоящей победой. Такая победа хуже поражения.

Г и е р о н. Не станем говорить о войне и вернемся к

математике. Расскажи, как ты конструируешь свои математические модели?

Архимед. Это трудно объяснить популярно, если не прибегнуть к аналогии. Математическая модель действительной ситуации — это нечто подобное тени на экране разума.

Гиерон. Мне кажется, твоя философия — полная противоположность философии Платона. Он говорит, что реальные вещи — это тени идей, ты же, если я правильно понял значение твоих слов, говоришь, что идеи — тени действительности.

Архимед. Эти две точки зрения не так далеки друг от друга, как кажется. Платон был озадачен соответствием между математическими идеями и действительностью. Он думал, что главная цель философии — объяснить это соответствие. До этого пункта я согласен с ним полностью. Я не согласен с его объяснением. Но он по крайней мере ясно видел проблему и пытался разработать один из логически возможных ответов. Однако, я думаю, нам нужно оставить философию и вернуться к действительности. Я слышу, кто-то стучит в дверь. Пойду открою.

Гиерон. Позволь мне сделать это. Должно быть, прибыл мой гонец с ответом Марцелла. Вот донесение.

Архимед. Каков же ответ Марцелла?

Гиерон. Прочти сам.

Архимед. «Марцелл посылает свои приветствия царю Гиерону и извещает, что он завоюет Сиракузы до полнолуния. Тогда царь Гиерон поймет, что римлянин держит свое слово».

Гиерон. Что ты теперь думаешь об этом?

Архимед. Его греческий действительно неплох. Что касается содержания, то оно такое, какого я и ожидал.

Гиерон. Верно, твое предсказание было так же правдиво, как если бы ты нашел его своим методом.

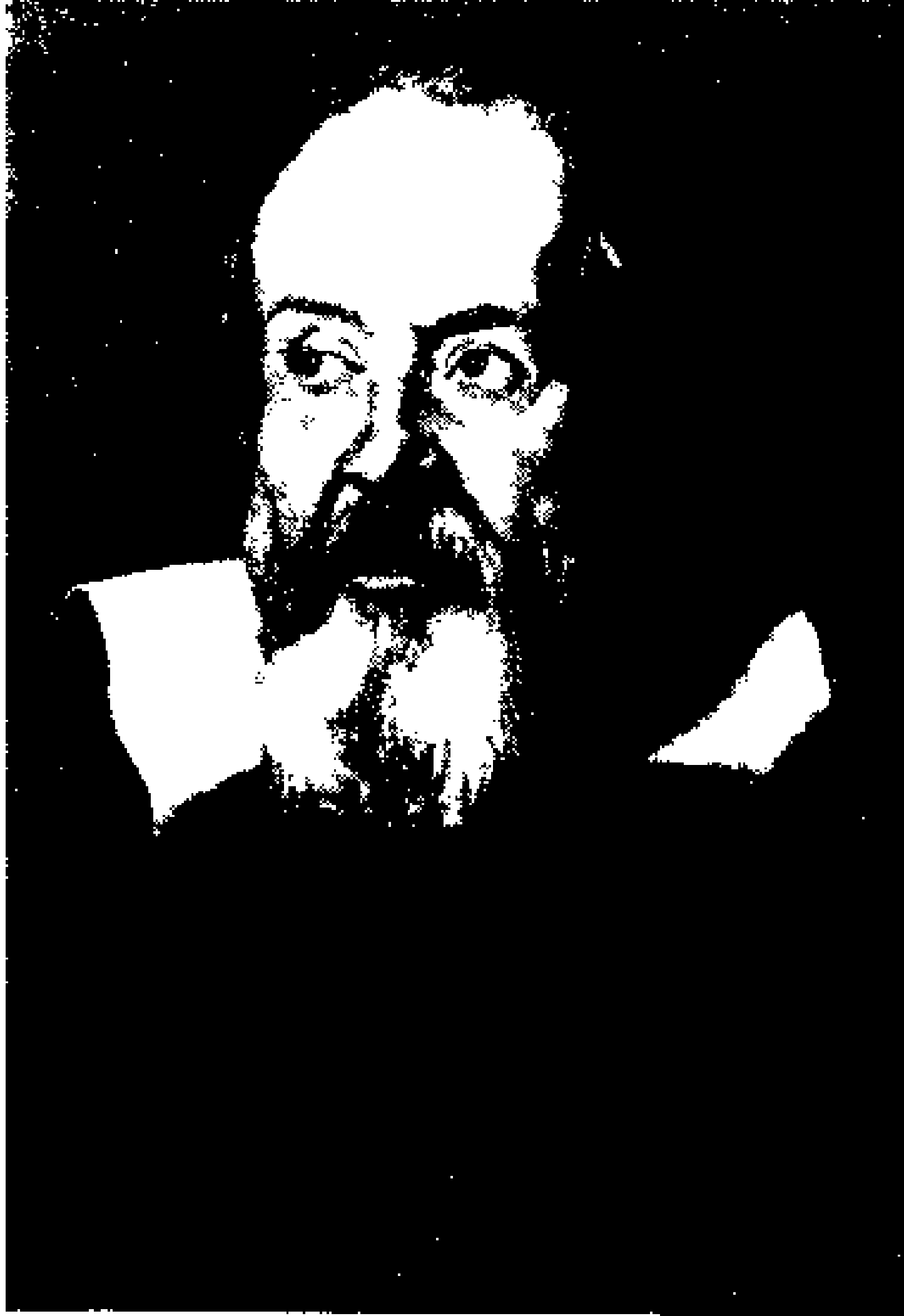
Архимед. Итак, наконец мы знаем, чего ожидать.

Гиерон. Я должен идти. Я хочу немного поспать. Завтра необходимо подготовиться к новой атаке. Спасибо за интересный разговор.

Архимед. Я получил большое удовольствие. У меня не часто бывает возможность поговорить о современной математике. Спасибо еще раз за удивительный поднос.

Гиерон. Рад, что он понравился тебе. Спокойной ночи, мой друг. Я думаю, ты тоже нуждаешься в отдыхе.

Архимед. Спокойной ночи, мой государь. Я не буду спать. Я хочу закончить письмо к моему другу Досифею Пелузиумскому о моих самых последних открытиях. Сейчас римский флот ушел, но послезавтра, возможно, римляне вновь установят блокаду, поэтому завтра, очевидно, некоторые корабли покинут гавань. Я хочу воспользоваться удобным случаем. Он может быть последним.



Гад Лоп

## ДИАЛОГ О ЯЗЫКЕ КНИГИ ПРИРОДЫ

Торричелли. Позвольте мне представиться, синьора. Я — Эванджелиста Торричелли, ученик аббата Кастелли.

Синьора Никколини. А, так вы — тот самый молодой человек, который написал восторженное письмо и назвал себя последователем Коперника и Галилея?

Торричелли. Многие из нас, молодых людей, мечтают о подобном пути. От аббата Кастелли я услышал о новой работе, которую начал писать учитель, и хочу поговорить с ним.

Синьора Никколини. Разве вы не знаете, что Галилей — узник Святейшего суда. Вопреки обыкновению ему разрешили жить здесь, в доме моего мужа, только потому, что великий герцог Тосканский очень просил об этом. Мой муж, посланник великого герцога, обещал никого не допускать к Галилею.

Торричелли. Никто не знает, что я пришел, — за мной не следили.

Синьора Никколини. Хорошо, но только потому, что я уверена — пожилому человеку приятно поговорить с тем, кто разделяет его идеи. Из-за отсутствия других слушателей он иногда рассказывает о своей новой работе мне, но я не всегда понимаю его. Сегодня он в замечательном настроении, потому что впервые хорошо спал ночью после многих бессонных недель. Идите за мной. Если кто-либо вдруг увидит вас, мы скажем, что вы мой родственник и пришли навестить меня.

Торричелли. Спасибо, синьора, вы оказываете мне большую честь.

Синьора Никколини. Сюда, пожалуйста... Синьор Галилей, я привела гостя, которому вы будете рады, Эванджелисту Торричелли.

Галилей. Конечно, я очень рад. Как прекрасно, что ты не побоялся навестить старика, подозреваемого в ереси.

Торричелли. Я и мои друзья считаем вашу книгу о двух великих космических системах<sup>1</sup> своей Библией. От аббата Кастелли я слышал, что сейчас вы работаете над новой книгой, которая превзойдет все, что было когда-либо написано по механике. Я пришел узнать хоть что-нибудь о ней.

Галилей. Я давно собирался написать эту книгу. Несколько месяцев назад я наконец начал работать над ней, но моя работа была прервана, так как меня вызвали сюда, в Рим, на суд инквизиции. С тех пор у меня не было времени написать ни строчки. Однако я не желаю ничего другого, только бы закончить эту книгу, в которой я соберу все знания о движении. Это будет, конечно, лучшая из моих работ. Но я очень боюсь, что не смогу довести ее до конца. Даже если я одержу победу в борьбе, к которой меня вынудили, это будет Пиррова победа, так как у меня не хватит сил закончить свою книгу.

Торричелли. Я был бы рад узнать что-нибудь о ее содержании.

Галилей. Греческие математики достигли замечательных результатов в своих работах, а некоторые из них, например Архимед, великолепно применили свои результаты на практике. Но они отошли от математического изучения движения, и с тех пор никто не пытался сделать это. В моей работе, если я ее когда-нибудь закончу, наиболее существенной частью будет именно математическое описание движения.

Торричелли. В самом деле, не понятно, почему греки не попытались сделать это? В чем здесь причина?

---

<sup>1</sup> Речь идет о системах мира Клавдия Птолемея (II век н. э.) и Николая Коперника (1473—1543). Согласно Птолемею, центром мира является Земля, вокруг которой вращается Солнце и планеты. Согласно Копернику, планеты, в том числе и Земля, обращаются около Солнца. Система Птолемея поддерживалась католической церковью, а учение Коперника преследовалось ею. См. Галилео Галилей, *Диалог о двух главнейших системах мира — птолемеевой и коперниковой*, Госуд. изд-во технико-теоретической литературы, М.—Л., 1948.— *Прим. ред.*

Галилей. Греческие философы часто обсуждали движение. Рассмотрим, например, парадоксы Зенона об Ахиллесе и черепахе и о стреле. Зенон стремился показать, что движение невозможно. Он хотел сказать, что понятие движения противоречиво и потому движение не может быть описано математическими методами. Аристотель пытался опровергнуть парадоксы Зенона, но доказал только то, что известно каждому ребенку, а именно что движение существует. Настоящим опровержением парадоксов Зенона могло бы быть только математическое описание движения. Аристотель даже не старался сделать это. Моя работа, если она когда-либо будет закончена, станет первым подлинным опровержением парадоксов Зенона. И Аристотель и Зенон утверждали, что изучение движения не может быть задачей математики. Однако мотивировки Аристотеля и Зенона в корне различны. Согласно Аристотелю, естественные науки имеют дело с независимо существующими, но изменяющимися объектами, в то время как математика — с неизменными, но взаимосвязанными объектами, а взаимосвязанные и изменяющиеся объекты, и среди них движение, не могут быть предметом какой-либо науки. Таким образом, уже около 2000 лет запрет Аристотеля уводит математиков и философов от математического изучения движения. Несомненно, что его ошибочное учение зиждется на искусственном барьере между математикой и естественными науками, который только несколько человек осмелились переступить.

Торричелли. Я ожидаю многого от вашей работы. Позорно, что вам, учитель, досаждали нелепыми предписаниями, всячески мешая в написании книги, которая откроет новый век в науке. Но разрешите спросить вас: почему вы приехали в Рим, а не укрылись в каком-нибудь месте, где бы вас не беспокоили?

Галилей. Что я мог сделать? Меня вызвала инквизиция.

Торричелли. Вы могли бы бежать туда, где вас не достала бы рука инквизиции.

Галилей. *Когда я приехал в Рим, я все еще надеялся убедить церковь, что вопрос о движении мира не есть вопрос веры, а является фактом, обсуждение которого должно быть предоставлено науке. Я чувствовал, что обязан — не только перед наукой, но и перед церковью —*

объяснить это. Для церкви поддерживать систему Птолемея — все равно что оставаться на борту тонущего корабля. Я попытался показать это в своем «Диалоге» и надеялся, что, если бы представился удобный случай лично высказать свои аргументы, я смог бы убедить церковь изменить мнение относительно теории Коперника. *Я был уверен, что смог бы убедить папу, которого я знал раньше, когда он был еще кардиналом Маффео Барберини, стать на мою сторону. Он воздал мне много почестей — возможно, ты слышал, однажды он даже посвятил мне поэму. И я всегда знал его как друга науки.* Ведь он начал свою деятельность в качестве папы с освобождения из тюрьмы несчастного Кампанеллы. Я был уверен, что в интересах церкви — предоставить науке свободу в изучении вопроса движения мира. Но мои надежды не оправдались — папа не захотел даже слышать обо мне. Мои враги убедили папу, что в «Диалоге» в образе глупого Симплицио я изобразил его, и теперь старая дружба превратилась в ненависть. Возможно, ты прав, мне не следовало приезжать в Рим, но сейчас слишком поздно говорить об этом.

Торричелли. Я не считаю, что слишком поздно. Разрешите мне высказаться напрямик?

Галилей. У меня нет секретов от синьоры Никколини — это мой самый лучший друг. Она убедила своего дядю отца Рикарди разрешить публикацию моего «Диалога». С тех пор как я живу здесь, она по-матерински заботится обо мне, всегда думает о том, как утешить меня, как помочь вынести все те страдания, которые я вынужден терпеть. При ней ты можешь говорить искренне.

Торричелли. Не сомневаюсь в этом. Когда синьора Никколини разрешила мне посетить вас, я понял, что могу доверять ей. Но в наше время даже стены имеют уши.

Синьора Никколини. В этом доме вы можете говорить спокойно.

Галилей. Ты можешь верить этому, мой юный друг. Несколько дней назад синьора Никколини уволила одного из слуг, так как выяснилось, что он шпионил для инквизиции. Она не говорила мне об этом, потому что не хотела расстраивать меня. Не так ли, Катарина?

Синьора Никколини. Ну, поскольку вы уже как-то узнали об этом, я признаюсь. Но остальным слу-



гам я доверяю. Все они флорентийцы и верные люди. Вы можете говорить открыто. То, что вы скажете, останется между нами.

Торричелли. Я и мои друзья, называющие себя последователями Галилея, уже все подготовили для вашего побега. Прежде всего мы переправили бы вас в Венецию. Там некоторое время вы были бы в безопасности, так как Республика не выдаст вас инквизиции ни при каких обстоятельствах. При желании вы могли бы уехать в Нидерланды, где имеются условия для спокойной работы и где ваша новая книга могла бы быть издана. Мы предусмотрели все детали и, если вы скажете «да», немедленно договоримся о дате побега.

Галилей. Мои хозяева несут ответственность за меня, и я не хочу причинять им беспокойства. Не говоря уже обо всем остальном, одной этой причины вполне достаточно, чтобы отклонить ваше предложение.

Торричелли. Мы и это предусмотрели. Наш план — выволить вас из рук самой инквизиции, когда в следующий раз вас поведут в Священную конгрегацию на допрос. Это произойдет на улице, и потому никто не сможет обвинить синьора Никколини. У нас есть верные люди, которые легко могли бы справиться с охраной.

Галилей. Не могу даже высказать, до чего мне приятно узнать, что молодежь хочет освободить меня. Однако, как ни привлекателен такой план, он неосуществим, потому что мое старое тело не смогло бы выдержать всех лишений подобного путешествия. Возможно, ты слышал, что недавно я был серьезно болен и еще не совсем поправился.

Торричелли. Об этом мы тоже подумали. Один из моих друзей — врач, он мог бы устроиться среди сопровождающих и заботиться о вашем здоровье. Маршрут разработан до мельчайших деталей. Для каждой ночной остановки от Рима до Венеции мы предусмотрели надежные места. Конечно, во время этого путешествия мы не сможем обеспечить вам такой же комфорт, какой создан в этом доме. Но не забывайте, что в любой момент вас могут перевести в тюрьму Священной конгрегации. Я полагаю, что если бы вам пришлось выбирать между жилищем честного пастуха и тюрьмой, то вы бы не долго думали.

Галилей. Мой юный друг, я ценю твои намерения.

Но ты не можешь представить себя на месте старика. Не будем больше говорить об этом и допустим, что я смог бы пережить все трудности этого путешествия. Но ты ведь не спросил меня, хочу ли я покинуть Рим навсегда.

Торричелли. Вы только что признали, что вам не следовало приезжать в Рим. Я думал, это означает, что, если бы представился удобный случай, вы были бы готовы бежать.

Галилей. Ты не понял меня. Я не могу отступить. Мне необходимо довести эту борьбу до конца, если даже мои шансы много хуже, чем я думал, когда приехал сюда. Если я сбегу, мои враги останутся победителями. Свобода научного поиска в Италии будет утрачена. Именно из-за вас, молодого поколения, я не могу бежать.

Торричелли. Я не понимаю вас, учитель. Раньше вы говорили, что огорчились из-за того, что не можете рассчитывать на помощь папы. В ком же вы можете быть уверены? Я полагаю, среди иезуитов многие знают, что вы правы. Но, надеюсь, вы не думаете, что они осмелились бы спорить с папой. Недавно я говорил с отцом Гринбергером и спросил его открыто, что он думает о вашем «Диалоге».

Галилей. И что же ответил этот достойный монах?

Торричелли. Он хотел оставаться верным и своей научной совести и церкви одновременно. Он сказал, что ценит вашу кристально ясную логику и непревзойденные знания. И хотя он чувствует, что некоторые фразы «Диалога» составлены довольно неосторожно и предоставляют врагам удобный случай неверно истолковать их и таким образом настроить многих высокопоставленных особ против вас, сам он никогда не сомневался в чистоте ваших целей. Он находит аргументы замечательными, хотя и полагает, что порыв завел вас слишком далеко, и даже у него самого имеется несколько довольно серьезных замечаний.

Галилей. Это поистине дипломатический ответ. Всякий может найти в нем что хочет. Ты, конечно, прав, я не могу надеяться на серьезную помощь от таких осторожных друзей. Говорил ли он еще что-нибудь?

Торричелли. Да, кое-что, вероятно, важное. Он считает вас хорошим католиком.

Галилей. Отец Гринбергер прекрасно знает, что мои учения не касаются религии. Просто враги действуют

против меня под прикрытием религии. Хотя они следовали этой тактике с самого начала, и теперь, после нескольких десятилетий коварных интриг, им удалось привлечь на свою сторону церковь—против меня и против науки,—тем не менее существо вопроса совершенно иное.

Торричелли. Кто же ваши действительные враги и почему они ненавидят вас?

Галилей. Настоящие мои враги — глупые и неспособные коллеги, псевдоученые, повторяющие Аристотеля как попугаи; они не хотят заглянуть в мой телескоп, чтобы не быть вынужденными исправлять своих заблуждавшихся учителей. Они ненавидят меня, потому что боятся подлинно научных методов. По-моему, настоящая цель философии — понять законы природы, а этого можно достичь только с помощью тщательных наблюдений, хорошо поставленных и продуманных экспериментов. Кроме того, законы природы могут быть точно выражены только с помощью математики. Но то, что мои враги называют философией, — всего лишь стрельба друг в друга цитатами из Аристотеля.

Торричелли. Непостижимо, как можно стремиться понять природу и в то же время отказываться от научных методов. Несомненно, все достоверное в учении Аристотеля было сформулировано им или другими греческими учеными с помощью того же научного метода.

Галилей. Я не боюсь утверждать, что если бы Аристотель был жив сейчас, то даже он был бы против псевдонаучной игры его словами. Но не забывайте, что мои враги не желают понять природу, они интересуются не наукой, а только возможностью нарядиться в мантию ученого и получать хорошую плату. Их интриги против меня стали обычным явлением; я уже привык, что не могу ни написать, ни сказать ничего без их нападок. Они предпочитают интригу научному поиску и преуспели в этом. Беда в том, что они мешают моей работе. Я бесполезно растратил свои лучшие годы, защищаясь от обвинений и лжи, теперь я уже старый человек, а книга, над которой я думал все эти годы, еще не написана.

Торричелли. Приняв наш план, вы смогли бы написать работу, которую так долго ожидают все, кто по-настоящему интересуется наукой. Я не понимаю, почему вы не хотите выбраться из такой недостойной вас ситуации. Вы не можете ожидать ничего хорошего от сво-

их врагов, а ваши друзья не способны ничего сделать для вас. Во что же вы все еще верите?

Галилей. Я верю в торжество справедливости. Представь себе, на самом деле они даже не знают того, в чем обвиняют меня. «Диалог», одобренный самим папой, я, как и полагается, представил цензору. Его должным образом рассмотрели всесторонне и разрешили публикацию. Говорят, цензору не хватило осторожности и он не должен был давать разрешение на публикацию этой работы. Но это не мое дело, да и что они сделают со мной? Конечно, они могут запретить «Диалог», который я действительно не помню, так как написал его очень давно. Если они решат сжечь мой «Диалог», я не знаю, где они найдут хотя бы один экземпляр. Хорошо, если они отпечатают его еще раз, чтобы иметь что сжигать. В противном случае они даже не смогут доказать ошибку цензора. *Я строго придерживался инструкций кардинала Беллармини не проповедовать учение Коперника. В своем «Диалоге» я совершенно объективно раскрыл все аргументы в защиту системы Коперника и те, которые, кажется, выступают против нее. Любой, кто читает мой «Диалог», видит, что я представил аргументы в пользу неподвижности Земли гораздо более сильные, чем это смог бы сделать любой из моих невежественных врагов, отрицающих учение Коперника. И не моя вина, если эти аргументы оказались неубедительными. И пусть тот, кому хочется пристыдить меня, найдет лучшие доказательства неподвижности Земли. До сих пор, однако, во время допросов у меня не было возможности говорить об этом. Всякий раз они заставляли меня замолчать и снова и снова спрашивали, почему я не напомнил цензору, что еще в 1616 году Священная конгрегация имела дело с этим вопросом. Какая нелепость — цензор должен был знать об этом лучше меня. Оказывается, я должен был рассказать цензору о том, что сказал мне Беллармини 16 лет назад. Но он только познакомил меня с решением Священной конгрегации. Затем они спрашивали, говорил ли Беллармини только о том, что я не должен проповедовать учение Коперника, или еще и о том, что я не должен вообще обсуждать это учение. Однако о том, что я не должен никак обсуждать Коперника, он мне не говорил. У меня в руках есть еще не использованный козырь. Это письмо от Беллармини, в котором он каса-*

*ется нашего разговора. В нем упоминается только о том, что я не должен защищать теорию Коперника.*

Синьора Никколини. А если ваши враги представят документы, в которых будет утверждаться противоположное? Что вы будете делать?

Галилей. Таких документов не существует.

Синьора Никколини. Но случалось же раньше, что документы подделывались.

Галилей. Я не считаю даже своих врагов способными на такую подлость.

Синьора Никколини. Не забывайте, тот, кто борется против правды, не бывает привередлив в выборе средств. Он все больше и больше запутывается в лабиринте сплетен и лжи.

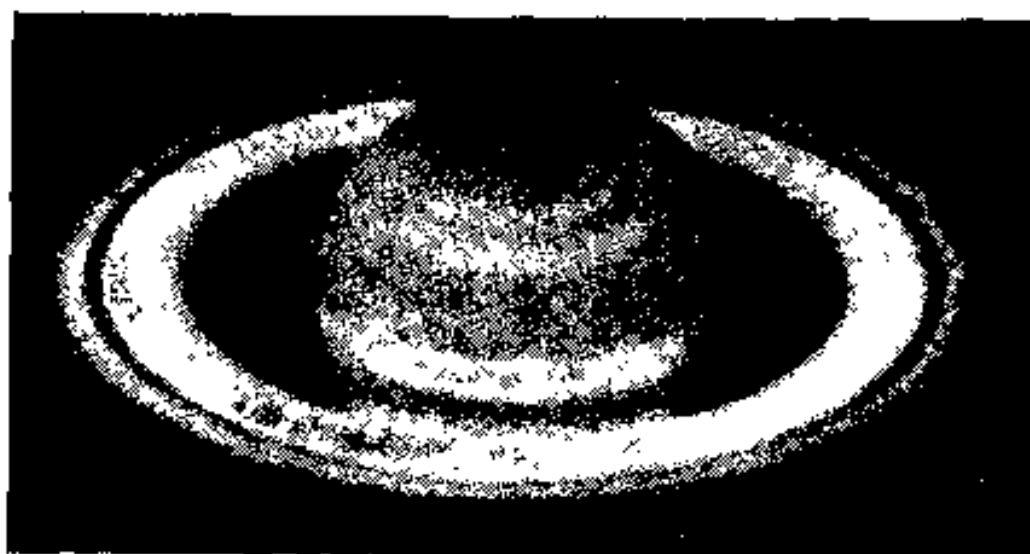
Галилей. Это невозможно. Я убежден, что если покажу письмо Беллармини, то все обвинения против меня будут сняты. Сейчас как раз время сделать это, потому что они допрашивают меня только о разных формальностях. А по существу дела — вертится ли Земля вокруг своей оси и одновременно обращается вокруг Солнца или стоит неподвижно в центре Вселенной — об этом не было сказано ни единого слова. Если хотя бы раз я получу возможность высказаться откровенно, то, думаю, смогу изменить ход дела.

Торричелли. И имея такую возможность, учитель, что бы вы сказали? Доказали бы вы, что теория Коперника единственно верная?

Галилей. Я с удовольствием сделал бы это, сын мой, если бы мог, так как убежден, что это правда, но, к несчастью, не могу доказать все наверняка. Я могу утверждать только то, что теория Коперника находится в соответствии со всеми имеющимися фактами и не известен факт, противоречащий ей. Все кажущиеся противоречия можно легко объяснить. Я уже показал, что, хотя Земля движется, мы, которые живем на ней и движемся вместе с ней, не можем сами заметить ее движение; наш повседневный опыт не опровергает теории Коперника. Та же ситуация со сферической формой Земли. Когда-то люди отказывались даже допустить это. В век Данте они считали, что такое положение противоречит здравому смыслу. Ссылаясь на свой жизненный опыт, они говорили, что, если бы Земля была сферической, люди на другой ее стороне висели бы вверх ногами. Очень много

бессмыслицы было высказано об антиподах. Теперь все забыли эти споры и привыкли к мысли, что Земля подобна мячу. Что же оставалось делать, когда все видели, как корабли, уплывающие на восток, возвращаются домой с запада? Этот год является сто одиннадцатой годовщиной возвращения корабля Магеллана «Виктория» из кругосветного путешествия. У нас еще нет таких эффектных доказательств движения Земли; в этом причина трудности борьбы за правду. Я могу доказать только то, что все данные, скороспело приведенные как доказательства против учения Коперника, являются либо недоразумениями, либо просто невежественны. Я могу доказать, что *проще объяснить движение Солнца, Луны и планет гипотезой Коперника, чем теорией Птолемея. Спутники Юпитера, кольцо Сатурна, серп Венеры и множество других феноменов, которые я открыл, поддерживают теорию Коперника; но пока никаких доказательств нет.* Меня обвинили в том, что я написал свой «Диалог» для доказательства справедливости теории Коперника. Когда в ответ на это я заявил, что не имел такой цели, я утаил только то, что не смог это сделать просто потому, что в моих руках еще не было решающих доказательств.

Торричелли А что вы скажете относительно теории морских приливов и отливов? Не думаете ли вы, что это и есть убедительные доказательства?



Галилей. Когда я писал свои «Диалог», я придавал большое значение подобным доказательствам. Но должен признать, что, когда через три года я перечитал его вновь, я не был удовлетворен этой частью. Если бы

я переделывал «Диалог», я либо выбросил бы ее, либо написал по-другому.

Торричелли. Почему? Ваше объяснение приливов и отливов двойным движением Земли очень убедительно.

Галилей. Не поймите меня неправильно, я не сомневаюсь в своем объяснении приливов и отливов. Но хотя такое объяснение самое простое, однако этот аргумент не более решающий, чем другие.

Торричелли. Понимаю.

Галилей. Я знаю, теперь ты удивляешься, нужно ли было тратить столько труда, столько переживать, если я все равно не смог окончательно разрешить этот вопрос. Не возражай! Я знаю, эта мысль мелькнула у тебя в голове, что совершенно естественно. Еще в прошлом месяце я часто думал, не лучше ли подождать несколько лет, пока я найду убедительные доказательства. Но, поразмыслив получше, я ответил «нет». Я уже старик и не могу долго ждать, вероятно, я и не доживу до того времени, когда будут открыты серьезные доказательства. Мне кажется, что я могу сказать: даже если это не окончательное решение вопроса, оно достаточно важно, чтобы быть высказанным. И потому я обязан высказать мои мысли, так как это поможет кому-нибудь другому найти убедительные доказательства. Но я боюсь, до этого еще очень далеко. Даже гипотеза Коперника сама по себе нуждается в совершенствовании: она не описывает точно видимое движение планет. Мне не удалось объяснить противоречия между теорией и наблюдениями.

Торричелли. Кеплер утверждал, что если мы примем орбиту каждой планеты за эллипс с Солнцем в одном из его фокусов и предположим далее, что планеты движутся не с постоянными скоростями, но так, что произведение скорости на длину перпендикуляра, проведенного из фокуса на направление движения планеты в каждый момент времени, остается постоянным, то получится лучшее совпадение с наблюдениями.

Галилей. Разве Кеплер действительно говорил нечто подобное? Удивительно, до сего момента это ускользало от моего внимания. Не думаю, что такие гипотезы действительно необходимы. Почему планеты должны двигаться только по эллиптическим орбитам? Не похожа ли эта гипотеза на гипотезу о движении планет по эпициклоидам, которая используется для того, чтобы согласо-

вать теорию Птолемея с фактами? Гипотеза о том, что планеты движутся по круговым орбитам с постоянной скоростью, единственная, которую я могу объяснить себе законами механики,— и это проще всего.

Торричелли. То, что просто, не всегда правильно! Именно вы, учитель, высмеяли тех, кто не желает согласиться с существованием гор на Луне, несмотря на то что они могли бы их увидеть в ваш телескоп. Не согласились только потому, что если на Луне есть горы, то она не совершенная сфера, а это, по их мнению, невозможно.

Галилей. Конечно, аргумент просто смехотворный. Даже более нелепый, чем тот, с помощью которого Клавиус пытался доказать шаровидность Луны: лунные долины заполнены невидимым материалом, потому, несмотря на горы, которые мы видим на ней, Луна все же имеет точную форму шара. С таким же успехом я мог бы сказать, что у Клавиуса ослиные уши, только они сделаны из совершенно прозрачного материала, поэтому они невидимы, неосязаемы и никак не различимы. Что касается эллипсов Кеплера, то эту гипотезу, конечно, необходимо проверить. Если не ограничат свободу научного поиска, то это будет сделано в короткое время. И самое важное, чтобы церковь не ограничивала свободы научного поиска по вопросу движения Земли или по любому другому вопросу, касающемуся природы. Они говорят, мой «Диалог» поддерживает знамя теории Коперника. Но главная цель моей книги — поддержать знамя свободы науки. Вот почему я написал ее, вот почему я терплю все гонения, связанные с моей работой. Я не беспокоюсь за судьбу теории Коперника. Рано или поздно эта истина будет принята. Меня гораздо больше волнует то, что, если в настоящей борьбе я потерплю поражение, на долгое время наука будет парализована, по крайней мере здесь, в Италии. Что же произойдет, если я сам убегу в Нидерланды? Даже если бы я смог начать новую жизнь в мои годы, это значило бы, что я отказываюсь от борьбы. Пока хотя бы слабая искра надежды живет во мне, я не сделаю этого. Прошу тебя, передай мои лучшие пожелания своим друзьям! Очень приятно узнать, что есть люди, которые хотят помочь мне.

Торричелли. Вы всегда можете рассчитывать на меня и моих друзей: мы сделаем все возможное. Но я боюсь, если мы отложим выполнение нашего плана, будет



слишком поздно. Прощайте, учитель! Сообщите мне, если вы передумаете. Я постараюсь помочь вам как-нибудь иначе.

Галилей. Прощай, мой друг! Благодарю тебя за визит и за все, что ты хотел сделать для меня. Прощай!

Синьора Никколини. Я провожу синьора Торричелли... Торричелли такой приятный молодой человек... Попробуйте эти прекрасные флорентийские абрикосы, синьор Галилей! Смотришь на них — и забываешь все беды. Я слушала вашу дискуссию с большим интересом, хотя и не все поняла. Когда у вас будет время, я попрошу вас объяснить мне некоторые вещи.

Галилей. Готов хоть сейчас. Я люблю беседовать с вами о науке, Катарина, потому что у вас здоровый, свободный ум, не испорченный схоластическим<sup>1</sup> педантизмом.

Синьора Никколини. Не лучше ли вам отдохнуть? Разве вы не устали от предыдущего разговора?

Галилей. Нисколько, только слегка расстроен. Я совершенно бодр и с удовольствием побеседую с вами. Скажите, что же вас интересует?

Синьора Никколини. Я не поняла, что именно вы сказали об учении Коперника; вы убеждены в его правоте, но не можете ничего доказать. Если вы не способны доказать его правильность, то почему вы убеждены, что оно верно? А если у вас есть убедительные доводы, зачем нужны другие доказательства?

Галилей. Это колючий вопрос, и невозможно ответить на него одним или двумя словами; сначала мне придется рассказать немного о научном методе. Но прежде я хотел бы спросить вас кое о чем, так как просто умираю от любопытства. Расскажите, как вы узнали, что ваш слуга следил за мной?

Синьора Никколини. Конечно, я расскажу вам, что случилось, поскольку вы каким-то образом сами узна-

---

<sup>1</sup> Схоластика — господствующее философское учение средневековья. Его отличительная особенность — стремление все доказывать путем чисто умозрительных, формальных логических доказательств и ссылок на суждения авторитетов. Слово «схоластика» стало синонимом бессодержательного, оторванного от фактов и опыта словопреения, основанного лишь на цитатах спора о словах, а не о существе предмета или явления.— *Прим. ред.*

ли об этом. Меня удивило, что Джузеппе — так звали этого негодяя — иногда исчезал на несколько часов. В прошлую пятницу в полдень, когда я пошла на рынок, я увидела его у входа шепчущимся с доминиканским монахом. Это было, конечно, подозрительно, но тогда я не придавала этому особого значения. Я просто подумала, что нужно проверить парня. Я положила одного из моих соколов в мешок и попросила отца Кастелли отправить его к нам, но так, чтобы он был адресован на ваше имя. Когда я услышала, что кто-то стучит в дверь, я послала Джузеппе открыть и через некоторое время сама пошла за ним. Сокол летал по коридору, а Джузеппе с окровавленными руками пытался поймать его. Теперь я была уже почти уверена, но у меня все же остались сомнения — возможно, он просто любопытен. Я решила сделать еще одну проверку — написала письмо архиепископу Асканио Пикколомини с отчетом о вашем здоровье, затем пролила на пол чернила, а письмо умышленно оставила на столе. Потом позвала Джузеппе, велела ему убрать и вышла на террасу. Я наблюдала за ним в свое маленькое венецианское зеркальце и увидела, что этот негодяй внимательно прочитал письмо и сделал пометки. Я совершенно уверилась в своих предположениях, но для окончательной проверки спросила его на следующий день: «Ты умеешь читать и писать?». Он ответил, что не может написать даже собственное имя. «Вон из моего дома! Мне не нужны такие болваны», — сказала я. Но право же, не знаю, зачем я надоедаю вам такой длинной историей.

Г а л и л е й. Вы вовсе не надоедаете мне. Из вашего рассказа я вижу, что вы, хотя и не изучали научный метод, имеете гораздо больше познаний о нем, чем все перипатетики<sup>1</sup> университета в Падуе. Что вы в действительности делали? Вы заметили, что Джузеппе исчезал, и захотели узнать, какова причина этого. Когда вы увидели, как он шептался с доминиканцем, вы выдвинули гипотезу, что Джузеппе шпион. И вы не стали ждать случайных подтверждений, а запланировали эксперимент с соколом. Вы сказали себе, что, если Джузеппе шпион, он откроет

---

<sup>1</sup> Перипатетики — философская школа последователей Аристотеля, существовавшая почти 900 лет (335 г. до н. э. — 529 г. н. э.). Название происходит от греческого слова *περίπατιτος* — любитель прогулок, — поскольку сам Аристотель обычно проводил занятия преимущественно во время прогулок. — *Прим. ред.*

посылку. Так и случилось. Поверхностный мыслитель уже считал бы свои подозрения доказанными. Но вы задались следующим вопросом: можно ли объяснить поступок Джузеппе иначе, например тем, что он просто любопытен? Вы поняли, что, хотя опыт привел к результату, которого вы ждали, ответ еще не был окончательным. Поэтому вы запланировали другой опыт, с письмом. Результат опять оказался таким, которого вы ожидали. Вопреки всему вы сделали последнюю попытку — вы спросили его, умеет ли он читать и писать. Поскольку он отрицал свое умение, вы окончательно убедились, что он шпион, и выгнали его. Тот, кто хочет снять покрывала с тайн природы, в сущности должен делать то же самое. На основе наблюдений строится гипотеза, а затем она подтверждается хорошо запланированным экспериментом. Недостаточно подслушивать случайные слова природы, необходимо выпрашивать ее. Если опыт не дает результата, которого мы ожидали, наша гипотеза опровергается. Но даже если мы получили ожидаемый результат, гипотеза еще не доказана — необходимо спросить себя: можно ли объяснить этот результат как-нибудь иначе? Если мы находим другое объяснение и новая гипотеза отлична от первой, то нужно провести еще один эксперимент, чтобы решить, какая же из двух гипотез верна. Если результат второго эксперимента соответствует первой гипотезе и противоречит второй, последняя должна быть отброшена или по крайней мере изменена.

Синьора Никколини. Но в таком случае процесс никогда не кончится, потому что всегда можно найти самые запутанные объяснения для каждого эксперимента. Например, мы можем объяснить любопытством тот факт, что Джузеппе прочитал письмо. Но этого недостаточно, чтобы объяснить, почему он скопировал письмо. Конечно, я могу найти другое объяснение, например что ему понравился стиль моего письма. Возможно, он просто боялся, что я дам ему работу переписчика. Значит ли это, что гипотезы должны только опровергаться, но никогда не могут быть доказаны?

Галилей. Нет. После каждого противоречивого эксперимента мы должны изменить неправильную гипотезу и тем самым ликвидировать противоречие. Но каждый эксперимент, приводящий к исходу, которого мы ожидали на основании нашей гипотезы и который несовместим с

противоположной гипотезой (если она остается неизменной), подтверждает нашу гипотезу. Множество согласующихся экспериментов убеждает нас в том, что наша гипотеза справедлива, даже если у нас нет решающего доказательства.

Синьора Никколини. Теперь я начинаю понимать. Если я ставлю заплату на старую, изношенную рубашку только для того, чтобы тотчас же разорвать ее в каком-нибудь другом месте, в конце концов я понимаю, что лучше просто выбросить ее. Но вы все еще не ответили мне. Как можем мы быть абсолютны уверены, что наша гипотеза действительно верна?

Галилей. В самом деле, физическая гипотеза о природе никогда не может быть доказана так, как математическая теорема — посредством серии логических заключений из определенных аксиом. Гипотезы о природе сами по себе являются аксиомами, а аксиомы пока еще не могут быть доказаны математически. Аксиомы геометрии также нельзя доказать. Можно убедиться, что они верны, только потому, что геометрия, основанная на них, правильно описывает пространство, в котором мы живем. Физические гипотезы вообще не могут быть доказаны формальным путем. Единственное, что мы можем сделать, — это вывести заключения из этих гипотез о наблюдаемых экспериментально контролируемых событиях и подтвердить их. Но вывод заключений из гипотез осуществляется методами математики, поэтому мы используем гипотезы как аксиомы, а выводы из них доказываем с математической строгостью.

Синьора Никколини. Так вот почему математика нужна при изучении природы.

Галилей. Это только одна из причин того, почему математика совершенно необходима для изучения природы. Имеется еще одна более глубокая причина: основные законы природы выражаются исключительно в математической форме. *Великая книга природы может быть прочитана только теми, кто знает язык, на котором она написана, и этот язык — математика.* Тот, кто болтает о природе, вместо того чтобы наблюдать ее и с помощью экспериментов заставить говорить, никогда не познает ее. Но если кто-то добьется успеха и природа заговорит с ним, она заговорит на языке математики. Однако, не зная этого языка, мы не сможем понять, о чем она гово-

рит. Исследователю недостаточно знать этот язык отрывочно — к несчастью, таких людей много, — тогда легко может случиться, что он будет совершенно неверно понимать, что именно природа говорит ему, а если он выскажет свои мысли на языке математики, результат будет жалким. Существует много философов, которые имеют странные — я бы сказал даже варварские — представления о математике. Сегодня они не могут отрицать необходимости математики, но считают, что каждому, кто использует математику для изучения природы, нет надобности знать ее в совершенстве. Эти ослы говорят, что им нужны только окончательные результаты. У них нет времени и настойчивости бороться за доказательство и точную формулировку теорем. Но так думать и поступать — такая же глупость, как если бы кто-нибудь сказал: «Давайте удалим листья и корни у деревьев, потому что нам нужны только плоды». Каждый, кто хочет насладиться плодами математики, должен — нравится это ему или нет — принять также ее стиль мышления.

Синьора Никколини. Не понимаю, как можно использовать математику и быть враждебным ее духу. Я только новичок в математике и знаю ровно столько, сколько вы, синьор Галилей, рассказали мне во время наших бесед. Было бы слишком нескромно с моей стороны высказывать собственное мнение по этому вопросу. И все же кое-что я заметила. Не хочется только утомлять вас. Вы, несомненно, знаете все, что я могу сказать.

Галилей. Пожалуйста, продолжайте и откройте ваши мысли. Мне очень интересно, на что именно вы обратили внимание. Ваш беспристрастный ум часто замечает такие детали, которые ускользают от внимания моих ученых коллег.

Синьора Никколини. Я заметила, что не понимаю до конца математическую теорему, пока не пойму окончательно ее доказательства. А иногда я понимаю теорему только тогда, когда вы предлагаете мне другое доказательство, совсем не похожее на первое. Когда в первый раз вы привели дополнительно новое доказательство теоремы, признаюсь, я не поняла, зачем это нужно, почему одного доказательства недостаточно. Но потом я рассудила, что в самом деле полезно рассмотреть вопрос с нескольких сторон, так же как полезно посмотреть на скульптуру с разных позиций. Конечно, я понимаю,

почему многие отступают от сложного доказательства. Я тоже часто пугалась длинной и сложной цепочки аргументов, за которыми должна была внимательно следить шаг за шагом. Я чувствовала себя как скалолаз, который взбирается к вершине горы между опасными пропастями и который должен смотреть под ноги, заботясь о том, чтобы не поскользнуться. Однако, когда он достигает вершины и осматривается, великолепный вид вознаграждает его за трудный путь. Сначала я заставляла себя понимать трудные доказательства только в надежде на это зрелище, но недавно я нашла в неожиданных и остроумных шагах доказательства такую же радость, какую дает самая прекрасная музыка. По-видимому, то же происходит со скалолазом: сначала он принимает утомительное испытание только в надежде на прекрасный вид, но когда он привыкает к подъему, само преодоление препятствий и открытие новых приемов становится для него источником удовольствия.

Г а л и л е й. Вы не представляете, как приятно мне слышать ваши слова. За всю мою долгую жизнь лишь несколько учеников поняли меня и подлинный дух математики так же хорошо. Я рассказываю вам что-нибудь новое и всегда смотрю в ваши глаза. Я наблюдаю, когда в них вспыхнет свет — это означает, что вы поняли суть. Свет в глазах слушателей всегда доставляет мне огромную радость. Подобную радость мы испытываем, когда угасший было огонь в печи, который мы пытаемся оживить, вдруг вспыхивает снова. Некоторые математики заставляют своих учеников заучивать правила и разные механические шаблоны. Такое учение немногого стоит. Настоящий математик больше всего стремится к тому, чтобы ученики поняли его, он пытается научить их думать. Кто учит только рецепты вместо глубокого осознания того, что он учит, никогда не будет использовать вызубренные рецепты правильно — хорошо вычислять можно только думая. Тот, кто вычисляет не думая, подсчитывает все слишком сложным путем и часто не то, что нужно, и пусть в расчете нет ошибки, результат бесполезен. К тому, что вы сказали, мне бы хотелось добавить еще два соображения. Во-первых, математика не только полезна и совершенно необходима тем, кто стремится понять природу или использовать ее силу, например при постройке машин, но она также интересное

и прекрасное, захватывающее и удивительное приключение человеческого разума. Я думаю, красота математики — это не какое-то вспомогательное дополнительное свойство, а одна из ее основных характерных особенностей. Правда всегда прекрасна, а красота всегда правдива. Древние греки знали это очень хорошо. Те, у кого варварские понятия о математике, не понимают этого: они или слепы к красоте математики, или если и видят ее, то слишком подозрительны. Они думают, что красота — излишняя роскошь, и, отворачиваясь от нее, полагают, что становятся ближе к действительности. Они глупо улыбаются с видом практичных людей и высокопарно презирают тех, кто проникся настоящим духом математики. Однако ничто так неразумно, как это презрение, которое попросту разоблачает их собственное бессилие. Это такое же презрение, как у Александра Великого, который в ярости разрубил гордиев узел мечом, потому что не смог разрешить его загадки. При дворах восточных тиранов искусство и науки действительно были только роскошью. Но в Древней Греции искусство и наука составляли органическую часть жизни; они помогали людям узнать себя и окружающий мир. По прошествии 2000 лет мы стали продолжать работу греков. Нам необходимо начать с того места, где остановился Архимед.

Синьора Никколини. Вы правы. Это очень похоже на то, что делают живописцы нашего века, но вы сказали, что у вас есть два добавления к тому, что я говорила. Где же второе?

Галилей. Второе добавление тесно связано с первым. До сих пор я говорил о красоте математики и о наслаждении, так близком к наслаждению от созерцания красоты произведения искусства, созданного человеком. Подобное наслаждение дает подлинное понимание математики и проявляется оно в сиянии глаз. Но радость приходит только в результате упорной работы. Ваше сравнение со скалолазом очень удачно. Без упорного умственного труда никто не может далеко продвинуться в математике. Но каждый, кому знакома радость познания, кто увидел красоту математики, не будет жалеть затраченных усилий. Главная цель при обучении математике — познакомить человека с этой радостью и с ее помощью обучить его дисциплинированному и логическому мышлению, которое совершенно необходимо в математике.



Это очень ценно, потому что тот, кто постиг искусство логического мышления в математике, может использовать его в любой области жизни.

Синьора Никколини. Кое-кто утверждает, что, если каждый будет думать самостоятельно, это приведет к хаосу. Они говорят, что ученый должен следовать авторитетам. А каково ваше мнение?

Галилей. Всю свою жизнь я боролся против таких взглядов. Приведу только один пример. Аристотель полагал, что для сохранения движения необходима сила. Но это неверно. Главный тезис моей новой работы, подтвержденный многочисленными доказательствами, состоит в следующем: *сила необходима только для переменного движения, если же на движущееся тело сила не действует, то оно сохраняет свое равномерное движение.* 2000 лет люди верили авторитету Аристотеля больше, чем собственным глазам. В повседневной жизни, так же как и в науке, важно, чтобы каждый мог думать за себя. Человек отличается от животного способностью мыслить, и потому тот, кто не желает самостоятельно думать, опускается до уровня животных. Но мы ушли слишком далеко от темы нашего разговора. Не знаю, ответил ли я на ваш вопрос.

Синьора Никколини. Я не совсем точно поняла, что вы имели в виду, сказав, что еще не нашли решающего доказательства теории Коперника. Раньше вы говорили, что такого доказательства не существует.

Галилей. Это не так, синьора. Можно представить доказательство, которое окончательно опровергнет гипотезу о том, что Земля неподвижно стоит в центре Вселенной, а Солнце вращается вокруг нее. Когда я говорю о решающем доказательстве теории Коперника, я имею в виду такое наблюдение или эксперимент, который никаким разумным путем не может быть согласован с птолемеевским представлением о мире. Я постоянно искал такое доказательство. Чтобы понять, почему вопрос так труден, продумайте такой эксперимент. Представьте, что вы находитесь на корабле в каюте без окон; просыпаясь, вы не знаете, стоит ли корабль или движется с постоянной скоростью по прямой, потому что вы не можете заметить разницу между этими двумя состояниями, даже если у вас есть какие-то приборы. А если вы уроните что-нибудь, то падение произойдет по одним и тем же за-



конам независимо от того, стоит корабль или движется. Конечно, если бы скорость или направление движения корабля менялись, все было бы по-другому. Но пока корабль движется равномерно и прямолинейно, вы не можете заметить это из закрытой каюты. Конечно, если в каюте имеется окно, вы можете узнать, движется ли корабль относительно берега. Но если, находясь в открытом море, вы видите еще один корабль и замечаете, что ваш корабль передвигается относительно второго, то вы снова не знаете, движется ли ваш корабль, или другой, или оба.

Синьора Никколини. Понимаю. Но, по теории Коперника, Земля не движется по прямой, ведь она движется вокруг Солнца. Не похоже ли это на тот случай, когда корабль изменяет направление движения, которое, как вы сказали, может быть замечено даже в закрытой каюте?

Галилей. Если корабль меняет направление движения медленно, заметить это очень трудно — мы чувствуем только резкие изменения. Земля делает поворот вокруг Солнца за один год, а в течение нескольких часов направление движения меняется очень мало. Это сильно затрудняет наблюдения.

Синьора Никколини. А что вы скажете о вращении Земли вокруг собственной оси? Как я поняла, согласно Копернику, Земля делает полный оборот за сутки. Можем ли мы как-нибудь заметить это движение?

Галилей. Теперь я вижу, вы хорошо понимаете, какое именно решающее доказательство я ищу. Однако пока я его не нашел. Но, уверен, наука скоро найдет его.

Синьора Никколини. У меня еще один вопрос. Я не совсем поняла, что вы сказали о законах природы, написанных на языке математики. Мне было бы понятнее, если бы вы привели какой-нибудь пример.

Галилей. Попрошу вас, подойдите к окну. Взгляните на этот мяч. Я бросаю его. Наблюдайте, как он будет падать на землю. Что вы заметили?

Синьора Никколини. Мне кажется, что он падает все быстрее и быстрее.

Галилей. Вы правы. Но как изменяется скорость? Если вы рассмотрите расстояния, которые проходит мяч в равные промежутки времени, то увидите, что они соотносятся как нечетные числа: за вторую секунду мяч прохо-

дит расстояние в три раза большее, чем за первую, за третью — в пять раз, за четвертую — в семь раз и т. д. Другими словами, скорость падающего тела увеличивается равномерно — это движение равномерно-неравномерное. Раньше схоласты имели дело с таким движением, но они не использовали математики, а это движение не может быть по-настоящему понято без нее.

Синьора Никколини. Очень интересно.

Галилей. Погодите, закончим наш разговор о падающих телах. Все, что я сказал ранее, может быть выражено следующими словами: скорость тела возрастает пропорционально времени. Теперь рассмотрим расстояние, которое проходит падающее тело с начала падения до какого-то произвольного момента. Обозначим расстояние, которое проходит тело в первую секунду, через  $a$ . Тогда, как я уже сказал, расстояние, пройденное во вторую секунду, будет равно  $3a$ , а сумма расстояний за две первые секунды  $3a + a = 4a$ . Вы помните, что я говорил о расстоянии за третью секунду?

Синьора Никколини. Конечно, оно равно  $5a$ , поэтому за три секунды расстояние станет равным  $4a + 5a = 9a$ , за четвертую секунду проходится путь в  $7a$ , следовательно, полный путь, пройденный телом за четыре секунды, равен  $16a$ .

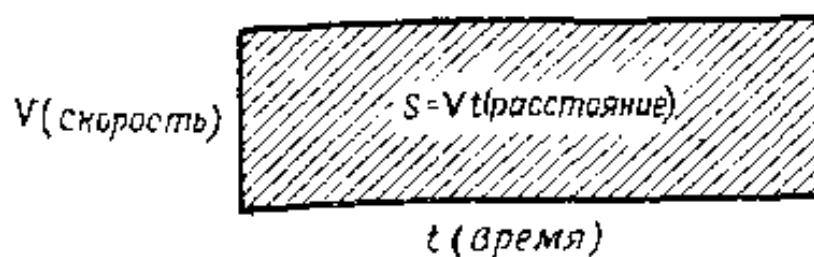
Галилей. Таким образом, падающее тело за две секунды проходит путь, равный  $4a$ , за три секунды  $9a$ , за четыре секунды  $16a$ . Замечаете вы какую-нибудь закономерность?

Синьора Никколини. Мне кажется, расстояние, проходимое телом с начала падения, пропорционально квадрату времени. Не так ли?

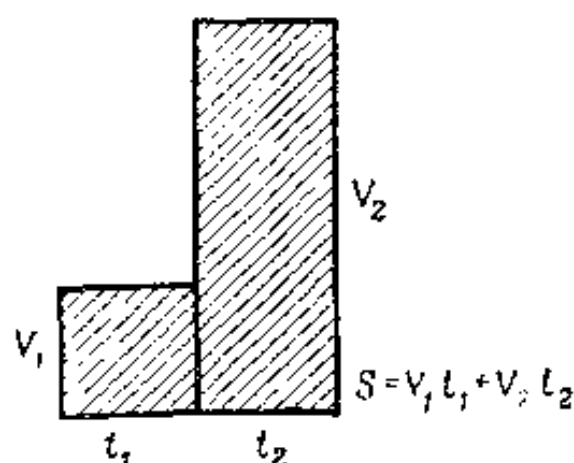
Галилей. Да, это верно, и не только когда время равно 1, 2, 3, 4... секунд, но и в общем случае.

Синьора Никколини. Как можно доказать этот закон для общего случая?

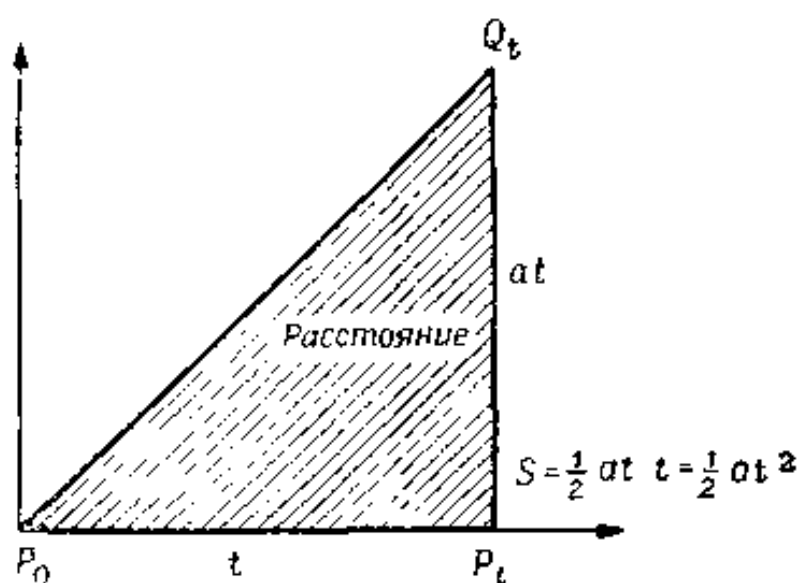
Галилей. Очень просто. Нарисуйте прямую линию. Выберите точку  $P_0$  на этой линии, которая будет соответствовать моменту начала движения. Тогда точка  $P_t$  на той же линии, лежащая справа от точки  $P_0$ , соответствует времени  $t$  с начала движения. В точке  $P_t$  проведем перпендикуляр к линии  $P_0P_t$  и выберем на нем такую точку  $Q_t$ , расстояние от которой до  $P_t$  равно скорости падающего тела в момент  $t$ . Так как скорость пропорциональна времени,



Движение с постоянной скоростью.



Движение с кусочно-постоянной скоростью.



Движение с равномерно изменяющейся скоростью.

то точка  $Q_t$  будет лежать на прямой, начинающейся в точке  $P_0$ .

Синьора Никколини. Но как можно на этой фигуре найти полное пройденное расстояние?

Галилей. Очень просто — расстояние, пройденное вплоть до момента  $t$ , равно площади треугольника  $P_0P_tQ_t$ .

Синьора Никколини. Почему?

Галилей. При постоянной скорости расстояние рав-

но произведению скорости на время. Пройденное расстояние равно площади прямоугольника, одна сторона которого изображает время, а вторая — скорость. Если скорость изменяется, ситуация становится более сложной, но расстояние все так же равно площади. Например, если сначала скорость постоянна, а потом сразу увеличивается до какой-то величины, то путь равен площади фигуры, состоящей из двух прямоугольников. Если скорость изменяется несколько раз, но между двумя последовательными изменениями остается постоянной, то путь равен площади фигуры, состоящей из нескольких прямоугольников. Если скорость, начинающаяся с нуля, изменяется непрерывно и равномерно, то путь равен площади треугольника. Чтобы понять это, вы должны рассмотреть треугольник, как бы состоящий из бесконечного числа бесконечно тонких прямоугольников разной высоты.

Синьора Никколини. Удивительно. Этот вопрос рассматривается в вашей книге по математической теории движения?

Галилей. Да, и множество других. Подобно тому как можно вычислить, где будет падающий камень через две или три секунды после начала падения, можно показать, что траектория камня, брошенного в любом направлении, — парабола. Этот вопрос интересен не только в практическом смысле, но также и тем, что благодаря ему я могу показать, как следует комбинировать различные движения. И я никак не пойму, почему никто, кроме, возможно, Архимеда, тщательно не исследовал, что случается, когда роняют или бросают камень. Ведь еще Птолемей пытался подсчитать видимые орбиты Солнца, Луны и планет, наблюдения за которыми велись изо дня в день и из года в год. Более того, я утверждаю — даже если меня снова заподозрят в ереси, — что *движение здесь, на Земле, подчиняется тем же законам, что и в небе.*

Синьора Никколини. Итак, Вселенная похожа на большие часы, у которых можно точно подсчитать, как поворачиваются колеса — и самые маленькие, и самые большие.

Галилей. Эти удивительные закономерности составляют только одну главу книги природы! Но там также имеется много других закономерностей, непредсказуемых, случайных событий.

Синьора Никколини. Что вы имеете в виду?

Г а л и л е й. Представьте себе новые звезды, которые однажды, например 60 лет назад, вдруг появляются на небе. В течение нескольких лет они светят ярче и ярче, а затем вдруг исчезают так же неожиданно, как и появились. Вспомните о солнечных пятнах, которые вращаются вокруг Солнца вблизи его поверхности. Иногда они растут, иногда уменьшаются, появляются, кружатся и исчезают. Вселенная не похожа на механизм ни в каком отношении. Иногда она более походит на непостоянную, капризную женщину.

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. Мне кажется, в книге природы некоторые главы должны быть написаны не математическим языком, потому что в них идет речь о событиях, которые нельзя предсказать.

Г а л и л е й. Вы ошибаетесь, синьора, но до сих пор были предприняты только первые шаги к математическому описанию случайностей, хотя сделать это возможно, как я уже показал совсем недавно на очень простом примере.

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. На каком же?

Г а л и л е й. Игра в кости стара, но все еще популярна. Как упадет игральная кость, полностью зависит от случая. Если стороны игральной кости помечены числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, то, бросая ее, мы можем с уверенностью сказать только то, что число, которое мы увидим, будет одним из этих шести. Но многократно бросая игральную кость, мы наблюдаем определенную закономерность — каждое из шести чисел будет появляться приблизительно одно и то же число раз. Но еще более интересно, если мы бросим две игральные кости одновременно и сложим числа, которые откроются. Чего тут можно ожидать?

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. Совершенно ясно — сумма может быть любым числом от 2 до 12.

Г а л и л е й. Да, но эти 11 возможностей случаются не одинаково часто. Чаще всего будет получаться число 7, около одной шестой от всех бросков, затем 6 и 8 — каждое будет получаться около пяти тридцать шестых от всех бросков; 5 и 9 будут составлять одну девятую от всех бросков, 4 и 10 — одну двенадцатую часть, а 3 и 11 — одну восемнадцатую. Наконец, суммы 2 и 12 составляют одну тридцать шестую от всех бросков.

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. Странно. Почему так получается?

Г а л и л е й. Причина очень проста. Мы можем получить в сумме четыре тремя путями, а именно как сумму трех и одного, например если первая игральная кость покажет три, а вторая один, или наоборот, а также как сумму двух и двух. Но сумму двенадцать мы можем получить только тогда, когда обе игральные кости показывают шесть. Поэтому четыре будет получаться в три раза чаще, чем двенадцать.

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. Когда-нибудь я попытаюсь сыграть в кости по вашему правилу. Вы полагаете, что, зная все это, можно выиграть много денег?

Г а л и л е й. Игра остается игрой, если правила установлены так, что ни один игрок не может оказаться в более благоприятной ситуации, чем другие. Но, когда правила установлены неверно, можно выиграть много, если есть деньги, чтобы играть до тех пор, пока законы случая не станут тебе благоприятствовать.

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. Никогда не думала, что математика — основа даже для игры в кости. Как называется эта отрасль математики?

Г а л и л е й. Она так молода, что у нее нет имени. Ее можно было бы назвать исчислением вероятностей.

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. Почему я об этом еще не слышала?

Г а л и л е й. Математики привыкли заниматься тем, что закономерно и точно, и до сих пор избегали случайностей; казалось, это не их область. Авторитет Аристотеля поддерживал направление, согласно которому математика должна иметь дело с чем-то неизменяемым. А что более причудливо изменяется, чем случай? Но есть еще и другие, более старые предрассудки. Это старинный обычай видеть в случайных событиях — в бросании игральной кости, полете птиц, неправильной форме печени жертвенного животного — проявление божественной воли. И все это было причиной священного испуга на лицах людей при встречах со случайными событиями. Большинство из них считали почти богохульством пытаться объяснить такие события при помощи человеческого разума. Однако моя точка зрения — человек имеет разум, чтобы использовать его.

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. Мне нравится способность математики — хотя я знаю только то, что слышала от вас, — делать самые сложные вещи простыми; при свете



факела математической истины многие вещи, которые были трудны и непонятны, становятся ясными и простыми.

Г а л и л е й. Это верно. Но я должен сказать, что иногда математика обнаруживает, что вещи, кажущиеся простыми, на самом деле очень сложны.

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. Что вы имеете в виду, учитель?

Г а л и л е й. Я приведу вам только один очень простой пример. Напишем на этом листе целые числа от нуля и далее: 0, 1, 2, 3, ... Представим, что ряд продолжается до бесконечности. Теперь отметим среди них квадраты чисел. Вы видите, что по мере продвижения слева направо мы встречаем все меньше квадратов, потому что расстояния между ними становятся все больше.

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. В самом деле, расстояния — нечетные числа: 1, 3, 5, 7, 9, ...

Г а л и л е й. Похоже на расстояния, которые проходит падающий камень. Но скажите, прав ли я, утверждая, что квадратов в этом ряду меньше, чем чисел вообще?

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. Конечно.

Г а л и л е й. Тогда напишем снова ряд целых чисел и под каждым — его квадрат. Во второй строке только квадраты целых чисел, не так ли, и каждый встречается лишь однажды?

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. Да.

Г а л и л е й. Числа стоят друг под другом, и потому в нижней строке столько же чисел, сколько в верхней. Вы все еще утверждаете, что квадратов чисел меньше, чем чисел вообще?

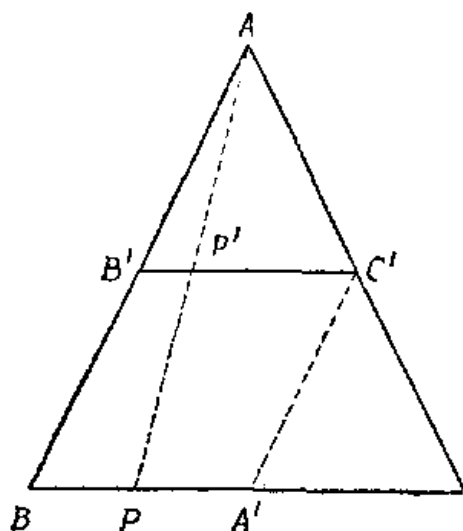
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	...

С и н ь о р а Н и к к о л и н и. Этот пример окончательно сбил меня с толку. В чем здесь дело?

Г а л и л е й. Суть в следующем: *то, что верно для конечных множеств, не обязательно верно для бесконечных...* Зенон уже давно это заметил — помните его парадокс «Стадий»? Он знал, что можно спроецировать точки отрезка  $B'C'$  из точки  $A$  на больший отрезок  $BC$  так, что каждой точке  $P'$  малого отрезка будет соответствовать точка  $P$  большого отрезка. Только он не знал, что этот парадокс тоже связан с целыми числами.



Синьора Никколини. Таким же образом можно сказать, что в общем четных чисел столько же, сколько и нечетных, несмотря на то что только каждое второе из целых чисел есть четное.



Галилей. Я вижу, вы хорошо понимаете меня. Каждый понимает что-то до конца, если он может преобразовать и видоизменить это для себя, одним словом — как бы дать все заново.

Синьора Никколини. Верно. Если повар готовит только по рецептам, он не настоящий кулинар. Хороший кулинар меняет рецепт свободно, добавляет больше или меньше специй, так что каждый раз кушанье получается разным.

Галилей. Хороший кулинар ставит опыты, как учёный, но он может это делать свободно, не боясь быть зазорным в ереси.

Синьора Никколини. Синьор Галилей, пока вы объясняли мне столько интересных проблем, наступила ночь. Вам пора спать. Я задержала вас так надолго. Надеюсь, очень утомительно объяснять мне эти истины?

Галилей. О, вовсе нет, я получил большое удовольствие. Ведь благодаря беседе я забыл о своем положении.

Синьора Никколини. Вам не нужно думать об этом так много.

Галилей. Вы интересуетесь математикой только из того, чтобы отвлечь меня от тяжелых мыслей?

Синьора Никколини. Надеюсь, вы не сердитесь на это, не правда ли? Поверьте, даже если у меня и были

такие мысли, я и в самом деле очень интересуюсь этими проблемами. Мне кажется, синьор Галилей, вы умеете читать не только книгу природы, но и человеческую душу, если захотите. Я не понимаю, почему вы не используете ваших знаний, чтобы лучше защищать себя и меньше раздражать своих врагов.

Г а л и л е й. Читать в вашей ангельской душе для меня такое же удовольствие, как исследовать чудеса природы. Но мне не нравится читать в душах моих врагов — только свиньи любят копаться в грязи.

Синьора Никколини. Тем не менее, если бы вы преодолели отвращение и попытались прочесть мысли ваших врагов, я полагаю, вы изменили бы мнение о плане Торричелли и его восторженных друзей.

Г а л и л е й. Вы тоже считаете, что мне нужно бежать? Думаете, мне следует принять их предложение?

Синьора Никколини. Единственная причина, почему я не отвечаю «да», это то, что я не знаю, насколько реальны их планы и увенчаются ли они успехом. На вашем месте, синьор Галилей, я бы попыталась это выяснить. Если план осуществим — я не совсем убеждена в этом, — вам следовало бы принять его. Я не хотела вмешиваться, но сейчас, поскольку вы сами спросили меня, я высказала свое мнение.

Г а л и л е й. Вы тоже не верите в мою победу?

Синьора Никколини. Вы сказали, что верите только в правду. Несомненно, рано или поздно правда восторжествует, но я не уверена, будем ли мы еще живы, когда это случится. Вы сказали, что обвинения необоснованны и ваши противники не смогут доказать их. Мне кажется, вы совершаете ошибку, полагая, что инквизиция использует те же высокие принципы в проверке доказательств, как вы в науке. Но не будем говорить об этом. Сейчас уже действительно пора спать. Надеюсь, нынче вы будете спать так же хорошо, как в прошлую ночь.

Г а л и л е й. Прошлой ночью мне приснилось, что комната, где я спал, вдруг полетела выше, выше, через облака, в безвоздушное пространство. Вы не представляете, какое прекрасное чувство — смотреть с такой высоты на Землю, которая становится все меньше и сияет в темном небе при свете Солнца так же, как Луна ночью. Я видел, как она движется, величественно вращается вокруг Солнца и одновременно вокруг своей оси. Я был счастлив как

когда в жизни. Я собственными глазами видел движение Земли! Я смотрел через телескоп, который раньше пользовал, наблюдая небо. Я направил его на Рим. Это был очень хороший телескоп, намного лучше тех, которые когда-либо делал, так что я даже узнавал лица. Представляете, я увидел этих невежд с грязными душами, Инфери и Паскуальи, идущих вдоль Тибра и обсуждающих что-то. Я нажал кнопку на моем телескопе и услышал их разговор; они говорили о движении Земли и верждали, что это ложь и еретическая доктрина. Но Земля не мешала их глупой болтовне. Она с достоинством продолжала свой путь по орбите, поворачиваясь вокруг своей оси, неся их на себе. Они продолжали клеветать на меня и Коперника. Это было слишком нелепо, и я разразился таким смехом, что у меня потекли слезы. От громкого смеха я и проснулся.

Синьора Никколини. Действительно, прекрасный сон. Возможно, сегодня ночью вы увидите сон о том времени, когда даже маленьких детей станут учить в школе тому, что Земля движется вокруг Солнца.

Галилей. Я часто об этом мечтаю по ночам, когда засплю, и надеюсь, что такое время скоро наступит. Процесс науки не может быть остановлен. Но иногда я сомневаюсь, действительно ли тот век будет таким счастливым, как я представляю. Не будут ли и тогда существовать свои предрассудки и догмы? Не будут ли и тогда жить глупые, завистливые, злобные, интригующие люди? Не попытаются ли такие люди запятнать доброе имя честных людей клеветой? Не сохранятся ли еще паразиты на ветушем, зеленом дереве науки?

Синьора Никколини. Конечно, такие ничтожества, вероятно, тоже будут. Но всегда будут и люди, для которых правда важнее, чем все остальное, и эти люди, глядя на наш век, увидят, что Галилео Галилей стоял выше своих современников на две головы; они с гордостью объявят себя учениками и последователями его дела.

## ПОСЛЕСЛОВИЕ

Автор-оптимист не пишет предисловия к своей книге, так как уверен, что книга скажет сама за себя. Он убежден, что высказанное им читатели поймут без дополнительных объяснений. Несмотря на свой оптимизм, я чувствую, что в данном случае необходимо если не в предисловии, то хотя бы в послесловии рассказать о целях автора и о размышлениях, которые привели его к выбору литературной формы диалога. Я привожу свои замечания в послесловии, поскольку на самом деле хочу, чтобы их прочитали после диалогов.

Интерес к математике и ее применениям увеличивается из года в год в каждой стране у все возрастающего числа людей. Меня уже много раз просили написать популярные беседы о математике; в каждом из таких случаев я замечал, что большинство людей хотят выяснить, что же в действительности представляет собой математика, в чем специфика ее методов, каково ее отношение к точным и гуманитарным наукам. Я увидел также, что все, кто посещает подобные лекции по математике или намерен читать популярные книги по математике, хотят скорее просто расширить свои взгляды, а не узнать специфические математические методы. Даже те, кто действительно нуждается в знании математики по роду своей работы, перед тем как решиться всерьез изучать какую-то область математики, хотят выяснить, что это им даст, так как математика очень нелегка для непривыкших к ней.

Беседуя о математике с нематематиками, я обнаружил предрассудки, неправильное понимание и неправильное представление не только среди лиц, чьи основные интересы и деятельность очень далеки от этой науки, но даже среди тех, кто по роду своей деятельности имеет определенные знания в какой-то части той или иной ее области. Не удивительно, что лица, обладающие некоторыми познаниями, но не имеющие достаточно широких взглядов или достаточно глубокой проницательности, более всего склонны делать ложные обобщения. Я заметил также, что принципы математики и их применения часто обсуждают-

ся даже среди математиков и многое в этой области очень спорно.

Все это убедило меня в том, что действительно необходимо обсудить основные вопросы математики и ее применений таким способом, чтобы сделать их понятными неспециалистам и одновременно раскрыть эти проблемы во всей их сложности. Я сознавал, что сделать такие вопросы общедоступными нелегко, поэтому искал какой-либо особый метод. Поиск привел меня к опыту с сократовской формой диалога. Сократовский диалог демонстрирует мысли в процессе их создания и как бы инсценирует их. Благодаря этому читатель внимательно следит за развитием мысли и легко понимает ее.

Основной темой первого диалога я выбрал вопрос: «В чем же состоит сущность математики?» Я считаю обсуждение этого вопроса особенно важным, поскольку обучение математике в начальной и средней школах все еще далёко от четкого, правильного и современного ответа на этот вопрос.

В первом диалоге я попытался следовать как можно ближе методу и даже языку сократовского диалога. Сократ сам основное действующее лицо, и беседа происходит в период, когда математика зарождалась, в том смысле, в каком с этого времени ее стали понимать. Таким образом, математика преподносится читателю в «процессе становления». В диалоге Сократ, задавая вопросы, постепенно приводит своего собеседника к пониманию существа проблемы. Сократовский диалог — это не столкновение двух точек зрения, просто участники пытаются совместно выяснить истину. Логически анализируя сложные понятия, они шаг за шагом приходят к ответу. В споре участники часто делают выводы — иногда в очись категорической форме, — которые впоследствии осознают как неверные. Таким образом, сократовский диалог — это нечто органически цельное, и его настоящее значение можно понять, только если читать его с начала до конца, по возможности без перерыва. Все указанные особенности делают сократовский диалог живым и ярким, и поэтому я выбрал подобную форму как наиболее подходящую для моих целей.

У меня была еще одна причина — твердая уверенность в том, что сократовский метод родствен математическому. Моя вера еще более усилилась после недавних фундамен-

тальных исследований Арпада Сабо, проливших совершенно новый свет на происхождение древнегреческой математики.

Первый диалог был опубликован в Венгрии в 1962 году. В 1963 году появился французский перевод в журнале «*Les Cahiers Rationalistes*». В 1963 году я представил этот диалог в качестве застольной беседы на встрече американских физиков в Эдмонтоне, а английский текст был опубликован в «*Canadian Mathematical Bulletin*» и в «*Physics Today*», а затем перепечатан журналом «*Simon Stevin*». Потом он появился в немецком и португальском переводах.

Теплый прием первого диалога как математиками, так и нематематиками поощрил меня продолжить опыт. Второй диалог впервые был прочитан в Торонтском университете в 1964 году и появился на английском языке в журнале «*Ontario Mathematics Gazette*» и позднее в «*Simon Stevin*».

Поскольку в первом диалоге я обсуждал отношение математики к действительности только в общем философском смысле, во втором я хотел более детально обсудить применения математики. Казалось логичным выбрать главным героем подобного диалога Архимеда, так как его имя даже в древности было неразрывно связано с применениями математики. Однако исторические рамки второго диалога не позволили мне сказать об этой спорной теме все, что я хотел.

В результате я почувствовал, что надо писать третий диалог, главный герой которого — Галилей, первый мыслитель нового времени, полностью осознавший центральное значение математических методов в открытии законов природы и распространявший свои убеждения с огромной силой. Второй и третий диалоги дополняют друг друга, а также первый. Они существенно отличаются от первого по форме и стилю. Архимед и Галилей, конечно, не используют метод Сократа: вместо того чтобы подвести своих собеседников к тому, чтобы те угадали их мысли, они высказываются сами. Таким образом, я был вынужден обойтись без главного источника внутреннего напряжения, которое присуще сократовскому диалогу. Я попытался компенсировать эту потерю, выбрав решающие исторические ситуации, динамика которых неразрывно связана с проблемами диалогов.

Введение образов Архимеда и Галилея позволило затронуть в диалогах более специальные математические темы, чем в первом, особенно те идеи, которые были высказаны в свое время Архимедом и Галилеем. Я попытался в той или иной форме объединить наиболее значительные их достижения.

В этой связи я должен сказать несколько слов о том, как я поступил с историческими фактами. Во всех трех диалогах я пытался избежать разного рода анахронизмов. Я был очень осторожен, чтобы не приписать своим героям такие знания математики (равно как и других предметов), которыми они не могли обладать в то время. Однако и Архимед и Галилей были пионерами, чьи идеи и образ мышления не только опережали их век, но остаются современными даже при измерении их мерами наших дней, поэтому я не отказался от включения в диалоги всего, что считал важным. Конечно, чтобы избежать анахронизмов, я вынужден был ограничивать себя в основном примерами из элементарной математики. Я смог затронуть математику бесконечно малых величин только в такой мере, в какой это сделали Архимед и Галилей. Последнее вынудило меня избежать примеров, которые могли бы оказаться слишком трудными для нематематиков.

Я не придерживался требований исторической правды так строго, как тогда, когда нужно было описать действительные взгляды и идеи моих героев, я считал себя вправе приписать им взгляды и мысли, которые они могли бы высказать, особенно если они являлись логическим развитием идей, о которых они были хорошо осведомлены. В тех случаях, когда они ошибались, я был вынужден не утаивать фактов. Галилей, например, считал, что планеты движутся по круговым орбитам вокруг Солнца, но не понимал роли гравитации, поэтому соответственно и высказывался по этим вопросам. Однако я считал допустимыми смелые предположения, например то, что Архимед дошел до некоторых идей современной кибернетики и создал машину для отсеивания простых чисел<sup>1</sup>. Я не могу подтвердить подобные предположения какими-либо документами и, конечно, не считаю их хорошо известными; единственное, что я утверждаю, это их достаточную

---

<sup>1</sup> Аппарат для фотоэлектрического просеивания чисел был впервые описан Д. Лемером; см. D. H. Lehmer, A Photoelectric Number Sieve, «American Mathematical Monthly», 40, 401—406, 1933.

правдоподобность. Мы не в силах ни опровергнуть эти предположения, ни доказать их. Я думал, что «поэтическая свобода» даст мне право использовать такие гипотезы.

Что касается исторического фона второго и третьего диалогов, я старался придерживаться исторических фактов. Единственное исключение, где я сознательно отступил от достоверности, когда во втором диалоге допустил, что царь Гиерон руководит обороной Сиракуз при осаде их в 212 году до н. э. На самом деле он умер тремя годами раньше. Все диалоги содержат описание предполагаемых гипотез, о которых мы ничего определенного не знаем, но которые не противоречат известным фактам. Например, план побега Галилея: не известно, готовили в действительности Торричелли и его друзья такой план или нет, но это вполне возможно.

Основное содержание некоторых высказываний в диалогах либо прямо принадлежит моим героям, либо приписывается им их современниками. Например, случаи, когда Сократ беседует о себе<sup>1</sup>, Архимед — о своем методе<sup>2</sup> и Галилей — о языке книги природы<sup>3</sup>. Такие предложения выделены курсивом. Я пытался представить личности моих героев по возможности правдиво. Что касается третьего диалога, на меня очень повлияла драма Ласло Немета «Галилей»: я взял оттуда, среди прочего, мысль о существовании Торричелли и синьоры Пикколини.

Надеюсь, послесловие разъяснило мои цели при написании диалогов. Пусть судит читатель, насколько хорошо мне удалось реализовать свои намерения.

---

<sup>1</sup> См., например, Апологии Сократа (Платон, соч. в трех томах, том 1, изд-во «Мысль», М., 1968). — *Прим. ред.*

<sup>2</sup> См. Послание Архимеда к Эратосфену о механических теоремах (Архимед, Сочинения, Гос. изд-во физико-математической литературы, М., 1962, стр. 299): «Действительно кое-что из того, что ранее было мною усмотрено при помощи механики, позднее было также доказано и геометрически, так как рассмотрение при помощи этого метода еще не является доказательством; однако получить при помощи этого метода некоторое предварительное представление об исследуемом, а затем найти и само доказательство гораздо удобнее, чем производить изыскания, ничего не зная». — *Прим. ред.*

<sup>3</sup> См., в частности, письмо Галилея «Пробирщик» («The Assayer», Discoveries and opinions of Galileo, Doubleday Anchor Books, New York, 1957, p. 237—238): «Философия написана в грандиозной книге — Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики...»



25 к.

