ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А. П. Аксенов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 2

УЧЕБНИК и ПРАКТИКУМ

СООТВЕТСТВУЕТ ПРОГРАММАМ ВЕДУЩИХ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ

УМО ВО рекомендует
МО рекомендует

ЮРАЙТ
издательство
biblio-online.ru

А. П. Аксенов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ЧАСТЬ 2

УЧЕБНИК ДЛЯ ВУЗОВ

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям и специальностям

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим специальностям

Курс с практическими заданиями и дополнительными материалами доступен на образовательной платформе «Юрайт», а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Москва • Юрайт • 2024

УДК 517.9
ББК 22.161.1я73
А42

Автор:

Аксенов Анатолий Петрович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Рецензенты:

Кудрявцев Л. Д., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Московского физико-технического института, старший научный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова;

Розанова С. А., доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики; ;

Будак А. Б., кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Аксенов, А. П.

А42 Дифференциальные уравнения. В 2 частях. Ч. 2 : учебник для вузов / А. П. Аксенов. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 359 с. — (Высшее образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-9916-7422-5 (ч. 2)
ISBN 978-5-9916-7421-8

Предлагаемый методический комплекс состоит из четырех комплектов. Первые два содержат изложение курса математического анализа, в третьем излагается теория обыкновенных дифференциальных уравнений, в четвертом — теория функций комплексной переменной.

Учебник рассчитан на студентов высших технических учебных заведений. Он составлен на основе курса лекций, читаемых автором в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете.

Основанием для написания учебника послужило желание дать не слишком объемное, но достаточное по строгости, глубине и доходчивости изложение основ упомянутых выше разделов курса высшей математики.

УДК 517.9
ББК 22.161.1я73

ISBN 978-5-9916-7422-5 (ч. 2)
ISBN 978-5-9916-7421-8

Оглавление

Предисловие

Данная книга представляет собой второй том учебника по обыкновенным дифференциальным уравнениям, выходящего в рамках цикла учебников автора по разделам высшей математики.

Учебник «Обыкновенные дифференциальные уравнения, теория и задачи» составлен на основе курса лекций, читаемых автором в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете.

Настоящий учебник предназначен для студентов высших технических учебных заведений. Он может быть использован и для самостоятельной подготовки и повышения квалификации по дисциплинам «Математический анализ», «Высшая математика» и «Дифференциальные уравнения».

Второй том учебника включает материал по следующим разделам: «Дифференциальные уравнения высших порядков», «Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов», «Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений», «Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений», «Линейные однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений», «Устойчивость решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений».

Подробное изложение теории сопровождается большим числом разобранных примеров и задач, разъясняющих основные идеи, теоретические факты и их практическое применение.

Для успешного овладения представленным материалом обучающиеся должны хорошо знать школьный курс математики и владеть навыками логического и алгоритмического мышления, а также математическими методами решения задач согласно требованиям стандартов среднего образования, а также успешно освоить материал первого тома учебника.

В результате изучения второго тома учебника «Обыкновенные дифференциальные уравнения» обучающиеся должны:

знать

- основные понятия, теоретические основы, положения и методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений;

• методы решения прикладных задач, базирующиеся на постановке задач и формулировке начальных и граничных условий для дифференциальных уравнений, интегрировании дифференциальных уравнений, исследовании свойств их решений и т.п.;

• современные представления о переводе задач моделирования реальных процессов и явлений на математический язык теории дифференциальных уравнений, выборе методов их решения, в том числе и численных, оценке полученных результатов;

уметь

• использовать полученные знания о математических понятиях, методах и моделях дифференциальных уравнений в практической деятельности и при изучении иных естественнонаучных, общепрофессиональных и специальных дисциплин;

• применять теоретические знания к реальным ситуациям для математического исследования встречающихся в приложениях эволюционных процессов, а также анализа и интерпретации полученных результатов;

• выбирать необходимые методы теории дифференциальных уравнений для решения поставленных задач и реализации алгоритмов;

• самостоятельно расширять и углублять полученные математические знания, изучать новую математическую литературу, обобщать и систематизировать вновь поступающие сведения по теории дифференциальных уравнений;

• давать самостоятельные оценки эффективности употребляемых алгоритмов решения дифференциальных уравнений высших порядков и систем дифференциальных уравнений;

• самостоятельно формулировать, обосновывать и строго логически и математически доказывать утверждения теории дифференциальных уравнений;

владеть

• методами математического моделирования фундаментальных и прикладных проблем с помощью систем дифференциальных уравнений и выработки наиболее эффективных алгоритмов их решения;

• навыками решения дифференциальных уравнений высших порядков, возникающих в ходе математического моделирования реальных процессов и явлений на практике;

• навыками работы с учебной и научной математической литературой для поиска необходимой информации для решения систем дифференциальных уравнений;

• современными технологиями анализа и информационной поддержки решения поставленных задач.

На основе полученных знаний у обучающихся формируются следующие общекультурные и профессиональные компетенции:

- способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;
- готовность использовать основные законы и методы теории дифференциальных уравнений в профессиональной деятельности, в теоретических и экспериментальных исследованиях;
- способность представить адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов и методов теории дифференциальных уравнений;
- умение выявить математическую сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для решения дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании, соответствующий физико-математический аппарат;
- способность разрабатывать математические модели объектов профессиональной деятельности в форме дифференциальных уравнений, применять необходимые для построения моделей знания принципов действия и математического описания различных систем (информационных, механических, электронных и т.п.), а также определять характеристики объектов по разработанным моделям на базе решения дифференциальных уравнений;
- навыки владения основными приемами математической обработки и представления экспериментальных данных в виде дифференциальных уравнений и соответствующих начальных и граничных условий.

Глава 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§1. Основные понятия и определения

1°. *Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \qquad (\tilde{1})$$

Здесь n — фиксированное число ($n \in \mathrm{N}$, $n \geq 1$, n — порядок уравнения), x — вещественная независимая переменная, $y(x)$ — искомая вещественная функция, $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ — известная функция, определенная и непрерывная в некоторой области $(G) \subset \mathbf{R}^{n+2}$.

2°. Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

((1) — *нормальный вид* дифференциального уравнения n-го порядка). Предполагается, что функция $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ определена и непрерывна в некоторой области $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

3°. Определение. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением* уравнения (1) в промежутке $\langle a, b \rangle$, если:

1) для каждого $x \in \langle a, b \rangle$ определены и непрерывны $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, , $\varphi^{(n)}(x)$;

2) для каждого $x \in \langle a,b \rangle$ точка $\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right) \in (D)$;

3) $\varphi^{(n)}(x) \equiv f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right), \quad x \in \langle a,b \rangle$.

График решения $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a,b \rangle$, называется *интегральной кривой* уравнения (1).

Заметим, что решение уравнения ($\tilde{1}$) определяется аналогично. Именно, функция $y = \varphi(x)$ называется *решением* уравнения ($\tilde{1}$) в промежутке $\langle a,b \rangle$, если:

1) для каждого $x \in \langle a,b \rangle$ определены и непрерывны $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, , $\varphi^{(n)}(x)$;

2) для каждого $x \in \langle a,b \rangle$ точка $\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) \in (G)$;

3) $F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0, \quad x \in \langle a,b \rangle$.

4°. Решение уравнения (1) (а также и уравнения ($\tilde{1}$)) может быть получено в неявной форме, т. е. в виде соотношения

$$\psi(x,y) = 0, \tag{*}$$

или в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \tag{**}$$

Но при этом предполагается, что соотношения (*) и (**) определяют y как функцию от x: $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a,b \rangle$, которая является решением уравнения (1) (уравнения ($\tilde{1}$)) на промежутке $\langle a,b \rangle$.

Пример 1. Пусть имеется уравнение

$$yy'' = (y')^2 - (y')^3.$$

Покажем, что функция $y = y(x)$, заданная неявно соотношением

$$y - \ln|y| - x + 5 = 0 \quad (y \neq 0),$$

является решением данного уравнения.

Решение. Находим y' и y'':

$$y' - \frac{y'}{y} - 1 = 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{y-1}{y} = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-1} \; (y \neq 1).$$

(Отметим, что $y \equiv 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением данного уравнения.)

$$y'' = \frac{y'(y-1) - yy'}{(y-1)^2} = -\frac{y'}{(y-1)^2} = -\frac{y}{(y-1)^3} \; (y \neq 1).$$

Подставив найденные выражения для y' и y'' в исходное уравнение, получаем

$$-\frac{y^2}{(y-1)^3}=\frac{y^2}{(y-1)^2}-\frac{y^3}{(y-1)^3} \Rightarrow -\frac{y^2}{(y-1)^3}\equiv-\frac{y^2}{(y-1)^3}.$$

Следовательно, функция $y=y(x)$ является решением данного уравнения.

Пример 2. Пусть имеется уравнение

$$(y'')^2-2y'y''+3=0.$$

Покажем, что функция $y=y(x)$, заданная параметрически системой

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\ln t+\dfrac{3}{4t^2}, \\ y=\dfrac{1}{4}t+\dfrac{3}{4t^3} \end{cases} \quad (t>0) \qquad (*)$$

является решением данного уравнения.

Решение. Находим y' и y'':

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{9}{4t^4}}{\dfrac{1}{2t}-\dfrac{3}{2t^3}}=\frac{t^2+3}{2t};\, y''_{x^2}=(y'_x)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''_{x^2}=\frac{\dfrac{t^2-3}{2t^2}}{\dfrac{1}{2t}-\dfrac{3}{2t^3}}=\frac{t^2-3}{t^2-3}\cdot t\Rightarrow y''_{x^2}=t.$$

Подставив найденные выражения для y'_x и y''_{x^2} в исходное уравнение, получаем

$$t^2-\frac{2t}{2t}(t^2+3)+3\Rightarrow t^2-t^2-3+3\equiv 0.$$

Следовательно, функция $y=y(x)$, определяемая системой (*), является решением данного уравнения.

5°. Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка вида (1): $y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ состоит в следующем: среди всех решений этого уравнения найти такое решение

$y = \varphi(x)$, которое удовлетворяет наперед заданным начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0;\ y'\big|_{x=x_0} = y_0';\ \dots;\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \qquad (2)$$

Здесь $x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}$ — числа такие, что точка $\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right) \in (D)$.

6°. Понятие единственности решения задачи Коши.

Пусть даны уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

и начальные условия

$$y\big|_{x=x_0} = y_0;\ y'\big|_{x=x_0} = y_0';\ \dots;\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \qquad (2)$$

Предполагается, что $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, и что точка $(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}) \in (D)$.

Пусть $y = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}} = (x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta})$, и $y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\tilde{\delta}}} = (x_0 - \tilde{\tilde{\delta}}, x_0 + \tilde{\tilde{\delta}})$, — любые два решения задачи (1) — (2). Тогда: если существует интервал $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такой, что $\tilde{\varphi}(x) \equiv \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_\delta$, то говорят, что задача (1) — (2) *имеет единственное решение*. Точку $(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}) \in (D)$ называют в этом случае *точкой единственности* уравнения (1).

Подчеркнем еще раз, что соотношение $\tilde{\varphi}(x) \equiv \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_\delta$, должно выполняться для любой пары решений задачи (1) — (2).

Пусть область $(D_*) \subset (D)$ и пусть каждая точка $(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \in (D_*)$ является точкой единственности уравнения (1). Тогда (D_*) называют *областью единственности* уравнения (1).

Замечание. Для уравнения $(\tilde{1})$: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, не разрешенного относительно производной $y^{(n)}$, задача Коши ставится аналогично задаче Коши для уравнения (1). Однако в случае уравнения ($\tilde{1}$) эта постановка задачи Коши нуждается в уточнении. Дело в том, что заданным числам $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ может отвечать не одно, а несколько значений $y^{(n)}$, определяемых из уравнения

$$F(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \tag{3}$$

7°. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно старшей производной $y^{(n)}$, гарантирует **теорема Коши—Пикара**

Пусть имеется уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Если функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ непрерывна в области (D), $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$, и имеет в (D) непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{n-1}}$, то для любой точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in (D)$ задача (1) — (2) имеет единственное решение.

Это решение определено в некоторой окрестности $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 и удовлетворяет условиям

$$y\big|_{x=x_0} = y_0;\ y'\big|_{x=x_0} = y_0';\ \dots;\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Теорема будет доказана позже. Она будет получена из следствия к теореме о существовании и единственности решения задачи Коши нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. стр. 436).

Замечание (о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения, не разрешенного относительно $y^{(n)}$). Пусть имеется уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{$\tilde{1}$}$$

Рассмотрим уравнение

$$F(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \tag{3}$$

где $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа (см. начальные условия (2)). Пусть $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}$ — числа, которые являются различными вещественными корнями уравнения (3). Ради простоты ограничимся рассмотрением случая, когда уравнение (3) имеет конечное число вещественных корней.

Пусть $(\bar{P}_k)$, $k=\overline{1,m}$ — прямоугольный параллелепипед с центром в точке $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}, y_k^{(n)})$. Пусть параллелепипеды $(\bar{P}_k)$ такие, что $(\bar{P}_i)\cap(\bar{P}_j)=\varnothing$, $i,j=\overline{1,m}$, $i\neq j$. Предположим, что в каждом параллелепипеде $(\bar{P}_k)$, $k=\overline{1,m}$, функция $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F_x'(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})$, $F_y'(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})$, $F_{y'}'(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})$, , $F_{y^{(n)}}'(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})$ и что $F_{y^{(n)}}'\Big|_{(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)},y_k^{(n)})}\neq 0$, $k=\overline{1,m}$.

Видим, что в каждом параллелепипеде $(\bar{P}_k)$, $k=\overline{1,m}$, выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения $(\tilde{1})$ относительно $y^{(n)}$ (см. теорию неявных функций). Следовательно, существует окрестность $\bar{u}_{\rho_k}(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)})$ точки $(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)})$, $k=\overline{1,m}$, в которой уравнение $(\tilde{1})$ определяет $y^{(n)}$ как однозначную непрерывную функцию от $x,y,y',\dots,y^{(n-1)}$, а именно:

$$y^{(n)}=f_k(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}),\ k=\overline{1,m},$$

причем функция $f_k(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ имеет в $\bar{u}_{\rho_k}(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)})$ непрерывные частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial x}, \frac{\partial f_k}{\partial y}, \frac{\partial f_k}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial y^{n-1}}$. Так как в $\bar{u}_{\rho_k}(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)})$ функция $f_k(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial y}, \frac{\partial f_k}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial y^{n-1}}$, то по теореме существования и единственности решения задачи Коши уравнения, разрешенного относительно старшей производной $y^{(n)}$, заключаем, что каждому из значений $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}$, определяемых из уравнения (3), соответствует только одно решение уравнения $(\tilde{1})$.

8°. Общее и частное решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

где $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Пусть $(D_*) \subset (D)$ и (D_*) — область единственности для уравнения (1).

Определение. Функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \tag{4}$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, называется *общим решением* уравнения (1) в области (D_*), если:

1) функция $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ имеет непрерывные частные производные по x до порядка n включительно;

2) для любой точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in (D_*)$ система

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases} \tag{5}$$

разрешима единственным образом относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$\begin{cases} C_1^0 = \psi_1(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}), \\ C_2^0 = \psi_2(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}), \\ \qquad \dots\dots\dots\dots \\ C_n^0 = \psi_n(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}); \end{cases} \tag{6}$$

3) функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$, $x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, является решением уравнения (1) при любых значениях произвольных постоянных $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ в равенствах (6), когда точка $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in (D_*)$.

Геометрически общее решение уравнения (1) в (D_*) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy, зависящее от n параметров $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Отметим, что если известно общее решение (4) уравнения (1) в области (D_*), то решить задачу Коши (1) — (2) можно следующим образом: сначала дифференцируем по x функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ последовательно $(n-1)$ раз. Затем в соотношение (4) и в те соотношения, которые получаются из (4) последовательным $(n-1)$-кратным дифференцированием по x, подставляем начальные условия (2): $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$, , $y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$. В результате для определения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ получаем систему

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_0, \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Решив эту систему и подставив найденные конкретные значения $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ вместо $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в (4), получим решение задачи Коши (1) — (2): $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)$.

Замечание. Общее решение (4) уравнения (1) в области (D_*) может получаться в виде, заданном неявно соотношением

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{7}$$

Пусть функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ — общее решение уравнения (1) в (D_*). Тогда всякое решение уравнения (1), получающееся из общего при конкретных (допустимых) числовых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, называется ***частным решением*** этого уравнения.

(Допустимыми значениями $C_1, C_2, \ldots, C_n$ называются такие, которые определяются равенствами (6), когда точка $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in (D_*)$.)

§2. Некоторые типы уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка

1°. Уравнения, не содержащие явно искомой функции и нескольких последовательных производных, т. е. уравнения вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 (1 \le k < n). \tag{1}$$

Порядок такого уравнения заменой: $y^{(k)}(x) = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция, понижается сразу на k единиц. В самом деле, при такой замене имеем:

$$y^{(k+1)} = z', y^{(k+2)} = z'', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Следовательно, уравнение (1) примет вид:

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0. \tag{2}$$

Видим, что (2) — дифференциальное уравнение порядка $(n-k)$. Если уравнение (2) удается проинтегрировать, то, возвращаясь к переменной y, получим:

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) \text{ или } \Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0.$$

В случае, когда в результате интегрирования уравнения (2) получено $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, находим последовательно:

$$y^{(k-1)} = \int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})\,dx + \tilde{C}_{n-k+1},$$
$$y^{(k-2)} = \int\left(\int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})\,dx\right)dx + \tilde{C}_{n-k+1}x + \tilde{C}_{n-k+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{k} \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})\,dx dx \ldots dx + C_{n-k+1}x^{k-1} +$$
$$+ C_{n-k+2}x^{k-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Если же в результате интегрирования уравнения (2) получено

$$\Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0, \tag{3}$$

то часто уравнение (3) допускает параметрическое представление

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2 \ldots, C_{n-k}), \\ y^{(k)} = \psi(t, C_1, C_2 \ldots, C_{n-k}), \end{cases}$$

где φ — дифференцируемая функция.

В этом случае имеем

$$dy^{(k-1)} = y^{(k)}dx = \psi(t, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) \cdot \varphi'(t, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})dt,$$

$$\Rightarrow y^{(k-1)} = \int \psi(t, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) \cdot \varphi'(t, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})dt + C_{n-k+1} =$$
$$= \psi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}, C_{n-k+1}).$$

Аналогично находим $y^{(k-2)}$ и т. д. Для y получаем выражение вида $y = \psi_k(t, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n)$. Поэтому система

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}), \\ y = \psi_k(t, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n) \end{cases} \tag{4}$$

является общим решением уравнения (1) в параметрической форме.

Пример. Решить уравнение

$$xy''' + y'' = 0.$$

Решение. В этом примере $F(x, y, y', y'', y''') = xy''' + y''$; $F'_x = y'''$; $F'_y = 0$; $F'_{y'} = 0$; $F'_{y''} = 1$; $F'_{y'''} = x$. Видим, далее, что $F'_{y'''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши для исходного уравнения с любыми начальными данными вида (x_0, y_0, y'_0, y''_0) $(x_0 \neq 0)$ имеет единственное решение. Станем рассматривать наше уравнение лишь для $x \neq 0$. Замечаем, что заданное уравнение не содержит y и y'. Делаем замену $y'' = z(x)$ ($z(x)$ — новая неизвестная функция). Тогда $y''' = z'$, и исходное уравнение принимает вид

$$x \cdot z'_x + z = 0 \Leftrightarrow (x \cdot z)'_x = 0 \Rightarrow x \cdot z = C_1 \Rightarrow z = \frac{C_1}{x}$$

(у нас $x \neq 0$), т. е. $y'' = \dfrac{C_1}{x}$. Теперь находим последовательно

$$y' = C_1 \ln|x| + \tilde{C}_2;$$

$$y = C_1 \int \ln|x|\, dx + \tilde{C}_2 x + C_3 \Rightarrow y = C_1(x \ln|x| - x) + \tilde{C}_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1 x \ln|x| + (\tilde{C}_2 - C_1)x + C_3 \Rightarrow y = C_1 x \ln|x| + C_2 x + C_3.$$

2°. Уравнения, не содержащие явно независимой переменной, т. е. уравнения вида

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{5}$$

(В уравнение (5) не входит явно независимая переменная x.) Порядок такого уравнения можно понизить на единицу.

В самом деле, сделаем замену:

$$y'_x = z(y),$$

где $z(y)$ — новая искомая функция, а y — новая независимая переменная. При такой замене будем иметь

$$\begin{cases} y''_{x^2} = \dfrac{dy'_x}{dx} = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z\cdot z'_y = \psi_1(z, z'_y), \\ y'''_{x^3} = \dfrac{dy''_{x^2}}{dx} = \dfrac{d(z\cdot z'_y)}{dx} = \dfrac{d(z\cdot z'_y)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \left(z''_{y^2}z + (z'_y)^2\right)\cdot z = \psi_2(z, z'_y, z''_{y^2}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)}_{x^n} = \psi_{n-1}(z, z'_y, z''_{y^2}, \dots, z^{(n-1)}_{y^{n-1}}). \end{cases}$$

Подставляя в (5) вместо $y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}, \dots, y^{(n)}_{x^n}$ полученные для них выражения, получим

$$F\left(y, z, \psi_1(z, z'_y), \psi_2(z, z'_y, z''_{y^2}), \dots, \psi_{n-1}(z, z'_y, \dots, z^{(n-1)}_{y^{n-1}}\right) = 0,$$

$$\tilde{F}(y, z, z'_y, z''_{y^2}, \dots, z^{(n-1)}_{y^{n-1}}) = 0. \tag{6}$$

Видим, что (6) — дифференциальное уравнение порядка $(n-1)$.

Замечание. При осуществлении замены $y'_x = z(y)$ возможна потеря решения $y = \text{const}$. Поэтому необходимо непосредственной подстановкой в уравнение (5) проверить наличие или отсутствие такого решения у этого уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$(y')^2 + 2yy'' = 0.$$

Решение. Здесь $F(x, y, y', y'') = (y')^2 + 2yy''$; $F'_x = 0$; $F'_y = 2y''$; $F'_{y'} = 2y'$; $F'_{y''} = 2y$. Видим, что функция F непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$. Видим, далее, что $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Следовательно, задача Коши для исходного уравнения с любыми начальными условиями вида (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение. Станем рассматривать наше уравнение лишь для $y \neq 0$. Непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся, что $y \equiv \text{const}$ является решением заданного уравнения. Замечаем, что исходное уравнение не содержит явно независимую переменную x. Поэтому делаем замену:

$$y'_x = z(y)$$

($z(y)$ — новая неизвестная функция). Имеем

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z.$$

Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение примет вид

$$z^2 + 2yzz'_y = 0 \Leftrightarrow z(z + 2yz'_y) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1) $z = 0$, т. е. $y' = 0 \Rightarrow y \equiv \text{const}$;

2) $z + 2yz'_y = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{z} + \dfrac{dy}{2y} = 0$ (считаем $z \neq 0$ и $y \neq 0$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln|z| + \frac{1}{2}\ln|y| = \ln\left|C_1^*\right| (C_1^* \neq 0) \Rightarrow |z|\sqrt{|y|} = \left|C_1^*\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y'| \cdot \sqrt{|y|} = \left|C_1^*\right| \Rightarrow y' \cdot \sqrt{|y|} = C_1^* \Rightarrow \frac{2}{3}y^{3/2} = C_1^* x + C_2^*, \text{ если } y > 0,$$

$$\text{и } -\frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C_1^* x + C_2^*, \text{ если } y < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\pm y)^3 = \frac{9}{4}(C_1^* x + C_2^*)^2 \Rightarrow y^3 = \pm\frac{9}{4}(C_1^*)^2\left(x + \frac{C_2^*}{C_1^*}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^3 = C_1(x + C_2)^2, \text{ где } C_1 = \pm\frac{9}{4}(C_1^*)^2, \ C_2 = \frac{C_2^*}{C_1^*}.$$

3°. Уравнения, однородные относительно искомой функции и ее производных. Так называются уравнения вида:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (7)$$

в которых функция F является однородной относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$, т. е.

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

(m — показатель однородности). Порядок такого уравнения можно понизить на единицу.

В самом деле, положим

$$y' = y \cdot z,$$

где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Имеем при такой замене:

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z'),$$
$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = y \cdot \psi(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}).$$

Следовательно, относительно новой неизвестной функции уравнение (1) примет вид

$$F\left(x, y, yz, y(z^2 + z'), \dots, y \cdot \psi(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)})\right) = 0. \tag{8}$$

Воспользуемся теперь свойством однородности функции F. (Здесь в роли t выступает y.) Получим вместо (8):

$$y^m \cdot F\left(x, 1, z, z^2 + z', z^3 + 3zz' + z'', \dots, \psi(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)})\right) = 0.$$

Отсюда, сократив на y^m, получим

$$F\left(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \psi(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)})\right) = 0. \tag{9}$$

(9) — дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка относительно функции z.

Замечание. Если удается получить общее решение уравнения (9):

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$

то из того, что у нас $y' = yz$, т. е. $y' = y \cdot \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$, находим

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})dx}. \tag{10}$$

(10) — общее решение исходного уравнения.

Отметим, что из (10), при $C_n = 0$, мы получаем решение $y = 0$. Значит, при переходе от уравнения (8) к уравнению (9), производя сокращение на y^m, мы не теряем решение $y = 0$.

Пример. Решить уравнение $(x^2 + 1)\left((y')^2 - yy''\right) = xyy'$.

Решение. Здесь

$$F(x, y, y', y'') = (x^2 + 1)(y'^2 - yy'') - xyy'; \; F'_x = 2x(y'^2 - yy'') - yy';$$
$$F'_y = -(x^2 + 1)y'' - xy'; \; F'_{y'} = 2y'(x^2 + 1) - xy; \; F'_{y''} = -y(x^2 + 1).$$

Видим, что функция F непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$. Видим, далее, что $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) $(y_0 \neq 0)$ имеет единственное решение.

Станем рассматривать наше уравнения для $y \neq 0$. (Заметим, что $y=0$ является решением заданного уравнения. Это легко обнаруживается из самого вида уравнения.)

Замечаем, что исходное уравнение является однородным относительного y, y', y'' (показатель однородности $m=2$). Поэтому делаем замену

$$y' = yz, \tag{11}$$

где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Подставляя полученные выражения для y' и y'' в исходное уравнение, будем иметь:

$$(x^2+1)\left[y^2z^2 - y^2(z^2+z')\right] = xy^2z \Rightarrow -(x^2+1)y^2z' = xy^2z \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ сократив на y^2, получаем

$$-z'(x^2+1) = xz \Rightarrow -\frac{dz}{z} = \frac{xdx}{x^2+1}. \tag{12}$$

Могли потерять $z=0 \Leftrightarrow y'=0 \Rightarrow y=\text{const}$. ($y=\text{const}$ является решением исходного уравнения. Это легко обнаруживается из вида уравнения.) Из (12) находим:

$$-\ln|z| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln|C_1| \Rightarrow z = \frac{C_1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{C_1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = C_1 \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \ln|C_2|,\ C_2 \neq 0 \Rightarrow y = C_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{C_1}.$$

4°. Обобщенно-однородные уравнения. Так называются уравнения вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{13}$$

в которых функция F является такой, что

$$F(\lambda x, \lambda^k y, \lambda^{k-1}y', \lambda^{k-2}y'', \ldots, \lambda^{k-n}y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}).$$

Чтобы узнать, будет ли уравнение обобщенно-однородным, и найти число k, нужно приравнять друг другу показатели степеней, в которых число λ будет входить в каждый член уравнения после замены: x на λx, y на $\lambda^k y$, y' на $\lambda^{k-1}y'$, , $y^{(n)}$ на $\lambda^{k-n}y^{(n)}$. В результате получим несколько уравнений для k. Если полученные уравнения окажутся совместными, то данное уравнение является обобщенно-однородным; если же эти уравнения будут несовместными, то данное дифференциальное уравнение не является обобщенно-однородным.

Порядок обобщенно-однородного уравнения можно понизить на единицу. В самом деле, положим $x = e^t$, $y = ze^{kt}$, если $x > 0$, и $x = -e^t$, $y = ze^{kt}$, если $x < 0$. Здесь t — новая независимая переменная, а $z(t)$ — новая неизвестная функция.

Для определенности рассмотрим случай, когда $x > 0$. Будем иметь в этом случае:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = (z'_t e^{kt} + kze^{kt})\frac{1}{e^t} = (z'_t + kz)e^{(k-1)t},$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \left[(z''_{t^2} + kz'_t)e^{(k-1)t} + (k-1)e^{(k-1)t}(z'_t + kz)\right]e^{-t} =$$

$$= \left[z''_{t^2} + (2k-1)z'_t + k(k-1)z\right]e^{(k-2)t},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}_{x^n} = \psi(z, z'_t, \ldots, z^{(n)}_{t^n})e^{(k-n)t}.$$

Подстановка выражений для $x, y, y'_x, y''_{x^2}, \ldots, y^{(n)}_{x^n}$ в уравнение (13) дает

$$F\left(e^t, e^{kt}z, e^{(k-1)t}(z'_t + kz), \ldots, e^{(k-n)t}\psi(z, z'_t, \ldots, z^{(n)}_{t^n})\right) = 0. \quad (14)$$

Воспользуемся теперь свойством обобщенной однородности функции F. (Здесь в роли λ выступает e^t.) Получим вместо (14)

$$e^{mt}F\left(1, z, (z'_t + kz), \ldots, \psi(z, z'_t, \ldots, z^{(n)}_{t^n})\right) = 0.$$

Откуда, после сокращения на e^{mt}, будем иметь

$$\tilde{F}(z, z'_t, z''_{t^2}, \ldots, z^{(n)}_{t^n}) = 0. \quad (15)$$

Видим, что уравнение (15) не содержит явно независимую переменную t, а такое уравнение, как мы знаем, допускает понижение порядка на единицу (см. пункт 2°).

Пример. Решить уравнение

$$4x^2y^3y'' = x^2 - y^4.$$

Решение. Здесь $F(x, y, y', y'') = 4x^2y^3y'' + y^4 - x^2$, $F'_x = 8xy^3y'' - 2x$, $F'_y = 12x^2y^2y'' + 4y^3$, $F'_{y'} = 0$, $F'_{y''} = 4x^2y^3$. Видим, что функция F непрерывна и имеет непрерывные частные производные

$F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$. Видим, далее, что $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow xy=0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Выясним, будет ли заданное уравнение обобщенно-однородным. Имеем:

$$2+3k+k-2=2=4k \Rightarrow 4k=2=4k \Rightarrow k=\frac{1}{2}.$$

Вывод: заданное уравнение является обобщенно-однородным и число $k=\frac{1}{2}$.

Станем рассматривать заданное уравнение для $x>0$. Тогда можно положить: $x=e^t$, $y=ze^{t/2}$. При такой замене будем иметь

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\left(z'_t+\frac{1}{2}z\right)e^{\frac{t}{2}}\cdot e^{-t} \Rightarrow y'_x=\left(z'_t+\frac{1}{2}z\right)e^{-\frac{t}{2}}.$$

$$y''_{x^2}=(y'_x)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\left(z''_{t^2}-\frac{1}{4}z\right)e^{-\frac{3}{2}t}.$$

Подставляем выражения для x, y, y'_x, y''_{x^2} в заданное уравнение. Получаем

$$4e^{2t}z^3e^{\frac{3}{2}t}\left(z''_{t^2}-\frac{1}{4}z\right)e^{-\frac{3}{2}t}=e^{2t}-z^4e^{2t} \Rightarrow 4z^3\left(z''_{t^2}-\frac{1}{4}z\right)=1-z^4.$$

Видим, что полученное уравнение не содержит независимую переменную t. Поэтому делаем замену: $z'_t=u(z)$ ($u(z)$ — новая неизвестная функция). Имеем

$$z''_{t^2}=\frac{dz'_t}{dt}=\frac{du(z)}{dt}=\frac{du(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} \Rightarrow z''_{t^2}=u(z)\cdot u'_z.$$

Относительно функции $u(z)$ получаем уравнение

$$4z^3\left(uu'_z-\frac{1}{4}z\right)=1-z^4 \Leftrightarrow 4z^3uu'_z=1 \Leftrightarrow 2udu=\frac{dz}{2z^3}$$

(считаем $y\neq 0$, а следовательно, $z\neq 0$). А тогда

$$u^2 = C_1 - \frac{1}{4z^2} \ (\Rightarrow C_1 > 0) \Leftrightarrow (z_t')^2 = \frac{4C_1z^2 - 1}{4z^2} \Rightarrow (2zz_t')^2 = 4C_1z^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2zz_t' = \pm\sqrt{4C_1z^2 - 1} \Rightarrow \pm\frac{2zz_t'}{\sqrt{4C_1z^2 - 1}} = dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\frac{1}{2C_1}(4C_1z^2 - 1)^{1/2} = t + \ln C_2 \Rightarrow 4C_1z^2 - 1 = 4C_1^2(t + \ln C_2)^2.$$

У нас $t = \ln x$, $z^2 = \dfrac{y^2}{e^t} = \dfrac{y^2}{x}$. Следовательно, будем иметь

$$4C_1\frac{y^2}{x} = 1 + (2C_1 \ln C_2x)^2 \Rightarrow 4C_1y^2 = x + (2C_1 \ln C_2x)^2 x.$$

5°. Уравнения в точных производных. Так называются уравнения вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (16)$$

левые части которых являются точными производными от некоторой функции $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, т. е.

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

В этом случае уравнение (16) может быть записано в виде

$$\frac{d\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{dx} = 0 \Rightarrow \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1. \qquad (17)$$

(17) — уравнение $(n-1)$-го порядка. Следовательно, уравнения в точных производных допускают понижение порядка на единицу.

Пример. Решить уравнение $xy^{(4)} + y''' = 0$.

Решение. Здесь $F(x, y, y', \ldots, y^{(4)}) = xy^{(4)} + y'''$, $F_x' = y^{(4)}$, $F_y' = 0$, $F_{y'}' = 0$, $F_{y''}' = 0$, $F_{y'''}' = 1$, $F_{y^{(4)}}' = x$. Видим, что функция F непрерывна и имеет непрерывные частные производные F_x', F_y', $F_{y'}'$, $F_{y''}'$, $F_{y'''}'$, $F_{y^{(4)}}'$. Видим, далее, что $F_{y^{(4)}}' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши с любыми начальными данными $(x_0, y_0, y_0', y_0'', y_0''')$ ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение. Замечаем, что левая часть заданного уравнения является точной производной от функции $\Phi = xy'''$, т. е.

$$xy^{(4)} + y''' = \frac{d}{dx}(xy''').$$

Следовательно, исходное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{d}{dx}(xy''') = 0,$$

откуда заключаем, что $xy''' = C_1 \Rightarrow y''' = \frac{C_1}{x}$ (считаем $x \neq 0$). А тогда

$$y'' = C_1 \ln|x| + \tilde{C}_2 \Rightarrow y' = C_1 \int \ln|x|dx + \tilde{C}_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = C_1 \left(x \ln|x| - x\right) + \tilde{C}_2 x + C_3 =$$

$$= C_1 x \ln|x| + C_2 x + C_3 (C_2 = \tilde{C}_2 - C_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1 \int x \ln|x| dx + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1 \left(\frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} \right) + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1^* x^2 \ln|x| + C_2^* x^2 + C_3 x + C_4 .$$

§3. Примеры и задачи к §2

Задача 1. Решить уравнение $x^2 y'' = (y')^2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = x^2 y'' - (y')^2$; $F'_x = 2xy''$; $F'_y = 0$; $F'_{y'} = -2y'$; $F'_{y''} = x^2$. Видим, что функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

В заданное уравнение не входит явно y. Поэтому делаем замену $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'(x)$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$x^2 z' = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}. \qquad (*)$$

Считаем $x \neq 0$; могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$. ($y = C$ — решение исходного уравнения).

Решаем уравнение (*).

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+C_1 \Rightarrow z=\frac{x}{1+C_1x}, \text{ т. е. } y'=\frac{x}{1+C_1x}.$$

Следует рассмотреть два случая: 1) $C_1 \neq 0$ и 2) $C_1=0$.

1) Пусть $C_1 \neq 0$. Тогда

$$y'=\frac{C_1x}{C_1(C_1x+1)} \Rightarrow y'=\frac{1}{C_1}\cdot\frac{(C_1x+1)-1}{(C_1x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{C_1}x-\frac{1}{C_1^2}\ln|C_1x+1|+\tilde{C}_2 \Rightarrow C_1x-C_1^2y=\ln|C_1x+1|+C_2.$$

2) Пусть $C_1=0$. Тогда $y'=x \Rightarrow \ y=\dfrac{x^2}{2}+C$.

Задача 2. Решить уравнение $2xy'y''=(y')^2-1$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=2xy'y''-(y')^2+1$, $F'_x=2y'y''$, $F'_y=0$, $F'_{y'}=2xy''-2y'$, $F'_{y''}=2xy'$. Видим, что функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow xy'=0$. (Заметим, что функция $y(x)$ такая, что $y'=0$ заданному уравнению не удовлетворяет.) Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0) такими, что $x_0y'_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

В заданное уравнение не входит явно y. Поэтому делаем замену $y'=z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''=z'(x)$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид: $2xzz'=z^2-1$. Положим $z^2-1=u(x) \Rightarrow 2zz'=u'$ и, следовательно, будем иметь: $xu'=u \Rightarrow \dfrac{du}{u}=\dfrac{dx}{x}$. Считаем $x \neq 0$; могли потерять

$$u=0 \Leftrightarrow z^2=1 \Leftrightarrow z=\pm 1 \Leftrightarrow y'=\pm 1 \Rightarrow y=\pm x+C$$

($y=\pm x+C$ — решения исходного уравнения).

Из уравнения $\dfrac{du}{u}=\dfrac{dx}{x}$ находим $u=C_1x$ $(C_1 \neq 0)$. У нас $u=z^2-1$. Следовательно,

$$C_1x=z^2-1 \Leftrightarrow (y')^2-1=C_1x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\pm\sqrt{C_1x+1} \Rightarrow dy=\pm\sqrt{C_1x+1}\,dx \Rightarrow$$

$$y=\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{3/2}+C_2 \Rightarrow y-C_2=\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x+1)^{3/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9C_1^2(y-C_2)^2=4(C_1x+1)^3.$$

Задача 3. Решить уравнение $y^3y''=1$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=y^3y''-1$, $F'_x=0$, $F'_y=3y^2y''$, $F'_{y'}=0$, $F'_{y''}=y^3$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow y=0$ ($y=0$ не является решением уравнения). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0) ($y_0\neq 0$) имеет единственное решение.

В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x. Поэтому делаем замену: $y'_x=z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2}=z'_yz.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид

$$y^3zz'_y=1 \Rightarrow zdz=\frac{dy}{y^3} \text{ (считаем } y\neq 0\text{)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z^2}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}+\frac{C_1}{2} \text{ (ясно, что } C_1>0\text{)} \Rightarrow z^2=\frac{C_1y^2-1}{y^2} \Rightarrow z=\pm\frac{\sqrt{C_1y^2-1}}{y}.$$

т. е.

$$y'=\pm\frac{\sqrt{C_1y^2-1}}{y} \Rightarrow \frac{ydy}{\pm\sqrt{C_1y^2-1}}=dx. \qquad (*)$$

(Могли потерять: $C_1y^2-1=0 \Rightarrow y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{C_1}}$. Но $y=\text{const}$ не является решением уравнения.) Из уравнения (*) находим:

$$\pm\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2-1}=x+\tilde{C}_2 \Rightarrow \pm\sqrt{C_1y^2-1}=C_1x+C_2 \Rightarrow C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2.$$

Задача 4. Решить уравнение $(y')^2+2yy''=0$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=(y')^2+2yy''$, $F'_x=0$, $F'_y=2y''$, $F'_{y'}=2y'$, $F'_{y''}=2y$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow y=0$ ($y=0$ — решение уравнения). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0) ($y_0\neq 0$) имеет единственное решение. В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x. Поэтому делаем замену: $y'_x=z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''_{x^2}=\dfrac{dz(y)}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=z'_y\cdot z$. Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид

$$z^2+2yzz'_y=0. \qquad (*)$$

Положим $z^2=u(y) \Leftrightarrow 2zz'_y=u'_y$ и, следовательно, будем иметь вместо уравнения (*):

$$u+yu'_y=0 \Leftrightarrow (yu)'_y=0 \Rightarrow yu=\tilde{C}_1 \Rightarrow u=\frac{\tilde{C}_1}{y}$$

(считаем $y\neq 0$). Следует рассмотреть два случая: 1) $\tilde{C}_1=0$ и 2) $\tilde{C}_1\neq 0$.

1) Пусть $\tilde{C}_1=0$. Тогда

$$u=0 \Leftrightarrow z^2=0 \Leftrightarrow y'_x=0 \Rightarrow y=C(\text{const})$$

— решение исходного уравнения.

2) $\tilde{C}_1\neq 0$. У нас $u=z^2=(y'_x)^2$. Следовательно, будем иметь

$$(y'_x)^2=\frac{\tilde{C}_1}{y} \Rightarrow y'_x=\pm\sqrt{\frac{\tilde{C}_1}{y}} \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{y}{\tilde{C}_1}}dy=dx \Rightarrow \pm\frac{2}{3}\left(\frac{y}{\tilde{C}_1}\right)^{3/2}\cdot\tilde{C}_1=x+C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\left(\frac{y}{\tilde{C}_1}\right)^{3/2}=\frac{3}{2\tilde{C}_1}(x+C_2) \Rightarrow y^3=\frac{9}{4}\tilde{C}_1(x+C_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^3=C_1(x+C_2)^2 \ (C_1=\frac{9}{4}\tilde{C}_1).$$

Задача 5. Решить уравнение $y'' = 2yy'$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = y'' - 2yy'$, $F'_x = 0$, $F'_y = -2y'$, $F'_{y'} = -2y$, $F'_{y''} = 1$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} \neq 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) имеет единственное решение. В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x. Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид

$$zz'_y = 2yz \Leftrightarrow z(z'_y - 2y) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$: 1) $z = 0 \Leftrightarrow y'_x = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$ — решение исходного уравнения;

2) $z'_y - 2y = 0 \Leftrightarrow dz = 2ydy \Rightarrow z = y^2 + C_1$. У нас $z = y'_x$. Следовательно, будем иметь

$$y'_x = y^2 + C_1 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2 + C_1} = dx.$$

Следует рассмотреть три случая: 1) $C_1 > 0$; 2) $C_1 < 0$ и 3) $C_1 = 0$.

1) Пусть $C_1 > 0$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} = \sqrt{C_1} \cdot x + \tilde{C}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{C_1}} = \operatorname{tg} \left(\sqrt{C_1} x + \tilde{C}_2\right) \Rightarrow y = \tilde{C}_1 \operatorname{tg} \left(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2\right).$$

2) Пусть $C_1 < 0$: обозначим $-C_1 = \tilde{\tilde{C}}_1^2 > 0$. Тогда $\dfrac{dy}{y^2 + C_1} = \dfrac{dy}{y^2 - \tilde{\tilde{C}}_1^2}$ и, следовательно, будем иметь

$$\frac{1}{2\tilde{\tilde{C}}_1} \ln \left| \frac{y - \tilde{\tilde{C}}_1}{y + \tilde{\tilde{C}}_1} \right| = x + C_2 \quad \Rightarrow \quad \ln \left| \frac{y - \tilde{\tilde{C}}_1}{y + \tilde{\tilde{C}}_1} \right| = 2\tilde{\tilde{C}}_1 x + \tilde{\tilde{C}}_2.$$

3) Пусть $C_1 = 0$. Тогда

$$\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow x = -\frac{1}{y} + C \Rightarrow \frac{1}{y} = C - x \Rightarrow y(C - x) = 1.$$

Задача 6. Решить уравнение $yy'' + 1 = (y')^2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = yy'' - (y')^2 + 1$, $F'_x = 0$, $F'_y = y''$, $F'_{y'} = -2y'$, $F'_{y''} = y$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ не является решением уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x. Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид

$$yzz'_y + 1 = z^2. \qquad (*)$$

Положим

$$z^2 = u \Rightarrow 2zz'_y = u' \Rightarrow zz'_y = \frac{u'}{2}.$$

Тогда вместо уравнения (*) будем иметь

$$y\frac{u'_y}{2} = u - 1 \Rightarrow \frac{du}{u-1} = 2\frac{dy}{y}.$$

Было отмечено, что $y = 0$ не является решением исходного уравнения; могли потерять:

$$u = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow (y'_x)^2 = 1 \Rightarrow y'_x = \pm 1 \Rightarrow y = C \pm x$$

— решение исходного уравнения.

Решаем уравнение $\dfrac{du}{u-1} = 2\dfrac{dy}{y}$. Получим

$$\ln|u - 1| = 2\ln|y| + \ln|C_1| (C_1 \neq 0) \Rightarrow u - 1 = C_1 y^2 \Leftrightarrow z^2 - 1 = C_1 y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \pm\sqrt{C_1 y^2 + 1} \Rightarrow y'_x = \pm\sqrt{C_1 y^2 + 1} \Rightarrow \pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 + 1}} = dx.$$

Следует рассмотреть два случая: 1) $C_1 < 0$; 2) $C_1 > 0$.

1) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим $-C_1 = \tilde{C}_1^2 > 0$. В этом случае будем иметь

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{1-\tilde{C}_1^2 y^2}} = dx \Rightarrow \pm\frac{1}{\tilde{C}_1}\arcsin\tilde{C}_1 y = x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin\tilde{C}_1 y = \pm(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2) \Rightarrow \tilde{C}_1 y = \pm\sin(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2).$$

2) Пусть $C_1 > 0$. В этом случае будем иметь

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 + 1}} = dx \Rightarrow \pm\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left|\sqrt{C_1}\,y + \sqrt{C_1 y^2 + 1}\right| = x + C_2.$$

Задача 7. Решить уравнение $y''(e^x+1) + y' = 0$.

Решение. $F(x,y,y',y'') = y''(e^x+1) + y'$, $F'_x = e^x y''$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 1$, $F'_{y''} = e^x + 1$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} \neq 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) имеет единственное решение.

Запишем исходное уравнение в виде:

$$\frac{y''}{y'} + \frac{1}{e^x+1} = 0. \qquad (*)$$

(Могли потерять: $y' = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$ — решение.) Из уравнения (*) находим:

$$\left(\ln|y'|\right)'_x = -\frac{1}{e^x+1} \Rightarrow \ln|y'| = -x + \ln(e^x+1) + \ln|C_1| \; (C_1 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{C_1(e^x+1)}{e^x} \Rightarrow y' = C_1 + C_1 e^{-x} \Rightarrow y = C_1 x - C_1 e^{-x} + C_2.$$

Задача 8. Решить уравнение $y''' = (y'')^2$.

Решение. Имеем $f(x,y,y',y'') = (y'')^2$, $f'_y = 0$, $f'_{y'} = 0$, $f'_{y''} = 2y''$. Видим, что $f(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) имеет единственное решение. Запишем заданное уравнение в виде $\frac{y'''}{(y'')^2}=1$ (могли потерять: $y''=0 \Rightarrow y'=C_1 \Rightarrow y=C_1x+C_2$ — решение уравнения), или в виде

$$\left(-\frac{1}{y''}\right)'_x=1 \Rightarrow -\frac{1}{y''}=x+C_1 \Rightarrow y''=-\frac{1}{x+C_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=-\ln|x+C_1|-\ln|C_2| \Rightarrow y'=-\ln|C_2(x+C_1)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\int \ln|C_2(x+C_1)|\,dx+C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\left[x\ln|C_2(x+C_1)|-\int\frac{xdx}{x+C_1}\right]+C_3=$$

$$=-x\ln|C_2(x+C_1)|+x-C_1\ln|x+C_1|+C_3=$$

$$=C_3-(x+C_1)\ln|C_2(x+C_1)|+C_1\ln|C_2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\tilde{C}_3-(x+C_1)\ln|C_2(x+C_1)|.$$

Задача 9. Решить уравнение $yy''=(y')^2-(y')^3$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=yy''-(y')^2+(y')^3$, $F'_x=0$, $F'_y=y''$, $F'_{y'}=-2y'+3(y')^2$, $F'_{y''}=y$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow y=0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0) $(y_0\neq 0)$ имеет единственное решение. В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x. Поэтому делаем замену: $y'_x=z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2}=\frac{dz(y)}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2}=z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид:

$$yzz'_y=z^2-z^3 \Leftrightarrow z\left[yz'_y-z(1-z)\right]=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$: 1) $z=0 \Leftrightarrow y'_x=0 \Rightarrow y=C(\text{const})$ — решение.

2) $yz'_y=z(1-z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z(1-z)} = \frac{dy}{y}. \qquad (*)$$

Могли потерять:

1) $y=0$ — решение (содержится в решении $y=C$);

2) $z=1 \Leftrightarrow y'_x=1 \Rightarrow y=x+C$ — решение.

Уравнение (*) запишем в виде:

$$\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\right)dz = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|z|-\ln|z-1| = \ln|y|+\ln|C_1|(C_1 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z-1} = C_1 y \Rightarrow \frac{y'}{y'-1} = C_1 y \Rightarrow y' = \frac{C_1 y}{C_1 y - 1} \Rightarrow \frac{(C_1 y-1)dy}{C_1 y} = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy \cdot \left(1-\frac{1}{C_1 y}\right) = dx \Rightarrow y - \frac{1}{C_1}\ln|y| = x + C_2 \Rightarrow y + \tilde{C}_1 \ln|y| = x + C_2.$$

Задача 10. Решить уравнение $y''' = 2(y''-1)\operatorname{ctg} x$.

Решение. $f(x,y,y',y'') = 2(y''-1)\operatorname{ctg} x$, $f'_y = 0$, $f'_{y'} = 0$, $f'_{y''} = -2\operatorname{ctg} x$. Функция $f(x,y,y',y'')$ непрерывна в областях

$$(G_k) = \begin{cases} k\pi < x < (k+1)\pi, \\ -\infty < y < \infty, \\ -\infty < y' < \infty, \\ -\infty < y'' < \infty, \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

и имеет там непрерывные частные производные: $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($x_0 \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y и y'. Поэтому делаем замену: $y'' = z(x) \Rightarrow y''' = z'$.

Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$z' = 2(z-1)\operatorname{ctg} x \Rightarrow \frac{dz}{z-1} = 2\operatorname{ctg} x\, dx. \qquad (*)$$

Могли потерять:

$$z=1 \Leftrightarrow y''=1 \Rightarrow y'=x+C_1 \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

— решение заданного уравнения.

Из уравнения (*) находим

$$\ln|z-1|=2\ln|\sin x|+\ln|C_1|\,(C_1\neq 0) \Rightarrow z-1=C_1\sin^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=C_1\sin^2 x+1 \Rightarrow y''=C_1\sin^2 x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)+x+C_2 \Rightarrow y=C_1\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8}\cos 2x\right)+$$

$$+\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3 \Rightarrow y=\frac{C_1}{4}\left(x^2+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Положим $\tilde{C}_1=\frac{C_1}{4}$. Будем иметь

$$y=\tilde{C}_1x^2+\frac{x^2}{2}+\tilde{C}_1\cdot\frac{\cos 2x}{2}+C_2x+C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=\tilde{C}_1\cos 2x+(2\tilde{C}_1+1)x^2+\tilde{C}_2x+\tilde{C}_3.$$

Задача 11. Решить уравнение $2yy''=y^2+(y')^2$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=2yy''-y^2-(y')^2$, $F'_x=0$, $F'_y=2y''-2y$, $F'_{y'}=-2y'$, $F'_{y''}=2y$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y, $F'_{y'}$, $F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow y=0$ ($y=0$ — решение уравнения). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0) ($y_0\neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x. Поэтому делаем замену: $y'_x=z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. А тогда

$$y''_{x^2}=\frac{dz(y)}{dx}=\frac{dz(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2}=z'_yz.$$

Относительно функции $z(y)$ уравнение принимает вид:

$$2yzz'_y=y^2+z^2. \qquad (*)$$

Положим $z^2(y)=u(y) \Rightarrow 2zz'_y=u'_y$, и, следовательно, уравнение (*) относительно функции $u(y)$ будет таким:

$$yu'_y=u+y^2 \Rightarrow u'_y-\frac{u}{y}-y=0$$

(могли потерять решение $y=0$). Получили линейное уравнение относительно функции $u(y)$. Для линейного уравнения интегрирующий множитель находится по формуле

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{dy}{y}}=\frac{1}{y}.$$

После умножения обеих частей уравнения $u'_y-\left(\frac{u}{y}+y\right)=0$ на $\mu(y)=\frac{1}{y}$ получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{1}{y}du-\left(\frac{u}{y^2}+1\right)dy=0 \Rightarrow u=y(y+C_1).$$

У нас

$$u=z^2 \Rightarrow z^2=y(y+C_1) \Leftrightarrow (y'_x)^2=y(y+C_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x=\pm\sqrt{y^2+C_1y} \Rightarrow \pm\frac{dy}{\sqrt{y^2+C_1y}}=dx.$$

Следует рассмотреть два случая: 1) $C_1=0$ и 2) $C_1\neq 0$.

1) Пусть $C_1=0$. Тогда имеем:

$$\frac{dy}{y}=\pm dx \Rightarrow \ln|y|=\pm x+\ln|C| \Rightarrow y=Ce^{\pm x}.$$

2) Пусть $C_1\neq 0$. Тогда имеем:

$$\pm\int\frac{dy}{\sqrt{\left(y+\frac{C_1}{2}\right)^2-\frac{C_1^2}{4}}}=x+C_2 \Rightarrow \pm\ln\left|\left(y+\frac{C_1}{2}\right)+\sqrt{y^2+C_1y}\right|=x+C_2.$$

Задача 12. Решить уравнение $(y'')^3 + xy'' = 2y'$.

Решение. $F(x,y,y',y'') = (y'')^3 + xy'' - 2y'$, $F'_x = y''$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = -2$, $F'_{y''} = 3(y'')^2 + x$. Функция $F(x,y,y',y'')$ — непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow 3(y'')^2 + x = 0$ (функция $y(x)$, для которой $3(y'')^2 + x = 0$, не является решением заданного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) такими, что $x_0 + 3(y''_0)^2 \neq 0$, имеет единственное решение.

Исходное уравнение не содержит явно y. Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. А тогда $y''_{x^2} = z'_x$, и, следовательно, исходное уравнение относительно функции $z(x)$ будет таким:

$$(z'_x)^3 + xz'_x = 2z \Rightarrow z = \frac{1}{2}xz' + \frac{1}{2}(z')^3.$$

Положим $z' = t$ (t — параметр). Тогда $z = \frac{1}{2}xt + \frac{1}{2}t^3$; $dz = tdx$. Следовательно,

$$tdx = \frac{1}{2}(xdt + tdx) + \frac{3}{2}t^2dt \Rightarrow \frac{1}{2}tdx = \frac{1}{2}xdt + \frac{3}{2}t^2dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'_t - \frac{x}{t} = 3t. \qquad (*)$$

Могли потерять: $t = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного уравнения.

Решение уравнения (*): $x = 3t^2 + C_1t$. У нас

$$z = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \Rightarrow y'_t = z\frac{dx}{dt}.$$

Но $z = \frac{1}{2}xt + \frac{1}{2}t^3$; $x = 3t^2 + C_1t$. Следовательно,

$$y'_t = \left[\frac{1}{2}t(3t^2 + C_1t) + \frac{1}{2}t^3\right](6t + C_1) \Rightarrow y'_t = 12t^4 + 5C_1t^3 + \frac{C_1^2}{2}t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{12}{5}t^5+\frac{5}{4}C_1t^4+\frac{C_1^2}{6}t^3+C_2.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения в параметрической форме будет таким:

$$\begin{cases} x=3t^2+C_1t, \\ y=\dfrac{12}{5}t^5+\dfrac{5}{4}C_1t^4+\dfrac{C_1^2}{5}t^3+C_2. \end{cases}$$

Задача 13. Решить уравнение: $(y'')^2+y'=xy''$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=(y'')^2+y'-xy''$, $F'_x=-y''$, $F'_y=0$, $F'_{y'}=1$, $F'_{y''}=2y''-x$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y, $F'_{y'}$, $F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow 2y''-x=0$. (Функция $y(x)$, для которой $2y''-x=0$, является решением заданного уравнения. Это — функция $y(x)=\dfrac{x^3}{12}+C$.) Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y_0') такими, что $2y_0''-x_0\neq 0$, имеет единственное решение.

Исходное уравнение не содержит явно y. Поэтому делаем замену $y'_x=z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. А тогда $y''_{x^2}=z'_x$, и, следовательно, исходное уравнение относительно функции $z(x)$ будет таким:

$$(z')^2-xz'+z=0 \Rightarrow z'=\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-z} \Rightarrow z'-\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-z}.$$

Положим:

$$\frac{x^2}{4}-z=u \Rightarrow u'=\frac{x}{2}-z'.$$

Будем иметь:

$$-u'=\pm\sqrt{u} \Rightarrow \frac{du}{\pm\sqrt{u}}=dx.$$

Могли потерять:

$$u=0 \Leftrightarrow z=\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow y'=\frac{x^2}{4} \Rightarrow y=\frac{x^3}{12}+C$$

— решение исходного уравнения. Из уравнения $\frac{du}{\pm\sqrt{u}}=dx$ находим:

$$\mp 2\sqrt{u}=x+C_1 \Rightarrow 4u=(x+C_1)^2 \Leftrightarrow x^2-4z=(x+C_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4z=x^2+2xC_1+C_1^2 \Rightarrow z=-\frac{C_1x}{2}-\frac{C_1^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'=-\frac{C_1x}{2}-\frac{C_1^2}{4} \Rightarrow y=-\frac{C_1}{4}x^2-\frac{C_1^2}{4}x+C_2.$$

Задача 14. Решить уравнение $y''+(y')^2=2e^{-y}$.

Решение. $f(x,y,y')=-(y')^2+2e^{-y} \Rightarrow f'_y=-2e^{-y}, \quad f'_{y'}=-2y'$. Функция $f(x,y,y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x. Поэтому делаем замену: $y'_x=z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. А тогда

$$y''_{x^2}=\frac{dz(y)}{dx}=\frac{dz(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2}=z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение примет вид $zz'_y+z^2=2e^{-y}$. Положим $z^2(y)=u(y) \Rightarrow 2zz'_y=u'_y$. Будем иметь:

$u'_y+2u=4e^{-y}$ (это — линейное уравнение) $\Rightarrow u=C_1e^{-2y}+4e^{-y}$.

У нас $u=z^2$. Следовательно,

$$z^2=C_1e^{-2y}+4e^{-y} \Rightarrow z=\pm\sqrt{C_1e^{-2y}+4e^{-y}} \Leftrightarrow y'=\pm\sqrt{C_1e^{-2y}+4e^{-y}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\pm\sqrt{C_1e^{-2y}+4e^{-y}}}=dx \Rightarrow \frac{e^y dy}{\pm\sqrt{C_1+4e^y}}=dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\frac{1}{2}\sqrt{C_1+4e^y}=x+C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(C_1 + 4e^y) = (x + C_2)^2 \Rightarrow \tilde{C}_1 + e^y = (x + C_2)^2.$$

Задача 15. Решить уравнение $xy''' = y'' - xy''$.

Решение. $F(x, y, y', y'', y''') = xy''' + xy'' - y''$, $F'_x = y''' + y''$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 0$, $F'_{y''} = x - 1$, $F'_{y'''} = x$. Функция $F(x, y, y', y'', y''')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}, F'_{y'''}$; $F'_{y'''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y и y'. Поэтому делаем замену: $y'' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. А тогда $y''' = z'$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$xz' = z(1 - x) \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{1 - x}{x} dx. \qquad (*)$$

Считаем $x \neq 0$; могли потерять:

$$z = 0 \Leftrightarrow y'' = 0 \Rightarrow y = C_1 x + C_2$$

— решение. Из уравнения (*) находим:

$$\ln|z| = \ln|x| - x + \ln|C_1| \ (C_1 \neq 0) \Rightarrow z = C_1 x e^{-x}.$$

У нас $z = y''$. Следовательно,

$$y'' = C_1 x e^{-x} \Rightarrow y' = C_1(-xe^{-x} - e^{-x}) + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1(xe^{-x} + e^{-x} + e^{-x}) + C_2 x + C_3 \Rightarrow y = C_1 e^{-x}(x + 2) + C_2 x + C_3.$$

Задача 16. Решить уравнение $(y'')^2 = (y')^2 + 1$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = (y'')^2 - (y')^2 - 1$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = -2y'$, $F'_{y''} = 2y''$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 2y'' \neq 0$ (это видно из заданного уравнения). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y''_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y. Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. А тогда $y'' = z'$, и, следовательно, заданное уравнение принимает вид

$$(z')^2 = z^2+1 \Rightarrow z' = \pm\sqrt{z^2+1} \Leftrightarrow \frac{dz}{\pm\sqrt{z^2+1}} = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right| = x+\ln|C_1|,\ C_1 \ne 0 \Rightarrow z+\sqrt{z^2+1} = C_1e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{z^2+1} = C_1e^x - z \Rightarrow z^2+1 = C_1e^{2x} - 2C_1e^xz + z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{C_1}{2}e^x - \frac{1}{2C_1}e^{-x} \Rightarrow y' = \frac{C_1}{2}e^x - \frac{1}{2C_1}e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{C_1}{2}e^x + \frac{1}{2C_1}e^{-x} + C_2.$$

Задача 17. Решить уравнение $y'' = e^y$.

Решение. $f(x,y,y') = e^y \Rightarrow f'_y = e^y, f'_{y'} = 0$. Функция $f(x,y,y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) имеет единственное решение.

В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x. Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. А тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение запишется в виде:

$$z'_y z = e^y \Leftrightarrow (z^2)'_y = 2e^y \Rightarrow z^2 = 2e^y + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \pm\sqrt{2e^y + C_1} \Rightarrow y' = \pm\sqrt{2e^y + C_1} \Rightarrow \frac{dy}{\pm\sqrt{2e^y + C_1}} = dx.$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$; 2) $C_1 < 0$; 3) $C_1 > 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. Имеем в этом случае

$$\pm e^{-y/2}dy = \sqrt{2}dx \Rightarrow \mp 2e^{-y/2} = \sqrt{2}x + \sqrt{2}C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4e^{-y} = 2(x+C)^2 \Rightarrow e^y(x+C)^2 = 2.$$

2) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим $C_1 = -\tilde{C}_1^2$ ($\tilde{C}_1^2 > 0$). Имеем в этом случае

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{2e^y-\tilde{C}_1^2}}=dx \Leftrightarrow \frac{dy}{\pm\sqrt{2}e^{y/2}\sqrt{1-\dfrac{\tilde{C}_1^2e^{-y}}{2}}}=dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\frac{2}{\tilde{C}_1}\cdot\frac{d\left(-\dfrac{\tilde{C}_1e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\tilde{C}_1e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)^2}}=dx \Rightarrow \pm\frac{2}{\tilde{C}_1}\arcsin\left(\frac{\tilde{C}_1e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)=x+C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\frac{\tilde{C}_1e^{-y/2}}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\tilde{C}_1}{2}(x+C_2) \Rightarrow \tilde{C}_1^2e^{-y}=2\sin^2\left(\frac{\tilde{C}_1}{2}(x+C_2)\right).$$

Положим $\dfrac{\tilde{C}_1}{2}=C_1^*$; $\dfrac{\tilde{C}_1}{2}\cdot C_2=C_2^*$. Будем иметь

$$4(C_1^*)^2e^{-y}=2\sin^2(C_1^*x+C_2^*) \Rightarrow 2(C_1^*)^2=e^y\sin^2(C_1^*x+C_2^*).$$

3) Пусть $C_1>0$. Обозначим $C_1=\tilde{C}_1^2$. Имеем в этом случае

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{2e^y+\tilde{C}_1^2}}=dx \Leftrightarrow \frac{dy}{\pm\sqrt{2}e^{y/2}\sqrt{1+\left(\dfrac{\tilde{C}_1e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)^2}}=dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\frac{2}{C_1}\cdot\frac{d\left(\dfrac{\tilde{C}_1e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\tilde{C}_1e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)^2}}=dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\frac{2}{\tilde{C}_1}\ln\left|\frac{\tilde{C}_1e^{-y/2}}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\left(\frac{\tilde{C}_1e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)^2}\right|=x+C_2,$$

или

$$\pm\frac{2}{\tilde{C}_1}\operatorname{Arsh}\left(\frac{\tilde{C}_1e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)=x+C_2 \Rightarrow \pm\operatorname{Arsh}\left(\frac{\tilde{C}_1e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\tilde{C}_1}{2}(x+C_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt{2}} e^{-y/2} = \operatorname{sh}\left(\frac{\tilde{C}_1}{2}(x+C_2)\right).$$

Обозначим $\frac{\tilde{C}_1}{2} = C_1^*$, $\frac{\tilde{C}_1}{2} C_2 = C_2^*$. Будем иметь

$$2(C_1^*)^2 e^{-y} = \operatorname{sh}^2(C_1^* x + C_2^*) \Rightarrow e^y \operatorname{sh}^2(C_1^* x + C_2^*) = 2(C_1^*)^2.$$

Задача 18. Решить уравнение $y'' - xy''' + (y''')^3 = 0$.

Решение. $F(x,y,y',y'',y''') = y'' - xy''' + (y''')^3$, $F'_x = -y'''$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 0$, $F'_{y''} = 1$, $F'_{y'''} = 3(y''')^2 - x$. Функция $F(x,y,y',y'',y''')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}, F'_{y'''}$; $F'_{y'''} = 0 \Leftrightarrow 3(y''')^2 - x = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) такими, что $3(y'''_0)^2 - x_0 \neq 0$ имеет единственное решение. Заданное уравнение не содержит явно y и y'. Поэтому делаем замену: $y'' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''' = z'$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид:

$$z = xz' - (z')^3. \qquad (*)$$

Станем искать решение уравнения (*) в параметрической форме. С этой целью полагаем $z' = t$ (t — параметр). Тогда $z = xt - t^3$. Так как $z' = t \Leftrightarrow dz = tdx$, то получаем

$$xdt + tdx - 3t^2 dt = tdx \Rightarrow (x - 3t^2)dt = 0 \Rightarrow 3t^2 = x \Rightarrow t = \pm\left(\frac{x}{3}\right)^{1/2}.$$

Следовательно, $z = \pm\frac{x^{3/2}}{\sqrt{3}} \mp \frac{x^{3/2}}{3\sqrt{3}}$. У нас $z = y''$. Поэтому

$$y'' = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}} x^{3/2} \Rightarrow y' = \pm\frac{2\cdot 2}{3\sqrt{3}\cdot 5} x^{5/2} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{8}{315} x^3 \sqrt{3x} + C_1 x + C_2.$$

Выясним, не потеряны ли решения вида $z = ax + b$. Подстановка в уравнение (*) дает: $ax + b = xa - a^3$. Видим, что если $b = -a^3$, то $z = ax - a^3$ — решение уравнения (*). Обозначим $a = C_1$ (произвольная постоянная). Тогда

$$y'' = C_1 x - C_1^3 \Rightarrow y' = C_1 \frac{x^2}{2} - C_1^3 x + C_2 \Rightarrow y = C_1 \frac{x^3}{6} - C_1^3 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 .$$

Выясним, не имеет ли уравнение (*) решений, определяемых системой

$$\begin{cases} f(x,z,z') = 0, \\ f'_{z'}(x,z,z') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = xz' - (z')^3, \\ 0 = x - 3(z')^2 \end{cases} \Rightarrow z' = \pm\left(\frac{x}{3}\right)^{1/2} .$$

Такое решение имеется, и оно было получено выше:

$$y = \pm\frac{8}{315} x^3 \sqrt{3x} + C_1 x + C_2 .$$

Задача 19. Решить уравнение $2y'(y'' + 2) = x(y'')^2$.

Решение. $F(x,y,y',y'') = 2y'(y''+2) - x(y'')^2$, $F'_x = -(y'')^2$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 2(y''+2)$, $F'_{y''} = 2y' - 2xy''$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow 2(y' - xy'') = 0$ (функция $y(x)$, определяемая этим соотношением, не является решением исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) такими, что $y'_0 - x_0 y''_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y. Поэтому делаем замену $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$2z(z'+2) = x(z')^2 \Rightarrow (z')^2 - 2\frac{z}{x}z' - 4\frac{z}{x} = 0 \text{ (считаем } x \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' = \frac{z}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{x}\right)^2 + 4\frac{z}{x}} .$$

Положим

$$\frac{z}{x} = u(x) \Rightarrow z = xu \Rightarrow z' = u + xu' .$$

Будем иметь

$$u + xu' = u \pm \sqrt{u^2 + 4u} \Rightarrow x\,du = \pm\sqrt{u^2 + 4u}\,dx \Rightarrow \frac{du}{\pm\sqrt{u^2+4u}} = \frac{dx}{x} . \quad (*)$$

Могли потерять: 1) $u=0$ и 2) $u=-4$.

1) Пусть $u=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow y=C$ — решение.

2) Пусть $u=-4 \Rightarrow z=-4x \Rightarrow y'=-4x \Rightarrow y=-2x^2+C$ — решение.

Из уравнения (*) находим

$$\pm\frac{du}{\sqrt{(u+2)^2-4}}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \pm\ln\left|u+2+\sqrt{u^2+4u}\right|=$$

$$=\ln|x|+\ln|C_1| \; (C_1\neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u+2+\sqrt{u^2+4u}=C_1x \Rightarrow \sqrt{u^2+4u}=(C_1x-u-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^2+4u=C_1^2x^2+u^2+4-2C_1xu-4C_1x+4u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2C_1xu=C_1^2x^2-4C_1x+4 \Rightarrow 2C_1z=(C_1x-2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{(C_1x-2)^2}{2C_1} \Rightarrow y=\frac{(C_1x-2)^3}{6C_1^2}+C_2.$$

Задача 20. Решить уравнение $y^4-y^3y''=1$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=y^4-y^3y''-1$, $F'_x=0$, $F'_y=4y^3-3y^2y''$, $F'_{y'}=0$, $F'_{y''}=-y^3$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y, $F'_{y'}$, $F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow y=0$ ($y=0$ не является решением заданного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0\neq 0$) имеет единственное решение. Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x. Поэтому делаем замену: $y'_x=z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2}=\frac{dz(y)}{dx}=\frac{dz(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2}=z'_yz.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение будет таким:

$$y^3zz'_y=y^4-1 \Rightarrow zdz=\frac{y^4-1}{y^3}dy$$

($y=0$ не является решением исходного уравнения), откуда

$$\frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y^2}+\frac{C_1}{2} \Rightarrow z^2=y^2+\frac{1}{y^2}+C_1 \Leftrightarrow (y')^2=y^2+\frac{1}{y^2}+C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y')^2=\frac{y^4+C_1y^2+1}{y^2} \Rightarrow y'=\pm\frac{\sqrt{y^4+C_1y^2+1}}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\frac{ydy}{\sqrt{y^4+C_1y^2+1}}=dx$$

(замена: $y^2=t \Rightarrow ydy=\frac{dt}{2}$)

$$\pm\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{C_1}{2}\right)^2+1-\frac{C_1^2}{4}}}=x+\frac{C_2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|t+\frac{C_1}{2}\pm\sqrt{t^2+C_1t+1}\right|=2x+C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|y^2+\frac{C_1}{2}\pm\sqrt{y^4+C_1y^2+1}\right|=2x+C_2.$$

$y=\pm1$, $x\in(-\infty;+\infty)$ — решения исходного уравнения.

Задача 21. Решить уравнение $(y')^2=(3y-2y')y''$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=(y')^2+(2y'-3y)y''$, $F'_x=0$, $F'_y=-3y''$, $F'_{y'}=2y'+2y''$, $F'_{y''}=2y'-3y$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow 2y'-3y=0$ ($y=0$ и $y=e^{\frac{3}{2}x}+1$, определяемые уравнением $2y'-3y=0$, являются решениями исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0), такими, что $2y'_0-3y_0\neq0$, имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x. Поэтому делаем замену: $y'_x=z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z,$$

и, следовательно, исходное уравнение принимает вид:

$$z^2 = (3y - 2z)zz'_y \Rightarrow z = (3y - 2z)z'_y. \qquad (*)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y'_x = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$ — решение исходного уравнения.

Запишем уравнение (*) в виде

$$zy'_z = 3y - 2z \Rightarrow y'_z - \frac{3}{z}y + 2 = 0$$

— линейное уравнение относительно функции $y(z)$. Решая это уравнение, находим: $y = z + C_1 z^3$. У нас $z = y'_x$. Следовательно, получаем $y = y' + C_1(y')^3$. Это уравнение решаем методом введения параметра, а именно, полагаем $y' = t$. Тогда $y = t + C_1 t^3$. Так как $y' = t \Leftrightarrow tdx = dy$, то получаем

$$tdx = dt + 3C_1 t^2 dt \Rightarrow dx = \left(3C_1 t + \frac{1}{t}\right)dt.$$

(Могли потерять: $t = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Но это решение было получено раньше.) А тогда $x = \frac{3}{2}C_1 t^2 + \ln|t| + \ln|C_2|$ ($C_2 \neq 0$). Таким образом, найдено общее решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 3\tilde{C}_1 t^2 + \ln|C_2 t|, \\ y = t + 2\tilde{C}_1 t^3, \end{cases} \quad \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{2}.$$

Задача 22. Решить уравнение $y''(2y' + x) = 1$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = y''(2y' + x) - 1$, $F'_x = y''$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 2y''$, $F'_{y''} = 2y' + x$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow 2y' + x = 0$ (функция $y(x)$, определяемая уравнением $2y' + x = 0$, не является решением исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y_0'), такими, что $2y_0' + x_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y. Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$z_x'(2z + x) = 1 \Rightarrow x_z' - x = 2z$$

(это — линейное уравнение относительно функции $x(z)$). Решая его, находим: $x = C_1e^z - 2(z+1) \Rightarrow x = C_1e^{y'} - 2(y'+1)$. Это уравнение станем решать методом введения параметра, а именно, полагаем: $y' = t$. Тогда $x = C_1e^t - 2(t+1)$. Так как $y' = t$, то $dy = tdx$, и, следовательно, получаем

$$dy = t(C_1e^t - 2)dt \Rightarrow y = C_1(t-1)e^t - t^2 + C_2.$$

Общее решение исходного уравнения получено в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = C_1e^t - 2t - 2, \\ y = C_1(t-1)e^t - t^2 + C_2. \end{cases}$$

Задача 23. Решить уравнение $(y'')^2 - 2y'y''' + 1 = 0$.

Решение. $F(x, y, y', y'', y''') = (y'')^2 - 2y'y''' + 1 = 0$, $F_x' = 0$, $F_y' = 0$, $F_{y'}' = -2y'''$, $F_{y''}' = 2y''$, $F_{y'''}' = -2y'$. Функция $F(x, y, y', y'', y''')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F_x', F_y', F_{y'}', F_{y''}', F_{y'''}'$; $F_{y'''}' = 0 \Leftrightarrow y' = 0$ (функция, определяемая уравнением $y' = 0$, не является решением исходного уравнения). Задача Коши заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y_0', y_0'') ($y_0' \neq 0$) имеет единственное решение. Заданное уравнение не содержит явно y. Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, $y''' = z''$, и, следовательно, заданное уравнение принимает вид:

$$(z')^2 - 2zz'' + 1 = 0. \qquad (*)$$

Полученное уравнение (*) не содержит явно независимую переменную x. Поэтому делаем замену: $z'_x = u(z)$, где $u(z)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$z''_{x^2} = \frac{du(z)}{dx} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = u'_z u,$$

и, следовательно, вместо уравнения (*) будем иметь

$$u^2 - 2zuu'_z + 1 = 0. \qquad (**)$$

Положим $u^2 = v \Rightarrow 2uu'_z = v'_z$. Получим вместо уравнения (**):

$$v + 1 = zv'_z \Rightarrow \frac{dv}{v+1} = \frac{dz}{z}. \qquad (***)$$

(Могли потерять: 1) $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$ — не является решением исходного уравнения; 2) $v = -1$ — невозможно, ибо $v = u^2 \geq 0$.) Из уравнения (***) находим:

$$v + 1 = C_1 z, \text{ где } C_1 \neq 0 \Rightarrow u^2 + 1 = C_1 z \Leftrightarrow (z'_x)^2 + 1 = C_1 z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'_x = \pm\sqrt{C_1 z - 1} \Rightarrow \pm\frac{2}{C_1}(C_1 z - 1)^{1/2} = x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{C_1^2}(C_1 z - 1) = (x + C_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{C_1}x + \frac{C_1}{12}(x + C_2)^3 + \tilde{C}_3 \Rightarrow 12(C_1 y - x) = C_1^2(x + C_2)^3 + C_3.$$

Задача 24. Решить уравнение $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = (1 - x^2)y'' + xy' - 2$, $F'_x = -2xy'' + y'$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = x$, $F'_{y''} = 1 - x^2$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) $(x_0 \neq \pm 1)$ имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y. Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, и, следовательно, заданное уравнение принимает вид

$$(1-x^2)z' + xz = 2 \Rightarrow z' + \frac{x}{1-x^2}z = \frac{2}{1-x^2} \qquad (*)$$

(считаем $x \neq \pm 1$). Уравнение (*) — линейное. Полагаем $z = uv$. Тогда будем иметь

$$u'v + uv' + \frac{x}{1-x^2}uv = \frac{2}{1-x^2} \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{x}{1-x^2}v\right) = \frac{2}{1-x^2};$$

$$v' + \frac{x}{1-x^2}v = 0;\ v' = v\frac{x}{x^2-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{x^2-1},\ \text{если}\ |x| > 1,\ \text{и}\ v = \sqrt{1-x^2},\ \text{если}\ |x| < 1.$$

1) $u'\sqrt{x^2-1} = -\dfrac{2}{x^2-1} \Rightarrow u' = -\dfrac{2}{(x^2-1)^{3/2}} \Rightarrow u = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}} + C_1\ (|x| > 1)$;

2) $u'\sqrt{1-x^2} = \dfrac{2}{1-x^2} \Rightarrow u' = \dfrac{2}{(1-x^2)^{3/2}} \Rightarrow u = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}} + C_1\ (|x| < 1)$.

Следовательно, $z = 2x + C_1\sqrt{x^2-1}$, если $|x| > 1$, и $z = 2x + C_1\sqrt{1-x^2}$, если $|x| < 1$.

Таким образом, имеем $y' = 2x + C_1\sqrt{x^2-1}$, если $|x| > 1$, и $y' = 2x + C_1\sqrt{1-x^2}$, если $|x| < 1 \Rightarrow$

$$y = x^2 + C_2 + \tilde{C}_1\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right),\ \text{где}\ \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{2},\ |x| > 1;$$

$$y = x^2 + C_2 + \tilde{C}_1\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right),\ \text{где}\ \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{2},\ |x| < 1.$$

Задача 25. Решить уравнение $yy'' - 2yy'\ln y = (y')^2$ ($y > 0$).

Решение. $F(x, y, y', y'') = yy'' - 2yy'\ln y - (y')^2$, $F'_x = 0$, $F'_y = y'' - 2y'\ln y - 2y'$, $F'_{y'} = -2y\ln y - 2y'$, $F'_{y''} = y$. Функция

$F(x,y,y',y'')$ непрерывна во всем пространстве (x,y,y',y''), где $y>0$, и имеет там непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''}=y>0\,(\neq 0)$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0) ($y_0>0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x. Поэтому делаем замену: $y'_x=z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''_{x^2}=\dfrac{dz(y)}{dx}=\dfrac{dz(y)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=z'_y z$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид:

$$yzz'_y-2yz\ln y=z^2 \Rightarrow z'_y-\frac{z}{y}=2\ln y. \qquad (*)$$

Могли потерять: $z=0 \Leftrightarrow y'_x=0 \Rightarrow y=C$ ($C>0$) — решение исходного уравнения.

Замечаем, что уравнение (*) — линейное относительно функции $z(y)$. $z=y\ln^2 y+C_1y$ — решение уравнения (*). У нас $z=y'_x$. Следовательно, будем иметь

$$y'=y\ln^2 y+C_1y \Rightarrow \frac{dy}{y(\ln^2 y+C_1)}=dx \Leftrightarrow \int\frac{d\ln y}{\ln^2 y+C_1}=x+C_2.$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1>0$; 2) $C_1=0$; 3) $C_1<0$.

1) Пусть $C_1>0$. Обозначим $C_1=\tilde{C}_1^2\,(>0)$. В этом случае будем иметь

$$\frac{1}{\tilde{C}_1}\operatorname{arctg}\frac{\ln y}{\tilde{C}_1}=x+C_2 \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{\ln y}{\tilde{C}_1}=\tilde{C}_1x+\tilde{C}_2\,(\tilde{C}_2=C_2\tilde{C}_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y=\tilde{C}_1\operatorname{tg}(\tilde{C}_1x+\tilde{C}_2).$$

2) Пусть $C_1=0$. В этом случае имеем

$$\int\frac{d\ln y}{\ln^2 y}=x+C_2 \Rightarrow -\frac{1}{\ln y}=x+C_2 \Rightarrow (x+C_2)\ln y=-1.$$

3) Пусть $C_1<0$. Обозначим $-C_1=\tilde{C}_1^2\,(>0)$. Будем иметь в этом случае

$$\int \frac{d\ln y}{\ln^2 y - \tilde{C}_1^2} = x + C_2 \Rightarrow \frac{1}{2\tilde{C}_1}\ln\left|\frac{\ln y - \tilde{C}_1}{\ln y + \tilde{C}_1}\right| = x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{\ln y - \tilde{C}_1}{\ln y + \tilde{C}_1}\right| = 2\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2, \text{ где } \tilde{C}_2 = 2\tilde{C}_1 C_2.$$

Задача 26. Решить уравнение $(y' + 2y)y'' = (y')^2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = (y' + 2y)y'' - (y')^2$, $F'_x = 0$, $F'_y = 2y''$, $F'_{y'} = y'' - 2y'$, $F'_{y''} = y' + 2y$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow y' + 2y = 0$. (Функции $y = 0$ и $y = Ce^{-2x}$, определяемые уравнением $y' + 2y = 0$, являются решениями исходного уравнения.) Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $y'_0 + 2y_0 \neq 0$, имеет единственное решение. Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x. Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид:

$$(z + 2y)zz'_y = z^2 \Rightarrow (z + 2y)z'_y = z. \qquad (*)$$

Могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$ — решение исходного уравнения. Перепишем уравнение (*) в виде

$$y'_z - \frac{2}{z}y = 1. \qquad (**)$$

Уравнение (**) — линейное относительно функции $y(z)$; $y = C_1 z^2 - z$ — решение уравнения (**). У нас $z = y'_x$. Следовательно,

$$y = C_1(y'_x)^2 - y'_x, \qquad (***)$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$ и 2) $C_1 \neq 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. В этом случае имеем $y = -y'_x \Rightarrow y = Ce^{-x}$ — решение исходного уравнения.

2) Пусть $C_1 \neq 0$. Станем искать решение уравнения (***) методом введения параметра, а именно положим $y' = t$. Тогда $y = C_1 t^2 - t$. Так как $y' = t$, то $dy = tdx$. Следовательно, будем иметь

$$(2C_1 t - 1)\,dt = tdx \Rightarrow dx = \left(2C_1 - \frac{1}{t}\right)dt \Rightarrow x = 2C_1 t - \ln|t| + C_2.$$

Могли потерять: $t = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$. Это решение было получено выше.

Таким образом, общее решение исходного уравнения в параметрической форме будет таким:

$$\begin{cases} x = 2C_1 t - \ln\ |t|\ + C_2, \\ y = C_1 t^2 - t, \end{cases} \qquad t \neq 0.$$

Задача 27. Решить уравнение $xy'' = y' + x\sin\dfrac{y'}{x}$ $(x \neq 0)$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = xy'' - y' - x\sin\dfrac{y'}{x}$,

$$F'_x = y'' - \sin\frac{y'}{x} - x\cos\frac{y'}{x}\cdot\left(-\frac{y'}{x^2}\right) = y'' - \sin\frac{y'}{x} + \frac{y'}{x}\cos\frac{y'}{x},$$

$$F'_y = 0,\ F'_{y'} = -1 - \cos\frac{y'}{x},\ F'_{y''} = x.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна в $\mathbf{R}^4$ всюду, где $x \neq 0$, и имеет там непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} \neq 0$, ибо у нас $x \neq 0$. Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) $(x_0 \neq 0)$ имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y. Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$xz' = z + x\sin\frac{z}{x} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{x} + \sin\frac{z}{x}. \tag{*}$$

Уравнение (*) — однородное. Полагаем $\dfrac{z}{x} = u(x) \Rightarrow z = xu \Rightarrow$ $\Rightarrow z' = u + xu'$. Относительно функции $u(x)$ получаем уравнение

$$xu' = \sin u \Rightarrow \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}. \qquad (**)$$

Могли потерять:

$$u = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \Rightarrow z = k\pi x \Leftrightarrow y' = k\pi x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{k\pi}{2} x^2 + C, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

— решения исходного уравнения.

Из уравнения (**) находим

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| = \ln|x| + \ln|C_1|, \ C_1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{u}{2} = C_1 x \Rightarrow \frac{u}{2} = \operatorname{arctg}(C_1 x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 2x \operatorname{arctg}(C_1 x) \Rightarrow y' = 2x \operatorname{arctg}(C_1 x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x^2 \operatorname{arctg}(C_1 x) - \frac{x}{C_1} + \frac{1}{C_1^2} \operatorname{arctg}(C_1 x) + C_2 \Rightarrow$$

$$C_1^2 y = (C_1^2 x^2 + 1)\operatorname{arctg}(C_1 x) - C_1 x + \tilde{C}_2, \text{ где } \tilde{C}_2 = C_2 C_1^2.$$

Задача 28. Решить уравнение $y'''(y')^2 = (y'')^3$.

Решение. $F(x, y, y', y'', y''') = y'''(y')^2 - (y'')^3$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 2y'y'''$, $F'_{y''} = -3(y'')^2$, $F'_{y'''} = (y')^2$; $F'_{y'''} = 0 \Leftrightarrow y' = 0$ (функция $y = C$, определяемая уравнением $y' = 0$, является решением исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($y'_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y. Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, $y''' = z''$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$z''z^2 = (z')^3. \qquad (*)$$

Видим, что уравнение (*) не содержит явно независимую переменную x. Поэтому делаем замену: $z'_x = u(z)$, где $u(z)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$z''_{x^2} = \frac{du(z)}{dx} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \Rightarrow z''_{x^2} = u'_z u.$$

Относительно функции $u(z)$ получаем, следовательно, уравнение

$$uz^2u'_z = u^3 \Rightarrow z^2u'_z = u^2. \qquad (**)$$

Могли потерять:

$$u = 0 \Leftrightarrow z'_x = 0 \Leftrightarrow y''_{x^2} = 0 \Rightarrow y = C_1x + C_2$$

— решение исходного уравнения.

Из уравнения (**)

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dz}{z^2}. \qquad (***)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (***) находим

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{1}{C_1}\ (C_1 \neq 0) \Rightarrow u = \frac{C_1 z}{z + C_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z'_x = \frac{C_1 z}{z + C_1} \Rightarrow \frac{z + C_1}{C_1 z} dz = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_1} z + \ln|z| = x + C_2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{C_1} y' + \ln|y'| - C_2. \qquad (****)$$

Станем искать решение уравнения (****) методом введения параметра, а именно, положим $y' = t$ ($t \neq 0$, t — параметр). Тогда $x = \frac{1}{C_1} t + \ln|t| - C_2$. Так как $y' = t$, то $dy = tdx$. Следовательно, будем иметь

$$dy = t\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{t}\right)dt \Rightarrow dy = \left(\frac{1}{C_1} t + 1\right)dt \Rightarrow y = \frac{t^2}{2C_1} + t + C_3.$$

Обозначим $\frac{1}{2C_1} = \tilde{C}_1$. Тогда общее решение исходного уравнения в параметрической форме будет таким:

$$\begin{cases} x = \ln|t| + 2\tilde{C}_1 t - C_2, \\ y = \tilde{C}_1 t^2 + t + C_3. \end{cases}$$

Задача 29. Решить уравнение $yy'' + y = (y')^2$.

Решение. $F(x,y,y',y'') = yy'' + y - (y')^2$, $F'_x = 0$, $F'_y = y'' + 1$, $F'_{y'} = -2y'$, $F'_{y''} = y$. Функция $F(x,y,y',y'')$ — непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ является решением исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x. Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''_{x^2} = \dfrac{dz(y)}{dx} = \dfrac{dz(y)}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = z'_y z$, и, следовательно, исходное уравнение примет вид

$$yzz'_y + y = z^2. \qquad (*)$$

Положим $z^2 = u(y) \Rightarrow zz'_y = \dfrac{u'_y}{2}$. А тогда уравнение (*) запишется в виде

$$yu'_y + 2y - 2u = 0 \Rightarrow u'_y - \frac{2}{y}u = -2. \qquad (**)$$

Могли потерять $y = 0$ (выше было замечено, что $y = 0$ — решение исходного уравнения). Замечаем, что уравнение (**) — линейное относительно функции $u(y)$. Решением уравнения (**) является функция $u = 2y + C_1 y^2$. У нас $u = z^2 \Rightarrow u = (y'_x)^2$. Следовательно, имеем уравнение

$$(y')^2 = 2y + C_1 y^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{2y + C_1 y^2} \Rightarrow \frac{dy}{\pm\sqrt{2y + C_1 y^2}} = dx.$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$; 2) $C_1 > 0$; 3) $C_1 < 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. В этом случае имеем

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{2y}} = dx \Rightarrow \pm\sqrt{2y} = x + C_1 \Rightarrow 2y = (x + C_1)^2.$$

2) Пусть $C_1 > 0$. Обозначим $C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{2y + \tilde{C}_1^2 y^2}} = dx \Leftrightarrow \pm \frac{1}{\tilde{C}_1} \cdot \frac{dy}{\sqrt{\left(y^2 + \frac{2}{\tilde{C}_1^2} y + \frac{1}{\tilde{C}_1^4}\right) - \frac{1}{\tilde{C}_1^4}}} = dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pm \frac{1}{\tilde{C}_1} \cdot \frac{dy}{\sqrt{\left(y + \frac{1}{\tilde{C}_1^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\tilde{C}_1^2}\right)^2}} = dx \Rightarrow \pm \frac{1}{\tilde{C}_1} \operatorname{Arch}\,(\tilde{C}_1^2 y + 1) = x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arch}\,(\tilde{C}_1^2 y + 1) = \pm(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2) \Rightarrow \tilde{C}_1^2 y + 1 = \operatorname{ch}\,(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2).$$

3) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим $-C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{2y - \tilde{C}_1^2 y^2}} = dx \Leftrightarrow \pm \frac{1}{\tilde{C}_1} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{\tilde{C}_1^2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{\tilde{C}_1^2}\right)^2}} = x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm \arcsin\,(\tilde{C}_1^2 y - 1) = (\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2) \Rightarrow \tilde{C}_1^2 y - 1 = \pm \sin\,(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2).$$

Задача 30. Решить уравнение $xy'' = y' + x\left((y')^2 + x^2\right)$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = xy'' - y' - x(y')^2 - x^3$, $F'_x = y'' - (y')^2 - 3x^2$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = -1 - 2xy'$, $F'_{y''} = x$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y. Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид

$$xz' = z + x(z^2 + x^2) \Rightarrow \frac{xz' - z}{x^2} = x\left[\left(\frac{z}{x}\right)^2 + 1\right] \text{ (считаем } x \neq 0\text{)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{x}\right)' = x\left[\left(\frac{z}{x}\right)^2 + 1\right].$$

Положим $\frac{z}{x} = u(x)$. Будем иметь

$$u' = x(u^2+1) \Leftrightarrow \frac{du}{u^2+1} = xdx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} u = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow u = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = x \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) \Rightarrow y' = x \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) d\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) \Rightarrow y = -\ln\left|\cos\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\right| + C_2.$$

Задача 31. Решить уравнение $xy^{\mathrm{IV}} = 1$.

Решение. Для $x \neq 0$ имеем

$$y^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{x}; \qquad (*)$$

$f(x, y, y', y'', y''') = \frac{1}{x}$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}, f'_{y'''}$ в любой точке (x, y, y', y'', y''') ($x \neq 0$). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, y'''_0)$ ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Из уравнения (*) для $x \neq 0$ находим

$$y''' = \ln|x| + C_1 \Rightarrow y'' = \left(x\ln|x| - x\right) + C_1x + C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'' = x\ln|x| + (C_1 - 1)x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + (C_1 - 1)\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{x^2}{2}\ln|x| + \left(C_1 - \frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{x^3}{6}\ln|x|-\frac{x^3}{18}+\frac{1}{6}\left(C_1-\frac{3}{2}\right)x^3+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{x^3}{6}\ln|x|+\tilde{C}_1x^3+\tilde{C}_2x^2+C_3x+C_4.$$

Задача 32. Решить уравнение $xy''=\sin x$.

Решение. Для $x\neq 0$ имеем

$$y''=\frac{\sin x}{x}. \qquad (*)$$

Функция $f(x,y,y')=\dfrac{\sin x}{x}$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_y, f'_{y'}$ в любой точке (x,y,y') $(x\neq 0)$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0) $(x_0\neq 0)$ имеет единственное решение. Из уравнения (*) для $x\neq 0$ находим

$$y'=\int_{x_0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt+C_1\Rightarrow y=\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)dx+C_1x+C_2.$$

Интеграл в правой части преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям. Полагаем

$$u=\int_{x_0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\Rightarrow du=\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)'_x dx=\frac{\sin x}{x}dx;$$

$$dv=dx\Rightarrow v=x.$$

А тогда

$$\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right)dx=x\int_{x_0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt-\int_{x_0}^{x}\sin x dx.$$

Таким образом, получаем

$$y=x\int_{x_0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt+\cos x+C_1x+\tilde{C}_2\ \ (\tilde{C}_2=C_2-\cos x_0).$$

Задача 33. Решить уравнение $y''' = 2xy''$.

Решение. Имеем: $f(x,y,y',y'') = 2xy''$, $f'_y = 0$, $f'_{y'} = 0$, $f'_{y''} = 2x$. Функция $f(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) имеет единственное решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$\frac{y'''}{y''} = 2x. \qquad (*)$$

Могли потерять: $y'' = 0 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1x + C_2$ — решение исходного уравнения.

Для $y'' \neq 0$ уравнение (*) может быть записано в виде

$$(\ln|y''|)'_x = 2x \Rightarrow \ln|y''| = x^2 + \ln|C_1|\,(C_1 \neq 0) \Rightarrow y'' = C_1e^{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = C_1\int_0^x e^{t^2}dt + C_2 \Rightarrow y = C_1\int_0^x\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)dx + C_2x + C_3.$$

Интеграл в правой части преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям. Полагаем

$$\begin{cases} u = \int_0^x e^{t^2}dt & \Rightarrow \quad du = e^{x^2}dx; \\ dv = dx & \Rightarrow \quad v = x. \end{cases}$$

А тогда

$$y = C_1\left[x\int_0^x e^{t^2}dt - \int_0^x xe^{x^2}dx\right] + C_2x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1\left[x\int_0^x e^{t^2}dt - \frac{1}{2}(e^{x^2} - 1)\right] + C_2x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1\left[x\int_0^x e^{t^2}dt - \frac{1}{2}e^{x^2}\right] + C_2x + \tilde{C}_3.$$

Задача 34. Решить уравнение $xy^{IV} + y''' = e^x$.

Решение. Для $x \neq 0$ имеем

$$y^{IV} = \frac{e^x - y'''}{x}. \qquad (*)$$

Функция $f(x, y, y', y'', y''') = \dfrac{e^x - y'''}{x}$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}, f'_{y'''}$ в любой точке (x, y, y', y'', y''') ($x \neq 0$). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, y'''_0)$ ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Замечаем, что исходное уравнение может быть представлено в виде

$$(xy''')'_x = e^x \Rightarrow xy''' = e^x + C_1 \Rightarrow \text{для } x \neq 0: y''' = \frac{e^x}{x} + \frac{C_1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt + C_1 \ln|x| + C_2 \ (x_0 = 1, \text{ например}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \int_1^x \underbrace{\left(\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \right)}_{=u} \underbrace{dx}_{dv} + C_1 \left(x \ln|x| - x \right) + C_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = x \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - \int_1^x x \frac{e^x}{x} dx + C_1 \left(x \ln|x| - x \right) + C_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = x \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - (e^x - e) + C_1 \left(x \ln|x| - x \right) + C_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \int_1^x \left(x \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \right) dx - e^x + C_1 \left(\frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \right) + C_2 \frac{x^2}{2} + \tilde{C}_3 x + C_4.$$

Так как

$$\int_1^x \underbrace{\left(\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \right)}_{=u} \underbrace{x dx}_{dv} = \frac{x^2}{2} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - \int_1^x \frac{x^2}{2} \cdot \frac{e^x}{x} dx = \frac{x^2}{2} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - \frac{1}{2}(xe^x - e^x),$$

то получаем окончательно:

$$y=\frac{x^2}{2}\int_1^x\frac{e^t}{t}dt-\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}e^x+$$

$$+C_1\frac{x^2}{2}\left(\ln|x|-\frac{3}{2}\right)+C_2\frac{x^2}{2}+\tilde{C}_3x+C_4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{x^2}{2}\int_1^x\frac{e^t}{t}dt-\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}e^x+\tilde{C}_1x^2\ln|x|+\tilde{C}_2x^2+\tilde{C}_3x+C_4.$$

Задача 35. Решить уравнение $yy'''+3y'y''=0$.

Решение. Из заданного уравнения видно непосредственно, что $y=C$ — решение. Пусть $y\neq 0$. Тогда исходное уравнение может быть записано в виде

$$y'''=-\frac{3y'y''}{y}. \qquad (*)$$

Функция $f(x,y,y',y'')$ в каждой точке (x,y,y',y'') ($y\neq 0$) непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y_0',y_0'') ($y_0\neq 0$) имеет единственное решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$(yy'''+y'y'')+2y'y''=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y''y)'_x+\left[(y')^2\right]'_x=0\Rightarrow y''y+(y')^2=C_1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (yy')'_x=C_1\Rightarrow yy'=C_1x+\frac{C_2}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(y^2)'=C_1x+\frac{C_2}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y^2}{2}=\frac{C_1}{2}x^2+\frac{C_2}{2}x+\frac{C_3}{2}\Rightarrow y^2=C_1x^2+C_2x+C_3.$$

Задача 36. Решить уравнение $y'y'''=2(y'')^2$.

Решение. Из заданного уравнения видно непосредственно, что $y=C$ ($\Rightarrow y'=0$) — решение. Пусть $y'\neq 0$. Тогда исходное уравнение может быть записано в виде

$$y'''=\frac{2(y'')^2}{y'}. \qquad (*)$$

Функция $f(x,y,y',y'')=\dfrac{2(y'')^2}{y'}$ в каждой точке (x,y,y',y'') $(y'\neq 0)$

непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) $(y'_0 \neq 0)$ имеет единственное решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$\frac{y'''}{y''}=2\frac{y''}{y'} \Leftrightarrow \left(\ln|y''|\right)'_x=2\left(\ln|y'|\right)'_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y''|=2\ln|y'|+\ln|C_1|\,(C_1\neq 0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''=C_1(y')^2. \qquad (**)$$

Могли потерять: $y''=0 \Rightarrow y=\tilde{C}_1x+\tilde{C}_2$ — решение исходного уравнения.

Запишем уравнение (**) в виде

$$\frac{y''}{(y')^2}=C_1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{y'}\right)'_x=C_1 \Rightarrow -\frac{1}{y'}=C_1x+C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{\tilde{C}_1x+\tilde{C}_2} \Rightarrow y=\frac{1}{\tilde{C}_1}\cdot\ln\left|\tilde{C}_1x+\tilde{C}_2\right|+C_3.$$

Задача 37. Решить уравнение $yy''=y'(y'+1)$.

Решение. Из заданного уравнения видно непосредственно, что $y=0$ — решение. Пусть $y\neq 0$. Тогда исходное уравнение может быть записано в виде

$$y''=\frac{y'(y'+1)}{y}. \qquad (*)$$

Функция $f(x,y,y')=\dfrac{y'(y'+1)}{y}$ в каждой точке (x,y,y') $(y\neq 0)$

непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) $(y_0\neq 0)$ имеет единственное решение. Запишем заданное уравнение в виде

$$yy'' - (y')^2 = y' \Rightarrow \text{Так как } y \neq 0: \ \frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = \frac{y'}{y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y'}{y}\right)'_x = -\left(\frac{1}{y}\right)'_x \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{y} + C_1 \Rightarrow \frac{y'+1}{y} = C_1 \Rightarrow y' = C_1 y - 1.$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$, 2) $C_1 \neq 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. Тогда $y' = -1 \Rightarrow y = -x + C$ — решение.

2) Пусть $C_1 \neq 0$. Тогда будем иметь

$$\frac{dy}{C_1 y - 1} = dx \Rightarrow \frac{1}{C_1}\ln|C_1 y - 1| = x + \ln|C_2| \, (C_2 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |C_1 y - 1| = |\tilde{C}_2| e^{C_1 x} \Rightarrow C_1 y - 1 = \tilde{C}_2 e^{C_1 x}.$$

Задача 38. Решить уравнение $5(y''')^2 - 3y''y^{(IV)} = 0$.

Решение. Функция $F(x, y, y', y'', y''', y^{IV})$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}, F'_{y'''}, F'_{y^{IV}}$; $F'_{y^{IV}} = 0 \Leftrightarrow y'' = 0$ (функция $y = C_1 x + C_2$ — решение исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными условиями $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, y'''_0)$ $(y''_0 \neq 0)$ имеет единственное решение. Перепишем заданное уравнение в виде

$$5\frac{y'''}{y''} - 3\frac{y^{IV}}{y'''} = 0 \Rightarrow 5\left[\ln|y''|\right]'_x - 3\left[\ln|y'''|\right]'_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\ln|y''| - 3\ln|y'''| + \ln|C_1| = 0 \, (C_1 \neq 0) \Rightarrow$$

$$C_1 (y'')^5 = (y''')^3. \qquad (*)$$

Могли потерять: $y''' = 0 \Rightarrow y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ — решение исходного уравнения.

Запишем уравнение (*) в виде

$$\frac{y'''}{(y'')^{5/3}} = C_1 \Leftrightarrow \left[-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(y'')^{2/3}}\right]'_x = C_1 \Rightarrow -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(y'')^{2/3}} = C_1 x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(y'')^{2/3}} = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 \Rightarrow \frac{1}{(y'')^2} = (\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y'')^2 = \frac{1}{(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2)^3} \Rightarrow y'' = \pm\frac{1}{(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \pm\frac{-2}{\tilde{C}_1(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2)^{1/2}} + C_3 \Rightarrow y = \mp\frac{4}{\tilde{C}_1^2}\sqrt{\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2} + C_3 x + C_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{C_1^* x + C_2^*} + C_3 x + C_4 .$$

Задача 39. Решить уравнение $yy'' + (y')^2 = 1$.

Решение. Из заданного уравнения находим: $y'' = \frac{1-(y')^2}{y}$ ($y = 0$ не является решением заданного уравнения). Функция $f(x,y,y') = \frac{1-(y')^2}{y}$ в каждой точке (x,y,y') ($y \neq 0$) непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Запишем исходное уравнение в виде

$$(yy')'_x = 1 \Rightarrow yy' = x + C_1 \Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{2}\right)'_x = x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \Rightarrow y^2 = x^2 + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 .$$

Задача 40. Решить уравнение $y'' = xy' + y + 1$.

Решение. Функция $f(x,y,y')$ в каждой точке (x,y,y') непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) имеет единственное решение.

Запишем исходное уравнение в виде

$$(y'-xy)'_x = 1 \Rightarrow y'-xy = x+C_1 \Leftrightarrow y'-x(y+1)=C_1. \qquad (*)$$

Положим $y+1=z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно функции $z(x)$ уравнение (*) примет вид

$$z'-xz=C_1$$

(это — линейное уравнение относительно функции z). Решая его, находим: $z=e^{x^2/2}\left[C_1\int e^{-x^2/2}dx+C_2\right]$. У нас $z=y+1$. Поэтому

$$y=e^{x^2/2}\left[C_1\int e^{-x^2/2}dx+C_2\right]-1.$$

Задача 41. Решить уравнение $xy''=2yy'-y'$.

Решение. Для $x\neq 0$ имеем: $y''=\dfrac{2yy'-y'}{x}$. Функция $f(x,y,y')=\dfrac{2yy'-y'}{x}$ в каждой точке (x,y,y') ($x\neq 0$) непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0) ($x_0\neq 0$) имеет единственное решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$xy''+y'=2yy' \Leftrightarrow (xy')'_x=(y^2)'_x \Rightarrow xy'=y^2+C_1 \Rightarrow \frac{dy}{y^2+C_1}=\frac{dx}{x}.$$

(у нас $x\neq 0$). Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1=0$; 2) $C_1>0$; 3) $C_1<0$.

1) Пусть $C_1=0$. Тогда будем иметь

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{y}=\ln|x|+\ln|C_2|\,(C_2\neq 0) \Rightarrow y\ln(C_2x)=-1.$$

Могли потерять $y=0$ ($y=0$ — решение исходного уравнения).

2) Пусть $C_1>0$. Обозначим $C_1=\tilde{C}_1^2(>0)$. Будем иметь в этом случае

$$\frac{dy}{y^2+\tilde{C}_1^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{\tilde{C}_1}\operatorname{arctg}\frac{y}{\tilde{C}_1}=\ln|x|+\ln|C_2|\,(C_2\neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{y}{\tilde{C}_1}=\tilde{C}_1\ln(C_2x) \Rightarrow y=\tilde{C}_1\operatorname{tg}\left[\tilde{C}_1\ln(C_2x)\right].$$

3) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим $-C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\frac{dy}{y^2 - \tilde{C}_1^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2\tilde{C}_1} \ln\left|\frac{\tilde{C}_1 - y}{\tilde{C}_1 + y}\right| = \ln|x| + \ln|C_2| (C_2 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\tilde{C}_1 - y}{\tilde{C}_1 + y}\right| = \tilde{C}_2 |x|^{2\tilde{C}_1}.$$

Задача 42. Решить уравнение $xy'' - y' = x^2 yy'$.

Решение. Для $x \neq 0$ имеем $y'' = \dfrac{x^2 yy' + y'}{x} (= f(x, y, y'))$. Функция $f(x, y, y')$ в каждой точке (x, y, y') $(x \neq 0)$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для исходного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) $(x_0 \neq 0)$ имеет единственное решение.

Запишем заданное уравнение для $x \neq 0$ в виде:

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} = yy' \Leftrightarrow \left(\frac{y'}{x}\right)'_x = \left(\frac{y^2}{2}\right)'_x \Rightarrow \frac{y'}{x} = \frac{y^2}{2} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = x\frac{y^2 + 2C_1}{2} \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + 2C_1} = \frac{xdx}{2}.$$

Могли потерять: $y = C$ — решение ($C = \pm\sqrt{-2C_1}$; $C_1 \leq 0$).

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$; 2) $C_1 > 0$; 3) $C_1 < 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. В этом случае имеем

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{xdx}{2} \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{4} + \frac{C_2}{4} \Rightarrow y(x^2 + C_2) = -4.$$

2) Пусть $C_1 > 0$. Обозначим $2C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. В этом случае будем иметь

$$\frac{dy}{y^2 + \tilde{C}_1^2} = \frac{xdx}{2} \Rightarrow \frac{1}{\tilde{C}_1} \operatorname{arctg}\frac{y}{\tilde{C}_1} = \frac{x^2}{4} + \frac{C_2}{4} \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{y}{\tilde{C}_1} = \frac{\tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{y}{4C_1^*} = C_1^* x^2 + C_2^*$$

(положили $\frac{\tilde{C}_1}{4} = C_1^*$, $\frac{\tilde{C}_2}{4} = C_2^*$). Тогда

$$\frac{y}{4C_1^*} = \operatorname{tg}(C_1^* x^2 + C_2^*) \Rightarrow y = 4C_1^* \operatorname{tg}(C_1^* x^2 + C_2^*).$$

3) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим: $-2C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\frac{dy}{y^2 - \tilde{C}_1^2} = \frac{xdx}{2} \Rightarrow \frac{1}{2\tilde{C}_1} \ln\left|\frac{\tilde{C}_1 - y}{\tilde{C}_1 + y}\right| = \frac{x^2}{4} + \frac{C_2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln\left|\frac{y - \tilde{C}_1}{y + \tilde{C}_1}\right| = \tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2 (\tilde{C}_2 = C_2 \tilde{C}_1).$$

Задача 43. Решить уравнение $xyy'' - x(y')^2 = yy'$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = xyy'' - x(y')^2 - yy'$, $F'_x = yy'' - (y')^2$, $F'_y = xy'' - y'$, $F'_{y'} = -2xy' - y$, $F'_{y''} = xy$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y''. Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z').$$

Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2 z^2 = y^2 z \Rightarrow xy^2 z' = y^2 z \Rightarrow xz' = z. \qquad (*)$$

Могли потерять $y = 0$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (*) получаем

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \qquad (**)$$

(считаем $x \neq 0$; могли потерять: $z=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow y=C$ — решение исходного уравнения).

Из (**) находим

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1| (C_1 \neq 0) \Rightarrow z = C_1 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = C_1 x \Leftrightarrow (\ln|y|)'_x = C_1 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{C_1}{2}x^2 + \ln|C_2| \Rightarrow y = C_2 e^{\tilde{C}_1 x^2} \ (C_2 \neq 0;\ \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{2}).$$

Задача 44. Решить уравнение $yy'' = (y')^2 + 15y^2\sqrt{x}$ ($x \geq 0$).

Решение. Из заданного уравнения для $y \neq 0$ находим: $y'' = \dfrac{(y')^2 + 15y^2\sqrt{x}}{y}$ ($y=0$ — решение уравнения). Функция $f(x,y,y') = \dfrac{(y')^2 + 15y^2\sqrt{x}}{y}$ в каждой точке (x,y,y') ($y \neq 0$) непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для исходного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$, $x_0 > 0$) имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y''. Поэтому сделаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$y^2(z^2 + z') = y^2 z^2 + 15y^2\sqrt{x} \Rightarrow y^2 z' = 15y^2\sqrt{x} \Rightarrow z' = 15\sqrt{x}. \quad (*)$$

Могли потерять $y=0$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (*) находим

$$z = 15 \cdot \frac{2}{3}x^{3/2} + C_1 \Rightarrow z = 10x^{3/2} + C_1 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 10x^{3/2} + C_1$$

(считаем $y \neq 0$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln|y| = 4x^{5/2} + C_1 x - \ln|C_2| \ (C_2 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|C_2 y| = 4x^2\sqrt{x} + C_1 x \quad (C_2 \neq 0).$$

Задача 45. Решить уравнение $(x^2+1)\left((y')^2-yy''\right)=xyy'$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=(x^2+1)\left((y')^2-yy''\right)-xyy'$, $F'_x=2x\left((y')^2-\right.$ $\left.-yy''\right)-yy'$, $F'_y=-(x^2+1)y''-xy'$, $F'_{y'}=2(x^2+1)y'-xy$, $F'_{y''}=-(x^2+1)y$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные F'_x, F'_y, $F'_{y'}$, $F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow y=0$ ($y=0$ — решение исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0) ($y_0\neq 0$) имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y,y',y''. Поэтому делаем замену: $y'=yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''=y'z+yz'=y(z^2+z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение примет вид

$$(x^2+1)(y^2z^2-y^2z^2-y^2z')=xy^2z \Rightarrow\ -(x^2+1)z'=xz. \qquad (*)$$

Могли потерять: $y=0$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (*) получаем

$$-\frac{dz}{z}=\frac{xdx}{x^2+1}. \qquad (**)$$

Могли потерять: $z=0 \Leftrightarrow y'=0 \Rightarrow y=C$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (**) находим

$$-\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\ln|C_1|\ (C_1\neq 0) \Rightarrow z=\frac{C_1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{C_1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \ln|y|=C_1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\ln|C_2|\ (C_2\neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=C_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{C_1}.$$

Задача 46. Решить уравнение $xyy''+x(y')^2=2yy'$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=xyy''+x(y')^2-2yy'$, $F'_x=yy''+(y')^2$, $F'_y=xy''-2y'$, $F'_{y'}=2xy'-2y$, $F'_{y''}=xy$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow xy=0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y''. Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение примет вид

$$xy^2(z^2+z') + xy^2z^2 = 2y^2z \Rightarrow 2xz^2 + xz' = 2z. \qquad (*)$$

Могли потерять $y=0$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (*) получаем: $-\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} = 2$. (Считаем $x \neq 0$. Могли потерять: $z=0 \Leftrightarrow y'=0 \Rightarrow y=C$ — решение исходного уравнения.) Полагаем $\frac{1}{z} = u(x) \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} = u'$. Относительно функции $u(x)$ будем иметь уравнение

$$u' + \frac{2}{x}u = 2. \qquad (**)$$

Это — линейное уравнение. Решая уравнение (**), находим

$$u = \frac{2}{3}x + \frac{C_1}{x^2} \Leftrightarrow z = \frac{3x^2}{2x^3+3C_1} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3x^2}{2x^3+3C_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ln|y|)'_x = \left(\frac{1}{2}\ln\left|2x^3+3C_1\right|\right)'_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left|2x^3+3C_1\right| + \frac{1}{2}\ln|C_2| \, (C_2 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = C_2(2x^3+3C_1) \Rightarrow y^2 = \tilde{C}_1x^3 + \tilde{C}_2 \, (\tilde{C}_1 = 2C_2, \ \tilde{C}_2 = 3C_1C_2).$$

Задача 47. Решить уравнение $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

Решение. $F(x,y,y',y'') = x^2yy'' - (y-xy')^2$, $F'_x = 2xyy'' + 2(y - xy')y'$, $F'_y = x^2y'' - 2(y-xy')$, $F'_{y'} = 2(y-xy')x$, $F'_{y''} = x^2y$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow xy=0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0), такими, что $x_0y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y,y',y''. Поэтому делаем замену: $y'=yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''=y'z+yz'=y(z^2+z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$x^2y^2(z^2+z')=(y-xyz)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(z^2+z')=(1-xz)^2 \Rightarrow x^2z'=1-2xz \Rightarrow$$

$$z'+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^2}. \qquad (*)$$

(Считаем $x \neq 0$. Могли потерять $y=0$ — решение исходного уравнения.)

Уравнение (*) — линейное относительно функции $z(x)$. Интегрируя уравнение (*), находим

$$z=\frac{x+C_1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2} \Rightarrow \ln|y|=\ln|x|-\frac{C_1}{x}+\ln|C_2|\,(C_2 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}.$$

Задача 48. Решить уравнение $y''+\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{(y')^2}{y}$.

Решение. Имеем $y''=\frac{(y')^2}{y}-\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}$. Функция $f(x,y,y')=$ $=\frac{(y')^2}{y}-\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}$ в каждой точке (x,y,y'), такой, что $xy \neq 0$, непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0), такими, что $x_0y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение однородное относительно (y,y',y''). Поэтому делаем замену: $y'=yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид

$$y(z^2 + z') + \frac{yz}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y^2z^2}{y} \Leftrightarrow z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2} \qquad (*)$$

(у нас $y \neq 0$). Уравнение (*) — линейное относительно функции $z(x)$. Решая его, находим

$$z = \frac{1}{x}(C_1 - \ln|x|) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}(C_1 - \ln|x|) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = C_1 \ln|x| - \frac{1}{2}\ln^2|x| + \ln|C_2|,\ C_2 \neq 0 \Rightarrow y = C_2|x|^{C_1 - \frac{1}{2}\ln|x|}.$$

Задача 49. Решить уравнение $y(xy'' + y') = x(y')^2(1 - x)$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = y(xy'' + y') - x(y')^2(1 - x)$,

$F'_x = yy'' + (2x - 1)(y')^2$, $F'_y = xy''$, $F'_{y'} = y + 2(x^2 - x)y'$, $F'_{y''} = xy$.

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y''. Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$y\left[xy(z^2 + z') + yz\right] = x(1 - x)y^2z^2 \Rightarrow xz' + z = -x^2z^2. \qquad (*)$$

Могли потерять $y = 0$ — решение исходного уравнения.

Уравнение (*) перепишем в виде

$$-\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z} = x. \qquad (**)$$

(У нас $x \neq 0$; могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного уравнения.) В уравнении (**) делаем замену: $\frac{1}{z} = u(x)$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Имеем $-\frac{z'}{z^2}=u'(x)$. Следовательно, будем иметь: $u'-\frac{1}{x}u=x$. Это — линейное уравнение относительно функции $u(x)$. Решая его, находим

$$u=x(x+C_1)\Leftrightarrow \frac{1}{z}=x(x+C_1)\Leftrightarrow z=\frac{1}{x(x+C_1)}\Leftrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{x(x+C_1)}.$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1=0$, 2) $C_1\neq 0$.

1) Пусть $C_1=0$. В этом случае имеем

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow (\ln|y|)'_x=\left(-\frac{1}{x}\right)'_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y|=-\frac{1}{x}+\ln|C_2|\,(C_2\neq 0)\Rightarrow y=C_2e^{-\frac{1}{x}}.$$

2) Пусть $C_1\neq 0$. В этом случае имеем

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+C_1}\right)\Rightarrow \ln|y|=\frac{1}{C_1}(\ln|x|-\ln|x+C_1|)+\ln|C_2|,\ C_2\neq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=C_2\left(\frac{x}{x+C_1}\right)^{1/C_1}.$$

Задача 50. Решить уравнение $x^2yy''+(y')^2=0$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=x^2yy''+(y')^2$, $F'_x=2xyy''$, $F'_y=x^2y''$, $F'_{y'}=2y'$, $F'_{y''}=x^2y$. Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''}=0\Leftrightarrow xy=0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0) такими, что $x_0y_0\neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y,y',y''. Поэтому делаем замену: $y'=yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''=y'z+yz'=y(z^2+z')$. Относительно функции $z(x)$ заданное уравнение примет вид

$$x^2y^2(z^2+z')+y^2z^2=0 \Rightarrow (x^2+1)z^2+x^2z'=0. \qquad (*)$$

Могли потерять: $y=0$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (*) получаем

$$\frac{dz}{z^2}+\frac{x^2+1}{x^2}dx=0. \qquad (**)$$

(У нас $x\neq 0$; могли потерять: $z=0 \Leftrightarrow y'=0 \Rightarrow y=C$ — решение исходного уравнения.) Интегрируя уравнение (**), находим

$$-\frac{1}{z}+x-\frac{1}{x}=-2C_1 \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{x^2+2C_1x-1}{x} \Rightarrow z=\frac{x}{x^2+2C_1x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{x}{(x+C_1)^2-(1+C_1^2)} \Leftrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x+C_1)-2C_1}{(x+C_1)^2-(1+C_1^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln|y|=\ln\left|x^2+2C_1x-1\right|-$$

$$-\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}\ln\left|\frac{x+C_1-\sqrt{1+C_1^2}}{x+C_1+\sqrt{1+C_1^2}}\right|+\ln|C_2|,\ C_2\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=C_2\left|x^2+2C_1x-1\right|\cdot\left|\frac{x+C_1+\sqrt{1+C_1^2}}{x+C_1-\sqrt{1+C_1^2}}\right|^{\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}}.$$

Задача 51. Решить уравнение $x^2\left((y')^2-2yy''\right)=y^2$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=x^2(y')^2-2x^2yy''-y^2$,

$F'_x=2x(y')^2-4xyy''$, $F'_y=-2x^2y''-2y$, $F'_{y'}=2x^2y'$, $F'_{y''}=-2x^2y$.

Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные F'_x, F'_y, $F'_{y'}$, $F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow xy=0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0), такими, что $x_0y_0\neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y,y',y''. Поэтому делаем замену: $y'=yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид

$$x^2\left[y^2z^2 - 2y^2(z^2 + z')\right] = y^2 \Rightarrow -x^2(z^2 + 2z') = 1. \qquad (*)$$

Могли потерять: $y = 0$ — решение исходного уравнения.

Перепишем уравнение (*) в виде

$$z^2 + 2z' = -\frac{1}{x^2} \qquad (**)$$

(считаем $x \neq 0$). Уравнение (**) — обобщенно-однородное с показателем $k = -1$. (В самом деле, имеем: $2k = k - 1 = -2 \Rightarrow k = -1$.) Замена:

$$\frac{z}{x^k} = u(x) \Rightarrow zx = u \Rightarrow z = \frac{u}{x} \Rightarrow z' = \frac{xu' - u}{x^2}.$$

Относительно функции $u(x)$ уравнение (**) примет вид

$$u^2 + 2xu' - 2u + 1 = 0 \Leftrightarrow (u-1)^2 + 2xu' = 0 \Rightarrow \frac{du}{(u-1)^2} + \frac{dx}{2x} = 0. \ (***)$$

Могли потерять:

$$u = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = Cx$$

— решение исходного уравнения. Из уравнения (***) находим

$$-\frac{1}{u-1} + \frac{1}{2}\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|C_1| \ (C_1 \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(C_1x) = \frac{1}{zx - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{x}\cdot\frac{2 + \ln C_1x}{\ln C_1x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2 + \ln C_1x}{x\ln C_1x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \int\frac{(2 + \ln C_1x)d\ln C_1x}{\ln C_1x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|\ln C_1x| +$$

$$+ \ln C_1x + \ln|C_2|,\ C_2 \neq 0 \Rightarrow y = C_2(C_1x)(\ln C_1x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \tilde{C}_2x(\ln C_1x)^2 \ (\tilde{C}_2 = C_2C_1).$$

Задача 52. Решить уравнение $xyy'' = y'(y + y')$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = xyy'' - y'(y + y')$, $F'_x = yy''$, $F'_y = xy'' - y'$, $F'_{y'} = -y - 2y'$, $F'_{y''} = xy$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y''. Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид

$$xy^2(z^2 + z') = yz(y + yz) \Rightarrow xz' - z = z^2(1 - x).$$

Могли потерять: $y = 0$ — решение исходного уравнения. Считаем $x \neq 0$. Поэтому полученное уравнение может быть записано в виде:

$$z' - \frac{1}{x}z = \frac{1-x}{x}z^2 \Rightarrow \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z} = \frac{1-x}{x}. \qquad (*)$$

Могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного уравнения. Замена: $\frac{1}{z} = u(x) \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} = u'$. Относительно функции $u(x)$ уравнение (*) примет вид

$$u' + \frac{1}{x}u = \frac{x-1}{x}. \qquad (**)$$

Уравнение (**) — линейное относительно функции $u(x)$. Решая его, находим

$$u = \frac{x^2 - 2x + 2C_1}{2x} \Rightarrow z = \frac{2x}{x^2 - 2x + \tilde{C}_1},\ \tilde{C}_1 = 2C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2x}{(x-1)^2 + (\tilde{C}_1 - 1)} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2x-2}{x^2 - 2x + \tilde{C}_1} + \frac{2}{(x-1)^2 + (\tilde{C}_1 - 1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln\left|x^2 - 2x + \tilde{C}_1\right| + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2 + (\tilde{C}_1 - 1)} + C_2.$$

Следует рассмотреть три случая: 1) $\tilde{C}_1 = 1$, 2) $\tilde{C}_1 > 1$, 3) $\tilde{C}_1 < 1$.

1) Пусть $\tilde{C}_1 = 1$. В этом случае будем иметь

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + (\tilde{C}_1 - 1)} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}.$$

2) Пусть $\tilde{C}_1 > 1$. Тогда $I = \frac{1}{\sqrt{\tilde{C}_1 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{\tilde{C}_1 - 1}}$.

3) Пусть $\tilde{C}_1 < 1$. Тогда

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2 - (1-\tilde{C}_1)} = \frac{1}{2\sqrt{1-\tilde{C}_1}} \ln\left|\frac{\sqrt{1-\tilde{C}_1} - (x-1)}{\sqrt{1-\tilde{C}_1} + (x-1)}\right|.$$

Задача 53. Решить уравнение $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.

Решение. $F(x,y,y',y'') = 4x^2y^3y'' - x^2 + y^4$,

$$F'_x = 8xy^3y'' - 2x,\ F'_y = 12x^2y^2y'' + 4y^3,\ F'_{y'} = 0,\ F'_{y''} = 4x^2y^3.$$

Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные F'_x, F'_y, $F'_{y'}$, $F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $x_0y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение обобщенно-однородное относительно x, y, y', y'' с показателем $k = \frac{1}{2}$. В самом деле, имеем:

$$2 + 3k + k - 2 = 2 = 4k \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{t/2}$ (считаем $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t,\ y'_t = z'_te^{t/2} + \frac{1}{2}ze^{t/2} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = y'_te^{-t} \Rightarrow y'_x = \left(z'_t + \frac{1}{2}z\right)e^{-t/2}.$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t\frac{1}{x'_t} = \left[\left(z''_{t^2} + \frac{1}{2}z'_t\right)e^{-t/2} - \frac{1}{2}\left(z'_t + \frac{1}{2}z\right)e^{-t/2}\right]e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''_{x^2} = \left(z''_{t^2} - \frac{1}{4}z\right)e^{-\frac{3}{2}t}.$$

Относительно функции $z(t)$ исходное уравнение принимает вид

$$4e^{2t} \cdot z^3 \cdot e^{\frac{3}{2}t} \cdot e^{-\frac{3}{2}t}\left(z''_{t^2} - \frac{1}{4}z\right) = e^{2t} - z^4 e^{2t} \Rightarrow 4z^3\left(z''_{t^2} - \frac{1}{4}z\right) = 1 - z^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4z^3 z''_{t^2} = 1. \qquad (*)$$

Для $x < 0$ замена $x = -e^t$, $y = ze^{t/2}$ приводит к тому же самому уравнению (*).

Замечаем, что в уравнение (*) не входит явно независимая переменная t. Поэтому делаем замену:

$$z'_t = u(z) \Rightarrow z''_{t^2} = \frac{du(z)}{dt} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \Rightarrow z''_{t^2} = u'_z u.$$

Относительно функции $u(z)$ уравнение (*) принимает вид:

$$4z^3 uu'_z = 1 \Rightarrow u\,du = \frac{1}{4}\frac{dz}{z^3}. \qquad (**)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ не является решением исходного уравнения). Из уравнения (**) находим:

$$\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4z^2} = C_1 - u^2 \, (C_1 > 0) \Rightarrow u^2 = C_1 - \frac{1}{4z^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z')^2 = \frac{4C_1 z^2 - 1}{4z^2} \Rightarrow z' = \pm\frac{\sqrt{4C_1 z^2 - 1}}{2z} \Leftrightarrow 2zz' = \pm\sqrt{4C_1 z^2 - 1}.$$

Замена:

$$4C_1 z^2 - 1 = v(t) \Rightarrow 8C_1 zz'_t = v'_t \Rightarrow 2zz'_t = \frac{v'_t}{4C_1}.$$

А тогда относительно функции $v(t)$ получаем уравнение

$$\frac{v'_t}{4C_1} = \pm\sqrt{v} \Rightarrow \pm\frac{dv}{2\sqrt{v}} = 2C_1 dt \Rightarrow \pm\sqrt{v} = 2C_1 t + 2\ln C_2, \ C_2 > 0 \Rightarrow$$

$$v = (2C_1 t + 2\ln C_2)^2 \Leftrightarrow 4C_1 z^2 - 1 = (2C_1 t + 2\ln C_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4C_1 y^2 e^{-t} - 1 = (2C_1 t + 2\ln C_2)^2 \Leftrightarrow 4C_1 \frac{y^2}{x} = (2C_1 \ln|x| + 2\ln C_2)^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4C_1y^2 = x + 4x\left[C_1\left(\ln|x| + \ln C_2^{1/C_1}\right)\right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4C_1y^2 = x + 4x\left(C_1 \ln\tilde{C}_2|x|\right)^2,\ \tilde{C}_2 = C_2^{1/C_1}.$$

Задача 54. Решить уравнение $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$.

Решение. $F(x,y,y',y'') = x^3y'' - (y - xy')(y - xy' - x)$,

$$F'_x = 3x^2y'' + y'(y - xy' - x) + (y' + 1)(y - xy'),$$

$$F'_y = (xy' + x - y) - (y - xy').$$

$$F'_{y'} = x(y - xy' - x) + x(y - xy'),\ F'_{y''} = x^3.$$

Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x,\ F'_y,\ F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное относительно x, y, y', y'' с показателем $k = 1$. В самом деле, имеем:

$$k = k = 1 \text{ и } 3 + k - 2 = k + 1 \Rightarrow k = 1.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^t$, где $z(t)$ — новая неизвестная функция (считаем $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, y'_t = (z'_t + z)e^t \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = z'_t + z; y''_{x^2} = (y'_x)'_t\frac{1}{x'_t} = (z''_{t^2} + z'_t)e^{-t}.$$

Относительно функции $z(t)$ исходное уравнение принимает вид

$$e^{3t}e^{-t}(z''_{t^2} + z'_t) = \left[ze^t - e^t(z'_t + z)\right]\cdot\left[ze^t - e^t(z'_t + z) - e^t\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z''_{t^2} + z'_t = z'_t(z'_t + 1) \Leftrightarrow z''_{t^2} = (z'_t)^2 \Rightarrow \frac{z''_{t^2}}{z'_t} = z'_t. \qquad (*)$$

Могли потерять $z'_t = 0 \Rightarrow z = C \Leftrightarrow y = Cx$ — решение исходного уравнения. Перепишем уравнение (*) в виде

$$\left(\ln|z'_t|\right)'_t = z'_t \Rightarrow \ln|z'_t| = z + \ln|C_1|,\ C_1 \neq 0 \Rightarrow z'_t = C_1e^z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-z}dz = C_1 dt \Rightarrow -e^{-z} = C_1 t + C_1 \ln C_2,\ C_2 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-z} = \tilde{C}_1(t + \ln C_2) \Rightarrow -z = \ln\left[\tilde{C}_1(t + \ln C_2)\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ -\frac{y}{x} = \ln\left[\tilde{C}_1(\ln x + \ln C_2)\right] \Leftrightarrow y = -x\ln(\tilde{C}_1 \ln C_2 x).$$

Для $x < 0$ замена: $x = -e^t$, $y = ze^t$ приводит к уравнению: $z''_{t^2} = -(z'_t)^2$. Интегрирование этого уравнения приводит к соотношению $y = -x\ln(C_1 \ln C_2 x)$, где $C_2 < 0$.

Задача 55. Решить уравнение $\dfrac{y^2}{x^2} + (y')^2 = 3xy'' + \dfrac{2yy'}{x}$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = \dfrac{y^2}{x^2} + (y')^2 - 3xy'' - \dfrac{2yy'}{x}$,

$$F'_x = -\frac{2y^2}{x^3} - 3y'' + \frac{2yy'}{x^2},\ F'_y = \frac{2y}{x^2} - \frac{2y'}{x},\ F'_{y'} = 2y' - \frac{2y}{x},\ F'_{y''} = -3x.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные F'_x, F'_y, $F'_{y'}$, $F'_{y''}$ в каждой точке (x, y, y', y''), $x \neq 0$. $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное относительно x, y, y', y'' с показателем $k = 1$. В самом деле, имеем:

$$2k - 2 = 2k - 2 = k - 2 + 1 = k + k - 1 - 1 \Rightarrow k = 1.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^t$, где $z(t)$ — новая неизвестная функция (считаем $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t,\ y'_t = (z'_t + z)e^t,\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = z'_t + z;\ y''_{x^2} = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} = (z''_{t^2} + z'_t)e^{-t}.$$

Относительно функции $z(t)$ исходное уравнение принимает вид

$$\frac{z^2e^{2t}}{e^{2t}} + (z'_t + z)^2 = 3e^t e^{-t}(z''_{t^2} + z'_t) + 2\frac{e^t z(z'_t + z)}{e^t} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3z''_{t^2} + 3z'_t - (z'_t)^2 = 0. \qquad (*)$$

Для $x<0$ замена $x=-e^t$, $y=ze^t$ приводит к уравнению $3z''_{t^2}+3z'_t+(z'_t)^2=0$.

Замечаем, что в уравнение (*) явно не входит z. Поэтому делаем замену: $z'_t=u(t)$, где $u(t)$ — новая неизвестная функция. Тогда $z''_{t^2}=u'_t$, и, следовательно, уравнение (*) принимает вид

$$3u'_t=u^2-3u \Rightarrow \frac{3du}{u(u-3)}=dt. \qquad (**)$$

Могли потерять:

1) $u=0 \Leftrightarrow z'_t=0 \Rightarrow z=C \Leftrightarrow \frac{y}{x}=C \Rightarrow y=Cx$ — решение исходного уравнения;

2) $u=3 \Leftrightarrow z'_t=3 \Rightarrow z=3t+C \Rightarrow \frac{y}{x}=3\ln x+C$ (у нас $x>0$) — решение исходного уравнения.

Уравнение (**) перепишем в виде

$$\left(\frac{1}{u-3}-\frac{1}{u}\right)du=dt \Rightarrow \ln|u-3|-\ln|u|=t+\ln|C_1|,\ C_1\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u-3}{u}=C_1e^t \Rightarrow u=\frac{3}{1-C_1e^t} \Leftrightarrow z'_t=\frac{3}{1-C_1e^t} \Rightarrow dz=\frac{3dt}{1-C_1e^t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=3\int\frac{dt}{1-C_1e^t} \Rightarrow z=3\ln\left|\frac{C_1e^t}{C_1e^t-1}\right|+C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=C_2-3\ln\left|\frac{C_1x-1}{C_1x}\right| \Rightarrow \frac{y}{x}=C_2-3\ln\left|1-\frac{1}{C_1x}\right|.$$

Задача 56. Решить уравнение $y''=\left(2xy-\frac{5}{x}\right)y'+4y^2-\frac{4y}{x^2}$.

Решение. $f(x,y,y')=2xyy'-\frac{5y'}{x}+4y^2-\frac{4y}{x^2}$, $f'_y=2xy'+8y-\frac{4}{x^2}$, $f'_{y'}=2xy-\frac{5}{x}$. Функция $f(x,y,y')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$ в каждой точке (x,y,y') ($x\neq 0$). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0,y_0,y'_0) ($x_0\neq 0$) имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное с показателем $k=-2$. В самом деле, имеем:

$$k-2=k+1+k-1=k-1-1=2k=k-2 \Rightarrow k=-2.$$

Поэтому делаем замену: $x=e^t$, $y=ze^{-2t}$ (это для $x>0$). Тогда

$$x_t'=e^t, y_t'=e^{-2t}(z_t'-2z), y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=(z_t'-2z)e^{-3t};$$

$$y_{x^2}''=(y_x')_t'\frac{1}{x_t'}=(z_{t^2}''-5z_t'+6z)e^{-4t}.$$

Относительно функции $z(t)$ исходное уравнение принимает вид

$$(z_{t^2}''-5z_t'+6z)e^{-4t}=(2e^t ze^{-2t}-5e^{-t})(z_t'-2z)e^{-3t}+4z^2e^{-4t}-4ze^{-4t} \Rightarrow$$

$$z_{t^2}''=2zz_t'. \tag{*}$$

Для $x<0$ замена $x=-e^t$, $y=ze^{-2t}$ приводит к тому же самому уравнению (*).

Замечаем, что уравнение (*) не содержит явно независимую переменную t. Поэтому делаем замену:

$$z_t'=u(z) \Rightarrow z_{t^2}''=\frac{du(z)}{dt}=\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} \Rightarrow z_{t^2}''=u'(z)\cdot u(z).$$

Относительно функции $u(z)$ уравнение (*) принимает вид

$$uu_z'=2uz \Rightarrow u_z'=2z.$$

Могли потерять $u=0 \Leftrightarrow z_t'=0 \Rightarrow z=C \Leftrightarrow yx^2=C$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения $u_z'=2z$ находим

$$du=2zdz \Rightarrow u=z^2+C_1 \Leftrightarrow z_t'=z^2+C_1 \Rightarrow \frac{dz}{z^2+C_1}=dt.$$

Следует рассмотреть три случая: 1) $C_1=0$; 2) $C_1>0$; 3) $C_1<0$.

1) Пусть $C_1=0$. В этом случае имеем

$$\frac{dz}{z^2}=dt \Rightarrow -\frac{1}{z}=t+\ln|C_2|, C_2\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t+\ln|C_2|)=-1 \Rightarrow x^2y(\ln|C_2x|)=-1.$$

2) Пусть $C_1 > 0$. Обозначим $C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\frac{dz}{z^2 + \tilde{C}_1^2} = dt \Rightarrow \frac{1}{\tilde{C}_1} \operatorname{arctg} \frac{z}{\tilde{C}_1} = t + \ln|C_2|,\ C_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{z}{\tilde{C}_1} = \tilde{C}_1 \left(t + \ln|C_2|\right) \Rightarrow \frac{z}{\tilde{C}_1} = \operatorname{tg}\left[\tilde{C}_1 \left(t + \ln|C_2|\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 y = \tilde{C}_1 \operatorname{tg}\left(\tilde{C}_1 \ln|C_2 x|\right).$$

3) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим $C_1 = -\tilde{C}_1^2 (< 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\frac{dz}{z^2 - \tilde{C}_1^2} = dt \Rightarrow \frac{1}{2\tilde{C}_1} \ln\left|\frac{z - \tilde{C}_1}{z + \tilde{C}_1}\right| = t + \ln|C_2|,\ C_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z - \tilde{C}_1}{z + \tilde{C}_1}\right| = |C_2 x|^{2\tilde{C}_1} \Rightarrow x^2 y - \tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 |x|^{2\tilde{C}_1} (x^2 y + \tilde{C}_1).$$

Задача 57. Решить уравнение $x^2\left(2yy'' - (y')^2\right) = 1 - 2xyy'$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = 2x^2 yy'' - x^2 (y')^2 + 2xyy' - 1$,

$$F'_x = 4xyy'' - 2x(y')^2 + 2yy',\ F'_y = 2x^2 y'' + 2xy',$$

$$F'_{y'} = -2x^2 y' + 2xy,\ F'_{y''} = 2x^2 y.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное с показателем $k = 0$. В самом деле, имеем:

$$2 + k + k - 2 = 2 + 2k - 2 = 0 = 1 + k + k - 1 \Rightarrow k = 0.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{0t} = z$ (это для $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, y'_t = z'_t, y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = y'_t e^{-t}; y''_{x^2} = (y''_{t^2} e^{-t} - y'_t e^{-t}) \frac{1}{x'_t} = (y''_{t^2} - y'_t) e^{-2t}.$$

При такой замене исходное уравнение принимает вид

$$e^{2t}\left[2y(y''_{t^2}-y'_t)e^{-2t}-(y'_t)^2e^{-2t}\right]=1-2e^t yy'_t e^{-t} \Rightarrow 2yy''_{t^2}-(y'_t)^2=1. (*)$$

Замечание. Для $x<0$ следует сделать замену: $x=-e^t$, $y=$ $=ze^{0t}=z$. Легко проверить, что и при такой замене мы придём к тому же самому уравнению (*) относительно функции $y(t)$.

Замечаем, что в уравнение (*) не входит явно независимая переменная t. Поэтому делаем замену: $y'_t=u(y)$, где $u(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''_{t^2}=\dfrac{du(y)}{dt}=\dfrac{du(y)}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt}\Rightarrow y''_{t^2}=u'_y u$.

Относительно функции $u(y)$ уравнение (*) принимает вид

$$2yuu'_y-u^2=1\Rightarrow 2yuu'_y=1+u^2\Rightarrow \frac{2udu}{1+u^2}=\frac{dy}{y}$$

($y=0$ не является решением исходного уравнения. Это видно из самого уравнения). А тогда получаем

$$\ln(1+u^2)=\ln|y|+\ln|C_1|,\ C_1\neq 0\Rightarrow 1+u^2=C_1y\Rightarrow u^2=C_1y-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y'_t)^2=C_1y-1\Rightarrow y'_t=\pm\sqrt{C_1y-1}\Rightarrow \frac{dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}=dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pm 2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=t+\ln|C_2|,\ C_2\neq 0\Rightarrow \pm 2\sqrt{C_1y-1}=C_1\ln|C_2x|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(C_1y-1)=C_1^2\left(\ln|C_2x|\right)^2.$$

Задача 58. Решить уравнение $x^2\left(yy''-(y')^2\right)+xyy'=(2xy'-3y)\sqrt{x^3}$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=x^2yy''-x^2(y')^2+xyy'+3y\sqrt{x^3}-2xy'\sqrt{x^3}$,

$$F'_x=2xyy''-2x(y')^2+yy'+\frac{9}{2}y\sqrt{x}-5\sqrt{x^3}y',$$

$$F'_y=x^2y''+xy'+3\sqrt{x^3},\ F'_{y'}=-2x^2y'+xy-2x\sqrt{x^3},\ F'_{y''}=x^2y.$$

Функция $F(x,y,y',y'')$ определена, непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$ в каждой точке (x,y,y',y'') $(x\geq 0)$;

$F'_{y'} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $x_0 y_0 \neq 0$ ($x_0 > 0$), имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное с показателем $k = \frac{3}{2}$. В самом деле, имеем:

$$2 + k + k - 2 = 2 + 2k - 2 = 1 + k + k - 1 = \frac{5}{2} + k - 1 = k + \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2}.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{\frac{3}{2}t}$ (заданное уравнение определено для $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, y'_t = \left(z'_t + \frac{3}{2}z\right)e^{\frac{3}{2}t}, y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow y'_x = \left(z'_t + \frac{3}{2}z\right)e^{\frac{t}{2}}.$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} = \left(z''_{t^2} + 2z'_t + \frac{3}{4}z\right)e^{-\frac{t}{2}}.$$

Относительно функции $z(t)$ заданное уравнение принимает вид

$$zz''_{t^2} - (z'_t)^2 - 2z'_t = 0 \Rightarrow \frac{zz''_{t^2} - (z'_t)^2}{z^2} = 2\frac{z'_t}{z^2}. \qquad (*)$$

Могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ — решение исходного уравнения). Уравнение (*) может быть записано в виде:

$$\left(\frac{z'_t}{z}\right)'_t = -2\left(\frac{1}{z}\right)'_t \Rightarrow \frac{z'_t}{z} = -2 \cdot \frac{1}{z} + C_1 \Rightarrow z'_t = C_1 z - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{C_1 z - 2} = dt. \qquad (**)$$

Могли потерять:

$$C_1 z - 2 = 0 \ (C_1 \neq 0) \Leftrightarrow C_1 \frac{y}{x^{3/2}} = 2 \Rightarrow C_1 y = 2x^{3/2} \Rightarrow y = \tilde{C}x^{3/2} \ (\tilde{C} = \frac{2}{C_1})$$

— решение исходного уравнения.

Если $C_1 = 0$, то уравнение (**) принимает вид

$$dz = -2dt \Rightarrow z = -2t - 2\ln|C_2|\,(C_2 \neq 0) \Leftrightarrow \frac{y}{x^{3/2}} = -2\ln C_2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2x^{3/2}\ln C_2 x (C_2 > 0).$$

Если $C_1 \neq 0$, то уравнение (**) дает

$$\frac{1}{C_1}\ln|C_1 z - 2| = t + \ln|C_2|\,(C_2 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|C_1 z - 2| = C_1\left(\ln x + \ln|C_2|\right) \Rightarrow |C_1 z - 2| = \left(|C_2|\,x\right)^{C_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1\frac{y}{x^{3/2}} = |C_2|^{C_1} x^{C_1} + 2 \Rightarrow C_1 y = x^{3/2}(\tilde{C}_2 x^{C_1} + 2),$$

где $\tilde{C}_2 = |C_2|^{C_1}$.

Задача 59. Решить уравнение $x^4\left((y')^2 - 2yy''\right) = 4x^3 yy' + 1$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = x^4\left((y')^2 - 2yy''\right) - 4x^3 yy' - 1$,

$$F'_x = 4x^3\left((y')^2 - 2yy''\right) - 12x^2 yy',\ F'_y = -2x^4 y'' - 4x^3 y',$$

$$F'_{y'} = 2x^4 y' - 4x^3 y,\ F'_{y''} = -2x^4 y.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное с показателем $k = -1$. В самом деле, имеем:

$$4 + 2k - 2 = 4 + k + k - 2 = 3 + k + k - 1 = 0 \Rightarrow k = -1.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{-t}$ (это для $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, y'_t = (z'_t - z)e^{-t} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = (z'_t - z)e^{-2t};$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t\frac{1}{x'_t} \Rightarrow y''_{x^2} = (z''_{t^2} - 3z'_t + 2z)e^{-3t}.$$

Относительно функции $z(t)$ заданное уравнение принимает вид
$$2zz''_{t^2} - (z'_t)^2 = z^2 - 1. \qquad (*)$$

Для $x < 0$ следует сделать замену: $x = -e^t$, $y = ze^{-t}$. Легко проверить, что и при такой замене мы придем к тому же самому уравнению (*) относительно функции $z(t)$.

В уравнении (*) отсутствует независимая переменная t. Поэтому делаем замену: $z'_t = u(z)$, где $u(z)$ — новая неизвестная функция. А тогда
$$z''_{t^2} = \frac{du(z)}{dt} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \Rightarrow z''_{t^2} = u'_z u.$$

Относительно функции $u(z)$ будем иметь уравнение
$$2zuu'_z - u^2 = z^2 - 1. \qquad (**)$$

В уравнении (**) делаем замену: $u^2 = v(z)$. Получим
$$zv'_z - v = z^2 - 1 \Rightarrow v' - \frac{v}{z} = z - \frac{1}{z}. \qquad (***)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ не является решением исходного уравнения). Уравнение (***) — линейное относительно функции $v(z)$. Решая его, находим
$$v(z) = z^2 + C_1 z + 1 \Leftrightarrow u^2 = z^2 + C_1 z + 1 \Leftrightarrow (z'_t)^2 = z^2 + C_1 z + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z'_t = \pm\sqrt{z^2 + C_1 z + 1} \Rightarrow \pm\frac{dz}{\sqrt{z^2 + C_1 z + 1}} =$$
$$= dt \Leftrightarrow \frac{\pm d\left(z + \frac{C_1}{2}\right)}{\sqrt{\left(z + \frac{C_1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{C_1^2}{4}\right)}} = dt.$$

Могли потерять:

$\sqrt{z^2 + C_1 z + 1} = 0 \Leftrightarrow$ при $C_1 = \pm 2$: $\sqrt{(z \pm 1)^2} = 0 \Rightarrow z = \pm 1 \Leftrightarrow xy = \pm 1$ — решения исходного уравнения.

Если $C_1 \neq \pm 2$, то

$$\ln\left|\left(z+\frac{C_1}{2}\right) \pm \sqrt{z^2+C_1z+1}\right| = t + \ln|C_2|,\ C_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\left(xy+\frac{C_1}{2}\right) \pm \sqrt{x^2y^2+C_1xy+1}\right| = \ln|C_2x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(xy+\frac{C_1}{2}\right) \pm \sqrt{x^2y^2+C_1xy+1} = C_2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm\sqrt{x^2y^2+C_1xy+1} = C_2x - xy - \frac{C_1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2y^2+C_1xy+1 = C_2^2x^2+x^2y^2+\frac{C_1^2}{4}-2C_2x^2y-C_1C_2x+C_1xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2C_2x^2y = \left(C_2^2x^2-C_1C_2x+\frac{C_1^2}{4}\right)-1 \Rightarrow 2C_2x^2y = (C_2x\ -\tilde{C}_1)^2-1,$$

где $\tilde{C}_1 = \dfrac{C_1}{2}$.

Задача 60. Решить уравнение $yy' + x\dot{y}y'' - x(y')^2 = x^3$.

Решение. $F(x,y,y',y'') = yy' + xyy'' - x(y')^2 - x^3$,

$$F'_x = yy'' - (y')^2 - 3x^2,\ F'_y = y' + xy'',\ F'_{y'} = y - 2xy',\ F'_{y''} = xy.$$

Функция $F(x,y,y',y'')$ — непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $x_0y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное с показателем $k = 2$. В самом деле, имеем:

$$k+k-1 = 1+k+k-2 = 1+2k-2 = 3 \Rightarrow k = 2.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{2t}$ ($\Rightarrow\ z = \dfrac{y}{x^2}$) (это для $x > 0$).

Тогда

$$x'_t = e^t, y'_t = (z'_t + 2z)e^{2t}, y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = (z'_t + 2z)e^t;$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y''_{x^2} = z''_{t^2} + 3z'_t + 2z.$$

Относительно функции $z(t)$ заданное уравнение принимает вид

$$ze^{2t}(z'_t + 2z)e^t + e^t ze^{2t}(z''_{t^2} + 3z'_t + 2z) - e^t(z' + 2z)^2 e^{2t} = e^{3t} \Rightarrow$$

$$zz''_{t^2} - (z'_t)^2 = 1. \qquad (*)$$

Заметим, что для $x < 0$ замена: $x = -e^t$, $y = ze^{2t}$ приводит к тому же самому уравнению (*). Видим, что уравнение (*) не содержит явно независимую переменную t. Поэтому делаем замену: $z'_t = u(z)$, где $u(z)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$z''_{t^2} = \frac{du(z)}{dt} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \Rightarrow z''_{t^2} = u'(z)u(z).$$

Относительно функции $u(z)$ уравнение (*) примет вид

$$zuu'_z - u^2 = 1 \Rightarrow zuu'_z = u^2 + 1 \Rightarrow \frac{udu}{u^2+1} = \frac{dz}{z}. \qquad (**)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (функция $y = 0$ не является решением исходного уравнения). Из уравнения (**) находим

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \ln|z| + \frac{1}{2}\ln|C_1|,\ C_1 \neq 0 \Rightarrow u^2 + 1 = C_1 z^2 (\Rightarrow C_1 > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z'_t)^2 = C_1 z^2 - 1 \Rightarrow z'_t = \pm\sqrt{C_1 z^2 - 1} \Rightarrow \pm\frac{dz}{\sqrt{C_1 z^2 - 1}} = dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln\left|\sqrt{C_1}z \pm \sqrt{C_1 z^2 - 1}\right| = t + \ln|C_2|,\ C_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|\sqrt{C_1}\frac{y}{x^2} \pm \sqrt{C_1\frac{y^2}{x^4} - 1}\right| = (\ln|x| + \ln|C_2|)\sqrt{C_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{C_1}\frac{y}{x^2} \pm \sqrt{C_1\frac{y^2}{x^4} - 1} = (|x||C_2|)^{\sqrt{C_1}} \Rightarrow$$

(обозначим $\sqrt{C_1} = \tilde{C}_1$, $|C_2|^{\sqrt{C_1}} = \tilde{C}_2$)

$$\Rightarrow \pm\sqrt{\tilde{C}_1^2\frac{y^2}{x^4}-1}=\tilde{C}_2|x|^{\tilde{C}_1}-\tilde{C}_1\frac{y}{x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_1^2\frac{y^2}{x^4}-1=\tilde{C}_2^2\,|\,x\,|^{2\tilde{C}_1}-2\tilde{C}_1\tilde{C}_2y|x|^{\tilde{C}_1-2}+\tilde{C}_1^2\frac{y^2}{x^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\tilde{C}_1\tilde{C}_2y=\tilde{C}_2^2|x|^{\tilde{C}_1+2}+|x|^{2-\tilde{C}_1}.$$

Задача 61. Найти решение уравнения $yy''=2x(y')^2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y|_{x=2}=2$, $y'|_{x=2}=\frac{1}{2}$.

Решение. Непосредственно из уравнения видно, что $y=C$ (в частности, $y=0$) является решением заданного уравнения. Но это решение не удовлетворяет заданным начальным условиям. Для $y\neq 0$ имеем

$$y''=2\frac{x(y')^2}{y}\Rightarrow f(x,y,y')=2\frac{x(y')^2}{y},\quad f'_y=-2\frac{x(y')^2}{y^2},\quad f'_{y'}=\frac{4xy'}{y}.$$

Видим, что $f(x,y,y')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$ в каждой точке (x,y,y'), $y\neq 0$. Следовательно, задача Коши с заданными начальными данными $\left(2, 2, \frac{1}{2}\right)$ имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y''. Поэтому делаем замену: $y'=yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''=y'z+yz'\Rightarrow y''=y(z^2+z')$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид:

$$y^2(z^2+z')=2xy^2z^2\Rightarrow z^2+z'=2xz^2\ \text{(считаем } y\neq 0\text{)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dz=z^2(2x-1)dx\Rightarrow\frac{dz}{z^2}=(2x-1)\,dx.$$

Могли потерять $z=0\Leftrightarrow y'=0\Rightarrow y=C$ — решение, но оно не удовлетворяет заданным начальным условиям. Интегрируя полученное уравнение, находим $-\frac{1}{z}=x^2-x+C_1$. У нас $z=\frac{y'}{y}\Rightarrow z|_{x=2}=\frac{1}{4}$. Следовательно, имеем

$$-4 = 4 - 2 + C_1 \Rightarrow C_1 = -6.$$

Таким образом, получили

$$z = -\frac{1}{x^2 - x - 6} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{(x+2)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3}\right)dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+2}{x-3}\right| + C_2.$$

У нас $y\big|_{x=2} = 2$. Поэтому для определения C_2 получаем

$$\ln 2 = \frac{1}{5}\ln 4 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{3}{5}\ln 2.$$

Ответ: $\ln|y| = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+2}{x-3}\right| + \frac{3}{5}\ln 2 \Rightarrow$ в окрестности точки (2, 2):

$$8(x+2) = (3-x)y^5.$$

Замечание (важное для практики). При решении задачи Коши для уравнений порядков выше первого методом понижения порядка произвольные постоянные целесообразно находить после каждого интегрирования.

Задача 62. Найти решение уравнения $2y''' - 3(y'')^2 = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y\big|_{x=0} = -3$, $y'\big|_{x=0} = 1$, $y''\big|_{x=0} = -1$.

Решение. Имеем

$$y''' = \frac{3}{2}(y'')^2 \Rightarrow f(x, y, y', y'') = \frac{3}{2}(y'')^2;\ f'_y = 0,\ f'_{y'} = 3y',\ f'_{y''} = 0.$$

Видим, что $f(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}$. Следовательно, задача Коши с любыми начальными данными, в частности, с начальными условиями $(0, -3, 1, -1)$, имеет единственное решение.

Замечаем, что в заданное уравнение не входит явно y. Поэтому делаем замену: $y' = z$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, $y''' = z''$, и, следовательно, заданное уравнение принимает вид

$$2z'' - 3z^2 = 0. \qquad (*)$$

В уравнение (*) не входит явно независимая переменная x. Поэтому делаем замену: $z'_x = u(z)$. А тогда $z''_{x^2} = \frac{du(z)}{dx} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = u'_z u$. Относительно функции $u(z)$ уравнение (*) принимает вид

$$2uu'_z = 3z^2 \Rightarrow 2udu = 3z^2 dz \Rightarrow u^2 = z^3 + C_1. \qquad (**)$$

У нас $u = z'_x = y''_{x^2}$. Для нахождения C_1 используем начальные условия: $y''|_{x=0} = u|_{x=0} = -1$, $y'|_{x=0} = z|_{x=0} = 1$. Получаем $1 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$. Следовательно, вместо (**) будем иметь

$$u^2 = z^3 \Leftrightarrow (z'_x)^2 = z^3 \Rightarrow z'_x = \pm z^{3/2}.$$

Здесь из двух знаков "±" следует взять знак "–", ибо при $x = 0$ должно быть $z'_x|_{x=0} = -1$, $z|_{x=0} = 1$. Значит, будем иметь

$$-\frac{dz}{z^{3/2}} = dx.$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ ($y = C$ — решение уравнения, но оно не удовлетворяет заданным начальным условиям).

Интегрируем уравнение $-\frac{dz}{z^{3/2}} = dx$. Находим

$$\frac{2}{\sqrt{z}} = x + C_2. \qquad (***)$$

Для нахождения C_2 используем начальное условие: $z|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$. Получаем $C_2 = 2$. А тогда вместо уравнения (***) будем иметь

$$z = \frac{4}{(x+2)^2} \Leftrightarrow y' = \frac{4}{(x+2)^2} \Rightarrow y = -\frac{4}{x+2} + C_3.$$

Для нахождения C_3 используем начальное условие: $y|_{x=0} = -3$. Получаем $-3 = -2 + C_3 \Rightarrow C_3 = -1$. Следовательно, искомое решение будет таким:

$$y = \frac{-4}{x+2} - 1 \Rightarrow y(x+2) = -x - 6.$$

Задача 63. Найти решение уравнения $x^2y'' - 3xy' = 6\dfrac{y^2}{x^2} - 4y$, удовлетворяющее начальным условиям: $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 4$.

Решение. Уравнение задано для $x \neq 0$. Имеем для $x \neq 0$:

$$y'' = \frac{3y'}{x} + 6\frac{y^2}{x^4} - 4\frac{y}{x^2} \Rightarrow f(x,y,y') = 3\frac{y'}{x} + 6\frac{y^2}{x^4} - 4\frac{y}{x^2},$$

$$f'_y = \frac{12y}{x^4} - \frac{4}{x^2}, \quad f'_{y'} = \frac{3}{x}.$$

Видим, что $f(x,y,y')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$ в каждой точке (x,y,y') ($x \neq 0$). Следовательно, задача Коши с заданными начальными условиями $(1,1,4)$ имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение является обобщенно-однородным с показателем $k = 2$. В самом деле, имеем:

$$2 + k - 2 = 1 + k - 1 = 2k - 2 = k \Rightarrow k = 2.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{2t}$ (считаем $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, y'_t = (z' + 2z)e^{2t} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = (z' + 2z)e^t;$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t\frac{1}{x'_t} \Rightarrow y''_{x^2} = z''_{t^2} + 3z'_t + 2z.$$

Относительно функции $z(t)$ заданное уравнение принимает вид

$$z''_{t^2} + 3z'_t + 2z - 3z'_t - 6z = 6z^2 - 4z \Rightarrow z''_{t^2} = 6z^2. \qquad (*)$$

В уравнении (*) отсутствует независимая переменная t. Поэтому делаем замену: $z'_t = u(z)$, где $u(z)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$z''_{t^2} = \frac{du(z)}{dt} = \frac{du(z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = u'(z)\cdot u(z).$$

Относительно функции $u(z)$ уравнение (*) принимает вид

$$uu'_z = 6z^2 \Rightarrow udu = 6z^2dz \Rightarrow \frac{u^2}{2} = 2z^3 + C_1 \Rightarrow u^2 = 4z^3 + 2C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z'_t)^2 = 4z^3 + 2C_1. \qquad (**)$$

Для определения C_1 используем начальные условия. Отметим, что значению $x = 1$ соответствует $t = 0$,

$$y|_{t=0} = z|_{t=0} \Rightarrow z|_{t=0} = y|_{x=1} = 1; y'_x|_{x=1} = z'_t|_{t=0} + 2 = 4 \Rightarrow z'_t|_{t=0} = 2.$$

Относительно C_1 имеем, следовательно, уравнение: $4 = 4 + 2C_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow C_1 = 0$. Тогда вместо уравнения (**) получаем

$$(z'_t)^2 = 4z^3 \Rightarrow z'_t = 2z^{3/2}.$$

Здесь из двух знаков "$\pm$" следует взять знак "+", ибо при $t = 0$ должно быть: $z|_{t=0} = 1$, $z'_t|_{t=0} = 2$. Значит, будем иметь

$$\frac{dz}{2z^{3/2}} = dt. \qquad (***)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ — решение уравнения, но оно не удовлетворяет начальным условиям). Интегрируя уравнение (***), находим: $-\frac{1}{\sqrt{z}} = t + C_2 \Rightarrow$ при $t = 0$: $-1 = C_2$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = 1 - t \Rightarrow \frac{1}{z} = (1 - t)^2 \Leftrightarrow x^2 = y(1 - \ln x)^2.$$

Задача 64. Найти решение уравнения $y''' = 3yy'$, удовлетворяющее условиям: $y|_{x=0} = -2$, $y'|_{x=0} = 0$, $y''|_{x=0} = \frac{9}{2}$.

Решение. Имеем

$$f(x, y, y', y'') = 3yy' \Rightarrow f'_y = 3y', f'_{y'} = 3y.$$

Видим, что $f(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0), в частности, с начальными условиями $\left(0, -2, 0, \frac{9}{2}\right)$, имеет единственное решение. Замечаем, что заданное уравнение может быть записано в виде

$$(y'')'_x = \frac{3}{2}(y^2)'_x \Rightarrow y'' = \frac{3}{2}y^2 + C_1.$$

Постоянную C_1 находим из начальных условий:

$$\frac{9}{2}=\frac{3}{2}\cdot 4+C_1 \Rightarrow C_1=-\frac{3}{2}.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$y''=\frac{3}{2}y^2-\frac{3}{2}. \qquad (*)$$

В уравнение (*) не входит явно независимая переменная x. Поэтому делаем замену: $y'=z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2}=\frac{dz(y)}{dx}=\frac{dz(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2}=z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ уравнение (*) принимает вид

$$2zz'_y=3(y^2-1) \Leftrightarrow 2zdz=3(y^2-1)dy \Rightarrow z^2=y^3-3y+C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y')^2=y^3-3y+C_2.$$

Постоянную C_2 находим из начальных условий:

$$0=-8+6+C_2 \Rightarrow C_2=2.$$

Таким образом, получаем

$$(y')^2=y^3-3y+2 \Rightarrow (y')^2=(y-1)^2(y+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\pm(y-1)\sqrt{y+2} \Rightarrow \pm\int\frac{dy}{(y-1)\sqrt{y+2}}=x+C_3.$$

Будем считать здесь, что $-2\le y<1$, ибо речь идет о решении $y=y(x)$, удовлетворяющем условию $y(0)=-2$, т. е. о решении в окрестности точки $(0,\,-2)$. Так как

$$\int\frac{dy}{(y-1)\sqrt{y+2}}=\left[\begin{array}{c} y+2=t^2, \\ dy=2tdt \end{array}\right]=\int\frac{2dt}{t^2-3}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-t}{\sqrt{3}+t}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-\sqrt{y+2}}{\sqrt{3}+\sqrt{y+2}}$$

(для $-2\le y<1$: $1\ge\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{y+2}}{\sqrt{3}+\sqrt{y+2}}>0$), то

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-\sqrt{y+2}}{\sqrt{3}+\sqrt{y+2}}=\pm(x+C_3).$$

Постоянную C_3 находим из начального условия $y|_{x=0}=-2$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0=0\pm C_3 \Rightarrow C_3=0.$$

Следовательно, получаем

$$\ln\frac{\sqrt{3}-\sqrt{y+2}}{\sqrt{3}+\sqrt{y+2}}=\pm\sqrt{3}x \Rightarrow$$

(здесь знак "+" для $x<0$ и знак "−" для $x>0$)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}-\sqrt{y+2}}{\sqrt{3}+\sqrt{y+2}}=e^{\pm\sqrt{3}x}.$$

А тогда

$$\sqrt{3}-\sqrt{y+2}=\sqrt{3}e^{\pm\sqrt{3}x}+\sqrt{y+2}e^{\pm\sqrt{3}x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\left(1-e^{\pm\sqrt{3}x}\right)=\sqrt{y+2}\left(1+e^{\pm\sqrt{3}x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3}e^{\pm\frac{x\sqrt{3}}{2}}\left(e^{\pm\frac{x\sqrt{3}}{2}}-e^{\mp\frac{x\sqrt{3}}{2}}\right)=\sqrt{y+2}e^{\pm\frac{x\sqrt{3}}{2}}\left(e^{\pm\frac{x\sqrt{3}}{2}}+e^{\mp\frac{x\sqrt{3}}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lll} \text{для} & x<0: & -\sqrt{3}\cdot 2\,\mathrm{sh}\frac{x\sqrt{3}}{2}=\sqrt{y+2}\cdot 2\,\mathrm{ch}\frac{x\sqrt{3}}{2}, \\ \text{для} & x>0: & \sqrt{3}\cdot 2\,\mathrm{sh}\frac{x\sqrt{3}}{2}=\sqrt{y+2}\cdot 2\,\mathrm{ch}\frac{x\sqrt{3}}{2} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+2}=\mp\sqrt{3}\,\mathrm{th}\frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y+2=3\,\mathrm{th}^2\frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y=3\,\mathrm{th}^2\frac{x\sqrt{3}}{2}-2.$$

Задача 65. Найти решение уравнения $y''\cos y+(y')^2\sin y=y'$ удовлетворяющее начальным условиям: $y|_{x=-1}=\frac{\pi}{6}$, $y'|_{x=-1}=2$.

Решение. $F(x,y,y',y'')=y''\cos y+(y')^2\sin y-y'$;

$F'_x=0,\ F'_y=-\sin y\cdot y''+(y')^2\cos y,\ F'_{y'}=2y'\sin y-1,\ F'_{y''}=\cos y.$

Функция $F(x,y,y',y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''}=0 \Leftrightarrow y=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0), такими, что $y_0 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, имеет единственное решение. В частности, задача Коши с начальными условиями $\left(-1, \frac{\pi}{6}, 2\right)$ имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x. Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. А тогда

$$y''_{x^2}=\frac{dz(y)}{dx}=\frac{dz(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2}=z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ заданное уравнение принимает вид

$$zz'_y\cos y+z^2\sin y=z \Rightarrow z'_y\cos y+z\sin y=1. \qquad (*)$$

Могли потерять $z=0 \Leftrightarrow y'=0 \Leftrightarrow y=C$ ($y=C$ — решение исходного уравнения, но оно не удовлетворяет начальным условиям). Уравнение (*) — линейное относительно функции $z(y)$. Решая его, находим

$$z=\sin y+C_1\cos y \Leftrightarrow y'=\sin y+C_1\cos y.$$

Постоянную C_1 получаем с помощью начальных условий:

$$2=\sin\frac{\pi}{6}+C_1\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2=\frac{1}{2}+C_1\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C_1=\sqrt{3}.$$

Таким образом, будем иметь

$$y'=\sin y+\sqrt{3}\cos y \Rightarrow y'=2\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{2\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)}=dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|=x+C_2.$$

Постоянную C_2 определяем из начальных условий:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right|=-1+C_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1+C_2 \Leftrightarrow 0=-1+C_2 \Rightarrow C_2=1.$$

Таким образом, будем иметь: $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right| = x+1 \Rightarrow$ В окрестности точки $\left(-1, \frac{\pi}{6}\right)$ получаем: $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = 2x+2$.

§4. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Так называются уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x). \quad (1)$$

(В (1) $y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ входят в первой степени и не перемножаются.) Функции $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ называются *коэффициентами* линейного уравнения, а функция $q(x)$ — *свободным членом* этого уравнения.

Предполагается, что функции $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), q(x)$ — непрерывные на некотором промежутке (a, b).

Установим область существования и единственности решения уравнения (1). Для этого перепишем уравнение (1) в виде, разрешенном относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = \underbrace{q(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - \ldots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y}_{=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}.$$

Имеем $\frac{\partial f}{\partial y} = -p_n(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = -p_{n-1}(x)$, , $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = -p_1(x)$. Видим, что функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_y, f'_{y'}, \ldots, f'_{y^{(n-1)}}$ в каждой точке области

$$(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ -\infty < y < +\infty, \\ -\infty < y' < +\infty, \\ \ldots\ldots\ldots \\ -\infty < y^{(n-1)} < +\infty. \end{cases}$$

Потому существует, и притом единственное, решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

где x_0 — любое из (a,b), а $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ — вообще любые числа.

Отметим, что если свободный член $q(x) \equiv 0$ в (a,b), то уравнение (1) называется *линейным однородным*; если $q(x) \not\equiv 0$ для $x \in (a,b)$, то уравнение (1) называется *линейным неоднородным*.

Заметим, что левая часть уравнения (1) представляет собой результат выполнения некоторой совокупности операций дифференцирования и алгебраических действий. Эту совокупность операций дифференцирования и алгебраических действий называют *линейным дифференциальным оператором n-го порядка* и обозначают символом L. Таким образом,

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y.$$

С помощью символа L уравнение (1) запишется так:

$$L(y) = q(x). \tag{$\tilde{1}$}$$

Отметим следующие два свойства оператора L.

1. Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ — n раз непрерывно дифференцируемые функции на промежутке (a,b). Тогда

$$L(y_1 + y_2 + \dots + y_m) = L(y_1) + L(y_2) + \dots + L(y_m), x \in (a,b).$$

В самом деле, имеем

$$L(y_1 + y_2 + \dots + y_m) = (y_1 + y_2 + \dots + y_m)^{(n)} +$$
$$+ p_1(x)(y_1 + y_2 + \dots + y_m)^{(n-1)} + \dots +$$
$$+p_n(x)(y_1 + y_2 + \dots + y_m) = \left[y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_1\right] +$$
$$+\left[y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_2\right] + \dots +$$
$$+\left[y_m^{(n)} + p_1(x)y_m^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_m\right] =$$
$$= L(y_1) + L(y_2) + \dots + L(y_m), x \in (a,b).$$

2. Пусть $y(x)$ — n раз непрерывно дифференцируемая на промежутке (a,b) функция и C — некоторое постоянное число. Тогда

$$L(C \cdot y) = C \cdot L(y).$$

(Устанавливается простой подстановкой, как и в предыдущем свойстве.)

§5. Линейные однородные уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

где $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_{n-1}(x), p_n(x) \in C((a,b))$. С помощью оператора L это уравнение запишется так:

$$L(y) = 0. \qquad (1_0)$$

1°. Отметим следующие **особенности линейного однородного уравнения.**

1. Функция $y \equiv 0$, $x \in (a,b)$, является решением уравнения (1_0).

2. Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ — решения линейного однородного уравнения (1_0) в (a,b), то функция $y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_m(x)$ есть решение этого уравнения в (a,b).

▶ Так как функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ — решения уравнения (1_0) в (a,b), то

$$L(y_1(x)) \equiv 0, L(y_2(x)) \equiv 0, \ldots, L(y_m(x)) \equiv 0, x \in (a,b).$$

По свойству оператора L имеем

$$L(y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_m(x)) =$$
$$= \underbrace{L(y_1(x))}_{\equiv 0,\, x\in(a,b)} + \underbrace{L(y_2(x))}_{\equiv 0,\, x\in(a,b)} + \ldots + \underbrace{L(y_m(x))}_{\equiv 0,\, x\in(a,b)} \equiv 0,\ x \in (a,b).$$

Значит, функция $y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_m(x)$ — решение уравнения (1_0) в (a,b). ◀

3. Если функция $y(x)$, $x \in (a,b)$, есть решение уравнения (1_0) в (a,b) и если C — любое постоянное число, то функция $Cy(x)$ является решением уравнения (1_0) в (a,b).

▶ Имеем $L(Cy(x)) = C\underbrace{L(y(x))}_{\equiv 0,\, x\in(a,b)} \equiv 0$, $x \in (a,b)$. Значит, функция $Cy(x)$ есть решение уравнения (1_0). ◀

Следствие. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ — решения уравнения (1_0) в (a,b) и пусть $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — любые постоянные числа. Тогда функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_m y_m(x) \tag{*}$$

является решением уравнения (1_0) в промежутке (a,b).

Замечание. При $m = n$ формула (*) содержит n произвольных постоянных. Это обстоятельство наводит на мысль о возможности построения общего решения линейного однородного уравнения (1_0) в виде линейной комбинации n его решений. Выясним, какими должны быть решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (1_0), чтобы функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ была общим решением этого уравнения.

II°. Линейная зависимость и линейная независимость функций.

Определение. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ $(n > 1)$, определенные в промежутке (a,b), называются *линейно зависимыми* в (a,b), если существуют постоянные числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, не равные нулю одновременно, такие, что во всем промежутке (a,b) имеет место тождество:

$$\gamma_1 y_1(x) + \gamma_2 y_2(x) + \ldots + \gamma_n y_n(x) \equiv 0. \tag{2}$$

Если таких постоянных $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ не существует, т. е. если тождество (2) имеет место лишь тогда, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются *линейно независимыми* в промежутке (a,b).

Пример 1. Функции $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, , $y_n = x^{n-1}$ — линейно независимые в любом промежутке.

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что функции $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ — линейно зависимые в некотором промежутке (a,b). Но тогда существуют постоянные числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, не равные нулю одновременно, такие, что в промежутке (a,b) имеет место тождество

$$\gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \ldots + \gamma_n x^{n-1} \equiv 0. \tag{3}$$

А это невозможно, ибо левая часть (3) (в случае, когда среди коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ есть отличные от нуля) может обращаться в нуль не более чем при $(n-1)$ различных значениях x. Полученное противоречие доказывает, что функции $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ — линейно независимые. ◀

Пример 2. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — различные числа, то функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, , $y_n = e^{\lambda_n x}$ линейно независимые в любом промежутке.

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ — линейно зависимые в некотором промежутке (a, b). Но тогда существуют постоянные числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что во всем промежутке (a, b) должно иметь место тождество

$$\gamma_1 e^{\lambda_1 x} + \gamma_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + \gamma_n e^{\lambda_n x} \equiv 0. \tag{4}$$

У нас в (4) среди чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ есть хотя бы одно, отличное от нуля. Пусть для определенности $\gamma_1 \neq 0$. Разделим обе части (4) на $e^{\lambda_n x}$. Получаем

$$\gamma_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + \gamma_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_n)x} + \ldots + \gamma_{n-1} e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} + \gamma_n \equiv 0.$$

Продифференцируем последнее тождество по x. Получаем

$$\delta_1 e^{k_1 x} + \delta_2 e^{k_2 x} + \ldots + \delta_{n-1} e^{k_{n-1} x} \equiv 0. \tag{5}$$

Ясно, что в (5) $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ — различные числа и что $\delta_1 = \gamma_1(\lambda_1 - \lambda_n) \neq 0$. С тождеством (5) поступаем так же, как и с тождеством (4), и т. д. Через $(n-1)$ шагов придем к тому, что во всем промежутке (a, b) должно быть:

$$\mu e^{rx} \equiv 0, \text{ причем } \mu \neq 0.$$

А это невозможно. Получили противоречие. Значит, предположение, что функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ — линейно зависимые в некотором промежутке (a, b), неверно. ◀

Пример 3. Функции $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$, , $y_n = x^{n-1}e^{\lambda x}$ — линейно независимые в любом промежутке.

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что функции $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{n-1}e^{\lambda x}$ — линейно зависимые в некотором промежутке (a,b). Но тогда существуют постоянные числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что во всем промежутке (a,b) должно иметь место тождество

$$\gamma_1 e^{\lambda x} + \gamma_2 xe^{\lambda x} + \ldots + \gamma_n x^{n-1}e^{\lambda x} \equiv 0,$$

а значит, должно иметь место тождество

$$\gamma_1 + \gamma_2 x + \ldots + \gamma_n x^{n-1} \equiv 0, x \in (a,b).$$

Но последнее невозможно, когда среди чисел γ_k $(k = \overline{1,n})$ есть отличные от нуля. Получили противоречие. Значит, предположение, что функции $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{n-1}e^{\lambda x}$ — линейно зависимые в некотором промежутке (a,b), неверно. ◀

Пример 4. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — различные числа, то функции

$$\begin{gathered} e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \ldots, x^{k_m-1}e^{\lambda_m x} \end{gathered} \tag{6}$$

линейно независимые в любом промежутке.

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что функции (6) линейно зависимые в некотором промежутке (a,b). Но тогда существуют числа

$$\gamma_0^{(1)}, \gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_{k_1-1}^{(1)}, \gamma_0^{(2)}, \gamma_1^{(2)}, \ldots, \gamma_{k_2-1}^{(2)}, \ldots, \gamma_0^{(m)}, \gamma_1^{(m)}, \ldots, \gamma_{k_m-1}^{(m)}, \tag{7}$$

среди которых есть отличные от нуля, такие, что во всем промежутке (a,b) должно иметь место тождество:

$$\begin{gathered} \gamma_0^{(1)}e^{\lambda_1 x} + \gamma_1^{(1)}xe^{\lambda_1 x} + \ldots + \gamma_{k_1-1}^{(1)}x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x} + \\ +\gamma_0^{(2)}e^{\lambda_2 x} + \gamma_1^{(2)}xe^{\lambda_2 x} + \ldots + \gamma_{k_2-1}^{(2)}x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\gamma_0^{(m)}e^{\lambda_m x} + \gamma_1^{(m)}xe^{\lambda_m x} + \ldots + \gamma_{k_m-1}^{(m)}x^{k_m-1}e^{\lambda_m x} \equiv 0, \end{gathered}$$

т. е.

$$P^{(1)}_{k_1-1}(x)e^{\lambda_1 x}+P^{(2)}_{k_2-1}(x)e^{\lambda_2 x}+\ldots+P^{(m)}_{k_m-1}(x)e^{\lambda_m x}\equiv 0,\, x\in(a,b). \quad (8)$$

(В (8): $P^{(l)}_{k_l-1}(x)$, $l=\overline{1,m}$, — полиномы степени не выше чем (k_l-1).) Так как среди чисел (7) есть хотя бы одно отличное от нуля, то хотя бы один из полиномов $P^{(l)}_{k_l-1}(x)$ $(l=1,2,\ldots,m)$ не равен тождественно нулю в промежутке (a,b). Пусть, для определенности, $P^{(1)}_{k_1-1}(x)\not\equiv 0$ в промежутке (a,b).

Отметим далее, что

$$\left[P^{(l)}_{k_l-1}(x)\cdot e^{\lambda_l x}\right]'_x=\tilde{P}^{(l)}_{k_l-1}(x)\cdot e^{\lambda_l x}.$$

Здесь $P^{(l)}_{k_l-1}(x)$ и $\tilde{P}^{(l)}_{k_l-1}(x)$ — полиномы одной и той же степени. Ясно, что если $P^{(l)}_{k_l-1}(x)\not\equiv 0$ для $x\in(a,b)$, то и $\tilde{P}^{(l)}_{k_l-1}(x)\not\equiv 0$ для $x\in(a,b)$. Разделим обе части (8) на $e^{\lambda_m x}$. Получаем

$$P^{(1)}_{k_1-1}(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x}+P^{(2)}_{k_2-1}(x)e^{(\lambda_2-\lambda_m)x}+\ldots+$$
$$+P^{(m-1)}_{k_{m-1}-1}(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x}+P^{(m)}_{k_m-1}(x)\equiv 0,$$

$x\in(a,b)$. Продифференцируем по x обе части последнего тождества последовательно k_m раз. Получаем

$$P^{(1)*}_{k_1-1}(x)e^{\mu_1 x}+P^{(2)*}_{k_2-1}(x)e^{\mu_2 x}+\ldots+P^{(m-1)*}_{k_{m-1}-1}(x)e^{\mu_{m-1}x}\equiv 0,\, x\in(a,b). \quad (9)$$

(В (9): $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{m-1}$ — различные числа, и $P^{(1)*}_{k_1-1}(x)\not\equiv 0$, $x\in(a,b)$.) С тождеством (9) поступаем так же, как и с тождеством (8), и т. д. Через $(m-1)$ таких шагов мы придем к тому, что во всем промежутке (a,b) должно иметь место тождество

$$P^{**}_{k_1-1}(x)e^{\nu x}\equiv 0.$$

Но последнее невозможно, ибо $P^{**}_{k_1-1}(x)\not\equiv 0$, $x\in(a,b)$. Получили противоречие. Значит, предположение, что функции (6) — линейно зависимые в некотором промежутке (a,b), неверно. ◀

III°. Признаки линейной зависимости и линейной независимости функций.

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ непрерывны на промежутке (a,b) и имеют там непрерывные производные всех порядков до $(n-1)$-го порядка включительно. Составим определитель:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Этот определитель называют *вронскианом* (или *определителем Вронского*), составленным для функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ в промежутке (a,b), и обозначают $W(x)$, $x \in (a,b)$, или $W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$.

Теорема (необходимый признак линейной зависимости функций). Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно зависимые в промежутке (a,b), то во всем этом промежутке их вронскиан $W(x) \equiv 0$.

▶ Так как функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно зависимые в промежутке (a,b), то существуют постоянные числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что во всем промежутке (a,b) имеет место тождество:

$$\gamma_1 y_1(x) + \gamma_2 y_2(x) + \ldots + \gamma_n y_n(x) \equiv 0, x \in (a,b). \tag{11}$$

Тождество (11) продифференцируем по x последовательно $(n-1)$ раз. В результате для любого $x_0 \in (a,b)$ будем иметь

$$\begin{cases} \gamma_1 y_1(x_0) + \gamma_2 y_2(x_0) + \ldots + \gamma_n y_n(x_0) = 0, \\ \gamma_1 y_1'(x_0) + \gamma_2 y_2'(x_0) + \ldots + \gamma_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \gamma_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \gamma_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

(12) — линейная однородная (алгебраическая) система относительно $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. У нас среди $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ есть отличные от нуля. Следовательно, числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ дают решение системы (12), отличное от чисто нулевого. Но линейная однородная система

может иметь решения, отличные от чисто нулевого, лишь тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е. когда $W(x_0)=0$. ($W(x_0)$ есть определитель системы (12)). Так как точка x_0 — любая из промежутка (a,b), то приходим к выводу, что $W(x)=0$ для всех $x\in(a,b)$, т. е. $W(x)\equiv 0$, $x\in(a,b)$. ◀

Следствие (достаточный признак линейной независимости функций). Если в промежутке (a,b) имеется хотя бы одна точка x_0, такая, что $W(x_0)=W\left(y_1(x_0),y_2(x_0),\ldots,y_n(x_0)\right)\neq 0$, то функции $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ — линейно независимые в (a,b).

▶ Рассуждаем от противного. Допустим, что функции $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ — линейно зависимые в (a,b). Но тогда, по доказанной теореме, должно быть: $W(x)\equiv 0$, $x\in(a,b)$, откуда, в частности, $W(x_0)=0$, а это не так. ◀

Замечание. В общем случае теорема необратима. Именно, из того, что $W\left(y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\right)\equiv 0$, $x\in(a,b)$, не следует, что функции $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ — линейно зависимые в (a,b). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим ***пример.*** Пусть
$y_1(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2, & x>0;\end{cases}$ $y_2(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$ Имеем

$$W\left(y_1(x),y_2(x)\right)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\equiv 0, x\in(-\infty,\ +\infty)$$

(так как, если $x\le 0$, то $y_1(x)=0$; если $x>0$, то $y_2(x)=0$). Рассмотрим тождество

$$\gamma_1 y_1(x)+\gamma_2 y_2(x)\equiv 0, x\in(a,b). \tag{13}$$

Если $x\le 0$, то тождество (13) выполняется лишь при $\gamma_2=0$. Если $x>0$, то тождество (13) выполняется лишь при $\gamma_1=0$. Следовательно, для $x\in(-\infty,\ +\infty)$ тождество (13) имеет место лишь тогда, когда $\gamma_1=\gamma_2=0$. А это означает, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые на промежутке $(-\infty,\ +\infty)$.

Покажем, что в случае, когда функции $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения $L(y)=0$, справедлива обратная и притом более сильная теорема.

Теорема (достаточный признак линейной зависимости n решений уравнения $L(y)=0$). Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ есть решения линейного однородного уравнения $L(y)=0$ в промежутке (a,b). Тогда, если хотя бы в одной точке $x_0 \in (a,b)$ определитель Вронского, составленный для этих решений, равен нулю (т. е. $W(x_0)=0$), то $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — линейно зависимые в (a,b) (и, следовательно, по предыдущей теореме: $W(x) \equiv 0$, $x \in (a,b)$).

▶ Рассмотрим следующую линейную однородную систему относительно неизвестных $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$:

$$\begin{cases} \gamma_1 y_1(x_0) + \gamma_2 y_2(x_0) + \dots + \gamma_n y_n(x_0) = 0, \\ \gamma_1 y_1'(x_0) + \gamma_2 y_2'(x_0) + \dots + \gamma_n y_n'(x_0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \gamma_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \gamma_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Определителем системы (14) является как раз $W(x_0)$. Он по условию равен нулю. Но тогда система (14) имеет решения, отличные от чисто нулевого. Возьмем одно из таких решений: $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_n^*$ (среди этих чисел есть отличные от нуля). Рассмотрим функцию

$$y = \gamma_1^* y_1(x) + \gamma_2^* y_2(x) + \dots + \gamma_n^* y_n(x). \tag{15}$$

Так как $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — решения уравнения $L(y)=0$, то функция (15) также является решением этого уравнения. В силу соотношений (14), решение (15) удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} y\big|_{x=x_0} &= \gamma_1^* y_1(x_0) + \gamma_2^* y_2(x_0) + \dots + \gamma_n^* y_n(x_0) = 0, \\ y'\big|_{x=x_0} &= \gamma_1^* y_1'(x_0) + \gamma_2^* y_2'(x_0) + \dots + \gamma_n^* y_n'(x_0) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} &= \gamma_1^* y_1^{(n-1)}(x_0) + \gamma_2^* y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \gamma_n^* y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Видим, что решение (15) удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0} = 0, \quad y'\big|_{x=x_0} = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = 0. \tag{16}$$

Заметим, что функция $y \equiv 0$, $x \in (a,b)$, также является решением уравнения $L(y) = 0$, удовлетворяющим начальным условиям (16). Но, в силу теоремы существования и единственности решения, существует только одно решение уравнения $L(y) = 0$, удовлетворяющее начальным условиям (16). Отсюда заключаем, что всюду в (a,b) должно быть:

$$y = \gamma_1^* y_1(x) + \gamma_2^* y_2(x) + \ldots + \gamma_n^* y_n(x) \equiv 0. \qquad (17)$$

Так как в (17) среди чисел $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_n^*$ есть отличные от нуля, то это означает, что функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно зависимые в (a,b). ◀

Следствие (необходимый признак линейной независимости n решений уравнения $L(y) = 0$). Если решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейного однородного уравнения $L(y) = 0$ — линейно независимые в промежутке (a,b), то определитель Вронского, составленный для этих решений, не обращается в нуль ни в одной точке из промежутка (a,b) (т. е. $W(x) \neq 0$ при любом x из (a,b)).

▶ Действительно, если бы в промежутке (a,b) существовала хотя бы одна точка x_0, такая, что $W(x_0) = 0$, то по доказанной теореме решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ были бы линейно зависимыми в (a,b), а это не так. ◀

IV°. Существование фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения.

Определение. Если решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения $L(y) = 0$ — линейно независимые в промежутке (a,b), то говорят, что они образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(y) = 0$ в (a,b).

Покажем, что фундаментальная система решений у линейного однородного уравнения $L(y) = 0$ всегда существует.

▶ В самом деле, введем в рассмотрение матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в которой числа a_{ik} $(i,k=\overline{1,n})$ — произвольные, но такие, что $\det A \neq 0$ (т. е. матрица A — неособенная). Возьмем произвольный столбец матрицы A (например, первый) и точку $x_0 \in (a,b)$. Пусть $y=y_1(x)$ — такое решение уравнения $L(y)=0$, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0}=a_{11},\ y'\big|_{x=x_0}=a_{21},\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=a_{n1}.$$

Затем берем второй столбец матрицы A. Пусть $y=y_2(x)$ — решение уравнения $L(y)=0$, такое, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0}=a_{12},\ y'\big|_{x=x_0}=a_{22},\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=a_{n2} \text{ и т. д.}$$

Берем, наконец, n-й столбец матрицы A. Пусть $y=y_n(x)$ — решение уравнения $L(y)=0$, такое, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0}=a_{1n},\ y'\big|_{x=x_0}=a_{2n},\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=a_{nn}.$$

Получим, таким образом, n решений уравнения $L(y)=0$: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, таких, для которых $W(x_0)=\det A\neq 0$. Следовательно, решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно независимые, а значит, образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(y)=0$. ◀

§6. Теорема о составлении общего решения линейного однородного уравнения *n*-го порядка

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ образуют в промежутке (a,b) фундаментальную систему решений уравнения:

$$L(y)=0. \tag{1}$$

Тогда функция

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ \ldots\ +C_ny_n(x), \tag{2}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, является общим решением уравнения (1).

▶ Убедимся, что функция (2) удовлетворяет определению общего решения (1). Для этого продифференцируем по x функцию (2) последовательно $(n-1)$ раз. Будем иметь

$$\begin{cases} y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \\ y' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \ldots + C_n y_n'(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x). \end{cases} \tag{3}$$

Возьмем любую точку $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ в области

$$(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ -\infty < y < +\infty, \\ -\infty < y' < +\infty, \\ \ldots\ldots \\ -\infty < y^{(n-1)} < +\infty. \end{cases}$$

Положим в (3): $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, , $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$. Получим систему относительно неизвестных $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{4}$$

Определителем системы (4) является вронскиан для $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, вычисленный в точке x_0, т. е. $W(x_0)$.

По условию функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Следовательно, всюду в промежутке (a,b): $W(x) \neq 0$. В частности, $W(x_0) \neq 0$. А тогда, как мы знаем, у системы (4) существует, и притом единственное, решение: $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$, , $C_n = C_{n0}$. Таким образом, выполнен первый пункт определения общего решения уравнения (1). Подставим $C_{10}, C_{20}, \ldots, C_{n0}$ вместо $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в (2). Получим

$$y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x) + \ldots + C_{n0} y_n(x). \tag{5}$$

Функция (5) есть линейная комбинация, составленная из решений уравнения (1). Следовательно, она является решением уравнения (1). Видим, что выполнен и второй пункт определения общего решения. Значит, функция (2) удовлетворяет определению общего решения уравнения (1). ◀

Следствие. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ образуют в промежутке (a,b) фундаментальную систему решений уравнения (1). Пусть $y=\varphi(x)$ — произвольное решение уравнения (1). Тогда обязательно существуют числа $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$, ..., $C_n^{(0)}$, такие, что

$$\varphi(x)=C_1^{(0)}y_1(x)+C_2^{(0)}y_2(x)+\ \ldots\ +C_n^{(0)}y_n(x), x\in(a,b).$$

▶ Составим из решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ общее решение (2) уравнения $L(y)=0$ (т. е. функцию (2)). Продифференцируем по x функцию (2) $(n-1)$ раз, получим систему (3). В промежутке (a,b) возьмем какую-нибудь точку x_0 и вычислим в этой точке значения решения $y=\varphi(x)$ и производные этого решения до порядка $(n-1)$ включительно. Обозначим

$$\varphi(x_0)=y_0, \varphi'(x_0)=y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{*}$$

Подставим числа $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ в систему (3). Получим систему (4) относительно C_1, C_2, ..., C_n. Система (4) однозначно разрешима. Пусть $C_1^{(0)}$, $C_2^{(0)}$, ..., $C_n^{(0)}$ — решение системы (4). Составим функцию

$$y=\varphi_0(x)=C_1^{(0)}y_1(x)+C_2^{(0)}y_2(x)+\ \ldots\ +C_n^{(0)}y_n(x). \tag{5'}$$

Функция $y=\varphi_0(x)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям (*). Но этим же начальным условиям удовлетворяет и решение $y=\varphi(x)$ (т. е. то произвольное решение уравнения (1), о котором говорится в условии следствия).

По теореме существования и единственности решения задачи Коши существует интервал (α,β), содержащий точку x_0 и содержащийся в промежутке (a,b), такой, что $\varphi(x)\equiv\varphi_0(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$. Можно доказать, что $(\alpha,\beta)=(a,b)$. А тогда будем иметь: $\varphi(x)\equiv\varphi_0(x)$, $x\in(a,b)$. Но для $\varphi_0(x)$ справедлива формула (5′). Следовательно, и для функции $y=\varphi(x)$ справедливо представление

$$y=\varphi(x)=C_1^{(0)}y_1(x)+C_2^{(0)}y_2(x)+\ \ldots\ +C_n^{(0)}y_n(x), x\in(a,b).$$ ◀

§7. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$L(y) = q(x). \tag{1}$$

Уравнение

$$L(y) = 0 \tag{2}$$

условимся называть линейным однородным уравнением, соответствующим линейному неоднородному уравнению (1), если в (1) и (2) оператор L один и тот же.

1°. Теорема (о составлении общего решения линейного неоднородного уравнения). Пусть $\tilde{y}(x)$ — какое-нибудь решение линейного неоднородного уравнения (1) в промежутке (a,b) и пусть

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

— общее решение линейного однородного уравнения (2), соответствующего уравнению (1) ($y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2) в промежутке (a,b)). Тогда функция

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) \tag{3}$$

является общим решением уравнения (1).

▶ Так как $\tilde{y}(x)$ — решение уравнения (1) в промежутке (a,b), то

$$L(\tilde{y}(x)) \equiv q(x), x \in (a,b).$$

Так как $\bar{y}(x)$ — решение уравнения (2) в промежутке (a,b), то

$$L(\bar{y}(x)) \equiv 0, x \in (a,b).$$

Имеем

$$L(\bar{y}(x) + \tilde{y}(x)) = \underbrace{L(\bar{y}(x))}_{\equiv 0, x\in(a,b)} + \underbrace{L(\tilde{y}(x))}_{\equiv q(x), x\in(a,b)} \equiv q(x), x \in (a,b).$$

Значит, функция (3): $y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x)$ является решением уравнения (1). Мы докажем, что функция (3) является общим решением уравнения (1), если покажем, что из (3) можно получить любое частное решение уравнения (1), удовлетворяющее любым начальным условиям вида

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\big|_{x=x_0} = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{4}$$

(В (4) x_0 — любое из (a,b), а $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — вообще любые числа.) Продифференцируем функцию (3) по x последовательно $(n-1)$ раз. Будем иметь

$$\begin{cases} y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x) + \tilde{y}(x), \\ y' = C_1y'_1(x) + C_2y'_2(x) + \dots + C_ny'_n(x) + \tilde{y}'(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)}(x) + C_2y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x) + \tilde{y}^{(n-1)}(x). \end{cases} \tag{5}$$

Подставим в (5) начальные условия (4). Получим

$$\begin{cases} y_0 = \tilde{y}(x_0) + C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \dots + C_ny_n(x_0), \\ y'_0 = \tilde{y}'(x_0) + C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) + \dots + C_ny'_n(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) + C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0). \end{cases} \tag{6}$$

(6) — линейная система относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$. Определителем этой системы является вронскиан для $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, вычисленный в точке x_0, т. е. $W(x_0)$. У нас $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2) в промежутке (a,b). Следовательно, всюду в (a,b): $W(x) \neq 0$. В частности, $W(x_0) \neq 0$. А тогда система (6) имеет, и притом единственное, решение: $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$, , $C_n = C_{n0}$.

Подставив $C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}$ вместо $C_1, C_2, \dots, C_n$ в (3), получим искомое частное решение уравнения (1). ◀

2°. Теорема (принцип суперпозиции решений). Пусть линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$L(y) = q_1(x) + q_2(x) + \dots + q_m(x). \tag{7}$$

Пусть

$\tilde{y}_1(x)$ есть решение уравнения: $L(y) = q_1(x)$, (7_1)

$\tilde{y}_2(x)$ есть решение уравнения: $L(y) = q_2(x)$, (7_2)

. . . .

$\tilde{y}_m(x)$ есть решение уравнения: $L(y) = q_m(x)$ (7_m)

(заметим, что в уравнениях (7_1) – (7_m) оператор L один и тот же). Тогда функция

$$\tilde{y}(x)=\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)+\ \dots\ +\tilde{y}_m(x) \tag{8}$$

является решением уравнения (7).

▶ По условию: $L(\tilde{y}_1(x))\equiv q_1(x)$, $x\in(a,b)$; $L(\tilde{y}_2(x))\equiv q_2(x)$, $x\in(a,b)$; ; $L(\tilde{y}_m(x))\equiv q_m(x)$, $x\in(a,b)$. Имеем

$$L(\tilde{y}(x))=L(\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)+\ \dots\ +\tilde{y}_m(x))=$$
$$=L(\tilde{y}_1(x))+L(\tilde{y}_2(x))+\ \dots\ +L(\tilde{y}_m(x))\equiv$$
$$\equiv q_1(x)+q_2(x)+\ \dots\ +q_m(x), x\in(a,b).$$

Отсюда заключаем, что функция (8) является решением уравнения (7). ◀

3°. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения решения $\tilde{y}(x)$ линейного неоднородного уравнения.

Пусть имеется линейное неоднородное уравнение

$$L(y)=q(x). \tag{9}$$

Пусть известна фундаментальная система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейного однородного уравнения $L(y)=0$, соответствующего неоднородному уравнению (9). Тогда общее решение однородного уравнения $L(y)=0$ будет таким:

$$\bar{y}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ \dots\ +C_ny_n(x), \tag{10}$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные.

Станем искать решение $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения (9) в виде

$$\tilde{y}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ \dots\ +C_n(x)y_n(x), \tag{11}$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ — неизвестные функции, которые мы должны подобрать так, чтобы функция (11) оказалась решением уравнения (9). (Формула (11) имеет такой же вид, как и общее решение соответствующего однородного уравнения, только в (11) $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ — функции.)

О том, что такие функции подобрать можно, утверждает **теорема**:

Если $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ являются функциями, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = q(x), \end{cases} \tag{12}$$

то функция (11) будет решением неоднородного уравнения (9).

▶ Отметим, что система (12) — линейная относительно $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$. Определителем этой системы является вронскиан $W(x)$, составленный для функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Так как эти функции линейно независимые в промежутке (a,b), то $W(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке из (a,b). Поэтому у системы (12) существует, и притом единственное, решение.

Решая систему (12), мы получим

$$C_1'(x) = \psi_1(x),\ C_2'(x) = \psi_2(x),\ \dots,\ C_n'(x) = \psi_n(x),$$

где $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ — вполне определенные функции, откуда находим

$$C_1(x) = \int \psi_1(x)dx,\ C_2(x) = \int \psi_2(x)dx,\ \dots,\ C_n(x) = \int \psi_n(x)dx. \quad (13)$$

Заметим, что произвольные постоянные, которые получаются при вычислении интегралов (13), можно считать равными нулю.

Покажем теперь, что функция (11), где в качестве $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ взяты их выражения из (13), является решением уравнения (9).

В самом деле, имеем, принимая во внимание (12):

$$\begin{array}{l|l}
p_n(x)\cdot & \tilde{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x), \\
p_{n-1}(x)\cdot & \tilde{y}' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \dots + C_n(x)y_n'(x) + 0, \\
+p_{n-2}(x)\cdot & \tilde{y}'' = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \dots + C_n(x)y_n''(x) + 0, \\
\dots & \\
p_1(x)\cdot & \tilde{y}^{(n-1)} = C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + 0, \\
1\cdot & \tilde{y}^{(n)} = C_1(x)y_1^{(n)}(x) + C_2(x)y_2^{(n)}(x) + \dots + C_n(x)y_n^{(n)}(x) + q(x), \\
\hline
\end{array}$$

$$L(\tilde{y}(x)) \equiv C_1(x)L(y_1(x)) + C_2(x)L(y_2(x)) + \dots + C_n(x)L(y_n(x)) + q(x). \quad (14)$$

У нас функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения $L(y) = 0$. Поэтому $L(y_1(x)) \equiv 0,\ x \in (a,b)$; $L(y_2(x)) \equiv 0,\ x \in (a,b)$; ; $L(y_n(x)) \equiv 0$, $x \in (a,b)$. А тогда из (14) получаем

$$L(\tilde{y}(x)) = L(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)) \equiv q(x),$$

$$x \in (a,b).$$

Значит, функция $\tilde{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$ является решением линейного неоднородного уравнения (9). ◀

§8. О комплексных решениях линейного однородного уравнения

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — вещественные функции вещественного аргумента x, определенные в промежутке (a,b). Тогда функция $f(x)=u(x)+iv(x)$, $x\in(a,b)$, где i — мнимая единица, называется *комплексной функцией вещественного аргумента* x.

1) Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x_0\in(a,b)$, если в этой точке непрерывны функции $u(x)$ и $v(x)$.

2) Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x_0\in(a,b)$, если в этой точке дифференцируемы функции $u(x)$ и $v(x)$. При этом имеет место формула $f'(x_0)=u'(x_0)+iv'(x_0)$.

3) Справедливы следующие формулы:

$$e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x,\ e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos\beta x=\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2},\ \sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}$$

(это — так называемые *формулы Эйлера*).

4) Покажем, что показательная функция $e^{\lambda x}$, где $\lambda=\alpha+i\beta$ (α и β — действительные числа), дифференцируется по прежнему правилу:

$$(e^{\lambda x})'=\lambda e^{\lambda x}.$$

В самом деле, имеем

$$(e^{\lambda x})'_x=(e^{\alpha x+i\beta x})'_x=\left[e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)\right]'_x=$$

$$=(e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x)'_x=(e^{\alpha x}\cos\beta x)'_x+i(e^{\alpha x}\sin\beta x)'_x=$$

$$=(\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x)+i(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x)=$$

$$=\alpha e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+i\beta e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)=$$

$$=\alpha e^{\alpha x}e^{i\beta x}+i\beta e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{(\alpha+i\beta)x}(\alpha+i\beta)=\lambda e^{\lambda x}.$$

5) Пусть $f(x)=u(x)+iv(x)$ — произвольная комплексная функция вещественного аргумента, непрерывно дифференцируемая на промежутке (a,b) n раз. Оператор

$$L(\ldots)=(\ldots)^{(n)}+p_1(x)(\ldots)^{(n-1)}+\ \ldots\ +p_{n-1}(x)(\ldots)'+p_n(x)(\ldots)$$

определен для такой функции $f(x)$ и по-прежнему обладает свойствами линейности:

1. $L(f(x))=L(u(x))+iL(v(x))$;

2. $L(C\cdot f(x))=C\cdot L(f(x))$.

Если $L(f(x))=L(u(x)+iv(x))\equiv 0$, $x\in(a,b)$, то $f(x)=u(x)+$ $+iv(x)$ — решение линейного однородного уравнения $L(y)=0$.

6) Для комплексных функций вещественного аргумента

$$f_1(x)=u_1(x)+iv_1(x), f_2(x)=u_2(x)+iv_2(x), \ldots, f_n(x)=u_n(x)+iv_n(x)$$

справедливы признаки линейной зависимости и линейной независимости, установленные ранее для вещественных функций вещественного аргумента. Если $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения $L(y)=0$ в (a,b), то говорят, что они образуют фундаментальную систему решений этого уравнения в промежутке (a,b).

7) Пусть имеется линейное однородное дифференциальное уравнение с вещественными коэффициентами:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

$$(\text{т. е. } L(y)=0),$$

где $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ — вещественные функции аргумента x. Пусть $f(x)=u(x)+iv(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — вещественные функции аргумента x, является решением уравнения $L(y)=0$, т. е. $L(u(x)+iv(x))\equiv 0$, $x\in(a,b)$. Тогда функции $u(x)$ и $v(x)$ (каждая в отдельности) являются решениями уравнения $L(y)=0$.

▶ В самом деле, из тождества $L(u(x)+iv(x))\equiv 0$, $x\in(a,b)$, вытекает, что $L(u(x))+iL(v(x))\equiv 0$, $x\in(a,b)$. При наших условиях оба выражения $L(u(x))$ и $L(v(x))$ представляют собой вещественные функции аргумента x. Поэтому последнее тождество имеет место лишь тогда, когда одновременно $L(u(x))\equiv 0$, $x\in(a,b)$, и $L(v(x))\equiv 0$, $x\in(a,b)$. А это означает, что каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ является решением уравнения $L(y)=0$. ◀

8) **Теорема** (о комплексной фундаментальной системе решений линейного однородного уравнения n-го порядка). Пусть имеется линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с вещественными коэффициентами $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$:

$$L(y)=0. \qquad (1)$$

Пусть уравнение (1) допускает следующую фундаментальную систему решений:

$$
\begin{gathered}
\varphi_1(x) \pm i\varphi_2(x),\\
\varphi_3(x) \pm i\varphi_4(x),\\
\ldots\\
\varphi_{2m-1}(x) \pm i\varphi_{2m}(x),\\
\varphi_{2m+1}(x),\\
\ldots\\
\varphi_n(x),
\end{gathered} \tag{2}
$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{2m}(x), \varphi_{2m+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — вещественные функции вещественного аргумента x. Тогда функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{2m}(x), \varphi_{2m+1}(x), \ldots, \varphi_n(x) \tag{3}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

▶ Обозначим

$$
\begin{aligned}
&\psi_1(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x), && \psi_2(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x);\\
&\psi_3(x) = \varphi_3(x) + i\varphi_4(x), && \psi_4(x) = \varphi_3(x) - i\varphi_4(x);\\
&\quad\ldots\ldots && \quad\ldots\ldots\\
&\psi_{2m-1}(x) = \varphi_{2m-1}(x) + i\varphi_{2m}(x), && \psi_{2m}(x) = \varphi_{2m-1}(x) - i\varphi_{2m}(x).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{2}, && \varphi_2(x) = \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{2i};\\
&\varphi_3(x) = \frac{\psi_3(x) + \psi_4(x)}{2}, && \varphi_4(x) = \frac{\psi_3(x) - \psi_4(x)}{2i};\\
&\quad\ldots\ldots && \quad\ldots\ldots\\
&\varphi_{2m-1}(x) = \frac{\psi_{2m-1}(x) + \psi_{2m}(x)}{2}, && \varphi_{2m}(x) = \frac{\psi_{2m-1}(x) - \psi_{2m}(x)}{2i}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Из функций (3) составим линейную комбинацию и подчиним ее условию

$$
\begin{gathered}
\gamma_1\varphi_1(x) + \gamma_2\varphi_2(x) + \ldots + \gamma_{2m-1}\varphi_{2m-1}(x) + \gamma_{2m}\varphi_{2m}(x) +\\
+\gamma_{2m+1}\varphi_{2m+1}(x) + \ldots + \gamma_n\varphi_n(x) \equiv 0, x \in (a,b).
\end{gathered} \tag{5}
$$

Если принять во внимание соотношения (4), то тождество (5) примет вид

$$\frac{\gamma_1 - i\gamma_2}{2}\psi_1(x) + \frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{2}\psi_2(x) + \ldots + \frac{\gamma_{2m-1} - i\gamma_{2m}}{2}\psi_{2m-1}(x) +$$

$$+\frac{\gamma_{2m-1}+i\gamma_{2m}}{2}\psi_{2m}(x)+\gamma_{2m+1}\varphi_{2m+1}(x)+\ \dots\ +\gamma_n\varphi_n(x)\equiv 0, x\in(a,b).$$

По условию функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{2m}(x), \varphi_{2m+1}(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Но тогда

$$\gamma_1-i\gamma_2=0, \gamma_1+i\gamma_2=0, \dots, \gamma_{2m-1}-i\gamma_{2m}=0,$$

$$\gamma_{2m-1}+i\gamma_{2m}=0, \gamma_{2m+1}=0, \dots, \gamma_n=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_1=0, \gamma_2=0, \dots, \gamma_{2m-1}=0, \gamma_{2m}=0, \gamma_{2m+1}=0, \dots, \gamma_n=0.$$

А тогда из тождества (5) следует, что функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно независимые в (a,b). ◀

§9. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано уравнение

$$L(y)=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ \dots\ +a_{n-1}y'+a_ny=0, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — постоянные вещественные числа. Коэффициенты уравнения (1), если их рассматривать как функции от x, определены и непрерывны на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, областью существования и единственности решений уравнения (1) будет:

$$(D)=\begin{cases} -\infty<x<+\infty, \\ -\infty<y<+\infty, \\ -\infty<y'<+\infty, \\ \dots\dots \\ -\infty<y^{(n-1)}<+\infty. \end{cases}$$

Поставим себе задачу: построение фундаментальной системы решений для уравнения (1).

Станем искать решение уравнения (1) в виде

$$y=e^{\lambda x}, \qquad (2)$$

где $\lambda=\alpha+i\beta$ — комплексное число; x — независимая вещественная переменная. Подставив (2) в левую часть уравнения (1), получим

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n). \tag{3}$$

Из (3) ясно, что $L(e^{\lambda x}) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда λ является корнем уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{4}$$

Многочлен $\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ называют *характеристическим многочленом* уравнения (1), а его корни — *характеристическими числами* уравнения (1). Заметим, что если λ_0 — характеристическое число уравнения (1), то функция $e^{\lambda_0 x}$ — решение уравнения (1).

Возможны следующие два случая: 1 случай — все корни характеристического уравнения (4) — простые; 2 случай — среди корней характеристического уравнения (4) имеются кратные. Обсудим оба эти случая подробнее.

1 случай. Все корни характеристического уравнения (4): λ_1, λ_2, ..., λ_n — различные числа (вещественные или комплексные). В этом случае сразу получаем n различных решений уравнения (1):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}. \tag{5}$$

Функции (5) — линейно независимые в любом промежутке (это было показано ранее, см. §5, пример 2). Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(y) = 0$.

а) Если оказывается, что все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — вещественные числа, то все решения (5) вещественные. Функция

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}, \tag{6}$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные, есть общее решение уравнения (1). Это следует из теоремы о составлении общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. (Общее решение уравнения (1) получается как линейная комбинация n вещественных решений этого уравнения.)

б) Среди корней характеристического уравнения имеются комплексные. Пусть, например,

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1,\ \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2,\ \ldots,\ \lambda_{2m-1,2m} =$$

$$= \alpha_m \pm i\beta_m,\ \lambda_{2m+1},\ \lambda_{2m+2},\ \ldots,\ \lambda_n.$$

(У нас характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ есть полином с вещественными коэффициентами. Поэтому, если $\lambda = \alpha + i\beta$ есть корень характеристического уравнения, то и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ является корнем этого уравнения. Здесь предполагается, что $\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2}, \ldots, \lambda_n$ — вещественные корни уравнения $\varphi(\lambda)=0$.) Следовательно, уравнение (1) допускает в этом случае следующую фундаментальную систему решений:

$$e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x \pm ie^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,$$

$$e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x \pm ie^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x, \ldots, e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x \pm ie^{\alpha_m x}\sin\beta_m x,$$

$$e^{\lambda_{2m+1}x}, e^{\lambda_{2m+2}x}, \ldots, e^{\lambda_n x}.$$

А тогда по теореме о комплексной фундаментальной системе решений (см. §8, пункт 8) заключаем, что функции

$$e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x, e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x, \ldots,$$

$$e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x, e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x, e^{\lambda_{2m+1}x}, e^{\lambda_{2m+2}x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Подчеркнем, что все эти решения — вещественные функции вещественного аргумента x.

Функция

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x + \tilde{C}_1 e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x + C_2 e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x +$$

$$+\tilde{C}_2 e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x + \ldots + C_m e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x + \tilde{C}_m e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x +$$

$$+ C_{2m+1}e^{\lambda_{2m+1}x} + C_{2m+2}e^{\lambda_{2m+2}x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}, \tag{7}$$

где $C_1, \tilde{C}_1, C_2, \tilde{C}_2, \ldots, C_m, \tilde{C}_m, C_{2m+1}, C_{2m+2}, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, есть общее решение уравнения (1).

2 случай. Среди корней характеристического уравнения $\varphi(\lambda)=0$ имеются кратные. Пусть полный список корней уравнения $\varphi(\lambda)=0$ такой:

$$\lambda_1 \text{ — корень кратности } n_1 \ (n_1 \geq 1),$$

$$\lambda_2 \text{ — корень кратности } n_2 \ (n_2 \geq 1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_m \text{ — корень кратности } n_m \ (n_m \geq 1)$$

($1 \leq m < n$; среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ нет одинаковых, и $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$). Ясно, что функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_m x}$ — решения уравнения (1). Так как этих решений меньше, чем n, то они не образуют фундаментальную систему решений для уравнения (1) (нужно n линейно независимых решений).

Попытаемся найти еще $(n-m)$ решений уравнения (1) таких, которые вместе с функциями $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_m x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Рассмотрим один из корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, кратность которого больше или равна двум. Пусть это будет корень λ_i кратности n_i ($n_i \geq 2$). В уравнении $L(y)=0$ сделаем замену, положив

$$y = ue^{\lambda_i x}, \tag{8}$$

где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Будем иметь

$$\begin{array}{l|l}
a_n \cdot & y = ue^{\lambda_i x} \\
a_{n-1} \cdot & y' = u\lambda_i e^{\lambda_i x} + u'e^{\lambda_i x} \\
a_{n-2} \cdot & y'' = u\lambda_i^2 e^{\lambda_i x} + 2u'\lambda_i e^{\lambda_i x} + u''e^{\lambda_i x} \\
a_{n-3} \cdot & y''' = u\lambda_i^3 e^{\lambda_i x} + 3u'\lambda_i^2 e^{\lambda_i x} + 3u''\lambda_i e^{\lambda_i x} + u'''e^{\lambda_i x} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1 \cdot & y^{(n)} = u\lambda_i^n e^{\lambda_i x} + C_n^1 u'\lambda_i^{n-1} e^{\lambda_i x} + C_n^2 u''\lambda_i^{n-2} e^{\lambda_i x} + \ldots + u^{(n)} e^{\lambda_i x} \\
\hline
\end{array}$$

$$L(y) = L(ue^{\lambda_i x}) = e^{\lambda_i x}\Big[u\underbrace{(\lambda_i^n + a_1\lambda_i^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda_i + a_n)}_{=\varphi(\lambda_i)} +$$

$$+u'\underbrace{(n\lambda_i^{n-1} + a_1(n-1)\lambda_i^{n-2} + \ldots + a_{n-2}2\lambda_i + a_{n-1})}_{=\varphi'(\lambda_i)} +$$

$$+u''\underbrace{(C_n^2\lambda_i^{n-2} + C_{n-1}^2\lambda_i^{n-3}a_1 + \ldots + C_3^2\lambda_i a_{n-3} + a_{n-2})}_{=\frac{\varphi''(\lambda_i)}{2!}} + u'''\frac{\varphi'''(\lambda_i)}{3!} +$$

$$+ \ldots + u^{(n-1)}\frac{\varphi^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!} + u^{(n)}\frac{\varphi^{(n)}(\lambda_i)}{n!}\Big] = 0.$$

После сокращения на $e^{\lambda_i x} (\neq 0)$ получаем следующее уравнение относительно функции $u(x)$:

$$\frac{\varphi^{(n)}(\lambda_i)}{n!}u^{(n)} + \frac{\varphi^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!}u^{(n-1)} + \ldots + \frac{\varphi'(\lambda_i)}{1!}u' + \varphi(\lambda_i)u = 0.$$

У нас λ_i — корень кратности n_i полинома $\varphi(\lambda)$. Это означает, что

$$\varphi(\lambda_i) = \varphi'(\lambda_i) = \ldots = \varphi^{(n_i-1)}(\lambda_i) = 0, \text{ а } \varphi^{(n_i)}(\lambda_i) \neq 0.$$

Поэтому предыдущее уравнение в данном случае принимает вид

$$\frac{\varphi^{(n)}(\lambda_i)}{n!}u^{(n)}+\frac{\varphi^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!}u^{(n-1)}+\ldots+\frac{\varphi^{(n_i)}(\lambda_i)}{(n_i)!}u^{(n_i)}=0. \tag{9}$$

Непосредственно из вида уравнения (9) следует, что функции $u_1 = 1$, $u_2 = x$, , $u_{n_i} = x^{n_i-1}$ являются решениями уравнения (9). Но тогда функции

$$y_1 = e^{\lambda_i x}, y_2 = xe^{\lambda_i x}, \ldots, y_{n_i} = x^{n_i-1}e^{\lambda_i x} \tag{10}$$

являются решениями уравнения (1): $L(y) = 0$.

Если провести аналогичное рассмотрение для каждого из корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то получим следующие n решений уравнения (1):

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \ldots, & x^{n_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{\lambda_m x}, & xe^{\lambda_m x}, & \ldots, & x^{n_m-1}e^{\lambda_m x}. \end{array} \tag{11}$$

Так как $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — различные числа, то эти решения линейно независимые в любом промежутке (это было установлено ранее, см. §5, пример 4). Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(y) = 0$.

а) Если оказывается, что все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — вещественные числа, то все решения (11) — вещественные функции. Общее решение уравнения (1) получается в этом случае как линейная комбинация этих n вещественных решений:

$$\begin{aligned} y = {} & C_1^{(1)}e^{\lambda_1 x} + C_2^{(1)}xe^{\lambda_1 x} + \ldots + C_{n_1}^{(1)}x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x} + \\ & + C_1^{(2)}e^{\lambda_2 x} + C_2^{(2)}xe^{\lambda_2 x} + \ldots + C_{n_2}^{(2)}x^{n_2-1}e^{\lambda_2 x} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + C_1^{(m)}e^{\lambda_m x} + C_2^{(m)}xe^{\lambda_m x} + \ldots + C_{n_m}^{(m)}x^{n_m-1}e^{\lambda_m x}. \end{aligned} \tag{12}$$

б) Среди корней характеристического уравнения имеются комплексные. Пусть, например,

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1 \text{ — корень кратности } n_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{2l-1,2l} = \alpha_l \pm i\beta_l \text{ — корень кратности } n_l,$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_{2l+1}\text{ — корень кратности } n_{2l+1}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda_m\text{ — корень кратности } n_m\end{array}\right\}\text{— корни вещественные}$$

(У нас характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ есть полином с вещественными коэффициентами. Поэтому, если $\lambda=\alpha+i\beta$ есть корень характеристического уравнения кратности k, то и $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ является корнем этого уравнения той же кратности k.) Следовательно, уравнение (1) допускает в этом случае следующую фундаментальную систему решений:

$$\begin{gathered}e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x\pm ie^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,\ xe^{\alpha_1x}\cos\beta_1x\pm ixe^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,\\ \dots,x^{n_1-1}e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x\pm ix^{n_1-1}e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ e^{\alpha_lx}\cos\beta_lx\pm ie^{\alpha_lx}\sin\beta_lx,\ xe^{\alpha_lx}\cos\beta_lx\pm ixe^{\alpha_lx}\sin\beta_lx,\\ \dots,x^{n_l-1}e^{\alpha_lx}\cos\beta_lx\pm ix^{n_l-1}e^{\alpha_lx}\sin\beta_lx,\\ e^{\lambda_{2l+1}x},xe^{\lambda_{2l+1}x},\dots,x^{n_{2l+1}-1}e^{\lambda_{2l+1}x},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ e^{\lambda_mx},\ xe^{\lambda_mx},\ \dots,\ x^{n_m-1}e^{\lambda_mx}.\end{gathered}$$

А тогда по теореме о комплексной фундаментальной системе решений (см. §8, пункт 8) заключаем, что функции

$$\begin{gathered}e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x,e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,xe^{\alpha_1x}\cos\beta_1x,xe^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,\\ \dots,x^{n_1-1}e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x,x^{n_1-1}e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ e^{\alpha_lx}\cos\beta_lx,e^{\alpha_lx}\sin\beta_lx,xe^{\alpha_lx}\cos\beta_lx,xe^{\alpha_lx}\sin\beta_lx,\\ \dots,x^{n_l-1}e^{\alpha_lx}\cos\beta_lx,x^{n_l-1}e^{\alpha_lx}\sin\beta_lx,\\ e^{\lambda_{2l+1}x},xe^{\lambda_{2l+1}x},\dots,x^{n_{2l+1}-1}e^{\lambda_{2l+1}x},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ e^{\lambda_mx},\ xe^{\lambda_mx},\ \dots,\ x^{n_m-1}e^{\lambda_mx}\end{gathered}\tag{13}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Отметим, что все решения (13) являются вещественными функциями вещественного аргумента x. Общее решение уравнения (1) в этом случае будет таким:

$$y = C_1^{(1)} e^{\alpha_1 x} \cos\beta_1 x + \tilde{C}_1^{(1)} e^{\alpha_1 x} \sin\beta_1 x + C_2^{(1)} x e^{\alpha_1 x} \cos\beta_1 x +$$
$$+ \tilde{C}_2^{(1)} x e^{\alpha_1 x} \sin\beta_1 x + \ldots + C_{n_1}^{(1)} x^{n_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \cos\beta_1 x + \tilde{C}_{n_1}^{(1)} x^{n_1 - 1} e^{\alpha_1 x} \sin\beta_1 x + \ \ldots \ +$$
$$+ C_1^{(l)} e^{\alpha_l x} \cos\beta_l x + \tilde{C}_1^{(l)} e^{\alpha_l x} \sin\beta_l x + C_2^{(l)} x e^{\alpha_l x} \cos\beta_l x +$$
$$+ \tilde{C}_2^{(l)} x e^{\alpha_l x} \sin\beta_l x + \ \ldots \ + C_{n_l}^{(l)} x^{n_l - 1} e^{\alpha_l x} \cos\beta_l x + \tilde{C}_{n_l}^{(l)} x^{n_l - 1} e^{\alpha_l x} \sin\beta_l x +$$
$$+ C_1^{(2l+1)} e^{\lambda_{2l+1} x} + C_2^{(2l+1)} x e^{\lambda_{2l+1} x} + \ \ldots \ + C_{n_{2l+1}}^{(2l+1)} x^{n_{2l+1} - 1} e^{\lambda_{2l+1} x} + \ \ldots \ +$$
$$+ C_1^{(m)} e^{\lambda_m x} + C_2^{(m)} x e^{\lambda_m x} + \ \ldots \ + C_{n_m}^{(m)} x^{n_m - 1} e^{\lambda_m x}.$$

Здесь

$$C_1^{(1)},\ \tilde{C}_1^{(1)},\ C_2^{(1)},\ \tilde{C}_2^{(1)},\ \ldots,\ C_{n_1}^{(1)},$$
$$\tilde{C}_{n_1}^{(1)},\ \ldots,\ C_1^{(l)},\ \tilde{C}_1^{(l)},\ C_2^{(l)},\ \tilde{C}_2^{(l)},\ \ldots,\ C_{n_l}^{(l)},\ \tilde{C}_{n_l}^{(l)},$$
$$C_1^{(2l+1)},\ C_2^{(2l+1)},\ \ldots,\ C_{n_{2l+1}}^{(2l+1)},\ \ldots,\ C_1^{(m)},\ C_2^{(m)},\ \ldots,\ C_{n_m}^{(m)}$$

— произвольные постоянные. (Общее решение линейного однородного уравнения с постоянными вещественными коэффициентами получается как линейная комбинация n вещественных решений этого уравнения.)

§10. Построение частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$L(y) = q(x) \Leftrightarrow y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ \ldots \ + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные числа. Пусть свободный член $q(x)$ уравнения (1) имеет специальный вид:

$$q(x) = e^{ax} \left[P_m(x) \cos bx + P_l^*(x) \sin bx \right], \quad (2)$$

где a и b — постоянные числа, а $P_m(x)$ и $P_l^*(x)$ — полиномы степени m и l соответственно. Тогда для нахождения частного решения $\tilde{y}(x)$ уравнения (1) можно применить так называемый метод неопределенных коэффициентов (который сводит нахождение решения $\tilde{y}(x)$ по существу к алгебраическим операциям).

Число $a+ib$ будем называть *контрольным числом* правой части (2).

I. Рассмотрим сначала случай, когда

$$q(x) = P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m.$$

Этот случай получается из общего при $a=0$ и $b=0$, так, что контрольным числом будет $a+ib = 0+i0 = 0$. Для этого случая имеет место **теорема.**

1. Если контрольное число 0 не является корнем характеристического уравнения $\varphi(\lambda) = 0$, т. е. уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \qquad (*)$$

то уравнение (1) имеет частное решение вида

$$\tilde{y}(x) = Q_m(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m.$$

2. Если контрольное число 0 является корнем кратности k характеристического уравнения (*), то уравнение (1) имеет частное решение вида

$$\tilde{y}(x) = x^k\tilde{Q}_m(x).$$

▶ 1. По условию 0 не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, $a_n \neq 0$. Станем искать частное решение уравнения (1) в виде:

$$\tilde{y}(x) = Q_m(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m,$$

где $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-2}, A_{m-1}, A_m$ — пока неизвестные коэффициенты. Подставив это выражение для $\tilde{y}(x)$ в уравнение

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-2}y'' + a_{n-1}y' + a_ny =$$
$$= b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

и приравняв в получаемом тождестве коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получим систему уравнений:

$$\begin{array}{l|l}
x^m & a_nA_0 = b_0, \\
x^{m-1} & a_nA_1 + a_{n-1}mA_0 = b_1, \\
x^{m-2} & a_nA_2 + a_{n-1}(m-1)A_1 + a_{n-2}m(m-1)A_0 = b_2, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^0 & a_nA_m + a_{n-1}A_{m-1} + \ldots = b_m.
\end{array}\Bigg\} \qquad (3)$$

Отметим, что система (3) совместная и определенная. В самом деле, так как $a_n \neq 0$, то из первого уравнения системы (3) находим A_0. Подставив найденное значение A_0 во второе уравнение системы (3), находим A_1. Затем из третьего уравнения находим A_2, и т. д. Наконец, из последнего уравнения системы (3) найдем A_m. Найдя коэффициенты $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$, мы тем самым найдем частное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения $L(y) = P_m(x)$.

Замечание. Изложенный способ доказательства является практическим способом построения решения $\tilde{y}(x)$.

2. По условию 0 является корнем кратности k характеристического уравнения (*). Это означает, что в уравнении (*)

$$a_n = 0, a_{n-1} = 0, a_{n-2} = 0, \ldots, a_{n-(k-1)} = 0, \text{ но } a_{n-k} \neq 0.$$

Следовательно, исходное дифференциальное уравнение имело вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-k} y^{(k)} = P_m(x). \qquad (1')$$

Видим, что в уравнение (1′) не входят явно $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$. Поэтому делаем замену: $y^{(k)} = u(x)$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно функции $u(x)$ уравнение (1′) примет вид

$$u^{(n-k)} + a_1 u^{(n-1-k)} + \ldots + a_{n-k} u = P_m(x). \qquad (1'')$$

Так как в уравнении (1″) $a_{n-k} \neq 0$, то мы имеем здесь дело со случаем, уже рассмотренным в пункте 1. Следовательно, уравнение (1″) имеет частное решение $\tilde{u}(x)$ вида

$$\tilde{u}(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m.$$

У нас $u(x) = y^{(k)}$. Поэтому для нахождения решения $\tilde{y}(x)$ уравнения (1′) нам следует решить уравнение

$$\tilde{y}^{(k)}(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m.$$

Выражение для $\tilde{y}(x)$ мы получим в результате последовательных интегрирований k раз. Принимая во внимание, что нам нужно найти лишь какое-нибудь частное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения (1′), мы можем произвольные постоянные, которые будут появляться при последовательных интегрированиях, считать равными нулю. А тогда для $\tilde{y}(x)$ получится следующее выражение:

$$\tilde{y}(x) = x^k (D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + \ldots + D_{m-1} x + D_m) = x^k \tilde{Q}_m(x). \blacktriangleleft$$

II. Рассмотрим теперь случай, когда $q(x) = e^{ax} P_m(x)$. Этот случай получается из общего при $b = 0$, так что контрольным числом будет $a + ib = a + i0 = a$. Для этого случая имеет место **теорема**:

1. Если контрольное число a не является корнем характеристического уравнения $\varphi(\lambda)=0$, т. е. уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-2}\lambda^2 + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \qquad (*)$$

то уравнение $L(y)=e^{ax}P_m(x)$ имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = e^{ax}Q_m(x) = e^{ax}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m).$$

2. Если контрольное число a является корнем кратности k характеристического уравнения (*), то уравнение $L(y)=e^{ax}P_m(x)$ имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = x^k e^{ax}\tilde{Q}_m(x) = x^k e^{ax}(D_0x^m + D_1x^{m-1} + \ldots + D_{m-1}x + D_m).$$

▶ В уравнении $L(y)=e^{ax}P_m(x)$ сделаем замену: $y=e^{ax}u(x)$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Мы знаем, что

$$L(e^{ax}u) = e^{ax}\left[\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}u^{(n)} + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}u^{(n-1)} + \ldots + \frac{\varphi'(a)}{1!}u' + \varphi(a)u\right]$$

(такое выражение для $L(e^{ax}u)$ было получено нами в §9 при построении фундаментальной системы решений однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами).

Сделав замену и произведя сокращение на e^{ax}, получим относительно функции $u(x)$ следующее уравнение:

$$\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}u^{(n)} + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}u^{(n-1)} + \ldots + \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}u^{(k)} + \frac{\varphi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}u^{(k-1)} +$$

$$+ \ldots + \frac{\varphi'(a)}{1!}u' + \varphi(a)u = P_m(x).$$

1. Пусть число a не является корнем характеристического уравнения (*), т.е. $\varphi(a)\neq 0$. Тогда, по доказанному ранее (см. случай I), полученное уравнение имеет частное решение $\tilde{u}(x)=Q_m(x)$, и, следовательно, исходное уравнение $L(y)=e^{ax}P_m(x)$ имеет частное решение

$$\tilde{y}(x) = e^{ax}\tilde{u}(x) = e^{ax}Q_m(x).$$

2. Пусть число a является корнем кратности k характеристического уравнения (*). Но тогда

$$\varphi(a)=0,\ \varphi'(a)=0,\ \ldots,\ \varphi^{(k-1)}(a)=0,\ \varphi^{(k)}(a)\neq 0,$$

и, следовательно, преобразованное уравнение будет таким:

$$\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}u^{(n)}+\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}u^{(n-1)}+\ \dots\ +\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}u^{(k)}=P_m(x).$$

А такое уравнение, по доказанному ранее (см. случай I), имеет частное решение $\tilde{u}(x)=x^k\tilde{Q}_m(x)$. Следовательно, исходное уравнение $L(y)=e^{ax}P_m(x)$ имеет частное решение

$$\tilde{y}(x)=e^{ax}\tilde{u}(x)=x^k e^{ax}\tilde{Q}_m(x). \blacktriangleleft$$

III. Рассмотрим, наконец, случай, когда $q(x)=$ $=e^{ax}\left[P_m(x)\cos bx+P_l(x)\sin bx\right]$. Предполагается, что $b\neq 0$, $P_m(x)$ и $P_l(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами степеней m и l соответственно и такие, что $P_m^2(x)+P_l^2(x)\not\equiv 0$. Предполагается также, что оператор L имеет вещественные коэффициенты $a_1, \dots, a_n$. Имеет место **теорема**.

1. Если контрольное число $a+ib$ не является корнем характеристического уравнения $\varphi(\lambda)=0$, т. е. уравнения

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ \dots\ +a_{n-1}\lambda+a_n=0, \qquad (*)$$

то уравнение $L(y)=e^{ax}\left[P_m(x)\cos bx+P_l(x)\sin bx\right]$ имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x)=e^{ax}\left[Q_\mu(x)\cos bx+\tilde{Q}_\mu(x)\sin bx\right],$$

где $Q_\mu(x)$ и $\tilde{Q}_\mu(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами, а $\mu=\max\{m,l\}$. (Хотя бы один из полиномов $Q_\mu(x)$, $\tilde{Q}_\mu(x)$ имеет степень μ.)

2. Если контрольное число $a+ib$ является корнем кратности k характеристического уравнения (*), то уравнение $L(y)=$ $=e^{ax}\left[P_m(x)\cos bx+P_l(x)\sin bx\right]$ имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x)=x^k e^{ax}\left[Q_\mu(x)\cos bx+\tilde{Q}_\mu(x)\sin bx\right].$$

$\blacktriangleright$ Преобразуем правую часть уравнения $L(y)=e^{ax}\left[P_m(x)\cos bx+\right.$ $\left.+P_l(x)\sin bx\right]$, воспользовавшись формулами Эйлера:

$$\cos bx=\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2};\ \sin bx=\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}=\frac{ie^{-ibx}-ie^{ibx}}{2}.$$

Будем иметь

$$q(x)=e^{ax}\left[\underbrace{\frac{P_m(x)-iP_l(x)}{2}}_{=\Phi_\mu(x)}e^{ibx}+\underbrace{\frac{P_m(x)+iP_l(x)}{2}}_{=\bar{\Phi}_\mu(x)}e^{-ibx}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(x)=e^{(a+ib)x}\Phi_\mu(x)+e^{(a-ib)x}\bar{\Phi}_\mu(x)=e^{\gamma x}\Phi_\mu(x)+e^{\bar{\gamma}x}\bar{\Phi}_\mu(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(x)=q_1(x)+q_2(x)\text{, где } q_1(x)=e^{\gamma x}\Phi_\mu(x), q_2(x)=\bar{q}_1(x).$$

Значит, исходное уравнение можно переписать в виде

$$L(y)=q_1(x)+q_2(x)\text{, где } q_2(x)=\bar{q}_1(x). \tag{4}$$

Мы знаем, что если функция $\psi_1(x)$ есть решение уравнения

$$L(y)=q_1(x), \tag{4_1}$$

а функция $\psi_2(x)$ есть решение уравнения

$$L(y)=q_2(x), \tag{4_2}$$

то функция $\psi(x)=\psi_1(x)+\psi_2(x)$ есть решение уравнения (4). Рассмотрим уравнение (4_1):

$$L(y)=e^{\gamma x}\Phi_\mu(x)=e^{(a+ib)x}\Phi_\mu(x).$$

(4_1) есть уравнение, рассмотренное в пункте II. А тогда:

1. Если число $\gamma=a+ib$ не является корнем характеристического уравнения (*), то уравнение (4_1) имеет частное решение вида

$$\psi_1(x)=e^{(a+ib)x}\Phi_\mu^*(x).$$

2. Если число $\gamma=a+ib$ является корнем кратности k характеристического уравнения (*), то уравнение (4_1) имеет частное решение вида

$$\psi_1(x)=x^k e^{(a+ib)x}\Phi_\mu^*(x).$$

Отметим, что $\Phi_\mu^*(x)$ — полином степени μ, т. е. той же степени, что и полином $\Phi_\mu(x)$. Так как $\Phi_\mu(x)$ имеет комплексные коэффициенты, то и $\Phi_\mu^*(x)$ имеет комплексные коэффициенты. Следовательно, $\Phi_\mu^*(x)=U_\mu(x)+iV_\mu(x)$, где $U_\mu(x)$ и $V_\mu(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами степени $\le\mu$, причем хотя бы один из них имеет степень μ.

Рассмотрим теперь уравнение (4_2):

$$L(y)=e^{(a-bi)x}\bar{\Phi}_\mu(x).$$

Правая часть этого уравнения комплексно сопряжена с правой частью уравнения (4_1). Покажем, что $\psi_2(x) = \bar{\psi}_1(x)$ (здесь $\psi_2(x)$ — решение уравнения (4_2)). Представим решение $\psi_1(x)$ в виде $\psi_1(x) = \psi_{11}(x) + i\psi_{12}(x)$, где $\psi_{11}(x)$ и $\psi_{12}(x)$ — вещественные функции вещественного аргумента x. Тогда $\bar{\psi}_1(x) = \psi_{11}(x) - i\psi_{12}(x)$. Так как $\psi_1(x)$ есть решение уравнения (4_1), то

$$L(\psi_1(x)) = L(\psi_{11}(x) + i\psi_{12}(x)) \equiv L(\psi_{11}(x)) + iL(\psi_{12}(x)) \equiv q_1(x).$$

Перейдем в последнем тождестве к комплексно сопряженным величинам. Получим

$$L(\psi_{11}(x)) - iL(\psi_{12}(x)) \equiv \bar{q}_1(x) \Leftrightarrow L(\psi_{11}(x) - i\psi_{12}(x)) \equiv q_2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L(\bar{\psi}_1(x)) \equiv q_2(x) \Rightarrow \psi_2(x) = \bar{\psi}_1(x).$$

Так как $\psi_1(x)$ — решение уравнения (4_1), а $\psi_2(x)(=\bar{\psi}_1(x))$ — решение уравнения (4_2), то функция

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) = \psi_1(x) + \bar{\psi}_1(x) = 2\operatorname{Re}\psi_1(x)$$

есть решения уравнения (4). Имеем

$$e^{(a+ib)x}\Phi^*_\mu(x) = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\left(U_\mu(x) + iV_\mu(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left[e^{(a+ib)x}\Phi^*_\mu(x)\right] = e^{ax}\left(U_\mu(x)\cos bx - V_\mu(x)\sin bx\right).$$

Поэтому:

1) Если $(a+ib)$ не является корнем характеристического уравнения (*), то уравнение $L(y) = e^{ax}\left[P_m(x)\cos bx + P_l(x)\sin bx\right]$ имеет частное решение

$$\tilde{y}(x) = 2e^{ax}\left[U_\mu(x)\cos bx - V_\mu(x)\sin bx\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x) = e^{ax}\left(Q_\mu(x)\cos bx + \tilde{Q}_\mu(x)\sin bx\right).$$

Здесь $Q_\mu(x) = 2U_\mu(x)$, $\tilde{Q}_\mu(x) = -2V_\mu(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами.

2) Если $a+ib$ является корнем кратности k характеристического уравнения (*), то уравнение $L(y) = e^{ax}\left[P_m(x)\cos bx + P_l(x)\sin bx\right]$ имеет частное решение

$$\tilde{y}(x) = 2x^k e^{ax}\left[U_\mu(x)\cos bx - V_\mu(x)\sin bx\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x) = x^k e^{ax}\left(Q_\mu(x)\cos bx + \tilde{Q}_\mu(x)\sin bx\right). \blacktriangleleft$$

§11. Уравнение Эйлера

Так называется линейное дифференциальное уравнение вида
$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = q(x), \quad (1)$$
где $a, b, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — постоянные числа. Видим, что (1) есть уравнение с переменными коэффициентами специального вида.

Покажем, что уравнение (1) приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замен:

1) $ax+b=e^t$, если $ax+b>0$, и 2) $ax+b=-e^t$, если $ax+b<0$.

Для определенности рассмотрим случай, когда $ax+b>0$. В этом случае полагаем
$$ax+b=e^t \Rightarrow x'_t = \frac{1}{a}e^t \Rightarrow \frac{1}{x'_t} = ae^{-t}.$$

А тогда
$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y'_x = y'_t ae^{-t};$$
$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y''_{x^2} = (y'_t ae^{-t})'_t \cdot ae^{-t} \Rightarrow y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)a^2e^{-2t};$$
$$y'''_{x^3} = (y''_{x^2})'_x = (y''_{x^2})'_t \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y'''_{x^3} = \left[(y''_{t^2} - y'_t)a^2e^{-2t}\right]'_t ae^{-t} =$$
$$= (y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t)a^3e^{-3t}.$$

Видим, что выражение для y'_x содержит множитель ae^{-t}; выражение для y''_{x^2} содержит множитель a^2e^{-2t}; выражение для y'''_{x^3} содержит множитель a^3e^{-3t}. (Множители в скобках представляют собой линейные комбинации производных от функции y по переменной t.)

Предположим, что
$$y^{(k)}_{x^k} = (y^{(k)}_{t^k} + \alpha_1 y^{(k-1)}_{t^{k-1}} + \alpha_2 y^{(k-2)}_{t^{k-2}} + \ldots + \alpha_{k-1} y'_t)a^k e^{-kt}, \qquad (*)$$
где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ — постоянные числа. Тогда
$$y^{(k+1)}_{x^{k+1}} = \left(y^{(k)}_{x^k}\right)'_x = \left(y^{(k)}_{x^k}\right)'_t \frac{1}{x'_t} = \left(y^{(k)}_{x^k}\right)'_t ae^{-t} \Rightarrow y^{(k+1)}_{x^{k+1}} =$$
$$= a^{k+1}e^{-(k+1)t}\left[\left(y^{(k+1)}_{t^{k+1}} + \alpha_1 y^{(k)}_{t^k} + \ldots + \alpha_{k-1} y''_{t^2}\right) - \right.$$

$$-k\left(y^{(k)}_{t^k}+\alpha_1 y^{(k-1)}_{t^{k-1}}+\ldots+\alpha_{k-1}y'_t\right)\Big]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{(k+1)}_{x^{k+1}}=a^{k+1}e^{-(k+1)t}\left(y^{(k+1)}_{t^{k+1}}+\beta_1 y^{(k)}_{t^k}+\ldots+\beta_k y'_t\right),$$

где $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$ — постоянные числа.

Переход от k к $k+1$ сделан. Для $k=1,2,3$ соотношение (*) установлено непосредственно. В силу перехода от k к $k+1$ оно верно для $k=4,5,\ldots,n$. Следовательно, будем иметь, например:

$$y^{(n)}_{x^n}=a^n e^{-nt}\left(y^{(n)}_{t^n}+\gamma_1 y^{(n-1)}_{t^{n-1}}+\ldots+\gamma_{n-1}y'_t\right).$$

При подстановке найденных выражений для $y'_x, y''_{x^2},\ldots,y^{(n)}_{x^n}$ в уравнение (1) надлежит умножить y'_x на $a_{n-1}(ax+b)=a_{n-1}e^t$; y''_{x^2} на $a_{n-2}(ax+b)^2=a_{n-2}e^{2t}$, , $y^{(n)}_{x^n}$ на $(ax+b)^n=e^{nt}$. При этом показательные множители исчезнут и мы получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами относительно функции $y(t)$:

$$\tilde{L}(y(t))=\tilde{q}(t).$$

§12. Примеры и задачи по теме: "Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка"

Задача 1. Решить уравнение $y''+y'-2y=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-2.$$

Фундаментальная система решений: $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=e^{-2x}$. Следовательно, общее решение исходного уравнения будет таким:

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

Задача 2. Решить уравнение $y''-2y'=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2-2\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=2.$$

Фундаментальная система решений: $y_1(x)=e^{\lambda_1x}=1$, $y_2(x)=e^{\lambda_2x}=$ $=e^{2x}$; $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1+C_2e^{2x}$ — общее решение исходного уравнения.

Задача 3. Решить уравнение $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i.$$

Фундаментальная система решений: $y_1(x) = e^{2x}\cos x$, $y_2(x) = e^{2x}\sin x$; $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x$ — общее решение исходного уравнения.

Задача 4. Решить уравнение $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 - 3i, \lambda_2 = -1 + 3i.$$

Фундаментальная система решений: $y_1(x) = e^{-x}\cos 3x$, $y_2(x) = e^{-x}\sin 3x$. $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{-x}\cos 3x + C_2 e^{-x}\sin 3x$ — общее решение исходного уравнения.

Задача 5. Решить уравнение $y'' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Фундаментальная система решений: $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$. $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ — общее решение исходного уравнения.

Задача 6. Решить уравнение $y''' - 8y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 + i\sqrt{3}, \lambda_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Фундаментальная система решений: $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-x}\cos\left(x\sqrt{3}\right)$, $y_3(x) = e^{-x}\sin\left(x\sqrt{3}\right)$;

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) =$$

$$= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}\cos\left(x\sqrt{3}\right) + C_3 e^{-x}\sin\left(x\sqrt{3}\right)$$

— общее решение исходного уравнения.

Задача 7. Решить уравнение $y^{(4)} - y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 1 = 0$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -i$, $\lambda_4 = i$. Фундаментальная система решений: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{x}$, $y_3(x) = \cos x$, $y_4(x) = \sin x$.

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x) + C_4y_4(x) =$$
$$= C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

— общее решение исходного уравнения.

Задача 8. Решить уравнение $y^{(6)} + 64y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + 64 = 0 \Rightarrow \lambda^6 = -2^6 \Rightarrow \lambda = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}},\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda = \sqrt{3} \pm i,\ \lambda = \pm 2i,\ \lambda = -\sqrt{3} \pm i.$$

Фундаментальная система решений:

$$e^{x\sqrt{3}}\cos x,\ e^{x\sqrt{3}}\sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ e^{-x\sqrt{3}}\cos x,\ e^{-x\sqrt{3}}\sin x.$$

$$y = C_1e^{x\sqrt{3}}\cos x + C_2e^{x\sqrt{3}}\sin x + C_3\cos 2x +$$
$$+ C_4\sin 2x + C_5e^{-x\sqrt{3}}\cos x + C_6e^{-x\sqrt{3}}\sin x$$

— общее решение исходного уравнения.

Задача 9. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Фундаментальная система решений: e^x, xe^x. $y = C_1e^x + C_2xe^x$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 10. Решить уравнение $4y'' + 4y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Фундаментальная система решений: $e^{-\frac{x}{2}}$, $xe^{-\frac{x}{2}}$. $y = C_1e^{-\frac{x}{2}} + C_2xe^{-\frac{x}{2}}$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 11. Решить уравнение $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^3(\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = \lambda_5 = 3.$$

Фундаментальная система решений: $1, x, x^2, e^{3x}, xe^{3x}$.

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5xe^{3x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 12. Решить уравнение $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 10\lambda^3 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^4 - 10\lambda^2 + 9) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 3, \lambda_5 = -3.$$

Фундаментальная система решений: $1, e^x, e^{-x}, e^{3x}, e^{-3x}$.

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + C_4e^{3x} + C_5e^{-3x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 13. Решить уравнение $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = i, \lambda_3 = \lambda_4 = -i.$$

Фундаментальная система решений: $\cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x$.

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3x\cos x + C_4x\sin x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 14. Решить уравнение $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Фундаментальная система решений: e^x, xe^x, x^2e^x. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 15. Решить уравнение $y''' - y'' - y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

Фундаментальная система решений: e^x, xe^x, e^{-x}. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x}$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 16. Решить уравнение $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1.$$

Фундаментальная система решений: $e^{2x}, e^{-2x}, e^{x}, e^{-x}$.

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{x} + C_4e^{-x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 17. Решить уравнение $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2i, \lambda_4 = \lambda_5 = -2i.$$

Фундаментальная система решений: 1, $\cos 2x$, $\sin 2x, x\cos 2x, x\sin 2x$.

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 x \cos 2x + C_5 x \sin 2x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 18. Решить уравнение $y''' - 3y' + 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2.$$

Фундаментальная система решений: e^{x}, xe^{x}, e^{-2x}. $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} +$ $+ C_3e^{-2x}$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 19. Решить уравнение $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i\sqrt{3}, \lambda_4 = -i\sqrt{3}.$$

Фундаментальная система решений: $\cos x$, $\sin x$, $\cos\left(x\sqrt{3}\right)$, $\sin\left(x\sqrt{3}\right)$.

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos\left(x\sqrt{3}\right) + C_4 \sin\left(x\sqrt{3}\right)$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 20. Решить уравнение $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Решение. Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения будет таким:

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Найдем теперь частное решение заданного неоднородного уравнения. Для этого выпишем контрольное число $a + ib$. Для заданного уравнения: $a + ib = 4 + i0 = 4$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = Ae^{4x}.$$

Имеем $\tilde{y}' = 4Ae^{4x}$, $\tilde{y}'' = 16Ae^{4x}$. Подставляем выражения для $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}'(x)$, $\tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$16Ae^{4x} - 8Ae^{4x} - 3Ae^{4x} \equiv e^{4x} \Rightarrow 5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x) = \frac{1}{5}e^{4x}$. А тогда $y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 21. Решить уравнение $y'' + y = 4xe^x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения будет таким:

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a + ib = 1 + i0 = 1$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида $\tilde{y}(x) = (Ax + B)e^x$. Имеем

$$\tilde{y}'(x) = (Ax + B + A)e^x; \tilde{y}''(x) = (Ax + B + 2A)e^x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$(Ax+B+2A)e^x+(Ax+B)e^x \equiv 4xe^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2Ax+2B+2A \equiv 4x \Rightarrow \begin{cases} 2A=4, \\ 2B+2A=0 \end{cases} \Rightarrow A=2,\ B=-2.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x)=(2x-2)e^x$. А тогда

$$y=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+(2x-2)e^x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 22. Решить уравнение $y''-y=2e^x-x^2$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y''-y=0$. Имеем

$$\lambda^2-1=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения будет таким:

$$\bar{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

1. Рассматриваем уравнение $y''-y=2e^x$.

Контрольным числом для этого уравнения является $a+ib=1+i0=1$. Видим, что контрольное число является корнем кратности $k=1$ характеристического уравнения (*). Значит, рассматриваемое уравнение имеет частное решение

$$\tilde{y}_1(x)=x\cdot Ae^x \Rightarrow \tilde{y}_1'(x)=(Ax+A)e^x,\ \tilde{y}_1''=(Ax+2A)e^x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_1''(x)$ в уравнение $y''-y=2e^x$. Получаем

$$(Ax+2A)e^x-Axe^x \equiv 2e^x \Rightarrow 2A=2 \Rightarrow A=1.$$

Таким образом, получили $\tilde{y}_1(x)=xe^x$.

2. Рассматриваем уравнение $y''-y=-x^2$.

Контрольным числом для этого уравнения является $a+ib=0+i0=0$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, рассматриваемое уравнение имеет частное решение $\tilde{y}_2(x)$ вида

$$\tilde{y}_2(x)=Ax^2+Bx+C \Rightarrow \tilde{y}_2'=2Ax+B,\ \tilde{y}_2''=2A.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_2(x)$ и $\tilde{y}_2''(x)$ в уравнение $y''-y=-x^2$. Получаем

$$2A - Ax^2 - Bx - C \equiv -x^2 \Rightarrow \begin{array}{l|rcl} x^2 & -A=-1 & \Rightarrow & A=1; \\ x & -B=0 & \Rightarrow & B=0; \\ x^0 & 2A-C=0 & \Rightarrow & C=2. \end{array}$$

Таким образом, получили $\tilde{y}_2(x) = x^2 + 2$.

Частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения будет, следовательно, таким:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = xe^x + x^2 + 2.$$

А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 23. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Следовательно,

$$\bar{y}(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a + ib = 1 + i0 = 1$. Видим, что контрольное число является корнем кратности $k = 1$ характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решения $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{y}'(x) = \left[Ax^2 + (2A + B)x + B\right]e^x,$$

$$\tilde{y}''(x) = \left[Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B)\right]e^x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x), \tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$[6Ax + (2A + 3B)]e^x \equiv 3xe^x \Rightarrow 6Ax + (2A + 3B) \equiv 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \mid 6A = 3 \\ x^0 \mid 2A + 3B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x)=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)e^x$. А тогда $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+$ $+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)e^x$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 24. Решить уравнение $y''-3y'+2y=\sin x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y''-3y'+2y=0$. Имеем

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow\ \lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Следовательно,

$$\bar{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a+ib=0+i1=i$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x)=A\cos x+B\sin x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\tilde{y}'=-A\sin x+B\cos x,\tilde{y}''=-A\cos x-B\sin x.$$

Подставляем в заданное уравнение выражения для $\tilde{y},\tilde{y}',\tilde{y}''$. Получаем

$$(A-3B)\cos x+(3A+B)\sin x\equiv\sin x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{array}{l|l}\cos x & A-3B=0,\\ \sin x & 3A+B=1\end{array}\Bigg\}\Rightarrow A=\frac{3}{10},\ B=\frac{1}{10}.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x)=\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x$. А тогда

$$y=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 25. Решить уравнение $y''+y=4\sin x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y''+y=0$. Имеем

$$\lambda^2+1=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$. Следовательно, $\bar{y}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a+ib=0+i\cdot 1=i$. Видим, что контрольное число является корнем кратности $k=1$ характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x)=x(A\cos x+B\sin x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}'=(A+Bx)\cos x+(B-Ax)\sin x,$$

$$\tilde{y}''=(2B-Ax)\cos x-(2A+Bx)\sin x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x), \tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$2B\cos x-2A\sin x\equiv 4\sin x\Rightarrow \left.\begin{array}{l|l}\cos x & 2B=0\\ \sin x & -2A=4\end{array}\right\}\Rightarrow A=-2,\ B=0.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x)=-2x\cos x$. А тогда

$$y=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 26. Решить уравнение $y''-5y'+4y=4x^2e^{2x}$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y''-5y'+4y=0$. Имеем

$$\lambda^2-5\lambda+4=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1=1$, $\lambda_2=4$. Следовательно, $\bar{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{4x}$. Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a+ib=2+i0=2$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x)=(Ax^2+Bx+C)e^{2x}\Rightarrow \tilde{y}'=\left[2Ax^2+(2A+2B)x+(B+2C)\right]e^{2x},$$

$$\tilde{y}''=\left[4Ax^2+(8A+4B)x+(2A+4B+4C)\right]e^{2x}.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x), \tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$\left[-2Ax^2-(2A+2B)x+(2A-B-2C)\right]e^{2x}\equiv 4x^2e^{2x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2Ax^2-(2A+2B)x+(2A-B-2C)\equiv 4x^2\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r|l} x^2 & -2A=4 \\ \Rightarrow x & -(2A+2B)=0 \\ x^0 & 2A-B-2C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=-2,\ B=2,\ C=-3.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x)=-(2x^2-2x+3)$. А тогда

$$y=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{4x}-(2x^2-2x+3)$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 27. Решить уравнение $y''-3y'+2y=x\cos x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y''-3y'+2y=0$. Имеем

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Следовательно,

$$\bar{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a+ib=0+i\cdot 1=i$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x)=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}'=(Cx+D+A)\cos x-(Ax+B-C)\sin x,$$

$$\tilde{y}''=-(Ax+B-2C)\cos x-(Cx+D+2A)\sin x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x), \tilde{y}''(x)$. Получаем

$$[(A-3C)x+(B+2C-3A-3D)]\cos x+$$

$$+[(3A+C)x+3B+D-2A-3C]\sin x\equiv x\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} \cos x & (A-3C)x+(B+2C-3A-3D)\equiv x \\ \sin x & (3A+C)x+(3B+D-2A-3C)\equiv 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A-3C=1, \\ 3A+C=0, \\ B+2C-3A-3D=0, \\ 3B+D-2A-3C=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A=0{,}1,\ C=-0{,}3,\ B=-0{,}12,\ D=-0{,}34.$

Следовательно, $\tilde{y}(x) = (0{,}1x - 0{,}12)\cos x - (0{,}3x + 0{,}34)\sin x$. А тогда $y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (0{,}1x - 0{,}12)\cos x - (0{,}3x + 0{,}34)\sin x$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 28. Решить уравнение $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' - 4y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

1. Рассмотрим уравнение $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$. Найдем частное решение $\tilde{y}_1(x)$ этого уравнения. Контрольным числом рассматриваемого уравнения является $a + ib = -4 + i0 = -4$. Видим, что контрольное число есть корень характеристического уравнения (*) кратности $k = 1$. Следовательно, частное решение $\tilde{y}_1(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}_1(x) = x \cdot Ae^{-4x} \Rightarrow \tilde{y}_1' = (A - 4Ax)e^{-4x}, \tilde{y}_1'' = (16Ax - 8A)e^{-4x}.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_1'(x), \tilde{y}_1''(x)$ в уравнение: $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$. Получаем

$$-5Ae^{-4x} \equiv e^{-4x} \Rightarrow A = -\frac{1}{5}.$$

Значит, $\tilde{y}_1(x) = -\frac{x}{5}e^{-4x}$.

2. Рассмотрим уравнение $y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}$. Найдем частное решение $\tilde{y}_2(x)$ этого уравнения. Контрольным числом рассматриваемого уравнения является $a + ib = -1 + i0 = -1$. Видим, что оно не является корнем характеристического уравнения (*). Следовательно, $\tilde{y}_2(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}_2(x) = (Ax + B)e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_2'(x) = (-Ax + A - B)e^{-x}, \tilde{y}_2''(x) = (Ax + B - 2A)e^{-x}.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_2, \tilde{y}_2', \tilde{y}_2''$ в уравнение $y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}$. Получаем

$$(-6Ax + A - 6B)e^{-x} \equiv xe^{-x} \Rightarrow -6Ax + A - 6B \equiv x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} x & -6A=1 \\ x^0 & A-6B=0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A=-\frac{1}{6},\ B=-\frac{1}{36}.$$

Значит, $\tilde{y}_2(x)=-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{-x}$. А тогда

$$y=\bar{y}(x)+\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-4x}-\frac{x}{5}e^{-4x}-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{-x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 29. Решить уравнение $y''+2y'-3y=x^2e^x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y''+2y'-3y=0$. Имеем

$$\lambda^2+2\lambda-3=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1=1$, $\lambda_2=-3$. Следовательно,

$$\bar{y}(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}.$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Контрольным числом заданного уравнения является $a+ib=1+i0=1$. Видим, что контрольное число есть корень характеристического уравнения кратности $k=1$. Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x)=x(Ax^2+Bx+C)e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}'=\left[Ax^3+(B+3A)x^2+(2B+C)x+C\right]e^x,$$

$$\tilde{y}''=\left[Ax^3+(B+6A)x^2+(6A+4B+C)x+(2B+2C)\right]e^x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y},\tilde{y}',\tilde{y}''$ в заданное уравнение. Получаем

$$\left[12Ax^2+(6A+8B)x+(2B+4C)\right]e^x\equiv x^2e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12Ax^2+(6A+8B)x+(2B+4C)\equiv x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} x^2 & 12A=1 \\ x & 6A+8B=0 \\ x^0 & 2B+4C=0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A=\frac{1}{12},\ B=-\frac{1}{16},\ C=\frac{1}{32}.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x)=\left(\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{16}+\frac{x}{32}\right)e^x$. А тогда

$$y=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{-3x}+\left(\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{16}+\frac{x}{32}\right)e^x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 30. Решить уравнение $y''-4y'+8y=e^{2x}+\sin 2x$.

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y''-4y'+8y=0$. Имеем

$$\lambda^2-4\lambda+8=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1=2+2i$, $\lambda_2=2-2i$. Следовательно, $\bar{y}(x)=C_1e^{2x}\cos 2x+$ $+C_2e^{2x}\sin 2x$.

1. Рассматриваем уравнение $y''-4y'+8y=e^{2x}$. Контрольным числом этого уравнения является $a+ib=2+i0=2$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Значит, частное решение $\tilde{y}_1(x)$ уравнения $y''-4y'+8y=e^{2x}$ имеет вид

$$\tilde{y}_1(x)=Ae^{2x}\Rightarrow \tilde{y}_1'=2Ae^{2x}, \tilde{y}_1''=4Ae^{2x}.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_1, \tilde{y}_1', \tilde{y}_1''$ в уравнение $y''-4y'+8y=e^{2x}$. Получаем

$$4Ae^{2x}=e^{2x}\Rightarrow A=\frac{1}{4}.$$

Значит, $\tilde{y}_1(x)=\frac{1}{4}e^{2x}$.

2. Рассматриваем уравнение $y''-4y'+8y=\sin 2x$. Контрольным числом этого уравнения является $a+ib=0+i2=2i$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому частное решение $\tilde{y}_2(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}_2(x)=A\cos 2x+B\sin 2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_2'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x, \tilde{y}_2''(x)=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_2, \tilde{y}_2', \tilde{y}_2''$ в уравнение $y''-4y'+8y=\sin 2x$. Получаем

$$(4A-8B)\cos 2x+(4B+8A)\sin 2x\equiv\sin 2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} \cos 2x & 4A-8B=0 \\ \sin 2x & 4B+8A=1 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A=\frac{1}{10},\ B=\frac{1}{20}.$$

Следовательно, $\tilde{y}_2(x)=\frac{1}{10}\cos 2x+\frac{1}{20}\sin 2x$. А тогда

$$y=\bar{y}(x)+\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)=$$

$$=C_1e^{2x}\cos 2x+C_2e^{2x}\sin 2x+0{,}25\,e^{2x}+0{,}1\cos 2x+0{,}05\sin 2x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 31. Решить уравнение $y''-9y=e^{3x}\cos x$.

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-9y=0$. Имеем

$$\lambda^2-9=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1=3$, $\lambda_2=-3$. Следовательно, $\bar{y}(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Контрольным числом заданного уравнения является $a+ib=3+i$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому частное решение $\tilde{y}(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}(x)=e^{3x}(A\cos x+B\sin x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}'=[(3A+B)\cos x+(3B-A)\sin x]e^{3x},$$

$$\tilde{y}''=[(8A+6B)\cos x+(8B-6A)\sin x]e^{3x}.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x),\tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$[(6B-A)\cos x-(B+6A)\sin x]e^{3x}\equiv e^{3x}\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (6B-A)\cos x-(B+6A)\sin x\equiv\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} \cos x & 6B-A=1 \\ \sin x & B+6A=0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A=-\frac{1}{37},\ B=\frac{6}{37}.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x)=e^{3x}\left(\frac{6}{37}\sin x-\frac{1}{37}\cos x\right)$. А тогда

$$y=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+e^{3x}\left(\frac{6}{37}\sin x-\frac{1}{37}\cos x\right)$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 32. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$.
Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Контрольным числом заданного уравнения является $a + ib = 1 + i0 = 1$. Видим, что контрольное число является корнем кратности $k = 2$ характеристического уравнения (*). Поэтому частное решение $\tilde{y}(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}(x) = x^2(Ax + B)e^x \Rightarrow \tilde{y}' = \left[Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx\right]e^x,$$

$$\tilde{y}'' = \left[Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B\right]e^x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в заданное уравнение. Получаем

$$(6Ax + 2B)e^x \equiv 6xe^x \Rightarrow 6Ax + 2B \equiv 6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r|l} x & 6A = 6 \\ x^0 & 2B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1, B = 0.$$

Значит, $\tilde{y}(x) = x^3 e^x$. А тогда $y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^3 e^x$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 33. Решить уравнение $y'' + y = x \sin x$.

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Контрольным числом заданного уравнения является $a + ib = 0 + i \cdot 1 = i$. Видим, что контрольное число является корнем характеристического уравнения (*) кратности $k = 1$. Поэтому частное решение $\tilde{y}(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}(x) = x\left[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}' = \left[Cx^2 + (2A + D)x + B\right]\cos x + \left[-Ax^2 + (2C - B)x + D\right]\sin x.$$

$$\tilde{y}'' = \left[-Ax^2 + (4C - B)x + (2A + 2D)\right]\cos x +$$
$$+\left[-Cx^2 - (4A + D)x + (2C - 2B)\right]\sin x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x), \tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$[4Cx + (2A + 2D)]\cos x + [-4Ax + (2C - 2B)]\sin x \equiv x\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} \cos x & 4Cx + (2A + 2D) \equiv 0 \\ \sin x & -4Ax + (2C - 2B) \equiv x \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r|c} x & 4C = 0 \\ x^0 & 2A + 2D = 0 \\ x & -4A = 1 \\ x^0 & 2C - 2B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{4},\ B = 0,\ C = 0,\ D = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\tilde{y}(x) = -\dfrac{x^2}{4}\cos x + \dfrac{x}{4}\sin x$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 34. Решить уравнение $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Контрольным числом заданного уравнения является $a + ib = 2 + i\cdot 0 = 2$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому частное решение $\tilde{y}(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}(x) = (Ax + B)e^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}' = [2Ax + (A + 2B)]\,e^{2x},\ \tilde{y}'' = [4Ax + (4A + 4B)]\,e^{2x}.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x), \tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$[16Ax + (8A + 16B)]\,e^{2x} \equiv xe^{2x} \Rightarrow 16Ax + (8A + 16B) \equiv x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 16A=1 \\ x^0 & 8A+16B=0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A=\frac{1}{16},\ B=-\frac{1}{32}.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x)=\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{32}\right)e^{2x}$. А тогда

$$y=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{32}\right)e^{2x}.$$

Задача 35. Решить уравнение $y''-5y'=3x^2+\sin 5x$.

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-5y'=0$. Имеем

$$\lambda^2-5\lambda=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1=0$, $\lambda_2=5$. Следовательно, $\bar{y}(x)=C_1+C_2e^{5x}$.

1. Рассмотрим уравнение $y''-5y'=3x^2$. Найдем частное решение $\tilde{y}_1(x)$ этого уравнения. Контрольным числом для рассматриваемого уравнения является $a+ib=0+i\cdot 0=0$. Видим, что контрольное число есть корень характеристического уравнения (*) кратности $k=1$. Поэтому частное решение $\tilde{y}_1(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}_1(x)=x(Ax^2+Bx+C)\Rightarrow \tilde{y}_1'=3Ax^2+2Bx+C,\tilde{y}''=6Ax+2B.$$

Подставляем $\tilde{y}_1',\tilde{y}_1''$ в уравнение $y''-5y'=3x^2$. Получаем

$$-15Ax^2+(6A-10B)x+(2B-5C)\equiv 3x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c} x^2 & -15A=3 \\ x & 6A-10B=0 \\ x^0 & 2B-5C=0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A=-\frac{1}{5},\ B=-\frac{3}{25},\ C=-\frac{6}{125}.$$

Следовательно, $\tilde{y}_1(x)=-0{,}2x^3-0{,}12x^2-0{,}048x$.

2. Рассмотрим уравнение $y''-5y'=\sin 5x$. Найдем частное решение $\tilde{y}_2(x)$ этого уравнения. Контрольным числом для рассматриваемого уравнения является $a+ib=0+i\cdot 5=5i$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому частное решение $\tilde{y}_2(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}_2(x)=A\cos 5x+B\sin 5x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_2'(x)=-5A\sin 5x+5B\cos 5x,\tilde{y}_2''(x)=-25A\cos 5x-25B\sin 5x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_2', \tilde{y}_2''$ в уравнение $y'' - 5y' = \sin 5x$. Получаем

$$-25(A+B)\cos 5x + 25(A-B)\sin 5x \equiv \sin 5x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l|l} \cos 5x & -25(A+B) = 0 \\ \sin 5x & 25(A-B) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 0{,}02,\ B = -0{,}02.$$

Следовательно, $\tilde{y}_2(x) = 0{,}02\cos 5x - 0{,}02\sin 5x$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) =$$

$$= C_1 + C_2e^{5x} - 0{,}2x^3 - 0{,}12x^2 - 0{,}048x + 0{,}02\cos 5x - 0{,}02\sin 5x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 36. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ $\left(q(x) = \dfrac{e^x}{x}\right)$.

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1e^x + C_2xe^x$ $(y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x)$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Искать частное решение $\tilde{y}(x)$ будем методом вариации произвольных постоянных. (Правая часть заданного уравнения $q(x)$ не является функцией специального вида.) Итак, полагаем

$$\tilde{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \Rightarrow \tilde{y}(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'y_1(x) + C_2'y_2(x) = 0, \\ C_1'y_1'(x) + C_2'y_2'(x) = q(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'e^x + C_2'xe^x = 0, \\ C_1'e^x + C_2'(x+1)e^x = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = -1,\ C_2'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow C_1(x) = -x,\ C_2(x) = \ln|x|$$

(произвольные постоянные, которые получаются при этом, считаем равными нулю). Таким образом, получаем $\tilde{y}(x) = -xe^x + {}$ $+ x\ln|x| \cdot e^x$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1e^x + C_2xe^x - xe^x + x\ln|x| \cdot e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^x + \tilde{C}_2 x e^x + x e^x \ln|x|$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 37. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$ $\left(q(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}\right)$.

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ $(y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{-2x})$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагаем $\tilde{y}(x) = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-2x}$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-2x} = 0, \\ -C_1'(x) e^{-x} - 2C_2'(x) e^{-2x} = \dfrac{1}{e^x + 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, \; C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1).$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = -\int \frac{e^x \cdot e^x dx}{e^x + 1} = \left[e^x = t\right] =$$

$$= -\big(t - \ln(t + 1)\big) = -e^x + \ln(e^x + 1).$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{y}(x) = e^{-x} \ln(e^x + 1) + e^{-2x}\left[\ln(e^x + 1) - e^x\right].$$

А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x} \ln(e^x + 1) +$$

$$+ e^{-2x}\left[\ln(e^x + 1) - e^x\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \tilde{C}_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1)$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 38. Решить уравнение $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ $\left(q(x) = \frac{1}{\sin x}\right)$.

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ ($y_1(x) = \cos x,\ y_2(x) = \sin x$).

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагаем $\tilde{y}(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow C_1'(x) = -1,\ C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = -x,\ C_2(x) = \ln|\sin x|.$$

Таким образом, получаем $\tilde{y}(x) = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 39. Решить уравнение $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$ ($q(x) = 2\operatorname{tg} x$).

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ ($y_1(x) = \cos 2x,\ y_2(x) = \sin 2x$).

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагаем $\tilde{y}(x) = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = 2\operatorname{tg} x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1' = -2\sin^2 x,\ C_2' = \frac{\sin x \cos 2x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - x,\ C_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \ln|\cos x|.$$

Таким образом,

$$\tilde{y}(x) = \left(\frac{1}{2}\sin 2x - x\right)\cos 2x - \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \ln|\cos x|\right)\sin 2x.$$

А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sin 2x - x\right)\cos 2x - \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \ln|\cos x|\right)\sin 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1\cos 2x - x\cos 2x + C_2\sin 2x + \sin 2x \ln|\cos x|.$$

Задача 40. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$ ($q(x) = \dfrac{3\sqrt{x+1}}{e^x}$).

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 2y' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ ($y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$).

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагаем $\tilde{y}(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)(1-x)e^{-x} = 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = -3x\sqrt{x+1},\ C_2'(x) = 3\sqrt{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = -\frac{6}{5}(x+1)^{5/2} + 2(x+1)^{3/2},\ C_2(x) = 2(x+1)^{3/2}.$$

Таким образом,

$$\tilde{y}(x) = e^{-x}\left[-\frac{6}{5}(x+1)^{5/2} + 2(x+1)^{3/2} + 2x(x+1)^{3/2}\right] = \frac{4}{5}(x+1)^{5/2}e^{-x}.$$

А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{4}{5}(x+1)^{5/2}e^{-x}.$$

Задача 41. Решить уравнение $y'' + y = 2\sec^3 x$ ($q(x) = \dfrac{2}{\cos^3 x}$).

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$ ($y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$).

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагаем $\tilde{y}(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{2}{\cos^3 x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = -2\frac{\sin x}{\cos^3 x},\ C_2'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x},\ C_2(x) = 2\operatorname{tg} x.$$

Таким образом,

$$\tilde{y}(x) = -\frac{1}{\cos x} + \frac{2\sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow \tilde{y}(x) = -\frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 42. Решить уравнение $x^3(y'' - y) = x^2 - 2 \Rightarrow \; y'' - y = = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$. Считаем $x \neq 0$ ($q(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$).

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' - y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 1 = 0 \tag{*}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ ($y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$).

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать решение $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагаем $\tilde{y}(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0, \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-x},\; C_2'(x) = \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x}\right)e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \int \frac{e^{-x}}{2x}dx - \int \frac{e^{-x}}{x^3}dx.$$

Но

$$\int \frac{e^{-x}}{x^3}dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x}, & du = -e^{-x}dx \\ dv = \frac{dx}{x^3}, & v = -\frac{1}{2x^2} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2x^2} - \int \frac{e^{-x}}{2x^2}dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x}, & du = -e^{-x}dx \\ dv = \frac{dx}{2x^2}, & v = -\frac{1}{2x} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2x^2} + \frac{e^{-x}}{2x} + \int \frac{e^{-x}}{2x}dx.$$

Поэтому $C_1(x)=\frac{e^{-x}}{2x^2}-\frac{e^{-x}}{2x}$. Совершенно аналогично находим $C_2(x)=-\frac{e^{x}}{2x^2}-\frac{e^{x}}{2x}$. Таким образом, $\tilde{y}(x)=\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}\right)+\left(-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{x}$. А тогда

$$y=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{x}.$$

Задача 43. Решить уравнение $x^2y''-4xy'+6y=0$.

Решение. Видим, что заданное уравнение есть уравнение Эйлера. Поэтому:

1) Для $x>0$ делаем замену: $x=e^t$. Тогда

$$x'_t=e^t,\ y'_x=y'_t\cdot t'_x=\frac{y'_t}{x'_t}\Rightarrow y'_x=y'_te^{-t};$$

$$y''_{x^2}=(y'_x)'_x=(y'_x)'_t\cdot t'_x=(y'_te^{-t})'_te^{-t}=(y''_{t^2}-y'_t)e^{-2t}.$$

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид

$$y''_{t^2}-y'_t-4y'_t+6y=0\Rightarrow y''_{t^2}-5y'_t+6y=0.$$

2) Для $x<0$ делаем замену:

$$x=-e^t\Rightarrow x'_t=-e^t,\ y'_x=y'_t\frac{1}{x'_t}=-y'_te^{-t},$$

$$y''_{x^2}=(-y'_te^{-t})'_t\frac{1}{x'_t}=(-y''_{t^2}e^{-t}+y'_te^{-t})(-e^{-t})=(y''_{t^2}-y'_t)e^{-2t}.$$

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение будет иметь тот же вид: $y''_{t^2}-5y'_t+6y=0$. Таким образом, как для $x>0$, так и для $x<0$, получили одно и то же линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем общее решение $\bar{y}(t)$ полученного уравнения. Имеем

$$\lambda^2-5\lambda+6=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1=2$, $\lambda_2=3$. Следовательно, $\bar{y}(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$. Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим $\bar{y}(x)=C_1x^2+C_2x^3$.

Задача 44. Решить уравнение $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

1) для $x > 0$: $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$.

2) для $x < 0$: $y'_x = -y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$.

В обоих случаях относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_{t^2} - 2y'_t - 3y = 0$. Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем общее решение $\bar{y}(t)$ полученного уравнения. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$. Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим $\bar{y} = \dfrac{C_1}{x} + C_2x^3$.

Задача 45. Решить уравнение $x^3y''' + xy' - y = 0$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

1) для $x > 0$: $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$, $y'''_{x^3} = (y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t)e^{-3t}$;

2) для $x < 0$: $y'_x = -y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$, $y'''_{x^3} = -(y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t)e^{-3t}$.

В обоих случаях относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 3y'_t - y = 0$. Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем общее решение $\bar{y}(t)$ полученного уравнения. Имеем

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t$. Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим

$$\bar{y} = C_1x + C_2x\ln|x| + C_3x\ln^2|x|.$$

Задача 46. Решить уравнение $x^2y''' = 2y'$.

Решение. Заданное уравнение для $x \neq 0$ равносильно уравнению $x^3y''' - 2xy' = 0$, которое является уравнением Эйлера. Делаем замену: $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$. Тогда:

1) для $x > 0$: $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y'''_{x^3} = (y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t)e^{-3t}$;

2) для $x < 0$: $y'_x = -y'_t e^{-t}$, $y'''_{x^3} = -(y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t)e^{-3t}$.

В обоих случаях относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} = 0$. Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем общее решение $\bar{y}(t)$ полученного уравнения. Имеем

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 3) = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 + C_2t + C_3e^{3t}$. Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим

$$\bar{y} = C_1 + C_2 \ln|x| + C_3x^3.$$

Задача 47. Решить уравнение $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. При обычной замене независимой переменной x будем иметь:

1) для $x > 0$: $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$.

2) для $x < 0$: $y'_x = -y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$.

Заданное уравнение относительно функции $y(t)$ принимает вид $y''_{t^2} - 2y'_t + y = \pm 8e^{3t}$ (знак "+" при $x > 0$ и знак "−" при $x < 0$). Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.

Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_{t^2} - 2y'_t + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1e^t + C_2te^t$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения. Контрольным числом рассматриваемого уравнения является

$a+ib=3+i0=3$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Следовательно, $\tilde{y}(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}(t)=Ae^{3t}\Rightarrow \tilde{y}'_t=3Ae^{3t},\tilde{y}''_{t^2}=9Ae^{3t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y},\tilde{y}'_t,\tilde{y}''_{t^2}$ в уравнение $y''_{t^2}-2y'_t+y=\pm 8e^{3t}$, получаем $4Ae^{3t}\equiv\pm 8e^{3t}\Rightarrow A=\pm 2$. Таким образом, $\tilde{y}(t)=\pm 2e^{3t}$. А тогда

$$y(t)=\bar{y}(t)+\tilde{y}(t)=C_1e^t+C_2te^t\pm 2e^{3t}.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим $y(x)=C_1x+C_2x\ln|x|+2x^3$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 48. Решить уравнение $x^2y''+xy'+4y=10x$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x=e^t$ для $x>0$ и $x=-e^t$ для $x<0$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

1) для $x>0$: $y'_x=y'_te^{-t}$, $y''_{x^2}=(y''_{t^2}-y'_t)e^{-2t}$.

2) для $x<0$: $y'_x=-y'_te^{-t}$, $y''_{x^2}=(y''_{t^2}-y'_t)e^{-2t}$.

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_{t^2}+4y=\pm 10e^t$ (знак "+" для $x>0$ и знак "−" для $x<0$). Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.

Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_{t^2}+4y=0$. Имеем

$$\lambda^2+4=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1=2i$, $\lambda_2=-2i$. Следовательно, $\bar{y}(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения. Контрольным числом рассматриваемого неоднородного уравнения является $a+ib=1+i\cdot 0=1$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Следовательно, $\tilde{y}(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}(t)=Ae^t\Rightarrow \tilde{y}'_t(t)=Ae^t,\tilde{y}''_{t^2}(t)=Ae^t.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''_{t^2}$ в уравнение $y''_{t^2}+4y=\pm 10e^t$, получаем $5Ae^t\equiv\pm 10e^t\Rightarrow A=\pm 2$. Таким образом, $\tilde{y}(t)=\pm 2e^t$. А тогда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \pm 2e^t.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим

$$y(x) = C_1 \cos\left(2\ln|x|\right) + C_2 \sin\left(2\ln|x|\right) + 2x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 49. Решить уравнение $x^3 y'' - 2xy = 6\ln x$.

Решение. Из вида уравнения заключаем, что оно определено для $x > 0$. Для $x > 0$ заданное уравнение равносильно уравнению $x^2 y'' - 2y = 6\dfrac{\ln x}{x}$, которое является уравнением Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ ($\Rightarrow \ln x = t$). При такой замене будем иметь $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$. Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_{t^2} - y'_t - 2y = 6te^{-t}$. Получили линейное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.

Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_{t^2} - y'_t - 2y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1. \qquad (*)$$

Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения. Контрольным числом рассматриваемого неоднородного уравнения является $a + ib = -1 + i0 = -1$. Видим, что контрольное число есть корень характеристического уравнения (*) кратности $k = 1$. Поэтому $\tilde{y}(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}(t) = t(At + B)e^{-t} \Rightarrow \tilde{y}'_t(t) = \left[-At^2 + (2A - B)t + B\right]e^{-t},$$

$$\tilde{y}''_{t^2} = \left[At^2 + (B - 4A)t + (2A - 2B)\right]e^{-t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}'_t, \tilde{y}''_{t^2}$ в уравнение $y''_{t^2} - y'_t - 2y = 6te^{-t}$, получаем

$$[-6At + (2A - 3B)]e^{-t} \equiv 6te^{-t} \Rightarrow -6At + (2A - 3B) \equiv 6t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l|c} t & -6A = 6 \\ t^0 & 2A - 3B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -1, B = -\frac{2}{3}.$$

Таким образом, $\tilde{y}(t)=-\left(t^2+\frac{2}{3}t\right)e^{-t}$. А тогда

$$y(t)=\bar{y}(t)+\tilde{y}(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-\left(t^2+\frac{2}{3}t\right)e^{-t}.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим

$$y(x)=C_1x^2+\frac{C_2}{x}-\left(\ln^2 x+\frac{2}{3}\ln x\right)\frac{1}{x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 50. Решить уравнение $x^2y''-3xy'+5y=3x^2$.

Решение. Замечаем, что данное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x=e^t$ для $x>0$ и $x=-e^t$ для $x<0$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

1) для $x>0$: $y'_x=y'_te^{-t}$, $y''_{x^2}=(y''_{t^2}-y'_t)e^{-2t}$.

2) для $x<0$: $y'_x=-y'_te^{-t}$, $y''_{x^2}=(y''_{t^2}-y'_t)e^{-2t}$.

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_{t^2}-4y'_t+5y=3e^{2t}$. Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида. Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_{t^2}-4y'_t+5y=0$. Имеем

$$\lambda^2-4\lambda+5=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1=2+i$, $\lambda_2=2-i$. Следовательно, $\bar{y}(t)=C_1e^{2t}\cos t+C_2e^{2t}\sin t$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения. Характеристическим числом рассматриваемого неоднородного уравнения является $a+ib=2+i0=2$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения (*). Следовательно, $\tilde{y}(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}(t)=Ae^{2t} \Rightarrow \tilde{y}'_t=2Ae^{2t}, \tilde{y}''_{t^2}=4Ae^{2t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y},\tilde{y}'_t,\tilde{y}''_{t^2}$ в уравнение $y''_{t^2}-4y'_t+5y=3e^{2t}$, получаем $Ae^{2t}\equiv 3e^{2t}$ $\Rightarrow$ $A=3$. Таким образом, $\tilde{y}(t)=3e^{2t}$. А тогда

$$y(t)=\bar{y}(t)+\tilde{y}(t)=C_1e^{2t}\cos t+C_2e^{2t}\sin t+3e^{2t}.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим

$$y(x) = C_1 x^2 \cos\left(\ln|x|\right) + C_2 x^2 \sin\left(\ln|x|\right) + 3x^2 .$$

Задача 51. Решить уравнение $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$.

Решение. Замечаем что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

1) для $x > 0$: $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$.

2) для $x < 0$: $y'_x = -y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$.

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_{t^2} - y'_t - 6y = \pm 5e^{3t} + 8e^{2t}$. Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида. Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_{t^2} - y'_t - 6y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$. Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения.

1) Рассмотрим уравнение $y''_{t^2} - y'_t - 6y = \pm 5e^{3t}$. Контрольным числом этого уравнения является $a + ib = 3 + i \cdot 0 = 3$. Это контрольное число есть корень кратности $k = 1$ характеристического уравнения (*). Следовательно, частное решение $\tilde{y}_1(t)$ рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\tilde{y}_1(t) = Ate^{3t} \Rightarrow \tilde{y}_1' = (3At + A)e^{3t}, \tilde{y}_1'' = (9At + 6A)e^{3t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}_1, \tilde{y}_1', \tilde{y}_1''$ в уравнение $y''_{t^2} - y'_t - 6y = \pm 5e^{3t}$, получаем $5Ae^{3t} \equiv \pm 5e^{3t} \Rightarrow A = \pm 1$. Значит, $\tilde{y}_1(t) = \pm te^{3t}$.

2) Рассмотрим уравнение $y''_{t^2} - y'_t - 6y = 8e^{2t}$. Контрольным числом этого уравнения является $a + ib = 2 + i \cdot 0 = 2$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Следовательно, частное решение $\tilde{y}_2(t)$ рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\tilde{y}_2(t) = Ae^{2t} \Rightarrow \tilde{y}_2' = 2Ae^{2t}, \tilde{y}_2'' = 4Ae^{2t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}_2, \tilde{y}_2', \tilde{y}_2''$ в уравнение $y''_{t^2} - y'_t - 6y = 8e^{2t}$, получаем $-4Ae^{2t} \equiv 8e^{2t} \Rightarrow A = -2$. Значит, $\tilde{y}_2(t) = -2e^{2t}$. А тогда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-2t} \pm te^{3t} - 2e^{2t}.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим

$$y(x) = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} + x^3 \ln|x| - 2x^2.$$

Задача 52. Решить уравнение $x^2y'' - 2y = \sin(\ln x)$.

Решение. Из вида уравнения заключаем, что оно определено для $x > 0$ и что оно есть уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ ($\Rightarrow t = \ln x$). При такой замене будем иметь $y'_x = y'_te^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$. Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_{t^2} - y'_t - 2y = \sin t$. Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида. Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_{t^2} - y'_t - 2y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-t}$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения. Контрольным числом рассматриваемого неоднородного уравнения является $a + ib = 0 + i \cdot 1 = i$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому $\tilde{y}(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}(t) = A\cos t + B\sin t \Rightarrow \tilde{y}'_t = -A\sin t + B\cos t, \tilde{y}''_{t^2} = -A\cos t - B\sin t.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в уравнение $y''_{t^2} - y'_t - 2y = \sin t$, получим

$$-(3A + B)\cos t + (A - 3B)\sin t \equiv \sin t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l|l} \cos t & 3A + B = 0 \\ \sin t & A - 3B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 0{,}1,\ B = -0{,}3.$$

Значит, $\tilde{y}(t) = 0{,}1\cos t - 0{,}3\sin t$. А тогда

$$y(t)=\bar{y}(t)+\tilde{y}(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}+0{,}1\cos t-0{,}3\sin t.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим

$$y(x)=C_1x^2+\frac{C_2}{x}+0{,}1\cos(\ln x)-0{,}3\sin(\ln x).$$

Задача 53. Решить уравнение $(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x-2=e^t$, если $x>2$, и $x-2=-e^t$, если $x<2$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

1) для $x>2$: $y'_x=y'_te^{-t}$, $y''_{x^2}=(y''_{t^2}-y'_t)e^{-2t}$.

2) для $x<2$: $y'_x=-y'_te^{-t}$, $y''_{x^2}=(y''_{t^2}-y'_t)e^{-2t}$.

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_{t^2}-4y'_t+4y=2\pm e^t$ (знак "+" для $x>2$ и знак "−" для $x<2$). Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.

Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_{t^2}-4y'_t+4y=0$. Имеем

$$\lambda^2-4\lambda+4=0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2$. Следовательно, $\bar{y}(t)=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения.

1) Рассмотрим уравнение $y''_{t^2}-4y'_t+4y=2$. Контрольным числом этого уравнения является $a+ib=0+i0=0$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому $\tilde{y}_1(t)$ имеет вид $\tilde{y}_1(t)=A\Rightarrow\tilde{y}_1'=0,\tilde{y}_1''=0$. Подставляя эти выражения для $\tilde{y}_1,\tilde{y}_1',\tilde{y}_1''$ в уравнение $y''_{t^2}-4y'_t+4y=2$, получим $4A=2\Rightarrow A=\frac{1}{2}$. Таким образом, $\tilde{y}_1(t)=\frac{1}{2}$.

2) Рассмотрим уравнение $y''_{t^2}-4y'_t+4y=\pm e^t$. Контрольным числом этого уравнения является $a+ib=1+i0=1$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому $\tilde{y}_2(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}_2(t)=Ae^t\Rightarrow\tilde{y}_2'=Ae^t,\tilde{y}_2''=Ae^t.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}_2, \tilde{y}_2', \tilde{y}_2''$ в уравнение $y_{t^2}'' - 4y_t' + 4y = \pm e^t$, получим $Ae^t \equiv \pm e^t \Rightarrow A = \pm 1$. Таким образом, $\tilde{y}_2(t) = \pm e^t$. А тогда

$$y(t) = \overline{y}(t) + \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + \frac{1}{2} \pm e^t.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получаем

$$y(x) = C_1(x-2)^2 + C_2(x-2)^2 \ln|x-2| + \frac{1}{2} + (x-2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = C_1(x-2)^2 + C_2(x-2)^2 \ln|x-2| + x - \frac{3}{2}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 54. Решить уравнение $(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: 1) $2x + 3 = e^t$ для $x > -\frac{3}{2}$ и 2) $2x + 3 = -e^t$ для $x < -\frac{3}{2}$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

1) для $x > -\frac{3}{2}$:

$$y_x' = y_t' \cdot 2e^{-t}, y_{x^2}'' = (y_{t^2}'' - y_t') \cdot 4e^{-2t}, y_{x^3}''' = (y_{t^3}''' - 3y_{t^2}'' + 2y_t') \cdot 8e^{-3t};$$

2) для $x < -\frac{3}{2}$:

$$y_x' = -y_t' \cdot 2e^{-t}, y_{x^2}'' = (y_{t^2}'' - y_t') \cdot 4e^{-2t}, y_{x^3}''' = -(y_{t^3}''' - 3y_{t^2}'' + 2y_t') \cdot 8e^{-3t}.$$

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид

$$8y_{t^3}''' - 24y_{t^2}'' + 22y_t' - 6y = 0 \Leftrightarrow 4y_{t^3}''' - 12y_{t^2}'' + 11y_t' - 3y = 0.$$

Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Имеем

$$4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 11\lambda - 3 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{3}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\overline{y}(t) = C_1e^t + C_2e^{\frac{3}{2}t} + C_3e^{\frac{1}{2}t}$.

Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим

$$\bar{y}(x) = C_1|2x+3| + C_2|2x+3|^{3/2} + C_3|2x+3|^{1/2}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 55. Решить уравнение $x^2y'' - xy' + y = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{\ln x}$.

Решение. Из вида уравнения заключаем, что оно определено для $x > 0$. Видим, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ ($\Rightarrow \ln x = t$). При такой замене будем иметь $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}$. Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_{t^2} - 2y'_t + y = te^{-t} + \dfrac{e^t}{t}$. Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_{t^2} - 2y'_t + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1e^t + C_2te^t$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения.

1) Рассмотрим уравнение $y''_{t^2} - 2y'_t + y = te^{-t}$. (Правая часть этого уравнения есть функция специального вида.) Контрольным числом рассматриваемого неоднородного уравнения является $a + ib = -1 + i\cdot 0 = -1$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения. Поэтому $\tilde{y}_1(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}_1(t) = (At+B)e^{-t} \Rightarrow \tilde{y}_1' = [-At + (A-B)]e^{-t}, \tilde{y}_1'' = [At + (B-2A)]e^{-t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}_1, \tilde{y}_1', \tilde{y}_1''$ в уравнение $y''_{t^2} - 2y'_t + y = te^{-t}$, получаем

$$[4At + 4(B-A)]e^{-t} \equiv te^{-t} \Rightarrow 4At + 4(B-A) \equiv t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} t & 4A = 1 \\ t^0 & 4(B-A) = 0 \end{array} \Rightarrow A = \frac{1}{4},\ B = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, $\tilde{y}_1(t) = \dfrac{1}{4}(t+1)e^{-t}$.

2) Рассмотрим уравнение $y''_{t^2} - 2y'_t + y = \dfrac{e^t}{t}$. Правая часть этого уравнения не является функцией специального вида. Поэтому его частное решение $\tilde{y}_2(t)$ будем искать методом вариации произвольных постоянных. Полагаем $\tilde{y}_2(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)te^t$. Функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + C_2'(t)te^t = 0, \\ C_1'(t)e^t + C_2'(t)(1+t)e^t = \dfrac{e^t}{t} \end{cases} \Rightarrow C_1'(t) = -1,\ C_2'(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(t) = -t,\ C_2(t) = \ln|t|.$$

Таким образом, $\tilde{y}_2(t) = -te^t + te^t \ln|t|$. А тогда

$$y(t) = \overline{y}(t) + \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = C_1e^t + C_2te^t + \frac{t+1}{4}e^{-t} + te^t\ln|t| - te^t.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим

$$y(x) = C_1x + C_2x\ln x + \frac{1+\ln x}{4x} + x\ln x\left(\ln|\ln x| - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1x + x\ln x\left(\tilde{C}_2 + \ln|\ln x|\right) + \frac{1+\ln x}{4x}.$$

Глава 4

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

§1. Непосредственное применение ряда Тейлора

Класс дифференциальных уравнений, решения которых выражаются через элементарные функции или интегрирование которых приводится к квадратурам, сравнительно невелик. Очень часто встречаются уравнения, не принадлежащие указанному классу, и тогда приходится прибегать к приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений и к получению решений в виде рядов.

Одним из основных среди этих методов является метод получения решения в виде степенного ряда — ряда Тейлора для этого решения. Изложим сущность этого метода на уравнении первого порядка.

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

и пусть требуется найти его решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \tag{2}$$

т. е. $\varphi(x_0) = y_0$. Будем предполагать, что искомое решение $y = \varphi(x)$ разложимо в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \frac{\varphi'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{\varphi''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots. \tag{3}$$

Но чтобы написать это разложение решения $y=\varphi(x)$ в ряд Тейлора (3), нужно знать коэффициенты разложения. Отметим, что их можно найти с помощью данного дифференциального уравнения (1) и начального условия (2). В самом деле, в силу начального условия (2), имеем $\varphi(x_0)=y_0$, где y_0 — заданное число.

Если теперь в уравнении (1) положить $x=x_0$ и в соответствии с этим $y=y_0$, то оно определит значение y'_0 производной $\varphi'(x)$ искомой функции $\varphi(x)$ при $x=x_0$ (так как функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1)), и мы получим

$$y'_0=\varphi'(x_0)=f(x_0,y_0).$$

Продифференцируем по x обе части уравнения (1), помня, что y и y' являются функциями от x. Будем иметь

$$y''=f'_x(x,y)+f'_y(x,y)\cdot y'. \qquad (4)$$

Положив теперь в правой части (4) $x=x_0$ и в соответствии с этим $y=y_0$, $y'=y'_0$, мы получим в левой части (4)

$$y''(x_0)=\varphi''(x_0)=f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)y'_0$$

и т. д. Так последовательно мы определим все коэффициенты в ряде (3).

Отметим, что если функция $f(x,y)$ разложима в ряд по степеням $(x-x_0)$ и $(y-y_0)$ в некотором прямоугольнике $P=\begin{cases}x_0-a<x<x_0+a,\\ y_0-b<y<y_0+b,\end{cases}$ то решение $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2), представимо степенным рядом (3). Этот ряд во всяком случае сходится при x, удовлетворяющих условию: $x_0-h<x<x_0+h$, где $h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$, а M — наибольшее значение $|f(x,y)|$ в прямоугольнике $(\bar{P})=\begin{cases}x_0-a\le x\le x_0+a,\\ y_0-b\le y\le y_0+b.\end{cases}$

Пример. Найти решение уравнения $y'=x+y^2$, удовлетворяющее условию $y|_{x=0}=0$ (здесь $x_0=0$, $y_0=0$).

Ряд Тейлора для искомого решения $y=\varphi(x)$ будет рядом Маклорена:

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}x+\frac{\varphi''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Из начального условия следует, что $\varphi(0)=y_0=0$. Из заданного уравнения находим $y'(0)=\varphi'(0)=f(0,0)=0$. Дифференцируя по x обе части заданного уравнения, находим

$$y''=1+2yy' \Rightarrow y''(0)=\varphi''(0)=1.$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$y'''=2(y')^2+2yy'' \Rightarrow y'''(0)=\varphi'''(0)=0.$$

Далее,

$$y^{(4)}=6y'y''+2yy''' \Rightarrow y^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(0)=0,$$

$$y^{(5)}=6(y'')^2+8y'y'''+2yy^{(4)} \Rightarrow y^{(5)}(0)=\varphi^{(5)}(0)=6,$$

и т. д. Таким образом, находим

$$y=\varphi(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{6x^5}{5!}+\ \ldots$$

Здесь числа a и b можно брать любыми, так как $f(x,y)=x+y^2$ уже представлена разложенной по степеням x и y при любых x и y. При этом $M=\max\left|x+y^2\right|=a+b^2$ и, следовательно, за сходимость ряда, представляющего решение $y=\varphi(x)$ при $|x|<h$ ($h=\min\left\{a,\ \dfrac{b}{a+b^2}\right\}$), можно ручаться.

§2. Метод неопределенных коэффициентов

В некоторых случаях для интегрирования дифференциальных уравнений более удобным оказывается метод неопределенных коэффициентов. Особенно удобен он в применении к линейным дифференциальным уравнениям. (В большинстве случаев решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами порядка выше первого не выражаются через элементарные функции и квадратуры.) Проиллюстрируем метод неопределенных коэффициентов на уравнении второго порядка вида

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \qquad (1)$$

Предположим, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1) представлены степенными рядами:

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,\ q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k. \qquad (2)$$

Пусть R_1 и R_2 — радиусы сходимости рядов (2) соответственно. Станем искать решение уравнения (1) также в виде степенного ряда:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \Rightarrow \tag{3}$$

$$\Rightarrow y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}, y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2}.$$

Подставляя выражения для $y(x), y'(x), y''(x)$ в уравнение (1) и требуя, чтобы это уравнение удовлетворялось, получим тождество:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \equiv 0. \tag{4}$$

После перемножения и сложения рядов в левой части тождества (4) мы получим степенной ряд, который должен тождественно равняться нулю. Следовательно, все коэффициенты и свободный член полученного ряда должны равняться нулю. Приравнивая нулю эти коэффициенты, получим уравнения:

$$\left.\begin{array}{l|l}
x^0 & 2\cdot 1\cdot c_2 + a_0 c_1 + b_0 c_0 = 0, \\
x^1 & 3\cdot 2\cdot c_3 + 2a_0 c_2 + a_1 c_1 + b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0, \\
x^2 & 4\cdot 3\cdot c_4 + 3a_0 c_3 + 2a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Если оставить c_0 и c_1 произвольными (они будут играть роль произвольных постоянных), то первое уравнение системы (5) позволит определить c_2, второе затем — c_3, следующее — c_4 и т. д. Все они выразятся через c_0 и c_1. Подставив найденные коэффициенты в ряд (3), мы получим решение уравнения (1), которое содержит две произвольные постоянные и будет общим. В вычислительном отношении удобно находить сразу не общее, а два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, определяемых соответственно начальными условиями

$$\begin{aligned} y_1\big|_{x=0} &= 1, \quad y_1'\big|_{x=0} = 0, \\ y_2\big|_{x=0} &= 0, \quad y_2'\big|_{x=0} = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Выбор начальных условий для $y_1(x)$ означает, что в ряде $y_1(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$, для которого $y_1' = c_1 + 2c_2 x + \ldots$, положено $c_0 = 1$ и $c_1 = 0$. Выбор начальных условий для $y_2(x)$ означает, что в ряде $y_2(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots$, для которого $y_2'=c_1+2c_2x+\dots$, положено $c_0=0$ и $c_1=1$.

Отметим, что полученные таким образом $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, так как их определитель Вронского $W(y_1,y_2)$ отличен от нуля при $x=0$.

$$W(y_1,y_2)\big|_{x=0}=\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1(\neq 0).$$

Общее решение уравнения (1) можно написать теперь в виде $y=\tilde{C}_1y_1(x)+\tilde{C}_2y_2(x)$, где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ — произвольные постоянные.

Замечание. Выше был показан алгоритм построения ряда (3). При этом не обсуждалось: будет ли ряд сходиться и для каких x он будет решением уравнения (1)?

Ответ на эти вопросы дает следующая **теорема**, которую мы примем без доказательства.

Пусть ряды (2) имеют радиусы сходимости R_1 и R_2 соответственно и пусть $R=\min\{R_1,R_2\}$. Тогда для $x\in(-R,R)$ построенный указанным выше способом ряд (3) сходится и его сумма является решением уравнения (1). (При этом следует подчеркнуть, что старший коэффициент в уравнении (1) равен единице.)

Пример. Решить уравнение $y''+xy'+y=0$.

Решение. Здесь $p(x)=x$, $q(x)=1$. Ищем решение заданного уравнения в виде

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m.$$

Тогда $y'=\sum\limits_{m=1}^{\infty}mc_mx^{m-1}$, $y''=\sum\limits_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mx^{m-2}$. Подставляя выражения для y,y',y'' в заданное уравнение, получим

$$\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mx^{m-2}+x\sum_{m=1}^{\infty}mc_mx^{m-1}+\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m\equiv 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_kx^k\equiv 0\Leftrightarrow$$

(Здесь в сумме $\sum\limits_{m=2}^{\infty}m(m-1)c_mx^{m-2}$ изменен индекс суммирования.

Положено $m-2=k$. Тогда $m=k+2$, $m-1=k+1$; значению $m=2$ соответствует значение $k=0$.)

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2}+(k+1)c_k\right]x^k \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ (коэффициенты степенного ряда равны нулю).

Получаем, таким образом, следующую систему уравнений для определения коэффициентов c_k, $k=0,1,2,\ldots$.

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}+(k+1)c_k=0 \Leftrightarrow (k+2)c_{k+2}+c_k=0. \qquad (*)$$

1) Положим в (*): $c_0=1$, $c_1=0$; находим

$$c_2=-\frac{1}{2}, c_3=0, c_4=-\frac{1}{4}c_2=\frac{1}{2\cdot 4}, c_5=0, c_6=-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}, \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{2m+1}=0, c_{2m}=\frac{(-1)^m}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2m)}, m=1,2,3,\ldots .$$

Следовательно,

$$y_1(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots+\frac{(-1)^m x^{2m}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2m)}+\ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1(x)=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3+\ldots=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2) Второе решение, линейно независимое с $y_1(x)$, найдем, положив в (*): $c_0=0$, $c_1=1$. Будем иметь

$$c_2=0, c_4=0, c_6=0, \ldots, c_{2m}=0,$$

$$c_3=-\frac{1}{3}, c_5=\frac{1}{3\cdot 5}, c_7=-\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}, \ldots,$$

$$c_{2m+1}=\frac{(-1)^m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2m+1)}, m=0,1,2,\ldots .$$

Следовательно, $y_2(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!!}$. А тогда $y=\tilde{C}_1 y_1(x)+\tilde{C}_2 y_2(x)$,

где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ — произвольные постоянные, есть общее решение заданного уравнения.

Так как ряды для $p(x)$ и $q(x)$ сходятся при всех конечных значениях x, то и ряды для $y_1(x)$ и $y_2(x)$ сходятся при всех конечных x, и суммы этих рядов являются решениями заданного уравнения при всех конечных x.

Замечание. Метод неопределенных коэффициентов, показанный здесь для линейного уравнения, применим и для нелинейных уравнений. Отыскивая решение заданного нелинейного уравнения в виде степенного ряда, мы подставляем в это уравнение вместо y сумму ряда (3) и затем, производя операции, показанные уравнением, стремимся получить тождественное равенство степенных рядов, откуда будет следовать равенство коэффициентов при одинаковых степенях x в этих рядах.

Это даст нам уравнения для последовательного определения коэффициентов ряда (3). Так мы получим формально ряд (3). Если затем будет установлено, что он сходится в некотором промежутке, то его сумма будет представлять решение заданного уравнения в этом промежутке.

§3. Уравнение Бесселя. Его интегрирование с помощью обобщенного степенного ряда

1°. *Уравнением Бесселя* называется линейное однородное дифференциальное уравнение вида

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \; (p \geq 0). \qquad (1)$$

Поскольку уравнение (1) не изменяется при замене в нем x на $(-x)$, то станем рассматривать его лишь для положительных значений x. Если записать уравнение (1) в виде

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0,$$

то заметим, что коэффициенты этого уравнения не разлагаются в ряды по положительным степеням x, и поэтому нельзя утверждать, что можно найти решение уравнения (1) в виде степенного ряда.

Станем искать решение уравнения (1) не в виде степенного ряда, а в виде так называемого *обобщенного степенного ряда*, т. е. в виде

$$y(x) = x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k}, \qquad (2)$$

в котором показатель ρ и все коэффициенты c_k подлежат определению. Заметим, что коэффициент c_0 можно считать отличным от нуля, ибо если бы он (и, может быть, несколько следующих за ним) был равен нулю, то, вынеся x в некоторой степени за скобки, мы добились бы того, чтобы в получившемся степенном ряде свободный член был отличен от нуля и только бы увеличился показатель ρ. Поэтому мы будем определять ρ, уже считая $c_0 \neq 0$.

Имеем из (2)

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k) c_k x^{\rho+k-1}, y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k)(\rho + k - 1) c_k x^{\rho+k-2}.$$

Подставляя выражения для y, y', y'' в уравнение (1), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k)(\rho + k - 1) c_k x^{\rho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k) c_k x^{\rho+k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k+2} - p^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k} \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{\rho} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k)(\rho + k - 1) c_k x^k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k) c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} - p^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right] \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k)(\rho + k - 1) c_k x^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k) c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} - p^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv 0.$$

В левой части полученного тождества имеем степенной ряд. Следовательно, это тождество возможно лишь тогда, когда все коэффициенты и свободный член степенного ряда равны нулю.

Приравнивая нулю свободный член и коэффициенты при $x, x^2, x^3, \ldots, x^m, \ldots$, получим равенства:

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & [\rho(\rho - 1) + \rho - p^2] c_0 = 0, \\
x^1 & [(\rho + 1)\rho + (\rho + 1) - p^2] c_1 = 0, \\
x^2 & [(\rho + 2)(\rho + 1) + (\rho + 2) - p^2] c_2 + c_0 = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^m & [(\rho + m)(\rho + m - 1) + (\rho + m) - p^2] c_m + c_{m-2} = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Откуда

$$\left.\begin{array}{l}
[\rho^2 - p^2]c_0 = 0, \\
[(\rho+1)^2 - p^2]c_1 = 0, \\
[(\rho+2)^2 - p^2]c_2 + c_0 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[(\rho+m)^2 - p^2]c_m + c_{m-2} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Так как $c_0 \neq 0$, то из первого уравнения системы (3) получаем

$$\rho^2 - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = p,\ \rho_2 = -p.$$

Рассмотрим случай, когда $p > 0$ ($p \neq 0$), и воспользуемся пока значением $\rho_1 = p$. Подставляя его во все последующие уравнения системы (3), находим

$$c_1 = 0, c_2 = -\frac{c_0}{2(2p+2)}, \ldots, c_m = -\frac{c_{m-2}}{m(2p+m)}, \ldots .$$

Из соотношения $c_m = -\dfrac{c_{m-2}}{m(2p+m)}$ следует: так как $c_1 = 0$, то $c_3 = 0$, $c_5 = 0$ и т. д. Значит, все коэффициенты с нечетными индексами c_{2k+1} будут равны нулю.

Полагая последовательно $m = 4, 6, \ldots, 2k, \ldots$, найдем

$$c_4 = -\frac{c_2}{4(2p+4)} = \frac{c_0}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)},$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{6(2p+6)} = -\frac{c_0}{2\cdot 4\cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k\cdot (2p+2)(2p+4)(2p+6)\ldots(2p+2k)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставляя найденные значения для ρ и c_k в (2), получим

$$y(x) = c_0 x^p \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k\cdot (2p+2)(2p+4)(2p+6)\ldots(2p+2k)}. \qquad (4)$$

Коэффициент c_0 при этом остается произвольным. С помощью признака Даламбера легко показать, что ряд (4) сходится при всех значениях x. Действительно, имеем для любого значения x:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2k}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k\cdot(2p+2)(2p+4)(2p+6)\ldots(2p+2k)}}{\dfrac{x^{2k-2}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2k-2)\cdot(2p+2)(2p+4)(2p+6)\ldots(2p+2k-2)}}\right| =$$

$$= x^2\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k(2p+2k)} = 0.$$

Следовательно, сумма ряда (4) определяет вещественное решение уравнения Бесселя при всех x, при которых x^p — вещественное.

2°. Функции Бесселя первого рода. Если в соотношении

$$y(x) = c_0x^p\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k\cdot(2p+2)(2p+4)(2p+6)\ldots(2p+2k)}$$

положить $c_0 = \dfrac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$, то получим решение уравнения Бесселя, которое называется *функцией Бесселя первого рода* порядка p и обозначается символом $J_p(x)$. Таким образом,

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p\Gamma(p+1)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k\cdot(2p+2)(2p+4)(2p+6)\ldots(2p+2k)}. \quad (5)$$

Придадим выражению, стоящему в правой части (5), иную форму. Для этого внесем $\dfrac{x^p}{2^p\Gamma(p+1)}$ под знак суммы. Тогда знаменатель общего члена получаемого ряда может быть преобразован следующим образом:

$$2^p\Gamma(p+1)\cdot 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2k\cdot(2p+2)(2p+4)\ldots(2p+2k) =$$

$$= 2^p\Gamma(p+1)\cdot 2^k\cdot k!\cdot 2^k(p+1)(p+2)\ldots(p+k) =$$

$$= 2^{p+2k}\cdot k!\,\Gamma(p+1)(p+1)(p+2)\ldots(p+k).$$

По основному свойству гамма-функции: $\Gamma(p+1)\cdot(p+1)=\Gamma(p+2)$, $\Gamma(p+2)\cdot(p+2)=\Gamma(p+3)$, , $\Gamma(p+k)\cdot(p+k)=\Gamma(p+k+1)$. Следовательно, выражение (5) примет вид

$$J_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}. \tag{6}$$

Получив два корня $\rho_1=p$ и $\rho_2=-p$ уравнения $\rho^2-p^2=0$, мы воспользовались пока одним корнем $\rho_1=p$ и построили решение $J_p(x)$ уравнения Бесселя в форме (6).

Воспользовавшись вторым корнем $\rho_2=-p$, мы можем аналогичным образом построить второе решение уравнения Бесселя. Очевидно, оно может быть получено из решения (6) заменой p на $(-p)$, так как само уравнение Бесселя содержит только p^2 и не меняется от замены p на $(-p)$. Это второе решение уравнения Бесселя можно, следовательно, записать в виде

$$J_{-p}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-p+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}. \tag{7}$$

$J_{-p}(x)$ также называется функцией Бесселя первого рода порядка $-p$.

3°. О составлении общего решения уравнения Бесселя. Так как уравнение Бесселя является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка, то для составления его общего решения достаточно иметь два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, и тогда общее решение можно написать в виде $y=\tilde{C}_1y_1(x)+\tilde{C}_2y_2(x)$, где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ — произвольные постоянные.

Отметим, что если число p не целое, то решения $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ уравнения Бесселя будут линейно независимыми (так как их отношение не будет постоянной величиной). Поэтому при p не целом общее решение уравнения Бесселя будет таким:

$$y=\tilde{C}_1J_p(x)+\tilde{C}_2J_{-p}(x). \tag{8}$$

Если же p — число целое ($p=n$), то функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ — линейно зависимые, так как имеет место соотношение

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x). \tag{9}$$

Действительно, имеем $J_{-n}(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k!\Gamma(-n+k+1)}$. Так как $\Gamma(-n+k+1)$ обращается в бесконечность при $k=0,1,\dots,n-1$, то

$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)}$. Полагая в этой сумме $k=n+m$, получим

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(m+1)}=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{m!\Gamma(n+m+1)}=(-1)^nJ_n(x).$$

Вследствие установленной линейной зависимости $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ решение уравнения Бесселя $y=\tilde{C}_1J_n(x)+\tilde{C}_2J_{-n}(x)$ уже не будет общим. Для составления общего решения нужно наряду с $J_n(x)$ иметь другое решение уравнения Бесселя, линейно независимое с $J_n(x)$.

Рассмотрим при нецелом p функцию:

$$Y_p(x)=\frac{J_p(x)\cos p\pi-J_{-p}(x)}{\sin p\pi}. \tag{10}$$

Функция (10) является линейной комбинацией решений уравнения Бесселя и вследствие линейности и однородности этого уравнения будет сама являться его решением. Это решение (10) называется *функцией Бесселя второго рода порядка p.*

При $p=n$ (целом) $Y_n(x)$ принимает неопределенный вид, так как числитель и знаменатель дроби (10) обращаются в нуль. (Числитель

$$J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)=J_n(x)(-1)^n-(-1)^nJ_n(x)=0,$$

знаменатель $\sin n\pi=0$.) Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$Y_n(x)=\lim_{p\to n}Y_p(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_p(x)}{\partial p}-(-1)^n\frac{\partial J_{-p}(x)}{\partial p}\right]_{p=n}. \tag{11}$$

Можно показать (на чем мы не останавливаемся), что функция (11) будет решением уравнения Бесселя при $p=n$ линейно независимым с $J_n(x)$. Следовательно, общее решение уравнения Бесселя при $p=n$ (целом) будет таким:

$$y(x)=\tilde{C}_1J_n(x)+\tilde{C}_2Y_n(x). \tag{12}$$

Заметим, что формула $y(x)=\tilde{C}_1J_p(x)+\tilde{C}_2Y_p(x)$ дает общее решение уравнения Бесселя как при целых, так и при нецелых p.

4°. Основные соотношения между функциями Бесселя. Было получено

$$J_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}.$$

Составим отношение $\dfrac{J_p(x)}{x^p}$ и найдем производную по x от этого отношения. Будем иметь

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_p(x)}{x^p}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\cdot\frac{x^{2k}}{2^{p+2k}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 2k}{k!\Gamma(p+k+1)}\cdot\frac{x^{2k-1}}{2^{p+2k}}.$$

В последней сумме введем новый индекс суммирования m по формуле $k=m+1$. Тогда получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_p(x)}{x^p}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}2(m+1)}{(m+1)!\Gamma(p+1+m+1)}\cdot\frac{x^{2m+1}}{2^{2m+2+p}}=$$

$$=-\frac{1}{x^p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{p+1+2m}}{m!\Gamma(p+1+m+1)}=-\frac{1}{x^p}J_{p+1}(x).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_p(x)}{x^p}\right)=-\frac{1}{x^p}J_{p+1}(x). \tag{13}$$

Будем называть формулу (13) *первым основным соотношением* между функциями Бесселя. Из соотношения (13) находим

$$J_p'(x)\cdot\frac{1}{x^p}-p\cdot\frac{1}{x^{p+1}}J_p(x)=-\frac{1}{x^p}J_{p+1}(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_p'(x)=-J_{p+1}(x)+\frac{p}{x}J_p(x). \tag{14}$$

В частности, $J_0'(x)=-J_1(x)$.

Выведем теперь второе основное соотношение. Для этого составляем произведение $x^pJ_p(x)$ и находим производную по x от этого произведения. Будем иметь

$$\frac{d}{dx}\left(x^pJ_p(x)\right)=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\cdot\frac{x^{2k+2p}}{2^{2k+p}}=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)} \cdot \frac{2(k+p)x^{2k+2p-1}}{2^{2k+p}}.$$

Так как $\Gamma(p+k+1) = (p+k)\Gamma(p+k)$, то

$$\frac{d}{dx}\left(x^p J_p(x)\right) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p-1+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1} = x^p J_{p-1}(x).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx}\left(x^p J_p(x)\right) = x^p J_{p-1}(x). \qquad (15)$$

Формулу (15) будем называть *вторым основным соотношением* между функциями Бесселя. Из соотношения (15) находим

$$x^p J_p'(x) + p x^{p-1} J_p(x) = x^p J_{p-1}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x). \qquad (16)$$

Сопоставляя формулы (14) и (16), получаем соотношение между тремя последовательными функциями Бесселя.

$$\frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x). \qquad (17)$$

Формулу (17) будем называть третьим основным соотношением между функциями Бесселя. Из формул (14) и (16) путем сложения соответствующих частей этих формул получаем

$$J_p'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)\right). \qquad (18)$$

Замечание. Для функций Бесселя второго рода могут быть получены такие же соотношения, как и полученные здесь основные соотношения для функций Бесселя первого рода.

5°. Случаи вырождения. Функции Бесселя не относятся к классу элементарных функций. Однако есть случаи, когда они выражаются через элементарные функции (или, как говорят, *вырождаются*).

Рассмотрим функцию $J_{1/2}(x)$. Пользуясь выражением (5), получаем

$$J_{1/2}(x) = \frac{x^{1/2}}{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k \cdot (1+2)(1+4)\ldots(1+2k)} =$$

$$=\frac{1}{2^{1/2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=\sin x}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin x,$$

ибо $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Аналогично можно убедиться, что $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\cos x$. А тогда из формул (13) и (15) следует, что функции Бесселя с индексом, равным целому числу плюс $\frac{1}{2}$, будут выражаться через элементарные функции.

Действительно, принимая во внимание формулу (13), находим

$$J_{3/2}(x)=J_{1+\frac{1}{2}}(x)=-x^{1/2}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_{1/2}(x)}{x^{1/2}}\right)=-x^{1/2}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=-x^{1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right).$$

$$J_{5/2}(x)=J_{1+\frac{3}{2}}(x)=-x^{3/2}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_{3/2}(x)}{x^{3/2}}\right)=-x^{3/2}\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin x}{x^3}-\frac{\cos x}{x^2}\right)\right]=$$

$$=-x^{3/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\left[\frac{\cos x}{x^3}-\frac{3\sin x}{x^4}+\frac{\sin x}{x^2}+\frac{2\cos x}{x^3}\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\left[\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\sin x-\frac{3}{x}\cos x\right]$$

и т. д. Точно так же, принимая во внимание формулу (15), находим

$$J_{-3/2}(x)=J_{-1-\frac{1}{2}}(x)=x^{1/2}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_{-1/2}(x)}{x^{1/2}}\right]=x^{1/2}\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos x}{x}\right]=$$

$$=x^{1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\left(-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}\right)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\left(\sin x+\frac{\cos x}{x}\right).$$

$$J_{-5/2}(x)=J_{-1-\frac{3}{2}}(x)=x^{3/2}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_{-3/2}(x)}{x^{3/2}}\right]=-x^{3/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{\cos x}{x^3}\right)=$$

$$= -x^{3/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\cos x}{x^2} - \frac{2\sin x}{x^3} - \frac{\sin x}{x^3} - \frac{3\cos x}{x^4}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{-5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\cos x + \frac{3\sin x}{x}\right].$$

и т. д.

6°. Обобщенное уравнение Бесселя. Обобщенным уравнением Бесселя называется уравнение

$$x^2 y'' + xy' + (k^2x^2 - p^2)y = 0, \qquad (*)$$

где k — некоторая постоянная, отличная от нуля. Покажем, что заменой независимой переменной x на новую переменную t по формуле $t = kx$ это уравнение приводится к обычному уравнению Бесселя. Действительно, при такой замене имеем

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = ky'_t, y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} = (ky'_t)'_t \cdot k = k^2 y''_{t^2}.$$

Подставляя выражения для y'_x, y''_{x^2} в уравнение (*), получаем

$$k^2x^2 y''_{t^2} + kxy'_t + (k^2x^2 - p^2)y = 0 \Rightarrow t^2 y''_{t^2} + ty'_t + (t^2 - p^2)y = 0.$$

Видим, что получено обычное уравнение Бесселя.

При p не целом общим решением полученного уравнения будет

$$y = \tilde{C}_1 J_p(t) + \tilde{C}_2 J_{-p}(t),$$

и, следовательно, общим решением обобщенного уравнения будет

$$y = \tilde{C}_1 J_p(kx) + \tilde{C}_2 J_{-p}(kx).$$

В случае, когда $p = n$ есть целое положительное число или нуль, будем иметь соответственно

$$y = \tilde{C}_1 J_n(t) + \tilde{C}_2 Y_n(t), y = \tilde{C}_1 J_n(kx) + \tilde{C}_2 Y_n(kx).$$

Заметим, что формула $y = \tilde{C}_1 J_p(kx) + \tilde{C}_2 Y_p(kx)$ дает общее решение обобщенного уравнения Бесселя как при целых, так и при не целых p.

7°. Асимптотические формулы для функций Бесселя. В некоторых случаях бывают нужны формулы, приближенно представляющие интересующие нас функции при больших значениях аргумента, с помощью других, более простых функций. Эти формулы обычно называются асимптотическими.

Приведем (без доказательства) асимптотические формулы для функций Бесселя. Эти формулы при положительных значениях аргумента x таковы:

$$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}) \quad (x > 0),$$

$$Y_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}) \quad (x > 0).$$

Написанные формулы означают, что при больших положительных значениях аргумента x разность между функцией $J_p(x)$ и функцией $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ и разность между функцией $Y_p(x)$ и функцией $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ есть величины того же порядка, что $x^{-3/2}$. Следовательно, при больших положительных значениях x функция $J_p(x)$ ведет себя как функция $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, а функция $Y_p(x)$ — как функция $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. Из этих же асимптотических формул можно сделать вывод о характере графиков функций $J_p(x)$, $Y_p(x)$: при больших $x > 0$ график $J_p(x)$ близок к графику соответствующей косинусоиды с амплитудой, уменьшающейся по закону $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$; график $Y_p(x)$ близок к графику соответствующей синусоиды с амплитудой, уменьшающейся по закону $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$ (рис. 4.1).

Из асимптотических формул видно также, что каждая из функций $J_p(x)$, $Y_p(x)$ имеет бесконечно много вещественных корней, таких, что расстояние между соседними корнями стремится к π, когда значения корней растут.

Замечание 1. Ввиду важной роли, которую играют функции Бесселя в приложениях, для них составлены таблицы.

Замечание 2. Изложенное в настоящем параграфе следует рассматривать лишь как введение в изучение теории функций Бесселя. Подробное изучение многих других замечательных

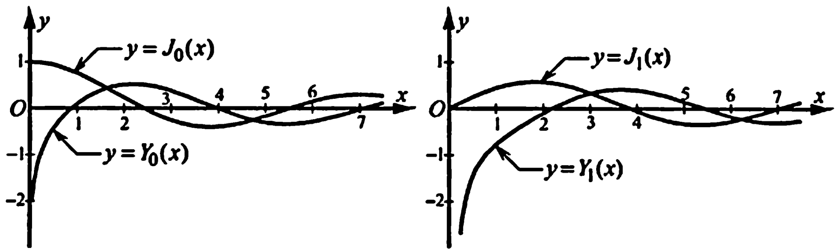

Рис. 4.1

свойств функций Бесселя читатель найдет в "Курсе высшей математики" В.И. Смирнова (т. II, 1948, с. 141–146, и т. III, ч. 2, 1949, с. 519–564), а также в многочисленной специальной литературе о функциях Бесселя.

8°. Примеры и задачи к §3.

Задача 1. Решить уравнение $y'' + \dfrac{y'}{x} + \left(1 - \dfrac{1}{9x^2}\right) y = 0$.

Решение. Перепишем заданное уравнение в виде

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0.$$

Видим, что заданное уравнение является уравнением Бесселя ($p = \dfrac{1}{3}$). Следовательно, общее решение уравнения будет таким:

$$y = \tilde{C}_1 J_{1/3}(x) + \tilde{C}_2 J_{-1/3}(x).$$

Задача 2. Решить уравнение $x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \dfrac{1}{4}\right) y = 0$.

Решение. Перепишем заданное уравнение в виде

$$x^2 y'' + xy' + \left(2^2 x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$$

Видим, что заданное уравнение является обобщенным уравнением Бесселя ($k = 2$, $p = \dfrac{1}{2}$). Следовательно, общее решение уравнения будет таким:

$$y = \tilde{C}_1 J_{1/2}(2x) + \tilde{C}_2 J_{-1/2}(2x).$$

Задача 3. Решить уравнение $x^2y'' + xy' + 4(x^4 - 2)y = 0$.

Решение. Положим $x^2 = t$. Тогда

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot 2x, y''_{x^2} = (y'_t \cdot 2x)'_x =$$

$$= (y'_t)'_x \cdot 2x + y'_t \cdot 2 = 2x(y'_t)'_t \cdot t'_x + 2y'_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''_{x^2} = y''_{t^2} \cdot 4x^2 + 2y'_t = y''_{t^2} \cdot 4t + 2y'_t.$$

Подставляя выражения для y'_x, y''_{x^2} в заданное уравнение, получаем

$$t(y''_{t^2} \cdot 4t + 2y'_t) + 2ty'_t + 4(t^2 - 2)y = 0 \Rightarrow t^2y''_{t^2} + ty'_t + (t^2 - 2)y = 0.$$

Видим, что полученное уравнение является уравнением Бесселя ($p = \sqrt{2}$). Следовательно, общее решение полученного уравнения будет таким:

$$y = \tilde{C}_1 J_{\sqrt{2}}(t) + \tilde{C}_2 J_{-\sqrt{2}}(t).$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x, получим общее решение заданного уравнения. Оно будет таким:

$$y = \tilde{C}_1 J_{\sqrt{2}}(x^2) + \tilde{C}_2 J_{-\sqrt{2}}(x^2).$$

Задача 4. Пусть дано уравнение Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Известно, что функция $J_p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}$ есть решение данного уравнения. Доказать, что функция $Y_p(x) = J_p(x)\int \frac{dx}{xJ_p^2(x)}$ также является решением этого уравнения.

▶ Имеем

$$Y'_p(x) = J'_p(x)\int \frac{dx}{xJ_p^2(x)} + J_p(x)\frac{1}{xJ_p^2(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y'_p(x) = J'_p(x)\int \frac{dx}{xJ_p^2(x)} + \frac{1}{xJ_p(x)} = \frac{1}{J_p(x)}\left[J'_p(x)Y_p(x) + \frac{1}{x}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_p(x)Y_p'(x) = J_p'(x)Y_p(x) + \frac{1}{x} \Rightarrow \tag{*}$$

$$\Rightarrow J_p'(x) = J_p(x)\frac{Y_p'(x)}{Y_p(x)} - \frac{1}{xY_p(x)}.$$

Дифференцируя обе части равенства (*), находим

$$J_p'(x)Y_p'(x) + J_p(x)Y_p''(x) = J_p''(x)Y_p(x) + J_p'(x)Y_p'(x) - \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_p''(x) = J_p(x)\cdot\frac{Y_p''(x)}{Y_p(x)} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{Y_p(x)}.$$

У нас $J_p(x)$ — решение данного уравнения Бесселя. Поэтому должно быть

$$J_p''(x) + \frac{1}{x}J_p'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)J_p(x) \equiv 0.$$

Подставляя здесь вместо $J_p'(x)$, $J_p''(x)$ найденные для них выражения, получим

$$J_p(x)\cdot\frac{Y_p''(x)}{Y_p(x)} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{Y_p(x)} + \frac{1}{x}J_p(x)\cdot\frac{Y_p'(x)}{Y_p(x)} -$$

$$-\frac{1}{x^2Y_p(x)} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)J_p(x) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_p(x)\frac{1}{Y_p(x)}\left[Y_p''(x) + \frac{1}{x}Y_p'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)Y_p(x)\right] \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_p''(x) + \frac{1}{x}Y_p'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)Y_p(x) \equiv 0.$$

А это означает, что функция $Y_p(x) = J_p(x)\int\frac{dx}{xJ_p^2(x)}$ является решением данного уравнения Бесселя. Отметим, что решения $Y_p(x)$ и $J_p(x)$ линейно независимые, ибо их отношение не является постоянной величиной. ◀

Задача 5. Решить уравнение $xy'' + y' + xy = 0$.

Решение. Видим, что заданное уравнение является частным случаем уравнения Бесселя, когда $p = 0$. Одним из решений этого уравнения является функция Бесселя первого рода порядка $p = 0$, т. е. функция $J_0(x)$. Вторым решением заданного уравнения, линейно независимым с $J_0(x)$, будет

$$Y_0(x) = J_0(x)\int \frac{dx}{xJ_0^2(x)}.$$

Имеем

$$J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{xJ_0^2(x)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{2} + \ldots\right) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \ldots; \int \frac{dx}{xJ_0^2(x)} = \ln x + \frac{x^2}{2^2} + \ldots;$$

$$Y_0(x) = J_0(x)\ln x + J_0(x)\left(\frac{x^2}{2^2} + \ldots\right) \Rightarrow Y_0(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

где $c_0 = 0$, $c_1 = 0$. Подставив $Y_0(x)$ в уравнение, получим

$$x\left[J_0''(x)\ln x + 2J_0'(x)\frac{1}{x} - J_0(x)\cdot\frac{1}{x^2}\right] + J_0'(x)\ln x + J_0(x)\frac{1}{x} + xJ_0(x)\ln x +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x \cdot \underbrace{[xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x)]}_{\equiv 0} + 2J_0'(x) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^{k+1} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \equiv -2J_0'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)kc_{k+1}+(k+1)c_{k+1}+c_{k-1}]x^k \equiv -2\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \Rightarrow$$
$$(c_0=0, c_1=1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)^2 c_{k+1}+c_{k-1}]x^k \equiv 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!(k-1)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой частях тождества, получим для определения коэффициентов c_k следующие уравнения:

$$c_1=0;\ (2m+1)^2 c_{2m+1}+c_{2m-1}=0,\ m=1,2,\ \dots;$$

$$c_0=0;\ 4(m+1)^2 c_{2m+2}+c_{2m}=\frac{(-1)^m}{(m+1)!\cdot m!\cdot 2^m},\ m=0,1,2,\ \dots.$$

Из этих уравнений находим, что коэффициенты c_k с нечетными номерами равны нулю, а c_k с четными номерами равны соответственно:

$$c_0=0,\ c_2=\frac{1}{2^2},\ c_4=-\frac{1}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right),\ c_6=\frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right),$$

$$c_{2k}=(-1)^{k+1}\frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot\ \dots\ \cdot(2k)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots\ +\frac{1}{k}\right),\ \dots.$$

Таким образом, будем иметь

$$Y_0(x)=J_0(x)\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1+\frac{1}{2}+\ \dots\ +\frac{1}{k}}{2^2\cdot 4^2\cdot\ \dots\ \cdot(2k)^2}\cdot x^{2k}.$$

Глава 5

НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Основные понятия и определения

1°. *Нормальными системами обыкновенных дифференциальных уравнений* называются системы вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (\tilde{\text{I}})$$

Здесь n — фиксированное число ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$) (n — порядок системы),

x — вещественная независимая переменная,

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — искомые вещественные функции,

$f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, ..., $f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ — известные функции, определенные и непрерывные в некоторой области $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Если ввести в рассмотрение вектор-функции

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \ F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix},$$

то система $(\tilde{\mathrm{I}})$ запишется в виде

$$\frac{dY}{dx} = \mathrm{F}(x, Y). \qquad (1)$$

В (1): $x \in \mathbf{R}$, $Y \in \mathbf{R}^n$, $F(x,Y) \in C(D)$, где $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

2°. Определение. *Решением* системы (1) в $\langle a,b \rangle$ называют всякую вектор-функцию $Y(x) = \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$, $x \in \langle a,b \rangle$, обладающую свойствами:

1) для любого $x \in \langle a,b \rangle$ существует $\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_2'(x) \\ \dots \\ \varphi_n'(x) \end{pmatrix}$;

2) для любого $x \in \langle a,b \rangle$ точка $(x, \varphi(x)) \in (D)$;

3) для любого $x \in \langle a,b \rangle$ $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$.

Заметим, что вектор-функция $F(x,\varphi(x)) \in C(\langle a,b \rangle)$ как суперпозиция непрерывных функций. А тогда из свойства 3) следует, что $\varphi'(x) \in C(\langle a,b \rangle)$, то есть любое решение системы (1) в $\langle a,b \rangle$ непрерывно дифференцируемо.

3°. Задача Коши для системы (1) состоит в следующем: среди всех решений системы (1) найти такое решение $Y = \varphi(x)$, которое удовлетворяет условию

$$Y(x)\big|_{x=x_0} = Y_0. \qquad (2)$$

В (2) x_0, Y_0 — любые, но такие, что точка $(x_0, Y_0) \in (D)$.

4°. Пусть дана система $\dfrac{dY}{dx} = \mathrm{F}(x,Y)$ (1) и дано начальное условие $Y(x)\big|_{x=x_0} = Y_0$ (2). Пусть $Y = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}} = (x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta})$, и $Y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\tilde{\delta}}} = (x_0 - \tilde{\tilde{\delta}}, x_0 + \tilde{\tilde{\delta}})$, — любые два решения задачи

(1) — (2). Тогда: если существует интервал $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такой, что $\tilde{\varphi}(x) \equiv \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_\delta$, то говорят, что задача (1) — (2) имеет единственное решение. Точку $(x_0, Y_0) \in (D)$ называют в этом случае точкой единственности системы (1).

Пусть область $(D_1) \subset (D)$ и пусть каждая точка $(x, Y) \in (D_1)$ является точкой единственности системы (1). Тогда (D_1) называют областью единственности системы (1).

§2. Некоторые сведения из теории вектор-функций

Напомним некоторые факты из теории вектор-функций, используемые при рассмотрении систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1°. Пусть $\mathbf{R}^n$ — n-мерное векторное пространство. Пусть вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — любой из $\mathbf{R}^n$. За *норму* вектора X принимают по определению

$$\|X\| = \max_{(i=\overline{1,n})} \{|x_i|\}.$$

2°. *Расстояние* $\rho(\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}})$ между любыми двумя точками $\tilde{X}$ и $\tilde{\tilde{X}}$ из $\mathbf{R}^n$ определяют соотношением

$$\rho(\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}}) = \left\|\tilde{\tilde{X}} - \tilde{X}\right\|.$$

3°. Пусть $X^{(0)}$ — любая фиксированная точка из $\mathbf{R}^n$. δ — *окрестность* точки $X^{(0)}$ определяется соотношением

$$U_\delta(X^{(0)}) = \left\{X, \left\|X - X^{(0)}\right\| < \delta\right\}.$$

Так как $\left\|X - X^{(0)}\right\| < \delta \Leftrightarrow \left|x_i - x_i^{(0)}\right| < \delta, i = \overline{1,n}$, то заключаем, что $U_\delta(X^{(0)})$ — n-мерный куб с центром в точке $X^{(0)}$ и ребром 2δ.

4°. Пусть $\left\{X^{(k)}\right\}_{k \in \mathbf{N}}$ — последовательность векторов из $\mathbf{R}^n$. Пусть $X^{(0)}$ — фиксированная точка в $\mathbf{R}^n$. Говорят, что последовательность

$\left\{X^{(k)}\right\}_{k\in\mathbf{N}}$ *сходится к* $X^{(0)}$ при $k\to\infty$, и пишут $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = X^{(0)}$, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер K такой, что как только $k > K$, так сейчас же $\left\| X^{(k)} - X^{(0)} \right\| < \varepsilon$. Отметим, что $\left\| X^{(k)} - X^{(0)} \right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| x_i^{(k)} - x_i^{(0)} \right| < \varepsilon,\ i = \overline{1,n}$. Из этого следует, что сходимость в пространстве $\mathbf{R}^n$ осуществляется покомпонентно, то есть

$$\left(\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^{(0)}\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)},\ i = \overline{1,n}\right).$$

5°. Введем в рассмотрение вектор $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$. Здесь $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — функции от x, определенные в некотором промежутке $\langle a,b\rangle$. $Y(x)$ называется *вектор-функцией* скалярного аргумента x, определенной в $\langle a,b\rangle$.

Говорят, что вектор-функция $Y(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \langle a,b\rangle$, если в этой точке непрерывны одновременно функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Производная вектор-функции $Y(x)$ в точке $x_0 \in \langle a,b\rangle$ определяется соотношением $Y'(x_0) = \begin{pmatrix} y_1'(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \dots \\ y_n'(x_0) \end{pmatrix}$. $Y'(x_0)$ существует, если существуют одновременно $y_1'(x_0), y_2'(x_0), \dots, y_n'(x_0)$.

Пусть вектор-функция $Y(x)$ определена в $[a,b]$. $\int\limits_a^b Y(x)dx$ определяется соотношением

$$\int_a^b Y(x)\,dx = \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(x)\,dx \\ \int_a^b y_2(x)\,dx \\ \dots\dots \\ \int_a^b y_n(x)\,dx \end{pmatrix}.$$

$\int_a^b Y(x)\,dx$ существует, если существуют одновременно $\int_a^b y_1(x)\,dx$, $\int_a^b y_2(x)\,dx$, , $\int_a^b y_n(x)\,dx$.

Отметим, что $\left\|\int_a^b Y(x)\,dx\right\| \le \left|\int_a^b \|Y(x)\|\,dx\right|$. В самом деле, имеем

$$\left\|\int_a^b \mathrm{Y}(x)\,dx\right\| = \max_{(i=\overline{1,n})}\left|\int_a^b y_i(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b y_{i_0}(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b |y_{i_0}(x)|\,dx\right| \le \left|\int_a^b \|\mathrm{Y}(x)\|\,dx\right|.$$

6°. Рассмотрим вектор-функцию $F(x,Y)$ вида

$$F(x,\mathrm{Y}) = \begin{pmatrix} f_1(x,y_1,\dots,y_n) \\ f_2(x,y_1,\dots,y_n) \\ \dots\dots \\ f_n(x,y_1,\dots,y_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь $n \in \mathrm{N}$, $n \ge 1$, $x \in \mathrm{R}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^n$. Будем считать, что $f_i(x,y_1,\dots,y_n)$, $i=\overline{1,n}$, определены в некоторой области $(D) \subset \mathrm{R}^{n+1}$.

Частные производные вектор-функции $F(x,Y)$: $\dfrac{\partial F(x,Y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}$ ($i=\overline{1,n}$) определяются соотношениями:

$$\frac{\partial F(x,Y)}{\partial x}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\\ \dots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x}\end{pmatrix};\quad \frac{\partial F(x,Y)}{\partial y_i}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_i}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_i}\\ \dots\\ \frac{\partial f_n}{\partial y_i}\end{pmatrix}\qquad (i=\overline{1,n}).$$

Символами $\frac{\partial F(x,Y)}{\partial (x,Y)}$ и $\frac{\partial F(x,Y)}{\partial Y}$ обозначают соответственно:

$$\frac{\partial F(x,Y)}{\partial (x,Y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\end{pmatrix} \text{ — матрица Якоби,}$$

$$\frac{\partial F(x,Y)}{\partial Y}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}.$$

7°. Теорема о полном приращении вектор-функции.
Пусть

1) вектор-функция $F(x,Y)\in C(D)$ $((D)\subset \mathbf{R}^{n+1})$;

2) область (D) выпукла по Y, т.е. для любых двух точек $(x,\tilde{Y})$ и $(x,\tilde{\tilde{Y}})$ из (D) оказывается, что отрезок, их соединяющий, лежит в (D);

3) $\dfrac{\partial F(x,Y)}{\partial Y} \in C(D)$.

Тогда для любых двух точек $(x,\tilde{Y})$ и $(x,\tilde{\tilde{Y}})$ из (D) справедливо соотношение

$$F(x,\tilde{\tilde{Y}}) - F(x,\tilde{Y}) = \int_0^1 \frac{\partial F\left(x,\tilde{Y}+t(\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{Y})\right)}{\partial Y}\cdot(\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{Y})\,dt. \qquad (1)$$

▶ Пусть $(x,\tilde{Y})$ и $(x,\tilde{\tilde{Y}})$ — любые две точки из (D). Соединим их прямолинейным отрезком. Его параметрические уравнения будут такими:

$$\begin{cases} x = x, \\ Y = \tilde{Y} + t\cdot(\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{Y}), \end{cases} \quad t \in [0,1].$$

В точках этого прямолинейного отрезка будем иметь

$$F(x,Y) = F\left(x,\tilde{Y}+t\cdot(\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{Y})\right) = \psi(t),\ t \in [0,1].$$

$\psi(t)$ — векторная функция скалярного аргумента t:

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \dots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix};\ \psi_i(t) = f_i\left(x,\tilde{y}_1+t(\tilde{\tilde{y}}_1-\tilde{y}_1),\ \dots,\ \tilde{y}_n+t(\tilde{\tilde{y}}_n-\tilde{y}_n)\right)\ (i=\overline{1,n}).$$

Отметим, что

1) $\psi(t) \in C([0,1])$ как суперпозиция непрерывных функций.

2) $\psi(t)$ имеет на $[0,1]$ непрерывную производную

$$\psi'(t) = \begin{pmatrix} \psi_1'(t) \\ \dots \\ \psi_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_j}\left(x,\tilde{Y}+t(\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{Y})\right)\cdot(\tilde{\tilde{y}}_j-\tilde{y}_j) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f_n}{\partial y_j}\left(x,\tilde{Y}+t(\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{Y})\right)\cdot(\tilde{\tilde{y}}_j-\tilde{y}_j) \end{pmatrix}.$$

Из выражения для $\psi'(t)$ видим, что $\psi'(t) \in C([0,1])$. А тогда для функции $\psi(t)$ справедлива формула Ньютона — Лейбница:

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t)\,dt,$$

то есть

$$\psi_i(1) - \psi_i(0) = f_i(x, \tilde{\tilde{Y}}) - f_i(x, \tilde{Y}) = \int_0^1 \psi_i'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \left(x, \tilde{Y} + t(\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y})\right) \cdot (\tilde{\tilde{y}}_j - \tilde{y}_j) \right) dt; \quad i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Замечаем, что (2) есть покомпонентная запись формулы (1). Следовательно, формула (1) установлена. ◀

8°. Определение. Говорят, что вектор-функция $F(x,Y)$ удовлетворяет в области $(D) \subset \mathrm{R}^{n+1}$ *условию Липшица* по Y, если существует число $L > 0$, такое, что для любых двух точек $(x, \tilde{Y})$ и $(x, \tilde{\tilde{Y}})$ из (D) справедливо соотношение

$$\left\| F(x, \tilde{\tilde{Y}}) - F(x, \tilde{Y}) \right\| \le L \cdot \left\| \tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y} \right\|.$$

Обозначение: $F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y(D)$.

Определение. Говорят, что вектор-функция $F(x,Y)$ удовлетворяет в области $(D) \subset \mathrm{R}^{n+1}$ условию Липшица по Y *локально*, если для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ существует окрестность $U(x_0, Y_0) \subset (D)$, такая, что

$$F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y\left(U(x_0, Y_0)\right).$$

Пишут: $F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y(D)$, локально.

На вопрос, при каких условиях функция $F(x,Y)$ наверняка удовлетворяет в области (D) условию Липшица по Y локально, ответ дает следующая теорема.

Теорема. Пусть $F(x,Y)$ определена и непрерывна в области $(D) \subset \mathrm{R}^{n+1}$. Пусть $\dfrac{\partial F(x,Y)}{\partial Y} \in C(D)$. Тогда $F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y(D)$ локально.

▶ Возьмем в области (D) любую точку (x_0, Y_0). Рассмотрим окрестность этой точки: $U_\delta(x_0, Y_0)$. Будем считать δ столь малым, чтобы было $\bar{U}_\delta(x_0, Y_0) \subset (D)$ (это возможно, ибо (D) — область). Покажем, что $F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y\,(U_\delta(x_0, Y_0))$.

По условию $\dfrac{\partial F(x,Y)}{\partial Y} \in C(D) \Rightarrow \dfrac{\partial F(x,Y)}{\partial Y} \in C\left(\bar{U}_\delta(x_0, Y_0)\right) \Rightarrow$ $\dfrac{\partial f_i(x,Y)}{\partial y_j} \in C\left(\bar{U}_\delta(x_0, Y_0)\right)$, $i, j = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$ существует число $K > 0$, такое, что $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le K$ в $\bar{U}_\delta(x_0, Y_0)$ для любых $i, j = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$ $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le K$ в $U_\delta(x_0, Y_0)$ при любых $i, j = \overline{1,n}$.

Очевидно, что $U_\delta(x_0, Y_0)$ — выпуклая область (в частности, она выпуклая по Y).

Видим, что для $F(x,Y)$ в $U_\delta(x_0, Y_0)$ выполнены все условия теоремы о полном приращении вектор-функции. Поэтому для любых двух точек $(x, \tilde{Y})$ и $(x, \tilde{\tilde{Y}})$ из $U_\delta(x_0, Y_0)$ будем иметь

$$F(x,\tilde{\tilde{Y}}) - F(x,\tilde{Y}) = \int_0^1 \frac{\partial F\left(x, \tilde{Y} + t\cdot(\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y})\right)}{\partial Y} \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y})\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\| F(x,\tilde{\tilde{Y}}) - F(x,\tilde{Y}) \right\| \le \int_0^1 \left\| \frac{\partial F\left(x, \tilde{Y} + t\cdot(\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y})\right)}{\partial Y} \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}) \right\| dt =$$

$$= \int_0^1 \max_{i=\overline{1,n}} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \cdot (\tilde{\tilde{y}}_j - \tilde{y}_j) \right| dt \le \int_0^1 K \cdot n \cdot \left\| \tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y} \right\| dt =$$

$$= \underbrace{K \cdot n}_{\substack{=L \\ -\text{обозн.}}} \cdot \left\| \tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y} \right\| = L \cdot \left\| \tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y} \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y\,(U_\delta(x_0, Y_0)).$$

Итак, показано, что для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ существует окрестность $U_\delta(x_0, Y_0) \subset (D)$, такая, что $F(x, Y) \in \mathrm{Lip}_Y\,(U_\delta(x_0, Y_0)) \Rightarrow$ $F(x, Y)$ удовлетворяет условию Липшица по Y локально. ◀

§3. Существование и единственность решения задачи Коши нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Пусть даны система

$$\frac{dY}{dx} = F(x,Y), \quad F(x,Y) \in C(D), \tag{1}$$

и начальное условие

$$Y\big|_{x=x_0} = Y_0, (x_0, Y_0) \in (D). \tag{2}$$

Будем искать решение задачи (1) — (2) методом последовательных приближений Пикара.

Положим $\psi_0(x) = Y_0$, $x \in \mathbf{R}$ ($\psi_0(x)$ — "нулевое" приближение). Существует интервал (α_1, β_1), содержащий точку x_0, такой, что для любого $x \in (\alpha_1, \beta_1)$ будет: точка $(x, \psi_0(x)) \in (D)$. Положим

$$\psi_1(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, \psi_0(x))\,dx, x \in (\alpha_1, \beta_1).$$

Так как $(x, \psi_0(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_1, \beta_1)$, то $F(x, \psi_0(x)) \in$ $\in C((\alpha_1, \beta_1))$ и, следовательно, $\int_{x_0}^{x} F(x, \psi_0(x))\,dx$ существует ($\psi_1(x)$ — "первое" приближение).

Имеем

$$\psi_1'(x) = F(x, \psi_0(x)) \Rightarrow \psi_1'(x_0) = F(x_0, \psi_0(x_0)) = F(x_0, Y_0);$$
$$\psi_1(x_0) = Y_0,$$

то есть кривая $Y = \psi_1(x)$ проходит через точку (x_0, Y_0) и такая, что $Y'(x_0) = \psi_1'(x_0) = F(x_0, Y_0)$.

Существует интервал (α_2, β_2), содержащий точку x_0, такой, что точка $(x, \psi_1(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_2, \beta_2)$. Положим

$$\psi_2(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x,\psi_1(x))\,dx, \quad x \in (\alpha_2,\beta_2).$$

Так как $(x,\psi_1(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_2,\beta_2)$, то $F(x,\psi_1(x)) \in C((\alpha_2,\beta_2))$ и, следовательно, $\int_{x_0}^{x} F(x,\psi_1(x))\,dx$ существует ($\psi_2(x)$ — "второе" приближение).

Имеем

$$\psi_2'(x) = F(x,\psi_1(x)) \Rightarrow \psi_2'(x_0) = F(x_0,\psi_1(x_0)) = F(x_0,Y_0);$$
$$\psi_2(x_0) = Y_0,$$

то есть кривая $Y = \psi_2(x)$ проходит через точку (x_0,Y_0) и такая, что $Y'(x_0) = \psi_2'(x_0) = F(x_0,Y_0)$.

Продолжая этот процесс аналогичным образом дальше, получим

$$\psi_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x,\psi_{k-1}(x))\,dx, \quad x \in (\alpha_k,\beta_k),$$

где $k \in \mathrm{N}$, $k > 2$; (α_k,β_k) — некоторый интервал, содержащий точку x_0 и такой, что точка $(x,\psi_{k-1}(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_k,\beta_k)$ ($\psi_k(x)$ — k-е приближение). И здесь кривая $Y = \psi_k(x)$ проходит через точку (x_0,Y_0) и такая, что $Y'(x_0) = \psi_k'(x_0) = F(x_0,Y_0)$.

Лемма (о приближениях Пикара). Пусть числа $a > 0$, $b > 0$ — такие, что параллелепипед

$$(\overline{P}_{ab}) = \{(x,Y),\ |x - x_0| \le a;\ \|Y - Y_0\| \le b\} \subset (D).$$

Пусть $M = \max\limits_{(\overline{P}_{ab})} \|F(x,Y)\|$, $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$. Тогда все приближения Пикара $\psi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ определены и непрерывны на отрезке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ и удовлетворяют неравенству $\|\psi_k(x) - Y_0\| \le b$, $x \in I$. (Это означает, что графики вектор-функций $Y = \psi_k(x)$, $x \in I$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ лежат целиком в $(\overline{P}_{ab})$.)

▶ Рассмотрим $Y = \psi_0(x)$ ($\psi_0(x) \equiv Y_0$, $x \in \mathbf{R}$). Это приближение определено и непрерывно на всей вещественной оси;

следовательно, оно определено и непрерывно на отрезке I. Для $x \in I$ имеем

$$\|\psi_0(x) - Y_0\| = \|Y_0 - Y_0\| \le b.$$

Допустим, что $Y = \psi_{k-1}(x)$ определено и непрерывно на I и удовлетворяет неравенству

$$\|\psi_{k-1}(x) - Y_0\| \le b, x \in I.$$

Имеем тогда

$$\psi_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, \psi_{k-1}(x))\, dx.$$

Точки $(x, \psi_{k-1}(x)) \in (\overline{P}_{ab})$, для любого $x \in I \Rightarrow F(x, \psi_{k-1}(x)) \in C(I)$ как суперпозиция непрерывных функций $\Rightarrow \psi_k(x) \in C(I)$.

Имеем далее, для $x \in I$

$$\|\psi_k(x) - Y_0\| = \left\| \int_{x_0}^{x} F(x, \psi_{k-1}(x))\, dx \right\| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} \|F(x, \psi_{k-1}(x))\|\, dx \right| \le M \cdot \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| = M \cdot |x - x_0| \le M \cdot h \le b,$$

ибо $h \le \dfrac{b}{M}$.

Видим, что переход от $k-1$ к k сделан. Для $\psi_0(x)$ утверждение леммы проверено непосредственно. В силу перехода от $k-1$ к k, утверждение леммы будет справедливо для $\psi_k(x)$, где $k = 1, 2, \ldots$. ◀

2°. Теорема Пикара. Пусть имеется система $\dfrac{dY}{dx} = F(x, Y)$. Пусть $F(x, Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathrm{R}^{n+1}$. Пусть $F(x, Y) \in \mathrm{Lip}_Y(D)$ — локально. Тогда для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ задача (1) — (2) имеет решение $Y = \varphi(x)$, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, причем это решение задачи (1) — (2) единственное.

▶ Возьмем произвольную точку $(x_0, Y_0) \in (D)$. По условию, $F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y(D)$ — локально $\Rightarrow$ существует $U_\delta(x_0,Y_0)$, такая, что $U_\delta(x_0,Y_0) \subset (D)$, и $F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y\,(U_\delta(x_0,Y_0))$. Пусть $L > 0$ — постоянная Липшица для $F(x,Y)$ в $U_\delta(x_0,Y_0)$. Возьмем числа a, b ($a > 0$, $b > 0$), такие, что $(\bar{P}_{ab}) \subset U_\delta(x_0,Y_0)$. Пусть $M = \max\limits_{(P_{ab})} \|\mathrm{F}(x,\mathrm{Y})\|$, $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$. По лемме, доказанной выше, все приближения Пикара

$$\psi_0(x) \equiv Y_0, \psi_k(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F\left(x, \psi_{k-1}(x)\right) dx (k = 1, 2, \dots)$$

определены и непрерывны на отрезке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ и удовлетворяют условию

$$\|\psi_k(x) - Y_0\| \le b.$$

1) Покажем, что $\{\psi_k(x)\}_{k\in\mathrm{N}}$ сходится равномерно относительно x на I. Для этого рассмотрим функциональный ряд

$$\psi_0(x) + [\psi_1(x) - \psi_0(x)] + \dots + [\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)] + \dots . \qquad (3)$$

Замечаем, что $S_0(x) = \psi_0(x)$, $S_1(x) = \psi_1(x)$, ... , $S_k(x) = \psi_k(x)$, . Значит, равномерная сходимость последовательности $\{\psi_k(x)\}_{k\in\mathrm{N}}$, $x \in I$, равносильна равномерной сходимости ряда (3) на I. Установим равномерную сходимость ряда (3) на I. Для этого произведем оценку членов ряда (3). Имеем

$$\|\psi_0(x)\| = \|Y_0\|, x \in I.$$

$$\underline{\|\psi_1(x) - \psi_0(x)\|} = \|\psi_1(x) - Y_0\| = \left\|\int\limits_{x_0}^{x} F(x, Y_0)\, dx\right\| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{x_0}^{x} \|F(x, Y_0)\|\, dx\right| \le \underline{M \cdot |x - x_0|} \le M \cdot h = \frac{M}{L} \cdot (Lh), x \in I.$$

Имеем, далее:

$$\|\psi_2(x)-\psi_1(x)\| = \left\|\int_{x_0}^{x}\left(F(x,\psi_1(x))-F(x,\psi_0(x))\right)dx\right\| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x}\Big\|F\underbrace{(x,\psi_1(x))}_{(\bullet)\in(\bar{P}_{ab})}-F\underbrace{(x,\psi_0(x))}_{(\bullet)\in(\bar{P}_{ab})}\Big\|dx\right| \le L\cdot\left|\int_{x_0}^{x}\underbrace{\|\psi_1(x)-\psi_0(x)\|}_{\le M|x-x_0|}dx\right| \le$$

$$\le L\cdot M\cdot\left|\int_{x_0}^{x}|x-x_0|\,dx\right| = L\cdot M\frac{|x-x_0|^2}{2} \le \frac{ML}{2}\cdot h^2 = \frac{M}{L}\cdot\frac{(L\cdot h)^2}{2!}, x\in I.$$

Допустим, что

$$\underline{\|\psi_k(x)-\psi_{k-1}(x)\|} \le \underline{\frac{M}{L}\cdot\frac{L^k}{k!}|x-x_0|^k} \le \frac{M}{L}\cdot\frac{L^k\cdot h^k}{k!}, x\in I. \tag{4}$$

Но тогда

$$\|\psi_{k+1}(x)-\psi_k(x)\| = \left\|\int_{x_0}^{x}\left(F(x,\psi_k(x))-F(x,\psi_{k-1}(x))\right)dx\right\| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x}\|F(x,\psi_k(x))-F(x,\psi_{k-1}(x))\|\,dx\right| \le L\cdot\left|\int_{x_0}^{x}\underline{\|\psi_k(x)-\psi_{k-1}(x)\|}dx\right| \le$$

$$\le \frac{M}{L}\cdot\frac{L^{k+1}}{k!}\left|\int_{x_0}^{x}|x-x_0|^k\,dx\right| \le \frac{M}{L}\cdot\frac{L^{k+1}}{(k+1)!}\cdot|x-x_0|^{k+1} \le \frac{M}{L}\cdot\frac{(L\cdot h)^{k+1}}{(k+1)!}, x\in I.$$

Видим, что переход от k к $k+1$ сделан. Значит, оценка (4) справедлива на I для любого $k\in\mathbb{N}$. Введем в рассмотрение ряд

$$\|Y_0\| + \frac{M}{L}\cdot\frac{(Lh)}{1!} + \frac{M}{L}\cdot\frac{(Lh)^2}{2!} + \ldots + \frac{M}{L}\cdot\frac{(Lh)^k}{k!} + \ldots. \tag{5}$$

Ряд (5) — числовой, положительный, сходящийся. Он является мажорантным для ряда (3) на $I \Rightarrow$ функциональный ряд (3) сходится равномерно на I.

Пусть $\varphi(x)$, $x\in I$, — сумма ряда (3). Имеем $S_k(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $x\in I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \psi_k(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x),\ x \in I. \tag{6}$$

Так как $\psi_k(x) \in C(I)$, то из (6) $\Rightarrow$ $\varphi(x) \in C(I)$.

2) Покажем, что вектор-функция $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, является решением задачи (1) — (2). Для этого берем k-е приближение Пикара

$$\psi_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, \psi_{k-1}(x))\,dx,\ x \in I. \tag{7}$$

Было показано, что $\psi_k(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $x \in I$. Покажем теперь, что

$$F(x, \psi_{k-1}(x)) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} F(x, \varphi(x)),\ x \in I.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. У нас $F(x,Y) \in C(\bar{P}_{ab})$ $\Rightarrow$ $F(x,Y)$ равномерно непрерывная в $(\bar{P}_{ab})$ $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых двух точек $(\tilde{x}, \tilde{Y})$ и $(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{Y}})$ из $(\bar{P}_{ab})$, для которых $|\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}| < \delta$, $\|\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}\| < \delta$, будет $\|F(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{Y}}) - F(\tilde{x}, \tilde{Y})\| < \varepsilon$. У нас $\psi_{k-1}(x) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $x \in I$ $\Rightarrow$ по числу $\delta > 0$ (найденному по ε) можно указать номер K, такой, что как только $k > K$, так сейчас же

$$\|\psi_{k-1}(x) - \varphi(x)\| < \delta, \text{ для всех } x \in I.$$

Но тогда при $k > K$ будет

$$\|F(x, \psi_{k-1}(x)) - F(x, \varphi(x))\| < \varepsilon, \text{ для всех } x \in I.$$

Последнее означает, что $F(x, \psi_{k-1}(x)) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} F(x, \varphi(x))$, $x \in I$. Перейдем в соотношении (7) к пределу при $k \to +\infty$. Получим

$$\varphi(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, \varphi(x))\,dx,\ x \in I. \tag{8}$$

Из (8) следует:

$$\begin{cases} 1)\ \varphi'(x) = F(x, \varphi(x)), x \in I; \\ 2)\ \varphi(x_0) = Y_0. \end{cases}$$

А это означает, что $Y=\varphi(x)$, $x\in I$ — решение задачи (1) — (2).

3) Покажем теперь, что это решение — единственное. Рассуждаем от противного, а именно предполагаем, что задача (1) — (2) имеет и другие решения. Возьмем тогда два любых решения задачи (1) — (2):

$$Y=\tilde{\varphi}(x), x\in I_{\delta};\quad Y=\tilde{\tilde{\varphi}}(x), x\in I_{\tilde{\delta}}.$$

По условию $F(x,Y)\in \mathrm{Lip}_Y(D)$ — локально $\Rightarrow$ точке (x_0,Y_0) отвечает окрестность $U(x_0,Y_0)\subset(D)$, такая, что $F(x,Y)\in \mathrm{Lip}_Y\left(U(x_0,Y_0)\right)$.

У нас функции $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\tilde{\varphi}}(x)$ — непрерывные. Значит, существует $\delta>0$, такое, что для любого $x\in I_\delta$ будет: точка $(x,\tilde{\varphi}(x))$ и точка $\left(x,\tilde{\tilde{\varphi}}(x)\right)\in U(x_0,Y_0)$. Так как $Y=\tilde{\varphi}(x)$ и $Y=\tilde{\tilde{\varphi}}(x)$ — решения задачи (1) — (2), то

$$\tilde{\varphi}'(x)=F\left(x,\tilde{\varphi}(x)\right), x\in I_\delta,$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}'(x)=F\left(x,\tilde{\tilde{\varphi}}(x)\right), x\in I_\delta.$$

Проинтегрируем оба этих соотношения по отрезку $[x_0,x]$, $x\in I_\delta$. Получаем

$$\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\varphi}(x_0)+\int_{x_0}^{x}F\left(x,\tilde{\varphi}(x)\right)dx,\ \tilde{\tilde{\varphi}}(x)=\tilde{\tilde{\varphi}}(x_0)+\int_{x_0}^{x}F\left(x,\tilde{\tilde{\varphi}}(x)\right)dx, x\in I_\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \tilde{\tilde{\varphi}}(x)-\tilde{\varphi}(x)=\int_{x_0}^{x}\left(F\left(x,\tilde{\tilde{\varphi}}(x)\right)-F\left(x,\tilde{\varphi}(x)\right)\right)dx, x\in I_\delta\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left\|\tilde{\tilde{\varphi}}(x)-\tilde{\varphi}(x)\right\|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left\|F\left(x,\tilde{\tilde{\varphi}}(x)\right)-F\left(x,\tilde{\varphi}(x)\right)\right\|dx\right|\le L\cdot\left|\int_{x_0}^{x}\left\|\tilde{\tilde{\varphi}}(x)-\tilde{\varphi}(x)\right\|dx\right|$$

(здесь L — постоянная Липшица). Обозначим $\left\|\tilde{\tilde{\varphi}}(x)-\tilde{\varphi}(x)\right\|=f(x)$, $x\in I_\delta$. Будем иметь:

1) $f(x)\in C(I_\delta)$;

2) $f(x)$ удовлетворяет неравенству: $0\le f(x)\le L\cdot\left|\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt\right|$, $x\in I_\delta$.

Но тогда по лемме Гронуола

$$f(x) \equiv 0,\ x \in I_\delta \quad \Rightarrow \quad \tilde{\tilde{\varphi}}(x) = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in I_\delta. \blacktriangleleft$$

Следствие. Пусть $F(x,Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $\dfrac{\partial F(x,Y)}{\partial Y} \in$ $\in C(D)$. Тогда для любой точки $(x_0,Y_0) \in (D)$ задача (1) — (2) имеет единственное решение.

Замечание. Так как ряд (3) на отрезке I мажорируется числовым, положительным, сходящимся рядом (5), то, полагая $\varphi(x) \approx \psi_k(x)$, $x \in I$, всегда можно оценить погрешность этого приближения. Именно: норма упомянутой погрешности не превосходит остатка после k-го члена мажорантного ряда (5).

Замечание (о приведении нормального дифференциального уравнения n-го порядка к нормальной системе n уравнений первого порядка). Пусть имеется дифференциальное уравнение n-го порядка вида

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}). \tag{9}$$

Покажем, что оно может быть приведено к нормальной системе n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В самом деле, обозначим искомую функцию $y(x)$ через $y_1(x)$ и введем в рассмотрение новые функции: $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., $y_n(x)$, положив: $y_2(x) = y_1'(x)$, $y_3(x) = y_2'(x)$, $\cdots$, $y_n(x) = y_{n-1}'(x)$. В силу такого выбора новых функций, и принимая во внимание уравнение (9), будем иметь:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \quad [= f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n)], \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \quad [= f_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n)], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \quad [= f_{n-1}(x,y_1,y_2,\dots,y_n)], \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \quad [= f_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n)]. \end{cases} \tag{10}$$

Заметим, что если найдено решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, , $y_n = \varphi_n(x)$ системы (10), то тем самым найдено решение $y = \varphi(x)$ уравнения (9), ибо $\varphi(x) = \varphi_1(x)$.

И, наоборот, если найдено решение $y = \varphi(x)$ уравнения (9), то тем самым найдено решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, , $y_n = \varphi_n(x)$ системы (10), ибо $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, $\varphi_2(x) = \varphi'(x)$, , $\varphi_n(x) = \varphi^{(n-1)}(x)$. Такое же соответствие имеет место и для задач Коши. Именно, если $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ есть решение системы (10), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1\big|_{x=x_0} = y_{10}, \quad y_2\big|_{x=x_0} = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_n\big|_{x=x_0} = y_{n0},$$

то функция $y(x)$ $(= y_1(x))$ будет решением уравнения (9), удовлетворяющим начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0} = y_{10} \ \ (= y_0), \quad y'\big|_{x=x_0} = y_{20} \ \ (= y_0'), \quad \ldots,$$

$$y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_{n0} \ \ (= y_0^{(n-1)}).$$

И, наоборот, если $y = y(x)$ — решение уравнения (9), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

то $y_1 = y(x)$, $y_2 = y'(x)$, , $y_n = y^{(n-1)}(x)$ будет решением системы (10), удовлетворяющим начальным условиям:

$$y_1\big|_{x=x_0} = y_0 \ \ (= y_{10}), \quad y_2\big|_{x=x_0} = y_0' \ \ (= y_{20}), \quad \ldots,$$

$$y_n\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \ \ (= y_{n0}).$$

Из следствия к теореме о существовании и единственности решения нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает, что:

если 1) функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, и

если 2) всюду в (D) существуют непрерывные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \ldots,$

$\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для любой точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in (D)$ задача Коши

уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ имеет, и притом единственное, решение.

§4. Общее решение и общий интеграл нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Пусть имеется нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = F(x,Y). \tag{1}$$

Предполагается, что 1) $F(x,Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^{n+1}$, и

2) $F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y(D)$ — локально.

Определение. Семейство вектор-функций

$$Y = \varphi(x,C), \text{ где } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

— произвольный постоянный вектор, называется *общим решением* системы (1) в области (D), если, во-первых, для любой точки $(x_0,Y_0) \in (D)$ векторное уравнение

$$Y_0 = \varphi(x_0,C) \tag{3}$$

имеет единственное решение $C = C_0 = \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \\ \dots \\ C_n^0 \end{pmatrix}$ и если, во-вторых, вектор-функция

$$Y = \varphi(x,C_0), \quad x \in I_\delta \qquad [I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \tag{4}$$

является решением системы (1), хотя бы при достаточно малом δ.

Ясно, что это решение (4) удовлетворяет начальному условию $Y\big|_{x=x_0} = Y_0$.

Определение. Пусть $U(x,Y) = \begin{pmatrix} u_1(x,Y) \\ u_2(x,Y) \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ u_n(x,Y) \end{pmatrix} \in C^1(D)$ и пусть $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$ — произвольный постоянный вектор. Соотношение

$$U(x,Y)=C \tag{5}$$

называется *общим интегралом* системы (1) в (D), если, во-первых, для любой точки $(x_0,Y_0)\in(D)$ векторное уравнение

$$U(x,Y)=U(x_0,Y_0) \tag{6}$$

определяет единственную дифференцируемую вектор-функцию

$$Y=\varphi(x),\quad x\in I_\delta=(x_0-\delta,x_0+\delta), \tag{7}$$

такую, что $\varphi(x_0)=Y_0$; $U(x,\varphi(x))\equiv U(x_0,Y_0)$, $x\in I_\delta$, и если, во-вторых, эта вектор-функция $Y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta$, хотя бы при достаточно малом δ является решением системы (1).

2°. Необходимый признак общего интеграла.

Теорема. Пусть $U(x,Y)=C$ — общий интеграл системы (1) в области (D). Тогда для любого решения $Y=\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$ системы (1), график которого лежит в (D), справедливо тождество

$$U(x,\varphi(x))\equiv\text{const},\quad x\in\langle a,b\rangle.$$

▶ Пусть $Y=\tilde\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$ — произвольное решение системы (1), график которого лежит в (D). У нас $U(x,Y)\in C^1(D)$, $\tilde\varphi(x)\in C^1(\langle a,b\rangle)\Rightarrow U(x,\tilde\varphi(x))\in C^1(\langle a,b\rangle)$.

Мы покажем, что $U(x,\tilde\varphi(x))\equiv\text{const}$, $x\in\langle a,b\rangle$, если установим, что

$$\frac{d}{dx}U(x,\tilde\varphi(x))\equiv 0,\quad x\in\langle a,b\rangle.$$

Для этого берем произвольную точку $x_0\in\langle a,b\rangle$ и находим $\tilde\varphi(x_0)=Y_0$. Ясно, что точка $(x_0,Y_0)\in(D)$. Рассмотрим теперь векторное уравнение

$$U(x,Y)=U(x_0,Y_0).$$

По определению общего интеграла системы (1) это уравнение определяет единственную дифференцируемую вектор-функцию $Y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta$, такую, что $\varphi(x_0)=Y_0$, и которая при достаточно малом δ является решением системы (1).

Ясно, что для $x\in I_\delta$ будет

$$U(x,\varphi(x))\equiv U(x_0,Y_0). \tag{8}$$

Имеем:

1) $Y=\tilde\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$, — решение системы (1), такое, что $\tilde\varphi(x_0)=Y_0$;

2) $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, — решение системы (1), такое, что $\varphi(x_0) = Y_0$.

Видим, что оба эти решения удовлетворяют одному и тому же начальному условию

$$Y\big|_{x=x_0} = Y_0, \quad (x_0, Y_0) \in (D).$$

Так как (D) — область единственности системы (1), то $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, по крайней мере, при достаточно малом δ. А тогда, в силу (8), $U(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv U(x_0, Y_0)$, $x \in I_\delta \Rightarrow \dfrac{d}{dx} U(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv 0$, $x \in I_\delta \Rightarrow$ в частности, $\left.\dfrac{d}{dx} U(x, \tilde{\varphi}(x))\right|_{x=x_0} = 0$.

У нас точка x_0 — любая из $\langle a, b\rangle$ ($\langle a, b\rangle$ — промежуток, на котором определено решение $Y = \tilde{\varphi}(x)$ системы (1)). Поэтому получаем

$$\frac{d}{dx} U(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b\rangle. \blacktriangleleft$$

Следствие. Если $U(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n(x, Y) \end{pmatrix} = C$ — общий интеграл системы (1) в (D), то для любого решения $Y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, системы (1) справедливы тождества

$$u_i(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}, \quad x \in \langle a, b\rangle \quad (i = \overline{1, n}).$$

Определение. Скалярная функция $u(x, Y) \in C^1(D)$ называется интегралом системы (1) в (D), если она тождественно обращается в постоянную на любом решении системы (1), график которого лежит в (D).

Замечание. Любая скалярная функция $u(x, Y) \equiv \text{const}$ в (D) есть интеграл системы (1) в (D) (это — "тривиальные интегралы"; их мы рассматривать не будем).

3°. Критерий интеграла.

Теорема. Скалярная функция $u(x, Y) \in C^1(D)$ является интегралом системы (1) в (D) тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$\frac{\partial u(x,Y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,Y)}{\partial Y}\cdot F(x,Y)\equiv 0 \text{ в } (D). \tag{9}$$

(Здесь $\dfrac{\partial u(x,Y)}{\partial Y}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial y_1},\dfrac{\partial u}{\partial y_2},\dots,\dfrac{\partial u}{\partial y_n}\right)$ — матрица-строка, $F(x,Y)=$

$=\begin{pmatrix} f_1(x,Y)\\ f_2(x,Y)\\ \dots\\ f_n(x,Y)\end{pmatrix}$ — матрица-столбец, так что $\dfrac{\partial u(x,Y)}{\partial Y}\cdot F(x,Y)=$

$=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial u(x,Y)}{\partial y_j}\cdot f_j(x,Y)$).

▶ *Необходимость.* Дано: $u(x,Y)\in C^1(D)$ является интегралом системы (1) в (D). Требуется доказать, что в (D) имеет место тождество (9).

Возьмем любую точку $(x_0,Y_0)\in(D)$ и рассмотрим решение $Y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ системы (1), удовлетворяющее условию $Y\big|_{x=x_0}=Y_0$ ($\Rightarrow \varphi(x_0)=Y_0$). Станем рассматривать функцию $u(x,Y)$ в точках графика этого решения.

По определению интеграла системы (1), будем иметь

$$u(x,\varphi(x))\equiv \text{const},\quad x\in I_\delta. \tag{10}$$

Левая часть тождества (10) дифференцируема по x на I_δ, так как $u(x,Y)\in C^1(D)$, $\varphi(x)\in C^1(I_\delta)$. Дифференцируя по x тождество (10), получим

$$\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}+\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial Y}\cdot\varphi'(x)\equiv 0,\quad x\in I_\delta.$$

Но $\varphi'(x)\equiv F(x,\varphi(x))$, $x\in I_\delta$ (так как $Y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta$, — решение системы (1)). Поэтому будем иметь

$$\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}+\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial Y}\cdot F(x,\varphi(x))\equiv 0,\quad x\in I_\delta.$$

Положим в последнем равенстве $x=x_0$ (тогда $\varphi(x_0)=Y_0$). Получим

$$\frac{\partial u(x_0,Y_0)}{\partial x}+\frac{\partial u(x_0,Y_0)}{\partial Y}\cdot F(x_0,Y_0)=0.$$

У нас точка (x_0,Y_0) — любая, принадлежащая (D). Поэтому $\dfrac{\partial u(x,Y)}{\partial x}+\dfrac{\partial u(x,Y)}{\partial Y}\cdot F(x,Y)\equiv 0$ в (D). Необходимость доказана.

Достаточность. Имеет место тождество

$$\frac{\partial u(x,Y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,Y)}{\partial Y}\cdot F(x,Y)\equiv 0 \text{ в } (D). \tag{9}$$

Требуется доказать, что $u(x,Y)$ — интеграл системы (1) в (D).

Берем произвольное решение системы (1) в (D):

$$Y=\varphi(x), \quad x\in\langle a,b\rangle.$$

Так как левая часть (9) тождественно равна нулю в (D), то она равна нулю и на взятом решении, т. е.

$$\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}+\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial Y}\cdot F(x,\varphi(x))\equiv 0, \quad x\in\langle a,b\rangle.$$

Так как $Y=\varphi(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$, — решение системы (1) в (D), то $F(x,\varphi(x))\equiv\varphi'(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$. Следовательно, будем иметь

$$\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}+\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial Y}\cdot\varphi'(x)\equiv 0, \quad x\in\langle a,b\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du(x,\varphi(x))}{dx}\equiv 0, \quad x\in\langle a,b\rangle \Rightarrow u(x,\varphi(x))\equiv C, \quad x\in\langle a,b\rangle.$$

Последнее означает, что $u(x,Y)$ — интеграл системы (1) в (D). ◀

Замечание. Допустим, что для системы (1) удалось построить в (D) n интегралов. Тогда можно построить вектор-функцию

$$U(x,Y)=\begin{pmatrix} u_1(x,Y) \\ u_2(x,Y) \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ u_n(x,Y)\end{pmatrix}$$

и образовать соотношение $U(x,Y)=C$ (*).

Выясним, какими должны быть интегралы $u_1(x, Y)$, $u_2(x, Y)$, ..., $u_n(x, Y)$, чтобы соотношение (*) было общим интегралом системы (1) в (D).

4°. Понятие независимости интегралов. Пусть $u_1(x,Y)$, $u_2(x,Y)$, ... , $u_k(x,Y)$, $k>1$ — интегралы системы (1) в (D). Составим векторный интеграл

$$U^{[k]}(x,Y)=\begin{pmatrix} u_1(x,Y)\\ u_2(x,Y)\\ . \quad . \quad .\\ u_k(x,Y)\end{pmatrix}.$$

Составим матрицу Якоби для этого векторного интеграла

$$\frac{\partial U^{[k]}}{\partial(x,Y)}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_n}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x} & \dfrac{\partial u_k}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_k}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial u_k}{\partial y_n}\end{pmatrix}.$$

Определение. Интегралы $u_1(x,Y)$, $u_2(x,Y)$, , $u_k(x,Y)$ системы (1) в (D) называются независимыми, если для любой точки $(x,Y)\in(D)$

$$\operatorname{rang}\frac{\partial U^{[k]}}{\partial(x,Y)}=k.$$

Справедливо утверждение:

Пусть функции $u_1(x,Y)$, $u_2(x,Y)$, ..., $u_k(x,Y)$ являются интегралами системы (1) в (D). Тогда $\operatorname{rang}\dfrac{\partial U^{[k]}}{\partial(x,Y)}=\operatorname{rang}\dfrac{\partial U^{[k]}}{\partial Y}$, $(x,Y)\in(D)$, где

$$\frac{\partial U^{[k]}}{\partial Y}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_n}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial u_k}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_k}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial u_k}{\partial y_n}\end{pmatrix}.$$

▶ По условию функции $u_i(x,Y)$ $(i=\overline{1,k})$ являются интегралами системы (1) в (D). Но тогда справедливы тождества:

$$\frac{\partial u_i(x,Y)}{\partial x}+\frac{\partial u_i(x,Y)}{\partial Y}\cdot F(x,Y)\equiv 0 \text{ в } (D) \ (i=\overline{1,k}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i(x,Y)}{\partial x}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i(x,Y)}{\partial y_j}\cdot f_j(x,Y)\text{, для любой точки } (x,Y)\in(D)$$

$(i=\overline{1,k})$.

Возьмем произвольную точку $(x,Y)\in(D)$ и закрепим ее. Предыдущее соотношение означает, что в закрепленной точке первый столбец матрицы $\dfrac{\partial U^{[k]}}{\partial(x,Y)}$ является линейной комбинацией остальных ее столбцов (числа $-f_1(x,Y)$, $-f_2(x,Y)$, , $-f_n(x,Y)$ выступают в качестве коэффициентов). Из этого и следует справедливость утверждения. ◀

Следствие. Система (1) имеет в области (D) не более чем n независимых интегралов.

▶ Это следует из того, что

$$\operatorname{rang}\frac{\partial U^{[k]}}{\partial Y}=\operatorname{rang}\underbrace{\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_n}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial u_k}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_k}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial u_k}{\partial y_n}\end{pmatrix}}_{k \text{ строк; } n \text{ столбцов}}\le n\text{, при любом } k. ◀$$

5°. Достаточный признак общего интеграла.

Теорема. Пусть $u_1(x,Y)$, $u_2(x,Y)$, , $u_n(x,Y)$ — интегралы системы (1) в (D). Пусть $U(x,Y)=\begin{pmatrix}u_1(x,Y)\\ u_2(x,Y)\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\\ u_n(x,Y)\end{pmatrix}$. Тогда если интегралы $u_1(x,Y)$, $u_2(x,Y)$, ..., $u_n(x,Y)$ — независимые в (D), то соотношение

$$U(x,Y)=C \tag{11}$$

есть общий интеграл системы (1) в (D).

▶ Покажем, что соотношение (11) удовлетворяет определению общего интеграла. Для этого берем произвольную точку $(x_0,Y_0)\in(D)$ и рассматриваем векторное уравнение

$$U(x,Y)=U(x_0,Y_0). \tag{12}$$

Перепишем (12) в виде

$$\underbrace{U(x,Y)-U(x_0,Y_0)}_{=G(x,Y)\ \text{(обозначение)}}=0 \tag{13}$$

Имеем:

1) $G(x,Y)\in C^1(D)$ (так как $U(x,Y)\in C^1(D)$).

2) $G(x_0,Y_0)=0$;

3) $\det\dfrac{\partial G}{\partial Y}\bigg|_{(x_0,Y_0)}=\det\dfrac{\partial U}{\partial Y}\bigg|_{(x_0,Y_0)}\neq 0$ (так как интегралы $u_i(x,Y)$, $i=\overline{1,n}$ — независимые в (D)).

Видим, что выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости векторного уравнения (13) (см. теорию неявных функций). По этой теореме векторное уравнение (13) определяет единственную дифференцируемую вектор-функцию

$$Y=\varphi(x),\quad x\in I_\delta=(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

такую, что $\varphi(x_0)=Y_0$.

Покажем, что вектор-функция $Y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta$, является решением системы (1), по крайней мере, при достаточно малом δ $(\delta>0)$.

Так как вектор-функция $Y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta$, — неявная, дифференцируемая функция, определяемая уравнением (13), то она обращает (13) в тождество относительно x на интервале I_δ, т.е. $U(x,\varphi(x))-U(x_0,Y_0)\equiv 0$, $x\in I_\delta$. Дифференцируя по x это тождество, получим

$$\frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial x}+\frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial Y}\cdot\varphi'(x)\equiv 0,\quad x\in I_\delta. \tag{14}$$

У нас $U(x,Y)$ — векторный интеграл системы в (D). Значит, каждая его компонента $u_i(x,Y)$ $(i=\overline{1,n})$ удовлетворяет в (D) тождеству

$$\frac{\partial u_i(x,Y)}{\partial x}+\frac{\partial u_i(x,Y)}{\partial Y}\cdot F(x,Y)\equiv 0.$$

Эти n скалярных тождеств можно переписать в виде одного векторного тождества:

$$\frac{\partial U(x,Y)}{\partial x}+\frac{\partial U(x,Y)}{\partial Y}\cdot F(x,Y)\equiv 0 \text{ в } (D).$$

Так как это тождество имеет место всюду в (D), то, в частности, оно выполняется на линии $Y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta$. Поэтому

$$\frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial x}+\frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial Y}\cdot F(x,\varphi(x))\equiv 0,\quad x\in I_\delta. \tag{15}$$

Возьмем любое $x\in I_\delta$ и закрепим его. Рассмотрим при этом x линейную систему

$$\frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial x}+\frac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial Y}\cdot Z\equiv 0,\ \text{где}\ Z=\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \dots\\ z_n\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Определителем этой системы является $\det\dfrac{\partial U(x,\varphi(x))}{\partial Y}$. Он отличен от нуля в силу независимости интегралов $u_1(x,Y)$, $u_2(x,Y)$, $u_n(x,Y)$. Следовательно, система (16) имеет единственное решение. Но, как следует из (14) и (15), эта система имеет своими решениями векторы

$$Z=\varphi'(x) \text{ и } Z=F(x,\varphi(x)).$$

Так как система (16) имеет единственное решение, то получаем, что для взятого $x\in I_\delta$

$$\varphi'(x)=F(x,\varphi(x)).$$

У нас x — любое, принадлежащее I_δ. Поэтому будем иметь $\varphi'(x)\equiv F(x,\varphi(x))$, $x\in I_\delta$. Последнее означает, что $Y=\varphi(x)$, $x\in I_\delta$, — решение системы (1). ◀

Таким образом, показано, что соотношение (11) удовлетворяет определению общего интеграла системы (1) в (D).

Замечание 1. Чтобы составить общий интеграл системы (1) в (D), нужно найти n независимых интегралов этой системы.

Замечание 2. Пусть скалярная функция $u(x,Y)\in C^1(D)$ — интеграл системы (1) в (D), отличный от тривиального (т.е. $u(x,Y)\not\equiv$ const в (D)). Соотношение $u(x,Y)=C$ называется *первым интегралом* системы (1) в (D). Отметим, что если

$$U(x,Y)=\begin{pmatrix}u_1(x,Y)\\u_2(x,Y)\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\u_n(x,Y)\end{pmatrix}=C$$ — общий интеграл системы (1) в (D), то

$u_i(x,Y)=C_i$ $(i=\overline{1,n})$ — первые интегралы системы (1) в (D).

6°. Примеры и задачи к §4.

Задача 1. Дана система уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-z & (=f_1),\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z^2-x}{y} & (=f_2).\end{cases}$$

Проверить, будут ли функции: 1) $u=x^2+2yz$, 2) $u=y-xz^2$ интегралами данной системы.

Решение. Мы знаем (см. критерий интеграла), что функция $u(x,y,z)\in C^1(D)$ будет интегралом данной системы в области (D) тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\cdot f_1+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\cdot f_2\equiv 0,\ \text{в}\ (D).$$

У нас $f_1(x,y,z)=-z$; $f_2(x,y,z)=\dfrac{z^2-x}{y}$; (D) — множество всех точек (x,y,z) $(y\neq 0)$. Имеем:

$$1)\ 2x+2z(-z)+2y\frac{z^2-x}{y}=2x-2z^2+2z^2-2x\equiv 0;$$

$$2)\ -z^2+1\cdot(-z)-2xz\frac{z^2-x}{y}=-z^2-z-2xz\frac{z^2-x}{y}\not\equiv 0.$$

Вывод. Функция $u=x^2+2yz$ есть интеграл заданной системы уравнений, а функция $u=y-xz^2$ интегралом заданной системы не является.

Задача 2. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} & (= f_1), \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2y^2 - xz}{x^2} & (= f_2). \end{cases}$$

Убедиться, что функции $u_1(x,y,z) = xy$, $u_2(x,y,z) = xz + y^2$ являются интегралами данной системы в области (D) ((D) — множество всех точек (x,y,z), $x \neq 0$), и выяснить, независимы ли в (D) указанные интегралы.

Решение. Имеем:

1) $\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial y} f_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial z} f_2 = y + x\left(-\dfrac{y}{x}\right) = y - y \equiv 0$ в (D);

2) $\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y} f_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial z} f_2 = z + 2y\left(-\dfrac{y}{x}\right) + x\dfrac{2y^2 - xz}{x^2} = z - \dfrac{2y^2}{x} + \dfrac{2y^2}{x} -$
$- z \equiv 0$ в (D).

Следовательно, функции $u_1 = xy$ и $u_2 = xz + y^2$ — интегралы заданной системы. Чтобы выяснить, независимы ли эти интегралы в (D), составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 2y & x \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен двум; следовательно, интегралы $u_1 = xy$, $u_2 = xz + y^2$ независимы в (D).

Задача 3. Доказать, что функция $u(y,z) = y^2 + z^2 - 2\ln|yz - 1|$ вдоль траектории любого решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z - yz^2, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y - z + y^2 z \end{cases}$$

постоянна.

▶ *Решение.* Пусть $\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$ — решение заданной системы уравнений. Вдоль траектории этого решения функция

$$u(y(x), z(x)) = y^2(x) + z^2(x) - \ln\left(y(x)z(x) - 1\right)^2$$

непрерывно дифференцируема. Найдем производную этой функции:

$$\frac{d}{dx}u\big(y(x),z(x)\big)=2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}-\frac{2(yz-1)\left(y\dfrac{dz}{dx}+z\dfrac{dy}{dx}\right)}{(yz-1)^2}=$$

$$=2\left(y-\frac{z}{yz-1}\right)\frac{dy}{dx}+2\left(z-\frac{y}{yz-1}\right)\frac{dz}{dx}=$$

$$=\frac{2}{yz-1}\left[(y^2z-y-z)\frac{dy}{dx}+(yz^2-y-z)\frac{dz}{dx}\right]=$$

$$=\frac{2}{yz-1}\left[(y^2z-y-z)(y+z-yz^2)+(yz^2-y-z)(-y-z+y^2z)\right]=$$

$$=\frac{2}{yz-1}(y^2z-y-z)\underbrace{[y+z-yz^2+yz^2-y-z]}_{\equiv 0}\equiv 0\,.$$

Итак, получили: для всех x из промежутка существования решения $\begin{pmatrix}y(x)\\ z(x)\end{pmatrix}$ имеем: $\dfrac{du\big(y(x),z(x)\big)}{dx}\equiv 0$. Значит, $u\big(y(x),z(x)\big)=C$ (const). ◀

§5. Методы интегрирования нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Метод исключения. Метод исключения является основным методом интегрирования нормальной системы. Он сводит задачу интегрирования данной системы к интегрированию одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых представляет собой уравнение относительно одной неизвестной функции. Сущность метода состоит в следующем.

В системе

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\dots y_n),\\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,y_1,y_2,\dots y_n),\\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,y_2,\dots y_n)\end{cases}\qquad(1)$$

берем какое-нибудь уравнение, например первое, и дифференцируем его по x. Получим

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y_2' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot y_n'.$$

Подставляя сюда значения y_1', y_2', ..., y_n' из системы (1), будем иметь

$$y_1'' = \frac{\partial f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(\ldots)}{\partial y_1} \cdot f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) + \\ + \frac{\partial f_1(\ldots)}{\partial y_2} \cdot f_2(\ldots) + \ldots + \frac{\partial f_1(\ldots)}{\partial y_n} \cdot f_n(\ldots),$$

или

$$y_1'' = f_{11}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{2}$$

Полученное соотношение (2) тоже дифференцируем по x и подобным же образом, т.е. используя уравнения системы (1), приходим к уравнению

$$y_1''' = f_{12}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{3}$$

После $(n-1)$ таких шагов мы придем к уравнению

$$y_1^{(n)} = f_{1,n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{4}$$

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n), \\ y_1'' = f_{11}(x, y_1, y_2, \ldots y_n), \\ y_1''' = f_{12}(x, y_1, y_2, \ldots y_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_1^{(n-1)} = f_{1,n-2}(x, y_1, y_2, \ldots y_n), \\ y_1^{(n)} = f_{1,n-1}(x, y_1, y_2, \ldots y_n). \end{cases} \tag{5}$$

Допустим, что из первых $(n-1)$ уравнений системы (5) удается найти y_2, y_3, ..., y_n, т.е. выразить y_2, y_3, ..., y_n через x, y_1, y_1', y_1'', ..., $y_1^{(n-1)}$

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{cases} \tag{6}$$

Подставляя эти значения для $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$ в последнее уравнение системы (5), будем иметь

$$y_1^{(n)} = f(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}). \tag{7}$$

Получили, таким образом, одно дифференциальное уравнение n-го порядка относительно одной неизвестной функции. Интегрируя это уравнение, получим

$$y_1 = \Phi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \tag{8}$$

(предполагается, что мы умеем находить общее решение уравнения (7)).

Теперь, дифференцируя полученную функцию (8) последовательно $(n-1)$ раз и подставляя значения $y_1,\ y_1',\ y_1'',\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}$ в (6), получим

$$\begin{aligned} y_2 &= \Phi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ y_3 &= \Phi_3(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n &= \Phi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{aligned}$$

которые вместе с ранее найденным $y_1\ \ (= \Phi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n))$ составляют общее решение системы (1).

Замечание. В рассматриваемом случае процесс исключения можно вести и в ином порядке. Так, например, можно выразить $y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$ через $x,\ y_1,\ y_1'',\ y_1''' \ldots,\ y_1^{(n)}$ из последних $(n-1)$ уравнений системы (5) и подставить в первое.

Пример 1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -3x - 2y_1 + 3y_2 + 4y_3,\\ \dfrac{dy_2}{dx} = 1 - 7x - 6y_1 + 7y_2 + 6y_3,\\ \dfrac{dy_3}{dx} = x + y_1 - y_2 + y_3. \end{cases} \tag{$\tilde{1}$}$$

▶ Продифференцируем по x первое уравнение из системы $(\tilde{1})$:

$$y_1'' = -3 - 2y_1' + 3y_2' + 4y_3'.$$

Подставляя здесь вместо $y_1',\ y_2',\ y_3'$ их выражения из $(\tilde{1})$, получим

$$y_1'' = -11x - 10y_1 + 11y_2 + 14y_3. \tag{$\tilde{2}$}$$

Полученное уравнение $(\tilde{2})$ дифференцируем по x:

$$y_1''' = -11 - 10y_1' + 11y_2' + 14y_3'. \tag{$\tilde{3}$}$$

И здесь вместо y_1', y_2', y_3' подставляем их выражения из $(\tilde{1})$. Получим

$$y_1''' = -33x - 32y_1 + 33y_2 + 40y_3. \qquad (\tilde{4})$$

Рассматриваем теперь систему

$$\begin{cases} y_1' = -3x - 2y_1 + 3y_2 + 4y_3, \\ y_1'' = -11x - 10y_1 + 11y_2 + 14y_3, \\ y_1''' = -33x - 32y_1 + 33y_2 + 40y_3. \end{cases} \qquad (\tilde{5})$$

Из первых двух уравнений $(\tilde{5})$ выражаем y_2 и y_3 через x, y_1, y_1', y_1'':

$$\begin{cases} y_2 = 2y_1'' - 7y_1' + 6y_1 + x, \\ y_3 = \dfrac{1}{2}(-3y_1'' + 11y_1' - 8y_1). \end{cases} \qquad (\tilde{6})$$

Подставляем найденные значения для y_2 и y_3 в последнее уравнение $(\tilde{5})$. Получим

$$y_1''' - 6y_1'' + 11y_1' - 6y_1 = 0. \qquad (\tilde{7})$$

$(\tilde{7})$ — линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3.$$

Следовательно,

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}. \qquad (\tilde{8})$$

Теперь, дифференцируя $(\tilde{8})$ два раза и подставляя значения y_1, y_1', y_1'' в $(\tilde{6})$, получаем

$$y_2 = x + C_1e^x + 3C_3e^{3x}, \qquad y_3 = C_2e^{2x} - C_3e^{3x}.$$

Совокупность функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}, \\ y_2 &= x + C_1e^x + 3C_3e^{3x}, \\ y_3 &= C_2e^{2x} - C_3e^{3x} \end{aligned}\right\}$$

— общее решение системы $(\tilde{1})$. ◀

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases} \qquad (\tilde{1}_0)$$

▶ Дифференцируя по x первое уравнение системы $(\tilde{1}_0)$, получим

$$y_1'' = y_2' + y_3'.$$

Подставив здесь вместо y_2', y_3' их выражения из $(\tilde{1}_0)$, будем иметь

$$y_1'' = 2y_1 + (y_2 + y_3). \qquad (\tilde{2}_0)$$

Замечаем, что уравнения

$$y_1' = (y_2 + y_3),$$
$$y_1'' = 2y_1 + (y_2 + y_3)$$

содержат y_2 и y_3 "одинаковым образом" и, следовательно, из этих уравнений они могут быть исключены сразу. В результате мы получим уравнение второго порядка для y_1:

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0, \qquad (\tilde{7}_0)$$

и в дальнейшем дифференцировании уравнения $(\tilde{2}_0)$ надобности нет. Интегрируя уравнение $(\tilde{7}_0)$, получим

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Найдем теперь y_3 из первого уравнения системы $(\tilde{1}_0)$: $y_3 = y_1' - y_2$ и подставим во второе уравнение этой системы. Будем иметь

$$y_2' = y_1 + y_1' - y_2 \Rightarrow y_2' = 3C_2 e^{2x} - y_2 \Rightarrow y_2' + y_2 = 3C_2 e^{2x}.$$

Мы получили уравнение первого порядка для y_2. Решая его, находим: $y_2 = C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}$. Остается найти y_3, для чего можно использовать, например, второе уравнение системы $(\tilde{1}_0)$:

$$y_3 = y_2' - y_1 = 2C_2 e^{2x} - C_3 e^{-x} - C_1 e^{-x} - C_2 e^{2x} \Rightarrow$$

$$y_3 = C_2 e^{2x} - (C_1 + C_3) e^{-x}. \blacktriangleleft$$

Таким образом, в рассматриваемом случае нам пришлось интегрировать одно уравнение второго порядка и одно первого порядка. И вообще, следует отметить, что интегрирование нормальной системы порядка n методом исключения может свестись к интегрированию нескольких дифференциальных уравнений, сумма порядков которых равна n.

Рассмотрим случай, когда метод исключения приводит к интегрированию n уравнений первого порядка.

Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{dy_3}{dx} = f_3(x, y_1, y_2, y_3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots y_n). \end{cases} \qquad (\tilde{\tilde{\text{I}}})$$

Интегрируя первое уравнение системы $(\tilde{\tilde{\text{I}}})$, найдем

$$y_1 = \Phi_1(x, C_1).$$

Подставляя это выражение для y_1 во второе уравнение системы $(\tilde{\tilde{\text{I}}})$, получим уравнение первого порядка для y_2:

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, \Phi_1(x, C_1), y_2).$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$y_2 = \Phi_2(x, C_1, C_2).$$

Подставляя в третье уравнение системы $(\tilde{\tilde{\text{I}}})$ вместо y_1 и y_2 соответственно $\Phi_1(x, C_1)$ и $\Phi_2(x, C_1, C_2)$, получим уравнение первого порядка для y_3:

$$\frac{dy_3}{dx} = f_3(x, \Phi_1(x, C_1), \Phi_2(x, C_1, C_2), y_3).$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$y_3 = \Phi_3(x, C_1, C_2, C_3), \text{ и т. д.}$$

Наконец, придем к уравнению первого порядка для y_n:

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, \Phi_1(x, C_1), \Phi_2(x, C_1, C_2), \dots, \Phi_{n-1}(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), y_n).$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$y_n = \Phi_n(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}, C_n).$$

Совокупность функций $\Phi_1(x, C_1)$, $\Phi_2(x, C_1, C_2)$, , $\Phi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ является общим решением системы $(\tilde{\tilde{1}})$.

2°. Симметрическая форма нормальной системы. Нахождение интегрируемых комбинаций. Нормальную систему (1) можно записать в виде равенства отношений:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dx}{1}. \tag{9}$$

Равенство отношений (9) называется симметрической формой нормальной системы (1). Такое название объясняется тем, что в (9) все переменные x, y_1, y_2, ..., y_n равноправны: любую из них можно выбрать в качестве независимой. Последнее обстоятельство бывает иногда очень полезным в теории и практике интегрирования систем.

Мы видели, что задача построения общего решения нормальной системы порядка n равносильна нахождению n ее независимых интегралов. Общего способа построения интегралов не существует, но в отдельных случаях они могут быть сравнительно просто найдены. Для нахождения интегралов системы (9) либо берут пары отношений, допускающих разделение переменных, либо используют производные пропорции:

$$\frac{dx}{1} = \frac{\omega_0 dx + \omega_1 dy_1 + \omega_2 dy_2 + \dots + \omega_n dy_n}{\omega_0 + \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \dots + \omega_n f_n}. \tag{10}$$

Здесь $\omega_0(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\omega_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, , $\omega_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ — произвольные функции, и их выбирают так, чтобы числитель правой части был дифференциалом знаменателя, либо числитель был полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, а знаменатель был равен нулю, т.е. чтобы одновременно выполнялись два условия:

1. $\omega_0 + \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \dots + \omega_n f_n = 0$;

2. $\omega_0 dx + \omega_1 dy_1 + \omega_2 dy_2 + \dots + \omega_n dy_n = du(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Если эти условия оказываются выполненными, то из (10) получается $du = 0$, откуда видно, что функция $u(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ является интегралом данной системы.

Пример 3. Найти интегралы системы

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}. \tag{11}$$

▶ (11) — система двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций, записанная в симметрическом виде. Области, в которых будем искать интегралы системы (11) — открытые координатные октанты $\mathbf{R}^3$ с введенной системой координат $Oxyz$.

Из первого равенства (11) $\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}$ находим $y=C_1x$, или $\frac{y}{x}=C_1$. Соотношение $\frac{y}{x}=C_1$ является первым интегралом системы (11), а функция $u_1(x,y)=\frac{y}{x}$ — интегралом системы (11).

Из (11), воспользовавшись свойством равных отношений, находим

$$\frac{ydx+xdy}{2xyz}=\frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}} \Rightarrow \frac{1}{2}d(x\cdot y)=d\left(\sqrt{z^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$d\left(\frac{xy}{2}-\sqrt{z^2+1}\right)=0 \Rightarrow u_2(x,y,z)=\frac{xy}{2}-\sqrt{z^2+1}=C_2.$$

Это еще один первый интеграл системы (11).

Имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{x}{2} \\ 0 & -\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \end{vmatrix} = -\frac{z}{x\sqrt{1+z^2}} \neq 0$$

во всех точках каждой из восьми областей, в которых рассматривается система (11). Значит, интегралы $u_1=\frac{y}{x}$, $u_2=\frac{xy}{2}-\sqrt{1+z^2}$ — независимые в каждом из восьми октантов системы координат $Oxyz$. Следовательно,

$$U(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{y}{x} \\ \frac{xy}{2}-\sqrt{1+z^2} \end{pmatrix}=C \quad \left(=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}\right)$$

— общий интеграл системы (11). ◀

Пример 4. Найти интегралы системы

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}=\frac{dt}{t}. \qquad (12)$$

▶ (12) — система трех дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций, записанная в симметрическом виде. Для отыскания интегралов системы (12) будем пользоваться свойством равных отношений.

Имеем, например,

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y}+\frac{dt}{t}=0 \Rightarrow (x-y)t=C_1. \qquad (13)$$

Соотношение (13) является первым интегралом системы (12), а функция $u_1=(x-y)t$ — интегралом системы (12).

Имеем, далее, из (12)

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}=\frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{x+y+z}{t^2}=C_2. \qquad (14)$$

Соотношение (14) является еще одним первым интегралом системы (12), а функция $u_2=\dfrac{x+y+z}{t^2}$ — интегралом системы (12).

Из (12) находим еще

$$\frac{dx-dz}{z-x}=\frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{d(x-z)}{x-z}+\frac{dt}{t}=0 \Rightarrow (x-z)t=C_3. \qquad (15)$$

Соотношение (15) является первым интегралом системы (12), а функция $u_3=(x-z)t$ — интегралом системы (12).

Имеем

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y} & \dfrac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -t & 0 \\ \dfrac{1}{t^2} & \dfrac{1}{t^2} & \dfrac{1}{t^2} \\ t & 0 & -t \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad (t\neq 0)$$

$\Rightarrow$ интегралы $u_1(x,y,z,t)$, $u_2(x,y,z,t)$, $u_3(x,y,z,t)$ — независимые всюду, где определена система (12). ◀

§6. Интегрирование линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

1°. Общий вид линейного уравнения с частными производными первого порядка такой:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}+b(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot u=f(x_1,x_2,\dots,x_n). \quad (1')$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые переменные, $u=u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — неизвестная функция, $a_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $(i=\overline{1,n})$, $b(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — известные, заранее заданные функции. (Неизвестная функция $u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и все ее частные производные входят в уравнение (1′) линейно.)

Общий вид квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка такой:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}=b(x_1,x_2,\dots,x_n,u). \quad (2)$$

(В уравнение входят линейно лишь частные производные неизвестной функции; сама же неизвестная функция $u=u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ входит в (2) через посредство $a_i(x_1,x_2,\dots,x_n,u)$ $(i=\overline{1,n})$ и $b(x_1,x_2,\dots,x_n,u)$ любым образом.)

I. Рассмотрим сначала уравнение вида

$$a_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}+\dots+$$

$$+a_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n}=0. \quad (1)$$

Предполагается, что $a_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\in C(D)$, $i=\overline{1,n}$, и что в (D) $a(a_1,a_2,\dots,a_n)\neq(0,0,\dots,0)$. Это — линейное *однородное* уравнение первого порядка с частными производными.

Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{a_2(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{a_n(x_1,x_2,\dots,x_n)}. \quad (3)$$

(3) называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей уравнению (1). (3) — система $(n-1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предполагаем, что (3) задана в области $(D) \subset \mathbf{R}^n$ и что (D) — область единственности для системы (3).

Теорема 1. Пусть $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1$ — первый интеграл системы (3) в (D). Тогда функция $u = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — решение уравнения (1) в (D).

▶ Возьмем в области (D) любую точку $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Через нее проходит интегральная кривая системы (3). Вычислим du вдоль этой интегральной кривой. Так как $u = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \underbrace{C_1}_{\text{const}}$ вдоль интегральной кривой системы (3), то в точках этой кривой

$$du = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} dx_n = 0. \tag{4}$$

(В частности, (4) выполняется во взятой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а она — любая из (D).)

Из (3) находим, например,

$$dx_2 = \frac{a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1, \qquad \dots, \qquad dx_n = \frac{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1.$$

Подставив эти выражения для dx_2, ..., dx_n в (4), получим в каждой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (D)$

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \dots +$$
$$+ a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ функция $u = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — решение уравнения (1) в области (D). ◀

Теорема 2. Пусть

$$\begin{gathered} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2, \\ \dots\dots\dots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{n-1} \end{gathered}$$

есть $(n-1)$ независимых первых интегралов системы (3). Тогда:

1) $u = \psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, есть решение уравнения (1) в (D);

2) Любое решение уравнения (1) в (D) представимо в виде $u = \psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$.

▶ По условию, $\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i$ $(i = \overline{1, n-1})$ — первые интегралы системы (3) в (D). Следовательно, по теореме 1, функции

$$u = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad u = \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$\dots, \quad u = \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

являются решениями уравнения (1) в (D) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots +$$
$$+ a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = 0 \text{ в } (D) \tag{5}$$
$$(i = \overline{1, n-1}).$$

Пусть $u = \psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial \psi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}.$$

А тогда в области (D)

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} =$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial \psi_1} \cdot \left[\underbrace{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}}_{=0 \text{ (в силу (5))}} \right] +$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial\psi_2}\cdot\left[\underbrace{a_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+a_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\dots+a_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial x_n}}_{=0\ (\text{в силу}\ (5))}\right]+$$

$$+\ \cdot\ +$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial\psi_{n-1}}\cdot\left[\underbrace{a_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}+a_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2}+\dots+a_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}}_{=0\ (\text{в силу}\ (5))}\right]=0$$

$\Rightarrow$ $u=\psi(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1})$ — решение уравнения (1) в области (D).

2) Пусть $u=\tilde{\psi}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — любое решение уравнения (1) в области (D). Покажем, что

$$u=\tilde{\psi}(x_1,x_2,\dots,x_n)=$$

$$=\psi\big(\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n),\psi_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,\psi_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_n)\big).$$

У нас $u=\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $u=\psi_2(x_1,x_2,\dots,x_n)$, , $u=$ $=\psi_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $u=\tilde{\psi}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — решения уравнения (1) в области (D). Следовательно, в (D):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\cdot a_1+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\cdot a_2+\dots+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\cdot a_n=0,\\
&\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\cdot a_1+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\cdot a_2+\dots+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_n}\cdot a_n=0,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}\cdot a_1+\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2}\cdot a_2+\dots+\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}\cdot a_n=0,\\
&\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_1}\cdot a_1+\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_2}\cdot a_2+\dots+\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_n}\cdot a_n=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

(6) рассматриваем как систему уравнений относительно неизвестных a_1, a_2, ..., a_n. У нас $a_1(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $a_2(x_1,x_2,\dots,x_n)$, , $a_n(x_1,x_2,\dots,x_n)$ не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке, принадлежащей (D).

Но у системы (6) решения, отличные от чисто нулевого, существуют лишь тогда, когда определитель этой системы равен нулю, т.е. когда

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ существует зависимость $\tilde{\psi} = \psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$. ◀

Замечание. Функцию $u = \psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, называют общим решением уравнения (1).

II. Рассмотрим теперь уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \tag{2}$$

Предполагается, что функции $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ $(i = \overline{1, n})$ и $b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \in C^1(D)$, $(D) \subset \mathrm{R}^{n+1}$; $a(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ в (D). В (2) x_1, x_2, …, x_n — независимые переменные, $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — неизвестная функция.

Введем в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \\ + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_n} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = 0. \end{aligned} \tag{$\tilde{2}$}$$

В $(\tilde{2})$ x_1, x_2, …, x_n, u — независимые переменные, $v(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ — неизвестная функция.

Видим, что $(\tilde{2})$ — линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными относительно неизвестной функции $v(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$. (Уравнение такого вида было рассмотрено в пункте I.)

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению $(\tilde{2})$, будет такой:

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\dots,x_n,u)}=\frac{dx_2}{a_2(x_1,\dots,x_n,u)}=\dots=$$
$$=\frac{dx_n}{a_n(x_1,\dots,x_n,u)}=\frac{du}{b(x_1,\dots,x_n,u)}. \qquad (\tilde{3})$$

$(\tilde{3})$ — система n обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагается, что $(\tilde{3})$ задана в области $(D)\subset \mathbf{R}^{n+1}$ и что (D) — область единственности для $(\tilde{3})$.

Пусть $\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u)=C_1$ — первый интеграл системы $(\tilde{3})$ в (D). Тогда (см. теорему 1) функция

$$v=\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u)$$

является решением вспомогательного уравнения $(\tilde{2})$. Следовательно,

$$a_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_1}+a_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_2}+\dots+$$
$$+a_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_n}+b(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\cdot\frac{\partial v}{\partial u}=0 \quad \text{в} \quad (D). \qquad (\tilde{4})$$

Имеет место

Теорема 3. Неявная функция $u(x_1,x_2,\dots,x_n)$, определяемая соотношением

$$\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u)=0,$$

является решением уравнения (2).

▶ Пусть $u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — неявная функция, определяемая соотношением $\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u)=0$. Тогда, как известно,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial u}};\qquad \frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial u}};\qquad \dots,\qquad \frac{\partial u}{\partial x_n}=-\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial u}}.$$

Подставив эти выражения для $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, $\dots$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ в уравнение (2), получаем

$$-a_1(x_1,\dots,x_n,u)\cdot\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial u}}-a_2(x_1,\dots,x_n,u)\cdot\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial u}}-\dots-$$

$$
-a_n(x_1,\dots,x_n,u)\cdot\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial u}}-b(x_1,\dots,x_n,u)\cdot\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial u}}=
$$

$$
=-\frac{1}{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial u}}\cdot\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x_i}+b(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial\psi_1}{\partial u}}_{=0\ \text{в}\ (D),\ \text{в силу}\ (\tilde{4})}\right]=0.
$$

Видим, что неявная функция $u(x_1,x_2,\dots,x_n)$, определяемая соотношением $\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u)=0$, действительно является решением уравнения (2). ◀

Пусть

$$
\begin{aligned}
&\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u)=C_1,\\
&\psi_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u)=C_2,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\psi_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u)=C_n
\end{aligned}
$$

— независимые первые интегралы системы $(\tilde{3})$. Тогда (см. теорему 2) функция

$$
v=\psi\big(\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u),\psi_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u),\dots,\psi_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\big),
$$

где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, является решением вспомогательного уравнения $(\tilde{2})$.

Имеет место

Теорема 4. Неявная функция $u(x_1,x_2,\dots,x_n)$, определяемая соотношением

$$
\psi\big(\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u),\psi_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u),\dots,\psi_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\big)=0,\qquad(\tilde{5})
$$

является решением уравнения (2).

▶ Пусть $u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — неявная функция, определяемая соотношением $(\tilde{5})$: $\psi\big(\psi_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,\psi_n(x_1,\dots,x_n,u)\big)=0$.

Найдем $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, …, $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$. Чтобы найти $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, продифференцируем по x_1 обе части $(\tilde{5})$. Получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial\psi_1}\cdot\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial\psi_2}\cdot\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial\psi_n}\cdot\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_n}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_1}\cdot\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_2}\cdot\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\ldots+\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_n}\cdot\dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_1}\cdot\dfrac{\partial\psi_1}{\partial u}+\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_2}\cdot\dfrac{\partial\psi_2}{\partial u}+\ldots+\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_n}\cdot\dfrac{\partial\psi_n}{\partial u}}=-\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial x_1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial u}}.$$

Совершенно аналогично находим

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial x_2}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial u}},\qquad\ldots,\qquad \frac{\partial u}{\partial x_n}=-\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial x_n}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial u}}.$$

Подставив эти выражения для $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, …, $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ в уравнение (2), получаем

$$-a_1(x_1,\ldots,x_n,u)\cdot\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial x_1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial u}}-a_2(x_1,\ldots,x_n,u)\cdot\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial x_2}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial u}}-\ldots-$$

$$-a_n(x_1,\ldots,x_n,u)\cdot\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial x_n}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial u}}-b(x_1,\ldots,x_n,u)\cdot\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial u}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial u}}=$$

$$=-\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial u}}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial\psi_j}\times$$

$$\times\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\cdot\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}+b(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\cdot\frac{\partial\psi_j}{\partial u}}_{=0 \text{ в } (D),\ j=\overline{1,n}}\right]=0.$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \ldots x_n, u)\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial x_i}+b(x_1, x_2, \ldots x_n, u)\cdot\dfrac{\partial\psi_j}{\partial u}=0$ для любого $j=\overline{1,n}$, так как $v=\psi_j(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)$ — решения уравнения $(\tilde{2})$, $j=\overline{1,n}$.

Видим, что неявная функция $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, определяемая соотношением $(\tilde{5})$, действительно является решением уравнения (2). ◀

Функцию $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, определяемую соотношением $(\tilde{5})$, в котором ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, называют общим решением уравнения (2).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$(x-z)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+2z\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

▶ $u=u(x,y,z)$ — неизвестная функция. Заданное уравнение — линейное однородное. Строим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую заданному уравнению:

$$\frac{dx}{x-z}=\frac{dy}{y-z}=\frac{dz}{2z}.$$

Пользуясь свойством равных отношений, найдем интегралы этой системы:

1) $\dfrac{dx}{x-z}=\dfrac{dy}{y-z}=\dfrac{2dz}{4z}\Rightarrow\dfrac{d(x+y+2z)}{x+y+2z}=\dfrac{dz}{2z}\Rightarrow\dfrac{(x+y+2z)^2}{z}=C_1$ — это первый интеграл системы.

2) $\dfrac{dx}{x-z}=\dfrac{d(-y)}{z-y}=\dfrac{dz}{2z}\Rightarrow\dfrac{d(x-y)}{x-y}=\dfrac{dz}{2z}\Rightarrow\dfrac{(x-y)^2}{z}=C_2$ — это еще один первый интеграл системы.

Общее решение заданного уравнения будет таким:

$$u=\psi\left(\frac{(x+y+2z)^2}{z},\frac{(x-y)^2}{z}\right).$$

Здесь ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. ◀

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}=e^{z}. \qquad (\tilde{\tilde{1}})$$

▶ $z=z(x,y)$ — неизвестная функция. Заданное уравнение $(\tilde{\tilde{1}})$ — квазилинейное. Вводим в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$yz\frac{\partial v}{\partial x}-xz\frac{\partial v}{\partial y}+e^{z}\frac{\partial v}{\partial z}=0. \qquad (\tilde{\tilde{2}})$$

В $(\tilde{\tilde{2}})$ x, y, z — независимые переменные, $v(x,y,z)$ — неизвестная функция. Уравнение $(\tilde{\tilde{2}})$ — линейное однородное относительно неизвестной функции $v(x,y,z)$.

Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую уравнению $(\tilde{\tilde{2}})$:

$$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{-xz}=\frac{dz}{e^{z}}. \qquad (\tilde{\tilde{3}})$$

Найдем интегралы системы $(\tilde{\tilde{3}})$:

1) $\dfrac{dx}{yz}=\dfrac{dy}{-xz}\Rightarrow\dfrac{x\,dx}{xyz}=\dfrac{y\,dy}{-xyz}\Rightarrow\dfrac{x\,dx+y\,dy}{0}=\dfrac{dz}{e^{z}}\Rightarrow$

$x\,dx+y\,dy=0\Rightarrow d(x^2+y^2)=0\Rightarrow x^2+y^2=C_1$ — первый интеграл системы $(\tilde{\tilde{3}})$.

2) $\dfrac{dx}{yz}=\dfrac{dz}{e^{z}}$. Воспользуемся найденным первым интегралом. Будем иметь

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1-x^2}}=ze^{-z}dz\Rightarrow\arcsin\frac{x}{\sqrt{C_1}}+(z+1)e^{-z}=C_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+(z+1)e^{-z}=C_2$$

— это другой первый интеграл системы $(\tilde{\tilde{3}})$.

Общее решение вспомогательного уравнения $(\tilde{\tilde{2}})$ будет таким:

$$v = \psi\left(x^2 + y^2, (z+1)e^{-z} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

а значит, общее решение исходного уравнения $(\tilde{\tilde{1}})$ $z = z(x,y)$ есть неявная функция, определяемая соотношением

$$\psi\left(x^2 + y^2, (z+1)e^{-z} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u. \qquad (\tilde{\tilde{4}})$$

$\blacktriangleright$ $u = u(x,y,z)$ — неизвестная функция. Заданное уравнение $(\tilde{\tilde{4}})$ — линейное неоднородное. Вводим в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$(y+z)\frac{\partial v}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial v}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial v}{\partial z} + u\frac{\partial v}{\partial u} = 0. \qquad (\tilde{\tilde{5}})$$

$(\tilde{\tilde{5}})$ — линейное однородное уравнение относительно неизвестной функции $v = v(x,y,z,u)$. Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих уравнению $(\tilde{\tilde{5}})$:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{du}{u}. \qquad (\tilde{\tilde{6}})$$

Найдем интегралы системы $(\tilde{\tilde{6}})$:

1) $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{z+x} = \dfrac{du}{u} \Rightarrow \dfrac{d(x-y)}{y-x} = \dfrac{du}{u} \Rightarrow \dfrac{du}{u} + \dfrac{d(x-y)}{x-y} = 0 \Rightarrow$ $u(x-y) = C_1$;

2) $\dfrac{dy}{z+x} = \dfrac{dz}{x+y} = \dfrac{du}{u} \Rightarrow \dfrac{d(y-z)}{z-y} = \dfrac{du}{u} \Rightarrow \dfrac{du}{u} + \dfrac{d(y-z)}{y-z} = 0 \Rightarrow$ $u(y-z) = C_2$;

3) из $(\tilde{\tilde{6}})$: $\dfrac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \dfrac{du}{u} \Rightarrow \dfrac{x+y+z}{u^2} = C_3$.

Общее решение вспомогательного уравнения $(\tilde{\tilde{5}})$ будет таким:

$$v = \psi\left(u(x-y), u(y-z), \frac{x+y+z}{u^2}\right).$$

Значит, общее решение исходного уравнения ($\tilde{\tilde{4}}$) есть неявная функция $u = u(x,y,z)$, определяемая соотношением

$$\psi\left(u(x-y), u(y-z), \frac{x+y+z}{u^2}\right) = 0,$$

где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. ◀

2°. Понятие о характеристиках. Рассмотрим простейший пример. Пусть требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (6)$$

удовлетворяющее условию

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x), \qquad (7)$$

где $f(x)$ — известная функция. (6) — (7) — задача Коши.

Обыкновенное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (6), будет таким:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{1}.$$

Решая его, находим $x = t + C \Rightarrow x - t = C$. Это есть первый интеграл дифференциального уравнения. Но тогда $u = \psi(x-t)$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, является общим решением уравнения (6). Для определения функции ψ используем условие (7)

$$\psi(x-t)\big|_{t=0} = f(x) \Rightarrow \psi(x) = f(x) \Rightarrow \psi = f.$$

Следовательно, $u = f(x-t)$ является решением задачи (6) — (7).

Замечание. В рассмотренном примере, исходя лишь из данного уравнения (6) и условия (7), мы можем на оси абсцисс (т.е. при $t = 0$) определить формально все частные производные от функции $u(x,t)$ по переменным x и t.

Действительно, из (7) находим $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0} = f'(x)$. Затем из (6) получаем $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0} = -f'(x)$. Потом находим $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{t=0} = f''(x)$, $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right|_{t=0} = -f''(x)$, $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right|_{t=0} = f''(x)$, и т. д.

В таком случае, когда, исходя лишь из (6) и (7), удается определить формально на линии $t=0$ все частные производные от функции $u(x,t)$ по переменным x и t, будем говорить, что задача Коши (6) — (7) поставлена правильно. В противном случае мы сказали бы, что задача Коши поставлена неправильно.

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения (6) и кривой (l), заданной уравнением $\omega(x,t)=0$. Предполагается при этом, что $\omega(x,t)\in C^1(D)$ и что $(\omega_x')^2+(\omega_t')^2\neq 0$ в $(D)\subset\mathbf{R}^2$.

Упомянутая задача Коши формулируется так: требуется найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условию

$$u\big|_{(l)}=f(M). \tag{$\tilde{7}$}$$

Выясним, когда задача Коши (6) — ($\tilde{7}$) оказывается поставленной правильно и когда — нет. Иначе, выясним, когда мы сможем и когда не сможем, исходя лишь из (6) и ($\tilde{7}$), определить на (l) формально все интересующие нас частные производные от функции $u(x,t)$.

Для этого вводим в рассмотрение новые переменные ξ и η по формулам

$$\begin{cases}\xi=\omega(x,t),\\ \eta=t.\end{cases}$$

Тогда $u(x,t)\leftrightarrow u(\xi,\eta)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=\frac{\partial\omega}{\partial x}}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=0}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=\frac{\partial\omega}{\partial t}}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{=1}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Уравнение (6) в новых переменных станет таким:

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0, \tag{$\tilde{\tilde{6}}$}$$

а начальное условие ($\tilde{7}$) примет вид

$$u\big|_{\xi=0}=f_1(\eta). \tag{$\tilde{\tilde{7}}$}$$

Из $(\tilde{\tilde{6}})$ и $(\tilde{\tilde{7}})$ видим:

1) если $\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial t}\neq 0$ на кривой (l), то задача Коши (6) — $(\tilde{7})$ поставлена правильно;

2) если $\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial t}=0$ на кривой (l), то задача Коши (6) — $(\tilde{7})$ поставлена неправильно.

В первом случае кривую (l) называют *нехарактеристической* или *свободной* для уравнения (6), во втором случае — *характеристической* (или просто *характеристикой*).

Итак, получили:

Кривая (l), заданная уравнением $\omega(x,t)=0$, — характеристическая для уравнения (6), если на (l)

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial t}=0. \qquad (8)$$

(8) — уравнение для характеристик уравнения (6).

Пусть требуется определить семейство характеристик для уравнения (6). Для этого берем уравнение (8) и составляем соответствующее ему обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{dx}{1}=\frac{dt}{1}\Rightarrow x-t=C$ — первый интеграл этого уравнения. Утверждаем, что линии, определяемые соотношением $x-t=C$, образуют семейство характеристик для уравнения (6). Действительно, по теореме 1 предыдущего параграфа, функция $\omega(x,t)=x-t$ является решением уравнения (8). Значит, линии определяемые соотношением $x-t=C$, образуют семейство характеристик для уравнения (6) (рис. 5.1).

Если в качестве кривой (l) взять любую линию из семейства $x-t=C$, то коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial\xi}$ в уравнении $(\tilde{\tilde{6}})$ на каждой такой линии будет равен нулю и, следовательно, мы не сможем, исходя из $(\tilde{\tilde{6}})$ и $(\tilde{\tilde{7}})$, определить на (l) все частные производные функции u. Значит, задача Коши для уравнения (6) и такой кривой (l) будет поставлена неправильно.

Замечание. Во всех точках каждой прямой из семейства $x-t=C$ решение $u=f(x-t)$ задачи (6) — (7) имеет свое, но одно и то же значение.

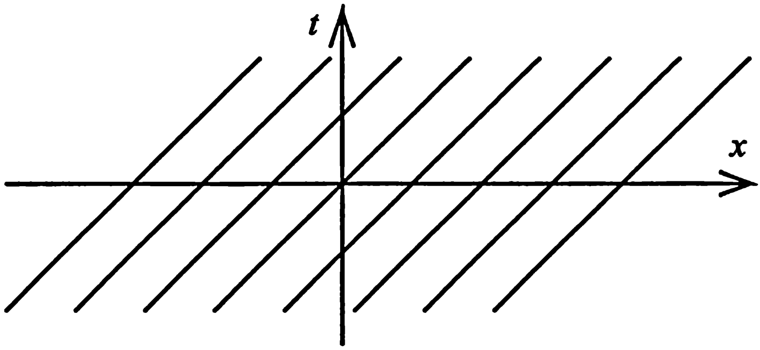

Рис. 5.1

Станем рассматривать теперь более общие примеры.

1. Пусть имеется уравнение вида

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y). \tag{9}$$

Пусть имеется кривая (l), заданная уравнением $\omega(x,y)=0$. Предполагается, что $\omega(x,y)\in C^1(D)$ и $(\omega_x')^2+(\omega_y')^2\neq 0$ в $(D)\subset \mathbf{R}^2$.

Задача: найти решение уравнения (9), удовлетворяющее условию

$$u\big|_{(l)}=f(M), \tag{10}$$

где $f(M)$ — известная функция.

Выясним, когда задача Коши (9) — (10) будет поставленной правильно и когда — нет, т.е. выясним, когда мы сможем и когда не сможем, исходя лишь из (9) и (10), определить формально на (l) все интересующие нас частные производные функции $u(x,y)$.

Для этого вводим в рассмотрение новые переменные ξ и η по формулам:

$$\begin{cases}\xi=\omega(x,y),\\ \eta=y.\end{cases}$$

Тогда $u(x,y)\to u(\xi,\eta)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

В новых переменных уравнение (9) станет таким:

$$\left(a\frac{\partial\omega}{\partial x}+b\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi}+b\frac{\partial u}{\partial\eta}=c, \qquad (\tilde{9})$$

а условие (10) примет вид

$$u\big|_{\xi=0}=\tilde{f}(\eta). \qquad (\tilde{10})$$

Из ($\tilde{9}$) и ($\tilde{10}$) видим, что:

1) если на (l) коэффициент при $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$ не равен нулю, то задача Коши (9) — (10) поставлена правильно и, следовательно, кривая (l) — нехарактеристическая;

2) если же на (l) $a(x,y)\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+b(x,y)\cdot\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=0$, то задача Коши (9) — (10) поставлена неправильно и, следовательно, кривая (l) — характеристическая.

Соотношение

$$a(x,y)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}+b(x,y)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}=0 \qquad (11)$$

есть уравнение для характеристик уравнения (9).

Пусть требуется определить семейство характеристик для уравнения (9).

Для этого берем уравнение (11) и составляем соответствующее ему обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{a(x,y)}=\frac{dy}{b(x,y)}.$$

Пусть

$$\psi(x,y)=C \qquad (12)$$

— первый интеграл этого уравнения. Утверждаем, что кривые, определяемые соотношением (12), образуют семейство характеристик для уравнения (9). Действительно, по теореме 1 предыдущего параграфа, функция $\omega=\psi(x,y)$ является решением уравнения (11). Следовательно, $a(x,y)\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+b(x,y)\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=0$. Значит, кривые, определяемые соотношением (12), образуют семейство характеристик уравнения (9).

2. Пусть имеется уравнение вида

$$a_1(x_1,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n}=c(x_1,\dots,x_n). \quad (13)$$

В этом случае вместо кривой (l) задается уже поверхность (σ). Пусть $\omega(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ — уравнение поверхности (σ). Предполагается, что

$$a_i(x_1,\dots,x_n)\in C^1(D) \quad (i=\overline{1,n}),$$

$$c(x_1,\dots,x_n)\in C^1(D),$$

$$a(a_1,a_2,\dots,a_n)\neq(0,0,\dots 0) \text{ в } (D),$$

$$\omega(x_1,\dots,x_n)\in C^1(D),$$

$$(\omega'_{x_1})^2+(\omega'_{x_2})^2+\dots+(\omega'_{x_n})^2\neq 0 \text{ в } (D).$$

Задача. Найти решение уравнения (13), удовлетворяющее условию

$$u\big|_\sigma=f(M), \quad (14)$$

где $f(M)$ — известная, заранее заданная функция.

Заметим, что (13) — (14) — задача Коши на поверхности (σ). Выясним, когда задача Коши (13) — (14) будет поставлена правильно и когда — нет, т.е. выясним, когда мы сможем и когда не сможем, исходя лишь из (13) и (14), определить (формально) на (σ) все интересующие нас частные производные от функции u. Для этого вводим в рассмотрение новые переменные ξ_i $(i=\overline{1,n})$ по формулам:

$$\begin{cases}\xi_1=\omega(x_1,x_2,\dots,x_n),\\ \xi_2=x_2,\\ \dots\dots\dots\dots\\ \xi_n=x_n.\end{cases}$$

Тогда $u(x_1,x_2,\dots,x_n)\leftrightarrow u(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial\xi_2}\cdot\underbrace{\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}}_{=0}+\dots+\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\cdot\underbrace{\frac{\partial\xi_n}{\partial x_1}}_{=0}=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial\xi_2}\cdot\underbrace{\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}}_{=1}+\frac{\partial u}{\partial\xi_3}\cdot\underbrace{\frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}}_{=0}+\dots+\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\cdot\underbrace{\frac{\partial\xi_n}{\partial x_2}}_{=0}=\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial\xi_2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial \xi_3},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_n} + \frac{\partial u}{\partial \xi_n}.$$

Уравнение (13) в новых переменных запишется так:

$$\left(a_1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + a_2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_n}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + a_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_n} = c. \tag{15}$$

Начальное условие (14) в новых переменных станет таким:

$$u\big|_{\xi_1=0} = f_1(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n). \tag{16}$$

Из (15) и (16) видим, что:

1) если на (σ) коэффициент при $\dfrac{\partial u}{\partial \xi_1}$ в (15) не равен нулю, то задача Коши (15) — (16) поставлена правильно и, следовательно, поверхность (σ) — нехарактеристическая;

2) если на (σ)

$$a_1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + a_2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_n} = 0, \tag{17}$$

то задача Коши (15) — (16) поставлена неправильно и, следовательно, поверхность (σ) — характеристическая.

Соотношение (17) является уравнением для характеристических поверхностей уравнения (13).

Пусть требуется определить семейства характеристических поверхностей для уравнения (13). Для этого берем уравнение (17) и составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую уравнению (17):

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n)}. \tag{18}$$

Пусть

$$\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i \quad (i = \overline{1, n-1}) \tag{19}$$

— независимые первые интегралы системы (18). Утверждаем, что поверхности, определяемые соотношениями (19), образуют семейства характеристических поверхностей для уравнения (13).

В самом деле, по теореме 1 предыдущего параграфа, функции $\omega = \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $(i = \overline{1, n-1})$ являются решениями уравнения (17). Следовательно,

$$a_1 \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + a_2 \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = 0 \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Значит, поверхности, определяемые соотношениями (19), образуют семейства характеристических поверхностей для уравнения (13).

Пример 4. Найти решение уравнения $2\sqrt{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, удовлетворяющее условию $z(x,y)|_{x=1} = y^2$.

▶ Заданное уравнение — линейное однородное. Составляем соответствующее ему обыкновенное дифференциальное уравнение: $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dy}{-y}$, откуда $ye^{\sqrt{x}} = C$ — первый интеграл уравнения. Значит, $z = \psi\left(ye^{\sqrt{x}}\right)$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, есть общее решение заданного уравнения.

В этом примере задача Коши поставлена правильно, так как функция $\omega = x - 1$ не является решением уравнения $2\sqrt{x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - y\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ и, следовательно, линия (l), определяемая уравнением $\omega = 0$ (т.е. уравнением $x = 1$), нехарактеристическая.

Для определения вида функции ψ используем начальное условие $z(x,y)|_{x=1} = y^2$. Имеем: $\psi\left(ye^{\sqrt{x}}\right)\Big|_{x=1} = y^2$, т.е. $\psi(ye) = y^2$ $\left(= \frac{(ye)^2}{e^2}\right)$. Значит, $\psi\left(ye^{\sqrt{x}}\right) = \frac{\left(ye^{\sqrt{x}}\right)^2}{e^2}$ и, следовательно,

$$z(x,y) = \frac{y^2 e^{2\sqrt{x}}}{e^2} = y^2 e^{2(\sqrt{x}-1)}. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти решение уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

удовлетворяющее условию $u(x,y,z)|_{z=0} = x^2 + y^2$.

▶ Заданное уравнение — линейное однородное. Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих заданному уравнению в частных производных:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy}.$$

1) $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$, откуда $\dfrac{y}{x}=C_1$ — первый интеграл системы;

2) $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{xy}$, откуда $dx=\dfrac{dz}{y}$ или, принимая во внимание, что

$y=C_1x$, $\quad C_1x\,dx=dz \quad\Rightarrow\quad z=C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2 \quad\Rightarrow\quad z=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x^2}{2}+C_2 \quad\Rightarrow$

$z-\dfrac{xy}{2}=C_2$ — это еще один первый интеграл системы.

Значит, $u=\psi\left(\dfrac{y}{x},z-\dfrac{xy}{2}\right)$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, есть общее решение заданного уравнения.

В этом примере задача Коши поставлена правильно, так как функция $\omega=z$ не является решением уравнения

$$x\frac{\partial\omega}{\partial x}+y\frac{\partial\omega}{\partial y}+xy\frac{\partial\omega}{\partial z}=0,$$

и, следовательно, поверхность (σ), определяемая уравнением $\omega=0$ (т.е. уравнением $z=0$), — нехарактеристическая.

Для определения вида функции ψ используем условие

$$u(x,y,z)\big|_{z=0}=x^2+y^2.$$

Имеем $\psi\left(\dfrac{y}{x},z-\dfrac{xy}{2}\right)\Bigg|_{z=0}=x^2+y^2$, т.е. $\psi\left(\dfrac{y}{x},-\dfrac{xy}{2}\right)=x^2+y^2$.

Поверхность (σ) (в нашем случае плоскость $z=0$) можно считать заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=x\\ y=y\\ z=0\end{cases}$, x, y — параметры.

Подставим эти выражения для x, y, z в найденные первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно, в соотношения: $\frac{y}{x} = C_1$ и $z - \frac{xy}{2} = C_2$. Получим

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = C_1 \\ -\frac{xy}{2} = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = C_1 x \\ -\frac{C_1}{2} x^2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -\frac{2C_2}{C_1} \\ y^2 = -2C_1C_2 \end{cases}.$$

У нас $\psi(C_1, C_2)\big|_{z=0} = x^2 + y^2 = -\frac{2C_2}{C_1} - 2C_1C_2 = -\frac{2C_2}{C_1}(1 + C_1^2)$. Итак, получили: $\psi(C_1, C_2) = -\frac{2C_2}{C_1}(1 + C_1^2)$.

Подставив теперь здесь вместо C_1 и C_2 соответственно $\frac{y}{x}$ и $z - \frac{xy}{2}$, находим

$$\psi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{xy}{2}\right) = -2\frac{\left(z - \frac{xy}{2}\right)\cdot x}{y}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{xy - 2z}{xy}(x^2 + y^2).$$

Следовательно, $u(x, y, z) = (xy - 2z)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$. ◀

Пример 6. Найти решение уравнения

$$z\frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial y} + x = 0,$$

удовлетворяющее условию $z(x, y)\big|_{y=x^2} = 2x$.

▶ Заданное уравнение — квазилинейное. Рассматриваем вспомогательное уравнение

$$z\frac{\partial v}{\partial x} + (z^2 - x^2)\frac{\partial v}{\partial y} - x\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую этому вспомогательному уравнению:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{z^2 - x^2} = \frac{dz}{-x}.$$

1) $\dfrac{dx}{z}=\dfrac{dz}{-x} \Rightarrow x\,dx+z\,dz=0 \Rightarrow z^2+x^2=C_1$ — первый интеграл системы;

2) $\dfrac{dx+dz}{z-x}=\dfrac{dy}{(z-x)(z+x)} \Rightarrow (z+x)\,d(z+x)=dy \Rightarrow \dfrac{(z+x)^2}{2}=$ $=y+C_2 \Rightarrow \dfrac{(z+x)^2}{2}-y=C_2$ — первый интеграл системы.

$v=\psi\left(z^2+x^2,\dfrac{(z+x)^2}{2}-y\right)$ — общее решение вспомогательного уравнения.

Соотношение $\psi\left(z^2+x^2,\dfrac{(z+x)^2}{2}-y\right)=0$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, дает общее решение исходного уравнения. Последнее соотношение может быть записано в виде $\dfrac{(z+x)^2}{2}-y=f(z^2+x^2)$, где f — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Задача Коши в этом примере поставлена правильно, так как функция $\omega=y-x^2$ не является решением уравнения $z\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+(z^2-x^2)\dfrac{\partial\omega}{\partial y}-x\dfrac{\partial\omega}{\partial z}=0$ и, следовательно, линия (l), определяемая уравнением $\omega=0$ (т.е. уравнением $y=x^2$), нехарактеристическая.

Для определения вида функции f используем условие $z(x,y)\big|_{y=x^2}=2x$. Имеем

$$f(z^2+x^2)\big|_{y=x^2}=\left[\frac{(z+x)^2}{2}-y\right]_{y=x^2}.$$

Так как $z\big|_{y=x^2}=2x$, то последнее соотношение запишется в виде

$$f(5x^2)=\frac{9x^2}{2}-x^2=\frac{7}{2}x^2 \Rightarrow f(5x^2)=\frac{7}{10}(5x^2).$$

Значит, $f(z^2+x^2)=\dfrac{7}{10}(z^2+x^2)$, и, следовательно, будем иметь

$$\frac{7}{10}(z^2+x^2)=\frac{(z+x)^2}{2}-y \Rightarrow (z^2+x^2)=5(xz-y). \blacktriangleleft$$

§7. Продолжение решений. Нелокальные свойства решений

Пусть имеется нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = F(x,Y). \qquad (1)$$

Считаем, что $F(x,Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathrm{R}^{n+1}$, $F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y(D)$ — локально. Рассмотрим произвольное решение системы (1)

$$Y = \varphi(x), \quad x \in I = \langle a,b \rangle. \qquad (2)$$

Определение. Если существует решение системы (1)

$$Y = \varphi_1(x), \quad x \in I_1 = \langle a_1, b_1 \rangle, \qquad (3)$$

такое, что

1) $I \subset I_1$, $I \neq I_1$, и

2) $\varphi_1(x) \equiv \varphi(x)$, $x \in I$,

то решение (2) называется *продолжимым*, а решение (3) называется *продолжением* решения (2) на промежуток I_1.

Если промежуток I_1 является расширением промежутка I лишь вправо, то решение (2) называется *продолжимым вправо*, а решение (3) называется *продолжением вправо*.

Если промежуток I_1 является расширением промежутка I лишь влево, то решение (2) называется *продолжимым влево*, а решение (3) называется *продолжением влево*.

Теорема 1 (о продолжимости решения, определенного на сегменте или полусегменте). Пусть $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, — решение системы (1). Тогда:

1) если $I = [a,b]$, то решение $Y = \varphi(x)$ продолжимо в обе стороны;

2) если $I = [a,b)$, то решение $Y = \varphi(x)$ продолжимо влево;

3) если $I = (a,b]$, то решение $Y = \varphi(x)$ продолжимо вправо.

▶ Пусть для определенности $Y = \varphi(x)$ — решение системы (1), определенное на $I = (a,b]$. Покажем, что это решение продолжимо вправо. Пусть $\varphi(b) = C$. По определению решения, точка $(b, \varphi(b))$, т.е. точка $(b, C) \in (D)$.

Так как точка $(b, \mathrm{C}) \in (D)$, то существует решение системы (1), проходящее через эту точку. Пусть таковым решением является

$$Y = \psi(x), \quad x \in [b-h, b+h], \quad h > 0, \quad \psi(b) = \mathrm{C}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in I = (a,b], \\ \psi(x), & x \in [b, b+h]. \end{cases}$$

Отметим, что $\varphi_1(x)$ определена и непрерывна на $I_1 = (a, b+h]$. Покажем, что она является решением системы на промежутке $(a, b+h] = I_1$.

Имеем: 1) для любого $x \in I_1$ точка $(x, \varphi_1(x)) \in (D)$.

Имеем, далее:

для $x \in (a,b)$ $\quad \varphi_1'(x) = \varphi'(x) = F(x, \varphi(x)) = F(x, \varphi_1(x))$;

для $x \in (b, b+h]$ $\quad \varphi_1'(x) = \psi'(x) = F(x, \psi(x)) = F(x, \varphi_1(x))$.

$\varphi(x)$ имеет в точке b левостороннюю производную $\Rightarrow \varphi_1(x)$ имеет в точке b левостороннюю производную, причем

$$\varphi_1'(b-0) = \varphi'(b-0) = F(b, \varphi(b)) = F(b, C).$$

$\psi(x)$ имеет в точке b правостороннюю производную $\Rightarrow \varphi_1(x)$ имеет в точке b правостороннюю производную, причем

$$\varphi_1'(b+0) = \psi'(b+0) = F(b, \psi(b)) = F(b, C).$$

Видим, что существуют $\varphi_1'(b-0)$ и $\varphi_1'(b+0)$, причем $\varphi_1'(b-0) = \varphi_1'(b+0) = F(b,C) \Rightarrow$ существует $\varphi_1'(b)$, причем

$$\varphi_1'(b) = F(b,C) = F(b, \varphi_1(b)).$$

Таким образом, для $x \in I_1$ существует $\varphi_1'(x)$, причем $\varphi_1'(x) = F(x, \varphi_1(x))$.

Вывод: вектор-функция $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a, b+h]$, есть решение системы (1). Это решение определено на промежутке I_1, который является расширением вправо промежутка I. Так как $\varphi_1(x) \equiv \varphi(x)$, $x \in I$, то заключаем, что $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, — продолжение вправо решения $\varphi(x)$, $x \in I$.

Следствие. Решение системы (1), определенное на некотором сегменте или полусегменте, всегда может быть продолжено на некоторый интервал.

▶ Для определенности рассмотрим опять решение $Y = \varphi(x)$ системы (1), определенное на $I = (a,b]$. По теореме 1 это решение имеет продолжение $\varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a, b_1]$, где $b_1 = b + h$, $h > 0$. По теореме 1 решение $\varphi_1(x)$ имеет продолжение $\varphi_2(x)$, $x \in I_2 = (a, b_2]$, где $b_2 = b_1 + h_1$, $h_1 > 0$.

Очевидно, что решение $\varphi_2(x)$, $x \in I_2$, является продолжением исходного решения $\varphi(x)$, $x \in I$. Продолжая этот процесс аналогичным образом, получим бесконечную последовательность продолжений исходного решения $\varphi(x)$, $x \in I$:

$$\varphi_n(x), \quad x \in I_n = (a, b_n], \quad b_n = b_{n-1} + h_{n-1}, \quad h_{n-1} > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Здесь $\{b_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ — монотонно возрастающая числовая последовательность. Следовательно, $b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \tilde{b}$ $(\tilde{b} \le +\infty)$.

Рассмотрим теперь вектор-функцию:

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi_n(x), \quad x \in I_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Эта функция определена на любом I_n и, следовательно, определена на $\tilde{I} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (a, \tilde{b})$. При этом для любого $x \in \tilde{I}$ существует n, такое, что $x \in (a, b_n)$, и, следовательно,

$$\tilde{\varphi}'(x) = \varphi_n'(x) = F(x, \varphi_n(x)) = F(x, \tilde{\varphi}(x)).$$

Это означает, что функция

$$Y = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in \tilde{I} = (a, \tilde{b})$$

есть решение системы (1). Ясно, что она — продолжение исходного решения вправо.

Таким образом, любое решение системы (1) мы можем считать определенным на некотором интервале.

Теорема 2 (об условиях продолжимости решения, заданного на интервале). Пусть

$$Y = \varphi(x), \quad x \in I = (a, b) \tag{*}$$

— решение системы (1) (считаем, что $b < +\infty$). Тогда:

I. если решение (*) удовлетворяет условиям:

1) существует $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x) = C$,

2) точка $(b, C) \in (D)$,

то решение (*) продолжимо вправо на некоторый интервал $I_1 = (a, b_1)$, где $b_1 > b$,

и наоборот,

II. если решение (*) продолжимо вправо на некоторый интервал $I_1 = (a, b_1)$, где $b_1 > b$, то существует $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x) = C$ и точка $(b, C) \in (D)$.

Замечание. В предположении, что $a > -\infty$, аналогичные утверждения имеют место для продолжимости решения (*) влево.

▶ I. Рассмотрим вектор-функцию

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in I = (a,b), \\ C, & x = b. \end{cases}$$

Эта функция определена на промежутке $I_1 = (a,b]$ и, согласно условию 1) теоремы, $\varphi_1(x) \in C(I_1)$. Покажем, что $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, является решением системы (1) на промежутке I_1.

Имеем:

1) для $x \in (a,b]$ точка $(x, \varphi_1(x)) \in (D)$.

В самом деле, для $x \in (a,b)$ $\varphi_1(x) \equiv \varphi(x)$, а точка $(x, \varphi(x)) \in (D)$; для $x = b$ точка $(b, C) \in (D)$.

Имеем, далее,

2) для $x \in (a,b)$

$$\varphi_1'(x) = \varphi'(x) = F(x, \varphi(x)) = F(x, \varphi_1(x)).$$

Устремим в этом равенстве x к $b-0$. Получим

$$\varphi_1'(x) = F(x, \varphi(x)) \xrightarrow[x \to b-0]{} F(b, C)$$

$\Rightarrow$ $\varphi_1(x)$ в точке $x = b$ имеет левостороннюю производную, причем $\varphi_1'(b-0) = F(b, C)$.

Видим, таким образом, что $\varphi_1(x)$ — решение системы (1), определенное на $I_1 = (a,b]$. Ясно, что $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, — продолжение решения (*) на промежуток $(a,b]$.

По следствию к теореме 1, $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, можно продолжить на некоторый интервал $I_2 = (a, b_1)$, где $b_1 > b$. Обозначим это продолжение через

$$\varphi_2(x), \; x \in I_2.$$

Ясно, что $\varphi_2(x)$, $x \in I_2$, — продолжение решения (*) на I_2. Утверждение I теоремы доказано.

II. По условию, решение (*) имеет продолжение вправо: $\varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a, b_1)$, где $b_1 > b$ $\Rightarrow$ существует $\lim\limits_{x \to b} \varphi_1(x) = \varphi_1(b)$. Но тогда

$\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to b-0} \varphi_1(x) = \varphi_1(b) = C$, т.е. $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x)$ существует.

Имеем, далее: точка $(b,C) = (b,\varphi_1(b)) \in (D)$ как точка графика решения $Y = \varphi_1(x)$ системы (1). Видим, что утверждение II теоремы доказано. ◀

Теорема 3 (об условиях существования предела у решения $\varphi(x)$, заданного на интервале). Пусть $Y = \varphi(x)$ — решение системы (1), определенное на интервале $I = (a,b)$ $(b < +\infty)$. Пусть точка $x_0 \in (a,b)$. Если вектор-функция $F(x,\varphi(x))$, $x \in [x_0,b)$, ограничена по норме, т.е. если существует $M > 0$, такое, что $\|F(x,\varphi(x))\| \le M$, $x \in [x_0,b)$, то существует $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x)$.

▶ У нас $\varphi(x)$, $x \in I$ — решение системы (1). Следовательно, справедливо тождество

$$\varphi'(x) \equiv F(x,\varphi(x)), \quad x \in I.$$

Проинтегрируем это тождество по отрезку $[x_0,x] \subset [x_0,b)$. Получим

$$\varphi(x) \equiv \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} F(x,\varphi(x))\,dx, \quad x \in [x_0,b). \tag{*}$$

Возьмем теперь последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ — любую, но такую, что $x_n \in [x_0,b)$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Рассмотрим соответствующую последовательность значений функции

$$\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathrm{N}}. \tag{Δ}$$

Покажем, что она фундаментальная. Для этого возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. У нас последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ — сходящаяся. ($x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$) $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, такой, что для любых n_1, $n_2 > N$: $|x_{n_1} - x_{n_2}| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. В тождестве (*) положим сначала $x = x_{n_1}$, а затем $x = x_{n_2}$. Получим два соотношения. Вычтем из второго соотношения соответствующие части первого. Будем иметь

$$\varphi(x_{n_2}) - \varphi(x_{n_1}) = \int_{x_{n_1}}^{x_{n_2}} F(x,\varphi(x))\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\varphi(x_{n_2}) - \varphi(x_{n_1})\| \le \left|\int_{x_{n_1}}^{x_{n_2}} \|F(x,\varphi(x))\|\,dx\right| \le M \cdot |x_{n_2} - x_{n_1}| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Видим, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N, такой, что для любых $n_1, n_2 > N$ $\left\|\varphi(x_{n_2}) - \varphi(x_{n_1})\right\| < \varepsilon$. Последнее означает, что $\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная. А из фундаментальности следует существование $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(x_n)$.

Итак, для любой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, такой, что $x_n \in [x_0, b)$ и $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} b$, оказывается, что соответствующая последовательность $\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет конечный предел (важно подчеркнуть, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$). Значит, существует $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x)$. ◀

Замечание. Обозначим $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x) = C$. Следует иметь в виду, что точка (b, C) может принадлежать, а может и не принадлежать (D).

Следствие. Пусть $\varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$ $(b < +\infty)$, — решение системы (1). Пусть существует ограниченная замкнутая область $(\overline{D}_1) \subset (D)$ такая, что при некотором $x_0 \in (a, b)$ оказывается: точки $(x, \varphi(x)) \in (\overline{D}_1)$, $x \in [x_0, b)$. Тогда решение $\varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо вправо на $I_1 = (a, b_1)$ $(b_1 > b)$.

▶ Так как $(\overline{D}_1)$ — ограниченная замкнутая и $(\overline{D}_1) \subset (D)$, то $F(x, Y)$ — ограниченная на $(\overline{D}_1)$. По условию, точки $(x, \varphi(x)) \in (\overline{D}_1)$, $x \in [x_0, b)$ $\Rightarrow$ $F(x, \varphi(x))$, $x \in [x_0, b)$ — ограниченная. Тогда по теореме 3 существует $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x) = C$. У нас точки $(x, \varphi(x)) \in (\overline{D}_1)$, $x \in [x_0, b)$. Но тогда и предельная точка $(b, C) \in (\overline{D}_1) \subset (D)$. Видим, что выполнены условия теоремы 2 $\Rightarrow$ решение $\varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на интервал I_1 вправо. ◀

Определение. Пусть
$$Y = \varphi(x), \quad x \in I = \langle a, b \rangle, \tag{2}$$
— решение системы
$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \tag{1}$$
Пусть (2) продолжимо на некоторый интервал $I^* = (\alpha, \beta)$, но не продолжимо ни на какой более широкий промежуток. Тогда I^* называют ***максимальным интервалом существования решения*** (2).

Если решение (2) продолжимо на $\widetilde{I}^* = \langle a,\beta)$, но не продолжимо вправо ни на какой более широкий интервал, то $\widetilde{I}^*$ называют *максимальным вправо интервалом существования решения* (2).

Если решение (2) продолжимо на $\widetilde{\widetilde{I}}^* = (\alpha, b\rangle$, но не продолжимо влево ни на какой более широкий интервал, то $\widetilde{\widetilde{I}}^*$ называют *максимальным влево интервалом существования решения* (2).

Теорема 4 (о существовании максимального интервала существования решения). Любое решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, системы (1) имеет максимальный интервал существования $I^* = (\alpha,\beta)$.

▶ Из следствия к теореме 1 следует, что решение $Y = \varphi(x)$ системы (1) можно считать заданным на некотором интервале $I = (a,b)$. Докажем сначала, что для $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, существует интервал существования решения $\widetilde{I}^*$ — максимальный вправо. Могут иметь место два случая.

1 случай: $I = (a,+\infty)$. В этом случае интервал $(a,+\infty)$ уже является максимальным вправо.

2 случай: $I = (a,b)$, $b < +\infty$. В этом случае станем рассматривать промежуток $[b,+\infty)$. Все числа этого промежутка разобьем на два класса A и B по следующему правилу:

берем произвольное число c из промежутка $[b,+\infty)$; если решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, продолжимо на $(a,c]$, то c отправляем в класс A;

если решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, непродолжимо на $(a,c]$, то c отправляем в класс B.

Могут реализоваться следующие возможности:

1) $A = \varnothing$, т.е. для любого $c \in [b,+\infty)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, непродолжимо на $(a,c]$. Это означает, что решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, непродолжимо вправо. Значит, (a,b) — является максимальным вправо интервалом существования решения $Y = \varphi(x)$.

2) $B = \varnothing$, т.е. для любого $c \in [b,+\infty)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, продолжимо на $(a,c]$. Это означает, что решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, продолжимо на $(a,+\infty)$. Следовательно, $I^* = (a,+\infty)$ — максимальный вправо интервал существования решения $Y = \varphi(x)$.

3) $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Так как любое число $c \in [b, +\infty)$ попадает либо только в A, либо только в B, и так как $c_1 < c_2$, если c_1 — любое из A, а c_2 — любое из B, то существует число $\beta = A|B$, осуществляющее сечение $[b, +\infty)$. Отметим, что $\beta \in B$ (если бы было $\beta \notin B$, то $\beta \in A$, причем $\beta = \max A \Rightarrow$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, было бы продолжимо вправо на $I_1 = (a,\beta]$, а следовательно, по теореме 1 оно было бы продолжимо на промежуток $(a, \beta + h]$, где $h > 0 \Rightarrow \beta + h \in A \Rightarrow \beta$ не есть $\max A$).

Таким образом, в случае 3) будем иметь:

для любого $c \in [b, \beta)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, продолжимо на $(a,c]$; значит, оно продолжимо на (a,β), а

для любого $c \in [\beta, +\infty)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, непродолжимо на $(a,c]$.

Вывод. Решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, продолжимо на $\tilde{I}^* = (a,\beta)$ и непродолжимо ни на какой более широкий интервал вправо.

Совершенно аналогично устанавливается, что для решения $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, имеется интервал существования $\tilde{\tilde{I}}^* = (\alpha, b)$ — максимальный влево.

Общий вывод. Решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a,b)$, имеет максимальный интервал существования $I^* = (\alpha, \beta)$. ◀

Теорема 5 (нелокальная теорема единственности). Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = F(x,Y). \tag{1}$$

Пусть $F(x,Y) \in C(D)$; $F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y(D)$ — локально, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда любые два решения системы (1), имеющие общую точку, совпадают на общем промежутке их существования.

▶ Пусть $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a_1, b_1)$, и $Y = \varphi_2(x)$, $x \in I_2 = (a_2, b_2)$, — два решения системы (1) — любые, но такие, что существует точка $x_0 \in I_1 \cap I_2$, в которой

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = Y_0.$$

Пусть $I = I_1 \cap I_2 = (a,b)$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$\varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x), \quad x \in I.$$

Будем доказывать это тождество для промежутка $I^+ = [x_0, b)$ (для промежутка $I^- = (a, x_0]$ доказательство аналогичное).

От противного. Допустим, что $\varphi_2(x) \not\equiv \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, b)$. Но тогда существует число $\widetilde{b} \in [x_0, b)$, такое, что

1) $\varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, \widetilde{b}]$,

2) $\varphi_2(x) \not\equiv \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, \widetilde{b} + \delta)$, для любого $\delta > 0$.

В точке $\widetilde{b}$ оба решения определены, причем

$$\varphi_2(\widetilde{b}) = \varphi_1(\widetilde{b}) = \widetilde{C}.$$

Тогда точка $(\widetilde{b}, \widetilde{C}) \in (D)$ (это — общая точка графиков наших решений).

Теперь можем применить локальную теорему единственности. Так как решения $Y = \varphi_1(x)$ и $Y = \varphi_2(x)$ проходят через точку $(\widetilde{b}, \widetilde{C})$, то существует число $\widetilde{\delta} > 0$, такое, что

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x), \quad x \in (\widetilde{b} - \widetilde{\delta}, \widetilde{b} + \widetilde{\delta}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x), \quad x \in [x_0, \widetilde{b} + \widetilde{\delta}).$$

А это противоречит тому, что $\varphi_2(x) \not\equiv \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, \widetilde{b} + \delta)$, для любого $\delta > 0$. Значит, предположение, что $\varphi_2(x) \not\equiv \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, b)$, неверно.

Вывод: $\varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, b)$. ◀

Следствие (из теоремы 5). Если решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на интервал I_1, то это его продолжение на I_1 — единственное.

▶ В самом деле, пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — любые два продолжения решения $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, на промежуток I_1. Но тогда оба эти решения определены на I_1 и совпадают на I. Значит, по теореме 5, они совпадают на I_1. ◀

Теорема 6 (нелокальная теорема существования решения). Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \qquad (1)$$

Пусть $F(x,Y) \in C(D)$; $F(x,Y) \in \mathrm{Lip}_Y(D)$ — локально, где $(D) = \{(x,Y),$ $a < x < b,\ \|Y\| < +\infty\}$. Пусть $\|F(x,Y)\| \le p(x)\cdot\|Y\| + q(x)$, $(x,Y) \in (D)$, $p(x), q(x) \in C((a,b))$, $p(x), q(x) \ge 0$, $x \in (a,b)$. Тогда любое решение $Y = \varphi(x)$ системы (1) продолжимо на интервал (a,b).

▶ Пусть $Y = \varphi(x)$ — произвольное решение системы (1). Пусть $I = (\alpha,\beta)$ — максимальный интервал существования этого решения. Покажем, что $I = (\alpha,\beta) = (a,b)$.

Допустим, что это не так. Пусть, например, $\beta < b$ ($\alpha = a$) ($\Rightarrow$ $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$; $(\alpha,\beta) \ne (a,b)$). Пусть $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Рассмотрим решение $Y = \varphi(x)$ на промежутке $[x_0,\beta)$. Покажем, что решение $Y = \varphi(x)$ — ограниченное на $[x_0,\beta)$.

Действительно, у нас $\varphi'(x) \equiv F(x,\varphi(x))$, $x \in [x_0,\beta)$. Проинтегрируем это тождество по промежутку $[x_0,x] \subset [x_0,\beta)$. Получим

$$\varphi(x) \equiv \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} F(t,\varphi(t))dt, \quad x \in [x_0,\beta).$$

Оценим по норме:

$$\|\varphi(x)\| \le \|\varphi(x_0)\| + \int_{x_0}^{x}\left(p(t)\cdot\|\varphi(t)\| + q(t)\right)dt, \quad x \in [x_0,\beta).$$

У нас $[x_0,\beta] \subset (a,b)$. Поэтому $p(t), q(t) \in C([x_0,\beta])$ $\Rightarrow$ существует $M > 0$ такое, что $p(t) \le M$, $q(t) \le M$, $t \in [x_0,\beta]$. А тогда

$$\|\varphi(x)\| \le \underbrace{\|\varphi(x_0)\| + M\cdot(\beta - x_0)}_{=\lambda=\mathrm{const}>0} + M\cdot\int_{x_0}^{x}\|\varphi(t)\|dt, \quad x \in [x_0,\beta).$$

Видим, что $\|\varphi(x)\| = f(x)$ (обозначение) удовлетворяет на $[x_0,\beta)$ условиям леммы Гронуола $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|\varphi(x)\| \le \lambda e^{M\cdot(x-x_0)} \le \underbrace{\lambda e^{M\cdot(\beta-x_0)}}_{=M_1=\mathrm{const}} = M_1, \quad x \in [x_0,\beta).$$

Рассмотрим теперь $(\overline{D}_1) = \begin{cases} x_0 \le x \le \beta, \\ \|Y\| \le M_1. \end{cases}$ Видим, что $(\overline{D}_1)$ — ограниченная замкнутая область, такая, что $(\overline{D}_1) \subset (D)$. Из изложенного выше следует: существует точка $x_0 \in (\alpha, \beta)$, такая, что для любого x из промежутка $[x_0, \beta)$ оказывается: точка $(x, \varphi(x)) \in (\overline{D}_1)$. Но тогда по следствию к теореме 3 решение $\varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$, продолжимо вправо, а это не так (у нас по условию промежуток (α, β) — максимальный вправо интервал существования решения $\varphi(x)$). Значит, наше предположение, что $(\alpha, \beta) \neq (a, b)$, неверно. Следовательно, $(\alpha, \beta) = (a, b)$. ◀

Глава 6

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Некоторые сведения из теории матриц

1) Матрицу A, имеющую n строк и k столбцов, будем обозначать либо символом $A = \{a_{ij}\}$ $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, k};\ i, j \in \mathrm{N})$, a_{ij} — числа (вещественные или комплексные), либо символом

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_k)\text{, где } a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \ (j = \overline{1, k}).$$

2) Пусть α — определенное число. Тогда, как известно,

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha = \{\alpha \cdot a_{ij}\};$$

$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ (A и B — матрицы одинакового строения).

3) Пусть $A = \{a_{il}\}$ $(i = \overline{1, n};\ l = \overline{1, k})$, $B = \{b_{lj}\}$ $(l = \overline{1, k};$ $j = \overline{1, m})$. По определению считают

$$A \cdot B = \left\{\sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}\right\} \ (i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m}).$$

Отметим, что

$$A \cdot B = A \cdot (b_1, b_2, \dots, b_m) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, \dots, A \cdot b_m).$$

4) **Определение.** Нормой матрицы $A = \{a_{ij}\}$ ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, k}$) называют число $\max\limits_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,k}}} |a_{ij}| = \|A\|$.

Легко убедиться, что выполняются соотношения

$\|A\| \geq 0$ для любой A, причем $(\|A\| = 0) \Leftrightarrow (A = 0)$;

$\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$;

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (A и B — матрицы одинакового строения).

Отметим следующее свойство нормы произведения матриц.

Пусть $A = \{a_{il}\}$ ($i = \overline{1, n}$; $l = \overline{1, k}$), $B = \{b_{lj}\}$ ($l = \overline{1, k}$; $j = \overline{1, m}$). Тогда $\|A \cdot B\| \leq k \cdot \|A\| \cdot \|B\|$.

▶ В самом деле, имеем

$$\|A \cdot B\| \overset{\text{def}}{=} \max_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} \left| \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj} \right| \leq \max_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} \left(\sum_{l=1}^{k} |a_{il}| \cdot |b_{lj}| \right) \leq \sum_{l=1}^{k} \|A\| \cdot \|B\| = k \cdot \|A\| \cdot \|B\|. \blacktriangleleft$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$A(x) = \{a_{ij}(x)\} \quad (i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, k}),$$

в которой $a_{ij}(x)$ — функции вещественного аргумента x, определенные в некотором промежутке $I = \langle a, b \rangle$. $A(x)$ называют *матрицей-функцией* аргумента x.

5) Говорят, что $A(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in I$, если в этой точке оказываются непрерывными одновременно функции $a_{ij}(x)$ ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, k}$).

$A(x)$ непрерывна на промежутке I, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

6) Производная матрицы функции $A(x)$ определяется соотношением

$$\frac{dA(x)}{dx} = \left\{ \frac{da_{ij}(x)}{dx} \right\} \quad (i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, k}).$$

$\dfrac{dA(x)}{dx}$ существует, если существуют одновременно $\dfrac{da_{ij}(x)}{dx}$ ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, k}$).

Справедливы следующие утверждения.

Пусть матрицы-функции $A(x)$ и $B(x)$ одинакового строения, определенные и дифференцируемые на I. Тогда $\frac{d}{dx}(A(x)+B(x))==\frac{dA(x)}{dx}+\frac{dB(x)}{dx}$, $x \in I$.

Пусть $A(x)$ определена и дифференцируема на I, α — постоянное число. Тогда $\frac{d}{dx}(\alpha \cdot A(x))=\alpha \cdot \frac{dA(x)}{dx}$, $x \in I$.

Пусть $A(x)=\{a_{il}(x)\}$ ($i=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,k}$) определена и дифференцируема на I, $B(x)=\{b_{lj}(x)\}$ ($l=\overline{1,k}$; $j=\overline{1,m}$) определена и дифференцируема на I. Тогда

$$\frac{d}{dx}(A(x)\cdot B(x))=\left\{\frac{d}{dx}\sum_{l=1}^{k}a_{il}(x)\cdot b_{lj}(x)\right\}=$$

$$=\left\{\sum_{l=1}^{k}\left(a'_{il}(x)\cdot b_{lj}(x)+a_{il}(x)\cdot b'_{lj}(x)\right)\right\}=$$

$$=\frac{dA(x)}{dx}\cdot B(x)+A(x)\cdot\frac{dB(x)}{dx}, \quad x \in I.$$

Замечание. Пусть $A(x)$ — квадратная матрица-функция, определенная и дифференцируемая на I. Тогда

$$\frac{d}{dx}\left(A^2(x)\right)=A'(x)\cdot A(x)+A(x)\cdot A'(x), \quad x \in I.$$

Следует помнить, что, вообще говоря, $\frac{d}{dx}\left(A^2(x)\right)\neq 2A(x)\cdot A'(x)$, $x \in I$, ибо матрицы $A'(x)$ и $A(x)$ часто оказываются некоммутирующими.

7) Пусть $A(x)\in C(I)$, $I=[a,b]$. $\int_a^b A(x)\,dx$ определяется соотношением

$$\int_a^b A(x)\,dx=\left\{\int_a^b a_{ij}(x)\,dx\right\} \ (i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,k}).$$

В частности, для любого $x\in[a,b]$ имеем

$$\int_a^x A(t)\,dt=\left\{\int_a^x a_{ij}(t)\,dt\right\} \ (i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,k}).$$

Отметим, что

$$\frac{d}{dx}\int_a^x A(t)\,dt = A(x), \quad x \in [a,b].$$

Рассмотрим вопрос о норме интеграла. Имеем

$$\left\| \int_a^b A(x)\,dx \right\| = \max_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,k}}} \left| \int_a^b a_{ij}(x)\,dx \right| \le \max_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,k}}} \left| \int_a^b \underbrace{|a_{ij}(x)|}_{\le \|A(x)\|}\,dx \right| \le \left| \int_a^b \|A(x)\|\,dx \right|.$$

§2. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Простейшие свойства решений линейных однородных систем

Система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\cdot y_1 + a_{12}(x)\cdot y_2 + \ldots + a_{1n}(x)\cdot y_n + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)\cdot y_1 + a_{22}(x)\cdot y_2 + \ldots + a_{2n}(x)\cdot y_n + f_2(x), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)\cdot y_1 + a_{n2}(x)\cdot y_2 + \ldots + a_{nn}(x)\cdot y_n + f_n(x) \end{cases} \qquad (\tilde{1})$$

называется линейной.

Считаем, что $a_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1,n})$ и $f_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ — некоторые вещественные функции от x, определенные и непрерывные в $I = (a,b)$.

Пусть

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}; \ F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix}; \ A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда система $(\tilde{1})$ может быть записана в виде

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y + F(x). \qquad (1)$$

Обозначим $A(x)\cdot Y + F(x) = \mathcal{F}(x,Y)$. Ясно, что $\mathcal{F}(x,Y) \in C(D)$, где $(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ \|Y\| < +\infty. \end{cases}$ Имеем

$$\frac{\partial \mathcal{F}(x,Y)}{\partial Y} = A(x) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{F}(x,Y)}{\partial Y} \in C(D).$$

Значит, (D) — область существования и единственности решений системы (1).

Положим $p(x) = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} |a_{ij}(x)|$, $q(x) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |f_i(x)|$. Имеем

$$\|\mathcal{F}(x,Y)\| = \|A(x)\cdot Y + F(x)\| \le \|A(x)\cdot Y\| + \|F(x)\| \le$$
$$\le p(x)\cdot n\cdot \|Y\| + q(x) = \tilde{p}(x)\cdot\|Y\| + q(x),$$

где $\tilde{p}(x) = p(x)\cdot n$.

Видим, что выполнены условия нелокальной теоремы существования решения. По этой теореме *любое решение* $Y = \varphi(x)$ *линейной системы* (1) *продолжимо на интервал* (a,b).

Справедливо также утверждение: любые два решения линейной системы (1), проходящие через одну и ту же точку, совпадают на всем интервале (a,b).

Действительно, по указанной выше теореме, любые два решения системы (1) продолжимы на интервал (a,b). Но тогда, по нелокальной теореме единственности, они совпадают на (a,b).

Если в системе (1) $F(x) \equiv 0$, $x \in I$, то вместо (1) будем иметь

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y. \qquad (1_0)$$

(1_0) называют линейной *однородной* системой дифференциальных уравнений. Отметим следующие простейшие свойства решений системы (1_0).

1. $Y = 0$, $x \in I$ — решение системы (1_0) (очевидно).

2. Если вектор-функции $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I$, и $Y = \varphi_2(x)$, $x \in I$, — решения линейной однородной системы (1_0), то вектор-функция $Y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, $x \in I$, — решение системы (1_0).

▶ В самом деле, так как $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I$, и $Y = \varphi_2(x)$, $x \in I$, — решения системы (1_0), то

$$\frac{d\varphi_1(x)}{dx} - A(x)\cdot\varphi_1(x) \equiv 0, \quad x \in I,$$

$$\frac{d\varphi_2(x)}{dx} - A(x)\cdot\varphi_2(x) \equiv 0, \quad x \in I.$$

Имеем

$$\frac{d}{dx}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) - A(x)\cdot(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) =$$

$$= \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - A(x)\cdot\varphi_1(x) - A(x)\cdot\varphi_2(x) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{d\varphi_1(x)}{dx} - A(x)\cdot\varphi_1(x)\right)}_{\equiv 0,\ x\in I} + \underbrace{\left(\frac{d\varphi_2(x)}{dx} - A(x)\cdot\varphi_2(x)\right)}_{\equiv 0,\ x\in I} \equiv 0, \quad x \in I \Rightarrow$$

$\Rightarrow Y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, $x \in I$, — решение системы (1_0). ◀

3. Если $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, — решение системы (1_0), а C — постоянная скалярная величина, то $Y = C\cdot\varphi(x)$, $x \in I$, — решение системы (1_0).

▶ Действительно, по условию $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, — решение системы (1_0) $\Rightarrow \dfrac{d\varphi(x)}{dx} - A(x)\cdot\varphi(x) \equiv 0$, $x \in I$. Имеем

$$\frac{d}{dx}(C\cdot\varphi(x)) - A(x)\cdot(C\cdot\varphi(x)) = C\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} - C\cdot A(x)\cdot\varphi(x) =$$

$$= C\cdot\underbrace{\left(\frac{d\varphi(x)}{dx} - A(x)\cdot\varphi(x)\right)}_{\equiv 0,\ x\in I} \equiv 0, \quad x \in I \Rightarrow$$

$\Rightarrow Y = C\cdot\varphi(x)$, $x \in I$, — решение системы (1_0). ◀

Следствие. Если $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I$; $Y = \varphi_2(x)$, $x \in I$; ; $Y = \varphi_m(x)$, $x \in I$, — решения линейной однородной системы (1_0), а $C_1, C_2, \dots, C_m$ — произвольные постоянные числа, то вектор-функция

$$Y = C_1\cdot\varphi_1(x) + C_2\cdot\varphi_2(x) + \dots + C_m\cdot\varphi_m(x)$$

— решение системы (1_0).

Замечание. Если $m = n$, то вектор-функция

$$Y = C_1\cdot\varphi_1(x) + C_2\cdot\varphi_2(x) + \dots + C_n\cdot\varphi_n(x), \quad x \in I, \qquad (2)$$

будет решением системы (1_0), зависящим от x и от $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Вопрос: будет ли (2) общим решением системы (1_0)?

Ответ: не всегда.

Выясним, какими должны быть решения $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ системы (1_0), чтобы вектор-функция (2) была общим решением этой системы.

§3. Линейная зависимость и линейная независимость вектор-функций. Признаки линейной независимости решений линейной однородной системы

Пусть

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x) \quad (n \in \mathrm{N}) \tag{1}$$

— вектор-функции, определенные на некотором $I=(a,b)$.

Определение. Если существуют числа γ_1, γ_2, ..., γ_n, среди которых есть отличные от нуля, такие, что

$$\gamma_1 \cdot \varphi_1(x) + \gamma_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots + \gamma_n \cdot \varphi_n(x) \equiv 0, \quad x \in I, \tag{2}$$

то вектор-функции (1) называются линейно зависимыми на $I=(a,b)$.

Если же тождество (2) имеет место лишь тогда, когда $\gamma_1=\gamma_2=\dots=\gamma_n=0$, то вектор-функции (1) называются линейно независимыми на I.

Пусть вектор-функции (1) являются решениями линейной однородной системы

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y. \tag{1_0}$$

Образуем матрицу

$$\Phi(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\big). \tag{3}$$

$\Phi(x)$ называют матрицей решений системы (1_0).

Определитель матрицы $\Phi(x)$ обозначают через $W(x)$ и называют вронскианом, составленным для решений системы (1_0). Таким образом, по определению,

$$W(x) = \det \Phi(x), \quad x \in I.$$

Теорема 1 (необходимый признак линейной зависимости n решений системы (1_0)). Если решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, системы (1_0) линейно зависимы на $I=(a,b)$, то их вронскиан

$$W(x) \equiv 0, \quad x \in I.$$

▶ По условию, решения (1) системы (1_0) — линейно зависимые на $I=(a,b)$ $\Rightarrow$ существует (постоянный) вектор $C=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} \neq 0$, такой, что

$$\Phi(x)\cdot C \equiv 0, \quad x \in I. \tag{4}$$

Это означает, что для $x \in I$ линейная алгебраическая система (4) с матрицей коэффициентов $\Phi(x)$ и с неизвестными $C_1, C_2, \dots, C_n$ имеет решение, отличное от чисто нулевого. Но это возможно лишь тогда, когда $\det\Phi(x)=0$ для $x \in I$. ◀

Следствие (достаточный признак линейной независимости n решений системы (1_0)). Если существует точка $x_0 \in I$, такая, что $W(x_0)\neq 0$, то решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, системы (1_0) линейно независимы на I.

▶ Рассуждаем от противного. Допускаем, что решения (1) системы (1_0) — линейно зависимые на I. Но тогда по теореме 1 получаем, что $W(x)\equiv 0$, $x\in I$ $\Rightarrow$ в частности, $W(x_0)=0$, а это не так.

Теорема 2 (достаточный признак линейной зависимости n решений системы (1_0)). Пусть вектор-функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, — решения системы (1_0). Пусть $W(x)$ — их вронскиан. Если существует точка $x_0 \in I$, такая, что $W(x_0)=0$, то решения (1) системы (1_0) — линейно зависимые на $I=(a,b)$.

▶ Введем в рассмотрение линейную алгебраическую систему

$$\Phi(x_0)\cdot C = 0, \tag{5}$$

где $\Phi(x)$ — матрица, составленная из решений (1) системы (1_0), а $C=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$ — неизвестный вектор. По условию, $\det\Phi(x_0)=W(x_0)=0$ $\Rightarrow$ система (5) имеет ненулевое решение

$$C^{(0)}=\begin{pmatrix} C_1^{(0)} \\ C_2^{(0)} \\ \dots \\ C_n^{(0)} \end{pmatrix} \quad (C^{(0)}\neq 0).$$

Рассмотрим решение системы (1_0)

$$Y = C_1^{(0)} \cdot \varphi_1(x) + C_2^{(0)} \cdot \varphi_2(x) + \ldots + C_n^{(0)} \cdot \varphi_n(x) = \Phi(x) \cdot C^{(0)}. \quad (6)$$

Это решение, в силу (5), удовлетворяет начальному условию

$$Y\big|_{x=x_0} = 0 \quad (7)$$

(ибо, в силу (5), $\Phi(x_0) \cdot C^{(0)} = 0$). Но начальному условию (7) удовлетворяет также решение $Y \equiv 0$, $x \in I$, системы (1_0). Мы знаем, что для линейной системы любые два решения, проходящие через одну и ту же точку, совпадают на всем интервале $I = (a, b)$. Следовательно, будем иметь

$$\Phi(x) \cdot C^{(0)} = 0, \quad x \in I.$$

Так как $C^{(0)} \neq 0$, то последнее соотношение означает, что решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, системы (1_0) — линейно зависимые на $I = (a, b)$. ◀

Следствие (необходимый признак линейной независимости n решений системы (1_0)). Если решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, системы (1_0) — линейно независимые на I, то

$$W(x) \neq 0 \text{ для } x \in I.$$

▶ В самом деле, допустим, что имеется хотя бы одна точка $x_0 \in I$, такая, что $W(x_0) = 0$. Но тогда по теореме 2 получаем, что решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, — линейно зависимые на I, а это не так. ◀

Определение. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I = (a, b)$, — решения системы (1_0), $\Phi(x)$ — матрица, составленная из этих решений. Если решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, — линейно независимые на I, то матрицу $\Phi(x)$ называют *фундаментальной* матрицей решений системы (1_0) ($\Phi(x)$ — ф. м. р. с. (1_0)).

Если существует точка $x_0 \in I$, такая, что $\Phi(x_0) = E$, то $\Phi(x)$ — ф. м. р. с. (1_0), нормированная в точке x_0. Здесь и всюду в дальнейшем E — единичная матрица.

§4. Теорема о составлении общего решения линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Теорема. Пусть $\Phi(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\big)$ — ф. м. р. с.

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y. \quad (1_0)$$

Тогда
$$Y = \Phi(x) \cdot C\,, \tag{1}$$
где C— произвольный постоянный вектор, есть общее решение

системы (1_0) в $(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ \|Y\| < +\infty. \end{cases}$

▶ 1) Берем произвольную точку $(x_0, Y_0) \in (D)$ и рассматриваем векторное уравнение
$$Y_0 = \Phi(x_0) \cdot C\,. \tag{2}$$
(2) представляет собой алгебраическую систему линейных уравнений относительно компонентов вектора C. Определителем этой системы является $\det \Phi(x_0) \neq 0$. Следовательно, (2) однозначно разрешимо относительно C:
$$C^{(0)} = \Phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0\,.$$

2) Подставив в (1) $C^{(0)}$ вместо C, будем иметь
$$Y = \Phi(x) \cdot C^{(0)} = C_1^{(0)} \cdot \varphi_1(x) + C_2^{(0)} \cdot \varphi_2(x) + \ldots + C_n^{(0)} \cdot \varphi_n(x)\,. \tag{3}$$
Вектор-функция (3) представляет собой линейную комбинацию решений $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, системы (1_0) $\Rightarrow$ (3) — решение системы (1_0) на $I = (a, b)$. Таким образом, показано, что (1) удовлетворяет определению общего решения системы (1_0). ◀

Замечание. Формула (3) может быть записана в виде
$$Y = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0\,. \tag{$\tilde{3}$}$$
$(\tilde{3})$ — общее решение системы (1_0) в форме Коши. В частности, если $\Phi(x_0) = E$, то $(\tilde{3})$ принимает вид
$$Y = \Phi(x) \cdot Y_0\,.$$

Замечание (об общем виде фундаментальной матрицы решений системы (1_0)).

1) Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ — ф. м. р. с. (1_0). Пусть C— постоянная, произвольная, неособенная матрица порядка n. Тогда
$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot C \tag{4}$$
— тоже ф. м. р. с. (1_0).

В самом деле, имеем

$$\Psi(x) = \Phi(x)\cdot C = \Phi(x)\cdot\left(C_1, C_2, \ldots, C_n\right) =$$

$$= \Big(\underbrace{\Phi(x)\cdot C_1}_{=\Psi_1(x)}, \underbrace{\Phi(x)\cdot C_2}_{=\Psi_2(x)}, \ldots, \underbrace{\Phi(x)\cdot C_n}_{=\Psi_n(x)}\Big).$$

Так как $\Psi_1(x) = \Phi(x)\cdot C_1$, $\Psi_2(x) = \Phi(x)\cdot C_2$, $\cdots$, $\Psi_n(x) = \Phi(x)\cdot C_n$ являются решениями системы (1_0) на $I = (a,b)$, то $\Psi(x) = \left(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)\right)$ — матрица решений системы (1_0).

Имеем, далее,

$$\det\Psi(x) = \underbrace{\det\Phi(x)}_{\neq 0,\ x\in I}\cdot\underbrace{\det C}_{\neq 0} \neq 0, \quad x\in I \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Psi(x)$ — ф. м. р. с., (1_0).

2) Пусть $\Phi(x)$ — ф. м. р. с., (1_0). Пусть $\Psi(x)$ — любая другая ф. м. р. с., (1_0). Тогда обязательно существует неособенная, постоянная матрица C, такая, что

$$\Psi(x) = \Phi(x)\cdot C$$

(т.е. любая ф. м. р. с., (1_0) содержится при некоторой неособенной матрице C в выражении $\Phi(x)\cdot C$).

В самом деле, пусть $\Psi(x) = \left(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)\right)$ — произвольная ф. м. р. с. $(1_0) \Rightarrow Y = \psi_j(x)$ $(j = \overline{1,n})$ — решение системы (1_0). По теореме об общем решении системы (1_0) заключаем: существует постоянный вектор C_j $(j = \overline{1,n})$, такой, что

$$\psi_j(x) = \Phi(x)\cdot C_j \qquad (j = \overline{1,n}).$$

Получаем, таким образом,

$$\Psi(x) = \left(\Phi(x)\cdot C_1, \Phi(x)\cdot C_2, \ldots, \Phi(x)\cdot C_n\right) \equiv \Phi(x)\cdot C,$$

где $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Остается показать, что $\det C \neq 0$. Имеем

$$\Psi(x) = \Phi(x)\cdot C \Rightarrow C = \Phi^{-1}(x)\cdot\Psi(x) \Rightarrow$$

$$\det C = \underbrace{\det\Phi^{-1}(x)}_{\neq 0,\ x\in I}\cdot\underbrace{\det\Psi(x)}_{\neq 0,\ x\in I} \neq 0.$$

Отметим, в частности, что если $\Phi(x_0) = E$, то $C = \Psi(x_0)$.

§5. Формула Остроградского — Лиувилля

Пусть имеется линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y. \qquad (1_0)$$

Пусть $\Phi(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\big)$ — матрица решений системы (1_0) (не обязательно фундаментальная). Пусть $W(x) = \det\Phi(x)$ — вронскиан. Тогда

$$W(x) = W(x_0)\cdot \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\right)dt\right), \text{ для любого } x \in (a,b)$$

($x_0 \in (a,b)$ фиксированное, любое).

▶ Имеем

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{\varphi_{n1}(x)}_{\varphi_1(x)} & \underbrace{\varphi_{n2}(x)}_{\varphi_2(x)} & \dots & \underbrace{\varphi_{nn}(x)}_{=\varphi_n(x)} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(x) & \varphi'_{12}(x) & \dots & \varphi'_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi'_{21}(x) & \varphi'_{22}(x) & \dots & \varphi'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi'_{n1}(x) & \varphi'_{n2}(x) & \dots & \varphi'_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{i-1,1}(x) & \varphi_{i-1,2}(x) & \dots & \varphi_{i-1,n}(x) \\ \varphi'_{i,1}(x) & \varphi'_{i,2}(x) & \dots & \varphi'_{i,n}(x) \\ \varphi_{i+1,1}(x) & \varphi_{i+1,2}(x) & \dots & \varphi_{i+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

У нас вектор-функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ являются решениями системы (I_0). Поэтому

$$\varphi'_{i1}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot\varphi_{j1}(x), \quad \varphi'_{i2}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot\varphi_{j2}(x), \quad \dots ,$$

$$\varphi'_{in}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot\varphi_{jn}(x).$$

А тогда

$$W'(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot\varphi_{j1}(x) & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot\varphi_{j2}(x) & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot\varphi_{jn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \left.\right\} i\text{-я строка} \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W'(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{j1}(x) & \varphi_{j2}(x) & \dots & \varphi_{jn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \left.\right\} i\text{-я строка} \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W'(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\cdot W(x) = W(x)\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x).$$

Видим, что для $W(x)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Решая это уравнение с начальным условием

$$W(x)\big|_{x=x_0} = W(x_0) \qquad (x_0 \in (a,b)),$$

получаем $W(x) = W(x_0)\cdot\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\right)dt\right)$, $x \in (a,b)$. Таким образом, формула Остроградского — Лиувилля установлена. ◀

§6. Теорема о составлении общего решения линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Теорема. Пусть имеется линейная неоднородная система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y + F(x). \tag{1}$$

Введем в рассмотрение систему

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y \tag{1_0}$$

((1_0) — линейная однородная система, соответствующая неоднородной системе (1)). Пусть $\Phi(x) = \big(\varphi_1(x); \varphi_2(x); \dots; \varphi_n(x)\big)$ — ф. м. р. с. (1_0). (Тогда $\tilde{Y} = \Phi(x) \cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, есть общее решение системы (1_0) в (D).)

Пусть вектор-функция $Y_*(x) = \psi(x)$, $x \in I$, — какое-нибудь решение неоднородной системы (1). Тогда

$$Y = \Phi(x) \cdot C + \psi(x) \tag{2}$$

есть общее решение системы (1) в (D).

▶ 1) Берем произвольную точку $(x_0, Y_0) \in (D)$ и рассматриваем векторное уравнение

$$Y_0 = \Phi(x_0) \cdot C + \psi(x_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Phi(x_0) \cdot C = Y_0 - \psi(x_0). \tag{3}$$

(3) — алгебраическая система линейных уравнений относительно компонентов вектора C. Определителем этой системы является $\det \Phi(x_0) \neq 0$. Следовательно, (3) имеет, и притом единственное, решение $C^{(0)} = \Phi^{-1}(x_0) \cdot \big(Y_0 - \psi(x_0)\big)$.

2) Подставим в (2) $C^{(0)}$ вместо C. Получим

$$Y = \Phi(x) \cdot C^{(0)} + \psi(x). \tag{4}$$

Убедимся, что (4) является решением системы (1). Имеем

$$\frac{d}{dx}\Big[\Phi(x) \cdot C^{(0)} + \psi(x)\Big] - A(x) \cdot \Big[\Phi(x) \cdot C^{(0)} + \psi(x)\Big] =$$

$$= \frac{d}{dx}\Big[\Phi(x) \cdot C^{(0)}\Big] + \frac{d\psi(x)}{dx} - A(x) \cdot \Big[\Phi(x) \cdot C^{(0)}\Big] - A(x) \cdot \psi(x) =$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dx}\left[\Phi(x)\cdot C^{(0)}\right] - A(x)\cdot\left[\Phi(x)\cdot C^{(0)}\right]}_{\equiv 0,\ x\in I} +$$

$$+ \underbrace{\frac{d\psi(x)}{dx} - A(x)\cdot\psi(x)}_{\equiv F(x),\ x\in I} \equiv F(x), \qquad x\in I.$$

Показано, таким образом, что (2) удовлетворяет определению общего решения системы (1). ◀

§7. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения решения $Y_*(x) = \psi(x)$ линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть имеется линейная неоднородная система

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y + F(x). \tag{1}$$

Тогда

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y \tag{1_0}$$

— линейная однородная система, соответствующая линейной неоднородной системе (1). Пусть $\Phi(x)$ — ф. м. р. с. (1_0) $\Rightarrow$ $Y = \Phi(x)\cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, — общее решение системы (1_0).

Станем искать решение $Y_*(x) = \psi(x)$ системы (1) в виде

$$Y_*(x) = \Phi(x)\cdot C(x), \tag{2}$$

где $C(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ \dots \\ C_n(x) \end{pmatrix}$ — неизвестная (пока) вектор-функция. Хотим, чтобы вектор-функция (2) была решением системы (1). Но тогда должно быть справедливо тождество

$$\Phi'(x)\cdot C(x) + \Phi(x)\cdot C'(x) \equiv A(x)\cdot\Phi(x)\cdot C(x) + F(x), \qquad x\in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[\Phi'(x) - A(x)\cdot\Phi(x)\right]}_{\equiv 0,\ x\in I}\cdot C(x) + \Phi(x)\cdot C'(x) \equiv F(x), \qquad x\in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi(x)\cdot C'(x) \equiv F(x), \quad x\in I \Leftrightarrow C'(x) \equiv \Phi^{-1}(x)\cdot F(x), \quad x\in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\cdot F(t)\,dt$$

(произвольный постоянный вектор, который получается в результате интегрирования, можно считать равным **0**). Здесь точки $x_0, x \in I = (a,b)$, — любые.

Видим, таким образом, что если в (2) в качестве $C(x)$ брать $C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\cdot F(t)\,dt$, то вектор-функция

$$Y_*(x) = \Phi(x)\cdot \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\cdot F(t)\,dt, \quad x\in I,$$

будет решением системы (1).

Замечание. Общее решение линейной неоднородной системы (1) может быть записано, следовательно, в виде

$$Y = \Phi(x)\cdot C + \Phi(x)\cdot \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\cdot F(t)\,dt, \quad x\in I. \tag{3}$$

Пусть требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию

$$Y\big|_{x=x_0} = Y_0 \ \text{(точка } (x_0, Y_0)\in (D)\text{)}. \tag{4}$$

Подстановка в (3) начальных данных (4) дает

$$Y_0 = \Phi(x_0)\cdot C \ \Rightarrow\ C = \Phi^{-1}(x_0)\cdot Y_0.$$

Следовательно, решение задачи Коши (1) — (4) может быть записано в виде

$$Y = \Phi(x)\cdot\Phi^{-1}(x_0)\cdot Y_0 + \Phi(x)\cdot \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\cdot F(t)\,dt. \tag{5}$$

В частном случае, когда $\Phi(x_0) = E$, последняя формула принимает вид

$$Y = \Phi(x)\cdot Y_0 + \Phi(x)\cdot \int\limits_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)\cdot F(t)\,dt.$$

Прежде чем приступать к изложению метода интегрирования линейных систем с постоянными коэффициентами, продолжим обзор некоторых сведений из теории матриц, используемых в дальнейшем.

§8. Матричные последовательности и ряды

Пусть имеется последовательность матриц

$$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \tag{1}$$

(в (1) $A_k = \{a_{ij}^{(k)}\}$ $(i,j=\overline{1,n})$). Пусть имеется матрица $A=\{a_{ij}\}$ $(i,j=\overline{1,n})$.

Определение. Говорят, что последовательность матриц (1) сходится к матрице A при $k\to\infty$, и пишут $A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A$ (или $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$), если $\|A_k - A\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Итак, по определению

$$\left(A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{k\to\infty} A_k = A\right) \Leftrightarrow \left(\|A_k - A\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\right).$$

Мы знаем, что $\|A_k - A\| = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right|$. Поэтому

$$\left(\|A_k - A\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\right) \Leftrightarrow \left(\left|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad i,j=\overline{1,n}\right).$$

Следовательно,

$$\left(A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A\right) \Leftrightarrow \left(a_{ij}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_{ij}, \quad i,j=\overline{1,n}\right),$$

т.е. сходимость последовательности матриц (1) эквивалентна одновременной сходимости n^2 числовых последовательностей.

Отметим следующие свойства сходящихся последовательностей матриц.

1) Если $A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A$, то $\|A_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \|A\|$.

2) Если $A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A$, $B_k \xrightarrow[k\to\infty]{} B$, то $A_k + B_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A+B$.

3) Если $A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A$, $B_k \xrightarrow[k\to\infty]{} B$, то $A_k \cdot B_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A\cdot B$.

Установим, например, свойство 3.

▶ Имеем

$$A_kB_k - AB = A_kB_k - A_kB + A_kB - AB =$$
$$= A_k\cdot(B_k - B) + (A_k - A)\cdot B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|A_kB_k - AB\right\| \le \left\|A_k\cdot(B_k - B)\right\| + \left\|(A_k - A)\cdot B\right\| \le$$

$$\le n\cdot \underbrace{\left\|A_k\right\|}_{\xrightarrow[k\to\infty]{}\|A\|}\cdot\underbrace{\left\|B_k - B\right\|}_{\xrightarrow[k\to\infty]{}0} + n\cdot\underbrace{\left\|A_k - A\right\|}_{\xrightarrow[k\to\infty]{}0}\cdot\|B\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\|A_kB_k - AB\right\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0 \Rightarrow A_kB_k\xrightarrow[k\to\infty]{}AB. \blacktriangleleft$$

Определение. Пусть $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность матриц. Выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k = A_1 + A_2 + \ldots + A_k + \ldots \qquad (2)$$

называется матричным рядом.

Положим

$$S_1 = A_1,$$
$$S_2 = A_1 + A_2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$S_l = A_1 + A_2 + \ldots + A_l,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

(S_l — l-я частичная сумма матричного ряда (2)). Ясно, что $\{S_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ — последовательность частичных сумм ряда (2).

Если последовательность $\{S_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ сходится к матрице S при $l\to\infty$, то матричный ряд (2) называется сходящимся, а матрицу S называют суммой матричного ряда (2).

Пишут: $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

Отметим, что S_l есть матрица с элементами

$$\sum_{k=1}^{l}a_{ij}^{(k)} \quad (i,j=\overline{1,n}).$$

Следовательно, сходимость матричного ряда (2) означает сходимость n^2 обычных числовых рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)} \quad (i,j=\overline{1,n}).$$

Справедливо утверждение: пусть имеются два сходящихся матричных ряда

$$\text{(I)} \ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \ \text{ и (II)} \ \sum_{k=1}^{\infty} B_k$$

и пусть A и B — суммы рядов (I) и (II) соответственно. Тогда ряд (III) $\sum_{k=1}^{\infty}(A_k + B_k)$ тоже сходится и имеет сумму $(A + B)$.

▶ В самом деле, пусть $S_l^{(\mathrm{I})}$, $S_l^{(\mathrm{II})}$, $S_l^{(\mathrm{III})}$ — l-е частичные суммы рядов (I), (II) и (III) соответственно. Имеем: $S_l^{(\mathrm{III})} = \left(S_l^{(\mathrm{I})} + S_l^{(\mathrm{II})}\right)$ $\Rightarrow S_l^{(\mathrm{III})} \xrightarrow[l\to\infty]{} (A + B)$. ◀

§9. Матричные степенные ряды

Пусть имеется скалярный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{1}$$

Пусть r — радиус сходимости, $f(x)$ — сумма ряда (1). Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{2}$$

($A^0 = E$). Ряд (2) называется степенным рядом от матрицы A. Если ряд сходится, то его сумму уславливаемся обозначать через $f(A)$.

Теорема (об условиях сходимости матричного степенного ряда). Пусть имеется скалярный степенной ряд (1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Пусть r — радиус сходимости, $f(x)$ — сумма этого ряда. Рассмотрим ряд (2): $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$, где A — произвольная квадратная матрица порядка n. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — собственные числа матрицы A. Тогда:

1) если $|\lambda_j| < r$, для любого $j = \overline{1, m}$, то ряд (2) сходится;

2) если имеется хотя бы одно j_0 такое, что $\left|\lambda_{j_0}\right| > r$, то ряд (2) расходится.

▶ I. Рассмотрим сначала случай, когда матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix},$$

где матрица A_j $(j = \overline{1, m})$ имеет размеры $(n_j \times n_j)$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} n_j = n \Rightarrow$

$A = \operatorname{diag}\left[A_1, A_2, \dots, A_m\right]$. Наряду с рядом (2): $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ рассмотрим ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_j^k \quad (j = \overline{1, m}). \tag{3}$$

Покажем, что ряд (2) сходится лишь тогда, когда сходится каждый из рядов (3) (причем, в случае сходимости: если $f(A)$ — сумма ряда (2), а $f(A_j)$ $(j = \overline{1, m})$ — суммы рядов (3), то $f(A) =$ $= \operatorname{diag}\left[f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_m)\right]$). Для этого рассмотрим l-ю частичную сумму ряда (2). Имеем:

$$S_l = \sum_{k=0}^{l} a_k A^k = \sum_{k=0}^{l} a_k \cdot \begin{pmatrix} A_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_m^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{l} a_k A_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{l} a_k A_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sum\limits_{k=0}^{l} a_k A_m^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_l(A_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_l(A_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_l(A_m) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(A)=\lim_{l\to\infty}S_l(A)=\begin{pmatrix}\lim\limits_{l\to\infty}S_l(A_1) & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lim\limits_{l\to\infty}S_l(A_2) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lim\limits_{l\to\infty}S_l(A_m)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}f(A_1) & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & f(A_2) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(A_m)\end{pmatrix}=\operatorname{diag}\left[f(A_1),f(A_2),\dots,f(A_m)\right].$$

II. Допустим, что матрица A_j имеет вид ($j=\overline{1,m}$):

$$A_j=\begin{pmatrix}\lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j\end{pmatrix} \text{ — клетка Жордана.}$$

Покажем, что если $|\lambda_j|<r$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA_j^k$ сходится, если же $|\lambda_j|>r$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA_j^k$ расходится.

Вычислим матрицу A_j^k (для произвольного k). Для этого представим ее в виде

$$A_j=\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_j & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j\end{pmatrix}}_{=\lambda_j\cdot E}+\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix}}_{=E_1}=\lambda_jE+E_1.$$

Отметим, что матрица $\lambda_j\cdot E$ коммутирует с любой матрицей (в частности, с матрицей E_1). Поэтому сумму λ_jE+E_1 можно возводить в степень по формуле бинома Ньютона. Значит,

$$A_j^k = (\lambda_j E + E_1)^k = \lambda_j^k \cdot E + k \cdot \lambda_j^{k-1} \cdot E_1 + $$
$$+ \frac{k(k-1)}{2} \cdot \lambda_j^{k-2} \cdot E_1^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots 1}{k!} E_1^k .$$

Подсчитаем различные степени матрицы E_1. Имеем

$$E_1^2 = E_1 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— имеет две первые нулевые строки и два последних нулевых столбца,

$$E_1^3 = E_1 \cdot E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— имеет три первые нулевые строки и три последних нулевых столбца, и т. д. А тогда

$$A_j^k = (\lambda_j E + E_1)^k = \begin{pmatrix} \lambda_j^k & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ k\lambda_j^{k-1} & \lambda_j^k & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_j^{k-2} & k\lambda_j^{k-1} & \lambda_j^k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_k^{n_j-1}\lambda_j^{k-(n_j-1)} & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_j^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_j^k & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{(\lambda_j^k)'}{1!} & \lambda_j^k & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{(\lambda_j^k)''}{2!} & \frac{(\lambda_j^k)'}{1!} & \lambda_j^k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{(\lambda_j^k)^{(n_j-1)}}{(n_j-1)!} & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_j^k \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$S_l(A_j)=\sum_{k=0}^{l}a_kA_j^k=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{l}a_k\lambda_j^k & 0 & 0 & \dots & 0\\ \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{l}a_k\lambda_j^k\right)'}{1!} & \sum\limits_{k=0}^{l}a_k\lambda_j^k & 0 & \dots & 0\\ \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{l}a_k\lambda_j^k\right)''}{2!} & \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{l}a_k\lambda_j^k\right)'}{1!} & \sum\limits_{k=0}^{l}a_k\lambda_j^k & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{l}a_k\lambda_j^k\right)^{(n_j-1)}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & \sum\limits_{k=0}^{l}a_k\lambda_j^k\end{pmatrix}.$$

Пусть $|\lambda_j|<r$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_j^k$ — сходящийся. Пусть $f(\lambda_j)$ — сумма этого ряда. Но тогда существует

$$\lim_{l\to\infty}S_l(A_j)=f(A_j)=\begin{pmatrix}f(\lambda_j) & 0 & 0 & \dots & 0\\ \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & f(\lambda_j) & 0 & \dots & 0\\ \frac{f''(\lambda_j)}{2!} & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & f(\lambda_j) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{f^{(n_j-1)}(\lambda_j)}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & f(\lambda_j)\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA_j^k$ сходится.

Пусть $|\lambda_j|>r$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_j^k$ расходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kA_j^k$ расходится.

III. Пусть теперь A — произвольная матрица размера $n\times n$, J — жорданова форма матрицы A, т.е. $J=\mathrm{diag}[J_1,J_2,\dots,J_m]$, где

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Пусть матрица S такая, что $A = SJS^{-1}$ ($\det S \neq 0$, S — матрица подобия; матрицы A и J имеют одинаковые собственные числа). Пусть собственные числа λ_1, λ_2, ..., λ_m матрицы A удовлетворяют условию $|\lambda_j| < r$, $j = \overline{1, m}$. Но тогда, по доказанному, сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_j^k$ при любом $j = \overline{1, m}$, причем этот ряд имеет своей суммой

$$f(J_j) = \begin{pmatrix} f(\lambda_j) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & f(\lambda_j) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{f^{(n_j-1)}(\lambda_j)}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & f(\lambda_j) \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k$ сходится и имеет своей суммой матрицу:

$$f(J) = \operatorname{diag}\left[f(J_1), f(J_2), \dots, f(J_m)\right].$$

Но тогда сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ и имеет своей суммой $f(A) = Sf(J)S^{-1}$. Допустим теперь, что имеется j_0, такое, что $|\lambda_{j_0}| > r$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{j_0}^k$ расходится (по доказанному) $\Rightarrow$ расходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k \Rightarrow$ расходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$, так как матрица A подобна матрице J. ◀

§10. Экспонента от матрицы

Рассмотрим скалярный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}. \tag{1}$$

Мы знаем, что радиус сходимости ряда (1) $r=+\infty$ и что сумма ряда (1) $f(x)=e^x$. Рассмотрим матрицу A размером $n\times n$ $(n\geq 1)$ и матричный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}. \tag{2}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — собственные числа матрицы A. Очевидно, что $|\lambda_j|<r$, $j=\overline{1,m}$. Следовательно, ряд (2) сходится для любой матрицы A.

Положим, по определению,

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}. \tag{3}$$

Найдем поэлементную структуру матрицы e^A.

Пусть $A=SJS^{-1}$, где $J=\operatorname{diag}[J_1,J_2,\dots,J_m]$ — жорданова форма матрицы A;

$$J_j=\begin{pmatrix}\lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j\end{pmatrix} \qquad (j=\overline{1,m}).$$

Имеем

$$e^A=e^{SJS^{-1}}=S\,e^J S^{-1}=S\cdot\operatorname{diag}\left[e^{J_1},\dots,e^{J_m}\right]\cdot S^{-1}.$$

Имеем, далее,

$$e^{J_j}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_j} & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dfrac{e^{\lambda_j}}{1!} & e^{\lambda_j} & 0 & \dots & 0\\ \dfrac{e^{\lambda_j}}{2!} & \dfrac{e^{\lambda_j}}{1!} & e^{\lambda_j} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{e^{\lambda_j}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & e^{\lambda_j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dfrac{1}{1!} & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dfrac{1}{2!} & \dfrac{1}{1!} & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{1}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & 1\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_j}.$$

Отметим, что собственными числами матрицы e^A являются числа $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_m} \Rightarrow$ матрица e^A — неособенная для любой матрицы A.

§11. Матрица-функция e^{Ax}

Пусть A — произвольная матрица размера $n \times n$ $(n \geq 1)$, x — скалярная величина. Тогда $A \cdot x$ — матрица размера $n \times n \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!}. \tag{1}$$

Найдем поэлементную структуру матрицы e^{Ax}. $A = SJS^{-1}$, где $J = \operatorname{diag}[J_1, J_2, \ldots, J_m]$; J_j $(j = \overline{1, m})$ — клетка Жордана. Тогда $e^{Ax} = e^{SJS^{-1} \cdot x} = e^{S \cdot Jx \cdot S^{-1}} = Se^{Jx}S^{-1}$, где $e^{Jx} = \operatorname{diag}\left[e^{J_1 x}, e^{J_2 x}, \ldots, e^{J_m x}\right]$.

Найдем поэлементную структуру матрицы $e^{J_j x}$. Имеем

$$e^{J_j x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_j x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} J_j^k, \tag{2}$$

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Составляем частичную сумму ряда (2):

$$S_l(e^{J_j x}) = \sum_{k=0}^{l} \frac{x^k}{k!} J_j^k = \sum_{k=0}^{l} \frac{x^k}{k!} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_j^k & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{(\lambda_j^k)'}{1!} & \lambda_j^k & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{(\lambda_j^k)^{(n_j - 1)}}{(n_j - 1)!} & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_j^k \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
\sum_{k=0}^{l} \frac{(\lambda_j x)^k}{k!} & 0 & 0 \ldots & 0 \\
\frac{\left(\sum_{k=0}^{l} \frac{(\lambda_j x)^k}{k!}\right)'_{\lambda_j}}{1!} & \sum_{k=0}^{l} \frac{(\lambda_j x)^k}{k!} & 0 \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots \ldots & \ldots \\
\frac{\left(\sum_{k=0}^{l} \frac{(\lambda_j x)^k}{k!}\right)^{(n_j-1)}_{\lambda_j}}{(n_j-1)!} & \ldots & \ldots \ldots & \sum_{k=0}^{l} \frac{(\lambda_j x)^k}{k!}
\end{pmatrix}.
$$

Переходя к пределу при $l \to +\infty$, получим

$$
e^{J_j x} = \lim_{l \to \infty} S_l(e^{J_j x}) = \begin{pmatrix}
e^{\lambda_j x} & 0 & \ldots & 0 \\
\frac{x \cdot e^{\lambda_j x}}{1!} & e^{\lambda_j x} & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{x^{n_j-1} \cdot e^{\lambda_j x}}{(n_j-1)!} & \ldots & \ldots & e^{\lambda_j x}
\end{pmatrix}. \qquad (3)
$$

Итак, $e^{Jx} = \operatorname{diag}\left[e^{J_1 x}, e^{J_2 x}, \ldots, e^{J_m x}\right]$, где $e^{J_j x}$ $(j = \overline{1, m})$ — матрица размера $n_j \times n_j$, имеющая вид (3).

Найдем выражение для производной от матрицы-функции e^{Ax}. Имеем, по определению:

$$
e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{A^k}{k!}}_{\substack{=B_k \\ \text{(обозн.)}}} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} (B_k)_{ij} x^k\right\}.
$$

Видим, что элементами матрицы e^{Ax} являются степенные ряды $\Rightarrow$

$$
\Rightarrow \frac{de^{Ax}}{dx} = \left\{\left(\sum_{k=0}^{\infty} (B_k)_{ij} x^k\right)'\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} k\,(B_k)_{ij} x^{k-1}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{A^k}{k!} x^{k-1} =
$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} x^{k-1} = A \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1}}_{= e^{Ax}} = A \cdot e^{Ax}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

§12. Умножение матричных рядов

Пусть имеется матричный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k. \tag{1}$$

Пусть имеется числовой положительный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k. \tag{2}$$

Если $\|A_k\| \le a_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то говорят, что ряд (1) *мажорируется* рядом (2).

Справедливо утверждение: если матричный ряд (1) мажорируется сходящимся числовым рядом (2), то матричный ряд (1) сходится.

▶ Рассмотрим l-ю частичную сумму матричного ряда (1):

$$S_l = \sum_{k=0}^{l} A_k = \left\{ \sum_{k=0}^{l} a_{ij}^{(k)} \right\}.$$

$\sum\limits_{k=0}^{l} a_{ij}^{(k)}$ представляет собой произвольный элемент матрицы S_l ($i, j = \overline{1, n}$). $\sum\limits_{k=0}^{l} a_{ij}^{(k)}$ является l-й частичной суммой числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, n}). \tag{3}$$

По условию имеем

$$\left| a_{ij}^{(k)} \right| \le \|A_k\| \le a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \quad i, j = \overline{1, n}).$$

Видим, что каждый из n^2 рядов (3) мажорируется сходящимся положительным числовым рядом (2) $\Rightarrow$ каждый из n^2 рядов (3) сходится, т.е. $\sum\limits_{k=0}^{l} a_{ij}^{(k)} \xrightarrow[l\to\infty]{} a_{ij}$ (a_{ij} — определенное число, $i,j=\overline{1,n}$) $\Rightarrow$ $S_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \{a_{ij}\} = A$ $(i,j=\overline{1,n}) \Rightarrow$ матричный ряд (1) сходится. ◀

Определение. Пусть имеются матричные ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \tag{4}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \tag{5}$$

(A_k, B_k — квадратные матрицы порядка n). Матричный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k, \tag{6}$$

где

$$C_k = A_0 B_k + A_1 B_{k-1} + \ldots + A_k B_0,$$

называется произведением рядов (4) и (5).

Теорема. Если матричные ряды (4) и (5) мажорируются сходящимися положительными числовыми рядами, то их можно перемножать, т.е. ряд (6) в этом случае сходится, причем если A, B, C — суммы рядов (4), (5) и (6) соответственно, то

$$C = A \cdot B.$$

▶ Пусть матричные ряды (4) и (5) мажорируются соответственно положительными числовыми рядами

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{$\tilde{4}$}$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k. \tag{$\tilde{5}$}$$

Пусть a — сумма ряда ($\tilde{4}$), b — сумма ряда ($\tilde{5}$). Так как ($\tilde{4}$) и ($\tilde{5}$) — положительные сходящиеся ряды, то их можно почленно перемножать, т.е. ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k, \tag{$\tilde{6}$}$$

где $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$, сходится, а его сумма c выражается через суммы рядов ($\tilde{4}$) и ($\tilde{5}$) по формуле

$$c = a \cdot b.$$

1) Покажем сначала, что матричный ряд (6) сходится. Имеем для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\|C_k\| = \|A_0 B_k + A_1 B_{k-1} + \ldots + A_k B_0\| \le$$
$$\le \|A_0 B_k\| + \|A_1 B_{k-1}\| + \ldots + \|A_k B_0\| \le$$
$$\le n(a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0) = n \cdot c_k$$

(здесь n — определенное число). У нас ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} nc_k$ — сходится. Видим, что матричный ряд (6) мажорируется числовым положительным сходящимся рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} nc_k$ $\Rightarrow$ матричный ряд (6) сходится.

2) Покажем теперь, что $C = A \cdot B$. Обозначим через $S_l^{(4)}$, $S_l^{(5)}$ и $S_l^{(6)}$ — l-е частичные суммы матричных рядов (4), (5) и (6) соответственно. Имеем

$$\begin{array}{ll}
S_l^{(4)} \cdot S_l^{(5)} = & A_0B_0 + A_0B_1 + A_0B_2 + \ \ldots \ + A_0B_l + \\
C_0 & + A_1B_0 + A_1B_1 + A_1B_2 + \ \ldots \ + A_1B_l + \\
C_1 & + A_2B_0 + A_2B_1 + A_2B_2 + \ \ldots \ + A_2B_l + \\
C_2 & + \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ + \\
 & + A_lB_0 + A_lB_1 + A_lB_2 + \ \ldots \ + A_lB_l. \\
C_l &
\end{array}$$

Видим, что

$$S_l^{(6)} = \sum_{k=0}^{l} C_k = S_l^{(4)} \cdot S_l^{(5)} - \Delta_l. \tag{7}$$

Здесь Δ_l — матрица порядка n;

$$\Delta_l = A_1 B_l + A_2 B_{l-1} + \ldots + A_l B_1 + A_2 B_l + \ldots + A_l B_2 + \ldots + A_l B_l$$

(Δ_l — сумма всех матриц, стоящих под диагональю в выражении для $S_l^{(4)} \cdot S_l^{(5)}$).

Обозначим через $S_l^{(\tilde 4)}$, $S_l^{(\tilde 5)}$, $S_l^{(\tilde 6)}$ l-е частичные суммы числовых рядов $(\tilde 4)$, $(\tilde 5)$, $(\tilde 6)$ соответственно. Эти частичные суммы связаны соотношением

$$S_l^{(\tilde 6)} = S_l^{(\tilde 4)} \cdot S_l^{(\tilde 5)} - \tilde\Delta_l, \tag{8}$$

где

$$\tilde\Delta_l = a_1 b_l + a_2 b_{l-1} + \ldots + a_l b_1 + a_2 b_l + \ldots + a_l b_2 + \ldots + a_l b_l.$$

Перейдем в (8) к пределу при $l \to \infty$. Получим $c = a \cdot b - \lim\limits_{l\to\infty} \tilde\Delta_l$. Так как $c = ab$, то $\lim\limits_{l\to\infty} \tilde\Delta_l = 0$. Имеем

$$\|\Delta_l\| \le \|A_1 B_l\| + \|A_2 B_{l-1}\| + \ldots + \|A_l B_1\| + \|A_2 B_l\| + \ldots +$$
$$+ \|A_l B_2\| + \ldots + \|A_l B_l\| \le$$
$$\le n(a_1 b_l + a_2 b_{l-1} + \ldots + a_l b_1 + a_2 b_l + \ldots + a_l b_2 + \ldots + a_l b_l) = n \cdot \tilde\Delta_l$$

(n — определенное число)

$$\Rightarrow \|\Delta_l\| \xrightarrow[l\to\infty]{} 0 \Rightarrow \Delta_l \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Перейдем теперь к пределу при $l \to \infty$ в соотношении (7). Получим $\lim\limits_{l\to\infty} S_l^{(6)} = A \cdot B - 0 \Rightarrow C = A \cdot B$. ◀

Следствие. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n. Если матрицы A и B коммутируют, то $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

▶ По определению имеем

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \tag{9}$$

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}, \tag{10}$$

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!}. \tag{11}$$

1) Покажем, что ряды (9) и (10) можно перемножать. Для этого достаточно убедиться, что каждый из них мажорируется сходящимся положительным числовым рядом. Имеем при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| = \frac{1}{k!}\left\|A \cdot A^{k-1}\right\| \le \frac{n}{k!}\|A\| \cdot \left\|A^{k-1}\right\| = \frac{n}{k!}\|A\| \cdot \left\|A \cdot A^{k-2}\right\| \le$$

$$\le \frac{n^2}{k!}\|A\|^2 \cdot \left\|A^{k-2}\right\| \le \ldots \le \frac{n^{k-1}}{k!}\|A\|^k \le \frac{(n\|A\|)^k}{k!}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(n\|A\|)^k}{k!}$ — числовой, положительный, сходящийся; его сумма равна $e^{n\|A\|}$. Он — мажорантный по отношению к матричному ряду (9).

Совершенно аналогично убеждаемся, что матричный ряд (10) мажорируется числовым положительным сходящимся рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(n\|B\|)^k}{k!}$ $(= e^{n\|B\|})$.

Значит, ряды (9) и (10) можно перемножать. Перемножив матричные ряды (9) и (10), получим

$$e^A \cdot e^B = \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{A^0 B^k}{k!} + \frac{A^1}{1!}\cdot\frac{B^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{B^1}{1!} + \frac{A^k}{k!}\cdot B^0\right)}_{=C_k}. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь общий член ряда (11). Так как матрицы A и B коммутируют, то

$$\frac{(A+B)^k}{k!} = \frac{1}{k!}\left(A^k + kA^{k-1}\cdot B^1 + \frac{k(k-1)}{2!}A^{k-2}\cdot B^2 + \ldots + B^k\right) =$$

$$= \frac{A^k}{k!}\cdot B^0 + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{B^1}{1!} + \ldots + A^0\cdot\frac{B^k}{k!} = C_k.$$

Видим, что когда матрицы A и B коммутируют, то ряды (11) и (12) совпадают. Следовательно, $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$. ◀

Частный случай. Пусть $B = -A$. Так как матрицы A и $-A$ коммутируют, то $e^A \cdot e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = E \Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$.

§13. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y, \tag{1}$$

где $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $A = \{a_{ij}\}$ $(i, j = \overline{1,n})$, a_{ij} — постоянные вещественные числа; $x \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема. Матрица-функция

$$\Phi(x) \equiv e^{Ax}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{2}$$

является фундаментальной матрицей решений системы (1).

▶ 1) Покажем сначала, что $\Phi(x) \equiv e^{Ax} \equiv (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ является матрицей решений системы (1). В самом деле, имеем

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} \equiv \frac{d}{dx} e^{Ax} \equiv A \cdot e^{Ax} \equiv A \cdot \Phi(x). \tag{3}$$

Из (3) следует, что тождественно равны соответствующие элементы матриц $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ и $A \cdot \Phi(x)$, а следовательно, тождественно равны соответствующие столбцы этих матриц, т.е.

$$\frac{d\varphi_j(x)}{dx} \equiv A \cdot \varphi_j(x), \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (j = \overline{1,n}).$$

Это означает, что $Y = \varphi_j(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ $(j = \overline{1,n})$, — решение системы (1), а матрица-функция $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ — матрица решений системы (1).

2) Покажем теперь, что $\Phi(x) = e^{Ax} = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ — фундаментальная матрица решений системы (1). Для этого вычислим $\det \Phi(x)$ в точке $x = 0$. Имеем

$$\det \Phi(0) = \det e^0 = \det E = 1 \quad (\neq 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно независимы в $(-\infty; +\infty)$. Значит, $\Phi(x) = e^{Ax}$ — ф. м. р. с. (1). ◀

Следствие 1. Пусть точка x_0 — любая из $(-\infty; +\infty)$. Матрица-функция $\tilde{\Phi}(x) = e^{A(x-x_0)}$ есть ф. м. р. с. (1), нормированная в точке $x = x_0$.

▶ Действительно, имеем: матрица-функция $\Phi(x) = e^{Ax}$ — ф. м. р. с. (1). Матрица $C = e^{-Ax_0}$ — постоянная, неособая. Следовательно, $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) \cdot C = e^{Ax} \cdot e^{-Ax_0}$ — ф. м. р. с. (1). Матрицы Ax и $-Ax_0$ коммутируют. Поэтому $e^{Ax} \cdot e^{-Ax_0} = e^{Ax-Ax_0} = e^{A(x-x_0)} \Rightarrow$ $\tilde{\Phi}(x) = e^{A(x-x_0)}$ — ф. м. р. с. (1).

Имеем, далее, $\tilde{\Phi}(x_0) = e^0 = E$, т.е. $\tilde{\Phi}(x)$ — нормированная в точке $x = x_0$. ◀

Следствие 2. Пусть дана система $\frac{dY}{dx} = A \cdot Y$ и дано начальное условие

$$Y\big|_{x=x_0} = Y_0, \tag{4}$$

где x_0 — любое из $\mathbf{R}$, Y_0 — любой из $\mathbf{R}^n$. Решение задачи Коши (1) — (4) дается формулой

$$Y = e^{A(x-x_0)} \cdot Y_0. \tag{5}$$

▶ Матрица-функция $e^{A(x-x_0)}$ — ф. м. р. с. (1), Y_0 — постоянный вектор. Следовательно, $Y = e^{A(x-x_0)} \cdot Y_0$ — решение системы (1). Имеем: $Y(x_0) = e^0 \cdot Y_0 = E \cdot Y_0 = Y_0$. Видим, что (5) — решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию (4). ◀

Замечание 1. Формула (5) называется общим решением системы (1) в форме Коши.

Замечание 2 (о группах решений системы (1), соответствующих клеткам Жордана нормальной формы матрицы A). Пусть J — жорданова форма матрицы A:

$$J = \mathrm{diag}[J_1, J_2, \ldots, J_m], \text{ где } J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Пусть S — неособенная матрица, такая, что

$$A = SJS^{-1}.$$

Было доказано, что

$$\Phi(x) = e^{Ax} = e^{SJxS^{-1}} = S \cdot e^{Jx} \cdot S^{-1}$$

— ф. м. р. с. (1). Но тогда

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot S = S \cdot e^{Jx}$$

— тоже ф. м. р. с. (1). Имеем

$$\Psi(x) = S \cdot e^{Jx} = S \cdot \begin{pmatrix} e^{J_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{0}_{\substack{n_1 \\ \text{столбцов}}} & \underbrace{0}_{\substack{n_2 \\ \text{столбцов}}} & \dots & \underbrace{e^{J_m x}}_{\substack{n_m \\ \text{столбцов}}} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\underbrace{S \cdot \begin{pmatrix} e^{J_1 x} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{n_1 \\ \text{столбцов}}} ; \underbrace{S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{J_2 x} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{n_2 \\ \text{столбцов}}} ; \dots ; \underbrace{S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e^{J_m x} \end{pmatrix}}_{\substack{n_m \\ \text{столбцов}}} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ из всех решений системы (1), входящих в матрицу $\Psi(x)$, группа решений, соответствующая клетке Жордана J_j, имеет вид

$$S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e^{J_j x} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (j = \overline{1, m}).$$

Выпишем эти группы решений в явном виде.

Для $j = 1$

$$\underbrace{S \cdot \begin{pmatrix} e^{J_1 x} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{(Здесь } n_1 \text{ решений)}} = (S_1; S_2; \dots; S_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} & \dots & \dots & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 x}$$

(S_1, S_2, ..., S_n — постоянные векторы). Тогда

$$\psi_1(x) = \left(S_1 + S_2 \cdot x + S_3 \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + S_{n_1} \cdot \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \right) \cdot e^{\lambda_1 x} = \gamma_1(x) \cdot e^{\lambda_1 x},$$

$$\psi_2(x) = \left(S_2 + S_3 \cdot x + \dots + S_{n_1} \cdot \frac{x^{n_1-2}}{(n_1-2)!} \right) \cdot e^{\lambda_1 x} = \gamma_1'(x) \cdot e^{\lambda_1 x},$$

. . . .

$$\psi_{n_1}(x) = S_{n_1} \cdot e^{\lambda_1 x} = \gamma_1^{(n_1-1)}(x) \cdot e^{\lambda_1 x} \qquad (6_1)$$

((6_1) — первая группа решений).

Для $j = 2$

$$\underbrace{S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{J_2 x} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{(Здесь } n_2 \text{ решений)}} = (S_1; S_2; \dots; S_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{n_2-1}}{(n_2-1)!} & \dots & \dots & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_2 x}.$$

Тогда

$$\psi_{n_1+1}(x)=\left(S_{n_1+1}+S_{n_1+2}\cdot x+S_{n_1+3}\cdot\frac{x^2}{2!}+\ldots+S_{n_1+n_2}\cdot\frac{x^{n_2-1}}{(n_2-1)!}\right)\cdot e^{\lambda_2 x}=\gamma_2(x)\cdot e^{\lambda_2 x},$$

$$\psi_{n_1+2}(x)=\left(S_{n_1+2}+S_{n_1+3}\cdot x+\ldots+S_{n_1+n_2}\cdot\frac{x^{n_2-2}}{(n_2-2)!}\right)\cdot e^{\lambda_2 x}=\gamma_2'(x)\cdot e^{\lambda_2 x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_{n_1+n_2}(x)=S_{n_1+n_2}\cdot e^{\lambda_2 x}=\gamma_2^{(n_2-1)}(x)\cdot e^{\lambda_2 x}\qquad(6_2)$$

((6_2) — вторая группа решений), и так далее.

Для $j=m$

$$\underbrace{S\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\e^{J_m x}\end{pmatrix}}_{\text{(Здесь } n_m \text{ решений)}}=(S_1;S_2;\ldots;S_n)\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&\ldots&0&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&0&\ldots&0&0\\1&0&0&\ldots&0&0\\x&1&0&\ldots&0&0\\\frac{x^2}{2!}&x&1&\ldots&0&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\\frac{x^{n_m-1}}{(n_m-1)!}&\ldots&\ldots&\ldots&x&1\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_m x};$$

откуда

$$\psi_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1}(x)=\gamma_m(x)\cdot e^{\lambda_m x},$$

$$\psi_{n_1+\ldots+n_{m-1}+2}(x)=\gamma_m'(x)\cdot e^{\lambda_m x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\qquad(6_m)$$

$$\psi_n(x)=\gamma_m^{(n_m-1)}(x)\cdot e^{\lambda_m x}.$$

Здесь $\gamma_m(x)=\left(S_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1}+S_{n_1+\ldots+n_{m-1}+2}\cdot x+\ldots+S_n\cdot\frac{x^{n_m-1}}{(n_m-1)!}\right)$; (6_m) — m-я группа решений.

§14. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y + F(x), \qquad (1)$$

где $A = \{a_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, n}$; a_{ij} — постоянные вещественные числа); $Y(x)$, $F(x)$ — вектор-функции. Считаем, что $F(x) \in C((a,b))$.

В качестве фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы, соответствующей нашей неоднородной системе, берем матрицу-функцию

$$\Phi(x) = e^{Ax}. \qquad (2)$$

Общее решение линейной неоднородной системы записывается, как мы знаем, в виде

$$Y = \Phi(x) \cdot C + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t) F(t)\, dt. \qquad (3)$$

Поэтому будем иметь

$$Y = e^{Ax} \cdot C + e^{Ax} \cdot \int_{x_0}^{x} (e^{At})^{-1} \cdot F(t)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = e^{Ax} \cdot C + e^{Ax} \cdot \int_{x_0}^{x} e^{-At} \cdot F(t)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = e^{Ax} \cdot C + \int_{x_0}^{x} e^{Ax} \cdot e^{-At} \cdot F(t)\, dt = e^{Ax} \cdot C + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)} \cdot F(t)\, dt. \qquad (4)$$

Замечание. Если дано начальное условие

$$Y\big|_{x=x_0} = Y_0, \qquad (5)$$

где x_0 — любое из (a,b), Y_0 — любой из $\mathbf{R}^n$, то решение задачи Коши (1) — (5) дается формулой

$$Y = e^{A(x-x_0)} \cdot Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)} \cdot F(t)\, dt. \qquad (6)$$

В самом деле, подставив начальные данные (5) в (4), получим $Y_0 = e^{Ax_0} \cdot C \Rightarrow C = e^{-Ax_0} \cdot Y_0$. Подставив это выражение для вектора C в (4), получим (6).

Формула (6) называется общим решением линейной неоднородной системы (1) в форме Коши.

§15. Примеры и задачи к главе 6

Задача 1. Решить систему уравнений: $\dfrac{dY}{dx} = A \cdot Y$,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Из уравнения

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+2)(\lambda-2)^2 = 0$$

находим собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ищем неособенную матрицу S, такую, что $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$. Матрица S получается такой:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $A \cdot S = S \cdot J$;

$$A \cdot S = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S\cdot J=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&4&4\\-6&1&2\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

Находим матрицу S^{-1}. Она получается такой:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\1&-1&-1\\0&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $S\cdot S^{-1}=E$.

$$S\cdot S^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\1&-1&-1\\0&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Имеем

$$e^{Jx}=\begin{pmatrix}e^{-2x}&0&0\\0&e^{2x}&0\\0&xe^{2x}&e^{2x}\end{pmatrix}=e^{2x}\cdot\begin{pmatrix}e^{-4x}&0&0\\0&1&0\\0&x&1\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi(x)=e^{Ax}=S\cdot e^{Jx}\cdot S^{-1}=e^{2x}\cdot\begin{pmatrix}2&1&2\\3&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-4x}&0&0\\0&1&0\\0&x&1\end{pmatrix}\cdot S^{-1}=$$

$$=e^{2x}\begin{pmatrix}2e^{-4x}&1+2x&2\\3e^{-4x}&x&1\\-e^{-4x}&x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\1&-1&-1\\0&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}=$$

$$=e^{2x}\begin{pmatrix}1+2x&\frac{1}{2}e^{-4x}-2x-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}e^{-4x}-2x+\frac{1}{2}\\x&\frac{3}{4}e^{-4x}-x+\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}e^{-4x}-x+\frac{3}{4}\\x&-\frac{1}{4}e^{-4x}-x+\frac{1}{4}&\frac{1}{4}e^{-4x}-x+\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

$\Phi(x)$ — фундаментальная матрица решений заданной системы. $Y = \Phi(x)\cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, есть общее решение заданной системы (в матричной форме). Было доказано, что $\Psi(x) = \Phi(x)\cdot S$ — тоже ф. м. р. с. Имеем

$$\Psi(x) = Se^{Jx} = (\bar{s}_1\ \bar{s}_2\ \bar{s}_3)\begin{pmatrix} e^{J_1x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{J_2x} \end{pmatrix}.$$
$$\underbrace{\phantom{e^{J_1x}}}_{\text{1 столбец}}\ \underbrace{\phantom{e^{J_2x}}}_{\text{2 столбца}}$$

Здесь $\bar{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{s}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} e^{J_1x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-2x}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ e^{J_2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}e^{2x}.$$

Имеем, следовательно,

$$\psi_1(x) = \bar{s}_1e^{-2x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2x};$$

$$\psi_2(x) = (\bar{s}_2 + \bar{s}_3x)e^{2x} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}x\right]e^{2x} = \begin{pmatrix} 1+2x \\ x \\ x \end{pmatrix}e^{2x};$$

$$\psi_3(x) = \bar{s}_3e^{2x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2x}.$$

А тогда

$$Y = C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + C_3\psi_3 = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2x} + C_2\begin{pmatrix} 1+2x \\ x \\ x \end{pmatrix}e^{2x} + C_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2x}$$

— общее решение заданной системы (в векторной форме). В скалярной форме общее решение заданной системы запишется так:

$$y_1(x) = 2C_1e^{-2x} + C_2(1+2x)e^{2x} + 2C_3e^{2x},$$
$$y_2(x) = 3C_1e^{-2x} + C_2xe^{2x} + C_3e^{2x},$$
$$y_3(x) = -C_1e^{-2x} + C_2xe^{2x} + C_3e^{2x}.$$

Задача 2. Найти решение системы $\dfrac{dY}{dx} = A \cdot Y + F(x)$,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin x.$$

Решение. Так как в заданной системе уравнений матрица A та же, что и в задаче 1, то используем результаты решения задачи 1. В качестве фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы, соответствующей заданной неоднородной системе, берем матрицу-функцию $\Phi(x) = e^{Ax}$. Общее решение линейной неоднородной системы записывается в виде

$$Y = \Phi(x) \cdot C + \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t) \cdot F(t)\,dt = e^{Ax} \cdot C + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)} \cdot F(t)\,dt.$$

У нас

$$e^{A(x-t)}F(t) = \begin{pmatrix} 1+2(x-t) \\ x-t \\ x-t \end{pmatrix} e^{2(x-t)} \sin t.$$

Возьмем $x_0 = 0$ (здесь в качестве x_0 можно брать любое число). Будем иметь

$$Y_*(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} 1+2(x-t) \\ x-t \\ x-t \end{pmatrix} e^{2(x-t)} \sin t\,dt =$$

$$= \frac{1}{25}\left[\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} xe^{2x} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \sin x + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cos x\right].$$

Следовательно, общее решение заданной линейной неоднородной системы будет таким: $Y = \overline{Y}(x) + Y_*(x)$, где $\overline{Y}$ — общее решение соответствующей однородной системы.

Задача 3. Решить систему уравнений: $\dfrac{dY}{dx} = A \cdot Y$, где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -15 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим собственные числа матрицы A из уравнения

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 1 \\ -5 & 3-\lambda & 1 \\ -15 & 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ищем неособенную матрицу S, такую, что $A = SJS^{-1}$. Она полу чается такой:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $A \cdot S = S \cdot J$.

$$A \cdot S = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -15 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 15 & 15 & 0 \end{pmatrix};$$

$$S \cdot J = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 15 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу S^{-1}. Она получается такой:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2/5 & 3/15 \\ 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 1/5 & -1/15 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $S\cdot S^{-1}=E$;

$$S\cdot S^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 15 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2/5 & 3/15\\ 0 & 0 & 1/15\\ 0 & 1/5 & -1/15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Имеем

$$e^{Jx}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}e^{x}.$$

Следовательно,

$$\Phi(x)=e^{Ax}=Se^{Jx}S^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 15 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2/5 & 3/15\\ 0 & 0 & 1/15\\ 0 & 1/5 & -1/15\end{pmatrix}e^{x}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1+5x & 5 & 2\\ 5x & 5 & 5\\ 15x & 15 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2/5 & 3/15\\ 0 & 0 & 1/15\\ 0 & 1/5 & -1/15\end{pmatrix}e^{x}=\begin{pmatrix}1-5x & 2x & x\\ -5x & 2x+1 & x\\ -15x & 6x & 3x+1\end{pmatrix}e^{x}.$$

$\Phi(x)$ — фундаментальная матрица решений заданной системы. $Y=\Phi(x)\cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, есть общее решение заданной системы (в матричной форме). Заметим, что $\Psi(x)=\Phi(x)\cdot S$ — тоже ф. м. р. с. Имеем

$$\Psi(x)=S\cdot e^{Jx}\quad\Rightarrow\quad\Psi(x)=(\vec{s}_1\quad\vec{s}_2\quad\vec{s}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}e^{x},$$

где $\vec{s}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{s}_2=\begin{pmatrix}5\\ 5\\ 15\end{pmatrix}$, $\vec{s}_3=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad\psi_1(x)=(\vec{s}_1+\vec{s}_2x)e^{x}=\left[\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\ 5\\ 15\end{pmatrix}x\right]e^{x}=\begin{pmatrix}5x-1\\ 5x\\ 15x\end{pmatrix}e^{x},$$

$$\psi_2(x) = \vec{s}_2 e^x = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} e^x, \quad \psi_3(x) = \vec{s}_3 e^x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} e^x;$$

$$Y = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x) + C_3\psi_3(x) = C_1 \begin{pmatrix} 5x-1 \\ 5x \\ 15x \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} e^x.$$

Это — общее решение заданной системы (в векторной форме). В скалярной форме общее решение заданной системы запишется так:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1(5x-1)e^x + 5C_2e^x + 2C_3e^x, \\ y_2(x) &= 5C_1xe^x + 5C_2e^x + 5C_3e^x, \\ y_3(x) &= 15C_1xe^x + 15C_2e^x. \end{aligned}$$

Задача 4. Решить систему уравнений $\frac{dY}{dx} = A \cdot Y$, где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим собственные числа матрицы A из уравнения

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Находим жорданову форму матрицы A. Она будет такой:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ищем неособенную матрицу S такую, что $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$. Она получается такой:

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $AS = SJ$;

$$A\cdot S=\begin{pmatrix}-2&4&3\\-1&2&1\\-2&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&1\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$S\cdot J=\begin{pmatrix}-3&1&1\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

(убеждаемся, что S и J найдены правильно). Находим матрицу S^{-1}. Она получается такой:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $S\cdot S^{-1}=E$;

$$S\cdot S^{-1}=\begin{pmatrix}-3&1&1\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(убеждаемся, что матрица S^{-1} найдена правильно). Имеем

$$e^{Jx}=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\\frac{x^2}{2}&x&1\end{pmatrix}e^x.$$

Следовательно,

$$\Phi(x)=e^{Ax}=S\cdot e^{Jx}\cdot S^{-1}=\begin{pmatrix}-3&1&1\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\\frac{x^2}{2}&x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}e^x=$$

$$=e^x\begin{pmatrix}\frac{x^2}{2}+x-3&x+1&1\\x-2&1&0\\\frac{x^2}{2}&x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$= e^x \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{2} - 3x + 1 & \frac{x^2}{2} + 4x & \frac{x^2}{2} + 3x \\ -x & x+1 & x \\ -\frac{x^2}{2} - 2x & \frac{x^2}{2} + 3x & \frac{x^2}{2} + 2x + 1 \end{pmatrix}.$$

$\Phi(x)$ — фундаментальная матрица решений заданной системы. $Y = \Phi(x) \cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, есть общее решение заданной системы (в матричной форме). Заметим, что $\Psi(x) = \Phi(x) \cdot S = S \cdot e^{Jx}$ — тоже ф. м. р. с.:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 & \vec{s}_2 & \vec{s}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 \end{pmatrix} e^x, \text{ где } \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\psi_1(x) = \left(\vec{s}_1 + \vec{s}_2 x + \vec{s}_3 \frac{x^2}{2} \right) e^x =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} \right] e^x = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + x - 3 \\ x - 2 \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} e^x,$$

$$\psi_2(x) = (\vec{s}_2 + \vec{s}_3 x) e^x = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x \right] e^x = \begin{pmatrix} x+1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} e^x,$$

$$\psi_3(x) = \vec{s}_3 e^x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x.$$

$$Y = C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x) + C_3 \psi_3(x) =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + x - 3 \\ x - 2 \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} x+1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x.$$

Это — общее решение заданной системы (в векторной форме). В скалярной форме общее решение заданной системы имеет вид:

$$y_1(x) = C_1\left(\frac{x^2}{2} + x - 3\right)e^x + C_2(x+1)e^x + C_3e^x,$$

$$y_2(x) = C_1(x-2)e^x + C_2e^x,$$

$$y_3(x) = C_1\frac{x^2}{2}e^x + C_2xe^x + C_3e^x.$$

Задача 5. Решить систему уравнений $\frac{dY}{dx} = A \cdot Y$, где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 8 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим собственные числа матрицы A из уравнения:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & 8 \\ 2 & -3-\lambda & 6 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 2+i, \\ \lambda_3 = 2-i. \end{matrix}$$

Находим жорданову форму матрицы A. Она будет такой:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(см.: Д.К. Фаддеев. Лекции по алгебре. 1984, с. 343). Ищем неособенную матрицу S, такую, что $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$. Она получается такой:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $AS = SJ$;

$$A \cdot S = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 8 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$S \cdot J = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(убеждаемся, что матрицы S и J найдены правильно). Находим матрицу S^{-1}. Она получается такой:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $S \cdot S^{-1} = E$;

$$S \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу e^{Jx}. Для этого вычислим сначала матрицу e^{Bx}, где $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Представим матрицу B в виде $B = \alpha E + \beta \tilde{J}$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Так как матрица αE коммутирует с матрицей $\beta \tilde{J}$, то

$$e^{Bx} = e^{\alpha Ex} e^{\beta \tilde{J} x}.$$

Но $e^{\alpha Ex} = e^{\alpha x E}$. Поэтому $e^{Bx} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta \tilde{J} x}$. Найдем матрицу $e^{\tilde{J} x}$.

По определению матричной экспоненты имеем

$$e^{\tilde{J} x} = E + \tilde{J} x + \frac{\tilde{J}^2 x^2}{2!} + \frac{\tilde{J}^3 x^3}{3!} + \frac{\tilde{J}^4 x^4}{4!} + \ldots;$$

$$\tilde{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{J}^3 = \tilde{J}^2\tilde{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\tilde{J};$$

$$\tilde{J}^4 = \tilde{J}^3\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{J}^{2k} = (-1)^k E, \quad \tilde{J}^{2k+1} = (-1)^k \tilde{J}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поэтому

$$e^{\tilde{J}x} = E + \tilde{J}x - E\frac{x^2}{2!} - \tilde{J}\frac{x^3}{3!} + E\frac{x^4}{4!} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}x - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{x^2}{2!} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{x^3}{3!} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{x^4}{4!} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \\ -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Но тогда $e^{\beta\tilde{J}x} = \begin{pmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ -\sin\beta x & \cos\beta x \end{pmatrix}$ и, следовательно,

$$e^{Bx} = e^{\alpha x}e^{\beta\tilde{J}x} = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ -e^{\alpha x}\sin\beta x & e^{\alpha x}\cos\beta x \end{pmatrix}.$$

В нашей задаче $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $B = 2E + \tilde{J}$. Поэтому $e^{Bx} = \begin{pmatrix} e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x \\ -e^{2x}\sin x & e^{2x}\cos x \end{pmatrix}$. Таким образом, получаем

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{Bx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x \\ 0 & -e^{2x}\sin x & e^{2x}\cos x \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi(x) = e^{Ax} = Se^{Jx}S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x \\ 0 & -e^{2x}\sin x & e^{2x}\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^x & 4e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x & 4e^{2x}\sin x - 2e^{2x}\cos x \\ 2e^x & 3e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x & 3e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x \\ e^x & e^{2x}\cos x - 2e^{2x}\sin x & e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^x + e^{2x}\cdot 2(\cos x + \sin x) & 2e^x - e^{2x}(2\cos x + 4\sin x) & -2e^x + e^{2x}(2\cos x + 6\sin x) \\ -2e^x + e^{2x}\cdot 2\cos x & 4e^x - e^{2x}(3\cos x + \sin x) & -4e^x + e^{2x}(4\cos x + 2\sin x) \\ -e^x + e^{2x}(\cos x - \sin x) & 2e^x + e^{2x}(\sin x - 2\cos x) & -2e^x + e^{2x}(3\cos x - \sin x) \end{pmatrix}.$$

$\Phi(x) = e^{Ax}$ — фундаментальная матрица решений заданной системы. $Y = \Phi(x) \cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, есть общее решение заданной системы (в матричной форме). Имеем

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} -e^x + 2e^{2x}(\cos x + \sin x) \\ -2e^x + 2e^{2x}\cos x \\ -e^x + e^{2x}(\cos x - \sin x) \end{pmatrix}, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{2x}(2\cos x + 4\sin x) \\ 4e^x - e^{2x}(3\cos x + \sin x) \\ 2e^x + e^{2x}(\sin x - 2\cos x) \end{pmatrix},$$

$$Y_3(x) = \begin{pmatrix} -2e^x + e^{2x}(2\cos x + 6\sin x) \\ -4e^x + e^{2x}(4\cos x + 2\sin x) \\ -2e^x + e^{2x}(3\cos x - \sin x) \end{pmatrix}$$

— линейно независимые решения системы. Следовательно, $Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + C_3Y_3(x)$ — общее решение заданной системы (в векторной форме). В скалярной форме общее решение заданной системы имеет вид:

$$y_1(x) = C_1[-e^x + 2e^{2x}(\cos x + \sin x)] +$$

$$+ C_2[2e^x - e^{2x}(2\cos x + 4\sin x)] +$$

$$+ C_3[-2e^x + e^{2x}(2\cos x + 6\sin x)],$$

$$y_2(x) = C_1[-2e^x + 2e^{2x}\cos x] +$$

$$+ C_2[4e^x - e^{2x}(3\cos x + \sin x)] +$$

$$+ C_3[-4e^x + e^{2x}(4\cos x + 2\sin x)],$$

$$y_3(x) = C_1[-e^x + e^{2x}(\cos x - \sin x)] +$$

$$+ C_2[2e^x + e^{2x}(\sin x - 2\cos x)] +$$

$$+ C_3[-2e^x + e^{2x}(3\cos x - \sin x)].$$

Глава 7

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§1. Логарифмы матриц

Определение. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Матрицу B называют логарифмом матрицы A и пишут $B = \ln A$, если $A = e^B$.

Справедливы следующие утверждения:

1) если $A = \operatorname{diag}\left[A_1, A_2, \dots, A_m\right]$ и если существуют $B_j = \ln A_j$, $j = \overline{1, m}$, то существует $B = \ln A$, причем $B = \ln A = \operatorname{diag}\left[\ln A_1, \ln A_2, \dots, \ln A_m\right]$;

2) если $A = SJS^{-1}$ $(\det S \neq 0)$ и если существует $\ln J$, то существует $\ln A$, причем $\ln A = S \cdot \ln J \cdot S^{-1}$;

3) если матрицы A и B коммутируют, т.е. $A \cdot B = B \cdot A$, и если существуют $\ln A$ и $\ln B$, то существует $\ln (A \cdot B)$, причем $\ln (A \cdot B) = \ln A + \ln B$.

Теорема. Пусть A — неособенная квадратная матрица порядка n. Тогда $B = \ln A$ существует.

▶ Пусть J — жорданова форма матрицы A. Тогда $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$ $(\det S \neq 0)$. Мы докажем, что $\ln A$ существует, если покажем, что существует $\ln J$ (см. утверждение 2).

I. Рассмотрим сначала случай, когда $J = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$. Отметим, что $\lambda_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n}$), ибо собственные числа матриц A и J совпадают, а матрица A — неособенная. Следовательно, $\ln \lambda_j$ ($j = \overline{1, n}$) существуют, а значит, существует $\ln J$ (см. утверждение 1), причем

$$\ln J = \mathrm{diag}[\ln \lambda_1, \ln \lambda_2, \dots, \ln \lambda_n].$$

II. Рассмотрим теперь более общий случай, а именно случай, когда $J = \mathrm{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$, где J_j ($j = \overline{1, m}$) — клетки Жордана. Мы докажем, что $\ln J$ существует и что

$$\ln J = \mathrm{diag}[\ln J_1, \ln J_2, \dots, \ln J_m],$$

если докажем существование $\ln J_j$ для любого $j = \overline{1, m}$. Имеем

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_j \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{n_j} \text{ (обозначение)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_{n_j} \text{ (обозначение)}} =$$

$$= \lambda_j E_{n_j} + B_{n_j} = \lambda_j E_{n_j} \left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j} \right).$$

Отметим, что матрица $\lambda_j E_{n_j}$ коммутирует с любой матрицей, в частности, она коммутирует с матрицей $E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}$. По пункту I:

$\ln(\lambda_j E_{n_j})$ существует. Следовательно, существование $\ln J_j$ будет доказано, если показать, что существует $\ln\left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}\right)$, ибо в этом случае $\ln J_j = \ln(\lambda_j E_{n_j}) + \ln\left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}\right)$.

Убедимся, что имеет место равенство

$$\ln\left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}\right) = \frac{B_{n_j}}{\lambda_j} - \frac{1}{2\lambda_j^2} B_{n_j}^2 + \frac{1}{3\lambda_j^3} B_{n_j}^3 - \frac{1}{4\lambda_j^4} B_{n_j}^4 + \ldots + \\ + (-1)^{n_j-2} \cdot \frac{1}{(n_j-1)\lambda_j^{n_j-1}} B_{n_j}^{n_j-1} + \ldots . \tag{1}$$

Обозначим через $S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)$ сумму ряда, стоящего в правой части (1). Равенство (1) будет установлено, если удастся показать, что ряд, стоящий в правой части (1), сходится и что $e^{S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)} = E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}$.

Имеем

$$B_{n_j}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{n_j}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad B_{n_j}^{n_j} = 0.$$

Следовательно, в ряде (1) член $(-1)^{n_j-2}\cdot\dfrac{1}{(n_j-1)\lambda_j^{n_j-1}}B_{n_j}^{n_j-1}$ — последний, отличный от нулевой матрицы. Значит, ряд, стоящий в правой части (1), сходится. Принимая во внимание выражения для B_{n_j}, $B_{n_j}^2$, $B_{n_j}^3$, , легко находим, что

$$S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{\lambda_j} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{1}{2\lambda_j^2} & \dfrac{1}{\lambda_j} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{3\lambda_j^3} & -\dfrac{1}{2\lambda_j^2} & \dfrac{1}{\lambda_j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{(-1)^{n_j-2}}{(n_j-1)\lambda_j^{n_j-1}} & \dots & \dots & \dots & \dots & -\dfrac{1}{2\lambda_j^2} & \dfrac{1}{\lambda_j} & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем, далее,

$$e^{S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^k=$$

$$=\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^0+\frac{1}{1!}\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]+\frac{1}{2!}\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^2+\dots+$$

$$+\frac{1}{(n_j-1)!}\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^{(n_j-1)}+0,$$

ибо

$$\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^k=0 \text{ для } k=n_j, n_j+1, \dots .$$

У матрицы $S\left(\dfrac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)$ чисто нулевые первая строка и последний столбец; у матрицы $\left[S\left(\dfrac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^2$ чисто нулевые две первые строки и два последних столбца, и т. д. У матрицы $\left[S\left(\dfrac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^{n_j}$ уже все элементы равны нулю. После простых, но трудоемких вычислений устанавливается, что

$$\frac{1}{1!}\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]+\frac{1}{2!}\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^2+\ldots+\frac{1}{(n_j-1)!}\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^{(n_j-1)}=\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}.$$

Так как $\left[S\left(\dfrac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^0=E_{n_j}$, то получаем

$$e^{S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)}=E_{n_j}+\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что соотношение (1) верно. Следовательно, $\ln\left(E_{n_j}+\dfrac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)$ существует, а значит, существует $\ln J_j$ $(j=\overline{1,m})$. ◀

§2. Линейные однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx}=A(x)\cdot Y, \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A(x)$ — матрица-функция размера $(n \times n)$,

периодическая с периодом ω, т.е. $A(x+\omega) \equiv A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Отметим, что

$$A(x+\omega) \equiv A(x),\ x \in (-\infty, +\infty) \Leftrightarrow a_{ij}(x+\omega) \equiv a_{ij}(x),$$

$$x \in (-\infty, +\infty),\ i, j = \overline{1, n}.$$

Теорема 1. Любая фундаментальная матрица $\Phi(x)$ решений системы (1) представима в виде

$$\Phi(x) = p(x) \cdot e^{xR}, \tag{2}$$

где $p(x)$ — периодическая квадратная матрица порядка n с тем же периодом ω, а R — постоянная квадратная матрица порядка n.

▶ Пусть $\Phi(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\big)$ — произвольная ф. м. р.

с. (1) $\Rightarrow$ Каждая вектор-функция $Y = \varphi_j(x)$, $j = \overline{1, n}$ — решение системы (1). Покажем, что

$$\Phi(x+\omega) = \big(\varphi_1(x+\omega), \varphi_2(x+\omega), \dots, \varphi_n(x+\omega)\big)$$

— тоже ф. м. р. с. (1).

В самом деле, так как $Y = \varphi_j(x)$ — решение системы (1), то $\varphi'_j(x+\omega) \equiv A(x+\omega) \cdot \varphi_j(x+\omega)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. У нас $A(x)$ — периодическая с периодом $\omega \Rightarrow A(x+\omega) \equiv A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому предыдущее соотношение запишется в виде

$$\varphi'_j(x+\omega) \equiv A(x) \cdot \varphi_j(x+\omega), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Последнее означает, что вектор-функция $Y = \varphi_j(x+\omega)$ — решение системы (1). Таким образом, если мы составим матрицу

$$\Phi(x+\omega) = \big(\varphi_1(x+\omega), \varphi_2(x+\omega), \dots, \varphi_n(x+\omega)\big),$$

то ее столбцы являются решениями системы (1). Значит, $\Phi(x+\omega)$ — матрица решений системы (1).

По условию, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ — линейно независимые в промежутке $(-\infty, +\infty)$ $\Rightarrow$ $\varphi_1(x+\omega)$, $\varphi_2(x+\omega)$, ..., $\varphi_n(x+\omega)$ — линейно независимые в $(-\infty, +\infty)$ $\Rightarrow$ $\Phi(x+\omega)$ — ф. м. р. с. (1). Итак, имеем: $\Phi(x)$ и $\Phi(x+\omega)$ — две фундаментальные матрицы решений системы (1). Но тогда, как мы знаем, существует неособенная постоянная матрица C, такая, что $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)\cdot C$.

Матрицу C называют *матрицей монодромии.*

Так как C — неособенная матрица, то существует $\ln C$. Введем в рассмотрение матрицу $R = \frac{1}{\omega}\ln C \Rightarrow C = e^{\omega R}$. Положим далее

$$p(x) = \Phi(x)\cdot e^{-xR}. \tag{3}$$

Из (3) находим $\Phi(x) = p(x)\cdot e^{xR}$. Остается показать теперь, что матрица $p(x)$ — периодическая с периодом ω. Имеем

$$p(x+\omega) \overset{(3)}{=} \Phi(x+\omega)\cdot e^{-(x+\omega)R} = \Phi(x)\cdot C\cdot e^{-\omega R}\cdot e^{-xR},$$

ибо матрицы $-\omega R$ и $-xR$ коммутируют.

Так как $Ce^{-\omega R} = e^{\omega R}\cdot e^{-\omega R} = e^0 = E$, то получаем

$$p(x+\omega) = \Phi(x)\cdot e^{-xR} \overset{(2)}{=} p(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Значит, матрица $p(x)$ — периодическая с периодом ω. ◀

Заметим еще, что из (3) следует:

1) матрица $p(x)$ — неособенная, ибо $\det p(x) \neq 0$;
2) матрица $p(x)$ — непрерывно дифференцируемая.

§3. Мультипликаторы

Пусть имеется линейная однородная система

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y, \tag{1}$$

где $A(x)$ — периодическая матрица-функция с периодом ω. Пусть $\Phi_1(x)$ — какая-нибудь ф. м. р. с. (1). Выше было показано, что $\Phi_1(x+\omega)$ — тоже ф. м. р. с. (1). Но тогда

$$\Phi_1(x+\omega)=\Phi_1(x)\cdot C_1 \tag{2}$$

(C_1 — матрица монодромии, $\det C_1 \neq 0$). Пусть $\Phi(x)$ — некоторая другая ф. м. р. с. (1). Тогда и $\Phi(x+\omega)$ — тоже ф. м. р. с. (1), причем

$$\Phi(x+\omega)=\Phi(x)\cdot C \tag{3}$$

(C — матрица монодромии, $\det C \neq 0$).

Найдем связь между матрицами C_1 и C. У нас $\Phi_1(x)$ и $\Phi(x)$ — ф. м. р. с. (1). Поэтому существует неособенная постоянная матрица T, такая, что

$$\Phi_1(x)=\Phi(x)\cdot T \tag{4}$$

$$\Rightarrow \Phi_1(x+\omega)=\Phi(x+\omega)\cdot T \overset{(2)}{\Rightarrow} \Phi(x+\omega)\cdot T=\Phi_1(x)\cdot C_1 \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \Phi(x+\omega)\cdot T=\Phi(x)\cdot T\cdot C_1 .$$

Умножим обе части последнего равенства на матрицу T^{-1} справа. Получим

$$\Phi(x+\omega)=\Phi(x)\cdot T\cdot C_1\cdot T^{-1}. \tag{5}$$

Но, с другой стороны, мы имеем (см. (3))

$$\Phi(x+\omega)=\Phi(x)\cdot C .$$

Так как матрица C — единственная, то из (5) и (3) следует, что

$$C=T\cdot C_1\cdot T^{-1}. \tag{6}$$

Последнее означает, что матрицы C и C_1 — подобные.

Общий вывод: все матрицы монодромии для данной системы (1) *являются подобными.*

Известно, что собственные числа подобных матриц одни и те же. Следовательно, справедливо утверждение: *собственные числа любой из матриц монодромии для данной системы* (1) *не зависят от выбора ф. м. р. с.* (1).

Определение. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ — собственные числа матрицы монодромии C. Эти числа называются *мультипликаторами* системы (1).

У нас $R=\dfrac{1}{\omega}\ln C$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — собственные числа матрицы R. Ясно, что $\lambda_j=\dfrac{1}{\omega}\ln\mu_j$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ называются характеристическими показателями системы (1).

Заметим, что:

1) если $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то для соответствующего мультипликатора μ_j будет $|\mu_j| < 1$;

2) если $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, то $|\mu_j| > 1$.

§4. Структура фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы с периодическими коэффициентами

Было показано, что ф. м. р. с.

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y, \tag{1}$$

где $A(x+\omega) \equiv A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, представима в виде

$$\Phi(x) = p(x)\cdot e^{xR}. \tag{2}$$

В (2) $p(x)$ — периодическая с периодом ω, неособенная, непрерывно дифференцируемая квадратная матрица порядка n; $R = \dfrac{1}{\omega}\ln C$ (C — матрица монодромии).

Пусть J — жорданова форма матрицы R. Значит, существует матрица S, такая, что $R = S\cdot J\cdot S^{-1}$. Имеем

$$\Phi(x) = p(x)e^{xR} = p(x)e^{SJxS^{-1}} = p(x)\cdot S\cdot e^{Jx}\cdot S^{-1}.$$

Умножив обе части последнего матричного равенства на S справа, получим

$$\underbrace{\Phi(x)\cdot S}_{=\Psi(x)} = \underbrace{p(x)\cdot S}_{=p^*(x)\ \text{(обозначение)}}\cdot e^{Jx} = p^*(x)e^{Jx}.$$

Отметим, что $\Psi(x) = \Phi(x)\cdot S$ является ф. м. р. с. (1), а $p^*(x)$ — матрица, обладающая теми же свойствами, что и $p(x)$ ($p^*(x)$ — периодическая с периодом ω, неособенная, непрерывно дифференцируемая).

Итак,

$$\Psi(x) = p^*(x)\cdot e^{Jx}. \tag{3}$$

Если выясним структуру матрицы $\Psi(x)$, то тем самым узнаем структуру ф. м. р. с. (1).

Имеем

$$\Psi(x)=p^*(x)\cdot\begin{pmatrix} e^{J_1x} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{J_2x} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & e^{J_mx}\end{pmatrix}=\left(\underbrace{p^*(x)\begin{pmatrix} e^{J_1x}\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}}_{n_1\ \text{столбцов}};\dots;\underbrace{p^*(x)\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \dots\\ e^{J_mx}\end{pmatrix}}_{n_m\ \text{столбцов}}\right).$$

Каждой клетке Жордана J_j ($j=\overline{1,m}$) соответствует группа решений, входящих в матрицу $\Psi(x)$. Выпишем эти группы решений в явном виде.

Первая группа ($j=1$):

$$\underset{\text{(здесь } n_1 \text{ решений)}}{p^*(x)\cdot\begin{pmatrix} e^{J_1x}\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}}=\underbrace{(p_1,p_2,\dots,p_n)}_{=p^*(x)}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} & \dots & \dots & \dots & x & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_1x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\psi_1(x)=\left(p_1(x)+p_2(x)\cdot x+p_3(x)\cdot\dfrac{x^2}{2!}+\dots+p_{n_1}(x)\cdot\dfrac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\right)\cdot e^{\lambda_1x},\\ \psi_2(x)=\left(p_2(x)+p_3(x)\cdot x+\dots+p_{n_1}(x)\cdot\dfrac{x^{n_1-2}}{(n_1-2)!}\right)\cdot e^{\lambda_1x},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \psi_{n_1}(x)=p_{n_1}(x)\cdot e^{\lambda_1x}.\end{cases}$$

Отметим, что $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_{n_1}(x)$ — периодические вектор-функции с периодом ω.

Вторая группа решений ($j=2$):

$$p^*(x)\cdot\begin{pmatrix}0\\ e^{J_2x}\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\psi_{n_1+1}(x)=\left(p_{n_1+1}(x)+p_{n_1+2}(x)\cdot x+\dots+p_{n_1+n_2}(x)\cdot\dfrac{x^{n_2-1}}{(n_2-1)!}\right)\cdot e^{\lambda_2x},\\ \psi_{n_1+2}(x)=\left(p_{n_1+2}(x)+p_{n_1+3}(x)\cdot x+\dots+p_{n_1+n_2}(x)\cdot\dfrac{x^{n_2-2}}{(n_2-2)!}\right)\cdot e^{\lambda_2x},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \psi_{n_1+n_2}(x)=p_{n_1+n_2}(x)\cdot e^{\lambda_2x},\end{cases}$$

и так далее; m-я группа решений ($j=m$):

$$p^*(x)\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dots\\ e^{J_mx}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\psi_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}(x)=\left(p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}(x)+p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}(x)\cdot x+\dots+\right.\\ \qquad\qquad\left.+\,p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+n_m}(x)\cdot\dfrac{x^{n_m-1}}{(n_m-1)!}\right)\cdot e^{\lambda_mx},\\ \psi_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}(x)=\left(p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}(x)+p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+3}(x)\cdot x+\dots+\right.\\ \qquad\qquad\left.+\,p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+n_m}(x)\cdot\dfrac{x^{n_m-2}}{(n_m-2)!}\right)\cdot e^{\lambda_mx},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \psi_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+n_m}(x)=\psi_n(x)=p_{n_1+n_2+\dots+n_m}(x)\cdot e^{\lambda_mx}.\end{cases}$$

$Y=\Psi(x)\cdot C=C_1\cdot\psi_1(x)+C_2\cdot\psi_2(x)+\dots+C_n\cdot\psi_n(x)$ — общее решение системы (1).

Отметим, что:

1) если $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ для любого $j = \overline{1, m}$, то все решения системы (1) стремятся к нулю при $x \to +\infty$;

2) если имеется хотя бы одно характеристическое число λ_{j_0}, такое, что $\operatorname{Re}\lambda_{j_0} > 0$, то существуют решения системы (1), стремящиеся к бесконечности при $x \to +\infty$.

Замечание. Пусть $\Phi(x)$ — ф. м. р. с. (1), нормированная в точке $x = 0$, то есть такая, что $\Phi(0) = E$. Построим по ней матрицу монодромии C. Мы знаем, что $\Phi(x+\omega) = \Phi(x) \cdot C$. Положив в этом соотношении $x = 0$, получим

$$\Phi(\omega) = \underbrace{\Phi(0)}_{=E} \cdot C \quad \Rightarrow \quad C = \Phi(\omega).$$

Видим, что в этом случае мультипликаторы системы (1) будут найдены, если мы найдем собственные числа матрицы $\Phi(\omega)$.

По формуле Остроградского — Лиувилля имеем

$$W(x) = \det \Phi(x) = \det \Phi(0) \cdot e^{\int_0^x \operatorname{tr} A(t)\, dt},$$

где $\det \Phi(0) = 1$, так как $\Phi(x)$ — нормированная в точке $x = 0$. Поэтому

$$\det \Phi(\omega) = e^{\int_0^\omega \operatorname{tr} A(t)\, dt}.$$

Мы знаем, что определитель любой матрицы равен произведению собственных чисел этой матрицы. Следовательно,

$$\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n = \det \Phi(\omega) = e^{\int_0^\omega \operatorname{tr} A(t)\, dt}.$$

Если прологарифмировать это соотношение, то получим

$$\ln \mu_1 + \ln \mu_2 + \ldots + \ln \mu_n = \int_0^\omega \operatorname{tr} A(t)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \operatorname{tr} A(t)\, dt.$$

§5. Приведение линейной однородной системы с периодическими коэффициентами к линейной однородной системе с постоянными коэффициентами

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y, \tag{1}$$

где $A(x) \in C(\mathrm{R})$ и такая, что $A(x+\omega) = A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Мы знаем, что любая фундаментальная матрица решений $\Phi(x)$ системы (1) представима в виде

$$\Phi(x) = p(x) \cdot e^{Rx}, \tag{2}$$

где $p(x)$ — неособая, периодическая матрица с периодом ω; R — постоянная матрица. Отметим, что поскольку $\Phi(x)$ — матрица решений системы (1), то

$$\Phi'(x) \equiv A(x) \cdot \Phi(x). \tag{3}$$

Произведем в системе (1) замену переменных по формуле

$$Y = p(x) \cdot Z, \tag{4}$$

где $p(x)$ — матрица из (2). Подставив (4) в (1), получим

$$p'(x) \cdot Z + p(x) \cdot Z' = A(x) \cdot p(x) \cdot Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(x) Z' = \left[A(x) \cdot p(x) - p'(x)\right] \cdot Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dZ}{dx} = p^{-1}(x)\left[A(x) \cdot p(x) - p'(x)\right] \cdot Z. \tag{5}$$

Найдем выражение для $p'(x)$. Для этого подставим выражение для матрицы $\Phi(x)$ в виде (2) в соотношение (3). Будем иметь

$$p'(x) e^{Rx} + p(x) \cdot R \cdot e^{Rx} \equiv A(x) \cdot p(x) e^{Rx}.$$

Умножив обе части последнего тождества на e^{-Rx} справа, получим $p'(x) = A(x) \cdot p(x) - p(x) \cdot R$. Подставив полученное выражение для $p'(x)$ в (5), получим

$$\frac{dZ}{dx} = p^{-1}(x)\left[A(x) \cdot p(x) - A(x) \cdot p(x) + p(x) \cdot R\right] \cdot Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dZ}{dx} = p^{-1}(x) p(x) R \cdot Z \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = R \cdot Z. \tag{6}$$

Так как R — постоянная матрица, то (6) — линейная однородная система с постоянными коэффициентами.

Глава 8

ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Постановка задачи об устойчивости. Определения

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y) \tag{1}$$

с начальным условием

$$Y\Big|_{t=t_0} = \xi_0, \tag{2}$$

описывающая некоторый реальный процесс, неизбежно описывает его лишь приближенно. Дело в том, что система дифференциальных уравнений составляется при некоторых упрощающих действительные зависимости предположениях, а начальные данные, являющиеся обычно результатом некоторых измерений, вычисляются с погрешностью. Поэтому обычно лишь только те решения системы (1) могут хотя бы приближенно описывать изучаемый процесс, которые при $t \geq t_0$ мало изменяются при малом изменении правой части системы (1) и при малом изменении начальных данных (2).

Теория устойчивости изучает условия, при которых малые изменения вектор-функции $F(t, Y)$ или малые изменения начальных данных приводят лишь к малому изменению решений при $t \geq t_0$. Мы ограничимся здесь рассмотрением только второй из этих задач.

Рассмотрение будем вести при предположениях, что:

1) $F(t, Y) \in C(G)$;

2) $F(t, Y) \in \mathrm{Lip}_Y(G)$ — локально; $(G) = (\tau, +\infty) \times (D)$, $(D) \subset \mathrm{R}^n$, $\tau \geq -\infty$.

Часто в дальнейшем будем называть независимую переменную t временем, каждое решение $Y(t)$ системы (1) — движением, а график этого движения — траекторией.

Пусть $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ — решение задачи (1) — (2). Будем считать, что это решение определено для $t \in (\tau_0, +\infty)$, $\tau \leq \tau_0 < t_0 < +\infty$; t_0, ξ_0 — любые, но такие, что точка $(t_0, \xi_0) \in (G)$.

Было отмечено, что начальные данные вычисляются с некоторой погрешностью, а потому вместо (2) будем иметь приближенное начальное условие

$$Y\big|_{t=t_0} = \xi \text{, где } \xi = \xi_0 + \Delta\xi \text{; } (t_0, \xi) \in (G). \qquad (\tilde{2})$$

Начальным условием $(\tilde{2})$ определяется некоторое другое движение системы (1): $Y = \varphi(t) = \varphi(t, t_0, \xi)$. Считаем, что и это движение определено для $t \in (\tau_0, +\infty)$. Вопрос об устойчивости (неустойчивости) движения $Y = \varphi_0(t)$, $t \in (\tau_0, +\infty)$, в смысле А.М. Ляпунова сводится к вопросу о влиянии ошибок в начальных данных на движение во все последующие моменты времени. Если оказывается, что малые ошибки в начальных данных обусловливают также малые ошибки во все последующие моменты, то говорят, что движение $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in (\tau_0, +\infty)$, устойчиво в смысле А.М. Ляпунова. В противном случае говорят, что это движение неустойчиво в смысле А.М. Ляпунова.

Рассмотрим два простейших примера.

Пример 1. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} + y = 1 + t. \qquad (1^*)$$

Оно определено на всей плоскости переменных t и y, причем каждая точка этой плоскости оказывается точкой единственности. Общим решением уравнения (1*) является функция

$$y = Ce^{-t} + t. \qquad (2^*)$$

Из (2*) выделим решение уравнения (1*), удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{t=0} = \xi_0$. Таким решением будет функция

$y=\varphi_0(t,0,\xi_0)=\xi_0 e^{-t}+t$, $t\in(-\infty,+\infty)$. Станем рассматривать это решение на промежутке $[0,+\infty)$.

Выделим теперь из (2*) решение уравнения (1*), удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{t=0}=\xi$, где $\xi=\xi_0+\Delta\xi$, $\Delta\xi\neq 0$. Таким решением будет функция $y=\varphi(t,0,\xi)=\xi e^{-t}+t$, $t\in(-\infty,+\infty)$. И это решение станем рассматривать на промежутке $[0,+\infty)$.

Возьмем $\varepsilon>0$ любое, сколь угодно малое, и рассмотрим разность $\varphi(t,0,\xi)-\varphi_0(t,0,\xi_0)$. Имеем

$$\varphi(t,0,\xi)-\varphi_0(t,0,\xi_0)=(\xi e^{-t}+t)-(\xi_0 e^{-t}+t)=(\xi-\xi_0)e^{-t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\varphi(t,0,\xi)-\varphi_0(t,0,\xi_0)\right|=\left|\xi-\xi_0\right|e^{-t}\le\left|\xi-\xi_0\right| \text{ для всех } t\in[0,+\infty)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\varphi(t,0,\xi)-\varphi_0(t,0,\xi_0)\right|<\varepsilon \text{ для всех } t\in[0,+\infty),$$

если число ξ брать любым, удовлетворяющим условию $\left|\xi-\xi_0\right|<\delta$, где $\delta=\varepsilon$.

В этом примере малые ошибки в начальных данных обусловливают малые ошибки во все последующие моменты времени. Более того, эти ошибки быстро убывают с увеличением t. Заметим еще, что

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\varphi(t,0,\xi)-\varphi_0(t,0,\xi_0)\right|=\lim_{t\to+\infty}\left|\xi-\xi_0\right|e^{-t}=0$$

(т. е. решения, близкие по начальным значениям, неограниченно сближаются с возрастанием t).

Пример 2. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt}=\sin^2 y. \qquad (3^*)$$

Оно определено на всей плоскости переменных t и y; каждая точка этой плоскости оказывается точкой единственности уравнения (3*).

Уравнение (3*) имеет очевидные решения: $y=k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$). Пусть $y\neq k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$). Тогда уравнение (3*) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{\sin^2 y}=dt \Rightarrow \operatorname{ctg} y=-(t+C). \qquad (4^*)$$

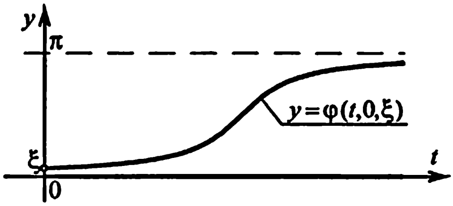

Рис. 8.1

Рассмотрим решение уравнения (3*), удовлетворяющее условию $y\big|_{t=0} = 0$. Этим решением будет $y = \varphi_0(t, 0, 0) \equiv 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Станем рассматривать это решение на промежутке $[0, +\infty)$ (рис. 8.1).

Из (4*) выделим решение уравнения (3*), удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{t=0} = \xi$, $\xi \in (0, \pi)$. Таким решением будет функция, определяемая соотношением $\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg}\xi - t$, а именно:

$$y = \varphi(t, 0, \xi) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\xi - t), \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

И это решение будем рассматривать на промежутке $[0, +\infty)$.

Для разности решений имеем

$$\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, 0) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\xi - t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty}[\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, 0)] = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\xi - t) = \pi.$$

Здесь уже не всякому $\varepsilon > 0$ будет отвечать $\delta > 0$, такое, чтобы из неравенства $|\xi - 0| < \delta$ следовало бы неравенство $|\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, 0)| < \varepsilon$. Значит, существует $\varepsilon_0 > 0$, которому не отвечает никакое $\delta > 0$ в указанном выше смысле, и, следовательно, для любого $\delta > 0$ существуют $\tilde{\xi}$, удовлетворяющее условию $|\tilde{\xi} - 0| < \delta$, и $\tilde{t} \in [0, +\infty)$, такие, что $|\varphi(\tilde{t}, 0, \tilde{\xi}) - \varphi_0(\tilde{t}, 0, 0)| \geq \varepsilon_0$.

Дадим теперь точные определения устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости движения $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\varphi}_0(t, t_0, \boldsymbol{\xi}_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1).

Определение 1. Движение $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\varphi}_0(t) = \boldsymbol{\varphi}_0(t, t_0, \boldsymbol{\xi}_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что для любого вектора $\boldsymbol{\xi}$, удовлетворяющего условию $\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0\| < \delta$, движение системы (1) $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{\xi})$ определено на промежутке $[t_0, +\infty)$ и имеет место неравенство

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\varphi}_0(t, t_0, \boldsymbol{\xi}_0)\| < \varepsilon \text{ для любого } t \in [t_0, +\infty).$$

В противном случае движение $Y=\varphi_0(t)=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$, $t\in[t_0,+\infty)$, называется *неустойчивым по Ляпунову*. Иными словами, движение $Y=\varphi_0(t)=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$, $t\in[t_0,+\infty)$, называется неустойчивым по Ляпунову, если для любого $\delta>0$ существуют вектор $\tilde{\xi}$, удовлетворяющий условию $\|\tilde{\xi}-\xi_0\|<\delta$, и $\tilde{t}\in[t_0,+\infty)$, такие, что $\|\varphi(\tilde{t},t_0,\tilde{\xi})-\varphi_0(\tilde{t},\ t_0,\xi_0)\|\geq\varepsilon$.

Определение 2. Движение $Y=\varphi_0(t)=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$, $t\in[t_0,+\infty)$, называется *асимптотически устойчивым (по Ляпунову)*, если 1) $\varphi_0(t)=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$ устойчиво (по Ляпунову) и если 2) существует $\delta'>0$, такое, что для любого ξ, удовлетворяющего условию $\|\xi-\xi_0\|<\delta'$, оказывается

$$\|\varphi(t,t_0,\xi)-\varphi_0(t,\ t_0,\xi_0)\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Замечание. Допустим, что существует точка $Y_0\in(D)$, такая, что для любого $t\in(\tau_0,+\infty)$ оказывается $F(t,Y_0)=0$. Тогда система (1) допускает движение $Y=Y_0$, $t\in(\tau_0,+\infty)$. Такое движение называется состоянием покоя. Его траекторией является точка Y_0 (точка Y_0 — точка покоя). Отметим, что вопрос об устойчивости произвольного движения $\varphi_0(t)=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы (1) может быть сведен к вопросу об устойчивости состояния покоя некоторой другой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Действительно, произведем в системе (1) замену

$$Y=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)+X. \tag{3}$$

Получим

$$\underbrace{\frac{d\varphi_0(t,t_0,\xi_0)}{dt}}_{\equiv F(t,\varphi_0(t,t_0,\xi_0))}+\frac{dX}{dt}=F\big(t,\varphi_0(t,t_0,\xi_0)+X\big)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dX}{dt}=F\big(t,\varphi_0(t,t_0,\xi_0)+X\big)-F\big(t,\varphi_0(t,t_0,\xi_0)\big)\underset{\text{обозн.}}{=}\tilde{F}(t,X)\Rightarrow$$

$$\frac{dX}{dt}=\tilde{F}(t,X). \tag{4}$$

В силу замены (3) решению $Y=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$ системы (1) соответствует решение $X\equiv 0$ системы (4) (движение $X\equiv 0$, $t\in(\tau_0,+\infty)$ — состояние покоя системы (4)), а решению $Y=\varphi(t,t_0,\xi)$ системы (1) соответствует решение $X=\varphi(t,t_0,\xi)-\varphi_0(t,t_0,\xi_0)\underset{\text{обозн.}}{=}\psi(t,t_0,\eta)$ системы (4). Ясно, что

$$\eta=\psi(t,t_0,\eta)\big|_{t=t_0}=\varphi(t,t_0,\xi)\big|_{t=t_0}-\varphi_0(t,t_0,\xi_0)\big|_{t=t_0}=\xi-\xi_0.$$

Покажем, что если решение $Y=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы (1): 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво, то и решение $X\equiv 0$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы (4) будет соответственно: 1) устойчивым, 2) неустойчивым, 3) асимптотически устойчивым.

▶ 1) Пусть решение $Y=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы (1) устойчиво. Тогда любому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$, такое, что для любого ξ, удовлетворяющего условию $\|\xi-\xi_0\|<\delta$, движение $Y=\varphi(t,t_0,\xi)$ системы (1) определено на промежутке $t\in[t_0,+\infty)$ и имеет место неравенство $\|\varphi(t,t_0,\xi)-\varphi_0(t,t_0,\xi_0)\|<\varepsilon$ для любого $t\in[t_0,+\infty)$. А это неравенство равносильно тому, что любому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$, такое, что для любого η, удовлетворяющего условию $\|\eta-0\|<\delta$, движение $X=\psi(t,t_0,\eta)$ системы (4) определено на промежутке $[t_0,+\infty)$ и имеет место неравенство $\|\psi(t,t_0,\eta)-0\|<\varepsilon$ для любого $t\in[t_0,+\infty)$. Последнее означает, что решение $X\equiv 0$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы (4) устойчиво.

2) Пусть решение $Y=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы (1) неустойчиво. Но тогда существует $\varepsilon>0$, такое, что для любого $\delta>0$ существуют вектор $\tilde{\xi}$, удовлетворяющий условию $\left\|\tilde{\xi}-\xi_0\right\|<\delta$, и $\tilde{t}\in[t_0,+\infty)$, такие, что будет $\left\|\varphi(\tilde{t},t_0,\tilde{\xi})-\varphi_0(\tilde{t},t_0,\xi_0)\right\|\geq\varepsilon$. А это равносильно тому, что существует $\varepsilon>0$, такое, что для любого $\delta>0$ существуют вектор $\tilde{\eta}$, удовлетворяющий условию $\|\tilde{\eta}-0\|<\delta$, и $\tilde{t}\in[t_0,+\infty)$, такие, что будет $\|\psi(\tilde{t},t_0,\tilde{\eta})-0\|\geq\varepsilon$. Последнее означает, что решение $X\equiv 0$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы (4) неустойчиво.

3) Пусть решение $Y=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы (1) асимптотически устойчиво. Это означает, что 1) решение $Y=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$, $t\in[t_0,+\infty)$, устойчиво и что 2) существует $\delta'>0$ такое, что для любого вектора ξ, удовлетворяющего условию $\|\xi-\xi_0\|<\delta'$, будет

$$\|\varphi(t,t_0,\xi)-\varphi_0(t,t_0,\xi_0)\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Но тогда: 1) решение $X\equiv\mathbf{0}$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы (4) устойчиво и 2) существует $\delta'>0$ такое, что для любого вектора η, удовлетворяющего условию $\|\eta-\mathbf{0}\|<\delta'$, будет

$$\|\psi(t,t_0,\eta)-\mathbf{0}\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Значит, решение $X\equiv\mathbf{0}$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы (4) асимптотически устойчиво. ◀

§2. Устойчивость линейных систем

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dY}{dt}=A(t)\cdot Y+F(t), \tag{1}$$

где матрица-функция $A(t)$ и вектор-функция $F(t)$ предполагаются непрерывными на промежутке $(\tau,+\infty)$. Заметим, что в этом случае область $(G)=(\tau,+\infty)\times\mathbf{R}^n$ и решения системы (1) существуют на всем промежутке $(\tau,+\infty)$. Покажем, что исследование на устойчивость произвольного решения $Y=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$ системы (1) сводится к исследованию на устойчивость решения $Y\equiv\mathbf{0}$ соответствующей однородной системы

$$\frac{dY}{dt}=A(t)\cdot Y, \tag{2}$$

а именно, покажем, что справедливо утверждение:

Произвольное решение $Y=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$, $t\in[t_0,+\infty)$ линейной неоднородной системы (1): 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда решение

$Y \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$ соответствующей однородной системы (2) соответственно: 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво.

▶ В системе (1) произведем замену, положив

$$Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X. \tag{3}$$

(X — новая искомая вектор-функция). Получим

$$\frac{d\varphi_0(t, t_0, \xi_0)}{dt} + \frac{dX}{dt} = A(t)\left[\varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X\right] + F(t).$$

Так как $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, — решение системы (1), то

$$\frac{d\varphi_0(t, t_0, \xi_0)}{dt} \equiv A(t) \cdot \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + F(t), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Но тогда

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X. \tag{$\tilde{2}$}$$

В силу замены (3) решению $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы (1) соответствует решение $X \equiv \mathbf{0}$ системы ($\tilde{2}$), а любому другому решению $Y = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы (1) соответствует решение $X = \psi(t, t_0, \eta) = \varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы ($\tilde{2}$), причем $\psi(t, t_0, \eta)\big|_{t=t_0} = \eta = \xi - \xi_0$.

Совершенно аналогично тому, как это было сделано в конце §1, устанавливается, что если решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1): 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво, то решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы ($\tilde{2}$) соответственно: 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво.

Покажем, что справедливо и обратное утверждение, а именно, если решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы ($\tilde{2}$): 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво, то решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) соответственно: 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво.

Действительно: 1) Пусть решение $X \equiv \mathbf{0}$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы ($\tilde{2}$) устойчиво. Нужно показать, что тогда устойчиво и решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1). Рассуждаем от противного. Допустим, что решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) неустойчиво. Но тогда, как показано выше, будет неустойчиво решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$, а это не так.

2) Пусть решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ неустойчиво. Нужно показать, что тогда неустойчиво и решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1). Рассуждаем от противного. Допустим, что решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) устойчиво. Но тогда, как показано выше, будет устойчивым и решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$, а это не так.

3) Пусть решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво. Нужно показать, что тогда асимптотически устойчиво и решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1). Рассуждаем от противного. Допустим, что решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) устойчиво, но не асимптотически (устойчивость решения $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы (1) следует из устойчивости решения $X \equiv 0$ системы $(\tilde{2})$, см. пункт 1)). Но тогда из доказательства, проведенного выше, будет следовать лишь устойчивость (неасимптотическая) решения $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$, а это не так. ◀

Важно выяснить теперь, при каких условиях решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, линейной однородной системы $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X$ будет: 1) устойчивым и 2) асимптотически устойчивым?

Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. Пусть имеется линейная однородная система

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X. \qquad (\tilde{2})$$

Пусть $\Phi_0(t)$ — ф. м. р. с. $(\tilde{2})$, нормированная в некоторой точке $t_0 \in (\tau, +\infty)$, т.е. $\Phi_0(t)\big|_{t=t_0} = E$. Решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$:

1) устойчиво лишь тогда, когда $\Phi_0(t)$ — ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$;

2) асимптотически устойчиво лишь тогда, когда $\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Докажем утверждение 1).

Необходимость. Дано: решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, устойчиво. Требуется доказать, что $\Phi_0(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ — ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$.

▶ Рассуждаем от противного, а именно, предполагаем, что $\Phi_0(t)$ не является ограниченной на промежутке $[t_0, +\infty)$. Но тогда существует по крайней мере одно j_0, такое, что решение $\varphi_{j_0}(t)$ не является ограниченным на промежутке $[t_0, +\infty)$ (j_0 — одно из чисел $1, 2, \dots, n$). Покажем теперь, что неограниченность решения $\varphi_{j_0}(t)$ приводит к тому, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы ($\tilde{2}$) неустойчиво. Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon_0 > 0$ и закрепим его. Пусть $\delta > 0$ — любое, сколь угодно малое. Возьмем число Δ, удовлетворяющее условию $0 < \Delta < \delta$, и рассмотрим решение системы ($\tilde{2}$): $X = \varphi(t) = \varphi_{j_0}(t) \cdot \Delta$. Имеем $\|\varphi(t)\| = \Delta \cdot \|\varphi_{j_0}(t)\|$. Так как $\|\varphi_{j_0}(t)\|$ неограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$, то и $\|\varphi(t)\|$ неограниченная на $[t_0, +\infty)$. Следовательно, существует $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$, такое, что $\|\varphi(\tilde{t})\| \geq \varepsilon_0$.

Имеем, далее, $\tilde{\xi} = \varphi(t)\big|_{t=t_0} = \varphi_{j_0}(t_0) \cdot \Delta = e_{j_0} \cdot \Delta$, где e_{j_0} — матрица-столбец, у которой все элементы, кроме одного (равного единице), равны нулю. Поэтому $\|\varphi(t_0)\| = \|e_{j_0} \cdot \Delta\| = 1 \cdot \Delta = \Delta$, т. е. $\|\tilde{\xi}\| = \Delta < \delta$. Таким образом, получили: существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любого $\delta > 0$ существуют вектор $\tilde{\xi}$, удовлетворяющий условию $\|\tilde{\xi}\| = \|\tilde{\xi} - 0\| < \delta$, и $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$, такие, что

$$\|\varphi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\xi})\| = \|\varphi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\xi}) - 0\| \geq \varepsilon_0.$$

Последнее означает, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы ($\tilde{2}$) неустойчиво. У нас же, по условию, решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, устойчиво. Получили противоречие. Значит, предположение, что $\Phi_0(t)$ — неограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$, неверно. ◀

Достаточность. Дано: $\Phi_0(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ — ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$. Требуется доказать, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы ($\tilde{2}$) устойчиво.

▶ По условию, $\Phi_0(t)$ — ограниченная на $[t_0, +\infty)$. $\Rightarrow$ Существует число $M > 0$, такое, что $\|\Phi_0(t)\| \leq M$, $t \in [t_0, +\infty)$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и произвольный вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что

$X = \Phi_0(t)\cdot\xi$ — решение системы $(\tilde{2})$, удовлетворяющее начальному условию $X\big|_{t=t_0} = \xi$ $(\Phi_0(t)\cdot\xi = \varphi(t, t_0, \xi),\ t \in [t_0, +\infty))$. Имеем

$$\|\varphi(t, t_0, \xi) - 0\| = \|\varphi(t, t_0, \xi)\| = \|\Phi_0(t)\cdot\xi\| \le n\cdot\|\Phi_0(t)\|\cdot\|\xi\| \le n\cdot M\cdot\|\xi\|,$$
$$t \in [t_0, +\infty).$$

Отсюда видим, что $\|\varphi(t, t_0, \xi) - 0\| < \varepsilon$, если $\|\xi - 0\| = \|\xi\| < \dfrac{\varepsilon}{nM}$. Таким образом, получаем: любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ $\left(\delta = \dfrac{\varepsilon}{nM}\right)$, такое, что для любого ξ, удовлетворяющего условию $\|\xi - 0\| < \delta$, оказывается $\|\varphi(t, t_0, \xi) - 0\| < \varepsilon$ для любого $t \in [t_0, +\infty)$. Последнее означает, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ устойчиво. ◀

Докажем теперь утверждение 2).

Необходимость. Дано: решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво. Требуется доказать, что $\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

▶ По условию, решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво. Это означает, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, устойчиво и что существует $\delta' > 0$, такое, что для любого ξ, удовлетворяющего условию $\|\xi - 0\| = \|\xi\| < \delta'$, оказывается $\|\varphi(t, t_0, \xi) - 0\| = \|\varphi(t, t_0, \xi)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Мы докажем, что $\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, если покажем, что для любого $j = \overline{1, n}$: $\|\varphi_j(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. (У нас $\Phi_0(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$).

Возьмем любое решение $X = \varphi_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, входящее в матрицу $\Phi_0(t)$. Возьмем $\Delta > 0$ — любое, но такое, что $\Delta < \delta'$, и рассмотрим решение $\varphi(t) = \varphi_j(t)\cdot\Delta$, $t \in [t_0, +\infty)$. Имеем $\xi = \varphi(t_0) = \varphi_j(t_0)\cdot\Delta = e_j\cdot\Delta$, где e_j — матрица-столбец, у которой все элементы, кроме одного (равного единице), равны нулю. Поэтому $\|\varphi(t_0)\| = \Delta < \delta'$, т.е. $\|\xi\| < \delta'$. А тогда, в силу асимптотической устойчивости решения $X = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, будем иметь

$$\|\varphi(t)\| = \|\varphi(t, t_0, \xi)\| = \|\varphi(t, t_0, \xi) - 0\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

т. е.
$$\|\varphi_j(t)\cdot\Delta\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0 \Leftrightarrow \|\varphi_j(t)\|\cdot\Delta\xrightarrow[t\to+\infty]{}0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|\varphi_j(t)\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0 \text{ при любом } j=\overline{1,n} \Rightarrow \|\Phi_0(t)\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0. \blacktriangleleft$$

Достаточность. Дано: $\|\Phi_0(t)\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$. Требуется доказать, что решение $X\equiv 0$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы ($\tilde{2}$) асимптотически устойчиво.

▶ По условию, $\|\Phi_0(t)\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$. Тогда $\|\Phi_0(t)\|$ — ограниченная на промежутке $[t_0,+\infty)$, следовательно, по утверждению 1) теоремы, решение $X\equiv 0$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы ($\tilde{2}$) устойчиво.

Возьмем произвольный вектор $\xi\in\mathbf{R}^n$ и рассмотрим решение $\Phi_0(t)\cdot\xi=\varphi(t,t_0,\xi)$ системы ($\tilde{2}$). Имеем
$$\|\varphi(t,t_0,\xi)-0\|=\|\varphi(t,t_0,\xi)\|=\|\Phi_0(t)\cdot\xi\|\le n\cdot\|\Phi_0(t)\|\cdot\|\xi\|.$$

По условию $\|\Phi_0(t)\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$. А тогда из предыдущего неравенства следует, что $\|\varphi(t,t_0,\xi)-0\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$. Таким образом, получили, что решение $X\equiv 0$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы ($\tilde{2}$) устойчиво и что для любого $\xi\in\mathbf{R}^n$ оказывается $\|\varphi(t,t_0,\xi)-0\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$. Это означает, что решение $X\equiv 0$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы ($\tilde{2}$) асимптотически устойчиво. ◀

§3. Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами

Пусть имеется линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
$$\frac{dY}{dt}=A\cdot Y+F(t), \tag{1}$$
где A — постоянная матрица, а вектор-функция $F(t)$ предполагается непрерывной на промежутке $(\tau,+\infty)$. В §2 было показано, что исследование на устойчивость произвольного решения $Y=\varphi_0(t,t_0,\xi_0)$, $t\in[t_0,+\infty)$, системы (1) сводится к исследованию на устойчивость решения $Y\equiv 0$ соответствующей однородной системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y. \tag{2}$$

Ответ же на вопросы об устойчивости, асимптотической устойчивости решения $Y \equiv 0$ системы (2) дает следующая теорема.

Теорема. Пусть имеется линейная однородная система с постоянными коэффициентами (2). Пусть λ_j ($j = \overline{1, m}$) — собственные числа матрицы A. Тогда:

I. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (2) устойчиво лишь тогда, когда $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$ для любого $j = \overline{1, m}$; при этом каждому λ_j, у которого $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, в канонической форме J матрицы A должны соответствовать клетки Жордана лишь первого порядка.

II. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (2) асимптотически устойчиво лишь тогда, когда $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ для любого $j = \overline{1, m}$.

▶ Мы знаем, что любое решение системы (2) определено на интервале $(-\infty; +\infty)$. Поэтому всегда в качестве t_0 можно взять $t_0 = 0$.

Возьмем фундаментальную матрицу решений системы (2), нормированную в точке $t_0 = 0$. Такой матрицей является матрица e^{At}. Найдем условия, при которых матрица e^{At} является ограниченной, и условия, при которых $\left\| e^{At} \right\| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

Пусть $J = \operatorname{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$ — каноническая форма матрицы A. Пусть $A = SJS^{-1}$ ($\det S \ne 0$). Тогда

$$e^{At} = S \cdot e^{Jt} \cdot S^{-1}. \tag{3}$$

Из (3) следует, что матрицы e^{At} и e^{Jt} одновременно либо ограниченные, либо неограниченные и их нормы одновременно либо стремятся к нулю, либо не стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Поэтому можно исследовать лишь матрицу e^{Jt}.

Мы знаем, что $e^{Jt} = \operatorname{diag}\left[e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_m t}\right]$, где

$$e^{J_j t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ te^{\lambda_j t} & e^{\lambda_j t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{t^{n_j - 1} e^{\lambda_j t}}{(n_j - 1)!} & \dfrac{t^{n_j - 2} e^{\lambda_j t}}{(n_j - 2)!} & \dfrac{t^{n_j - 3} e^{\lambda_j t}}{(n_j - 3)!} & \dots & te^{\lambda_j t} & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m}.$$

1) Пусть λ_j $(j=\overline{1,m})$ такие, что $\operatorname{Re}\lambda_j<0$. Но тогда при любом $k=\overline{0,n_j-1}$ будет $\dfrac{t^k e^{\lambda_j t}}{k!}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$. Следовательно, $\left\|e^{J_j t}\right\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, а значит, и $\left\|e^{Jt}\right\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.

2) Пусть среди собственных чисел λ_1, λ_2, , λ_m матрицы A имеется хотя бы одно λ_j такое, что $\operatorname{Re}\lambda_j=0$. Это означает, что либо $\lambda_j=0$, либо $\lambda_j=i\beta$ $(\beta\neq 0)$. В обоих этих случаях $\left|e^{\lambda_j t}\right|=1$ для любого t и, следовательно, величина $\dfrac{t^k e^{\lambda_j t}}{k!}$ не стремится к нулю при $t\to+\infty$, причем эта величина будет ограниченной лишь тогда, когда $k=0$. Значит, в обоих этих случаях $\left\|e^{J_j t}\right\|$ не стремится к нулю при $t\to+\infty$, причем $\left\|e^{J_j t}\right\|$ будет ограниченной лишь тогда, когда J_j (в канонической форме J матрицы A) является клеткой Жордана лишь первого порядка.

3) Пусть, наконец, среди собственных чисел λ_1, λ_2, , λ_m матрицы A имеется хотя бы одно λ_j такое, что $\operatorname{Re}\lambda_j>0$. Но тогда при любом $k=\overline{0,n_j-1}$ величина $\dfrac{t^k e^{\lambda_j t}}{k!}$ будет неограниченной на промежутке $[t_0,+\infty)$. Значит, будет неограниченной на промежутке $[t_0,+\infty)$ и $\left\|e^{J_j t}\right\|$.

Из анализа случаев, когда $\left\|e^{J_j t}\right\|$ — ограниченная, неограниченная и когда $\left\|e^{J_j t}\right\|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, следуют утверждения I и II теоремы.

§4. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами

Пусть имеется линейная однородная система с периодическими коэффициентами

$$\frac{dY}{dt}=A(t)\cdot Y\,, \tag{1}$$

где $A(t)\in C(\mathbb{R})$ и такая, что $A(t+\omega)=A(t)$, $t\in(-\infty,+\infty)$. Ранее было показано, что система (1) преобразованием

$$Y = p(t) \cdot Z, \tag{2}$$

где $p(t)$ — не особая, ω-периодическая матрица, переводится в систему

$$\frac{dZ}{dt} = R \cdot Z. \tag{3}$$

В системе (3) $R = \frac{1}{\omega} \ln C$ — постоянная матрица; C — матрица монодромии системы (1).

Так как (3) — линейная однородная система с постоянными коэффициентами, то к ней применима теорема, доказанная в §3.

Пусть μ_j — собственные числа матрицы C (мультипликаторы системы (1)); λ_j — собственные числа матрицы R (характеристические показатели системы (1)). Так как $\lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln \mu_j = \frac{1}{\omega}\left[\ln\left|\mu_j\right| + i \arg \mu_j\right]$, то $\operatorname{Re} \lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln\left|\mu_j\right|$, и поэтому

$$\operatorname{Re} \lambda_j \begin{cases} < 0, & \text{если } \left|\mu_j\right| < 1, \\ = 0, & \text{если } \left|\mu_j\right| = 1, \\ > 0, & \text{если } \left|\mu_j\right| > 1. \end{cases}$$

Отсюда, принимая во внимание теорему, доказанную в §3, приходим к заключению, что справедливы утверждения:

I. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) устойчиво лишь тогда, когда $\left|\mu_j\right| \le 1$ для любого $j = \overline{1, m}$; при этом каждому μ_j, у которого $\left|\mu_j\right| = 1$, в канонической форме матрицы монодромии C должны соответствовать клетки Жордана лишь первого порядка.

II. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) асимптотически устойчиво лишь тогда, когда $\left|\mu_j\right| < 1$ для любого $j = \overline{1, m}$.

§5. Нелинейные системы. Устойчивость по первому приближению

Пусть имеется нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y). \tag{1}$$

Пусть $F(t,Y) \in C(G)$ и $\dfrac{\partial F(t,Y)}{\partial Y} \in C(G)$, где $(G) = (\tau, +\infty) \times (D)$, $(D) \subset \mathbf{R}^n$, $\tau \geq -\infty$.

В §1 было показано, что вопрос об устойчивости произвольного движения $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) заменой $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X$ сводится к вопросу об устойчивости движения $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы

$$\frac{dX}{dt} = \tilde{F}(t,X), \tag{2}$$

где $\tilde{F}(t,X) = F\big(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X\big) - F\big(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0)\big)$ и, следовательно, $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$.

Одним из основных методов исследования на устойчивость движения $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, нелинейной системы (2) является метод исследования на устойчивость по первому приближению. Этот метод заключается в том, что в окрестности точки $X \equiv 0$ систему (2) представляют в виде

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X + f(t,X), \tag{3}$$

где $A(t) = \dfrac{\partial \tilde{F}\big(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0)\big)}{\partial X}$ — матрица-функция размера $n \times n$, $f(t,X) \in C(\tilde{G})$, $\dfrac{\partial f(t,X)}{\partial X} \in C(\tilde{G})$, $f(t, 0) \equiv 0$ в области $(\tilde{G}) = (\tau, +\infty) \times (\tilde{D})$, $(\tilde{D}) \subset \mathbf{R}^n$; $\dfrac{\|f(t,X)\|}{\|X\|} \xrightarrow[\|X\| \to 0]{} 0$.

Если в (3) отбросить член $f(t,X)$, имеющий порядок выше первого относительно $\|X\|$ при $\|X\| \to 0$, то получим линейную систему $\dfrac{dX}{dt} = A(t) \cdot X$, называемую системой первого приближения для системы (3), а следовательно, и системы (2). Если матрица $A(t)$ оказывается постоянной, то система (3) называется стационарной в первом приближении.

Для стационарной в первом приближении системы (3) следующая теорема указывает условия применимости метода исследования по первому приближению.

Теорема. Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + f(t,X), \tag{$\tilde{3}$}$$

где A — постоянная матрица размера $n \times n$, $f(t,X)$ — вектор-функция, такая, что:

1) $f(t,X) \in C(\tilde{G})$, $f(t,X) \in \mathrm{Lip}_X(\tilde{G})$ — локально и $f(t,0) \equiv 0$ в области $(\tilde{G}) = \{t \in (\tau, +\infty), \|X\| < a\}$;

2) для любого числа $\alpha > 0$ существуют число T ($T > \tau$) и число h ($0 < h < a$), такие, что $\|f(t,X)\| < \alpha \cdot \|X\|$, для $t \geq T$ и $\|X\| \leq h$.

Тогда, если все собственные числа λ_j матрицы A имеют отрицательные вещественные части: $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$, то решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы ($\tilde{3}$) асимптотически устойчиво.

▶ По условию, $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ для любого $j = \overline{1,m}$. Но тогда существует число $\lambda > 0$, такое, что $\mathrm{Re}\,\lambda_j < -\lambda$, для любого $j = \overline{1,m}$. Рассмотрим матрицу e^{At}. Существует число k ($k \geq 1$), такое, что $\|e^{At}\| \leq k \cdot e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

Возьмем число $\alpha > 0$ любое, но такое, чтобы было

$$n \cdot k \cdot \alpha < \lambda. \tag{4}$$

По условию 2) теоремы, взятому числу $\alpha > 0$ отвечают числа T и h ($T > \tau$, $0 < h < a$), такие, что в $(\overline{G}') = \{t \geq T, \|X\| \leq h\}$ будет $\|f(t,X)\| < \alpha \cdot \|X\|$.

Покажем сначала, что решение $X \equiv 0$ системы ($\tilde{3}$) будет устойчивым. Для этого берем произвольное число t_0 ($t_0 > T$) и берем $\varepsilon > 0$ любое, но такое, чтобы было $0 < \varepsilon < h$. Затем берем ξ произвольное, но такое, что $\|\xi\| < h$.

Рассмотрим решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы ($\tilde{3}$). Имеем $\varphi(t, t_0, \xi)\big|_{t=t_0} = \xi$. Следовательно, $\|\varphi(t, t_0, \xi)\|\big|_{t=t_0} = \|\xi\| < h$. Но тогда существует промежуток $[t_0, \beta)$, такой, что $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < h$ для любого t из промежутка $[t_0, \beta)$. Убедимся, что взятому числу $\varepsilon > 0$ можно сопоставить число $\delta > 0$, такое, что для любого ξ, удовлетворяющего условию $\|\xi\| < \delta$, будет $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, \beta)$. Для этого наряду с системой ($\tilde{3}$) рассматриваем вспомогательную линейную систему

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + f\big(t, \varphi(t, t_0, \xi)\big), \tag{$\tilde{\tilde{3}}$}$$

где $f\big(t, \varphi(t, t_0, \xi)\big) = q(t)$ — вектор-функция, зависящая только от t. Нетрудно понять, что $q(t) \in C\big([t_0, \beta)\big)$ и что система ($\tilde{\tilde{3}}$) определена в области $(G_1) = \big\{t_0 \le t < \beta,\ \|X\| < +\infty\big\}$. В области (G_1) построим общее решение системы ($\tilde{\tilde{3}}$). Оно, как мы знаем, будет таким:

$$X = e^{A(t-t_0)} \cdot \left[C + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s-t_0)} \cdot f\big(s, \varphi(s, t_0, \xi)\big)ds\right].$$

Выделим из него решение, удовлетворяющее начальному условию $X\big|_{t=t_0} = \xi$. Получим

$$X = e^{A(t-t_0)} \cdot \left[\xi + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s-t_0)} \cdot f\big(s, \varphi(s, t_0, \xi)\big)ds\right]. \tag{5}$$

Заметим, что решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы ($\tilde{3}$) также является решением системы ($\tilde{\tilde{3}}$), удовлетворяющим начальному условию $X\big|_{t=t_0} = \xi$. Следовательно, решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ совпадает с решением (5), т. е.

$$\varphi(t, t_0, \xi) = e^{A(t-t_0)} \cdot \left[\xi + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s-t_0)} \cdot f\big(s, \varphi(s, t_0, \xi)\big)ds\right]. \tag{6}$$

Произведем оценку решения $X = \varphi(t, t_0, \xi)$. Из (6) имеем

$$\|\varphi(t, t_0, \xi)\| = \left\|e^{A(t-t_0)} \cdot \xi\right\| + \left\|e^{A(t-t_0)} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-A(s-t_0)} \cdot f\big(s, \varphi(s, t_0, \xi)\big)ds\right\| \le$$

$$\le n\left\|e^{A(t-t_0)}\right\| \cdot \|\xi\| + \left\|\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \cdot f\big(s, \varphi(s, t_0, \xi)\big)ds\right\| \le$$

$$\le n\left\|e^{A(t-t_0)}\right\|\cdot\|\xi\|+\int_{t_0}^{t} n\left\|e^{A(t-s)}\right\|\cdot\left\|f(s,\varphi(s,t_0,\xi))\right\|ds.$$

У нас $\left\|e^{A(t-t_0)}\right\|\le ke^{-\lambda(t-t_0)}$; $\left\|e^{A(t-s)}\right\|\le ke^{-\lambda(t-s)}$, при $t\ge t_0>T$, и $t_0\le s\le t$; $\left\|f(s,\varphi(s,t_0,\xi))\right\|\le\alpha\cdot\left\|\varphi(s,t_0,\xi)\right\|$, ибо $s>T$ и $\left\|\varphi(s,t_0,\xi)\right\|<h$ для $s\in[t_0,\beta)$. Поэтому

$$\left\|\varphi(t,t_0,\xi)\right\|\le nk\|\xi\|e^{-\lambda(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t} nke^{-\lambda(t-s)}\cdot\alpha\cdot\left\|\varphi(s,t_0,\xi)\right\|ds.$$

Умножив обе части последнего равенства на $e^{\lambda(t-t_0)}$, получим

$$e^{\lambda(t-t_0)}\cdot\left\|\varphi(t,t_0,\xi)\right\|\le nk\|\xi\|+nk\alpha\cdot\int_{t_0}^{t} e^{\lambda(s-t_0)}\cdot\left\|\varphi(s,t_0,\xi)\right\|ds.$$

Заметим, что $\tilde{\lambda}=nk\cdot\|\xi\|=\text{const}>0$; $\mu=nk\alpha=\text{const}>0$; $e^{\lambda(t-t_0)}\cdot\left\|\varphi(t,t_0,\xi)\right\|=u(t)$ — положительная непрерывная функция. Видим, что функция $u(t)$ на промежутке $[t_0,\beta)$ удовлетворяет условиям леммы Гронуола. Поэтому будем иметь $u(t)\le\tilde{\lambda}e^{\mu(t-t_0)}$, $t\in[t_0,\beta)$, или

$$\left\|\varphi(t,t_0,\xi)\right\|e^{\lambda(t-t_0)}\le nk\|\xi\|\cdot e^{nk\alpha(t-t_0)};$$

отсюда $\left\|\varphi(t,t_0,\xi)\right\|\le nk\|\xi\|\cdot e^{(nk\alpha-\lambda)(t-t_0)}$, $t\in[t_0,\beta)$. Так как $t-t_0\ge 0$, $t\in[t_0,\beta)$; $nk\alpha-\lambda<0$ (см. (4)), то $e^{(nk\alpha-\lambda)(t-t_0)}\le 1$ и, следовательно, $\left\|\varphi(t,t_0,\xi)\right\|\le nk\|\xi\|$. Но тогда $\left\|\varphi(t,t_0,\xi)\right\|<\varepsilon$, $t\in[t_0,\beta)$, если брать ξ удовлетворяющим условию $\|\xi\|<\delta$, где $\delta=\dfrac{\varepsilon}{nk}$.

Итак, мы убедились, что любому $\varepsilon>0$ можно поставить в соответствие число $\delta>0$ $\left(\delta=\dfrac{\varepsilon}{nk}\right)$, такое, для любого ξ, удовлетворяющего условию $\|\xi\|<\delta$, будет $\left\|\varphi(t,t_0,\xi)\right\|<\varepsilon$, если $t\in[t_0,\beta)$.

Пусть вектор ξ — любой, но такой, что $\|\xi\| < \delta$ $\left(\delta = \dfrac{\varepsilon}{nk}\right)$. Пусть $[t_0, \beta)$ — максимальный промежуток, на котором решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы $(\widetilde{3})$ удовлетворяет неравенству $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < h$. Покажем, что $\beta = +\infty$.

Рассуждаем от противного, а именно, предполагаем, что $\beta < +\infty$. Но тогда решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$, $t \in [t_0, \beta)$, обладает свойством: точки $(t, \varphi(t, t_0, \xi))$, $t \in [t_0, \beta)$, оказываются принадлежащими ограниченной замкнутой области $(\overline{G}^*)$, содержащейся в области $(\widetilde{G})$ $((\overline{G}^*) \subset (\widetilde{G}))$. Значит, решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$, $t \in [t_0, \beta)$, продолжимо вправо, а следовательно, существует $\lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t, t_0, \xi) \underset{\text{обозн.}}{=} \xi_1$, причем точка $(\beta, \xi_1) \in (\overline{G}^*) \subset (\widetilde{G})$.

Рассмотрим вектор $\varphi(\beta, t_0, \xi) = \xi_1$. Из предположения, что промежуток $[t_0, \beta)$ — максимальный вправо, на котором решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ удовлетворяет неравенству $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < h$, следует, что

$$\|\xi_1\| = h \tag{*}$$

(иначе промежуток $[t_0, \beta)$ не был бы максимальным вправо в указанном выше смысле). Но, с другой стороны, из неравенства

$$\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon \tag{7}$$

при $t \to \beta - 0$ находим

$$\|\varphi(\beta, t_0, \xi)\| = \|\xi_1\| \le \varepsilon < h. \tag{**}$$

Сопоставляя соотношения (*) и (**), видим, что пришли к противоречию. Значит, наше предположение, что $\beta < +\infty$, неверно, и, следовательно, $\beta = +\infty$.

Таким образом, $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon$ для $t \in [t_0, +\infty)$, если только $\|\xi\| < \delta$, где $\delta = \dfrac{\varepsilon}{nk}$. Последнее означает, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\widetilde{3})$ устойчиво.

Покажем теперь, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\widetilde{3})$ асимптотически устойчиво.

Для любого ξ, удовлетворяющего условию $\|\xi\| < h$, и для всех $t \in [t_0, +\infty)$ была получена следующая оценка решения $X = \varphi(t, t_0, \xi)$, $t \in [t_0, \beta)$, системы ($\widetilde{3}$):

$$\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \le nk\|\xi\| \cdot e^{(nk\alpha-\lambda)(t-t_0)}. \qquad (8)$$

Так как $\delta = \dfrac{\varepsilon}{nk} < \varepsilon$, а $\varepsilon < h$, и так как $\beta = +\infty$, то оценка (8) будет верна для любого ξ, удовлетворяющего условию $\|\xi\| < \delta$, и для всех $t \in [t_0, +\infty)$. Принимая во внимание, что $(nk\alpha - \lambda)(t - t_0) < 0$ для $t \in [t_0, +\infty)$, получаем из (8): $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Следовательно, решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы ($\widetilde{3}$) асимптотически устойчиво. ◀

Замечание. Доказанная теорема дает весьма удобный признак асимптотической устойчивости решений широкого класса систем дифференциальных уравнений и очень часто применяется в практических задачах.

Изложенное в настоящей главе следует рассматривать лишь как скромное введение в изучение начал теории устойчивости движения, созданной великим русским ученым Александром Михайловичем Ляпуновым и изложенной им в сочинении «Общая теория устойчивости движения». Особенная значимость этой теории состоит в том, что мы, часто не умея интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, тем не менее можем делать заключения об устойчивости или неустойчивости движения, определяемого этой системой.

§6. Примеры и задачи к главе 8

Задача 1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову выяснить, устойчивы ли при $t \ge 0$ решения уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -y + t + 1, \quad y\big|_{t=0} = y_0.$$

Решение. Решая заданное уравнение, находим, что всякое его решение выражается формулой $y(t) = y_0 e^{-t} + t$. Возьмем любые два решения этого уравнения, удовлетворяющие соответственно условиям: $\tilde{y}\big|_{t=0} = \tilde{y}_0$, $\tilde{\tilde{y}}\big|_{t=0} = \tilde{\tilde{y}}_0$. Это будут: $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{-t} + t$ и $\tilde{\tilde{y}}(t) = \tilde{\tilde{y}}_0 e^{-t} + t$. А тогда

$$\tilde{\tilde{y}}(t) - \tilde{y}(t) = (\tilde{\tilde{y}}_0 - \tilde{y}_0)\, e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \left|\tilde{\tilde{y}}(t) - \tilde{y}(t)\right| = \left|\tilde{\tilde{y}}_0 - \tilde{y}_0\right| e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Вывод: Все решения заданного уравнения асимптотически устойчивы при $t \geq 0$.

Задача 2. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову исследовать на устойчивость при $t \geq 1$ решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a}{t} y, \quad y\big|_{t=1} = 0.$$

Решение. Решая заданное уравнение, находим, что всякое его решение, удовлетворяющее условию $y\big|_{t=1} = y_0$, выражается формулой $y(t) = y_0 t^a$. Следовательно, решение, удовлетворяющее условию $y\big|_{t=1} = 0$, есть $\tilde{y}(t) \equiv 0$, $t \geq 1$. А тогда

$$y(t) - \tilde{y}(t) = y_0 t^a - 0 = y_0 t^a \quad \Rightarrow \quad |y(t) - \tilde{y}(t)| = |y_0| \cdot t^a.$$

Видим, что:

1) если $a = 0$, то $|y(t) - \tilde{y}(t)| = |y_0|$;

2) если $a < 0$, то $|y(t) - \tilde{y}(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$;

3) если $a > 0$, то $|y(t) - \tilde{y}(t)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Вывод. Решение $\tilde{y}(t) \equiv 0$, $t \geq 1$:

α) устойчиво при $a \leq 0$;

β) асимптотически устойчиво при $a < 0$;

γ) неустойчиво при $a > 0$.

Задача 3. Исследовать на устойчивость решения системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Решение. Заданная система есть система с постоянными коэффициентами. Поэтому вопрос об устойчивости решений этой системы определяется собственными числами ее матрицы A. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 5 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3 - 9\lambda + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 8) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}.$$

Видим, что $\operatorname{Re}\lambda_1 = 1 > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 = \operatorname{Re}\dfrac{\sqrt{33}-1}{2} > 0$. Выполнение даже одного из этих двух соотношений означает, что решения заданной системы неустойчивы.

Задача 4. Исследовать на устойчивость решения системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y \text{, где } A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ -15 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Решение. Заданная система есть система с постоянными коэффициентами. Следовательно, вопрос об устойчивости решений этой системы определяется собственными числами ее матрицы A. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 2 & 1 \\ -5 & 1-\lambda & 1 \\ -15 & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + 1)^3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1.$$

Видим, что $\operatorname{Re}\lambda_k = -1 < 0$, $k = 1, 2, 3$. Значит, решения заданной системы асимптотически устойчивы.

Задача 5. Исследовать на устойчивость решения системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y \text{, где } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Решение. Заданная система есть система с постоянными коэффициентами. Следовательно, вопрос об устойчивости решений этой системы определяется собственными числами ее матрицы A. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -6 & 2-\lambda & 6 \\ 4 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2(\lambda+1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 0.$$

Находим жорданову форму J матрицы A. Она будет такой:

$$J = \left(\begin{array}{c:cc} -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Видим, что $\operatorname{Re}\lambda_2 = \operatorname{Re}\lambda_3 = 0$ и что собственному числу 0 матрицы A соответствует клетка Жордана второго порядка. Значит, решения заданной системы неустойчивы.

Задача 6. Исследовать на устойчивость решения системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 8 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Решение. Заданная система есть система с постоянными коэффициентами. Следовательно, вопрос об устойчивости решений этой системы определяется собственными числами ее матрицы A. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & 8 \\ 2 & -3-\lambda & 6 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2+i, \ \lambda_3 = 2-i.$$

Видим, что $\operatorname{Re}\lambda_1 = 1 > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 = 2 > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_3 = 2 > 0$. Выполнение даже одного из этих трех соотношений означает, что решения заданной системы неустойчивы.

Задача 7. Найти все вещественные значения параметров α и β, при которых решения системы уравнений

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & -1 & \alpha \\ -\beta & -\alpha & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

асимптотически устойчивы.

Решение. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \alpha & \beta \\ -\alpha & -1-\lambda & \alpha \\ -\beta & -\alpha & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda+1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \beta^2 + 2\alpha^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1 + i\sqrt{\beta^2 + 2\alpha^2}, \quad \lambda_3 = -1 - i\sqrt{\beta^2 + 2\alpha^2}.$$

Видим, что $\operatorname{Re}\lambda_k = -1\ (< 0)$, $k = 1, 2, 3$ при любых вещественных α и β. Следовательно, решения заданной системы асимптотически устойчивы при любых вещественных значениях параметров α и β.

Задача 8. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 - \ln(1+y_2) + \sin y_1, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = e^{y_1} + \sin(y_1 + y_2) - \cos^2 y_2. \end{cases}$$

Решение. Линеаризуем заданную систему уравнений в окрестности точки $(0, 0)$. Имеем

$$f_1 = 2y_1 - \ln(1+y_2) + \sin y_1 =$$

$$= 2y_1 - \left(y_2 - \frac{y_2^2}{2} + \frac{y_2^3}{3} - \ldots\right) + \left(y_1 - \frac{y_1^3}{3!} + \frac{y_1^5}{5!} - \ldots\right);$$

$$f_2 = e^{y_1} + \sin(y_1 + y_2) - \cos^2 y_2 = e^{y_1} + \sin(y_1 + y_2) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f_2 = 1 + \frac{y_1}{1!} + \frac{y_1^2}{2!} + \ldots + \left((y_1 + y_2) - \frac{(y_1 + y_2)^3}{3!} + \ldots \right) -$$

$$- \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2y_2)^2}{2!} + \ldots \right).$$

Составляем систему уравнений первого приближения. Будем иметь

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 3y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_1 + y_2. \end{cases}$$

Таким образом, получили систему $\dfrac{dY}{dt} = A \cdot Y$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 + i, \ \lambda_2 = 2 - i.$$

Имеем: $\operatorname{Re}\lambda_1 = 2 > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 = 2 > 0$. Выполнение даже одного из этих двух неравенств означает, что решение $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ заданной системы неустойчиво.

Задача 9. Исследовать на устойчивость все положения равновесия системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2y_1 + y_2 + y_1^3, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 - 2y_2 + 3y_1^5. \end{cases}$$

Решение. Положения равновесия данной системы определяются из системы

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_1^3 = 0, \\ -y_1 - 2y_2 + 3y_1^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 1) \begin{matrix} y_1 = 0, \\ y_2 = 0; \end{matrix} \quad 2) \begin{matrix} y_1 = 1, \\ y_2 = 1; \end{matrix} \quad 3) \begin{matrix} y_1 = -1, \\ y_2 = -1. \end{matrix}$$

Получили три положения равновесия. Исследуем вопрос об устойчивости каждого из них.

I. Составляем систему уравнений первого приближения, соответствующую положению равновесия $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Это будет система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 - 2y_2, \end{cases} \text{т. е. } \frac{dY}{dt} = A \cdot Y,$$

где $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$.

Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+2)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -2 + i, \ \lambda_2 = -2 - i.$$

Имеем $\operatorname{Re}\lambda_1 = -2$ (< 0) и $\operatorname{Re}\lambda_2 = -2$ (< 0). Значит, положение равновесия $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ асимптотически устойчиво.

II. Составляем систему уравнений первого приближения, соответствующую положению равновесия, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$. Для этого представим правые части заданной системы уравнений по формуле Тейлора в окрестности положения равновесия $y_1 = 1$, $y_2 = 1$. Будем иметь

$$f_1 = -2y_1 + y_2 + y_1^3 = (y_1 - 1) + (y_2 - 1) + \ldots,$$
$$f_2 = -y_1 - 2y_2 + 3y_1^5 = 14(y_1 - 1) - 2(y_2 - 1) + \ldots.$$

Значит, система уравнений первого приближения, соответствующая положению равновесия $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, будет такой:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = (y_1 - 1) + (y_2 - 1), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 14(y_1 - 1) - 2(y_2 - 1). \end{cases}$$

Сделаем замену, положив $u = y_1 - 1$, $v = y_2 - 1$. Относительно функций u и v полученная система первого приближения будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u + v, \\ \dfrac{dv}{dt} = 14u - 2v. \end{cases}$$

Матрица A этой системы такая: $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 14 & -2\end{pmatrix}$. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 14 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2+\lambda-16=0 \quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ λ_1 и λ_2 — вещественные и имеют разные знаки. Следовательно, положение равновесия $y_1=1$, $y_2=1$ заданной системы неустойчиво.

III. Составляем систему уравнений первого приближения, соответствующую положению равновесия $y_1=-1$, $y_2=-1$.

Для этого представим правые части заданной системы по формуле Тейлора в окрестности положения равновесия $y_1=-1$, $y_2=-1$. Будем иметь

$$f_1=-2y_1+y_2+y_1^3=(y_1+1)+(y_2+1)+\ldots,$$
$$f_2=-y_1-2y_2+3y_1^5=14(y_1+1)-2(y_2+1)+\ldots.$$

Значит, система уравнений первого приближения, соответствующая положению равновесия $y_1=-1$, $y_2=-1$, будет такой:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=(y_1+1)+(y_2+1),\\[2mm] \dfrac{dy_2}{dt}=14(y_1+1)-2(y_2+1).\end{cases}$$

Сделаем замену, положив $u=y_1+1$, $v=y_2+1$. Относительно функций u и v полученная система первого приближения будет иметь вид

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=u+v,\\[2mm] \dfrac{dv}{dt}=14u-2v.\end{cases}$$

Матрица A этой системы такая: $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 14 & -2\end{pmatrix}$. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 14 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2+\lambda-16=0 \quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ корни λ_1 и λ_2 — вещественные и имеют разные знаки. Следовательно, положение равновесия заданной системы $y_1=-1$, $y_2=-1$ неустойчиво.

Задача 10. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \operatorname{tg}(y_3 - y_2) - 2y_1, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \sqrt{9 + 12y_1} - 3e^{y_2}, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = -3y_2. \end{cases}$$

Решение. Составим систему уравнений первого приближения, соответствующую решению $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. Для этого представим правые части заданной системы с помощью формулы Тейлора в окрестности точки $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. Будем иметь

$$\begin{aligned} &f_1 = \operatorname{tg}(y_3 - y_2) - 2y_1 = -2y_1 - y_2 + y_3 + \ldots, \\ &f_2 = \sqrt{9 + 12y_1} - 3e^{y_2} = 3\left(1 + \frac{2}{3}y_1 + \ldots\right) - 3(1 + y_2 + \ldots), \\ &f_3 = -3y_2. \end{aligned}$$

Система уравнений первого приближения в окрестности точки $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ будет такой:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_1 - 3y_2, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = -3y_2 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1 + i, \quad \lambda_3 = -1 - i.$$

Видим, что $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ для $k = 1, 2, 3$.

Вывод. Нулевое решение заданной системы асимптотически устойчиво.

Литература

Основная

1. *Арнольд, В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. М. : МНЦМО, 2012.

2. *Бибиков, Ю. Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Ю. Н. Бибиков. — 2-е изд., перераб. — СПб. : Изд-во СПбГУ, 2005.

3. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости : учеб. пособие / Б. П. Демидович. — 3-е изд. — СПб. : Лань, 2008.

4. *Матвеев, Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Высшая школа, 1967.

5. *Петровский, И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М. : Едиториал УРСС, 2003.

6. *Понтрягин, Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. — 6-е изд. — Ижевск : РХД, 2001.

7. *Самойленко, А. М.* Дифференциальные уравнения : примеры и задачи : учеб. пособие / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. — 2-е изд., перераб. — М. : Высшая школа, 1989.

8. *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики. В 5 т. Т. 2, 3 (ч. 2) / В. И. Смирнов. — М. : Наука, 1974.

9. *Степанов, В. В.* Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — 11-е изд. — М. : ЛКИ, 2016.

10. *Федорюк, М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник для вузов / М. В. Федорюк. — 3-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2003.

11. *Филиппов, А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. — Ижевск : РХД, 2005.

12. *Эльсгольц, Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. — М. : Книга по требованию, 2012.

Дополнительная

1. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа. В 2 ч. Ч. 1 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : Физматлит, 2005.

2. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа : учебник для бакалавров. В 3 т. Т. 1 / Л. Д. Кудрявцев — 6-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2014.

3. *Толстов, Г. П.* Курс математического анализа. В 2 т. Т. 1 / Г. П. Толстов. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954.

4. *Фаддеев, Д. К.* Лекции по алгебре : учеб. пособие / Д. К. Фаддеев. — 5-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2007.

5. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3 / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Физматлит, 2001.

Учебное издание

Аксенов Анатолий Петрович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЧАСТЬ 2

Учебник для вузов

Формат 60×90 $^1/_{16}$.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 22,44

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru