



Е. М. Гершензон
Н. Н. Малов
А. Н. Мансуров

МЕХАНИКА



ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Е. М. ГЕРШЕНЗОН, Н. Н. МАЛОВ, А. Н. МАНСУРОВ

МЕХАНИКА

Рекомендовано

Учебно-методическим объединением по специальностям педагогического образования в качестве учебного пособия для студентов педагогических вузов по специальности 032200 – Физика

Москва

АКАДЕМІА
2001

УДК 531/534 (075.8)
ББК 22.2я73
Г 37

Рецензенты:

доктор педагогических наук, академик РАО *Ю. И. Дик*;
кафедра физики МГОПУ (зав. кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор *Л. Ф. Уткина*)

Рукопись предоставлена литературно-педагогическим агентством «Кафедра-М»

Гершензон Е.М. и др.

Г 37 **Механика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / Е. М. Гершензон, Н. Н. Малов, А. Н. Мансуров. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 384 с.**
ISBN 5-7695-0349-1

В учебном пособии изложены вопросы кинематики и динамики материальной точки и твердого тела, движения в неинерциальных системах отсчета; элементы специальной теории относительности; рассмотрены колебания и волны, элементы акустики, гидродинамики, всемирное тяготение.

УДК 531/534 (075.8)
ББК 22.2я73

ISBN 5-7695-0349-1

© Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н., 2001
© Издательский центр «Академия», 2001

Предисловие

Современная физика – одна из фундаментальных наук, определяющая развитие естествознания и в значительной степени научно-технический прогресс. В педагогических вузах она изучается поэтапно: в курсе общей и экспериментальной физики, курсе основ теоретической физики, курсах прикладных дисциплин электротехники и радиотехники, специальных курсах.

За последние десять лет курс общей и экспериментальной физики для педагогических вузов претерпел существенные изменения. В связи с введением многоуровневого высшего профессионального образования значительно возросла его роль в получении будущими специалистами фундаментальной предметной подготовки. Усилилась профессиональная направленность курса. Формирование физической картины мира стало одной из базовых задач курса. С учетом последних достижений физики как науки изменилось содержание многих разделов курса. Особенно это относится к изложению вопросов физики элементарных частиц, физики конденсированных сред, лазерной оптики, квантовой физики, физической кинетики и других.

При написании пособий по курсу общей и экспериментальной физики авторы постарались учесть особенности современного высшего профессионального педагогического образования. Комплект пособий состоит из четырех книг: «Механика», «Электродинамика», «Оптика и атомная физика», «Молекулярная физика». Их содержание и структура соответствуют программе курса и требованиям ГОС ВПО нового поколения, в частности изложение учебного материала предусматривает изучение основных разделов курса в такой последовательности: «Механика», «Электродинамика», «Оптика и атомная физика», «Молекулярная физика». Однако изданные отдельно книги могут быть использованы и при другой последовательности изучения курса, когда молекулярная физика изучается вслед за механикой.

Отличительной особенностью учебных пособий по курсу общей и экспериментальной физики является возможность их использования в процессе преподавания в комплекте со «Сборником вопросов и задач по общей физике» и «Лабораторным практикумом по общей физике», подготовленными кафедрой общей и экспериментальной физики МПГУ, что существенно повышает их методическую эффективность.

К сожалению, это издание осуществляется без ушедшего из жизни профессора Н. Н. Малова, светлая память о котором сохранится у многих поколений подготовленных им специалистов. Большую роль в построении курса сыграли идеи профессора В. С. Эткина и помощь профессора Н. Г. Птициной, которых тоже уже нет среди нас.

При подготовке четырехтомника к новому изданию значительная работа была проделана профессором кафедры общей и экспериментальной физики А. Н. Мансуровым, ставшим полноправным соавтором всех томов. Авторы выражают глубокую признательность профессору Н. В. Соиной за внимательное прочтение рукописи и ряд ценных замечаний.

Проф. *Е. М. Гершензон*

Введение

Слово «физика» в переводе с греческого языка означает «природа». Физика как наука изучает простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности окружающего нас мира. В зависимости от области изучаемых явлений и применяемых методов исследования физика делится на отдельные разделы, число которых непрерывно увеличивается по мере расширения области физических исследований. В качестве примеров разделов физики можно назвать механику, электродинамику, оптику, специальную теорию относительности, квантовую физику, атомную физику, ядерную физику, молекулярную физику, термодинамику, содержание которых составляет предмет изучения в «Курсе общей физики».

Методом физических исследований является научный метод, основы которого были заложены Беконем, Декартом и Гегелем. Основателем научного метода в физике следует считать Галилея, который применил его к изучению механических явлений.

Изучение физических явлений и процессов с помощью научного метода можно представить в виде следующих этапов: наблюдение физических явлений; выявление эмпирических закономерностей; постановка поисковых экспериментов; обобщение результатов опытов; выработка понятий, моделей, законов; разработка теорий, гипотез, фундаментальных законов; постановка контрольных экспериментов, создание физических приборов, разработка новых методов исследования; использование новых экспериментальных возможностей для наблюдения физических явлений, постановки поисковых экспериментов.

Из приведенного перечня видно, что научный метод характеризуется широким применением эксперимента для исследования природных явлений, поэтому физика является экспериментальной наукой. Она идет от простого наблюдения явлений к постановке целенаправленных опытов, позволяющих получить качественное представление о процессах, происходящих в природе. Далее, по мере совершенствования методов исследования, открывается возможность измерений тех или иных физических величин и формулировки количественных физических законов. Для этой цели привлекаются математические методы, позволяющие обобщить результаты исследований в сжатой форме. Физические законы в силу их экспериментального происхождения имеют ограниченную область применения и позволяют предсказать ход событий только в определенных усло-

виях. Проверка этих предсказаний дает возможность установить границы применимости физических законов в пределах точности проводимых измерений. Именно в этом смысле физику называют точной наукой: она не обладает абсолютно точными сведениями о природе, но может оценивать точность и надежность своих предсказаний.

Этап разработки физических теорий, гипотез, формулировки фундаментальных закономерностей сопровождается применением соответствующего математического аппарата, созданием математических моделей, адекватных физической реальности. Характерные особенности экспериментального и теоретического исследования со временем привели к специализации труда физиков. Возникло разделение на физиков-экспериментаторов и физиков-теоретиков. Разделы физики, где основное внимание уделяется технике и методике проведения физического эксперимента, называют экспериментальной физикой в отличие от теоретической физики, обобщающей результаты экспериментов, разрабатывающей физические теории, законы, способные описать широкий круг физических явлений, предсказать поведение физических систем и результаты планируемых экспериментов.

История развития физики характеризуется чрезвычайно высокой эффективностью ее научных результатов. Причина подобной результативности объясняется наличием обратной связи, присущей научному методу, что обеспечивает непрерывное развитие научных исследований.

Не нужно, однако, думать, что процесс научного познания происходит точно по приведенной выше схеме. Такое сложное явление, как научное отражение действительности, не может быть сведено к какому-то упрощенному процессу, но основные этапы научного познания эта схема отражает достаточно точно.

Физика характеризуется несколькими периодами в своем историческом развитии, тесно связанными с развитием человеческого общества и культуры.

Начиная с V в. до н. э. происходит расцвет древнегреческой, а затем древнеримской цивилизаций, ознаменовавшихся высоким уровнем развития философии, литературы, изобразительного искусства, архитектуры, техники, военного искусства. В этот период идет накопление первоначальных эмпирических сведений об окружающем мире, выдвигается ряд идей, которые, как показало дальнейшее развитие событий, намного опередили свое время.

Так, например, была выдвинута идея о четырех сущностях мироздания (Эмпедокл, Аристотель), впервые обсуждаются идеи дискретности строения вещества, его атомного строения (Демокрит, Эпикур, Лукреций), разрабатываются основы геометрии (Евклид,

Пифагор), создается геоцентрическая модель мира (Аристотель, Гиппарх, Птолемей), разрабатываются идеи о причинах движения (Аристотель, Демокрит), на основе теории равновесия создаются простейшие механизмы и машины, значительно расширившие физические возможности человека (Аристотель, Архимед); в это время были открыты простейшие электрические и магнитные явления (Фалес Милетский). Кажется удивительным, что основные идеи античности не только пережили века, но и получили свое развитие благодаря успехам современной науки.

После распада Римской империи в Европе наблюдается упадок. В области идей царят схоластика и теология. В этот период научное лидерство переместилось на Ближний и Средний Восток, чему способствует создание в VII в. единого арабского государства – Халифата. На протяжении более чем трех веков здесь интенсивно развиваются математика, химия, медицина, физика, астрономия. После распада Халифата в X в. центр научных исследований снова перемещается в Европу, чему в немалой степени способствовал переход общества к новому стилю мышления.

Период исторического развития в странах Европы в XV – XVI вв. получил название Возрождения. Эта эпоха характеризуется возрождением античных ценностей, утверждением гуманизма, отрицанием схоластики, верой в созидательные возможности человеческого разума. В этих условиях идея гелиоцентризма, высказанная еще древнегреческим мыслителем Аристархом Самосским, получила развитие в работах польского астронома Н. Коперника. Настоящим прорывом в интеллектуальной сфере того времени следует считать разработанную Коперником гелиоцентрическую систему строения мира. Новая система взглядов на устройство мира, признанная общественностью, дала мощный импульс развитию всего естествознания.

В XVI – XVII вв. благодаря успехам наблюдательной астрономии (Т. Браге, И. Кеплер) эффективным методом исследования окружающего мира становится экспериментальный метод, получивший свое развитие прежде всего в работах Г. Галилея. Именно Галилей стоит у истоков современной науки. Работы Г. Галилея и И. Ньютона заложили фундамент научно обоснованной теории механического движения, во многом отрицавшей аристотелевские взгляды на причины движения и по-новому его описывавшей. Классическая теория механики Галилея – Ньютона на многие десятилетия определила основные направления развития физики как науки. Дальнейшее развитие механики связано с именами Лагранжа, Лапласа, Даламбера, Эйлера.

Экспериментальный метод, использованный Галилеем и Ньютоном для обоснования основных законов механики, дал убедитель-

ные результаты при открытии других закономерностей, в частности законов сохранения энергии, массы, импульса, электрического заряда (Ломоносов, Майер, Джоуль, Гельмгольц, Франклин).

В XVII–XVIII вв. кроме исследований механических явлений идет интенсивное исследование тепловых, оптических, электрических и магнитных явлений, что обусловлено не только научными, но и производственными потребностями общества. Центром научных исследований становятся европейские страны с бурно развивающимся капитализмом: Англия, Германия, Франция.

К середине XVIII в. окончательно сложилась механика как научная физическая теория, а к концу XIX в. оформилась классическая теория электромагнитного поля, в создании и становлении которой принимали участие такие ученые, как Кулон, Ампер, Эрстед, Ом, Фарадей, Максвелл, Герц, Лоренц и другие.

Начало XX в. совпадает с революционными преобразованиями в физике, созданием новой физики, основными идеями которой являются релятивизм, дискретность, квантование, вероятностное описание физических событий. Идеи Планка, Эйнштейна, Минковского, Бора, Гейзенберга, Шредингера, Дирака, Борна позволили создать совершенно новую физическую картину окружающего мира, основанную на квантово-полевых представлениях.

Благодаря успехам новой физики стало возможным наполнить конкретным физическим содержанием античную идею об атомном строении вещества. Усилиями таких исследователей, как Дж. Дж. Томсон, Беккерель, Резерфорд, П. Кюри, М. Склодовская-Кюри, Чедвик, Ферми было изучено строение атома, был понят физический смысл фундаментального закона природы о периодичности свойств химических элементов, открытого Д. И. Менделеевым; перестала быть загадкой природа оптических спектров.

Фундаментальные исследования в области физики конца XIX, начала XX в. привели к разработке новых методов экспериментальных исследований природы, созданию современных технологий получения и преобразования вещества, энергии, информации. Электрогенератор, электродвигатель, трансформатор, лампа накаливания, телефон, фонограф, телеграф, радио, телевидение, вакуумные приборы, воздушный шар, дирижабль, самолет, ракета – вот неполный перечень технических устройств, оказавших существенное влияние на развитие цивилизации.

Середина XX в. ознаменовалась новым прорывом в физике. Передовые рубежи физических исследований лежат в области физики высоких энергий. Физики строят гигантские ускорители для получения высокоэнергичных частиц, штурмуют горные вершины для изучения свойств космического излучения. Центр физических ис-

следований перемещается в США и СССР. Благодаря интенсивным исследованиям микромира обнаруживаются более глубокие уровни структурной организации материи. Создается квантовая электродинамика (Фейнман, Швингер, Томонаго). Разрабатывается стандартная модель, в основе которой лежат представления о кварк-лептонной структуре вещества и о четырех фундаментальных взаимодействиях в природе (Гелл-Ман, Цвейг).

В конце 60-х годов создается объединенная теория слабых и электромагнитных взаимодействий (Вайнберг, Глэшоу, Салам), давшая мощный толчок развитию единой теории фундаментальных взаимодействий. В 80-х годах проясняется квантовая структура электрослабых взаимодействий в физике элементарных частиц (Вельтман, Хоофт).

Во второй половине XX в. происходит новая революция в оптике, вызванная созданием квантовых оптических генераторов, лазеров (Басов, Прохоров, Таунс); создаются промышленные атомные реакторы для получения дешевой электроэнергии (Ферми, Курчатов, Александров); физики вплотную подходят к решению проблемы управляемой термоядерной реакции (Арцимович, Сахаров, Тамм, Кадомцев). В 1957 г. становится понятной природа явления сверхпроводимости (Бардин, Купер, Шриффер, Боголюбов), открытого голландским физиком Камерлинг-Оннесом еще в 1911 г., а в 1986 г. обнаружена высокотемпературная сверхпроводимость (Мюллер, Беднордс), предсказанная ранее (Гинзбург).

Конец XX в. ознаменовался бурным вторжением в повседневную жизнь человека информационных технологий, основанных на достижениях квантовой физики, физики твердого тела. Создание современной компьютерной техники, всемирной информационной сети «Интернет» кардинально изменило возможности человека в получении, обработке и использовании информации.

Достижения физики как фундаментальной науки позволяют рассматривать ее в качестве основы других естественных наук, например, химии, биологии, астрономии.

Успехи квантовой механики позволили установить природу химической связи и понять причины многих химических реакций и процессов.

Разгадка структуры молекулы ДНК, осуществленная благодаря применению физических методов рентгеноструктурного анализа, позволила биологам понять причины наследственности земных организмов, а развитие физики неравновесных процессов вплотную подвело к пониманию причин зарождения жизни на Земле.

Физика существенно повлияла на развитие астрономии. Превращение астрономии из оптической во всеволновую, возникновение

нейтринной астрономии во многом связано с успехами физики. Открытие реликтового излучения, нейтронных звезд-пульсаров, квазаров, черных дыр, гамма-всплесков стало возможным благодаря использованию физических методов исследования в астрономии. Изучение планет Солнечной системы с помощью космических аппаратов и зондов существенно изменило наши представления о физических условиях на поверхностях планет, происхождении и эволюции Солнечной системы. Достижения физики высоких энергий и общей теории относительности позволили выдвинуть экспериментально обоснованные гипотезы о строении и развитии Вселенной (Зельдович, Новиков, Хоукинг).

Физика тесно связана с философией. Данные физики способствовали развитию философских представлений об окружающем нас мире. Физика первая из естественных наук сформулировала ряд эвристических принципов, которые являются общими для любого научного исследования и в этом смысле могут считаться философскими принципами. К их числу можно отнести принципы причинности, относительности, сохранения, инвариантности, дополнительности, соответствия, неопределенности, наименьшего действия, симметрии и др.

Достижения физики существенно повлияли на культуру человечества, привели к созданию таких устройств и технологий, без которых трудно себе представить современный мир человека. Достаточно упомянуть современную энергетику, основанную на достижениях электродинамики и ядерной физики; компьютерные технологии и технологию связи, основанные на достижениях теории электромагнитных волн и физики твердого тела; космическую технику, использующую всю мощь классической механики и современной вычислительной техники, чтобы убедиться в уникальных возможностях физики как науки.

Изучение физики мы начинаем с рассмотрения и описания механических явлений.

Глава 1

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Механическое движение.

Относительность механического движения

Механическое движение – одно из самых распространенных явлений в природе. Двигается вода в реке, облака в небе, морские волны набегают на берег, небесные светила движутся по небосклону, движется автомобиль, мчится поезд, летит самолет, взлетает ракета – примеров механического движения так много, что его можно считать основным свойством окружающих нас тел.

Движения можно классифицировать по характерным для них признакам.

Рассмотрим, например, движение металлического шарика по прямым наклонным направляющим (рис. 1.1). Нетрудно заметить, что шарик скатывается по ним с возрастающей со временем скоростью. Такое движение называется прямолинейным, ускоренным из-за вида траектории и характера изменения скорости движения. Если направляющие изогнуть (рис. 1.2), то шарик при скатывании будет совершать криволинейное переменное движение.

Другой пример: движение небольшого деревянного бруска, лежащего на поверхности металлического диска, вращающегося вокруг вертикальной оси (рис. 1.3). Брусок через определенный промежуток времени, называемый периодом обращения, занимает свое прежнее положение относительно наблюдателя. Движение, при котором положение тела повторяется со временем, называется периодическим. В данном примере брусок, вращаясь с диском, соверша-

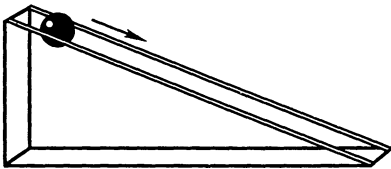


Рис. 1.1

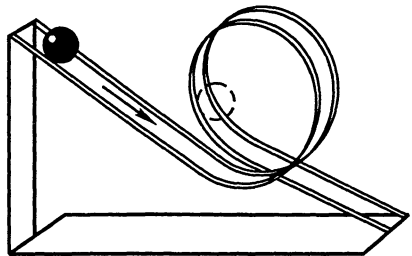


Рис. 1.2

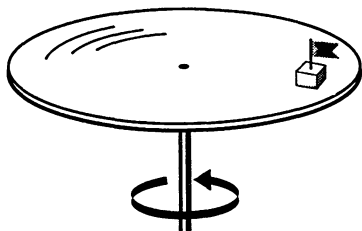


Рис. 1.3

ет периодическое движение по окружности. Если модуль скорости бруска за время движения не меняется, движение называют равномерным движением по окружности.

Еще один пример связан с наблюдением за движением небольшого тела, подвешенного на пружине (рис. 1.4). Если тело вывести из положения равновесия, то оно будет совершать пе-

риодическое движение по прямой. Такое движение называется колебательным. Из-за распространенности колебательного движения в природе его изучение представляет большой интерес.

Таким образом, механические движения можно классифицировать в зависимости от их характера. Форма траектории движения позволяет говорить о прямолинейном или криволинейном движениях, в частности о движении по окружности. В зависимости от скорости движения можно говорить о равномерном, ускоренном, переменном или колебательном движении. Если движение повторяется со временем, то оно является периодическим, если нет – непериодическим. Если движение происходит в ограниченной области пространства, то оно называется финитным (от лат. *finitus* – конечный), если же движение не ограничено в пространстве, то оно инфинитное.

Природные движения, как правило, характеризуются сразу несколькими признаками. Например, движение камня, брошенного под углом к горизонту, происходит по кривой линии – параболе, с переменной во времени скоростью, но с постоянным ускорением. Самое интересное при описании этого сложного движения состоит в том, что его можно представить в виде наложения двух прямолинейных движений: одного равноускоренного по вертикали и другого – равномерного по горизонтали. Эта особенность была замечена задолго до систематического изучения механического движения.

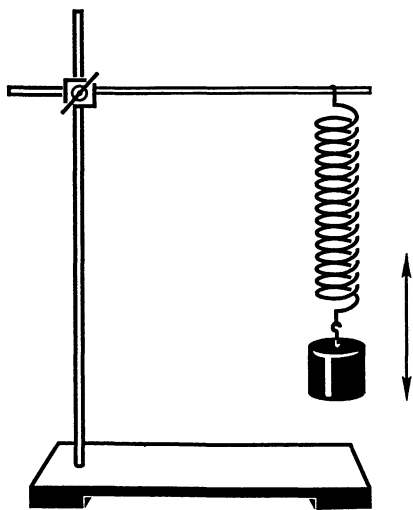


Рис. 1.4

Отдельные движения происходят независимо друг от друга –

так словами можно описать подмеченное свойство механического движения. Это утверждение называют *принципом независимости движений*.

Простой эксперимент иллюстрирует справедливость этого принципа. Пусть два металлических шарика укреплены с помощью пластинки, имеющей вертикальную ось вращения, на некоторой высоте над поверхностью стола. По пластинке в начале опыта ударяют деревянным молотком (рис. 1.5). После удара пластинка освобождает один шарик, и он свободно падает вниз и ударяет по другому шарiku, сообщая ему некоторую горизонтальную скорость. Несмотря на то что второй шарик движется по существенно более длинной траектории, он достигает поверхности стола одновременно с первым, что подтверждает справедливость принципа независимости движений. Действительно, если бы движение по вертикали зависело от движения тела по горизонтали, то времена движения первого и второго шариков отличались бы друг от друга.

Возможность представления сложного движения наложением (суперпозицией) более простых движений, происходящих независимо друг от друга, очень удобно для описания механических движений. В качестве простых движений обычно применяют прямолинейное движение, движение по окружности, колебательное движение.

Наблюдение за механическим движением разных тел позволяет сделать вывод о том, что движение – это изменение взаимного расположения тел за время наблюдения.

Нетрудно заметить, что характер движения зависит от того, относительно какого тела рассматривается движение интересующего нас тела.

Рассмотрим простой эксперимент. Проведем мелом по линейке, укрепленной в лапке штатива рядом с деревянным диском, способным вращаться на горизонтальной оси. Если при движении мела вдоль линейки диск остается неподвижным, то на его поверхности остается прямой след, совпадающий со следом на линейке. Если же

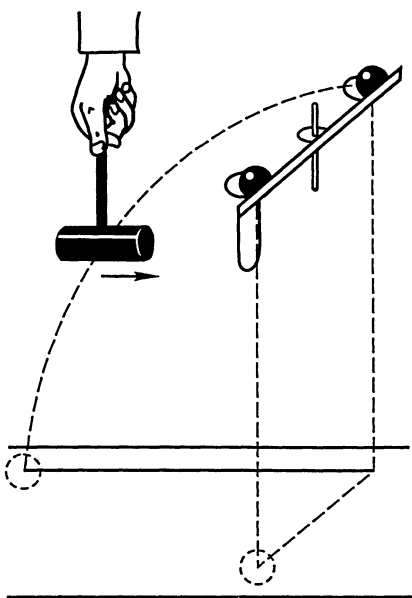


Рис. 1.5

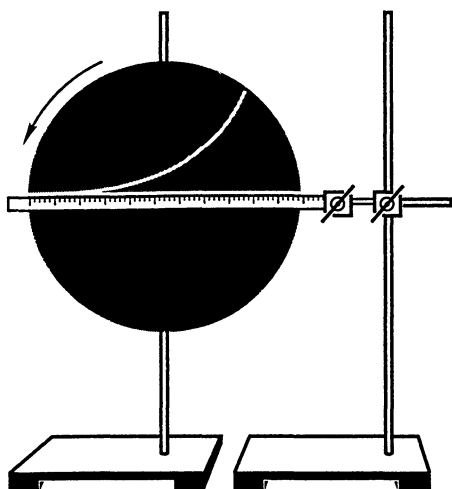


Рис. 1.6

во время движения мела поворачивать диск относительно линейки, то след мела на его поверхности существенно изменится. Появится кривая линия (рис. 1.6), хотя след мела на линейке останется прежним – прямой линией.

Примеров относительности движения можно привести очень много. Занимаясь в своей комнате за письменным столом, вы неподвижны относительно Земли, хотя совершаете увлекательное путешествие в Космосе, пролетая каждую секунду 30 км, двигаясь с Землей вокруг Солнца. Или другой пример. Переме-

щаясь с большой скоростью между городами на современном самолете, вы остаетесь неподвижными относительно самого самолета.

На первый взгляд кажется безразличным, относительно какого тела рассматривать интересующее нас движение. Но если немного подумать, то становится ясным, что выбор такого тела, называемого *телом отсчета*, целесообразно проводить так, чтобы движение выглядело наиболее простым при его описании.

1.2. Материальная точка.

Система отсчета. Перемещение тела

Описание движения тела произвольной формы и размеров – довольно сложная задача. Ее можно значительно упростить, если реальное тело принять за материальную точку. **Физическое тело, размером и формой которого можно пренебречь при описании его движения, называется материальной точкой.**

Как показывает опыт, для определения положения материальной точки относительно тела отсчета необходимо измерить расстояния до трех произвольно выбранных точек, связанных с телом отсчета, т. е. положение тела определяется заданием трех чисел. Чтобы результаты измерений положения материальных точек относительно различных тел отсчета были сопоставимы друг с другом, французский ученый Р. Декарт (1596–1650) предложил определять поло-

жение тел, измеряя расстояние от этого тела до трех взаимно перпендикулярных направленных прямых, выходящих из одной точки O -полюса, связанной с телом отсчета. Точка O называется *началом координат*. Взаимно перпендикулярные направленные прямые, проходящие через начало координат, называются *осями координат*. Оси координат имеют свои обозначения и названия: OX – ось абсцисс, OY – ось ординат, OZ – ось аппликат. Направление осей координат OX , OY , OZ задается направлением единичных векторов (ортов) \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} соответственно.

Совокупность взаимно перпендикулярных осей координат, начала координат и масштаба для измерения расстояний называется прямоугольной системой координат.

Прямоугольная система координат называется правой, если поворот оси OX к оси OY совершается против часовой стрелки, если смотреть на плоскость OXY из какой-нибудь точки положительной полуоси OZ ; если поворот оси OX к оси OY совершается по часовой стрелке, то система координат называется левой. В физике преимущественно используется правая система координат.

Для определения момента времени, соответствующего некоторому положению материальной точки относительно тела отсчета, необходимо иметь часы. **Часами будем называть тело, систему тел или некоторое устройство, состояние которых периодически повторяется.** Примером могут служить солнечные часы, в которых для измерения времени используется периодически повторяющееся положение Земли относительно Солнца. Тень от стрелки в этих часах служит указателем времени. Другим примером служат механические часы с маятником, изобретенные нидерландским физиком Х. Гюйгенсом (1629–1695) в 1658 г.

Совокупность тела отсчета, связанные с ним система координат и часы называется системой отсчета.

С помощью системы отсчета в принципе можно определить положение материальной точки в любой момент времени.

Действительно, в этом случае положение материальной точки в выбранной системе координат в некоторый момент времени t однозначно определяется заданием ее радиус-вектора \vec{R} – направленного отрезка, соединяющего начало координат O с материальной точкой.

Для экспериментального определения положения тела применяют различные методы, например, стробоскопический, фотографический, радиолокационный. При стробоскопическом методе для определения изменения положения тела в пространстве во времени применяют стробоскоп – прибор, излучающий периодически повторяющиеся вспышки света, частота которых может регулироваться в определенных пределах. Наблюдения при стробоскопическом

10
20
30
40
50
60
70
80
90
0
10
20
30
40
50
60

освещении позволяют визуально или с помощью фотографии фиксировать положения тела в определенные моменты времени. Пример стробоскопической фотографии свободно падающего шарика приведен на рис. 1.7.

В радиолокационном методе для определения положения движущегося тела применяется радиолокатор (рис. 1.8). Так как скорость c радиоволн в воздухе хорошо известна, то расстояние до самолета R – наклонную дальность можно определить, измеряя временную задержку τ радиоимпульса, отраженного от цели: $R = c\tau/2$. Направление на самолет определяют по расположению антенны, осуществляющей излучение и прием радиоволн.

В процессе движения положение тела в выбранной системе отсчета изменяется. Каждому положению тела будет соответствовать свой радиус-вектор. Линия, соединяющая концы радиус-векторов движущейся материальной точки, называется *траекторией* движения тела. Кривую, представляющую собой множество концов переменного вектора, начало которого есть фиксированная точка O , называется в математике *годографом* (от греч. *hodos* – путь, *grapho* – пишу) этого вектора. Таким образом, можно сказать, что траектория движения есть годограф радиус-вектора движущейся материальной точки.

Геоцентрическая и гелиоцентрическая системы – примеры различных систем отсчета.

Древнегреческий астроном К. Птолемей считал Землю центром Вселенной и рассматривал движения небесных тел, в частности планет, относительно Земли. Траектории движения планет оказались очень сложными (см. рис. 1.9, где показана траектория движения Марса по небесному своду, наблюдаемая с Земли); причины этой сложности были непонятны.

Рис. 1.7



Коперник Николай (1473–1543), польский астроном. Разработал гелиоцентрическую систему мира. Отказавшись от постулата о неподвижности Земли, предложил рассматривать Солнце центром Солнечной системы. Выступил против канонизированных церковью воззрений Аристотеля и Птолемея. Свои взгляды изложил в работе «Об обращениях небесных сфер» (1543), запрещенной католической церковью с 1616 по 1828 г.

Они прояснились, когда Н. Коперник принял за тело отсчета Солнце. При этом в гелиоцентрической системе отсчета орбиты планет получились близкими к круговым. Позже И. Кеплер нашел, что форма планетных орбит более сложная – это эллипсы с малым эксцентриситетом. И. Ньютону удалось показать, что форма планетных орбит непосредственно определяется законом всемирного тяготения.

Мировоззренческое значение работ Коперника и Кеплера, в которых утверждалось, что Земля вращается вокруг своей оси и вокруг Солнца, а также Г. Галилея, считавшего, что открытые им спутники Юпитера вместе с Юпитером образуют уменьшенное подобие Солнечной системы, чрезвычайно велико. Действительно, превращением Земли из центра мироздания в рядовое небесное тело был нанесен удар по реакционному учению католической церкви об особенной роли Земли в мироздании. Кроме того, выбор гелиоцентрической системы позволил Ньютону доказать, что причиной движения Земли и планет вокруг Солнца является их взаимное тяготение.

Вектор, соединяющий одно из положений (1) материальной точки с любым из последующих ее положений (2), называется *перемещением* материальной точки (или просто перемещением) и обозначается как $\Delta\vec{R}_{12}$ (рис. 1.10). Модуль вектора перемещения выра-

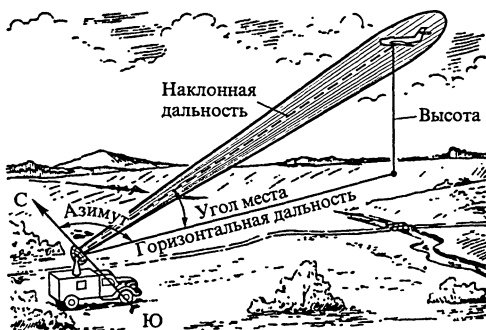


Рис. 1.8

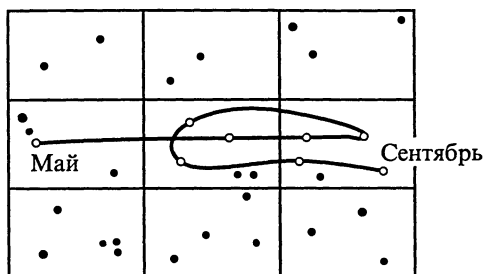


Рис. 1.9

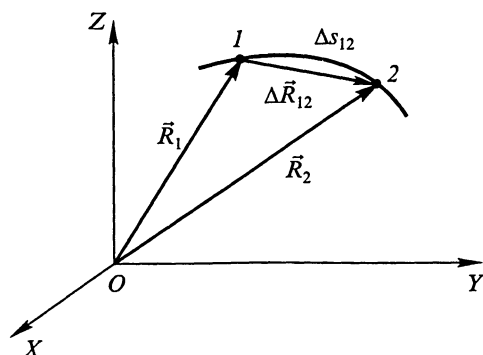


Рис. 1.10

жается в метрах. Каждому перемещению соответствует промежуток времени Δt , выражаемый в секундах. Расстояние, пройденное материальной точкой вдоль траектории, называется длиной пути Δs_{12} . Длина пути – скалярная величина. Вектор перемещения, вообще говоря, не совпадает с участком траектории, пройденным материальной точкой.

Для описания движения часто используют векторы элементарных перемещений $d\vec{R}$, совершаемых материальной точкой за элементарные промежутки времени dt . Каждый такой вектор направлен по касательной к траектории в данной точке, проведенной в направлении движения. Как показывает опыт, перемещение точки за некоторый конечный промежуток времени равно сумме элементарных перемещений:

$$\Delta\vec{R} = \int d\vec{R}. \quad (1.1)$$

Длина пути за это же время определяется суммой модулей элементарных перемещений:

$$\Delta s = \int dR. \quad (1.2)$$

Важно твердо усвоить, что модуль вектора $\Delta\vec{R}$ и длина соответствующего пути в общем случае отличны друг от друга.

Например, модуль перемещения Земли вокруг Солнца (принято го за тело отсчета) за полгода составляет $\Delta R_1 = 3 \cdot 10^8$ км, за год – $\Delta R_2 = 0$; а пройденные пути соответственно равны $\Delta s_1 = 4,7 \cdot 10^8$ км и $\Delta s_2 = 9,4 \cdot 10^8$ км (орбиту Земли считаем круговой с радиусом $1,5 \cdot 10^8$ км).

Значения модуля перемещения и длины пути одинаковы только в случае прямолинейного движения, происходящего в одном направлении.

1.3. Пространство и время в механике

Наши представления о пространстве и времени формируются в результате изучения механического движения и выявленных при этом свойств перемещений материальной точки.

Как показывает опыт, перемещение из точки A в точку B , а затем в точку C эквивалентно одному перемещению из A в C . Этот экспериментально установленный факт можно выразить в виде правила сложения перемещений:

$$\Delta\vec{R}_{AC} = \Delta\vec{R}_{AB} + \Delta\vec{R}_{BC}. \quad (1.3)$$

Так как точки A, B, C выбираются произвольно, то правило сложения перемещений можно рассматривать как свойство любых перемещений.

Другим свойством произвольного перемещения $\vec{\Delta R}$ является возможность умножения его на произвольное действительное число α для получения перемещения $\vec{\Delta R}_\alpha$:

$$\vec{\Delta R}_\alpha = \alpha \vec{\Delta R}. \quad (1.4)$$

Если $\alpha > 0$, то вектор $\vec{\Delta R}_\alpha$ имеет то же направление, что и вектор $\vec{\Delta R}$; если $\alpha < 0$, то векторы $\vec{\Delta R}_\alpha$ и $\vec{\Delta R}$ противоположны по направлению.

В справедливости свойств (1.3) и (1.4) можно убедиться, анализируя результаты опытов с перемещающимися друг относительно друга телами.

Наблюдая за движением тел, можно установить другие свойства перемещений: коммутативность, или переместительность, сложения:

$$\vec{\Delta R}_{AB} + \vec{\Delta R}_{BC} = \vec{\Delta R}_{BC} + \vec{\Delta R}_{AB}, \quad (1.5)$$

ассоциативность, или сочетательность, сложения:

$$(\vec{\Delta R}_{AB} + \vec{\Delta R}_{BC}) + \vec{\Delta R}_{CD} = \vec{\Delta R}_{AB} + (\vec{\Delta R}_{BC} + \vec{\Delta R}_{CD}). \quad (1.6)$$

Если после произвольного перемещения $\vec{\Delta R}_{AB}$ совершить противоположное перемещение, то, как показывает эксперимент, результирующее перемещение будет равно нулю. Для описания результата сложения противоположных перемещений вводится понятие вектора нулевого перемещения $\vec{0}$:

$$\vec{\Delta R}_{AB} + \vec{\Delta R}_{BA} = \vec{0}. \quad (1.7)$$

Вектор нулевого перемещения не имеет определенного направления.

Сумма любого перемещения $\vec{\Delta R}_{AB}$ с нулевым перемещением не приводит к изменению перемещения:

$$\vec{\Delta R}_{AB} + \vec{0} = \vec{\Delta R}_{AB}. \quad (1.8)$$

Не приводит к изменению перемещения и его умножение на единицу:

$$\vec{\Delta R}_{AB} \cdot 1 = \vec{\Delta R}_{AB}. \quad (1.9)$$

Нетрудно также убедиться в справедливости ассоциативности умножения перемещения на два числа:

$$\alpha(\beta \vec{\Delta R}_{AB}) = (\alpha\beta) \vec{\Delta R}_{AB}, \quad (1.10)$$

дистрибутивности (распределительности) перемещения относительно числового множителя:

$$(\alpha + \beta) \Delta \vec{R}_{AB} = \alpha \Delta \vec{R}_{AB} + \beta \Delta \vec{R}_{AB}, \quad (1.11)$$

дистрибутивности относительно умножения числа на перемещение:

$$\alpha (\Delta \vec{R}_{AB} + \Delta \vec{R}_{BC}) = \alpha \Delta \vec{R}_{AB} + \alpha \Delta \vec{R}_{BC}. \quad (1.12)$$

Множество векторов перемещений, для которых определены правила сложения и умножения на действительное число, удовлетворяющих выше сформулированным восьми свойствам, называется *линейным*, или *векторным*, пространством.

Радиус-вектор \vec{R} материальной точки можно рассматривать как перемещение точки из начала координат в место ее расположения с координатами (x, y, z) . Совокупность радиус-векторов и всевозможных перемещений материальной точки образует векторное пространство, которое называют *геометрическим пространством*, или просто *пространством*.

Выражение

$$\alpha_1 \vec{R}_1 + \alpha_2 \vec{R}_2 + \alpha_3 \vec{R}_3 + \dots + \alpha_n \vec{R}_n \quad (1.13)$$

называется линейной комбинацией векторов $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \dots, \vec{R}_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Линейная комбинация называется нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ отличен от нуля. Условие нетривиальности можно записать в общей форме, не указывая конкретно, какие именно коэффициенты отличны от нуля:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0.$$

Векторы $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \dots, \vec{R}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная комбинация (1.13), представляющая нулевой вектор. В противном случае векторы $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \dots, \vec{R}_n$ называются *линейно независимыми*.

Линейная независимость векторов позволяет ввести понятие размерности векторного пространства.

Размерностью векторного пространства называется наибольшее число линейно независимых векторов в нем.

Как показывает эксперимент, геометрическое пространство является трехмерным, т. е. в нем наибольшее число линейно независимых векторов равно трем.

Совокупность линейно независимых векторов пространства образует базис этого пространства. Базисные векторы обладают следующими свойствами:

- 1) базис есть линейно независимая система векторов;

2) каждый вектор пространства является линейной комбинацией векторов базиса этого пространства.

В декартовой прямоугольной системе координат роль базиса играют три единичных взаимно перпендикулярных вектора: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Представление вектора в виде линейной комбинации базисных векторов называется разложением вектора по базису, а числовые коэффициенты комбинации – координатами вектора относительно базиса. Произвольный радиус-вектор \vec{R} выражается через координаты x, y, z следующим образом: $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Длина радиус-вектора, или его норма, определяется как корень квадратный из скалярного произведения вектора на самого себя:

$$R = \sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}}.$$

Скалярным произведением двух произвольных векторов пространства $\vec{R}_n \cdot \vec{R}_m$ будем называть действительную функцию, которая удовлетворяет следующим условиям:

коммутативности

$$\vec{R}_n \cdot \vec{R}_m = \vec{R}_m \cdot \vec{R}_n; \quad (1.14)$$

дистрибутивности

$$(\vec{R}_n + \vec{R}_k) \cdot \vec{R}_m = \vec{R}_n \cdot \vec{R}_m + \vec{R}_k \cdot \vec{R}_m; \quad (1.15)$$

ассоциативности относительно умножения на число

$$(\alpha \vec{R}_n) \cdot \vec{R}_m = \alpha (\vec{R}_n \cdot \vec{R}_m); \quad (1.16)$$

$$\vec{R}_n \cdot \vec{R}_n \geq 0, \quad (1.17)$$

причем $\vec{R}_n \cdot \vec{R}_n = 0$ только при $\vec{R}_n = 0$.

Линейное пространство с введенным для него скалярным произведением называется *евклидовым пространством*.

Любое перемещение можно рассматривать как разность радиус-векторов \vec{R}_2 и \vec{R}_1 , соответствующих концу и началу вектора перемещения $\Delta \vec{R}_{12}$, т. е. $\Delta \vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$. Длину вектора перемещения можно выразить через длины радиус-векторов следующим образом:

$$\Delta R_{12} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2}. \quad (1.18)$$

Для согласования полученного выражения с формулой для стороны треугольника, следующей из теоремы косинусов, за скалярное произведение двух радиус-векторов примем по определению следующее выражение:

$$\vec{R}_n \cdot \vec{R}_m = R_n R_m \cos(\widehat{\vec{R}_n, \vec{R}_m}), \quad (1.19)$$

где $\widehat{\vec{R}_n, \vec{R}_m}$ – угол между векторами \vec{R}_n и \vec{R}_m .

Определив модуль перемещения, мы определили расстояние между концами двух радиус-векторов, соответствующих этому перемещению. Расстояние между двумя элементами пространства называется метрикой пространства. Таким образом, можно сказать, что с помощью определения скалярного произведения мы задали метрику евклидова пространства.

Метрику пространства можно определить, записав таблицу для скалярных произведений базисных векторов пространства:

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \cdot \vec{i} & \vec{i} \cdot \vec{j} & \vec{i} \cdot \vec{k} \\ \vec{j} \cdot \vec{i} & \vec{j} \cdot \vec{j} & \vec{j} \cdot \vec{k} \\ \vec{k} \cdot \vec{i} & \vec{k} \cdot \vec{j} & \vec{k} \cdot \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Имея в виду условия (1.15–1.17) и свойство (1.20), расстояние между двумя точками трехмерного геометрического пространства, радиус-векторы которых \vec{R}_1 и \vec{R}_2 можно выразить через координаты этих точек следующим образом:

$$\Delta R_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (1.21)$$

а скалярное произведение соответствующих радиус-векторов \vec{R}_1 и \vec{R}_2 можно записать в виде:

$$\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (1.22)$$

Как следует из выражения (1.21), непрерывное изменение координат двух точек в пространстве приводит к непрерывному изменению расстояния между ними. Это свойство называется *непрерывностью* пространства.

Если движение изучать в штрихованной системе координат $O'X'Y'Z'$, начало которой O' смещено относительно начала координат нештрихованной системы отсчета на радиус-вектор \vec{OO}' , неподвижной относительно системы $OXYZ$, и осями координат, параллельными соответствующим осям системы $OXYZ$ (рис. 1.11), то положение M_1 точки M в момент t_1 будет определяться радиус-вектором

$$\vec{R}_1 = x'_1 \vec{i} + y'_1 \vec{j} + z'_1 \vec{k},$$

отличным от вектора \vec{R}_1 .

В момент $t_2 > t_1$ точка M окажется в положении M_2 , характеризуемом соответственно радиус-векторами \vec{R}_2 и \vec{R}'_2 . При этом переходе от одной системы координат к другой координаты точки из-

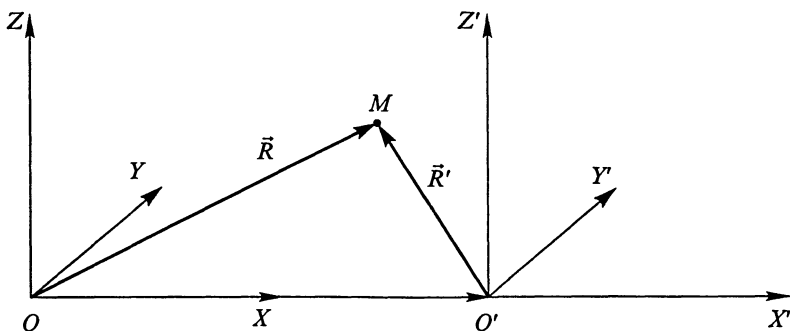


Рис. 1.11

меняются, но значение квадрата расстояния между двумя положениями M_1 и M_2 точки остается неизменным:

$$\begin{aligned} \Delta R_{12}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \\ &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = \Delta R'^2_{12}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где индексы «2» относятся к положению M_2 .

Очевидно, что при этом векторы \vec{R}_1 и \vec{R}_2 ; \vec{R}'_1 и \vec{R}'_2 связаны между собой линейными соотношениями: $\Delta \vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{R}'_2 - \vec{R}'_1 = \Delta \vec{R}'_{12}$, т. е. линейные свойства и метрика пространства не изменяются при параллельном переносе системы координат. Сохранение линейных и метрических свойств пространства при параллельном сдвиге системы координат называется *однородностью* пространства. Не меняются линейные и метрические свойства пространства и при повороте осей координат. Сохранение линейных и метрических свойств при повороте осей координат называется *изотропностью* пространства.

Многочисленные эксперименты показывают, что линейные и метрические свойства пространства сохраняются и при равномерном прямолинейном движении системы координат относительно выбранной нештрихованной системы отсчета, пространство в которой однородно и изотропно. Это свойство называется *абсолютностью* пространства. Пусть штрихованная система координат движется относительно нештрихованной равномерно и прямолинейно со скоростью \vec{v}_0 (рис. 1.12). С точки зрения наблюдателя в нештрихованной системе отсчета $\vec{R}_{01} + \vec{R}'_1 = \vec{R}_1$, с точки зрения наблюдателя в штрихованной системе отсчета из-за сохранения линейных свойств пространства в движущейся системе отсчета $\vec{R}'_{01} + \vec{R}_1 = \vec{R}'_1$, $\vec{R}'_{01} = -\vec{R}_{01}$, так как относительные скорости движения систем отсчета имеют противоположные знаки, а время движения принимается одинаково-

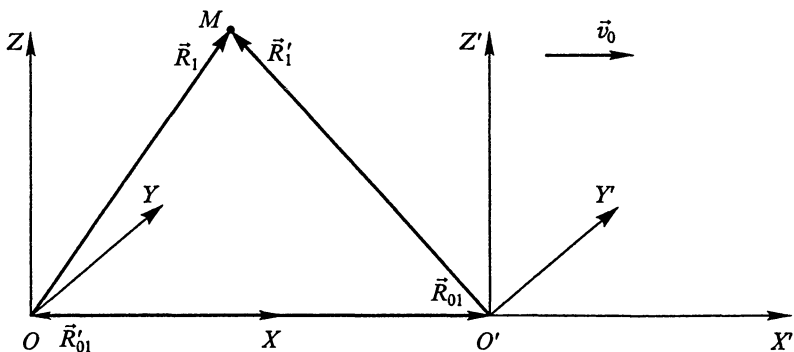


Рис. 1.12

вым по часам штрихованной и нештрихованной систем отсчета. Отсюда следует, что вектор \vec{R}_1 не изменяется при наблюдении из штрихованной системы координат.

Пусть теперь в нештрихованной системе в момент времени t_1 радиус-вектор начала координат штрихованной системы был равен \vec{R}_{01} , а в момент t_2 — \vec{R}_{02} (рис. 1.13). Если точка M за это время переместилась в системе $OXYZ$ на $\Delta\vec{R}_{12}$, то ее перемещение в штрихованной системе координат, как это следует из четырехугольника $M_1M_2O'_2O'_1$ (с учетом направлений образующих его векторов и сохранения метрики пространства), равно:

$$\vec{R}'_2 - \vec{R}'_1 = \Delta\vec{R}'_{12} = \Delta\vec{R}_{12} - \vec{R}_0, \quad (1.24)$$

где $\vec{R}_0 = \vec{R}_{02} - \vec{R}_{01}$.

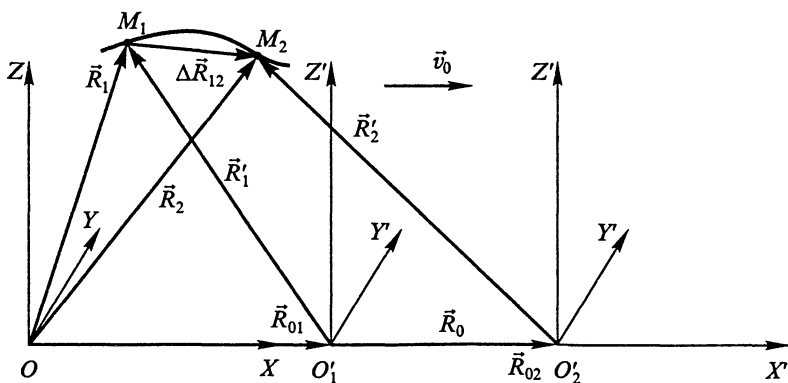


Рис. 1.13

Отсюда следует, что перемещение точки в движущейся системе отсчета равно векторной разности ее перемещения в неподвижной системе отсчета и перемещения начала координат движущейся системы относительно неподвижной.

Отметим, что при этом рассмотрении мы использовали кроме сохранения линейных и метрических свойств пространства еще и предположение о том, что промежутки времени в обеих системах являются одинаковыми, не зависящими от относительного движения систем отсчета. Это дополнительное физическое предположение, связанное с классическими представлениями о независимости длительности физических явлений от движения, называемое *абсолютностью времени*, справедливо, как мы увидим ниже, лишь при скоростях, малых по сравнению со скоростью света в вакууме.

Опыт показывает, что промежуток времени между двумя физическими событиями может быть как угодно малым в пределах точности измерения. Это свойство называется *непрерывностью* времени. Экспериментально установлено, что длительность промежутков времени между физическими событиями не зависит от начала отсчета времени. Это свойство называется *однородностью* времени.

Подводя итог вышесказанному, можно утверждать, что свойства геометрического трехмерного евклидова пространства характеризуются следующими признаками: непрерывностью, однородностью, изотропностью, абсолютностью; а одномерное время характеризуется непрерывностью, однородностью, абсолютностью. Свойства пространства и времени устанавливаются экспериментально из анализа результатов наблюдений за движением физических объектов.

1.4. Скорость

Всякое перемещение происходит в пространстве со временем. Физическая величина, равная отношению перемещения $\Delta \vec{R}$ к промежутку времени, за которое произошло перемещение, называется средней скоростью движения \vec{v}_{cp} :

$$\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t}. \quad (1.25)$$

С помощью понятия средней скорости реальное движение материальной точки на участке траектории приближенно представляется равномерным прямолинейным движением с перемещением $\Delta \vec{R}$. При уменьшении промежутка времени Δt вектор \vec{v}_{cp} будет изменяться. Как показывает эксперимент, начиная с некоторого значения дальнейшее уменьшение Δt не приводит к изменению отношения

$\Delta\vec{R}/\Delta t$ в пределах точности проводимых экспериментов. Это отношение принимают за мгновенную скорость движения, или просто скорость \vec{v} , т. е.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad (1.26)$$

где $d\vec{R}$ – малое в вышеуказанном смысле перемещение, dt – соответствующий ему промежуток времени.

С математической точки зрения мгновенная скорость есть предел средней скорости движения материальной точки при стремлении dt к нулю, т. е. мгновенная скорость – это первая производная от перемещения по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \quad (1.27)$$

С помощью мгновенной скорости средняя скорость может быть выражена следующим образом:

$$\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{1}{\Delta t} \int \vec{v} dt. \quad (1.28)$$

В каждый момент времени мгновенная скорость направлена по касательной к траектории движения. Это легко показать на простом опыте: раскаленные частицы точильного камня, срывающиеся с него при заточке инструмента, движутся именно по касательной (рис. 1.14). При прямолинейном движении вектор скорости направлен вдоль прямолинейной траектории.

Введем единичный вектор касательной к траектории $\vec{\tau}$ с помощью соотношения:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{R}}{ds}. \quad (1.29)$$

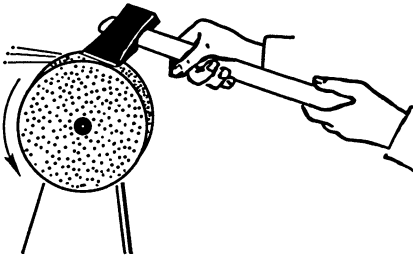


Рис. 1.14

При бесконечно малом смещении вдоль траектории ds модуль перемещения (длина хорды) равен длине траектории, т. е. $|d\vec{R}/ds| = 1$, а направление $\vec{\tau}$ совпадает с направлением $d\vec{R}$ (направлением касательной к траектории). С помощью единичного вектора касательной скорость можно выразить следующим образом:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{R}}{dt} \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \frac{d\bar{R}}{ds} = v\bar{\tau}, \quad (1.30)$$

где $v = ds/dt$ есть модуль скорости.

Скорость выражается в метрах в секунду (м/с). Обычно скорости тел в окружающем нас макром мире не превышают сотен метров в секунду. Характерные значения скоростей различных тел приведены в табл. 1.1. Предельной скоростью движения тел является скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Таблица 1.1

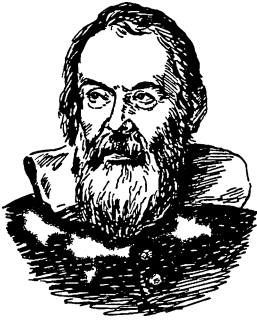
Движущееся тело	Скорость, м/с
Эскалатор метрополитена	0,75–0,9
Пешеход	1,3
Слон	11
Ветер при шторме	19–21
Гепард	31
Пуля при вылете из ствола автомата Калашникова	715
Молекула водорода (при температуре $t = 25^\circ\text{C}$)	1770
	(средняя скорость)
Луна на орбите вокруг Земли	10^3
Земля на орбите вокруг Солнца	$2,98 \cdot 10^4$

Если материальная точка в некоторой системе отсчета участвует сразу в нескольких движениях с мгновенными скоростями \bar{v}_i , то из-за векторного характера перемещений полная скорость точки равна векторной сумме отдельных скоростей:

$$\bar{v} = \sum_i \bar{v}_i. \quad (1.31)$$

Соотношение (1.31) называют *правилом сложения скоростей*. Скорости, так же как и перемещения, складываются векторно.

Рассмотрим преобразование скорости при переходе из неподвижной нештрихованной системы отсчета в штрихованную, движущуюся относительно нештрихованной равномерно и прямолинейно со скоростью \bar{v}_0 . Скорость точки в неподвижной системе отсчета \bar{v} называется *абсолютной* скоростью, скорость точки в штрихованной системе отсчета \bar{v}' называется *относительной*, скорость штрихованной системы отсчета относительно нештрихованной \bar{v}_0 называется *переносной* скоростью. Принимая во внимание абсолютность времени, после дифференцирования соотношения (1.24) полу-



Галилей Галилео (1564–1642), итальянский физик, один из создателей механики как области научного знания. Открыл закон инерции, сформулировал принцип относительности в механике, экспериментально установил независимость ускорения свободного падения от массы тела, независимость периода колебаний математического маятника от его массы, закон сложения движений. Поддержал учение Коперника, за что был осужден судом инквизиции.

чим закон преобразования скорости при переходе из нештрихованной в штрихованную систему отсчета:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0, \quad (1.32)$$

известный как *закон преобразования скоростей Галилея*: относительная скорость движения равна векторной разности абсолютной и переносной скоростей.

Для рассмотрения особенностей изменения скорости со временем применяют метод годографа. Отложим векторы скорости от начала прямоугольной системы координат $Ov_x v_y v_z$. Годографом скорости будет линия, соединяющая концы векторов скорости (рис. 1.15). Годографом скорости равноускоренного прямолинейного движения точки вдоль оси OX без начальной скорости будет прямая вдоль оси Ov_x (рис. 1.16), годографом скорости точки, движущейся равномерно по окружности в плоскости OXY будет окружность в плоскости $Ov_x v_y$ с радиусом, равным модулю скорости движения (рис. 1.17).

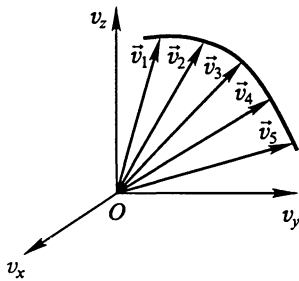


Рис. 1.15

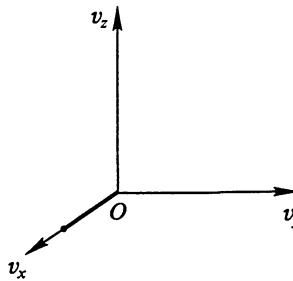


Рис. 1.16

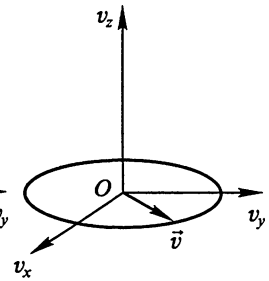


Рис. 1.17

1.5. Ускорение

Физическая величина, равная отношению изменения скорости тела $\Delta \vec{v}$ к промежутку времени Δt , за которое оно произошло, называется средним ускорением $\vec{a}_{\text{ср}}$:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.33)$$

Так же как в случае со средней скоростью, среднее ускорение будет изменяться при уменьшении Δt , но, как показывает эксперимент, начиная с некоторого значения дальнейшее уменьшение Δt не приводит к изменению ускорения в пределах точности проводимых измерений. Этот предел среднего ускорения при стремлении Δt к нулю принимают за мгновенное ускорение, или просто ускорение, тела \vec{a} . Таким образом,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \\ &= \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

т. е. ускорение определяется первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора по времени. Направление вектора ускорения совпадает с направлением вектора $d\vec{v}$, определяющего изменение скорости за элементарный промежуток времени, и поэтому, вообще говоря, может не соответствовать направлению вектора \vec{v} . Только при движении по прямой эти векторы сонаправлены в случае ускоренного движения или противоположны при наличии замедления.

Как видно из определения ускорения, его модуль в СИ выражается в метрах в секунду за секунду (м/с^2). Специального наименования единица ускорения, как и единица скорости, не имеет.

В общем случае скорость может изменяться как по модулю, так и по направлению. Рассмотрим два близких положения движущейся точки (рис. 1.18). Изменение ее скорости найдем, построив треугольник скоростей. Это изменение $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ можно представить как сумму двух изменений скорости: по касательной $\Delta \vec{v}_\tau$ и по нормали $\Delta \vec{v}_n$ к участку траектории в точке l . Деля $\Delta \vec{v}$ на затраченное на перемещение время Δt и переходя к пределу, получим ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \quad (1.35)$$

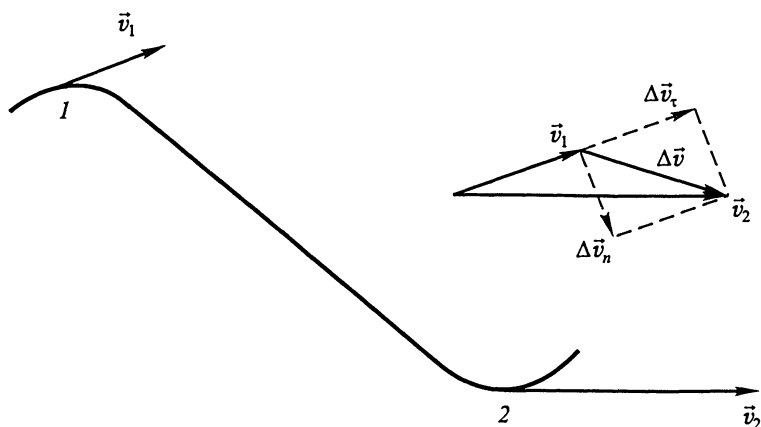


Рис. 1.18

модуль ускорения, очевидно, равен

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}. \quad (1.36)$$

Вектор \vec{a}_{τ} направлен по касательной к траектории в точке I и определяет изменение модуля скорости. Вектор \vec{a}_n направлен по нормали к траектории (к центру кривизны элемента траектории, прилегающей к точке I) и определяет изменение направления вектора ускорения. Эти ускорения называются соответственно *тангенциальным* (касательным) и *нормальным*.

Выражения для тангенциального и нормального ускорений материальной точки можно получить, дифференцируя по времени выражение (1.29):

$$\vec{a} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (1.37)$$

Сравнивая между собой выражения (1.35) и (1.37), можно установить, что тангенциальное ускорение $\vec{a}_{\tau} = dv/dt \vec{\tau}$, нормальное ускорение $\vec{a}_n = v d\vec{\tau}/dt$. Выясним смысл производной единичного вектора касательной к траектории движения по времени. Так как $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = \tau^2$, то после дифференцирования этого соотношения по времени получим: $\vec{\tau} d\vec{\tau}/dt = 0$, т. е. вектор $d\vec{\tau}/dt$ перпендикулярен $\vec{\tau}$. Умножив и разделив $d\vec{\tau}/dt$ на ds , получим:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} \frac{ds}{ds} = v \frac{d\vec{\tau}}{ds}. \quad (1.38)$$

Выразим $d\vec{\tau}/ds$ через единичный вектор нормали к траектории движения \vec{n} в виде прямой пропорциональной зависимости $d\vec{\tau}/ds = k\vec{n}$, где k – постоянная величина, называемая кривизной траектории в данной точке. Величина, обратная кривизне, называется радиусом кривизны траектории R . После введенных определений выражение для ускорения (1.35) можно переписать следующим образом:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}, \quad (1.39)$$

откуда видно, что нормальное ускорение

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}. \quad (1.40)$$

Модуль a ускорения равен

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}. \quad (1.41)$$

Рассмотрим преобразование ускорения при переходе из неподвижной, нештрихованной системы отсчета в штрихованную, движущуюся относительно нештрихованной равномерно и прямолинейно со скоростью \vec{v}_0 . После дифференцирования (1.32) по времени с учетом абсолютности времени получим: $d\vec{v}/dt = d\vec{v}'/dt'$ или $\vec{a} = \vec{a}'$. Следовательно, ускорение не изменяется при переходе из нештрихованной системы в штрихованную, если системы движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно.

1.6. Скорость и ускорение при движении материальной точки по окружности

Рассмотрим движение точки по окружности радиусом R в плоскости XOY с центром в начале координат. Так как координаты точки x и y связаны между собой уравнением окружности $x^2 + y^2 = R^2$, то они не будут независимыми друг от друга. Число независимых координат, определяющих движение точки по окружности, по сравнению со свободным движением в плоскости XOY , будет меньше на число уравнений связи, т. е. в данном случае равно единице. Удобно независимой координатой считать или длину s траектории, отсчитываемую от некоторой точки, условно принятой за начало координат, или угол α между радиусом окружности, соответствующим положению точки в момент времени t , и радиусом, характери-

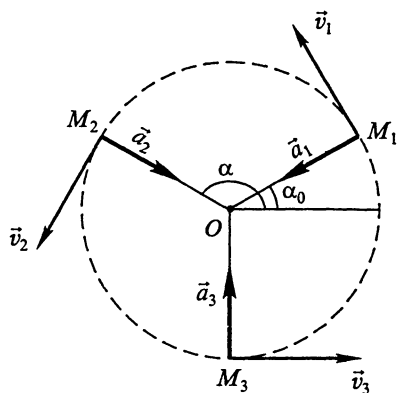


Рис. 1.19

зующим нулевое значение угловой координаты (рис. 1.19). Угол α будем считать положительным, если он отсчитывается от начала угловой координаты против часовой стрелки, если смотреть в сторону, противоположную оси OZ . Предположим, что в нашем случае обращение точки происходит против часовой стрелки, если смотреть на плоскость XOY из конца орта \vec{k} , т. е. в сторону, противоположную оси OZ .

При движении точки по окружности с произвольной скоростью угол α будет функцией времени и уравнение движения запишется в виде $\alpha = \alpha(t)$. Отношение $\Delta\alpha$ к Δt называется *средней угловой скоростью* вращения точки: $\omega_{\text{ср}} = \Delta\alpha/\Delta t$; предел $\omega_{\text{ср}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ называется *мгновенной угловой скоростью*, или просто угловой скоростью, точки ω . Очевидно, что

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (1.42)$$

Скорость изменения угловой скорости называется *угловым ускорением* ε :

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (1.43)$$

Единицы угловой скорости и углового ускорения соответственно 1 рад/с и 1 рад/с².

При ускоренном движении ω и ε имеют одинаковые знаки, при замедленном движении ω и ε имеют противоположные знаки.

При равномерном движении точки по окружности

$$\alpha = \omega t + \alpha_0, \quad (1.44)$$

где α_0 – значение угла при $t = 0$. Обозначим время одного полного оборота точки через T . Тогда число оборотов f за 1 с равно:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1.45)$$

Эта величина называется частотой обращения и выражается в герцах (Гц):

$$1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Если в (1.44) вместо времени t подставить период T , то получим: $2\pi = \omega T$, откуда следует, что

$$\omega = 2\pi f. \quad (1.46).$$

Модуль скорости движения точки по окружности в этом случае равен:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi f R = \omega R. \quad (1.47)$$

В любой момент времени (в любой точке траектории) вектор \vec{v} направлен по касательной к траектории в сторону движения обра- щающейся точки, при этом ее модуль остается постоянным, а на- правление непрерывно меняется, т. е. точка имеет только нормаль- ное ускорение. Для его нахождения построим годограф скорости (см. рис. 1.17) – окружность радиусом v , оббегаемую изображающей точкой, т. е. концом вектора \vec{v} , за время T . Модуль нормального ускорения будет численно равен скорости изображающей точки:

$$a_n = \frac{2\pi v}{T} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \quad (1.48)$$

Вектор нормального ускорения \vec{a}_n направлен перпендикулярно вектору скорости \vec{v} . Так как вектор \vec{a}_n направлен всегда к центру ок- ружности, то векторная запись выражения (1.48) будет иметь вид:

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}. \quad (1.49)$$

При неравномерном вращении по окружности полное ускоре- ние есть:

$$\vec{a} = \varepsilon R \vec{\tau} - \omega^2 \vec{R}; \quad (1.50)$$

его модуль равен:

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.51)$$

Вектор \vec{a} образует с вектором скорости \vec{v} угол θ , причем

$$\text{tg } \theta = \frac{\omega^2}{\varepsilon}. \quad (1.52)$$

Угол θ острый, если вращение ускоряется, прямой, если враще- ние равномерное, тупой, если вращение замедляется. При движе-

нии тела по плоской произвольной траектории радиус кривизны в каждой точке траектории принимает свое значение, что необходимо учитывать при расчете кинематических величин.

Конечные углы поворота коммутативными свойствами сложения не обладают. Если углы конечны и повороты совершаются вокруг различных осей вращения, то порядок их осуществления влияет на полный угол поворота. Так, если брусок с поверхностями, окрашенными в разные цвета, сначала повернуть на 90° вокруг вертикальной оси, а затем на 90° вокруг горизонтальной, то он окажется обращенным к экспериментатору гранью другого цвета, чем при тех же поворотах в другой последовательности вращений: сначала вокруг горизонтальной оси, затем – вертикальной.

При бесконечно же малых углах $d\alpha$ описываемые движущейся точкой дуги можно принять за прямолинейные бесконечно малые перемещения $d\vec{R} = d\alpha\vec{R}$, которые, как было показано выше, обладают векторными свойствами. Это обстоятельство позволяет ввести вектор бесконечно малого углового перемещения $d\vec{\alpha}$, модуль которого совпадает с $d\alpha$, а направление определяется правилом буравчика: если расположить ось правого буравчика вдоль оси вращения и поворачивать его так, чтобы движение его ручки соответствовало движению точки вдоль траектории, то направление поступательного перемещения буравчика принимается за положительное направление угла поворота. При положительном угле поворота $d\alpha$ вектор углового перемещения $d\vec{\alpha}$ будет направлен вдоль орта \vec{k} , т. е.

$$d\vec{\alpha} = d\alpha\vec{k}. \quad (1.53)$$

Связь между линейным перемещением $d\vec{R}$, угловым перемещением $d\vec{\alpha}$, радиус-вектором точки \vec{R} задается выражением

$$d\vec{R} = [d\vec{\alpha}, \vec{R}]. \quad (1.54)$$

Введение вектора углового перемещения позволяет рассматривать угловую скорость и угловое ускорение тоже как векторы:

$$\vec{\omega} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{k}, \quad (1.55)$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k}, \quad (1.56)$$

причем направление угловой скорости совпадает с направлением углового перемещения, а направление углового ускорения совпадает

с направлением вектора угловой скорости при ускоренном вращении и антипараллельно ему при замедлении.

В качестве примера укажем, что вектор угловой скорости стрелок наручных часов направлен в руку. Угловая скорость секундной стрелки равна:

$$\omega_c = 0,105 \text{ рад/с},$$

а часовой в 720 раз меньше:

$$\omega_ч = 1,46 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с}.$$

Обе скорости значительно превосходят угловую скорость вращения Земли вокруг Солнца:

$$\omega_з = 2 \cdot 10^{-7} \text{ рад/с}.$$

Угловые скорости вращающихся частей различных механизмов могут достигать очень больших значений – до нескольких тысяч радиан в секунду.

Так как между линейным перемещением, угловым перемещением и радиус-вектором точки существует простая связь (1.54), то после дифференцирования (1.54) по времени получим:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}], \quad (1.57)$$

дифференцируя по времени (1.57), получим:

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{R} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{R}}{dt} \right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{R}] + [\vec{\omega}, \vec{v}] = \varepsilon R \vec{\tau} - \omega^2 \vec{R}. \quad (1.58)$$

Если тело участвует одновременно в нескольких вращениях, то угловые скорости складываются векторно. В этом легко убедиться на опыте, заставляя шар, на поверхности которого нанесены цветные точки, участвовать одновременно в двух вращениях вокруг различных осей; при этом точки обращаются в плоскостях, к которым вектор суммарной угловой скорости расположен под прямым углом. Угловые ускорения тоже складываются векторно.

Ускорение тела, так же как скорость или перемещение, может зависеть от времени. Построив годограф ускорения, можно ввести вектор изменения ускорения со временем, среднюю скорость изменения ускорения и т. д. Однако, как мы увидим в разделе «Динамика», в этом нет необходимости. Для описания движения в классической механике можно обойтись рассмотрением только первой и второй производных радиус-вектора по времени.

1.7. Решение задач в кинематике

В кинематике известны три способа задания положения тела в пространстве: *векторный*, *координатный* и *естественный*, или траекторный. В векторном методе положение точки определяется заданием радиус-вектора в выбранной системе отсчета как функции времени; при координатном методе задаются координаты точки как функции времени; в естественном методе функцией времени является положение точки на известной траектории движения.

Число независимых координат, определяющих положение точки в пространстве со временем, называется числом степеней свободы. Например, число степеней свободы свободной точки равно трем. Если движение материальной точки ограничено некоторыми условиями-связями, как, например, при движении точки по окружности, то число степеней свободы уменьшается на число связей. Не обязательно в этом случае для описания движения использовать декартовы координаты, можно для удобства применять и другие, называемые в физике обобщенными координатами.

При кинематическом описании движения материальной точки встречаются задачи двух типов. В задачах первого типа известны законы движения, т. е. зависимости величин, определяющих положение точки в пространстве, от времени; нужно найти скорость и ускорение. Эта относительно простая задача решается при помощи дифференцирования.

Пусть радиус-вектор движущейся точки, проведенный из начала координат, задан уравнением

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{f}(t),$$

что равносильно заданию трех скалярных уравнений:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

Дифференцируя один раз по времени, находим проекции скорости на соответствующие оси координат:

$$\dot{x} = \frac{df_1}{dt}; \quad \dot{y} = \frac{df_2}{dt}; \quad \dot{z} = \frac{df_3}{dt}.$$

При этом сама скорость равна:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}.$$

Повторное дифференцирование дает возможность определить ускорение:

$$\ddot{x} = \frac{d^2 f_1}{dt^2}; \quad \ddot{y} = \frac{d^2 f_2}{dt^2}; \quad \ddot{z} = \frac{d^2 f_3}{dt^2}; \quad \vec{a} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}.$$

В задачах второго типа дано ускорение точки, нужно найти законы изменения скорости и перемещения. Эта задача обратна первой; ее решают интегрированием. Из условия

$$\vec{a} = \vec{f}(t), \quad d\vec{v} = \vec{a}dt$$

находим путем интегрирования

$$\vec{v} = \int \vec{a}dt + \vec{C}_1 = \vec{\varphi}(t) + \vec{C}_1,$$

где \vec{C}_1 — постоянная интегрирования, для определения которой должна быть задана скорость в некоторый момент (начальное условие).

Далее, так как

$$d\vec{R} = \vec{v}dt,$$

то повторное интегрирование дает:

$$\vec{R} = \int \vec{\varphi}(t)dt + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2,$$

где \vec{C}_2 — новая постоянная интегрирования, для нахождения которой нужно задать еще одно начальное условие, например радиус-вектор в некоторый момент времени. В процессе вычислений векторные функции могут быть заменены тремя скалярными.

Следует обратить внимание на важное обстоятельство: задача первого типа решена полностью и однозначно. Для однозначного решения задачи второго типа необходимо задать начальные условия, т. е. дополнительные сведения физического характера.

Прямолинейное равноускоренное движение материальной точки подробно рассматривалось в школьном курсе физики. Поэтому мы рассмотрим более сложную задачу о движении точки, брошенной под углом α_0 к земному горизонту с начальной скоростью \vec{v}_0 ; точка имеет ускорение, вектор которого \vec{g} направлен вертикально вниз; сопротивлением воздуха пренебрежем.

Выбрав систему координат (рис. 1.20, ось Z перпендикулярна плоскости чертежа), находим:

$$a_z = 0; \quad v_z = 0; \quad z = 0.$$

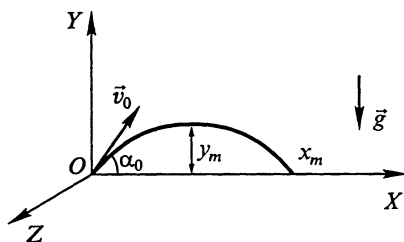


Рис. 1.20

Таким образом, движение происходит в плоскости OXY , поэтому задача называется плоской.

Проекция a_y ускорения на ось Y по условию равна:

$$a_y = -g.$$

Поэтому

$$v_y = -gt + C_1,$$

причем при $t = 0$ должно быть:

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0.$$

Следовательно,

$$v_y = -gt + v_0 \sin \alpha_0.$$

Смещение по вертикали определим из уравнения

$$y = \int v_y dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha_0 + C_2. \quad (1.59)$$

Так как при $t = 0$ точка находилась в начале координат, то $C_2 = 0$.

Для проекций ускорения и скорости на ось X соответственно получаем: $a_x \equiv 0$; $v_x = \text{const} = v_0 \cos \alpha_0$.

Поэтому горизонтальное смещение

$$x = v_0 t \cos \alpha_0 \quad (1.60)$$

(новая постоянная интегрирования снова обращается в нуль).

Полная скорость по модулю равна:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin \alpha_0},$$

а мгновенное значение угла, образуемого ею с горизонтальной осью, может быть найдено по его тангенсу:

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_0 \sin \alpha_0 - gt}{v_0 \cos \alpha_0}.$$

Проекция скорости на ось Y обращается в нуль в момент

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

При этом высота подъема точки наибольшая; она равна:

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}.$$

Так как время прохождения какого-либо вертикального отрезка вверх и вниз одно и то же, то до оси абсцисс точка опустится за время t_1 и пересечет ее на расстоянии

$$x_m = v_x \cdot 2t_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}$$

от начала координат (дальность полета). При этом наибольшая дальность (при заданной скорости \vec{v}_0) получается при $\alpha_0 = 45^\circ$. Дальности при углах α_0 и $90^\circ - \alpha_0$ одинаковы.

Исключая время из уравнений (1.59) и (1.60), получим уравнение траектории в явном виде:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2.$$

Легко убедиться, что траектория представляет собой параболу, симметричную относительно наибольшей ординаты. Наглядное представление об особенностях рассмотренного движения дает опыт со струей воды, вытекающей под давлением из трубки, расположенной под углом к горизонту.

На рис. 1.21 эта же задача решена графически. Кроме того, там же приводится и годограф скорости.

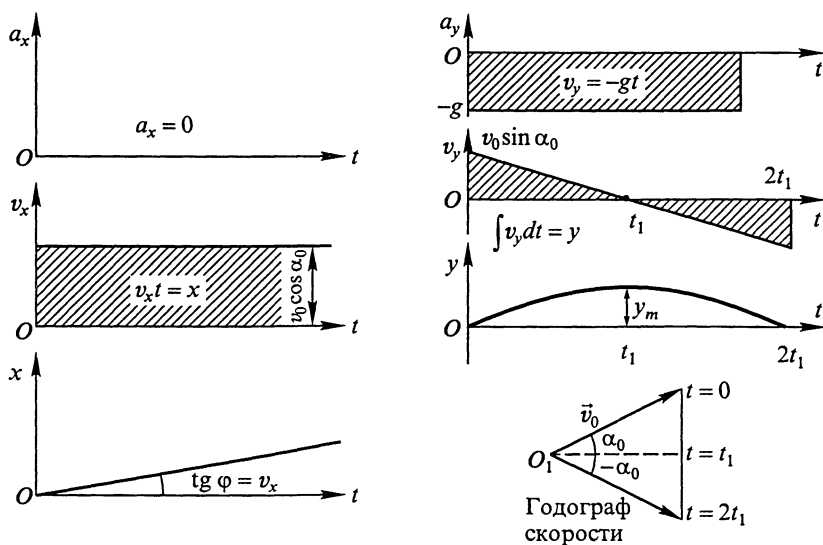


Рис. 1.21

1.8. Гармоническое колебательное движение. Сложение гармонических колебаний

Гармоническим колебанием называется движение, при котором смещение относительно положения равновесия изменяется по закону косинуса (или синуса):

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.61)$$

Здесь X_m – амплитуда (наибольшее смещение точки относительно начала координат); $\varphi = \omega t + \varphi_0$ – мгновенная фаза; φ_0 – начальная фаза (при $t = 0$); $\omega = 2\pi/T$ – угловая частота (T – период).

Таким образом, это (как и обращение точки по окружности) финитное периодическое движение – через одинаковые промежутки времени T смещение точки достигает прежнего значения.

Колебания, близкие к гармоническим, совершает тело, подвешенное на пружине, когда его вывели из положения равновесия и затем предоставили самому себе; так же движется маленький шарик, подвешенный на длинной нити, если его вывести из положения равновесия и отпустить. В обоих случаях амплитуды колебаний должны быть малыми. Графики колебаний с разными начальными фазами показаны на рис. 1.22.

Беря производную по времени от (1.61), находим скорость в гармоническом движении:

$$\dot{x} = \omega X_m \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.62)$$

Она, так же как и смещение, меняется по закону косинуса с той же угловой частотой ω , но сдвинута по фазе (относительно смещения) на $\pi/2$ (или во времени – на четверть периода).

Ускорение этого движения, равное

$$\ddot{x} = \omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x, \quad (1.63)$$

также представляет собой гармоническую функцию; кроме того, оно пропорционально смещению и всегда направлено к положению равновесия ($x = 0$).

Гармонические колебания характерны не только для механических явлений; они играют существенную роль в самых разнообразных физических явлениях (электромагнитных, в атомной физике и др.). В частности, в технике легко получаются гармонически меняющиеся напряжения (их используют при передаче электрической энергии на большие расстояния, в промышленности, в радиотехнике, телевидении и т. д.), что позволяет изучать особенности гармо-

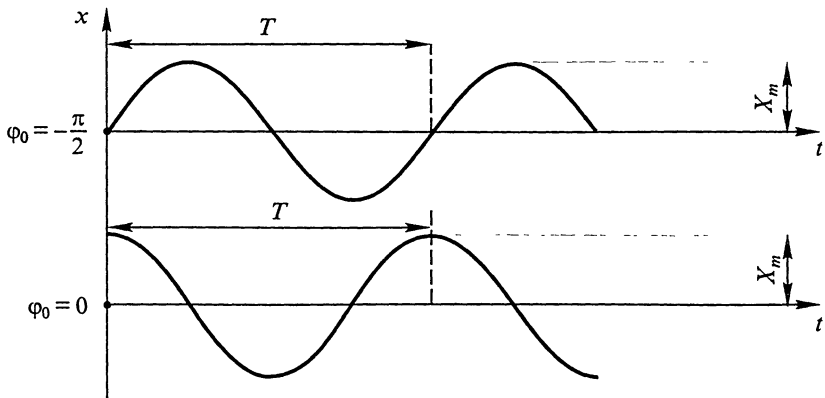


Рис. 1.22

нического движения при помощи электронного осциллографа (краткое описание принципа действия этого прибора приводится в § 3.2).

Так как математическое описание гармонических колебаний различной физической природы одинаково, то в дальнейшем мы часто будем прибегать к электромеханическим аналогиям.

Точка может участвовать одновременно в нескольких гармонических движениях. Получающееся при этом движение оказывается периодическим, но, вообще говоря, негармоническим.

Пусть два колебания одинаковой частоты происходят вдоль одного направления Ox :

$$x_1 = X_{m1} \cos \omega t; \quad x_2 = X_{m2} \cos (\omega t + \varphi_0).$$

Найдем сумму этих колебаний. Физически очевидно, что результирующее движение будет происходить с той же частотой:

$$x = x_1 + x_2 = X_m \cos (\omega t + \varphi). \quad (1.64)$$

Для нахождения амплитуды и начальной фазы суммарного движения выполним элементарные тригонометрические преобразования:

$$\begin{aligned} x &= X_{m1} \cos \omega t + X_{m2} \cos (\omega t) \cos \varphi_0 - X_{m2} \sin (\omega t) \sin \varphi_0 = \\ &= X_m \cos (\omega t) \cos \varphi - X_m \sin (\omega t) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Так как это соотношение должно выполняться в любой момент времени t , то коэффициенты при $\cos \omega t$ (а также при $\sin \omega t$) в обеих частях равенства должны быть равны. Поэтому получаются два уравнения для определения X_m и φ . Несложные вычисления дают:

$$X_m^2 = X_{m1}^2 + X_{m2}^2 + 2X_{m1}X_{m2} \cos \varphi_0, \quad (1.65)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_{m2} \sin \varphi_0}{X_{m1} + X_{m2} \cos \varphi_0}.$$

Мы видим, что амплитуда X_m существенно зависит от разности начальных фаз φ_0 и может меняться в пределах

$$|X_{m1} - X_{m2}| \leq X_m \leq X_{m1} + X_{m2}.$$

Представление о полученных результатах может дать опыт с маятником, приводимым в сложное движение двумя последовательными ударами, направленными по одной прямой.

Проще проиллюстрировать сложение колебаний в электрической цепи, питаемой источником переменного напряжения, подав на вход осциллографа одновременно напряжения с различных участков электрической цепи, содержащей (для создания сдвига фаз) кроме резистора катушку индуктивности или конденсатор.

Еще удобнее воспользоваться двумя электрическими генераторами, допускающими независимую регулировку амплитуд складываемых колебаний. Однако при этом (даже если мы не будем менять начальную фазу) всегда наблюдается медленное (по сравнению с самими колебаниями) периодическое изменение амплитуды X_m ; его можно сделать очень медленным, но нельзя устранить полностью.

Объясняется это невозможностью получить равные частоты от двух независимых источников. В опыте всегда получаются колебания несколько различных частот:

$$x_1 = X_{m1} \cos \omega t; \quad x_2 = X_{m2} \cos [(\omega + \Delta\omega)t + \varphi_2] \quad (\Delta\omega \ll \omega).$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$x_2 = X_{m2} \cos [\omega t + (\varphi_2 + \Delta\omega t)]$$

и истолковать как колебание с частотой ω и медленно меняющейся начальной фазой. Так как суммарная амплитуда зависит от начальной фазы, то и происходят медленные периодические изменения амплитуды по мере того, как начальная фаза нарастает от нуля до 2π и дальше.

Если амплитуды слагаемых колебаний равны и $\Delta\omega \ll \omega$, то сложение таких колебаний дает:

$$x = 2X_m \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right] \quad (1.66)$$

(начальные фазы приняты равными нулю); результат можно толковать как колебания с медленно меняющейся амплитудой и посто-

янной частотой $\omega + \Delta\omega/2$ (негармонические!). Вид этих колебаний показан на рис. 1.23, где воспроизведена осциллограмма колебаний – их развертка по времени.

При сложении подобных звуковых колебаний слышен звук определенной высоты (частоты) с периодически меняющейся громкостью (амплитудой); такой процесс называют *биениями*.

При сложении колебаний с сильно различающимися периодами T_1 и T_2 также получается периодическое движение; его период равен общему наименьшему кратному периодов слагаемых колебаний; но форма кривой $x = f(t)$ в этом случае уже весьма далека от косинусоиды и зависит от соотношения амплитуд и начальных фаз.

В ряде практических приложений, в частности в акустике, оптике, радиотехнике, нужно знать не столько характер изменения периодического процесса во времени, сколько его спектральный состав (т. е. иметь сведения о частотах и амплитудах слагаемых процессов).

Для изучения спектрального состава существуют специальные приборы – *анализаторы спектра*. Об устройстве акустических анализаторов речь будет идти позже (см. гл. 11); сейчас же воспользуемся дающим наиболее наглядные представления электронным анализатором.

В электронном спектроанализаторе имеется обычная электронно-лучевая трубка; в отсутствие исследуемого сигнала электронный пучок движется по горизонтали под действием напряжения изменяющейся частоты

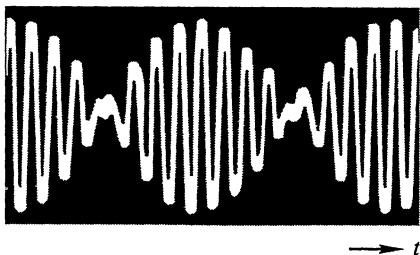


Рис. 1.23

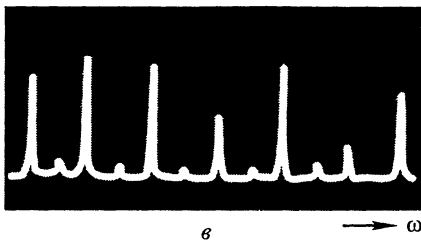
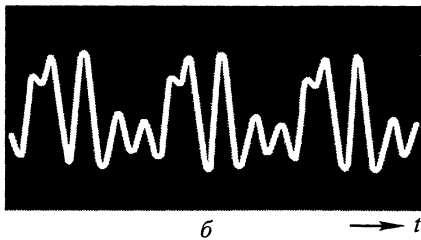
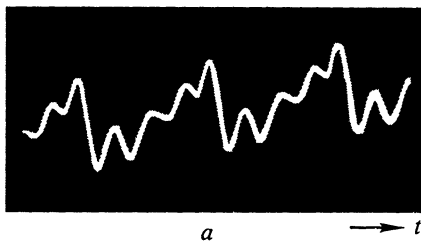


Рис. 1.24

ты, вырабатываемого внутри прибора, причем смещение пучка пропорционально частоте напряжения.

Исследуемое напряжение подается на вход анализатора. Если в исследуемом напряжении имеется составляющая с частотой, лежащей в диапазоне рабочих частот прибора, то электронный луч даст вертикальный выброс, пропорциональный амплитуде этой частоты.

На рис. 1.24, *а*, *б* показаны два сложных колебания, записанные на обычном электронном осциллографе ($u = f(t)$); они образованы слагаемыми гармоническими колебаниями семи частот, имеющими определенные амплитуды (одинаковые в обоих случаях). Но начальные фазы у них различны. Формы получившихся сложных колебаний в обоих случаях резко различны. На рис. 1.24, *в* показана спектрограмма $u = f(\omega)$, общая для них, так как фазовые соотношения не влияют на работу такого спектроанализатора.

Итак, сложение нескольких гармонических колебаний разной частоты дает периодический, но негармонический процесс.

Ж. Фурье (1768 – 1830) доказал, что периодическая функция $f(t)$ периода T , удовлетворяющая некоторым специальным условиям (практически всегда выполняющимся в физике), может быть представлена рядом гармонических колебаний, носящим ныне имя Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_{mk} \cos[k\omega t + \varphi_k]. \quad (1.67)$$

Частоты этих колебаний (гармоник) являются целыми кратными «основной» частоты $\omega = 2\pi/T$.

Такое разложение и производится автоматически в анализаторах спектра.

Осциллограммы и спектрограммы некоторых периодических движений показаны на рис. 1.25, *а*, *б* (сигнал имеет вид периодически повторяющегося прямоугольного импульса) и 1.25, *в*, *г* (напряжение медленно нарастает с течением времени и относительно быстро спадает). В последнем случае амплитуды гармоник обратно пропорциональны последовательным целым числам (1, 1/3, 1/5, ...).

При сложении нескольких гармонических колебаний одинаковой частоты можно вместо сложных тригонометрических расчетов применить условный графический метод векторных диаграмм. Суть его состоит в следующем.

Выберем на плоскости произвольную ось OX и условимся изображать скалярное колебание $x_1 = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ при $t = 0$ вектором \vec{X}_{m1} , длина которого равна X_{m1} , а угол между осью и вектором равен углу начальной фазы φ_1 (рис. 1.26).

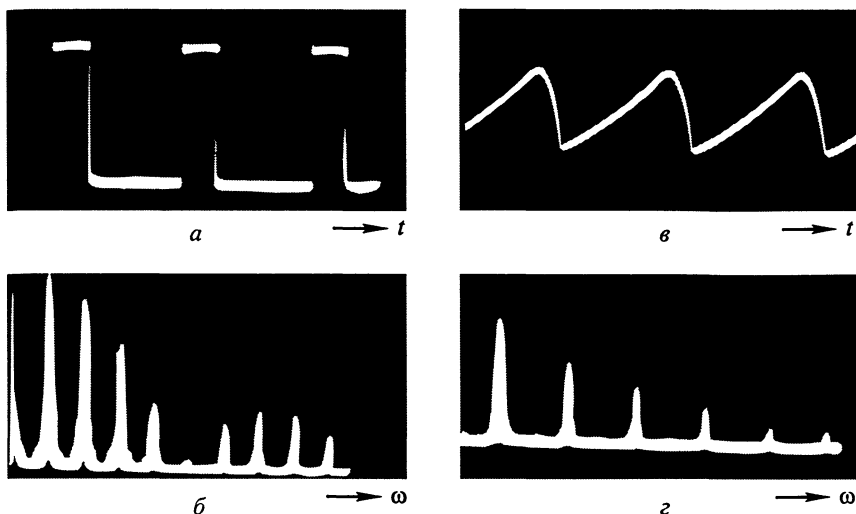


Рис. 1.25

Вообразим теперь, что этот вектор вращается вокруг точки O с угловой частотой ω . Тогда проекция этого вращающегося вектора на ось OX в любой момент равна:

$$x = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1),$$

т. е. представляет собой мгновенное смещение.

Если теперь нужно сложить два колебания:

$$x_1 = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

и

$$x_2 = X_{m2} \cos \omega t,$$

то, построив соответствующие векторы, можно найти их геометрическую сумму \vec{X}_m (см. рис. 1.26).

Проецируя векторы на ось OX и помня, что проекция суммы векторов равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов, мы убеждаемся, что вектор \vec{X}_m изображает суммарное колебание, определяя его амплитуду и начальную фазу φ , так как получается результат, совпадающий с (1.65).

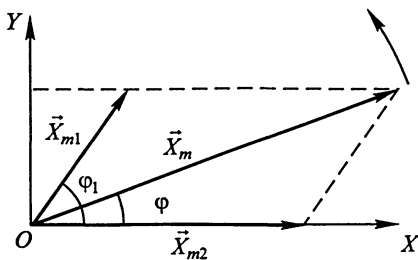


Рис. 1.26

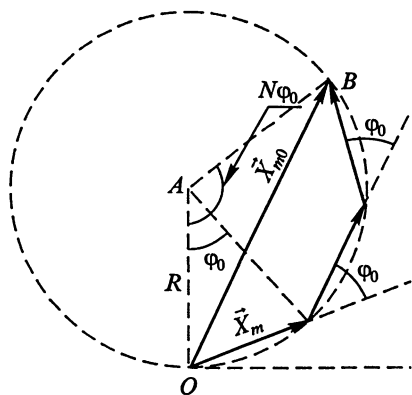


Рис. 1.27

Построенный векторный параллелограмм с течением времени поворачивается, но не меняет своей формы (ведь частоты обоих колебаний одинаковы!). Поэтому на практике никаких вращений векторной диаграммы производить не нужно – достаточно построить ее один раз.

Если бы складываемые колебания отличались по частоте, то векторный параллелограмм с течением времени изменял бы свою форму и такое простое рассмотрение было бы невозможным.

Удобство метода векторных диаграмм можно показать на задаче о суммировании N гармонических колебаний, имеющих равные амплитуды X_m и частоты ω , с линейно нарастающей начальной фазой:

$$x = \sum_{n=0}^N X_m \cos(\omega t + n\varphi_0), \quad (1.68)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{p}, \quad p - \text{целое число.}$$

Представим эти колебания векторами, причем начало n -го вектора совмещается с концом $(n - 1)$ -го вектора. Тогда они образуют стороны правильного N -угольника (рис. 1.27). Около него можно описать окружность радиусом $R = OA$, причем

$$X_m = 2R \sin \frac{\varphi_0}{2}.$$

Амплитуда результирующего колебания изобразится вектором $\overline{OB} = \vec{X}_{m0}$, причем сразу может быть найден его модуль:

$$X_{m0} = 2R \sin \left(\frac{N\varphi_0}{2} \right) = X_m \left| \frac{\sin \left(\frac{\pi N}{p} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{p} \right)} \right|.$$

Из этого выражения видно, что найденная сумма обращается в нуль при целочисленных значениях отношения N/p ; наибольшие значения она принимает при полуцелых значениях этого отношения.

1.9. Метод комплексных амплитуд¹

С методом векторных диаграмм тесно связан аналитический метод комплексных амплитуд, значительно облегчающий расчеты при изучении колебательных процессов: они сводятся к простым алгебраическим операциям.

Для уяснения сущности этого метода обратимся вновь к рис. 1.26. Легко видеть, что мгновенные проекции сторон векторного треугольника на ось OY изменяются по синусоидальному закону; например, для суммарного вектора \vec{X}_m получим:

$$y = X_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Если рассматривать плоскость чертежа как плоскость комплексных величин

$$\dot{z} = a + ib, \quad i = \sqrt{-1},$$

считая вертикальную ось мнимой, то вектор \vec{X}_m представит комплексное число²

$$\dot{z} = X_m \cos(\omega t + \varphi) + i X_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.70)$$

По известной теореме Эйлера

$$\dot{z} = X_m \exp[i(\omega t + \varphi)] = X_m \exp(i\varphi) \exp(i\omega t) = \dot{X}_m \exp(i\omega t), \quad (1.71)$$

где не зависящая от времени величина

$$\dot{X}_m = X_m \exp(i\varphi) \quad (1.72)$$

называется *комплексной амплитудой*. Она определяет амплитуду и начальную фазу вектора \vec{X}_m , представляющего комплексное число \dot{z} .

Найдем производную по времени от выражения (1.71):

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{z}}{dt} &= i\omega \dot{X}_m \exp(i\omega t) = \omega \dot{X}_m \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \exp(i\omega t) = \\ &= \omega X_m \exp\left[i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (1.73)$$

так как $\exp(i\pi/2) = i$.

¹ Этот параграф при первом чтении можно опустить; его результаты понадобятся в главе 10.

² Точку над буквой здесь следует понимать как символ комплексного числа.

Таким образом, дифференцирование комплексной величины сводится к умножению модуля на ω и увеличению начальной фазы на $\pi/2$.

Интегрирование же сводится к умножению на $1/\omega$ и изменению начальной фазы на $-\pi/2$. Действительно,

$$\int \dot{z} dt = -\frac{i}{\omega} z = \frac{X_m}{\omega} \exp\left[i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \exp(i\omega t).$$

Итак, основные операции математического анализа заменяются простыми операциями умножения и деления. Поэтому уравнения, содержащие производные (дифференциальные уравнения), заменяются алгебраическими уравнениями.

Далее, из теории сложения комплексных чисел известно, что действительные и мнимые части суммируются порознь, так что если

$$\dot{z}_1 = a_1 + ib_1, \quad \dot{z}_2 = a_2 + ib_2,$$

то сумма

$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = \dot{z} = a + ib = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \quad (1.75)$$

Суть метода комплексных амплитуд такова: аналитическое представление колебания

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

рассматривается как действительная часть комплексного числа:

$$x = \operatorname{Re}(\dot{z}), \quad \dot{z} = \dot{X}_m \exp(i\omega t).$$

Все вычисления проводятся с этими комплексными представлениями, а в конечном результате физический смысл приписывается только действительной части решения; это можно сделать, основываясь на свойстве (1.75), если только все вычислительные операции были линейны.

Пусть, например, нужно сложить два колебания:

$$x_1 = X_{m1} \cos \omega t \quad \text{и} \quad x_2 = X_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (1.76)$$

Представим их комплексными числами:

$$\dot{z}_1 = X_{m1} \exp(i\omega t),$$

$$\dot{z}_2 = X_{m2} \exp(i\varphi_2) \exp(i\omega t).$$

Сумма их есть

$$\dot{z} = \dot{Z} \exp(i\omega t) = Z \exp(i\varphi) \exp(i\omega t). \quad (1.77)$$

Очевидно, что

$$Z \exp(i\varphi) = (X_{m1} + X_{m2} \cos \varphi_2) + i X_{m2} \sin \varphi_2.$$

Поэтому получается:

$$x = \operatorname{Re}(\dot{z}) = Z \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.78)$$

При этом неизвестные амплитуда и фаза удовлетворяют уравнениям

$$Z^2 = X_{m1}^2 + X_{m2}^2 + 2X_{m1}X_{m2} \cos \varphi_2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_{m2} \sin \varphi_2}{X_{m1} + X_{m2} \cos \varphi_2}.$$

Полученные результаты, конечно, совпадают с ранее найденными (см. уравнение 1.65).

1.10. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Практический интерес представляет колебательный процесс, получающийся при сложении колебаний, происходящих в пространстве во взаимно перпендикулярных направлениях. Примером такого процесса является движение маятника (шара на нити), которому сообщают последовательно два взаимно перпендикулярных движения с помощью двух ударов. Аналогичный опыт может быть осуществлен с электронным пучком в электронно-лучевой трубке, если на входы усилителей вертикального и горизонтального отклонений луча осциллографа подать два гармонических напряжения.

Вначале рассмотрим *сложение взаимно перпендикулярных колебаний*, происходящих с одинаковой частотой. Пусть даны колебания, описываемые соответственно уравнениями

$$x = X_m \cos \omega t; \quad y = Y_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.79)$$

Траектория результирующего движения точки будет лежать внутри прямоугольника со сторонами длиной $2X_m$ и $2Y_m$.

Чтобы определить явный вид траектории, исключим время из (1.79). Для этого напишем:

$$\frac{x}{X_m} = \cos \omega t, \quad \frac{y}{Y_m} = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi. \quad (1.80)$$

Умножим первое уравнение на $\cos \varphi$ и вычтем из него второе. Получим:

$$\frac{x}{X_m} \cos \varphi - \frac{y}{Y_m} = \sin \omega t \sin \varphi.$$

Теперь умножим первое уравнение из (1.80) на $\sin \varphi$:

$$\frac{x}{X_m} \sin \varphi = \cos \omega t \sin \varphi.$$

Возводя это уравнение в квадрат и складывая с предыдущим уравнением, также возведенным в квадрат, приходим к выражению

$$\left(\frac{x}{X_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{Y_m}\right)^2 - \frac{2xy}{X_m Y_m} \cos \varphi = \sin^2 \varphi, \quad (1.81)$$

представляющему собой уравнение эллипса, для которого направления колебаний x и y не являются главными осями.

Заслуживают внимания частные случаи:

а) $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$.

Тогда

$$\left(\frac{x}{X_m} \pm \frac{y}{Y_m}\right)^2 = 0; \quad y = \pm \frac{Y_m}{X_m} x.$$

Полученные уравнения означают, что движение происходит по прямой, проходящей через начало координат (положение равновесия) и лежащей в I и III квадрантах (при $\varphi = 0$) или во II и IV квадрантах (при $\varphi = \pi$).

б) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

В этом случае

$$\left(\frac{x}{X_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{Y_m}\right)^2 = 1.$$

Траектория представляет собой эллипс, для которого направления колебаний являются главными осями. В зависимости от значения фазового угла эллипс обегается точкой по часовой стрелке или против нее.

Если в данном случае амплитуды слагаемых колебаний будут равны, то результирующее движение происходит по окружности, центр которой лежит в положении равновесия.

Отсюда следует и обратное утверждение: равномерное обращение точки по окружности с угловой частотой ω можно рассматривать как совокупность двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний той же частоты с амплитудами, равными радиусу окружности, и сдвигом по фазе $\pi/2$. В этом можно убедиться, наблюдая теневые проекции обращающегося по окружности шарика на двух взаимно перпендикулярных экранах.

Если отношение частот складываемых колебаний равно отношению q/p небольших целых чисел, то получаются своеобразные траектории (фигуры Лиссажу), форма которых (при данном отношении частот ω_1/ω_2) существенно зависит от начальных фаз колебаний.

На рис. 1.28 показаны фигуры Лиссажу, получившиеся при различных отношениях частот (указаны слева) и различных начальных фазовых углах (указаны сверху). Складываемые движения происходят вдоль координатных осей, параллельных сторонам квадра-

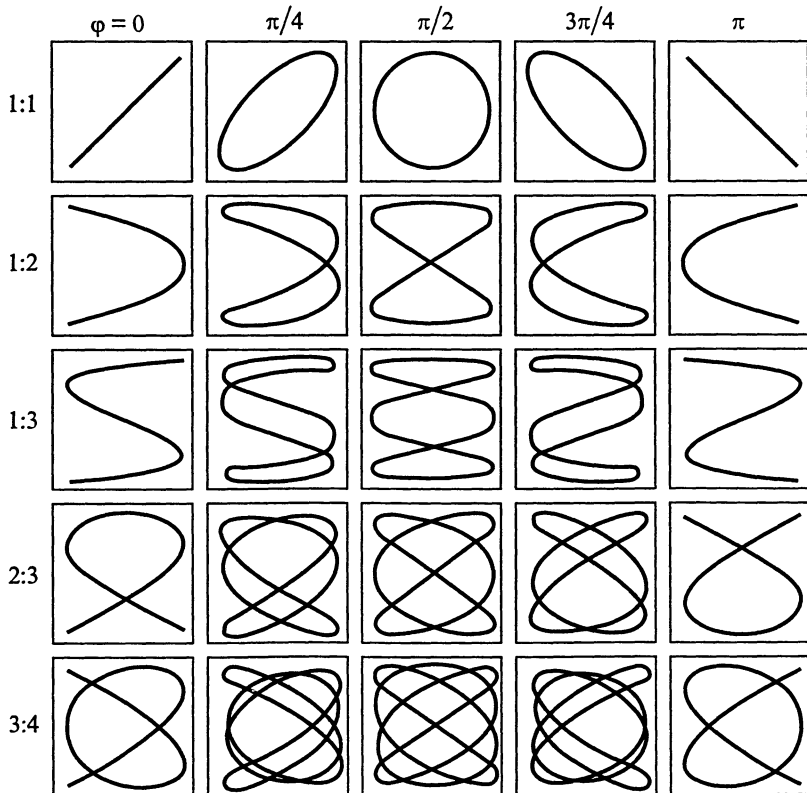


Рис. 1.28

та, содержащего фигуру Лиссажу, причем начало координат лежит в середине квадрата.

Эти оси могут быть получены на экране осциллографа, если поочередно выключать одно из напряжений.

Число пересечений фигур Лиссажу с осями координат обратно пропорционально частотам. Поэтому по виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной, что находит практическое применение.

При больших или нецелочисленных значениях p и q фигуры делаются весьма сложными и практического значения не имеют.

Глава 2

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Первый закон Ньютона.

Инерциальная система отсчета. Сила

Динамика в отличие от кинематики рассматривает движение тел под действием сил.

Повседневный опыт показывает, что любое тело, движущееся на Земле или вблизи ее поверхности, само по себе останавливается, если каким-либо образом не воздействовать на него другими телами. Недостаточно критическая оценка результатов опыта (пока понятие о сопротивлении, испытываемом движущимся телом при взаимодействии с окружающей средой, еще не было создано в физике) приводила к мнению, что для поддержания движения даже с неизменной скоростью необходимо воздействие окружающих тел. Эта точка зрения господствовала в физике со времен величайшего философа древности Аристотеля до конца XV в.

Галилей, по-видимому, первым осознал, что прекращение движения есть результат каких-то воздействий, препятствующих движению (трение). Он понял, что *без взаимодействий тело должно двигаться равномерно и прямолинейно (либо покоиться)*, а взаимодействия с другими телами вызывают изменения движения, т. е. ускорения. Это умозаключение, выходящее за пределы непосредственного опыта, явилось одной из самых гениальных абстракций в истории физики.

Ньютон в своих законах динамики принял и развил мысль Галилея.

Первый закон динамики Ньютона гласит: **всякое тело (материальная точка) сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока внешние воздействия (силы) не выведут его из этого состояния.**

Но описание движения возможно только в некоторой системе отсчета. Следовательно, первый закон предполагает существование хоть одной системы отсчета, где он выполняется.

Свойство физического тела (точки) сохранять состояние равномерного прямолинейного движения (или покоя) в отсутствие внеш-

них воздействий называют *инерцией*. Равномерное прямолинейное движение свободной точки, не испытывающей внешних воздействий, называют движением по инерции, поэтому первый закон Ньютона часто называют *законом инерции*, а систему отсчета, в которой он выполняется, – *инерциальной системой отсчета* (ИСО). В §2.6 будет показано, что любая система отсчета, движущаяся относительно ИСО равномерно и прямолинейно, сама является инерциальной.

Следует подчеркнуть, что первый закон Ньютона указывает экспериментальный путь определения инерциальной системы отсчета. Так, проводя эксперименты со свободным телом внутри некоторой системы отсчета и убедившись в том, что тело движется равномерно и прямолинейно или покоится в пределах точности проводимых экспериментов, можно говорить об инерциальности этой системы отсчета. Наглядный пример такого рода экспериментов представляют опыты на борту российской космической орбитальной станции «Мир», когда теннисный шарик от толчка рукой космонавта движется внутри станции по любому направлению равномерно и прямолинейно. Обобщая результаты таких экспериментов, можно считать систему отсчета, связанную со станцией, инерциальной. При этом нужно помнить, что определенная таким образом система отсчета ограничивается размерами станции и точностью проведенных наблюдений.

Опыты по наблюдению равномерного и прямолинейного движения тела в отсутствие взаимодействия можно истолковать как проявление определенных свойств пространства и времени, о которых шла речь выше. Действительно, независимость характера прямолинейного движения от выбора места и начального момента времени проведения опытов свидетельствует об однородности пространства и времени, независимость от выбранного направления движения – об изотропности пространства, а независимость от скорости равномерного прямолинейного движения – об абсолютности



Аристотель (384–322 до н.э.), древнегреческий ученый и философ. Разработал законченную физическую картину мира, в которой основными элементами окружающего мира были: земля, огонь, воздух, вода, из которых состоят все тела. В своей космологии центром мира считал Землю, вокруг которой по концентрическим окружностям обращаются планеты. Исследования Аристотеля относятся к механике, акустике и оптике.

пространства и времени. Можно сказать, что первый закон Ньютона позволяет экспериментально определить такую систему отсчета, где пространство однородно, изотропно, абсолютно, а время однородно и абсолютно. Описание движения в такой инерциальной системе отсчета выглядит особенно просто.

Конечно, следует отличать ИСО как физическую абстракцию от конкретной формы ее реализации. На практике можно найти такие тела отсчета, с которыми можно связать ИСО в пределах заданной точности измерений.

Так, при приближенном описании движения планет систему отсчета, связанную с Солнцем, можно считать инерциальной.

При изучении движения тел у поверхности Земли часто за ИСО можно принимать Землю (если продолжительность опыта незначительна и скорость движения исследуемого тела мала, т.е. вращение Земли вокруг ее оси не сказывается заметным образом).

Первый закон, утверждающий существование инерциальных систем, ничего не говорит о том, как именно изменяется состояние свободного тела (точки), если оно подвергается воздействию со стороны окружающих («внешних») тел.

В физике вместо слов «внешнее тело взаимодействует с рассматриваемым телом (точкой)» принято высказывание «внешнее тело действует на точку с некоторой силой». При этом под *силой* понимается количественная характеристика взаимодействия.

Никакой другой смысл в термин «сила» в механике не вкладывается. Поэтому возникавшие в прежние десятилетия методологические споры, связанные с понятием «сила», в настоящее время (по крайней мере для физика) имеют лишь исторический интерес.

Повседневный опыт и точные эксперименты показывают, что *единственным результатом действия силы на свободную (т.е. не взаимодействующую с третьим телом) материальную точку является сообщение ей ускорения.*

Ньютон Исаак (1643–1727), английский физик и математик. Сформулировал законы динамики, открыл закон всемирного тяготения, явление дисперсии света, поставил классические опыты по интерференции света, разработал основы дифференциального и интегрального исчисления. В работе «Математические начала натуральной философии» (1687) сформулировал основные положения физической картины мира, оказавшие огромное влияние на ход последующих физических исследований.



Если тело (точка) несвободно, то конечный результат действия силы может быть иным. Прикрепим к концу вертикальной нерастянутой пружины шарик и осторожно отпустим его. Благодаря притяжению Земли (действию силы тяжести) шарик и нижний конец пружины начинают двигаться вниз с некоторым ускорением. Но как только шарик сместится, пружина растянется (деформируется) и появится еще сила упругости пружины, действующая на шарик; она направлена вверх, так как пружина стремится сократиться, и потому ускорение уменьшается. В дальнейшем шарик будет совершать довольно сложное движение (затухающие колебания, см. гл. 10). В конце концов он останавливается, причем пружина оказывается растянутой на некоторый отрезок Δx . В этом случае конечным результатом действия силы является статическая деформация пружины, появление добавочной силы, действующей со стороны растянутой пружины, и постоянное смещение груза.

Предполагая, что одинаковые причины в одинаковых условиях приводят к одинаковым результатам, мы можем сравнить силы по создаваемому ими удлинению одной и той же пружины. Установив равенство двух сил, можно воздействовать на ту же пружину сразу двумя силами. При этом, как показал экспериментально Р. Гук (1635–1703), в известных пределах наблюдается прямая пропорциональность между растягивающей силой F и удлинением пружины Δx :

$$F_x = -k \Delta x \quad (\text{закон Гука}).$$

Коэффициент k , зависящий от размеров и материала пружины, называют *жесткостью*. Пока он постоянен (при малых деформациях), сила называется *силой упругости*.

Как показывает опыт, *силы обладают векторными свойствами* – складываются геометрически. Если вызванная несколькими силами деформация остается упругой (коэффициент жесткости пружины k постоянен), т. е. уравнение, связывающее силу и деформацию, линейное, то действие каждой из сил оказывается не зависящим от других воздействий. Поэтому, например, результат воздействия на материальную точку двух сил, направленных под углом друг к другу, может быть найден из векторного параллелограмма сил. Это утверждение дополняет сформулированный в § 1.4 принцип независимости движений *правилом векторного сложения сил*. *Совокупность этих утверждений называют принципом суперпозиции* (наложения). Этот принцип широко используется не только в механике, но и в других разделах физики (например, при сложении электростатических полей, электромагнитных волн и др.).

2.2. Масса. Импульс. Второй закон Ньютона

Весь дальнейший курс (если нет специальных оговорок) посвящен рассмотрению движений, описываемых в инерциальных системах отсчета.

Если свободное физическое тело (материальная точка), находящееся в покое или движущееся равномерно и прямолинейно, приходит во взаимодействие с другими телами (точками), то согласно первому закону Ньютона его состояние изменяется. Но первый закон не отвечает на вопрос, каким будет это изменение.

С многочисленными явлениями, связанными с этими изменениями, читатель встречается в повседневной жизни, с соответствующими экспериментами – в школьном курсе физики; некоторые опыты и эксперименты будут рассмотрены в следующих главах и параграфах.

Ньютон обобщил опытный материал, накопленный к его времени физикой, в своем втором законе механики. Для понимания этого обобщения следует учесть, что понятие силы и метод ее измерения уже установлены (см. § 2.1).

Основной результат всех опытов таков: под действием силы (т. е. в результате взаимодействия) свободная точка приобретает ускорение в направлении действующей силы.

Систематизируя эксперименты, можно сделать следующие частные выводы.

1. Если данная постоянная сила \vec{F} действует на некоторое тело (точку) в течение разных промежутков времени Δt_i , то приращение скорости пропорционально силе и времени ее действия:

$$\vec{F}\Delta t_i = m\Delta \vec{v}_i.$$

Здесь m – постоянный множитель, характерный для данного тела.

2. Если одна и та же сила действует в течение времени Δt поочередно на разные тела, то приращения их скоростей будут разными:

$$\vec{F}\Delta t = m_i\Delta \vec{v}_i,$$

где m_i – величина, характерная для i -го тела (точки).

3. Если действовать разными силами на одно и то же тело (в течение неизменного времени Δt), то приросты скорости у него получаются разными, но значение m не изменяется:

$$\vec{F}_i\Delta t = m\Delta \vec{v}_i.$$

Полученные выводы можно объединить в следующей формулировке: **изменение скорости тела (точки) происходит в направлении**

действия силы; оно пропорционально приложенной силе и времени ее действия:

$$m\Delta \vec{v} = \vec{F}\Delta t. \quad (2.1)$$

При фиксированном значении выражения $\vec{F}\Delta t$ изменение скорости обратно пропорционально m .

Постоянная для данного тела (материальной точки) величина m служит мерой инертности тела (точки), т. е. показывает, насколько значительно изменение скорости при данном воздействии на тело (точку). Эту величину называют *инертной массой* (или просто *массой*) тела (точки).

Из уравнения (2.1) следует, что если одна и та же сила действует одинаковое время на разные тела, то произведения $m_i\Delta \vec{v}_i$ получатся одинаковыми:

$$m_i\Delta \vec{v}_i = \text{const}, \quad \text{если } \vec{F}\Delta t = \text{const}.$$

Приращение скорости легко измерить на опыте. Выбрав произвольное образцовое (эталонное) тело и приписав ему единичную массу m_0 , можно опытным путем определять массы других тел:

$$m_2 = m_0 \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2}. \quad (2.2)$$

Существуют другие (более точные) способы сравнения масс; некоторые из них рассматривались в школьном курсе физики.

Как известно, произвольно выбранный эталон единицы массы представляет собой платиноиридиевый цилиндр, а единица массы называется килограммом (сокращенно: кг). Вода объемом 1 л при температуре 20 °С имеет массу, весьма близкую к 1 кг.

Уравнение (2.1) содержит утверждение о независимости массы от движения тела. Это экспериментальный факт, установленный при изучении сравнительно медленных движений макроскопических тел (скорости не превышают нескольких километров в секунду), а также при опытах с микрочастицами (атомы, молекулы, газовые ионы, электроны) при малых скоростях.

Но при скорости электронов (или ионов), близкой к скорости света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с), приращение скорости оказывается заметно меньше того, что предсказывает уравнение (2.1). Это расхождение получило объяснение в специальной теории относительности (см. гл. 9).

Однако возможны случаи, когда масса тела меняется во время движения по тем или иным причинам (например, масса самолета

убывает из-за расхода топлива, которое находится на его борту). Ньютон учел, что масса тела может изменяться, и ввел массу под знак приращения:

$$\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v}). \quad (2.3)$$

В этой форме уравнение можно применять и для решения задач о движении тел с меняющейся массой.

Физическую (векторную) величину $m\vec{v}$, характеризующую состояние тела (точки), называют *механическим импульсом* \vec{p} движущегося тела (Ньютон пользовался малоудачным термином «количество движения»):

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Импульс – одна из важнейших физических величин.

Разделив (2.3) на Δt и переходя к пределу, получим *аналитическое выражение второго закона в формулировке Ньютона*:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.3)$$

Скорость изменения импульса пропорциональна действующей силе и имеет одинаковое с ней направление. Мы приняли коэффициент пропорциональности в (2.4) равным единице.

В частном случае постоянной массы возможна такая формулировка: **ускорение пропорционально силе, действующей на тело (точку), обратно пропорционально массе тела и совпадает с силой по направлению:**

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.5)$$

Так как единицы массы и ускорения уже установлены, то из (2.5) может быть определена единица силы. За единицу силы принимается такая сила, которая материальной точке массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с² в направлении действия силы. Эта единица называется **ньютоном** (сокращенно: Н).

Если сила отсутствует ($\vec{F} = 0$), то равно нулю и ускорение. Этот результат совпадает с первым законом, чего и следовало ожидать. Но утверждать, что первый закон является просто частным случаем второго, – значит допускать ошибку: первый закон представляет самостоятельное, весьма содержательное утверждение, обобщающее опыт: он постулирует существование инерциальных систем отсчета, в которых (и только в них) справедлив второй закон.

Ньютон показал, что если несколько малых тел объединяются в большое, то его масса равняется сумме масс малых тел:

$$m = \sum_{i=1} m_i.$$

Это свойство массы называют *аддитивностью*. Оно верно только в рамках классической механики.

Если на тело (материальную точку) действует одновременно несколько сил \vec{F}_i , то, написав уравнение (2.4) для каждой силы и просуммировав, в соответствии с принципом суперпозиции получим:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2.6)$$

где \vec{F} – сумма всех сил, $d\vec{p}$ – полный прирост импульса.

При этом, однако, подразумевается весьма существенное обстоятельство: предполагается, что при действии силы на тело его свойства не меняются. А это не всегда справедливо.

Пусть, например, сила F_{1x} создает растяжение Δx_1 пружины, обладающей жесткостью k :

$$F_{1x} = k|\Delta x_1|.$$

Другая сила создаст другое растяжение:

$$F_{2x} = k|\Delta x_2|.$$

Если подействовать обеими силами одновременно, то сами силы будут складываться:

$$F_{1x} + F_{2x} = F_x.$$

Но для растяжений принцип суперпозиции

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x$$

будет справедлив лишь при условии, что жесткость пружины не изменяется, т. е. если применим закон Гука. Опыт же показывает, что этот закон верен лишь для малых деформаций, а при больших деформациях жесткость изменяется, так что действительное растяжение при действии двух сил одновременно может оказаться не подчиняющимся принципу суперпозиции:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 \neq \Delta x.$$

Уравнения (2.4) и (2.6) называют *уравнениями движения*. Действительно, пользуясь вторым законом, можно решать задачи двух типов:

а) по заданному движению определять силы, действующие в системе. Эти задачи требуют нахождения ускорений, что обычно связано с операцией дифференцирования;

б) по заданным силам определять характеристики получающихся движений. Эти, обычно более сложные, задачи требуют интегрирования уравнения движения.

Так как при интегрировании появляются постоянные интегрирования, то для определенности решения кроме уравнения движения требуется задание начальных условий (см. также § 1.7), т. е. дополнительных сведений, зависящих от состояния системы в определенные моменты времени. Эти условия находятся путем измерений, выполняемых в системе. Часто точность этих измерений определяет и точность окончательного результата.

Заметим, что второй закон Ньютона, являющийся фундаментальным физическим законом, описывается дифференциальным уравнением второго порядка (относительно координат точки). Именно поэтому третья производная от смещения по времени не имеет в динамике общего значения, и ей не уделяется никакого внимания (хотя в отдельных задачах она может понадобиться). Поэтому же в кинематике рассматривались только две производные – скорость и ускорение.

Формулировка второго закона (2.4) совпадает с формулировкой, принадлежащей Ньютону. Но современный подход к ней несколько отличается.

Мы определили массу как меру инертности тела и пришли к этому понятию, рассматривая результаты опытов и экспериментов. Ньютон же постулировал понятие массы до введения законов: «Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее». Иногда в этом определении усматривают неясность, так как не определено понятие плотности. Но, как объясняет академик С. И. Вавилов – автор превосходной биографии Ньютона, – Ньютон, будучи последовательным атомистом, считал, что макроскопические тела состоят из мельчайших частиц; что эти частицы «самотождественны», т. е. не меняются при объединении в тела (такое представление сохранялось в науке до открытия явления радиоактивности (до конца XIX в.)). Поэтому для Ньютона плотность была величиной, пропорциональной числу первичных частиц в единице объема, а масса – пропорциональной числу частиц в теле. Естественно, что с этой точки зрения аддитивность массы (утверждение, что масса двух тел равна сумме их масс) была простым следствием атомизма Ньютона. Термин «количество вещества», принятый и в современной системе физических величин, нельзя признать удачным. Обсуждая ньютоновское определение массы,

М. В. Ломоносов (1711–1765) писал, что, конечно, в двух фунтах золота количества вещества больше, чем в одном фунте золота; но трудно сказать, одинаково ли оно в одном фунте золота и одном фунте железа. Этим сомнением Ломоносов предвосхитил современное понимание термина «количество вещества». Ныне единицей количества вещества служит моль. Один моль – это количество вещества, в котором содержится столько же молекул или атомов, сколько атомов содержится в углероде массой 0,012 кг.

Из этого определения следует, что 1 моль любого вещества содержит одинаковое число молекул. Это число называют постоянной Авогадро N_A ; методы ее определения рассматриваются в молекулярной физике и в химии. Постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

Итак, по современному определению одинаковые количества вещества различных химических элементов и их соединений имеют различные массы.

Второй закон Ньютона является одним из фундаментальных законов природы. Так как решение уравнения (2.6) при заданных начальных условиях справедливо для любых значений времени, как больших, так и меньших нулевого (начального) значения, то это означает, что настоящее однозначно определяется прошлым и однозначно определяет будущее (так называемый детерминизм Лапласа, бывший философской основой физики посленьютоновского периода). В настоящее время мы знаем, что действительность более сложна и получаемые решения описывают ее лишь на ограниченном отрезке времени. А в микромире уравнение (2.6) вообще неприменимо. Это замечание будет разъясняться при последующем изложении физики.

Современной физике известно (с середины 1930-х годов), что масса сложных микрочастиц меньше массы составляющих их частиц; например, масса ядра атома меньше суммы масс образующих ядро протонов и нейтронов:

$$m_a < \sum m_p + \sum m_n.$$

Одной из причин этого уменьшения является излучение, обычно сопровождающее ядерные превращения и уносящее часть массы.

Кроме того, в 1905 г. А. Эйнштейн (1879–1955) установил тесную связь между массой и энергией материальной точки (тела).

Но при макроскопических процессах изменения массы лежат далеко за пределами точности современных измерений, так что сохранение массы, впервые доказанное на опытах с химическими превращениями Ломоносовым и позже – А. Лавуазье (1743–1794), признается и теперь.

2.3. Третий закон Ньютона

В *третьем законе* Ньютон подчеркивает, что силы всегда суть результат взаимодействия. Третий закон гласит: **силы взаимодействия, испытываемые двумя материальными точками, равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей точки.**

Аналитически он может быть выражен так:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

где \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} – силы, приложенные к разным материальным точкам (рис. 2.1). Это, например, могут быть силы взаимного тяготения двух материальных точек (рис. 2.1, а) или силы притяжения при электрическом взаимодействии, если точки заряжены разноименно, или силы электрического отталкивания, если заряды материальных точек одноименные (рис. 2.1, б).

Чтобы выяснить, как взаимодействуют два макроскопических тела, их (мысленно!) разбивают на элементарные части массами dm_i , dm_k и суммируют силы взаимодействия по всему объему тел. При этом неявно допускается, что масса распределена непрерывно, хотя хорошо известно, что тела состоят из отдельных молекул или атомов. Однако допущение непрерывности (очень удобное с математической точки зрения) приемлемо, так как масса молекул исчезающе мала по сравнению с массой макроскопического тела (тело массой 1 кг состоит примерно из 10^{26} молекул). Конечно, Ньютон этого числа не знал, но, обладая гениальной интуицией, предугадал истину и оперировал с массой как с непрерывно меняющейся величиной, подобно длинам отрезков и промежуткам времени, создав для этого основы современного математического анализа.

Следует особо подчеркнуть, что *законы Ньютона применимы к силам любой природы*; нужно лишь знать модуль силы и ее направление. Если возникает вопрос о природе действующих сил, то он должен решаться дополнительными физическими исследованиями. Так, силы всемирного тяготения и силы взаимодействия разноименных электрических зарядов одинаково зависят от расстояния. Поэтому, изучив дейст-

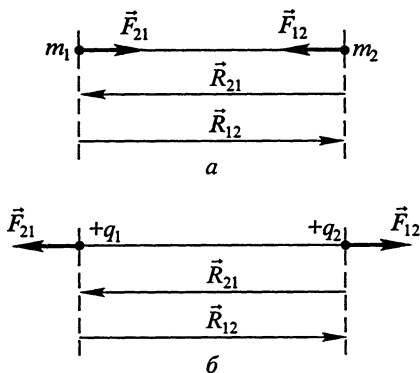


Рис. 2.1

вие одних, можно автоматически перенести результаты на случай действия других. Например, Земля могла бы обращаться вокруг Солнца, если бы оба тела имели противоположные электрические заряды, а гравитационное взаимодействие отсутствовало.

Возможны два вида взаимодействия тел.

1. Непосредственное взаимодействие при соприкосновении, когда одно из тел толкает или тянет другое. Впрочем, так как между телами всегда существуют промежутки межмолекулярного масштаба (10^{-9} м), то «непосредственность» является в некоторой степени условной.

2. Взаимодействие на расстоянии, когда тела удалены друг от друга на макроскопические расстояния. Ньютон возможность «действия на расстоянии» отвергал; он писал: «Предполагать... что тело может действовать на другое на любом расстоянии в пустом пространстве, без посредства чего-либо передавая действие и силу, – это, по-моему, такой абсурд, который немыслим ни для кого, умеющего достаточно разбираться в философских предметах».

Но во времена Ньютона (и много позже, вплоть до начала XX в.) не было ничего известно о природе этого «чего-либо». Предположения о существовании всепроникающего эфира, делавшиеся физиками, оказались физически несостоятельными.

Современная физика связывает с веществом различные поля (гравитационные, электромагнитные) и считает, что взаимодействие осуществляется через них. *Поля являются одним из видов материи (наряду с веществом)*. Они могут существовать и независимо от вещества. Так, сигнал, излученный радиостанцией (переменное электромагнитное поле), распространяется в пространстве независимо от источника радиоволн.

Всякое поле кроме индивидуальных характеристик, например напряженности, обладает импульсом и энергией. Взаимодействие поля с веществом сопровождается, в частности, обменом импульсом и энергией (см. гл. 12).

Рассмотрим еще одну особенность взаимодействия. Пусть две материальные точки находятся в покое на некотором расстоянии друг от друга. Сила взаимодействия имеет при этом определенное значение. Если одна из точек переместится, то взаимодействие должно измениться. Возникает вопрос: сразу ли скажется это перемещение на второй точке или изменение взаимодействия произойдет с запозданием?

В классической механике, имеющей дело с малыми скоростями, никакого запаздывания не наблюдалось. Отсюда следовало, что взаимодействие распространяется весьма быстро (или даже мгновенно). Эта невозможность заметить запаздывание в изменении вза-

имодействия в XVIII в. привела физиков к представлению о мгновенном распространении взаимодействия; многие физики считали даже, что тела взаимодействуют друг с другом на расстоянии (без какого-либо физического процесса в разделяющей их среде). Выше уже было указано, что Ньютон считал такую точку зрения ошибочной.

Позже, во второй половине XIX в., при изучении электродинамических явлений, оказалось, что электродинамическое взаимодействие распространяется со скоростью света (что подтверждено рядом прямых экспериментов) и с этим приходится считаться.

Скорость гравитационного взаимодействия пока не измерена. Но есть основания предполагать, что она близка к скорости света или равна ей.

Специальной теорией относительности доказывается, что *скорость света есть предельная (наибольшая) возможная скорость распространения взаимодействий*. Меньшие скорости вполне возможны: так, в воздухе упругие взаимодействия распространяются со скоростью всего 330 м/с, а в твердых телах эта скорость достигает нескольких километров в секунду (см. гл. 11).

Примеры приложения законов Ньютона к практическим задачам и следствия из этих фундаментальных законов рассматриваются в последующих главах книги.

2.4. Система физических величин, их единицы и размерности

Изучая природу, физики вводят различные *физические понятия*, большинство которых может быть охарактеризовано количественно; тогда вводится понятие *физической величины*, указывается способ ее измерения и выбирается (довольно произвольно) единица этой величины. Например, понятию промежутка времени (длительности) отвечает ее единица – секунда; раньше она определялась как некоторая часть суток (длительности одного оборота Земли вокруг собственной оси). Когда выяснилось, что эта длительность не вполне постоянна, было принято более точное определение секунды.

После установления единицы времени любая длительность может быть сравнена с ней, т. е. охарактеризована определенным числовым значением. *Если изменить единицу, изменится и это численное значение*, причем увеличение единицы вызовет пропорциональное уменьшение числового значения, и наоборот. Так, футбольное состязание продолжается 5400 с. Но если за единицу времени принять 1 ч, то числовое значение длительности состязания уменьшится в 3600 раз и составит 1,5 ч.

При установлении физических законов находятся связи между различными физическими величинами. Так, в кинематике вводится физическая величина – скорость, определяемая отношением длины пути ко времени, затраченному на него:

$$\text{Скорость} \sim \frac{\text{Длина}}{\text{Время}}. \quad (2.7)$$

Допустим, что единица длины уже выбрана: 1 м. Единицу скорости можно выбрать произвольно. Но логично (и удобно) принять коэффициент пропорциональности равным единице. Тогда получим:

$$\text{ед. скорости} = \frac{\text{ед. длины}}{\text{ед. времени}} = \frac{1 \text{ м}}{1 \text{ с}} = 1 \text{ м/с}.$$

Специального названия (см. § 1.4) единица скорости не имеет. Если бы были выбраны другие единицы длины и времени (например, 1 км и 1 ч), то числовое значение единицы скорости стало бы другим:

$$\text{ед. скорости} = \frac{1 \text{ км}}{1 \text{ ч}} = 0,28 \text{ м/с}.$$

Выбрав некоторые величины за *основные* (этот выбор произволен, как и определение числа основных величин), все остальные – вторичные или производные величины – можно выразить через основные, пользуясь определениями или физическими законами. Так строится последовательная *система физических величин и их единиц*, дополняемая по мере развития науки новыми членами.

Первая система единиц была предложена во Франции в 1799 г. Ее авторы (Борда, Кондорсе, Лаплас и Монж) предпослали ей лозунг: «На все времена, для всех народов». Это была ставшая общеизвестной метрическая система.

В дальнейшем предлагались другие системы единиц. Никакая система не может удовлетворить потребности всех ученых и практиков. Так, астроном, имеющий дело с космическими расстояниями, выражает их в световых годах (расстояние, проходимое световой волной за год); специалист по элементарным частицам за единицу электрического заряда выберет заряд электрона и т. д.

У каждой системы единиц есть свои преимущества и недостатки. Нельзя ставить вопрос: «Какая из систем правильнее?» Он не имеет смысла.

В соответствии с ГОСТом в нашей стране преимущественной считается Международная система единиц (СИ).

В СИ имеется семь основных величин, но в механике нужны лишь три из них: время, длина, масса. Остальные будут вводиться по мере надобности в других разделах курса.

В первоначальном варианте метрической системы единиц основные единицы длины и времени определялись соответственно как некоторая часть длины земного меридиана и некоторая часть суток. Но форма Земли может изменяться, да и измерения длины меридиана не особенно точны; продолжительность суток оказалась не строго постоянной. Поэтому в СИ основные единицы определяются иначе – через оптические характеристики атома, по-видимому, строго неизменные в данных физических условиях и поддающиеся наиболее точному измерению (при современном состоянии измерительной техники).

Секунда равна промежутку времени, в течение которого эталон частоты (атомы цезия $^{132}_{55}\text{Cs}$) совершает 9 192 631 770 колебаний.

Читатель должен обратить внимание на поразительно высокую точность измерения частоты (ошибка возможна лишь в одиннадцатом десятичном знаке).

Из специальной теории относительности (см. гл. 9) известно, что скорость света в вакууме является постоянной величиной, не зависящей от условий ее измерения. Это позволяет ввести в СИ следующее определение единицы длины – метр.

Метр равен расстоянию, проходимому в вакууме плоской электромагнитной волной за $1/299\,792\,458$ долю секунды.

Таким образом, *скорость света принята равной точно*

$$c = 299\,792\,458 \text{ м/с.}$$

Третья основная единица – единица массы. Было бы логично связать ее определение с массой одной из элементарных частиц (например, стабильного протона – ядра атома водорода). Однако точность измерения массы элементарных частиц в настоящее время меньше, чем массы макроскопического тела небольших размеров. Поэтому в СИ сохранено прежнее определение *единицы массы* – килограмм, приведенное в § 2.2¹.

Остальные механические единицы являются производными от основных. При определении производных величин разрешается выражать их не только через основные, но и через ранее определенные производные величины. Так, например, работу можно выразить через силу и перемещение.

¹ Читателя может удивить название единицы массы «килограмм», содержащее приставку «кило» (тысяча). Эта нелогичность связана с историческими причинами: раньше широко известна была единица массы – грамм.

Кроме рассмотренных закономерностей построения системы единиц в физике применяются еще *формулы размерностей*.

Символическая формула, устанавливающая связь производных величин с основными (без количественной характеристики) называется *формулой размерности*.

Для основных величин СИ условно приняты следующие размерности: для длины l – L, времени t – T, массы m – M. Размерность величины X обозначается $\dim X$ (от англ. *dimension* – размерность). Тогда для некоторых уже известных нам величин формулы размерности выглядят так:

$$\dim v = \frac{\dim s}{\dim t} = \text{LT}^{-1}\text{M}^0$$

(обычно размерность, входящую в нулевой степени, не пишут);

$$\dim F = \dim m \cdot \dim a = \text{LMT}^{-2}.$$

Очевидно, изменение масштаба единиц не сказывается на формуле размерности. Но эта формула позволяет определить, во сколько раз изменится вторичная единица, если изменить масштаб основных единиц.

Действительно, единица любой механической величины может быть описана формулой

$$[X] = [l^\alpha t^\beta m^\gamma],$$

где α , β , γ не обязательно должны быть целыми числами. Если теперь изменить масштаб основных единиц соответственно в a , b , c раз, то единица величины X , очевидно, изменится в $k = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ раз. При этом числовое значение (в каком-либо конкретном случае) изменится в $1/k$ раз.

В *любом уравнении*, выражающем физический закон или связывающем физические величины, *размерность обеих частей обязательно должна быть одинакова*. Это дает возможность контролировать справедливость устанавливаемых при физических расчетах соотношений.

Если закон связывает ранее установленные величины в новой комбинации, то приходится вводить коэффициент пропорциональности, обеспечивающий числовое равенство обеих частей уравнения и их одинаковую размерность.

Так, квадрат периода колебаний T математического маятника определяется отношением длины маятника l к ускорению свободного падения g . Размерность здесь соблюдена. Но для получения числового соотношения необходимо ввести безразмерный множитель пропорциональности:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}.$$

Согласно закону всемирного тяготения, установленному Ньютоном, сила взаимодействия двух материальных точек пропорциональна их массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния. Так как единицы длины, времени и массы и их размерности уже установлены, то в запись закона приходится ввести коэффициент пропорциональности – постоянную тяготения G , имеющую определенное числовое значение и наименование, а именно

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}; \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2; \quad \dim G = \text{Л}^3 \text{Т}^{-2} \text{М}^{-1}.$$

В конце книги приводится таблица важнейших величин, применяющихся в системе СИ.

Так как числовые значения физических величин иногда различаются на много порядков, то введены множители для образования кратных и дольных величин, отличающиеся друг от друга на три порядка. Они также приводятся в конце книги.

2.5. Силы в механике Ньютона

Несмотря на кажущееся разнообразие взаимодействий, все они условно могут быть сведены к четырем фундаментальным взаимодействиям: *гравитационному, электромагнитному, сильному (ядерному) и слабому*. Последние – взаимодействия между микрочастицами, их изучают в ядерной физике. Так как в подавляющем большинстве явлений, рассматриваемых в данном курсе, атомные ядра никаким изменениям не подвергаются, мы будем иметь дело главным образом только с первыми двумя типами взаимодействий. Заметим лишь, что по мере развития науки появляется тенденция к более общему подходу в рассмотрении фундаментальных взаимодействий. Так, в свое время были объединены электрическое и магнитное взаимодействия, в последние годы создана единая теория для электромагнитного и слабого взаимодействий и ведется разработка еще более всеобъемлющих теорий.

Как уже указывалось, для решения механических задач необходимо знать модуль и направление действующих сил, а природа их не играет никакой роли (см. § 2.3).

Сам Ньютон знал только силы тяготения, упругие силы и силы трения. С современной точки зрения им соответствуют гравитаци-

онное и электромагнитное фундаментальные взаимодействия. Приведем о них лишь краткие сведения, необходимые для решения задач в механике: более детальное изучение сил и их свойств составляет в сущности предмет всего курса физики.

А. Гравитационное взаимодействие – взаимное притяжение всех тел природы, не зависящее от свойств промежуточной среды; широко известный пример – притяжение тел Землей.

Закон взаимодействия материальных точек массами m_1 и m_2 (закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном в конце XVII в.) записывается так:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{R_{12}^3} \vec{R}_{12}, \quad (2.8)$$

где *постоянная тяготения* $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$. Вектор \vec{R}_{12} (см. рис. 2.1, а) направлен вдоль линии, соединяющей взаимодействующие тела, от точки с массой m_1 к точке с массой m_2 .

Этот закон можно представить и в таком виде:

$$\vec{F}_{12} = m_2 \vec{\Gamma}_1,$$

где $\vec{\Gamma}_1$ – величина, характеризующая силу, с которой материальная точка массой m_1 притягивает единичную массу в той точке пространства, где находится точка массой m_2 ; эту величину называют *напряженностью поля* тяготения (понятие поля как определенной формы материи будет развито позже, в гл. 12), или *ускорением*. Вблизи поверхности Земли напряженность поля тяготения Земли есть *ускорение свободного падения* ($\vec{\Gamma}_1 = \vec{g}$), причем $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

Б. Электромагнитные взаимодействия, возникающие между неподвижными или движущимися зарядами и связанными с ними электрическими и магнитными полями. Ими обусловлены различные силы межатомного и межмолекулярного типа. Механика Ньютона применима при макроскопических взаимодействиях и не слишком быстром движении заряженных частиц (ионов и электронов); но во внутриатомном мире механика Ньютона неприменима. В частности, взаимодействие между точечными неподвижными электрическими зарядами (см. рис. 2.1, б) подчиняется закону, открытому Ш. Кулоном (1736–1806):

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R_{12}^3} \vec{R}_{12} = q_2 \vec{E}_1,$$

где $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м/Кл}^2$, q_1, q_2 – электрические точечные заряды, выражаемые в кулонах (Кл); ε – относительная диэлектрическая проницаемость однородной безграничной среды, окружающей заряды

(она показывает, во сколько раз взаимодействие в данной среде уменьшается по сравнению с взаимодействием в вакууме; ϵ – безразмерная величина); \vec{E}_1 – напряженность в той точке поля, где находится заряд q_2 .

Электромагнитное действие на заряд q , движущийся со скоростью \vec{v} , описывается более сложно – силой Лоренца. Она равна:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}],$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля, \vec{B} – индукция магнитного поля.

Скорости упорядоченно движущихся зарядов в твердых и жидких телах не превышают $10^{-4} - 10^{-3}$ м/с. В газах они возрастают в десятки тысяч раз, а в вакууме могут быть доведены до скорости, близкой к скорости света; в этом последнем случае движение уже не подчиняется ньютоновской механике. Так как напряженности полей могут меняться со временем, то и электромагнитные силы могут быть функциями времени.

Электромагнитные воздействия определяют и известные уже Ньютону упругие силы, возникающие при деформации макроскопических тел. Малые деформации Δx подчиняются закону Гука (см. §2.1):

$$F_x = -k\Delta x,$$

где жесткость k – постоянная величина, F_x – сила упругости. При больших деформациях закон Гука нарушается.

Этими же взаимодействиями объясняются и силы трения между соприкасающимися покоящимися или движущимися телами, зависящие от относительной скорости последних. Эти силы рассмотрены в §3.4 и 5.9.

Несмотря на кажущуюся простоту, законы Ньютона весьма содержательны и область их применения чрезвычайно широка.

Законам Ньютона подчинено движение небесных тел, космических кораблей, запускаемых человеком, разнообразных механизмов современной техники, заряженных частиц в слабых электрических и магнитных полях, молекул газа при не слишком больших давлениях и не слишком низких температурах.

Отклонения от законов Ньютона наблюдаются в микромире, а также при очень больших скоростях, когда классическая механика заменяется более общей – механикой специальной теории относительности. Но последняя не отменяет, как будет показано ниже, механику Ньютона, а включает ее как предельный случай.

Применяя законы Ньютона к тем или иным проблемам, следует всегда помнить, что они сформулированы для инерциальных сис-

тем и применимы без оговорок только в таких системах отсчета. Подводя итог их первичному рассмотрению, отметим, что законы Ньютона, как и другие фундаментальные законы природы, являются обобщением опытных фактов, постулатами, которые могут быть проверены в области их применимости с доступной для данного времени степенью точности, но не доказаны.

2.6. Преобразования и принцип относительности Галилея

Для описания движения материальной точки (или поступательно движущегося тела) нужно задать закон изменения со временем ее положения, скорости и ускорения.

Иногда при исследовании движений приходится переходить от одного тела отсчета (с системой координат $OXYZ$) к другому (с системой координат $O'X'Y'Z'$), движущемуся относительно первого с постоянной скоростью \vec{v} .

Полагая (что не уменьшает общности рассмотрения), что соответствующие координатные оси обеих систем параллельны друг другу, что скорость \vec{v} направлена вдоль оси X и что отсчет времени ($t = 0$) начат в тот момент, когда начала координат совпадали друг с другом, найдем соотношения, связывающие координаты (x, y, z и x', y', z') некоторой точки в обеих системах:

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, & x &= x' + vt, \\y' &= y, & y &= y', \\z' &= z, & z &= z'.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Эти кинематические соотношения называются преобразованиями Галилея (при их записи сделано важное физическое допущение: время в обеих системах течет одинаково, т. е. $t' = t$).

Найдем теперь проекции скоростей \vec{u}, \vec{u}' и ускорений \vec{a}, \vec{a}' движущейся точки на оси координат и установим связь между ними; для упрощения записи применим часто используемые обозначения:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= \dot{x} - v, & \dot{x} &= \dot{x}' + v, \\ \dot{y}' &= \dot{y}, & \dot{y} &= \dot{y}', \\ \dot{z}' &= \dot{z}, & \dot{z} &= \dot{z}'.\end{aligned}$$

Поэтому получается:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}. \quad (2.10)$$

Далее

$$\ddot{x}' = \ddot{x}, \quad \ddot{y}' = \ddot{y}, \quad \ddot{z}' = \ddot{z} \quad (\text{так как } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}).$$

Итак,

$$\vec{a}' = \vec{a}. \quad (2.11)$$

Таким образом, если известны положение и скорость точки в одной системе, то можно определить ее координаты и скорость в другой системе.

Эти величины (для данной точки) отличаются друг от друга. Однако расстояния между двумя точками $(x_1 - x_2)$ и $(x'_1 - x'_2)$, как и относительные скорости этих точек $(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$ и $(\vec{u}'_1 - \vec{u}'_2)$, в обеих системах координат одинаковы.

Особенно важно, что *ускорения точки \vec{a}' и \vec{a} в обеих системах одинаковы*. Эти заключения справедливы для всех инерциальных систем. Уравнения (2.9) – (2.11) называют *преобразованиями Галилея*, а уравнения (2.10) – *законом сложения скоростей Галилея*.

Глубокий смысл преобразований Галилея будет выяснен в гл. 9. Сейчас отметим лишь, что они основываются на обсужденном ранее принципе независимости движений.

Из преобразований Галилея следует, что ускорение данной материальной точки во всех инерциальных системах одинаково. Так как масса точки в ньютоновской механике не зависит от скорости, то и она постоянна во всех инерциальных системах отсчета. Силы в механике Ньютона могут зависеть от расстояния между взаимодействующими телами и от их относительных скоростей. Так как эти величины не меняются *при переходе от одной инерциальной системы к другой*, то *силы также не меняются*. Таким образом, форма второго закона Ньютона – основного закона классической механики – сохраняется в любых инерциальных системах отсчета.

Кроме того, все сказанное означает, что равномерное прямолинейное движение не влияет на механические явления и что никакими механическими опытами, произведенными внутри системы, невозможно обнаружить ее прямолинейное и равномерное движение. Иначе говоря, **во всех инерциальных системах механические явления (при одинаковых начальных условиях) происходят одинаково**.

Так, тело, падающее в вертикальном направлении, во всех инерциальных системах, движущихся равномерно и горизонтально, совершает одинаковое вертикальное перемещение.

Но наблюдатели, находящиеся в двух инерциальных системах, могут обнаружить, что в одной из них тело падает прямолинейно,

в другой – по параболе, что объясняется различием начальных условий: для одного наблюдателя горизонтальная начальная скорость равна нулю, для другого отлична от нуля.

Итак, основное уравнение механики не изменяется при преобразованиях Галилея, т. е. не зависит от прямолинейного и равномерного движения системы отсчета.

Это важное заключение, называемое *принципом относительности Галилея*, является одним из самых общих принципов классической механики. Сам Галилей, обосновавший это положение, проиллюстрировал его следующими замечательными словами: «Заключите себя с каким-нибудь приятелем в возможно просторном помещении под палубой большого корабля и пустите туда мух, бабочек и других подобных маленьких летающих животных. Пусть будет там также большой сосуд с водой и в нем рыбки. Повесьте также на потолок ведро, из которого капля за каплей вытекала бы вода в другой сосуд с узким отверстием, находящийся внизу под ним. Пока не движется корабль, наблюдайте, как эти летающие животные с равной быстротой будут летать во все стороны комнаты. Увидите, что рыбы будут плавать безразлично во все стороны; падающие капли будут падать все в подставленный сосуд... Наблюдайте хорошенько за всем этим и заставьте привести в движение корабль с какой угодно быстротой. Если движение будет равномерно, то вы не заметите ни малейшей перемены во всех указанных действиях и ни по одному из них не в состоянии будете судить, движется ли корабль или стоит на месте... Капли будут падать, как прежде, в нижний сосуд, и ни одна не упадет по направлению к корме, несмотря на то, что в то время как капля находится в воздухе, корабль уходит вперед на несколько локтей. Рыбы в своей воде не с большим трудом будут плавать к одной, чем к другой стороне сосуда, и будут приходить с одинаковой ловкостью к пище, положенной на какое угодно место края сосуда. Наконец, бабочки и мухи будут летать по-прежнему во все стороны и не будут держаться более около той стены, которая ближе к корме, как будто устали следовать за быстрым ходом корабля, от которого они, найдясь долго в воздухе, как будто разъединены. А причина того, что все эти действия так соответствуют одно другому, заключается в том, что движение корабля обще всему находящемуся в нем – и воздуху».

В заключение сформулируем еще раз принцип относительности Галилея: законы механики выглядят одинаково во всех ИСО. Все системы, движущиеся равномерно и прямолинейно относительно ИСО, являются инерциальными. Механические явления во всех ИСО протекают одинаково (в одинаковых условиях).

2.7. Основные задачи динамики материальной точки (простейшие примеры)

Задачи, решаемые в динамике, сводятся к двум основным:

1) рассчитать движение по заданным силам (и начальным условиям);

2) по заданному движению найти вызывающие его силы.

В первом случае используются уравнения движения (второй закон Ньютона), причем действующие силы должны быть заданы в каждый момент времени. Кроме того, необходимо знание начальных условий, например, значений смещения и скорости в начальный (или иной) момент времени. Интегрируя уравнение движения по времени, получают выражения для скорости и смещения в зависимости от времени.

Обычно эти решения используют для предсказания будущих движений относительно $t = 0$ (время положительно). Но с таким же успехом время можно считать и отрицательным, т. е. исследовать прошлое (конечно, в обоих случаях предполагается, что никаких новых сил не появляется).

Так как силы и начальные условия могут быть заданы лишь с известной степенью точности, то и полученные решения верны только с ограниченной точностью и с течением времени могут накапливаться значительные ошибки. Поэтому в реальных условиях (например, при космических полетах) через определенные промежутки времени истинное положение космического корабля проверяется опытным путем, и эти новые данные используются как новые начальные условия для нового решения уравнений движения.

Во втором случае задается закон смещения (изменение координат точки со временем) и задача сводится к нахождению скорости и ускорения, по которым можно судить и о действующих силах.

Если изучается поступательное движение макроскопического тела, то все его точки движутся одинаково, поэтому достаточно изучить движение одной из них. Однако не следует забывать, что тело может двигаться и более сложным образом.

Примером задач первого типа служит задача о движении тела, брошенного под углом к горизонту (см. § 1.6, задача 2). Только нужно в условии задачи приписать точке массу, а вместо ускорения \vec{g} задать вертикальную силу $\vec{F} = m\vec{g}$.

Примером задач второго типа может быть такая: «Материальная точка, имеющая массу m , равномерно обращается по окружности радиусом R с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Найти действующую силу».

Выберем оси координат, имеющие начало в центре окружности (рис. 2.2). Проецируя мгновенный вектор скорости на эти оси, находим проекции скорости:

$$\begin{aligned} v_x &= -v \sin \alpha = -v \sin (\omega t + \varphi_0); \\ v_y &= v \cos \alpha = v \cos (\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $v = \omega R$, а значение угла φ_0 определяется выбором начала отсчета времени. Если при $t = 0$ точка находилась в самом верхнем положении, то начальная фаза φ_0 равна $\pi/2$.

Беря производные по времени, находим проекции ускорения:

$$a_x = -\omega v \cos (\omega t + \varphi_0); \quad a_y = -\omega v \sin (\omega t + \varphi_0).$$

Проекция силы, действующей на точку, равны:

$$F_x = ma_x; \quad F_y = ma_y.$$

Поэтому модуль силы, действующей на точку, равен:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\omega v = m\omega^2 R = m \frac{v^2}{R}.$$

Эта сила все время направлена к центру окружности, поэтому ее часто называют центростремительной.

Обсудим теперь несколько демонстраций, часто показываемых на лекциях.

1. На массивной платформе расположены лампочка накаливания и источник питания; цепь замыкается пружиной, изогнутой действием веса тела массой m (рис. 2.3, пружина в положении *a*).

Если приподнять тело, то контакт нарушится, лампочка погаснет (рис. 2.3, пружина в положении *b*). Такой же результат дало бы и уменьшение веса тела.

Прибор закрепляют на тросе, переброшенном через блок. Подняв прибор, предоставляют ему возможность падать. При этом лампочка гаснет. Требуется объяснить явление.

Объяснение. Когда прибор был неподвижен относительно Земли, вес груза вызывал изгиб пружины, достаточный для того,

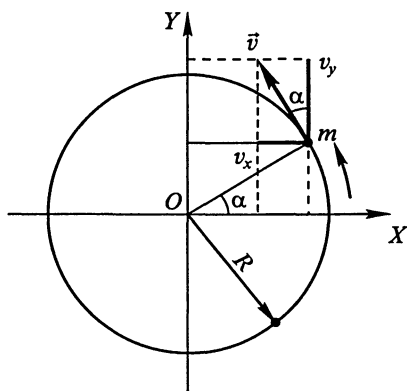


Рис. 2.2

чтобы контакт замкнулся; лампочка горела.

Когда же тело падает (не совсем свободно, ускорение получается несколько меньшим \vec{g}), то сила $\vec{F} = m\vec{g}$ проявляет себя и динамически, обеспечивая ускорение, и статически, вызывая изгиб пружины, но меньший, чем в первом случае. Контакт при этом размыкается. Как только прибор останавливается, лампочка снова вспыхивает.

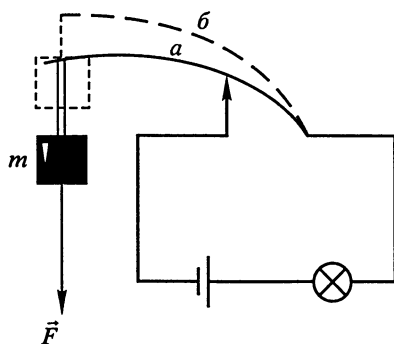


Рис. 2.3

2. На нити 1 (рис. 2.4) подвешен массивный шар (или диск) массой m (нить растянута весом шара почти до предела прочности); снизу к шару прикреплена такая же (или даже более прочная) нить 2.

Если сильно дернуть за конец нити 2, то она рвется. Если же тянуть ее с небольшой силой, то рвется нить 1.

Объяснение. Согласно второму закону Ньютона изменение импульса шара

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t.$$

Большая сила \vec{F} , действуя очень малое время Δt , практически не изменяет импульса; шар не успевает прийти в движение, а потому натяжение нити 1 практически не меняется. Нить же 2, растягиваемая большой силой \vec{F} , рвется.

Когда же сила \vec{F} невелика, то она не может разорвать нить 2. Длительность ее действия на шар увеличивается, его импульс растет; шар начинает смещаться вниз, увеличивая натяжение нити 1, что и приводит через некоторое время к ее разрыву.

3. На центробежную машину ставят сосуд с жидкостью (рис. 2.5, а); на раме, прикрепленной к сосуду, подвешены маятники. При вращении сосуда вокруг вертикальной оси наблюдается отклонение маятников от вертикали (тем большее, чем они дальше расположены от оси) и искривление поверхности жидкости; оба явления выражены тем сильнее, чем больше угловая скорость вращения сосуда. Устойчивое состояние достигается не сразу, но мы обсудим именно его.

Объяснение. В начале вращения в движение приходит точка подвеса А маятника: лишь благода-

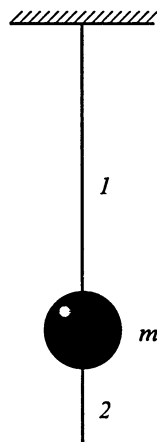


Рис. 2.4

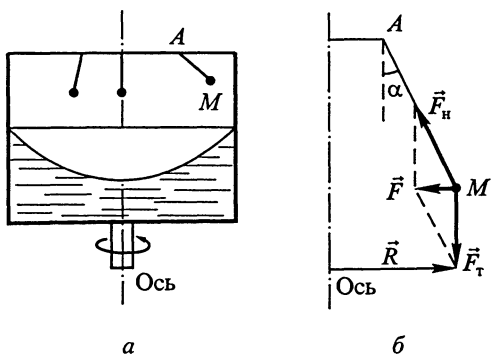


Рис. 2.5

ря изменению натяжения нити постепенно ускоряется и шарик массой M . При установившемся движении (рис. 2.5, б) сумма сил упругости натянутой нити \vec{F}_H и тяжести $\vec{F}_T = M\vec{g}$, лежащих в каждый момент времени в плоскости чертежа, должна обеспечить необходимое для вращения центростремительное ускорение $\vec{a}_ц = -\omega^2\vec{R}$. Следовательно,

$$M\vec{a} = \vec{F}_H + M\vec{g} = -M\omega^2\vec{R}, \quad (2.13)$$

где \vec{R} – радиус-вектор устойчивого вращения. Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 R}{g} \quad (2.14)$$

и угол отклонения от вертикали α растет вместе с угловой скоростью и расстоянием от оси вращения.

Отметим, что этот же эффект приводит к уменьшению веса тела на вращающейся Земле (см. § 8.2). Но угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси мала, а потому эффект мал даже на экваторе (радиус R наибольший) – всего 0,3%.

Искривление поверхности жидкости (см. рис. 2.5, а) вызвано той же причиной, что и отклонение маятника. Можно показать, что поверхность жидкости принимает (при устойчивом вращении) форму параболоида вращения.

4. На гладкую горизонтальную доску кладут брусок массой m ; затем доску приводят в наклонное положение (рис. 2.6), постепенно увеличивая угол наклона. Брусок остается в покое до некоторого значения угла α , а при дальнейшем увеличении угла наклона начинает скользить по доске вниз.

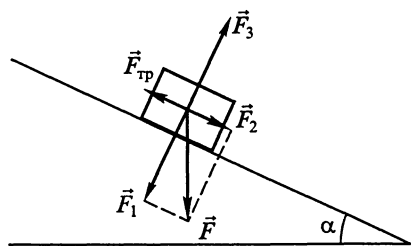


Рис. 2.6

Объяснение. Пока доска расположена горизонтально, брусок давит на нее с силой, равной по модулю mg . Происходит не-

большая деформация поверхности и создается противодействующая сила упругости.

Кроме того, возникает касательная к поверхности соприкосновения этих тел – сила трения покоя, препятствующая движению бруска по доске, если последняя не строго горизонтальна. Как будет показано в § 3.4, эта сила не может превосходить (по модулю) некоторого максимального значения $F_{\text{тр}}$, зависящего от условий эксперимента. Когда доска наклонена на угол α , то модуль составляющей силы тяжести, параллельной наклонной плоскости, оказывается равным $mg \sin \alpha$. Как только он сравняется с модулем наибольшей силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, брусок начнет скользить.

2.8. Работа и кинетическая энергия

Запишем второй закон Ньютона в форме

$$d\vec{p} = \vec{F}dt. \quad (2.15)$$

Импульс $\vec{p} = m\vec{v}$ характеризует состояние точки; его изменение (левая часть 2.15), очевидно, является характеристикой изменения ее состояния. Правая же часть (2.15) определяет взаимодействие точки с другими физическими телами (или материальными точками), длящееся в течение времени dt .

Интегрируя (2.15) за конечный промежуток времени $(0, t)$, находим, что результатом взаимодействия является конечное изменение механического импульса:

$$\Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F}dt. \quad (2.16)$$

Попробуем теперь подойти к рассмотрению того же вопроса с других позиций. Для этого умножим (2.15) скалярно на мгновенную скорость точки \vec{v} . Получим:

$$\vec{v} \cdot d\vec{p} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = \vec{F} \cdot d\vec{R}, \quad (2.17)$$

где $d\vec{R} = \vec{v}dt$ – элементарное перемещение точки.

В классической механике масса постоянна, так что ее можно вынести за знак дифференциала:

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{R} = F dR \cos(\widehat{\vec{F}, d\vec{R}}) = F_R dR. \quad (2.18)$$

Здесь F_R – проекция внешней силы на направление перемещения. Знак правой части зависит от знака косинуса; косинус положителен, если сила сонаправлена с перемещением.

Приращение вектора скорости можно представить в виде

$$d\vec{v} = d\vec{v}_{\parallel} + d\vec{v}_{\perp},$$

где $d\vec{v}_{\parallel}$ параллельно \vec{v} , а $d\vec{v}_{\perp}$ перпендикулярно ему. Произведение

$$\vec{v} \cdot d\vec{v}_{\parallel} = v dv_{\parallel} \cos(\widehat{\vec{v}, d\vec{v}})$$

может иметь разные знаки в зависимости от знака косинуса. Произведение же $\vec{v} \cdot d\vec{v}_{\perp}$ равно нулю.

Физическую величину

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{R},$$

равную скалярному произведению силы на элементарное перемещение, называют *элементарной работой силы*.

Проинтегрируем (2.18):

$$m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \int_{v_1}^{v_2} v dv_{\parallel} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{F} \cdot d\vec{R}. \quad (2.19)$$

Левая часть интегрируется легко; в правой же сила может изменяться. Таким образом, из (2.19) получаем:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{F} \cdot d\vec{R} = A. \quad (2.20)$$

Правая часть представляет работу силы на конечном перемещении, т. е. *работа является характеристикой процесса взаимодействия*.

Левая же часть определяет изменение новой *функции состояния* движущейся точки (тела). Функция, характеризующая состояние точки и равная

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad (2.21)$$

где p – модуль импульса, называется *кинетической энергией*. Поэтому уравнение (2.20) можно прочесть так: *работа силы на некотором перемещении определяет изменение кинетической энергии движущейся материальной точки*:

$$A = \Delta K. \quad (2.22)$$

Значение A , как и ΔK , может быть положительным или отрицательным. Сила, действующая в направлении перемещения, ускоряет точку и совершает положительную работу; при этом кинетическая энергия точки увеличивается.

Величины A и K отличаются по своему физическому смыслу, но имеют одинаковую размерность:

$$\dim A = \dim K = \dim F \cdot \dim R = L^2 T^{-2} M. \quad (2.23)$$

Их принято выражать в одинаковых единицах. В СИ за единицу работы принят джоуль (сокращенно: Дж):

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}. \quad (2.24)$$

Ясно, что если на свободную точку (тело) действует только одна сила, то кинетическая энергия точки обязательно будет изменяться и работа при этом совершается.

Но рассмотрим автомобиль, движущийся по шоссе равномерно и прямолинейно. В этом случае $K = \text{const}$. Но ведь двигатель, несомненно, работает, создавая силу тяги \vec{F}_1 , действующую в направлении перемещения, т. е. совершающую положительную работу A_1 . Нет ли здесь противоречия с уравнением (2.20)? Конечно, нет. Дело в том, что кроме силы тяги на колеса автомобиля, взаимодействующие с полотном дороги, действует еще сила трения качения \vec{F}_2 , тормозящая движение. Так как она направлена противоположно перемещению, то $\alpha = 180^\circ$ и совершаемая ею работа отрицательна: $A_2 < 0$.

При этом так как по второму закону Ньютона $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, т. е. $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, то $A_1 = -A_2$.

Полная работа

$$A = A_1 + A_2 = 0. \quad (2.25)$$

В данном примере результатом работы сил является не изменение механических характеристик движения (\vec{v} , \vec{p} , K), а нагревание колес и полотна дороги.

Этот пример заставляет внимательнее присмотреться к особенностям результатов действия различных сил.

Оказывается, что силы могут быть разбиты на два класса:

1) *консервативные силы (системы)*, результатом действия которых может быть изменение механического состояния системы (т. е. относительных положений и скоростей ее частей);

2) *неконсервативные (диссипативные) силы*, в результате действия которых кроме механических изменений в системе происходят и немеханические изменения (например, нагревание частей системы).

В дальнейшем их свойства будут обсуждены более подробно.

Физическую величину, равную отношению работы, произведенной над точкой за время dt к этому времени, называют мощностью:

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (2.26)$$

Размерность мощности:

$$\dim N = L^2 T^{-3} M.$$

Единица мощности в СИ называется ваттом (сокращенно: Вт):

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с.} \quad (2.27)$$

Спокойно идущий человек развивает мощность около 50 Вт; тренированный спортсмен может развить кратковременную мощность до 1,5 кВт.

Следует заметить, что физическое понятие «работа» менее обширно, чем общежитейское. Так, с точки зрения физики, студент, изучающий книгу, или диктор телевидения, читающий «Новости», работы не совершают.

2.9. Потенциальная энергия. Закон сохранения и превращения механической энергии

Понятие энергии как характеристики состояния объекта является одним из основных не только в механике, но вообще в физике. Даже при изучении простейших механических движений оно не сводится для несвободных тел лишь к кинетической энергии.

Выясним, что происходит при действии силы на несвободную точку (тело), на следующем простом примере.

Невесомая пружина с постоянной жесткостью k расположена горизонтально. Один ее конец закреплен (рис. 2.7), а к другому прикреплено тело массой m и приложена сила \vec{F} , растягивающая пружину. Пусть в момент $t = t_0$ растяжение пружины есть x_0 , а скорость перемещения тела равна \vec{v}_0 . Сила упругости, развиваемая растянутой пружиной, равна $\vec{f}_0 = -k\vec{x}_0$. Так как внешняя сила продолжает действовать, то растяжение пружины увеличивается. Пусть оно достигает значения x_a .

Найдем работу внешней силы на перемещении $(\vec{x}_a - \vec{x}_0)$. Вторым закон Ньютона дает:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \vec{f} = \vec{F} - k\vec{x}. \quad (2.28)$$

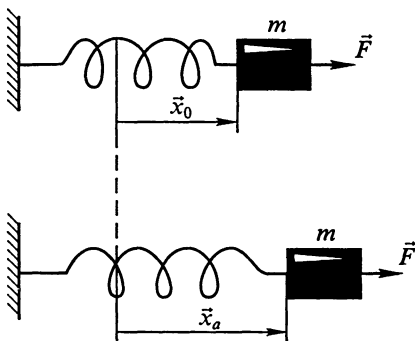


Рис. 2.7

Так как все векторы направлены по оси X , то в дальнейшем можно пользоваться скалярной формой записи (конечно, учитывая знаки проекций):

$$m \frac{dv}{dt} + kx = F. \quad (2.29)$$

Умножим обе части (2.29) на $dx = vdt$ и проинтегрируем. Получим полную работу, совершенную силой \vec{F} :

$$A = \int_{x_0}^{x_a} F dx = \int_{v_0}^{v_a} m v dv + \int_{x_0}^{x_a} k x dx = \frac{1}{2} m (v_a^2 - v_0^2) + \frac{k}{2} (x_a^2 - x_0^2). \quad (2.30)$$

Мы видим, что в результате совершения силой работы не только увеличивается кинетическая энергия тела массой m , но и изменяется форма пружины, что учитывается вторым слагаемым, представляющим собой *прирост энергии деформации (потенциальной энергии)*.

Энергия деформации, как и кинетическая энергия тела, является функцией состояния пружины:

$$U = \frac{1}{2} kx^2 + C, \quad (2.31)$$

где постоянная C определяет энергию деформации при $x = 0$; в нашем частном примере принято, что $C = 0$.

При надлежащем подборе внешней силы прирост кинетической энергии может быть сделан весьма малым, так что изменение энергии деформации (потенциальной энергии) будет играть основную роль.

Из приведенного примера видно, что *потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной*. Но так как при всех физических процессах важно не абсолютное значение потенциальной энергии, а ее изменение, то значение постоянной в (2.31) может быть выбрано произвольно.

Если теперь убрать силу \vec{F} , то растяжение пружины начнет уменьшаться и, наконец, исчезнет. Пружина придет в первоначальное состояние и будет сжиматься дальше.

В рассмотренном примере развивавшаяся сила упругости пружины

$$f_x = -kx \quad (2.32)$$

совершала отрицательную работу при растяжении и положительную – при сжатии; полная ее работа по замкнутой траектории ($x_0x_ax_0$) равна нулю:

$$A = - \int_{x_0}^{x_0} kx dx = 0. \quad (2.33)$$

Следовательно, сила упругости должна быть отнесена к классу консервативных сил.

Пример позволил выявить два свойства этой консервативной силы:

а) она зависит только от значения деформации;

б) ее работа по замкнутой траектории равна нулю. Слово «потенциальная» подчеркивает зависимость энергии от деформации взаимодействующих тел, а также от их взаимного расположения, и возможность получения работы за счет ее изменения.

Поясним сказанное простым примером. Пусть точка массой M скользит по наклонной плоскости без трения (рис. 2.8). На точку действует сила тяжести $\vec{F} = M\vec{g}$. Пусть в момент $t = 0$ точка находится в положении 1 и имеет скорость \vec{v}_1 . В положении 2 ее скорость увеличится до значения \vec{v}_2 , причем прирост кинетической энергии

$$\Delta K = \frac{1}{2}M(v_2^2 - v_1^2) = K_2 - K_1 \quad (2.34)$$

равен работе, совершенной силой тяжести:

$$A = mgy_1 - y_2. \quad (2.35)$$

Эта работа зависит только от ординат начальной (y_1) и конечной (y_2) точек траектории, но не от ее формы.

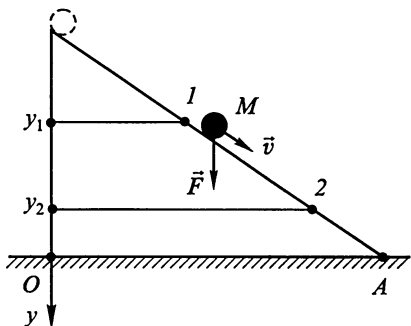


Рис. 2.8

Если бы мы вернули точку в начальное положение, то работа силы тяжести при этом возвращении равнялась бы $-A$. Значит, работа силы тяжести по замкнутому контуру равна нулю и сила тяжести, как и сила упругости, является консервативной силой.

Назовем величину

$$U_i = -Mgy_i + C \quad (2.36)$$

потенциальной энергией тяготения точки массой M в точке с ординатой y_i . Тогда (2.35) можно представить в виде

$$A = -(U_2 - U_1) = -\Delta U. \quad (2.37)$$

Следовательно,

$$\Delta K = -\Delta U, \quad (2.38)$$

т. е. прирост кинетической энергии равен убыли потенциальной.

Из (2.38) следует:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = E = \text{const}, \quad (2.39)$$

где E – полная механическая энергия точки. Такой же результат получился бы и в примере с растянутой пружиной, если бы мы предположили, что в момент $t = 0$ она растянута на отрезок x_0 , имеет нулевую скорость и в этот момент внешняя сила устраняется. Тогда, сокращаясь, пружина уменьшала бы свою потенциальную энергию, увеличивая кинетическую энергию тела массой m . В точку $x = 0$ тело пришло бы со скоростью \vec{v} , и сумма энергий K и U оставалась бы постоянной (в отсутствие трения!).

Результат (2.39) мы получили при условии, что сила $\vec{F} = \text{const}$. Но он остается справедливым и в случае силы взаимодействия, меняющейся с расстоянием.

Действительно, пусть две точки массами m_1 , m_2 притягиваются с некоторой силой $\vec{F}(R)$, зависящей только от расстояния R между ними и направленной по прямой, соединяющей эти точки (рис. 2.9). Начало координат совместим с точкой массой m_1 . Пусть точка массой m_2 переходит по произвольному пути из положения 1 в положение 2¹. Разбив траекторию на элементарные перемещения $d\vec{R}_2$, найдем элементарную работу силы \vec{F} :

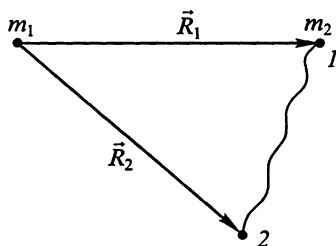


Рис. 2.9

$$dA = \vec{F}(R) \cdot d\vec{R} \quad (2.40)$$

(здесь dA является функцией только переменной \vec{R}).

Интегрируя по всей траектории, получим:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{R} = U(R_1) - U(R_2), \quad (2.41)$$

где $U(R)$ – функция координат.

¹ Разумеется, при этом на нее должны действовать и другие силы, не зависящие от R .

Полученное выражение показывает, что работа силы зависит только от положения взаимодействующих точек: функция $U(R)$, вид которой зависит от закона изменения силы $F(R)$, является потенциальной энергией точки массой m_2 в соответствующих ее положениях.

Часто потенциальную энергию точки массой m_2 в бесконечно удаленных точках пространства принимают равной нулю:

$$U(R) = 0. \\ R \rightarrow \infty$$

Тогда потенциальная энергия точки массой m_2 на конечных расстояниях от точки массой m_1 будет везде отрицательной, так как при сближении точек сила притяжения, действующая на точку массой m_2 , совершает положительную работу, а потому потенциальная энергия уменьшается.

В этих случаях можно дать такое определение потенциальной энергии: *потенциальная энергия материальной точки равна работе, которую должны совершить силы тяготения для перемещения этой точки с места ее нахождения в бесконечность.*

Итак, если имеются только консервативные силы, то справедлив закон сохранения и превращения механической энергии, выражаемый формулой (2.39):

$$E = K + U = \text{const.} \quad (2.42)$$

При обращении планет вокруг Солнца (если орбиту планеты приближенно считать круговой) сила тяготения все время перпендикулярна перемещению планеты, ее работа равна нулю. Поэтому планета движется, имея постоянную кинетическую и потенциальную энергию.

Но в общем случае криволинейного движения под действием силы тяготения (см. гл. 12) возможно движение по эллипсу, гиперболе или параболе. В этом случае сила уже не перпендикулярна скорости и может совершать работу. В результате при удалении от Солнца кинетическая энергия планеты уменьшается, а потенциальная – растет. При приближении к Солнцу изменения энергий меняют знаки.

Так как кинетическая энергия всегда положительна, то из (2.39) можно сделать важные выводы о возможном характере движений.

Очевидно, всегда выполняется условие

$$E \geq U.$$

Если, кроме того, мы принимаем $U(\infty) = 0$, то при $E > 0$ точка может удалиться в бесконечность, имея там конечную кинетическую энергию.

Если $E = 0$, то при $K = 0$ получится $U = 0$, т. е. точка может уйти на бесконечное расстояние, где будет иметь нулевую скорость.

Наконец, если $E < 0$, то при $K = 0$ получается $U = E$, а при $K > 0$ получается $U < E$. В этом случае точка не может удалиться на бесконечное расстояние, ее движение ограничено областью значений $U \leq E$. При этом точка массой m_2 может обращаться вокруг точки массой m_1 по эллипсу или окружности (см. также гл. 12).

Теперь несколько расширим рассмотрение вопроса об энергии, обсудив такую задачу. К концу вертикальной невесомой пружины (жесткость k) подвешивают тело массой m и отпускают его. Сначала под действием силы тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ тело движется ускоренно. Но при этом возникает сила упругости пружины, препятствующая движению.

При растяжении

$$x = \frac{mg}{k}$$

сумма сил обращается в нуль. Но тело имеет кинетическую энергию, поэтому продолжает двигаться вниз, однако замедленно, так как сила упругости по модулю превышает силу тяжести $m\vec{g}$. Когда вся кинетическая энергия перейдет в энергию деформации пружины, тело остановится и начнет снова подниматься. Если бы действовали только консервативные силы (силы тяготения и упругости), то возникли бы незатухающие колебания, длящиеся неопределенно долго. Но на опыте оказывается, что колебания постепенно затухают и тело останавливается, причем конечное растяжение пружины

$$x = \frac{mg}{k}.$$

При этом потенциальная энергия пружины возросла на величину

$$\Delta U_{\text{п}} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mgx,$$

а потенциальная энергия тела, притягиваемого Землей, уменьшилась на величину

$$\Delta U_{\text{т}} = -mgx = -2\Delta U_{\text{п}}.$$

Здесь есть кажущееся противоречие с уравнением (2.39): энергия системы уменьшилась.

В действительности, конечно, никакого противоречия нет; колебания системы прекращаются в основном вследствие действия не учтенной нами силы сопротивления окружающего воздуха. Сила сопротивления, как будет показано в главе 3, зависит от относительных скоростей соприкасающихся тел (пружины, груза и воздуха). Она не является консервативной, неконсервативна и сама система.

При колебаниях, как показывает более глубокий экспериментальный и теоретический анализ процесса, увеличивается энергия беспорядочного движения частиц тела и окружающего воздуха – вследствие трения они нагреваются. Как известно, *энергию беспорядочного движения рассматривают как часть внутренней энергии тела*. При нагревании тела его внутренняя энергия получает прирост $\Delta W_{\text{вн}}$.

В нашем случае только половина совершенной работы обеспечила деформацию пружины; вторая половина идет на увеличение внутренней энергии. Таким образом, вместо (2.39) следует написать более общее уравнение

$$E = K + U + W_{\text{вн}} = \text{const}, \quad (2.43)$$

выражающее *общий закон сохранения и превращения энергии*: в замкнутой системе сумма механической (кинетической и потенциальной) и внутренней энергии сохраняется; но энергия одного вида может переходить в энергию другого.

2.10. Момент импульса материальной точки. Момент силы. Уравнение моментов

После скалярного умножения уравнения движения материальной точки $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ на $d\vec{R}$ появилась возможность описать движение тела с помощью понятий кинетической энергии и работы силы. Если же уравнение движения материальной точки умножить векторно на радиус-вектор \vec{R} , то при описании движения можно использовать понятия момента импульса точки и момента силы. Представим себе, что тело массой m движется под действием силы \vec{F} в некоторой инерциальной системе отсчета. Умножая векторно обе части уравнения движения точки на \vec{R} – радиус-вектор, соединяющий точку с началом координат, получим:

$$\left[\vec{R}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{R}, \vec{F}]. \quad (2.44)$$

Левую часть полученного уравнения можно записать в виде:

$$[\vec{R}, \frac{d\vec{p}}{dt}] = \frac{d[\vec{R}, \vec{p}]}{dt}, \quad (2.45)$$

так как

$$\frac{d[\vec{R}, \vec{p}]}{dt} = [\frac{d\vec{R}}{dt}, \vec{p}] + [\vec{R}, \frac{d\vec{p}}{dt}] = [\vec{R}, \frac{d\vec{p}}{dt}] \quad (2.46)$$

из-за равенства нулю первого слагаемого в выражении (2.46).

С учетом (2.45) и (2.46) выражение (2.44) можно записать в виде:

$$\frac{d[\vec{R}, \vec{p}]}{dt} = [\vec{R}, \vec{F}]. \quad (2.47)$$

Физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора материальной точки на ее импульс, называется *моментом импульса* точки относительно начала координат. Момент импульса обозначим буквой \vec{L} . Таким образом,

$$\vec{L} = [\vec{R}, \vec{p}]. \quad (2.48)$$

Единицей момента импульса в СИ является $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$. Специального названия эта единица не имеет.

Физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора материальной точки на силу, действующую на точку, называется *моментом силы* относительно начала координат. Единица момента силы – $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ – также не имеет специального названия. Момент силы будем обозначать буквой \vec{M} . По определению,

$$\vec{M} = [\vec{R}, \vec{F}]. \quad (2.49)$$

С учетом введенных обозначений уравнение движения материальной точки в форме моментов можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2.50)$$

Направление векторов \vec{L} и \vec{M} определяется по правилу векторного произведения векторов или по правилу правого буравчика. Так, например, направление вектора \vec{L} будет совпадать с направлением поступательного движения буравчика, если его рукоятку поворачивать от вектора \vec{R} к вектору \vec{p} на наименьший угол (рис. 2.10).

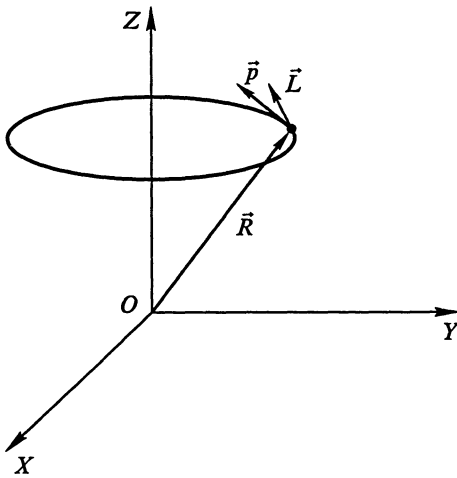


Рис. 2.10

сохранение момента импульса тела со временем. В частности, момент силы равен нулю, если сила, действующая на тело, имеет центральный характер, т. е. зависит от радиус-вектора \vec{R} . В этом случае векторное произведение \vec{R} и \vec{F} равно нулю из-за коллинеарности перемножаемых векторов. Примером таких сил являются гравитационные силы, действующие между телами.

Тело, двигаясь под действием центральных сил, сохраняет момент импульса, следствием чего является сохранение так называемой секториальной скорости точки. Понятие секториальной скорости вводится следующим образом. При движении по траектории точка за время dt совершит перемещение $d\vec{R}$. При этом радиус-вектор опишет бесконечно малый треугольник (рис. 2.11), площадь которого $d\vec{S}$ можно выразить с помощью векторного произведения \vec{R} и $d\vec{R}$:

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{R}, d\vec{R}] = \frac{1}{2}[\vec{R}, \vec{v}]dt. \quad (2.52)$$

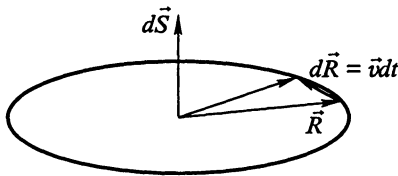


Рис. 2.11

Физическая величина, равная производной $d\vec{S}/dt$, называется секториальной скоростью точки:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{R}, \vec{v}]. \quad (2.53)$$

Если на тело действуют несколько сил, то вследствие принципа суперпозиции сил изменение момента импульса со временем будет определяться векторной суммой моментов отдельных сил, действующих на тело, т. е.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i, \quad (2.51)$$

где \vec{M}_i – момент силы \vec{F}_i относительно начала координат.

Если результирующий момент сил, действующих на тело, равен нулю, то $d\vec{L}/dt$ также равно нулю, что означает

Сравнивая выражения (2.48) и (2.53), можно записать:

$$\vec{L} = 2m \frac{d\vec{S}}{dt}. \quad (2.54)$$

Если момент импульса \vec{L} сохраняется при движении под действием центральных сил, то при этом сохраняется и секториальная скорость $d\vec{S}/dt$. Отсюда следует, что плоскость, в которой лежат векторы \vec{R} и \vec{v} , не изменяет со временем своего положения в пространстве, и радиус-вектор, проведенный из центра действия силы, при движении тела за равные промежутки времени «заметает» равные площади.

Векторное уравнение моментов (2.48) можно записать в проекциях на оси координат:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (2.55)$$

Величины L_x , L_y , L_z и M_x , M_y , M_z называются моментами импульса и моментами силы относительно соответствующих осей. Следовательно, эти величины, будучи проекциями на оси координат, не являются векторными величинами.

С помощью уравнения моментов относительно оси удобно описывать движение точки по окружности. Если тело массой m движется по окружности радиусом R со скоростью, равной по модулю v , то момент импульса относительно оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости (эта ось называется осью вращения), будет равен: $L = mvR$. Выражая v через угловую скорость, получим $L = mR^2\omega$. Физическую величину, равную mR^2 , называют *моментом инерции* точки относительно оси вращения. Момент инерции обозначают буквой I . Единицей момента инерции тела в системе СИ служит $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. С помощью момента инерции относительно оси вращения момент импульса тела можно записать так:

$$L = I\omega, \quad (2.56)$$

а уравнение моментов относительно оси приобретает вид:

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = M, \quad (2.57)$$

где M – момент силы относительно оси вращения.

Уравнение (2.57) по форме напоминает уравнение второго закона Ньютона, записанного для материальной точки, с той лишь разницей, что роль массы тела играет момент инерции точки, роль скорости – угловая скорость, роль силы – момент силы относительно оси вращения.

Если момент силы равен нулю, то произведение $I\omega$ не изменяется в процессе движения точки. Это означает, в свою очередь, что при изменении момента инерции точки относительно оси вращения в процессе движения угловая скорость будет изменяться. В качестве примера можно рассмотреть движение по поверхности стола шарика, привязанного за нить, пропущенную в отверстие в крышке стола. Если в начале движения сообщить шарика скорость, направленную перпендикулярно натянутой нити (рис. 2.12), а затем тянуть за нить, то в процессе движения угловая скорость движения шарика будет возрастать.

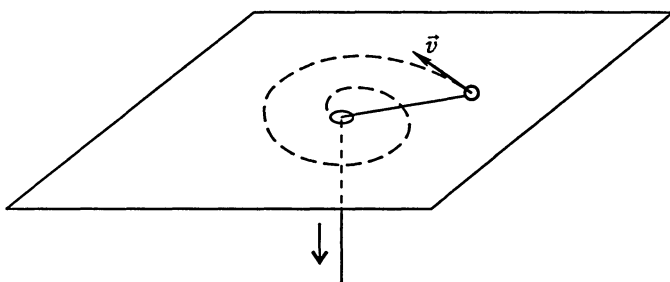


Рис. 2.12

Другим хорошо известным примером движения материальной точки с переменной угловой скоростью является движение планет вокруг Солнца. Так как на каждую из планет со стороны Солнца действует центральная сила тяготения, то секториальная скорость планет сохраняется. Следствием этого является движение планет по плоским траекториям с переменной угловой скоростью. Скорость планеты по орбите тем больше по модулю, чем ближе планета находится к Солнцу.

Глава 3

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНОВ МЕХАНИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

3.1. Простейшие примеры задач по механике

Законы Ньютона и законы сохранения механического импульса и энергии позволяют решать громадное количество механических задач. Ниже на конкретных примерах показано, как эти законы применяются.

1. *Движение тела в поле тяжести Земли.* Тело массой M брошено с начальной скоростью \vec{v}_0 вверх с поверхности Земли (после этого воздействие на него прекращается!). На какую высоту поднимается тело? С какой скоростью оно вернется на Землю?

Направим ось координат в этом направлении (рис. 3.1) и примем потенциальную энергию системы «Земля – тело» равной нулю, когда тело находится на поверхности Земли.

Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M v^2 + M g x.$$

Поэтому наибольшая высота подъема (при $v = 0$) равна:

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (3.1)$$

При падении потенциальная энергия переходит в кинетическую, и на поверхности ($x = 0$) для скорости падения будем иметь:

$$v = v_0 = \sqrt{2gx_m}.$$

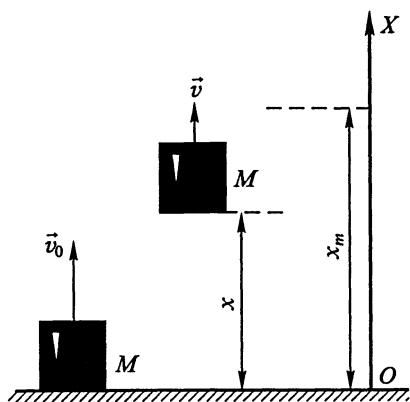


Рис. 3.1

Легко показать, что время подъема равно времени падения и равно:

$$t_{\text{под}} = t_{\text{пад}} = \frac{v_0}{g}.$$

2. *Движение маятника.* При движении маятника кинетическая энергия (она наибольшая в момент прохождения маятника через положение равновесия, т. е. наинижнее положение), равная

$$K_m = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

преобразуется в потенциальную энергию тяготения (она максимальна в момент остановки маятника, который поднялся на высоту x_m):

$$U_m = m g x_m = K_m.$$

Поэтому, как и в задаче 1, получается:

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Галилей, прекрасно понимавший суть дела, поставил следующий замечательный опыт. На нити длиной l подвешен небольшой шарик (рис. 3.2). Можно заставить этот маятник качаться, подняв его шарик на высоту x_m и предоставив затем самому себе. Если во время прохождения шарика через наинижнее положение укоротить маятник, поставив около него стерженек S , то высота подъема не изменяется.

3. *Динамика гармонического колебательного движения.* Выясним, при каких условиях может происходить гармоническое колебательное движение (см. § 1.8), описываемое уравнением

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Так как ускорение при гармоническом движении

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$

то для поддержания движения необходимо действие переменной силы, направленной против смещения. Значение проекции этой силы определяется произведением ускорения на массу движущегося тела:

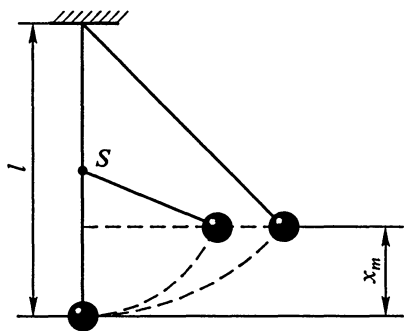


Рис. 3.2

$$F_x = m\ddot{x} = -m\omega^2 x = -kx. \quad (3.2)$$

Итак, чтобы сила вызывала гармонические колебания, она должна быть пропорциональна смещению и направлена противоположно ему. В случае пружинного маятника это есть сила упругости пружины, подчиняющаяся закону Гука.

Во многих случаях (см. ниже) сила, будучи пропорциональной смещению, не является по своей природе силой упругости; тогда ее называют «как бы упругой» (квазиупругой) силой.

Угловая частота колебаний (как видно из уравнения 3.2) определяется массой тела и жесткостью:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (3.3)$$

Мгновенное значение кинетической энергии равно:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 X_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

а потенциальной (для растянутой пружины):

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 X_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Так как сила упругости $F_x = -kx$ консервативна, то полная механическая энергия постоянна:

$$E = K + U = \frac{1}{2}kX_m^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 X_m^2.$$

В процессе колебаний кинетическая энергия переходит в потенциальную и обратно. Это видно из приведенных выражений: значение кинетической энергии определяется квадратом синуса, а потенциальной – квадратом косинуса одного и того же аргумента. Частота этих преобразований энергии вдвое больше частоты колебаний самой системы.

Колебания могут быть обеспечены не только пружиной. Так, математический маятник (материальная точка массой m на длинной нерастяжимой нити длиной l), если его вывести из положения равновесия, испытывает действие силы, возвращающей его в это положение (рис. 3.3); ее проекция на направление касательной к траектории

$$F_x = -F_T \sin \alpha = -mg \sin \alpha$$

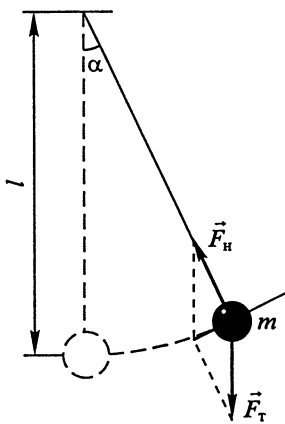


Рис. 3.3

(знак «-» учитывает противонаправленность силы и смещения).

При малых углах отклонения можно принять $\sin \alpha = \alpha$, тогда $F_x = -mg\alpha$ и действующая на маятник сила оказывается пропорциональной угловому смещению (квазиупругой).

Если угол отклонения мал, то дугу, описываемую маятником, можно заменить хордой, имеющей мгновенную длину $x = l\alpha$. Уравнение движения примет вид:

$$m l \ddot{\alpha} = -mg\alpha.$$

Его решением будет гармоническая функция

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.4)$$

причем частота колебаний, равная (см. задачу 2)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

для математического маятника не зависит от массы. Постоянные α_m и φ_0 определяются начальными условиями (например, из значений смещения и скорости в момент $t = 0$).

В нашем рассуждении мы пренебрегли неизбежным трением, вызывающим постепенное затухание колебаний. Его влияние будет учтено в главе 10.

4. *Динамика обращения точки по окружности.* Для того чтобы точка могла обращаться вокруг некоторого центра, необходимо создать силу, способную сообщить ей центростремительное ускорение (см. § 1.6). Это хорошо видно на опыте с пружиной, один конец которой закреплен (точка O на рис. 3.4), а на другом имеется небольшое кольцо массой m , скользящее по твердому стержню.

В недеформированном состоянии пружина занимает не более четверти длины стержня. Если, держа прибор в горизонтальном положении, привести его в поступательное движение в направлении стрелки, то сначала кольцо отстает от стержня; пружина растягивается и сообщает кольцу посту-

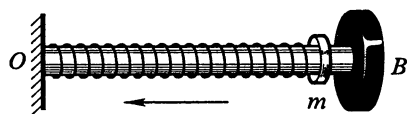


Рис. 3.4

пательное ускорение, направленное влево, после чего относительное движение стержня и кольца прекращается. При замедлении стержня пружина сжимается.

Если же вращать стержень вокруг точки O в горизонтальной плоскости, то сначала кольцо удаляется от точки O , растягивая пружину. При медленном вращении, когда сила

$$F_x = -m\omega^2 R = -kx, \quad (3.5)$$

необходимая для сообщения кольцу центростремительного ускорения, невелика, пружина растягивается не очень сильно и кольцо движется вместе со стержнем, обращаясь вокруг точки O . Если увеличить угловую скорость вращения стержня, то пружина растягивается сильнее; в конце концов кольцо упирается в твердый ограничитель B . Сжимаясь, ограничитель развивает силу упругости (силу реакции), которая, действуя на кольцо, обеспечивает (вместе с пружиной) необходимое центростремительное ускорение. А при отсутствии ограничителя кольцо при больших скоростях вращения стержня слетает с него.

5. *Циклотрон.* Магнитная составляющая силы Лоренца (см. § 2.5) перпендикулярна скорости заряженной частицы, поэтому при попадании последней (заряд e , масса m) в магнитное поле с индукцией \vec{B}_x , перпендикулярной первоначальной скорости \vec{v} , частица начинает двигаться по окружности радиусом R , определяемым из условия

$$F = evB_x = \frac{mv^2}{R}; \quad (3.6)$$

$$R = \frac{mv}{eB_x}.$$

При этом время одного оборота

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{eB_x}, \quad (3.7)$$

не зависит от скорости, так как разным скоростям отвечают разные радиусы окружностей. Эта особенность движения находит применение в некоторых типах ускорителей заряженных частиц (циклотронах).

Так как модуль заряда электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, скорость (в некоторых газоразрядных трубках) $v = 10^7$ м/с, а небольшой электромагнит позволяет получить магнитное поле с индукцией $B_x = 10^{-1}$ Тл, то радиус окружности, описываемой электроном в этом поле, невелик:

$$R \approx 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

При этом время одного оборота равно приблизительно $3 \cdot 10^{-10}$ с.

6. *Камера Вильсона.* Одним из устройств, позволяющих изучать траектории элементарных заряженных частиц, является камера Вильсона. В ней можно наблюдать (или фотографировать) след, оставляемый частицей в виде капелек в пересыщенном паре. Камеру можно поместить в магнитное поле с индукцией \vec{B} . Если частица влетит в камеру, имея скорость, нормальную к вектору индукции, то ее траектория искривится; по виду траектории можно судить о скорости частицы и знаке ее заряда, что значительно расширяет сведения о зарегистрированной частице. На рисунке 3.5 показаны траектории электрона и позитрона (они одновременно родились благодаря взаимодействию фотона с ядром одного из атомов металлической пластины, перегораживающей камеру Вильсона), вектор индукции \vec{B} перпендикулярен плоскости чертежа.

7. *Фокусировка электронов.* Если скорость \vec{v} заряженной частицы (например, электрона) составляет с направлением магнитной индукции угол α , то проекция скорости на ось X , совпадающую по направлению с вектором \vec{B} , равная $v_x = v \cos \alpha$ (в этом направлении магнитная составляющая силы Лоренца отсутствует), меняться не будет. Искривление траектории зависит от проекции вектора скорости на ось Y : $v_y = v \sin \alpha$. Поэтому частица будет описывать винтовую линию, перемещаясь (за время одного оборота) вдоль линий индукции поля на расстояние

$$x = v_x T = 2\pi \frac{m}{e} \frac{v}{B_x} \cos \alpha. \quad (3.8)$$

Если в начальной точке электроны имели равные скорости, направленные под малыми углами к оси X ($\cos \alpha = 1$), то тогда все они после каждого оборота вновь будут сходиться практически в одной точке; на этом основан один из способов фокусировки электронного пучка в вакуумных электронных приборах.

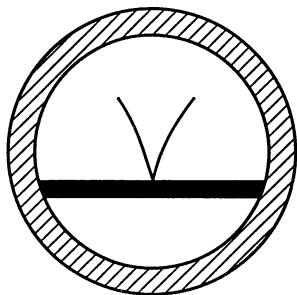


Рис. 3.5

Если магнитное поле неоднородно, то при движении электрона в область более сильного поля радиусы окружностей, последовательно описываемых электроном, уменьшаются; в область достаточно сильного поля электрон вообще не проникает (примерная траектория показана на рис. 3.6). Достигнув области, где магнитная индукция достаточно велика, электрон возвращается обратно.

Земля представляет собой гигантский магнит. Приходящие к Земле из космоса за-

ряженные частицы, испытывая действие силы Лоренца, движутся сложным образом. В пространстве, окружающем Землю, образуются области, где заряженных частиц нет совсем, а также области их скопления. Вместе с частицами, рождающимися при ионизации молекул атмосферных газов солнечным излучением и другими причинами, космические частицы образуют вокруг Земли слои с повышенной концентрацией заряженных частиц, оказывающие существенное влияние на условия радиосвязи.

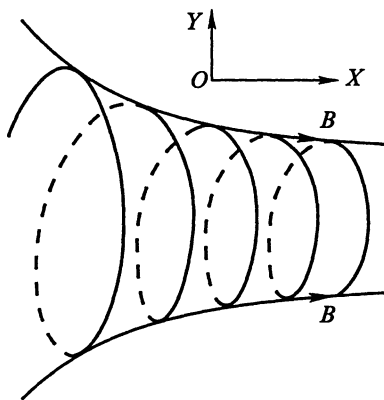


Рис. 3.6

Подчеркнем в заключение, что так как магнитная составляющая силы Лоренца всегда перпендикулярна скорости, то частицы, движущиеся в магнитном поле, не меняют своей кинетической энергии, но лишь изменяют направление скорости движения; *работа магнитной составляющей силы Лоренца всегда равняется нулю.*

Поэтому при движении в магнитном поле сумма кинетических энергий поступательного и вращательного движений частицы сохраняется неизменной; в неоднородном поле кинетические энергии поступательного и вращательного движений взаимно перераспределяются.

Эти выводы не относятся к частицам (ионам и электронам), движущимся в металлических (или жидких) проводниках, т.е. к обычным электрическим токам в веществе, так как там процесс осложняется дополнительными взаимодействиями, например, с источником электродвижущей силы, подключенным к электрической цепи, находящейся в постороннем магнитном поле. С этими явлениями мы встретимся при изучении электродинамики.

3.2. Движение электронов в электронно-лучевой трубке

Приведем еще один пример применения законов механики: опишем движение электронов в электронно-лучевой трубке, представляющей основу таких приборов, как уже неоднократно упоминавшийся осциллограф, телевизор и многие другие.

Электронно-лучевая трубка осциллографа – это стеклянный баллон, имеющий узкое горло, постепенно расширяющееся к торцу, на который изнутри нанесен слой, люминесцирующий при попадании на него электронов (экран). В узкой части расположены накалива-

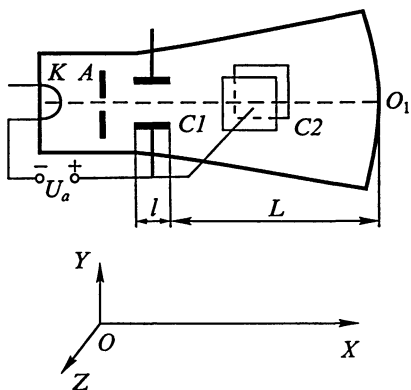


Рис. 3.7

емый катод K , являющийся источником электронов, и диафрагма с узким отверстием A , называемая анодом (рис. 3.7). Далее расположены два плоских конденсатора $C1$ и $C2$, причем их пластины лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Воздух из колбы выкачан, так что оставшиеся молекулы газов не препятствуют движению электронов в трубке.

Между катодом и анодом создается электростатическое поле, сообщающее электронам, вылетающим из катода, значительную кинетическую энергию, равную:

$$\frac{mv_x^2}{2} = \int_K^A e\vec{E} \cdot d\vec{x} = eU_a,$$

где e , m и v_x — соответственно заряд, масса и скорость электрона; \vec{E} — напряженность электростатического поля в точках траектории, описываемой электроном; $d\vec{x}$ — элементарное перемещение в направлении от катода к аноду.

Разность потенциалов между катодом и анодом

$$U_a = \int_K^A \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

не зависит (как это будет показано в гл. 12) от формы траектории, поэтому все электроны приобретают одну и ту же кинетическую энергию.

Маленькое отверстие в аноде «вырезает» из пучка электронов узкий луч, идущий практически вдоль оси трубки. За анодом электроны движутся по инерции и попадают в конденсатор $C1$. В конденсаторе можно создать электрическое поле, перпендикулярное скорости электронов \vec{v}_x . Оно практически однородно внутри конденсатора и исчезает за его пределами. Обозначим напряженность этого поля \vec{E}_y . В этом поле электроны получают ускорение

$$\vec{a}_y = \frac{e}{m} \vec{E}_y,$$

перпендикулярное первоначальной скорости электронов \vec{v}_x .

Пусть длина пластин равна l (рис. 3.8). Это расстояние электроны пролетают за время

$$t = \frac{l}{v_x}$$

и успевают отклониться в направлении оси Y на отрезок

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{l^2}{v_x^2} E_y,$$

приобретая скорость

$$v_y = a_y t = \frac{e}{m} \frac{l}{v_x} E_y.$$

Внутри конденсатора электроны движутся по параболе (см. § 1.7), а за его пределами прямолинейно, причем линия их движения образует с осью X угол, определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{l E_y}{2 U_a}.$$

Поэтому, двигаясь к экрану, лежащему в плоскости YOZ , электроны дополнительно смещаются на отрезок

$$y_2 = L \operatorname{tg} \alpha.$$

На экране они попадут в точку, имеющую координаты

$$z = 0; \quad y = y_1 + y_2 = \frac{l^2}{4 U_a} \left(1 + 2 \frac{h}{l} \right) E_y. \quad (3.9)$$

Итак, отклонение по оси Y пропорционально напряженности E_y поля конденсатора $C1$.

В действительности длина пластины l конденсатора во много раз меньше расстояния его L от экрана, поэтому смещение y_2 значительно превышает y_1 .

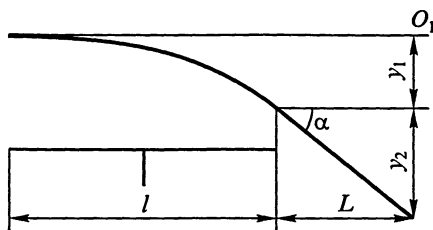


Рис. 3.8

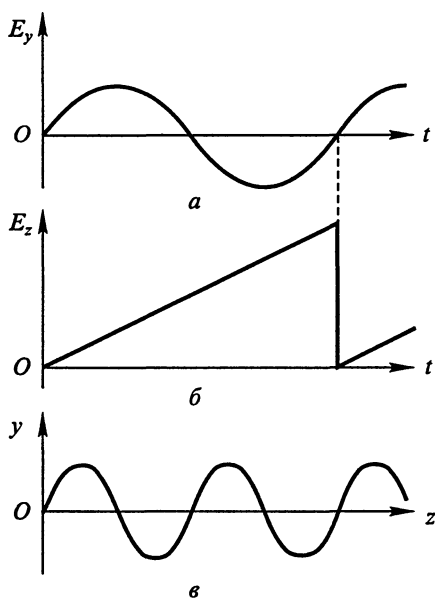


Рис. 3.9

напряженности E_y , то в данную точку экрана электроны будут попадать через каждый период T_z . Если, как это обычно бывает, период не слишком велик (меньше десятых долей секунды), то вследствие инерции светового восприятия глаз увидит на экране неподвижную кривую

$$y = f(z) = f(t), \quad (3.10)$$

так как смещение z пропорционально времени (рис. 3.9, в).

Но отклонение y , как видно из уравнения (3.6), пропорционально E_y . Поэтому $E_y \approx f(t)$, т. е. кривая на экране представляет временную зависимость напряженности E_y , которая нас и интересует. (Для кривой $y = f(z)$ принято $T_z = 2T_y$.)

Эта кривая образована совокупностью светящихся следов электронов, попадающих в разные точки экрана в различные моменты времени.

Подобную запись механического колебания легко получить, снабдив медленно колеблющийся маятник (шарик на длинной нити) кисточкой, предварительно смоченной тушью и касающейся поверхности горизонтального листа бумаги, находящегося под маятником. Если привести маятник в колебания и одновременно перемещать лист перпендикулярно плоскости колебаний с постоянной

Во втором конденсаторе напряженность поля направлена по оси Z ; электроны испытывают отклонение z , пропорциональное E_z .

При использовании трубки в качестве осциллографа в конденсаторе $C1$ создается поле напряженностью E_y , зависимость которого от времени нужно исследовать (рис. 3.9, а). В конденсаторе $C2$ создается поле, напряженность E_z которого медленно нарастает пропорционально времени и быстро уменьшается до нуля, как это показано на рис. 3.9, б. Это поле называют полем *временной развертки сигнала*.

Если период T_z изменений напряженности E_z равен (или кратен) периоду T_y изменений

скоростью, то кисточка запишет на листе кривую, характеризующую зависимость от времени отклонения маятника от положения равновесия (от вертикали).

Хотя оба рассмотренных способа записи дают одинаковый результат, но их физическое содержание различно: маятник с кисточкой действительно совершает колебания, а *ни один из электронов не колеблется (к экрану все они подлетают, двигаясь по инерции)*; отдельные электроны последовательно подвергаются кратковременному (по сравнению с периодом изучаемого напряжения) воздействию электрического поля конденсатора в разные моменты времени, т. е. при разных фазах поля.

Мы не рассматриваем здесь усовершенствований электрической схемы, делающих работу осциллографа весьма гибкой и надежной.

Сначала осциллографы применялись только в электродинамике для изучения электрических процессов. Впоследствии был создан ряд устройств, позволяющих получить электрические напряжения, пропорциональные тем или иным неэлектрическим величинам (например, микрофон позволяет получить электрическое напряжение, пропорциональное звуковому давлению на мембрану микрофона). Подобные устройства часто называют датчиками. Подавая напряжение от датчика на пластины конденсатора CI (в конденсаторе при этом создается электрическое поле с напряженностью, пропорциональной этому напряжению), мы получаем возможность контролировать при помощи осциллографа процессы неэлектрической природы, воспринимаемые датчиком. Так как масса электрона весьма мала, то осциллограф является практически безынерционным прибором, позволяющим исследовать весьма быстро протекающие процессы.

На электроны в электронно-лучевой трубке можно воздействовать не только электростатическим, но и магнитным полем, создаваемым катушками с токами. В этом случае управление движением электронов происходит при помощи магнитной составляющей силы Лоренца. Такой способ применяется, в частности, в трубках телевизоров.

3.3. Равновесие материальной точки. Степени свободы

Для того чтобы свободная покоящаяся в некоторой ИСО материальная точка не изменила состояния покоя, согласно второму закону Ньютона *необходимо и достаточно, чтобы сумма действующих на нее сил равнялась нулю*:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \quad (3.11)$$

Это равносильно тому, что равны нулю суммы проекций сил на оси координат:

$$\sum_i F_{xi} = 0; \quad \sum_i F_{yi} = 0; \quad \sum_i F_{zi} = 0. \quad (3.12)$$

Принято говорить, что свободная точка *имеет три степени свободы движения*, т. е. для определения ее положения достаточно трех независимых координат; соответственно и число условий равновесия равно трем.

На практике часто важно знать, является ли состояние покоя (равновесия) точки устойчивым или нет, т. е. вернется ли точка в положение равновесия при любом малом отклонении от него.

На рис. 3.10 показаны четыре положения материальной точки, лежащей на твердой поверхности и притягивающейся к Земле.

Положение 1 (точка находится на дне ямки, в самом низком из возможных положений) соответствует *устойчивому равновесию*. Действительно, при любом смещении ее по поверхности в любом направлении она окажется выше дна ямки и сила тяжести вернет точку в начальное положение. Заметим, что в самом нижнем положении потенциальная энергия точки наименьшая.

Положение 2 (точка находится на узком, самом высоком участке горки) соответствует *неустойчивому равновесию*, так как при любом малом перемещении по поверхности она скатится вниз, т. е. еще дальше отойдет от первоначального положения, отвечающего наибольшей потенциальной энергии. Наконец, положения 3 и 4, при которых небольшое перемещение по поверхности не изменяет потенциальной энергии, соответствуют *безразличному равновесию*; смещенная из этих положений точка остается в покое в новом положении.

Так как в консервативных системах полная энергия равна сумме потенциальной и кинетической энергий, то наиболее устойчивое состояние равновесия, очевидно, возможно при нулевой кинетической энергии и минимальной потенциальной. В соответствии с рисунком 3.10, используя наглядные образы, говорят, что точка в положении 1 находится в «потенциальной яме», для выхода из которой требуется «преодолеть потенциальный барьер», равный разности потенциальных

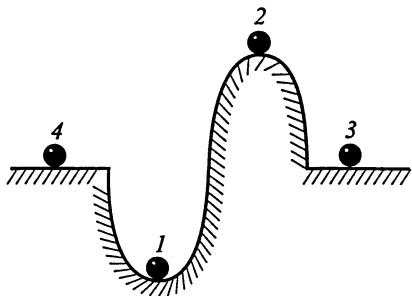


Рис. 3.10

энергий $U_2 - U_1$ (чтобы перейти в положение 2) или $U_4 - U_1$ (чтобы перейти в положение 4). Эта дополнительная энергия должна быть сообщена извне. А из положения 2 в положение 3 точка перейдет при любом внешнем воздействии. Эти представления приложимы ко всем видам потенциальной энергии.

3.4. Проявление трения

До сих пор, изучая различные движения, мы почти всегда для упрощения пренебрегали сопротивлением среды, окружающей движущееся тело. Теперь следует его учесть; однако при этом мы будем исследовать не физическую природу сил сопротивления, а только их проявление. Это связано с тем, что, несмотря на ясное происхождение трения (оно обусловлено электромагнитным взаимодействием соприкасающихся при движении тел), строгое количественное рассмотрение сил трения является сложным и выходящим за пределы механики. Здесь будет дано только приближенное описание проявлений сил трения, которое необходимо для осмысленного составления уравнения движения в задачах, где трением нельзя пренебречь.

Жидкое трение. Силы сопротивления, возникающие при движении твердого тела в жидкости или газе, называются *силами жидкого трения*. Простой опыт с поплавком, на который можно воздействовать легким толчком (или просто подуть), позволяет установить важнейшие особенности этого трения:

- а) поплавок приходит в движение (постепенно!) при сколь угодно слабом, но достаточно длительном воздействии на него;
- б) если прекратить воздействие, то поплавок постепенно останавливается;
- в) время установления движения (и время торможения) растет при увеличении массы поплавка и зависит от его формы; от последней зависит и установившаяся скорость при постоянном воздействии.

Более тщательные опыты показывают, что при небольших скоростях (не более нескольких метров в секунду в жидкости или десятков метров в секунду в газе) сила жидкого трения пропорциональна скорости и антинаправлена ей:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v}, \quad (3.13)$$

где r – постоянный коэффициент сопротивления, зависящий от состояния поверхности тела, его формы и природы жидкости. Размерность коэффициента сопротивления r есть:

$$\dim r = \text{T}^{-1}\text{M}.$$

Пусть некоторое тело массой m ускоряется силой \vec{F} и в начальный момент ($t = 0$) его скорость равна нулю. Составим уравнение движения, учитывая силу трения.

По второму закону Ньютона можно написать:

$$m \frac{dv}{dt} = -rv + F. \quad (3.14)$$

После деления на m это уравнение принимает вид:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} - \frac{F}{m} = 0 \quad (3.15)$$

(здесь $\tau = m/r$ – так называемое *время релаксации*).

Введем новую переменную:

$$y = \frac{v}{\tau} - \frac{F}{m}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\tau} \frac{dv}{dt}.$$

Подставив ее в (3.15), получим:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\tau} = 0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dt}{\tau}.$$

Интегрируя за промежуток времени $(0, t)$ и соответственно в интервале (y_0, y) , получим:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt; \quad y = y_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Так как начальная скорость была принята равной нулю, то окончательный результат будет такой:

$$v = \frac{F}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (3.16)$$

Таким образом, установившаяся скорость (при $t \rightarrow \infty$) равна:

$$V = \frac{F}{r}.$$

Замечательно, что она не зависит от массы; последняя влияет лишь на время установления.

Если при достижении некоторой скорости v_1 выключить двигатель, создававший силу \vec{F} , и ввести новое начало отсчета времени $t = 0$ в момент выключения двигателя, то уравнение движения (3.14) примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt; \quad v = v_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (3.17)$$

Теперь можно выяснить смысл понятия «время релаксации». При $t = \tau$ получается:

$$v = \frac{v_1}{e} = 0,37v_1,$$

т. е. скорость уменьшается в $e = 2,7$ раза.

На рис. 3.11 и 3.12 показаны графики уравнений (3.16) и (3.17). Около кривых указаны их параметры.

Расчет коэффициента сопротивления сложен. Для шара радиусом r он был найден Стоксом:

$$r = 6\pi\eta r,$$

где η – вязкость среды, окружающей шар. У воды при 20°C $\eta = 10^{-3}$ кг/(м·с). Для глицерина при 20°C $\eta = 0,85$ кг/(м·с), при 30°C $\eta = 0,35$ кг/(м·с); для воздуха при 20°C $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с).

У жидкостей вязкость с увеличением температуры уменьшается (вспомните плавление нагреваемого масла!), а у газов – растет. Это свидетельствует о различном характере молекулярного движения в жидкости и газе.

Форма тела и его ориентация по отношению к вектору скорости сильно влияют на коэффициент сопротивления. В этом легко убедиться, давая возможность листу бумаги падать (под действием при-

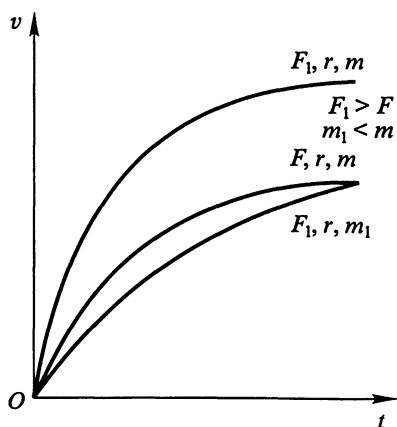


Рис. 3.11

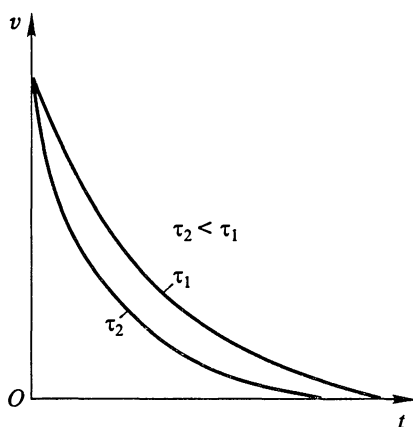


Рис. 3.12

тяжения Земли) при разных его положениях и форме: 1) вертикальном; 2) горизонтальном; 3) в виде стрелки и 4) в виде комка неправильной формы.

Вообще говоря, коэффициент сопротивления возрастает при увеличении сечения движущегося тела, перпендикулярного вектору скорости.

На этом свойстве коэффициента сопротивления основано действие парашюта. Опытным путем найдено, что установившаяся скорость падения человека с высоты в несколько километров достигает 50–55 м/с. Конечно, приземление с такой скоростью губительно. Раскрывая парашют, человек значительно увеличивает площадь сечения, перпендикулярного вектору скорости. Благодаря этому скорость падения уменьшается до 2–4 м/с, что не представляет опасности при приземлении опытного парашютиста. Однако на раскрытие парашюта и торможение требуется известное время. Поэтому парашюты неприменимы при прыжках с малой высоты.

При больших скоростях сила сопротивления растет быстрее скорости (рис. 3.13): если в области I сила сопротивления пропорциональна скорости, то в области II она зависит от квадрата скорости, в дальнейшем она возрастает еще сильнее; при скоростях, приближающихся к скорости звука в газе, законы движения претерпевают качественные изменения (они рассматриваются в «Молекулярной физике»).

Сухое трение при поступательном движении. Повседневный опыт учит, что для приведения в поступательное движение твердого тела, лежащего на горизонтальной поверхности другого твердого тела, нужно приложить к первому телу внешнюю силу \vec{F} , направлен-

ную горизонтально. Модуль этой силы должен превышать некоторое значение F_0 . Это можно объяснить тем, что при попытке сдвинуть тело *возникает сила трения покоя: $\vec{F}_n = -\vec{F}$, противодействующая движению*. Строго говоря, в этом случае происходит микроскопическое, ускользящее от наблюдения смещение, в результате чего и возникает сила трения. Если же \vec{F} будет по модулю чуть-чуть больше \vec{F}_0 , то верхнее тело начинает скользить по поверхности

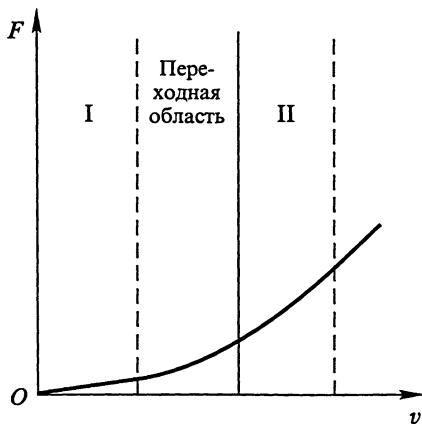


Рис. 3.13

нижнего, причем для поддержания равномерного движения необходимо постоянное действие силы \vec{F} . Следовательно, и при скольжении существует противодействующая движению сила трения, называемая *трением скольжения $\vec{F}_{ск}$* . Она *антипараллельна скорости*.

Если еще увеличить внешнюю силу, то движение становится ускоренным. Опыт показывает, что сила трения скольжения в начале движения чуть-чуть уменьшается, а затем практически не зависит от скорости движения (при не слишком больших скоростях).

На рис. 3.14 изображена зависимость силы сухого трения от относительной скорости движения трущихся тел. Отрезки OA и OA_1 отвечают силе трения покоя, участки AB и A_1B_1 – силе трения скольжения.

Г. Амонтон и Ш. Кулон показали экспериментально, что сила трения скольжения $\vec{F}_{ск}$ пропорциональна силе, прижимающей верхнее тело (например, силе тяжести), но не зависит от площади соприкосновения тел:

$$\vec{F}_{ск} = -\mu F_1 \frac{\vec{v}}{v}, \quad (3.18)$$

где F_1 – модуль прижимающей силы; μ – коэффициент трения скольжения, имеющий нулевую размерность. Этот закон верен при неизменном состоянии соприкасающихся поверхностей, что трудно осуществить на практике, поэтому он выполняется не очень точно.

Физическая картина трения довольно сложна. Здесь играет роль и непосредственное механическое взаимодействие между соприкасающимися элементарными участками обеих поверхностей и элект-

ромагнитное взаимодействие других участков, не имеющих в данный момент механического контакта.

Коэффициент трения скольжения μ легко определить: тело массой m кладут на наклонную плоскость и увеличивают угол наклона последней, пока не начнется скольжение. При этом (рис. 3.15), если соскальзывание начинается при угле наклона α , получается:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_{\text{тр}}; \quad F_2 = F \sin \alpha = \mu F_1 = \mu F \cos \alpha,$$

откуда

$$\mu = \text{tg } \alpha. \quad (3.19)$$

Для доказательства независимости силы трения скольжения от размеров соприкасающихся поверхностей иногда показывают следующий опыт: берут параллелепипед с тремя различными гранями и вышеуказанным способом измеряют коэффициенты трения, ставя параллелепипед поочередно на три разные грани; при этом коэффициент трения μ во всех случаях должен получаться одним и тем же. Однако из-за большой зависимости μ от состояния соприкасающихся поверхностей этот опыт требует предварительной подготовки граней (сглаживания шероховатостей, очистки от загрязнений и пр.), без чего результаты его могут оказаться малоубедительными.

Не изучая сложного механизма трения, отметим, что для исключения сухого трения с успехом применяется смазка – создание между поверхностями тончайшей жидкой пленки или отделение поверхностей друг от друга при помощи струи газа, подающейся под большим давлением («воздушная подушка»).

Если тела очень долго соприкасались друг с другом, то сдвинуть одно из них гораздо труднее, чем при кратковременном соприкосновении (именно о последнем шла речь до сих пор); здесь кроме обыч-

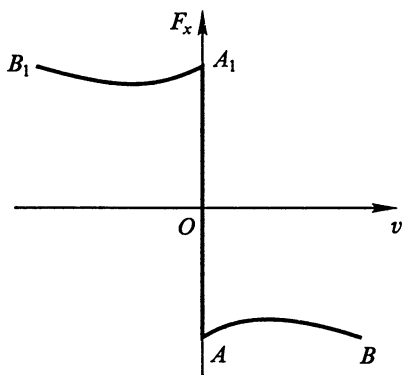


Рис. 3.14

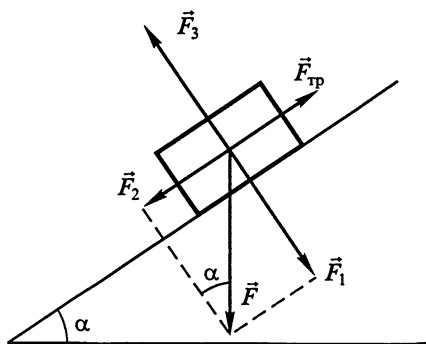


Рис. 3.15

ного трения сказывается еще длительное воздействие прижимающей силы, создающее дополнительную деформацию нижнего тела (вдавливание верхнего).

Законы сухого трения применимы для твердых поверхностей. На снегу, например, дело обстоит совершенно иначе: чтобы снег не проваливался под тяжестью лыжника, требуется уменьшать давление на снежный покров (поэтому-то лыжи и имеют большую поверхность соприкосновения со снегом). Смазка лыж нужна не столько для уменьшения трения, сколько для устранения возможного прилипания снега к лыжам.

Довольно широко распространено представление о вредности трения, так как для его преодоления приходится совершать работу. Однако это представление слишком односторонне: ведь в отсутствие трения мы не могли бы двигаться по горизонтальной поверхности, пуговицы не держались бы в петлях, чернила очень быстро вытекали бы из ручек и т. д.

Было бы невозможно и использование ленточной (ременной) передачи кинетической энергии от некоторого источника энергии (двигателя с «ведущим» шкивом) к потребителю энергии – машине с «ведомым» шкивом.

**ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.
ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ**

4.1. Замкнутые механические системы.

Закон сохранения механического импульса

Изучая законы Ньютона, мы ограничивались одной или двумя материальными точками. Расширим теперь область наших исследований и рассмотрим систему взаимодействующих материальных точек (массами m_1, m_2, \dots, m_n); силы их взаимодействия $\vec{f}_{12}, \dots, \vec{f}_{1n}, \vec{f}_{21}, \dots, \vec{f}_{2n}, \dots, \vec{f}_{n1}, \dots, \vec{f}_{n,n-1}$ назовем *внутренними силами*. Они попарно равны по модулю (например, \vec{f}_{ik} и \vec{f}_{ki}) и противоположны по направлению (третий закон Ньютона).

Кроме того, на систему могут действовать *внешние силы*, обусловленные ее взаимодействием с телами, не входящими в систему. Следует сразу же уяснить, что выбор внешних и внутренних сил произволен. Так, можно рассматривать движение Земли и Солнца как единой системы, тогда силы их взаимного притяжения внутренние. Но можно изучать только движение Земли. Тогда притяжение ее Солнцем – внешняя сила, а притяжение Солнца Землей при этом вообще не принимается во внимание, так как движение Солнца не рассматривается.

Если в систему включить все взаимодействующие материальные точки, то ее называют *замкнутой*. Понятием замкнутой системы пользуются с той или иной степенью точности в зависимости от условий рассматриваемой задачи.

Под действием сил импульс \vec{p}_i каждой точки изменяется. По второму закону Ньютона имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{f}_{12} + \dots + \vec{f}_{1n} + \vec{F}_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= \vec{f}_{i1} + \dots + \vec{f}_{in} + \vec{F}_i, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d\vec{p}_n}{dt} &= \vec{f}_{n1} + \dots + \vec{f}_{n,n-1} + \vec{F}_n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где \vec{F}_i – сумма всех внешних сил, действующих на точку массой m_i .

Суммируя выражения (4.1), замечаем, что в соответствии с третьим законом Ньютона сумма всех внутренних сил равна нулю, поэтому

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}, \quad (4.2)$$

где

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \quad (4.3)$$

есть полный механический импульс системы, а \vec{F} – сумма всех внешних сил. Таким образом, из (4.2) следует, что *изменение полного импульса определяется только внешними силами.*

Полный импульс удобно представить как произведение массы системы

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

на некоторую скорость \vec{V} , определяемую из условия

$$\vec{V} = \frac{\vec{p}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}. \quad (4.4)$$

Если система представляет собой сплошное тело, то эта скорость определяется выражением

$$\vec{V} = \frac{1}{M} \int \vec{v}_i dm_i,$$

где интеграл берется по всему объему тела, имеющего массу M .

Полный импульс системы \vec{p} удобно приписать некоторой точке, имеющей массу M . Эту точку называют *центром масс*, или *центром инерции*.

Координаты центра масс определяются выражениями

$$X_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad Y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}; \quad Z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}, \quad (4.5)$$

получаемыми при интегрировании (4.4) по времени, так что радиус-вектор центра масс равен:

$$\vec{R} = \vec{i}X_c + \vec{j}Y_c + \vec{k}Z_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M},$$

где \vec{r}_i – радиус-векторы точек системы.

Следует иметь в виду, что центр масс, координаты которого определяются уравнениями (4.5), может не совпадать ни с одной из материальных точек, образующих систему. Так, у однородного кольца центр масс лежит в его геометрическом центре. У тел не слишком больших размеров центр масс практически совпадает с центром тяжести. Но для больших тел, размеры которых превышают десятки километров (например, озеро Байкал), этого совпадения не будет, так как при расчете положения центра тяжести придется считаться с непараллельностью вектора ускорения \vec{g} в различных точках объема воды озера.

С известным приближением Солнечную систему можно считать замкнутой. Солнце и планеты Солнечной системы обращаются вокруг их общего центра масс, и мы допускаем неточность, утверждая, что «планеты обращаются вокруг Солнца». Однако эта неточность мала, так как масса Солнца значительно (в 750 раз) превосходит общую массу планет, а потому центр масс системы почти совпадает с центром масс Солнца.

У однородных симметричных тел, имеющих центр симметрии (шар, круглый диск, колесо, параллелепипед и т. д.), центр масс совпадает с ним. В более сложных случаях положение центра масс находится методами интегрального исчисления.

Если в симметричном однородном теле сделаны симметричные вырезы (например, в круглом диске радиусом R вырезан кружок радиусом r), то удобно применить метод «отрицательной массы». Мысленно заменим отверстие двумя кружками радиусом r с массами m и $-m$. Центр масс получившегося большого диска (массой M) лежит в его геометрическом центре O , который мы совместим с началом координат; поверхность диска совместим с плоскостью XOY , ось Z направим за чертеж, координатную ось X – по диаметру, проходящему через центры обоих кругов.

Пусть расстояние между центрами кругов равно x . Тогда, применяя уравнение (4.5), получим:

$$X_c(M - m) = -mx.$$

Отсюда находим (так как массы кружков пропорциональны квадратам их радиусов):

$$X_c = -\frac{mx}{M-m} = -x \frac{r^2}{R^2 - r^2} = \frac{-x}{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1},$$

где знак минус означает, что центр масс и центр отверстия расположены по разные стороны от начала координат. Очевидно, ордината центра масс

$$Y_c = 0.$$

Если толщина диска равна H , то аппликата центра масс

$$Z_c = \frac{H}{2}.$$

Из (4.2) следует, что

$$\frac{d\vec{P}_c}{dt} = M \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \vec{F}, \quad (4.6)$$

т. е. изменение импульса (или скорости движения) центра масс определяется действием только внешних сил.

Если же система замкнута ($\vec{F} = \Sigma \vec{F}_i = 0$), то

$$\vec{P}_c = M \vec{V}_c = \text{const}, \quad (4.7)$$

это означает, что **внутренние силы не могут изменить скорости движения центра масс** (хотя отдельные части системы движутся друг относительно друга и их импульсы изменяются).

Уравнение (4.7) выражает *закон сохранения механического импульса для замкнутой системы*. В курсе теоретической физики будет показано, что закон сохранения импульса тесно связан с однородностью пространства.

Следует отметить, что если сумма проекций внешних сил на одну из координатных осей равна нулю, то хотя полный импульс системы и будет изменяться в соответствии с (4.6), но *проекция импульса на эту ось будет сохранять свое значение*. Например, при движении судов эскадры по спокойной поверхности океана проекция ее полного импульса на вертикальную ось не изменяется (равна нулю), хотя суда могут двигаться с различными скоростями в разных направлениях.

Наглядной иллюстрацией закона (4.7) является опыт с игрушечным локомотивом. Если последний подвесить на нитях (для урав-

новешивания силы тяжести) и завести его механизм, то колеса начинают вращаться, но локомотив в целом относительно стен аудитории не движется, так как внутренние силы не могут сместить центр масс. Но достаточно поставить локомотив на рельсы, прикрепленные к горизонтальной поверхности тележки, стоящей на столе, ограничив возможности ее горизонтального движения (просто удерживая ее рукой), как локомотив приходит в движение. Он ускоряется внешними силами взаимодействия его колес с рельсами (система стала незамкнутой).

Если же освободить тележку, то она катится в сторону, противоположную направлению движения локомотива, чем качественно подтверждаются третий закон Ньютона и закон сохранения импульса.

Простой наглядный прибор для проверки закона сохранения импульса изображен (в вертикальном осевом сечении) на рис. 4.1.

Небольшая катушка K , питаемая постоянным током, надета на деревянный цилиндр $Ц$, имеющий с одного конца диск $Д$, и подвешена в горизонтальном положении. На продолжении ее оси подвешен керамический магнит $М$, диаметр отверстия которого равен диаметру диска. Сначала ток в катушке отсутствует. Вся система неподвижна, так что импульс $p = 0$.

При создании тока в катушке возникают внутренние силы отталкивания (или притяжения), причем катушка и магнит приобретают импульсы (\vec{p}_1 и \vec{p}_2) противоположных знаков, но их модули пока неизвестны. Если теперь, разомкнув цепь, надеть магнит на диск так, чтобы образовалась жесткая система, то при замыкании цепи никакого движения наблюдаться не будет:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0,$$

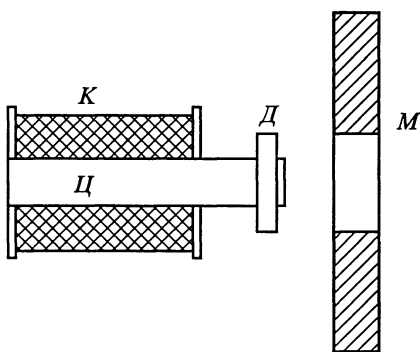


Рис. 4.1

как это и должно быть: действуют только внутренние силы, неспособные изменить начальный импульс системы, так как они равны по модулю.

При вертикальном подъеме ракеты скорости ее и выбрасываемых газов (относительно Земли) могут быть весьма значительными, но центр масс системы (ракета – газы) в отсутствие притяжения Земли не будет изменять своего первоначального положения.

4.2. Момент импульса механической системы. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим механическую систему из n взаимодействующих материальных точек в некоторой инерциальной системе отсчета. Будем считать, что на каждую точку с массой m_i действует внешняя сила \vec{F}_i , а между ними действуют внутренние силы взаимодействия \vec{f}_{ij} . Запишем для каждой из точек системы уравнение моментов относительно начала координат:

$$\frac{d[\vec{R}_1, m\vec{v}_1]}{dt} = [\vec{R}_1, \vec{f}_{12}] + [\vec{R}_1, \vec{f}_{13}] + [\vec{R}_1, \vec{f}_{14}] + \dots + [\vec{R}_1, \vec{f}_{1n}] + [\vec{R}_1, \vec{F}_1];$$

.....

$$\frac{d[\vec{R}_i, m\vec{v}_i]}{dt} = [\vec{R}_i, \vec{f}_{i2}] + [\vec{R}_i, \vec{f}_{i3}] + [\vec{R}_i, \vec{f}_{i4}] + \dots + [\vec{R}_i, \vec{f}_{in}] + [\vec{R}_i, \vec{F}_i]; \quad (4.8)$$

.....

$$\frac{d[\vec{R}_n, m\vec{v}_n]}{dt} = [\vec{R}_n, \vec{f}_{n2}] + [\vec{R}_n, \vec{f}_{n3}] + [\vec{R}_n, \vec{f}_{n4}] + \dots + [\vec{R}_n, \vec{f}_{n,n-1}] + [\vec{R}_n, \vec{F}_n].$$

Сложим уравнения:

$$\sum_i \frac{d[\vec{R}_i, m\vec{v}_i]}{dt} = \sum_i ([\vec{R}_i, \vec{f}_{i2}] + [\vec{R}_i, \vec{f}_{i3}] + [\vec{R}_i, \vec{f}_{i4}] + \dots + [\vec{R}_i, \vec{f}_{in}]) + \sum_i [\vec{R}_i, \vec{F}_i]. \quad (4.9)$$

Здесь \sum_i обозначает суммирование по i от 1 до n . В левой части выражения (4.9) можно поменять порядок выполнения суммирования и дифференцирования из-за линейности этих математических действий, после чего имеем:

$$\sum_i \frac{d[\vec{R}_i, m\vec{v}_i]}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{R}_i, m\vec{v}_i] = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (4.10)$$

где $\vec{L} = \sum_i [\vec{R}_i, m\vec{v}_i]$ – момент импульса системы относительно начала координат.

В правой части (4.9) сумма моментов внутренних сил равна нулю. Для доказательства этого утверждения рассмотрим два слагаемых из этой суммы $[\vec{R}_i, \vec{f}_{ij}]$ и $[\vec{R}_j, \vec{f}_{ji}]$, в которых силы связаны между собой третьим законом Ньютона, т. е. $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$. Сумма этих слагаемых

$$[\vec{R}_i, \vec{f}_{ij}] + [\vec{R}_j, \vec{f}_{ji}] = [(\vec{R}_i - \vec{R}_j) \vec{f}_{ij}]. \quad (4.11)$$

Так как сомножители векторного произведения (4.11) коллинеарны друг другу, то оно равно нулю. Для каждого слагаемого в сумме моментов внутренних сил выражения (4.9) можно найти другое слагаемое, связанное с ним соотношением, аналогичным (4.11), поэтому сумма моментов внутренних сил равна нулю. Тогда после суммирования в правой части (4.9) останется только сумма моментов внешних сил, действующих на материальные точки системы. Обозначим сумму моментов внешних сил одной буквой \vec{M} :

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{R}_i, \vec{F}_i]. \quad (4.12)$$

Тогда уравнение моментов системы материальных точек запишется в виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (4.13)$$

Изменение момента импульса системы материальных точек со временем равно моменту внешних сил, действующих на систему.

Так же как и для одной материальной точки, уравнение моментов (4.13) может быть записано в проекциях на оси координат выбранной системы координат:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (4.14)$$

где L_x, L_y, L_z и M_x, M_y, M_z – моменты импульса механической системы и моменты внешних сил, действующих на систему, относительно соответствующих осей координат.

Если момент внешних сил равен нулю, то $d\vec{L}/dt = 0$, откуда следует, что момент импульса системы не меняется со временем, т. е. $\vec{L} = \text{const}$. Если равны нулю отдельные составляющие момента внешних сил, то постоянными во времени остаются проекции момента импульса на соответствующие оси координат. Так, например, если $M_z = 0$, то $L_z = \text{const}$, и момент импульса относительно оси OZ не изменяется от времени в этом случае.

Если все точки системы обращаются вокруг оси OZ с одинаковой угловой скоростью ω_z , то момент импульса системы относительно оси вращения можно записать в виде произведения $\omega_z I_z$, где I_z – момент инерции системы относительно оси OZ . Определим значение I_z . Сначала запишем выражение для вектора \vec{L} :

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i [\vec{R}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_i [\vec{R}_i, m_i [\omega_z \vec{k}, \vec{R}_i]] = \omega_z \sum_i m_i [\vec{R}_i, [\vec{k}, \vec{R}_i]] = \\ &= \omega_z \sum_i m_i (-x_i z_i \vec{j} - y_i z_i \vec{i} + (x_i^2 + y_i^2) \vec{k}).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Как видно из (4.15), проекция \vec{L} на ось OZ равна

$$L_z = \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (4.16)$$

По аналогии с (2.56) выражение (4.16) можно записать в виде:

$$L_z = \omega_z I_z,$$

где

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (4.17)$$

есть момент инерции механической системы относительно оси вращения OZ .

Аналогично (4.17) могут быть введены моменты инерции системы относительно других осей координат:

$$I_x = \sum_i m_i (z_i^2 + y_i^2); \quad (4.18)$$

$$I_y = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2). \quad (4.19)$$

Если сложить выражения (4.17)–(4.19), то получим:

$$I_x + I_y + I_z = 2 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2I_0, \quad (4.20)$$

где $I_0 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ – момент инерции системы относительно начала координат. Выражение (4.20) полезно применять при вычислениях моментов инерции системы относительно осей координат, хотя момент инерции относительно начала координат не входит ни в одну из формул, определяющих динамику механической системы.

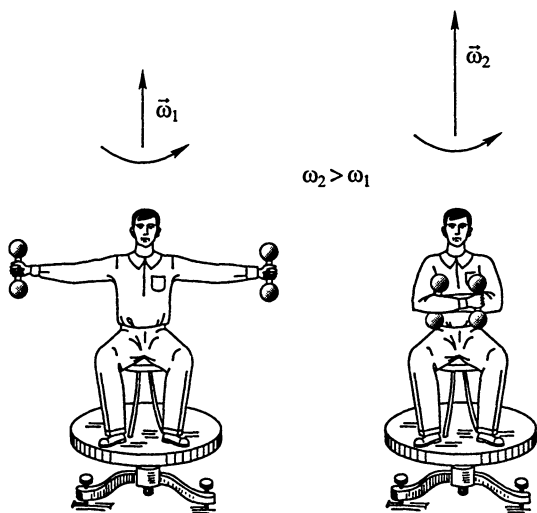


Рис. 4.2

Сохранение момента импульса механической системы можно продемонстрировать с помощью так называемой скамьи Жуковского. Скамья Жуковского представляет собой стул, укрепленный на плоской платформе, способной вращаться вокруг вертикальной оси. В процессе эксперимента демонстратор садится на стул и, отталкиваясь ногой от пола, приводит себя во вращение. Если во время вращения демонстратор изменяет момент инерции тела, разводя и сводя руки, то угловая скорость вращения скамьи Жуковского изменяется. Для усиления эффекта в руки можно взять тяжелые гири или гантели, тогда изменение скорости вращения более заметно (рис. 4.2).

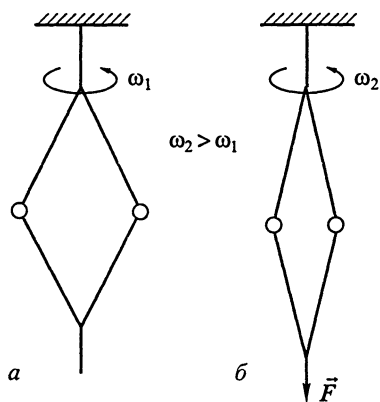


Рис. 4.3

Изменение угловой скорости вращения системы можно наблюдать и на примере движения двух грузов, укрепленных в противоположных вершинах ромба, стороны которого шарнирно соединены друг с другом. Шарнирный механизм, подвешенный к штативу, способен вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 4.3, а). Если в процессе вращения ромба изменять расстояние между грузами,

прикладывая силу к свободной вершине ромба (рис. 4.3, б), то угловая скорость вращения системы будет изменяться.

4.3. Энергия системы материальных точек. Закон сохранения энергии в механической системе

Рассмотрим механическую энергию системы из n материальных точек. Для этого запишем теорему об изменении кинетической энергии для каждой из точек системы, считая, что на каждую точку массой m_i действует внешняя сила \vec{F}_i , а между ними действуют внутренние силы взаимодействия \vec{f}_{ij} :

$$\begin{aligned}
 d(m_1 v_1^2/2) &= \vec{f}_{12} \cdot d\vec{R}_1 + \vec{f}_{13} \cdot d\vec{R}_1 + \dots + \vec{f}_{1n} \cdot d\vec{R}_1 + \vec{F}_1 \cdot d\vec{R}_1; \\
 &\dots\dots\dots \\
 d(m_i v_i^2/2) &= \vec{f}_{i1} \cdot d\vec{R}_1 + \vec{f}_{i2} \cdot d\vec{R}_i + \dots + \vec{f}_{in} \cdot d\vec{R}_i + \vec{F}_i \cdot d\vec{R}_i; \quad (4.21) \\
 &\dots\dots\dots \\
 d(m_n v_n^2/2) &= \vec{f}_{n1} \cdot d\vec{R}_n + \vec{f}_{n2} \cdot d\vec{R}_n + \dots + \vec{f}_{n,n-1} \cdot d\vec{R}_n + \vec{F}_n \cdot d\vec{R}_n.
 \end{aligned}$$

Просуммируем полученные уравнения:

$$\begin{aligned}
 \sum_i d(m_i v_i^2/2) &= \sum_i \vec{f}_{i1} \cdot d\vec{R}_1 + \vec{f}_{i2} \cdot d\vec{R}_i + \vec{f}_{i3} \cdot d\vec{R}_i + \dots + \vec{f}_{in} \cdot d\vec{R}_i + \\
 &+ \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{R}_i. \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

Изменив последовательность операций суммирования и дифференцирования в левой части выражения (4.22), получим:

$$\begin{aligned}
 d \sum_i (m_i v_i^2/2) &= \sum_i \vec{f}_{i1} \cdot d\vec{R}_1 + \vec{f}_{i2} \cdot d\vec{R}_i + \vec{f}_{i3} \cdot d\vec{R}_i + \dots + \vec{f}_{in} \cdot d\vec{R}_i + \\
 &+ \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{R}_i. \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Сумма кинетических энергий отдельных точек системы представляет кинетическую энергию всей системы $K = \sum_i (m_i v_i^2/2)$. Тогда (4.23) можно записать в виде:

$$dK = \sum_i \vec{f}_{i1} \cdot d\vec{R}_1 + \vec{f}_{i2} \cdot d\vec{R}_i + \vec{f}_{i3} \cdot d\vec{R}_i + \dots + \vec{f}_{in} \cdot d\vec{R}_i + \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{R}_i. \quad (4.24)$$

Правая часть (4.24) представляет собой сумму элементарных работ внутренних и внешних сил. Среди элементарных работ внутрен-

них сил всегда можно найти пару таких слагаемых, для которых силы связаны третьим законом Ньютона, например, $\vec{f}_{12} \cdot d\vec{R}_1 + \vec{f}_{21} \cdot d\vec{R}_2$. Так как $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$, то $\vec{f}_{12} \cdot d\vec{R}_1 + \vec{f}_{21} \cdot d\vec{R}_2 = \vec{f}_{12} \cdot (d\vec{R}_1 - d\vec{R}_2) = \vec{f}_{12} \cdot d\vec{R}_{12}$, где $d\vec{R}_{12}$ – изменение расстояния между первой и второй точками механической системы. С учетом сделанного замечания элементарную работу внутренних сил можно представить в виде суммы $\sum_{i=2}^n \vec{f}_{1i} \cdot d\vec{R}_{1i} + \sum_{i=1}^n \vec{f}_{2i} \cdot d\vec{R}_{2i} + \dots + \sum_{i=1}^{n-1} \vec{f}_{ni} \cdot d\vec{R}_{ni}$. Так как силы, действующие между точками системы, центральные, то $\vec{f}_{ij} \cdot d\vec{R}_{ij} = f_{ij} dR_{ij}$, причем значения каждой из сил \vec{f}_{ij} зависят только от R_{ij} . Если различные R_{ij} рассматривать как независимые переменные некоторой функции, зависящей от расположения частиц системы друг относительно друга, или, как принято говорить, от конфигурации системы, то сумму элементарных работ можно рассматривать как полный дифференциал некоторой функции $U(R_{12}, R_{13}, \dots, R_{ij}, \dots, R_{n-1,n})$, т. е. в этом случае

$$dA = -dU. \quad (4.25)$$

Физическая величина, изменение которой, взятое с противоположным знаком, равно работе внутренних сил системы при изменении конфигурации системы, называется потенциальной энергией этой системы.

Отметим важную особенность работы внутренних сил в замкнутой системе: так как они не могут изменить импульса центра масс, то не изменяют и кинетическую энергию этой системы, хотя кинетическая энергия частей системы может при этом изменяться весьма значительно.

Действительно, пусть две отталкивающиеся точки в начальный момент закреплены и неподвижны относительно их центра масс (в некоторой системе отсчета). Затем их освобождают. Тогда их скорости и кинетические энергии (в этой системе отсчета) будут увеличиваться, хотя скорость центра масс останется неизменной.

После введения потенциальной энергии взаимодействия системы выражение (4.24) можно записать в виде:

$$dK = -dU + \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{R}_i. \quad (4.26)$$

Обозначим работу внешних сил через $dA_{\text{внеш}}$, тогда (4.26) примет вид:

$$dK = -dU + dA_{\text{внеш}}, \quad (4.27)$$

или

$$d(K + U) = dA_{\text{внш}}. \quad (4.28)$$

Если работа внешних сил равна нулю ($dA_{\text{внш}} = 0$), то $d(K + U) = 0$, откуда следует, что

$$(K + U) = \text{const}, \quad (4.29)$$

т. е. механическая энергия системы сохраняется. Работа внешних сил может быть равна нулю в том случае, когда внешние силы равны нулю или когда их направление перпендикулярно элементарным перемещениям или мгновенной скорости движения точки. В последнем случае силы называются *гироскопическими*. К числу гироскопических сил относятся магнитная составляющая силы Лоренца, сила Кориолиса.

В связи с введением представления о внутренней энергии – энергии беспорядочного движения частиц макроскопического тела – обсудим следующий вопрос: раньше мы утверждали, что тело за счет работы внешней силы увеличивает свою кинетическую энергию. Не скажется ли на этом утверждении учет внутренней энергии?

Пусть частицы неподвижного тела массой m движутся беспорядочно со скоростями \vec{v}_i ; внутренняя энергия, обусловленная этим движением, равна:

$$W_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2,$$

где сумма берется по всем частицам. Однако вследствие полной беспорядочности движения частиц тело в целом неподвижно: его импульс равен нулю:

$$\vec{p}_0 = \sum m_i \vec{v}_i = 0.$$

Когда тело под действием внешних сил стало двигаться со скоростью \vec{V} , то скорости частиц стали равными $\vec{v}_i + \vec{V}$ и полная кинетическая энергия равна:

$$\begin{aligned} K_{\text{п}} &= \frac{1}{2} \sum m_i |\vec{v}_i + \vec{V}|^2 = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 + \frac{1}{2} V^2 \sum m_i + \vec{V} \cdot \sum m_i \vec{v}_i = \\ &= W_{\text{вн}} + \frac{1}{2} M V^2 \quad (M = \sum m_i), \end{aligned}$$

а третье слагаемое равно нулю. Таким образом, прирост кинетической энергии был вычислен верно; приобретение телом кинетической

ской энергии упорядоченного движения не сказывается на его внутренней энергии, т. е. на энергии беспорядочного движения частиц тела (конечно, при пренебрежении трением).

Если система незамкнута и неконсервативна, то ее механическая энергия ($K + U$) может изменяться за счет работы внешних сил $A_{\text{внш}}$ и сил трения $A_{\text{тр}}$:

$$\Delta(K + U) = A_{\text{внш}} + A_{\text{тр}}.$$

В дальнейшем мы встретимся с другими видами энергии (электрической, магнитной, ядерной и пр.). Для замкнутой системы закон сохранения и превращения энергии всегда выполняется совершенно строго.

Теперь можно дать более точное определение понятия энергии: *энергия – общая количественная (скалярная) мера движения и взаимодействия всех видов материи. Она неуничтожима и несотворима, как и сама материя и ее движение. Возможны лишь превращения одних видов энергии в другие. Энергия системы является функцией состояния, а не процесса; она не зависит от того, каким образом достигнуто данное состояние.*

До второй трети XIX в., когда понятие энергии еще не вполне сформировалось, физики оперировали по преимуществу только механической энергией и механическим импульсом. Возникали горячие споры, какое из понятий является «более правильной» мерой механического движения и его изменений. Теперь нам ясно, что вопрос был поставлен неправильно. Обе величины характеризуют механическое движение, но с разных точек зрения.

Законы сохранения и превращения энергии и сохранения импульса отражают философский тезис о неуничтожимости материи и вечности ее движения. Позже мы увидим (при ознакомлении с основами специальной теории относительности), что инертные свойства материи (отраженные в понятии массы) неразрывно связаны с движением материи (отраженным в понятиях энергии и импульса).

В курсе теоретической физики будет показано, что закон сохранения энергии связан с однородностью времени.

В заключение отметим, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой импульс и энергия системы изменяются. Действительно, из преобразований Галилея (2.10) видно, что скорости частей системы при этом изменяются, следовательно, изменяются импульс и кинетическая энергия. Потенциальная энергия, зависящая только от относительного положения частей системы, не изменяется, но полная энергия системы изменится. Однако и в новой системе отсчета для замкнутой системы будут справедливы закон сохранения механического импульса и закон сохранения и превращения энергии.

4.4. Движение тела переменной массы

Рассмотренные законы механики могут быть применены к решению задачи о движении тела с переменной массой (например, ракеты).

Ракета – это устройство, движущееся вследствие того, что при быстром сгорании топлива внутри ракеты струя горячих газов уносит некоторый импульс, заставляя корпус ракеты перемещаться в сторону, противоположную движению газа. При этом масса ракеты непрерывно уменьшается, что усложняет решение задачи.

Начнем с довольно общего случая, когда систему «ракета – газы» нельзя считать изолированной от внешних воздействий (например, от притяжения к Земле).

Выберем систему координат, связанную с Землей, которую будем считать неподвижной.

Пусть мгновенное значение переменной массы ракеты равно M , скорость ее относительно Земли \vec{v} ; тогда мгновенный импульс ракеты равен:

$$\vec{p} = M\vec{v}.$$

Если на систему «ракета – газы» действует сумма внешних сил \vec{F} , то начальный импульс системы изменится на $d\vec{p}_{\text{внш}}$.

Вследствие сгорания топлива из сопла ракеты вырываются газы со скоростью \vec{u} относительно ракеты. Это значит, что их скорость относительно Земли будет равна:

$$\vec{v}_1 = \vec{u} + \vec{v}.$$

Покидая ракету, газы за время dt уносят массу $dM_1 > 0$, и соответственно импульс равен

$$d\vec{p}_1 = \vec{v}_1 dM_1.$$

При этом скорость самой ракеты увеличится на $d\vec{v}$ и изменение ее импульса составит:

$$d\vec{p}_2 = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - M\vec{v},$$

где изменение массы ракеты $dM = -dM_1$, так как $dM + dM_1 = 0$.

По второму закону Ньютона изменение суммарного импульса системы «ракета – газы» равно:

$$d\vec{p}_{\text{внш}} = d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - M\vec{v} + \vec{v}_1 dM_1 = \vec{F}dt.$$

Отсюда, пренебрегая бесконечно малой второго порядка $dMdv$ и учитывая, что

$$\vec{v}_1 - \vec{v} = \vec{u},$$

получим:

$$Md\vec{v} - \vec{u}dM = \vec{F}dt,$$

или

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dM}{dt} \vec{u} = \vec{F}. \quad (4.30)$$

Это уравнение получено И. В. Мещерским (1859–1935) в 1894 г. и носит его имя.

Мы видим, что движение ракеты кроме внешних сил \vec{F} обусловлено действием уходящих газов, которое определяется вторым слагаемым, стоящим в левой части уравнения (4.30) и имеющим размерность силы. *Это слагаемое часто называют реактивной силой.*

Следует помнить, что в этом уравнении скорость \vec{v} определена относительно Земли, а скорость \vec{u} относительно ракеты, что с формальной точки зрения нехорошо. Однако для простых примеров, которые будут рассмотрены ниже, такая форма записи допустима и удобна. Кроме того, мы примем, что скорость \vec{u} (скорость выхода газов из ракеты) постоянна.

Теперь действия внешних сил учитывать не будем, т. е. примем $\vec{F} = 0$, $d\vec{p}_{\text{внш}} = 0$.

Если начало отсчета времени совпадает с моментом зажигания топлива (начальная скорость ракеты равна нулю, а начальная масса равна M_0), то движение ракеты будет прямолинейным; знаки векторов \vec{v} и $d\vec{v}$ совпадают; знак вектора относительной скорости газов \vec{u} им противоположен. При этих предположениях уравнение (4.30) принимает вид:

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt} \quad (4.31)$$

(здесь u – модуль вектора \vec{u}).

Этот частный случай уравнения Мещерского (которое само есть следствие второго закона Ньютона) называется уравнением Циолковского. Несмотря на многочисленные упрощения, допущенные при его составлении, решение уравнения Циолковского очень поучительно.

Разделив переменные и интегрируя (4.31), получим:

$$-\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = \frac{1}{u} \int_0^v dv; \quad \frac{M}{M_0} = \exp\left(-\frac{v}{u}\right). \quad (4.32)$$

Таким образом, полезная масса M очень быстро уменьшается при увеличении конечной скорости. Так, при v/u , равном 2; 5 и 10, получается M/M_0 , соответственно равное 0,14; $7 \cdot 10^{-3}$ и $5 \cdot 10^{-5}$.

Так как скорости v , при которых возможны космические полеты в пределах Солнечной системы (см. § 2.9 и гл. 12), должны достигать 11 км/с, а для выхода из сферы притяжения Солнца даже 16 км/с, то необходимость ступенчатых ракет (отдельные ступени, освобождающиеся по мере выгорания топлива, сбрасываются с ракеты), предложенных Циолковским, совершенно очевидна.

Соппротивление воздуха, резко сказывающееся в нижних слоях атмосферы, еще ухудшает числа, приведенные выше.

Пользуясь уравнением (4.32), построим в функции аргумента

$$x = \frac{v}{u} = \ln \frac{M_0}{M} \text{ графики следующих величин:}$$

1) скорости ракеты относительно Земли (в долях u):

$$y = \frac{v}{u} = x;$$

2) скорости газов относительно Земли (в долях u):

$$y = \frac{v-u}{u} = x - 1;$$

3) кинетической энергии ракеты относительно Земли (в долях $\frac{1}{2} M_0 u^2$):

$$y = \frac{K}{\frac{1}{2} M_0 u^2} = \frac{\frac{1}{2} M v^2}{\frac{1}{2} M_0 u^2} = \frac{M}{M_0} x^2 = x^2 \exp(-x).$$

Соответствующие графики изображены на рис. 4.4. Как видно из рисунка, когда скорость ракеты v становится больше u , скорость газов относительно Земли делается положительной, т. е. ракета и газы движутся относительно Земли в одну и ту же сторону.

Действительно, векторы \vec{v} и $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ при движении по прямой противоположны. Скорость газов относительно Земли равна:

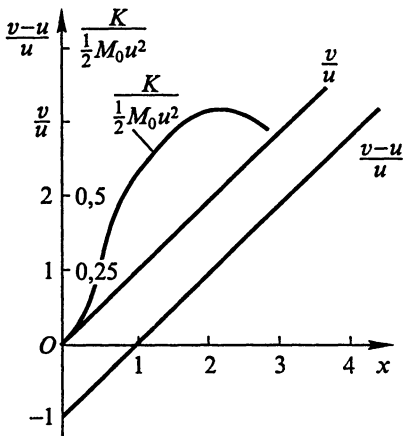


Рис. 4.4

$v_1 = v - u$. Она обращается в нуль при $v = u$. Пока скорость ракеты меньше скорости истекающих из нее газов ($v < u$), то $v_1 < 0$; когда $v > u$, то $v_1 > 0$ — газы и ракета движутся в одном направлении. Заметим, что $v > u$ достигается, как отмечалось, лишь тогда, когда масса истекших из ракеты газов и отработанных сброшенных ступеней существенно превышает оставшуюся массу ракеты: ведь в отсутствие внешних сил положение центра масс системы «ракета — газы» не может измениться. При наличии внешних сил (силы тяжести и сопротивления воздуха) — он вообще должен смещаться к Земле.

Кинетическая энергия ракеты максимальна при $x = 2$, т. е. когда масса ракеты составляет $0,135 M_0$. Этот результат может показаться странным: ведь работающий двигатель должен непрерывно ускорять ракету. Разумеется, так и происходит: скорость ракеты, как и кинетическая энергия единицы ее массы (см. 4.32)

$$K_1 = \frac{K}{M} = \frac{1}{2} u^2 x^2, \quad (4.33)$$

непрерывно растет по мере сгорания топлива.

Так как возможности дальнейшего увеличения скорости выброса газов, образующихся при реакции горения, почти исчерпаны, то дальнейшие успехи в области космонавтики (например, полеты к звездам) требуют разработки совершенно новых типов горючего (не химических).

4.5. Соударения тел и частиц

Соударением в физике называют кратковременное взаимодействие сближающихся тел, результатом которого является изменение их скоростей и состояния. На примере соударений особенно хорошо поясняется применение основных законов сохранения.

Соударения принято разделять на неупругие и абсолютно упругие; действительные соударения в той или иной степени соответствуют такой классификации.

При *неупругом соударении* взаимодействующие тела в результате соударения приобретают одинаковую скорость и движутся вместе как одно тело; таково (в первом приближении) соударение шаров из мягкой глины: при взаимодействии они деформируются, но не восстанавливают первоначальной формы. Это значит, что *внутренняя энергия шаров увеличивается за счет кинетической энергии и потенциальной энергии их взаимодействия*. Таким образом, рассматриваемая система тел неконсервативна.

Если потенциальной энергией взаимодействия соударяющихся тел можно пренебречь (например, при соударении небольших макроскопических незаряженных тел), то прирост внутренней энергии равен убыли кинетической. Поэтому законы сохранения энергии и импульса запишутся в этом случае так:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \Delta W_{\text{вн}}, \quad (4.34)$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}, \quad (4.35)$$

где изменение внутренней энергии $\Delta W_{\text{вн}}$ – положительная величина; m_1 и m_2 – массы тел; \vec{v}_1 и \vec{v}_2 – их скорости до соударения; \vec{V} – скорость после соударения.

В уравнениях, описывающих неупругое соударение, имеются четыре неизвестные величины (три проекции скорости \vec{V} и $\Delta W_{\text{вн}}$); таково же и число независимых уравнений, поэтому задача о неупругом соударении разрешима в любом случае.

При этом если нам важен лишь окончательный результат соударения, то не нужно знать деталей сложного процесса взаимодействия частиц.

Рассмотрим частный случай *центрального (лобового) соударения*, когда скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 направлены по прямой, соединяющей центры масс соударяющихся тел (или соударяющиеся частицы). В этом частном случае векторное уравнение (4.35) заменяется одним скалярным:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V.$$

Отсюда скорость после соударения равна:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.36)$$

Из уравнения (4.34) находим:

$$\Delta W_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 > 0.$$

Изменение внутренней энергии, как и следовало ожидать, оказалось положительным.

Если скорость второго тела до соударения $v_2 = 0$, то

$$V = v_1 \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

и относительное изменение энергии

$$\frac{\Delta W_{\text{вн}}}{K} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Поэтому, например, при ковке металла молотом массой m_1 , когда желательна кинетическую энергию молота преобразовать в энергию деформации и внутреннюю энергию металла, выгодно класть металл на массивную наковальню ($m_1 \ll m_2$). Но при вбивании гвоздя требуется сообщать ему кинетическую энергию. Здесь выгодно иметь $m_1 \gg m_2$, т. е. относительно массивный молоток.

Одно из интересных практических применений неупругого соударения – *баллистический маятник*, служащий для определения больших скоростей, например скорости пули.

Маятник в этом случае представляет собой ящик с глиной или песком (масса его M), подвешенный на длинном подвесе h (рис. 4.5).

Пуля (масса m) влетает в маятник с горизонтальной скоростью \vec{v} , направленной к центру масс маятника, и застревает в нем.

Время взаимодействия пули с маятником очень мало по сравнению с периодом колебаний последнего. Поэтому система, практически не выйдя из вертикального положения, успевает приобрести скорость \vec{V} , которую можно найти из закона сохранения импульса:

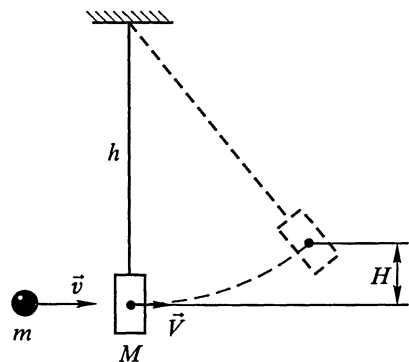


Рис. 4.5

$$V = v \frac{m}{m + M}. \quad (4.37)$$

Затем система движется вверх и на мгновение останавливается, когда центр масс поднимается на наибольшую высоту H . По закону сохранения энергии можно написать:

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gH.$$

Учитывая (4.37), находим скорость пули:

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gH}.$$

Конечно, при этом кинетическая энергия системы «пуля – маятник»

$$K = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}mv^2 \frac{m}{m+M}$$

оказывается меньше кинетической энергии пули.

В ядерной физике иногда желательно использовать соударения для превращения кинетической энергии частиц в их внутреннюю энергию. Если массы частиц одинаковы, одна из них покоится (точнее, обладает весьма малой скоростью $v_2 = 0$), а скорость другой $v_1 \ll c$, так что можно еще пользоваться уравнениями (4.34) и (4.35), то при неупругом соударении получается:

$$V = 0,5v_1.$$

В этом случае прирост внутренней энергии равен:

$$\Delta W_{\text{вн}} = \frac{m_1}{4}v_1^2$$

и составляет лишь половину первоначальной кинетической энергии. Если же частицы равной массы соударяются, двигаясь навстречу друг другу с равными скоростями ($\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$), то после соударения $V = 0$, прирост внутренней энергии $\Delta W_{\text{вн}} = m_1v_1^2$ и вся кинетическая энергия переходит во внутреннюю.

Как видно из этого расчета, переход к «встречным» пучкам частиц оказывается перспективным.

Если скорости частиц велики, то расчет производится по уравнениям специальной теории относительности (гл. 9).

Перейдем к рассмотрению упругих соударений. *Соударение называется упругим, если в результате его внутренняя энергия частиц не изменяется и частицы снова удаляются друг от друга.*

Примером макроскопического упругого соударения может служить соударение шаров из слоновой кости (после взаимодействия они практически полностью восстанавливают первоначальную форму). В качестве примера упругого соударения ядерных частиц можно привести соударение положительно заряженного ядра гелия (α -частицы) с ядром другого атома, также несущим положительный заряд, если при взаимодействии не происходит перестройка атомного ядра. При этом непосредственного соприкосновения частиц не происходит.

При упругом соударении импульс и кинетическая энергия перераспределяются, причем обе величины сохраняются (замкнутая консервативная система). До соударения частицы, находясь на расстоянии R , обладали потенциальной энергией U взаимодействия друг с другом; после соударения, удаляясь на такое же расстояние, они снова будут иметь прежнюю потенциальную энергию. Поэтому изменения потенциальной энергии во время взаимодействия роли не играют. Следовательно, при расчетах достаточно использовать законы сохранения импульса и кинетической энергии:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad (4.38)$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \quad (4.39)$$

Здесь \vec{u}_1 и \vec{u}_2 – скорости частиц после соударения. Таким образом, в этом случае число неизвестных (шесть) превышает число уравнений (четыре), и в общем виде задача неразрешима; требуется задание дополнительных условий или ограничение общности постановки задачи.

Обсудим некоторые разрешимые частные случаи упругого соударения.

1. Пусть частица соударяется с неподвижной ($v_2 = 0$), равной ей по массе ($m_1 = m_2 = m$), частицей. Тогда уравнения (4.38) и (4.39) упрощаются:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \\ v_1^2 &= u_1^2 + u_2^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Полученные соотношения означают, что векторы скорости образуют прямоугольный треугольник. Следовательно, частицы разлетятся под прямым углом. Однако без каких-то дополнительных сведений невозможно указать направления скоростей обеих частиц. Очевидно, соударение не лобовое.

Предположим, что $u_1 = 0$. Тогда получим:

$$\bar{u}_2 = \bar{v}_1, \quad (4.41)$$

т. е. частицы «обмениваются скоростями» (соударение лобовое). Предположение, что $u_2 = 0$, дает $\bar{u}_1 = \bar{v}_1$. Это означает, что соударения не происходило.

2. Другой важный случай – лобовое соударение частиц разной массы. В этом случае векторное уравнение (4.38) заменяется одним скалярным, а уравнение (4.39) не изменяется. Поэтому будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Перепишем (4.42) в таком виде:

$$\begin{aligned} m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2(u_2^2 - v_2^2), \\ m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2). \end{aligned}$$

Деля эти уравнения друг на друга, находим:

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2.$$

Но

$$v_1 - u_1 = (u_2 - v_2) \frac{m_2}{m_1}.$$

Умножив первое уравнение на m_1/m_2 и вычтя его из второго, получим:

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.43)$$

Складывая те же уравнения, найдем:

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 - (m_2 - m_1)v_1}{m_1 + m_2}. \quad (4.44)$$

Интересны следующие частные случаи.

Пусть массы равны ($m_1 = m_2$). Тогда

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1.$$

Соударяющиеся частицы «обмениваются скоростями». Например, если частица соударяется с равной по массе неподвижной частицей, то она останавливается, а другая частица приобретает скорость первой.

Этот результат был уже найден раньше (уравнение 4.41) как частный случай уравнений (4.40).

В ядерных реакторах получают нейтроны (нейтральные частицы с массой, весьма близкой к массе атома водорода) со скоростями v_1 порядка 10^7 м/с. Их необходимо замедлить, снизив скорость до $u_1 = 3 \cdot 10^3$ м/с. Для этого их заставляют двигаться в среде, содержащей атомы тяжелого водорода (масса их вдвое превышает массу атома обычного водорода), – в «тяжелой воде», молекулы которой состоят из двух атомов тяжелого водорода и атома кислорода.

Начальную скорость ядер атомов тяжелого водорода (дейтронов) можно считать равной нулю. После лобового упругого соударения нейтрона с ядром тяжелого водорода скорость нейтрона составит согласно уравнению (4.44):

$$u_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v_1 = \frac{1}{3} v_1.$$

После n лобовых соударений конечная скорость будет равна:

$$u = \frac{v_1}{3^n}.$$

Если требуется уменьшить скорость в N раз, то необходимое число лобовых соударений составит:

$$n = \frac{\lg N}{\lg 3}.$$

В нашем примере $N = 3,3 \cdot 10^3$; $n \approx 7$.

Так как не все соударения лобовые, а при косых соударениях нейтрон теряет меньшую долю кинетической энергии, то практически необходимое число соударений несколько больше вычисленного.

Толщина слоя тяжелой воды, в котором нейтроны будут замедлены, определяется полученным значением n .

С чисто механической точки зрения гораздо лучше было бы замедлять нейтроны на атомах водорода, где достаточно одного лобового соударения. Но есть ряд дополнительных соображений, выходящих за пределы механики и не позволяющих воспользоваться ядрами атомов водорода.

Если $m_1 \ll m_2$ и $v_2 = 0$, то

$$u_1 = -v_1; \quad u_2 = 0. \quad (4.45)$$

Такие условия создаются, например, при ударе шара о стенку. Шар, ударяющийся по нормали (стенка есть часть шара неопределенно большого радиуса, поэтому такое соударение является лобовым), отскакивает, меняя направление скорости на противоположное и сохраняя ее модуль.

Может возникнуть недоумение: если импульс шара изменяется, то стенка должна получить импульс и кинетическую энергию. У нас же оказалось, что $u_2 = 0$.

Суть дела заключается в том, что решение (4.45) есть предельный случай, верный для бесконечно массивной стенки. У реальной стенки (при сильном неравенстве масс) скорость оказывается исчезающе малой, как и доля кинетической энергии, отданной шаром стенке. Чем сильнее неравенство масс, тем точнее результат, описываемый уравнением (4.45).

Наконец, если вектор скорости \vec{v}_1 образует с нормалью к стенке угол α (рис. 4.6), то вектор следует разложить на касательную и нормальную составляющие. Очевидно, взаимодействие не может изменить касательной составляющей, но меняет знак нормальной составляющей скорости. Поэтому вектор \vec{u}_1 будет наклонен к нормали под углом α , т. е. шар после соударения будет двигаться по другую сторону нормали. При этом векторы \vec{v}_1 , \vec{u}_1 и нормаль будут лежать в общей плоскости (плоскость падения), определяемой нормалью и вектором \vec{v}_1 ; кроме того, скорости равны по модулю: $v_1 = u_1$.

Как известно, физика XVIII в. приписывала свету механическую корпускулярную природу; этой модели соответствовал тот факт, что свет отражается от зеркала по такому же закону, как и частица от плоской стенки. Но в дальнейшем выяснилось, что природа света иная – с современной точки зрения он представляет собой электромагнитные волны или, на другом языке, поток особых, квантовых частиц, называемых фотонами, существенно отличающихся от частиц, рассматриваемых в классической механике. Этот вопрос детально будет рассмотрен в «Опике и атомной физике». Сейчас отметим лишь, что, несмотря на иную физическую природу света, формальное выражение закона отражения при этом сохраняется.

Мы предполагали, что соударяющиеся объекты движутся поступательно и взаимодействуют только друг с другом. Поэтому полученные соотношения весьма приближенно (а иногда совсем плохо) выполняются, скажем, при игре на бильярде, где трение шаров о сукно и возможность сообщать им различные вращения весьма усложняют расчет условий движения и соударения шаров.

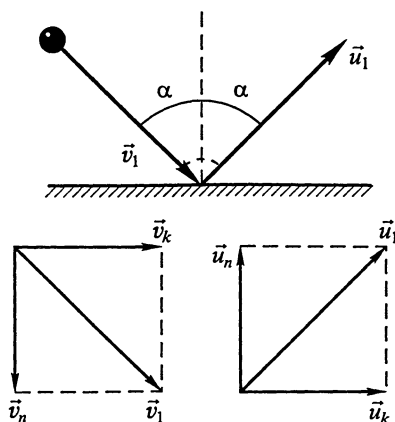


Рис. 4.6

Кроме того, реальные макроскопические соударения обычно лишь приближенно можно отнести к упругим, так как разлетающиеся макроскопические тела обычно оказываются деформированными.

В мире атомных и ядерных соударений, когда взаимодействующие частицы разлетаются, упругие соударения получаются лишь при малых энергиях, причем внутренняя энергия взаимодействующих частиц не меняется. Но если частицы в результате взаимодействия приходят в возбужденное состояние, то соударение будет не вполне упругим и его описание окажется более сложным. Так, электрон, взаимодействующий с атомом, может ионизировать его, т. е. отдать часть энергии электрону атомной оболочки – соударение не будет ни чисто упругим, ни чисто неупругим.

Глава 5

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

5.1. Модель абсолютно твердого тела. Виды движения твердого тела

Описание движения механической системы из n материальных точек довольно сложная задача. В этом случае система имеет $3n$ степени свободы, и требуется решить $3n$ уравнений для выяснения характера ее движения. Ситуация существенно упрощается, если в процессе движения расстояние между точками системы не меняется. Можно представить себе, что каждая из точек системы соединена жесткими невесомыми стержнями с соседними точками. Такую систему назовем абсолютно твердым телом. Для задания положения такого тела необходимо определить положения трех точек, не лежащих на одной прямой, расстояния между которыми заданы. Следовательно, число независимых координат, определяющих положение абсолютно твердого тела, равно шести, так как каждая из точек имеет три степени свободы, а положения этих точек связаны тремя уравнениями прямых. Таким образом, для описания свободного движения абсолютно твердого тела нужно иметь всего два векторных уравнения. Движение многих твердых тел в механике можно рассматривать как движение абсолютно твердых тел. Такое моделирование применяется для описания движения тел, изменением формы и размеров которых можно пренебречь в процессе движения.

Различают пять видов движения твердого тела: поступательное, вращательное, плоское, движение вокруг неподвижной точки, свободное.

При поступательном движении любая точка твердого тела совершает одинаковые перемещения, при этом прямая, соединяющая две произвольные точки твердого тела, перемещается параллельно самой себе. Примером поступательного движения является движение кабины колеса обозрения. На рис. 5.1 приведены траектории трех мелков, укрепленных на деревянной подставке, совершающей поступательное движение относительно доски. Видно, что траектории движения мелков одинаковы по форме. Одинаковыми в этом случае являются также скорости и ускорения каждой точки твердо-

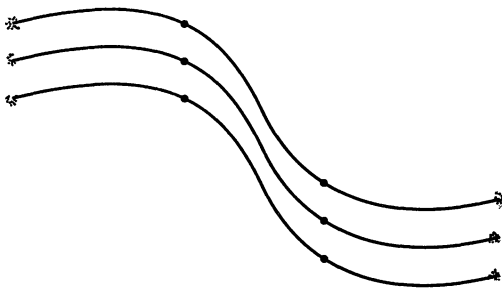


Рис. 5.1

го тела, поэтому описание движения тела можно проводить, изучая движение любой точки тела, например его центра масс.

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через две произвольные точки тела, то такое движение называется *вращательным движением* во-

круг оси. Каждая точка тела в этом случае движется по окружности с одинаковой угловой скоростью и одинаковым угловым ускорением. Примерами вращательного движения являются движение ротора, пропеллера самолета, лопастей винта вертолета относительно тела закрепления. Если начало координат выбрать на оси вращения, а оси координат направить так, чтобы ось вращения совпадала с осью OZ и была направлена вдоль направления вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ (рис. 5.2), то скорость любой точки с радиус-вектором \vec{R} можно определить по формуле Эйлера $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$, а ускорение \vec{a} , взяв производную по времени от \vec{v} :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = [\vec{\omega}, \frac{d\vec{R}}{dt}] = [\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{R}]. \quad (5.1)$$

Так как $d\vec{R}/dt$ есть скорость точки \vec{v} и $d\vec{\omega}/dt$ – угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$, то (5.1) можно записать в виде

$$\vec{a} = [\vec{\omega}, \vec{v}] + [\vec{\varepsilon}, \vec{R}] = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{R}]] + [\vec{\varepsilon}, \vec{R}]. \quad (5.2)$$

Преобразуя первое слагаемое в выражении (5.2) по известному правилу $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$, получим:

$$\vec{a} = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{R}]] + [\vec{\varepsilon}, \vec{R}] = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{R}) - \vec{R}\omega^2 + [\vec{\varepsilon}, \vec{R}] = \vec{\omega} \omega \vec{R} \cos(\widehat{\vec{\omega}, \vec{R}}) - \vec{R}\omega^2 + [\vec{\varepsilon}, \vec{R}] = \omega^2 \vec{R} \cos(\widehat{\vec{\omega}, \vec{R}}) \vec{j} - \vec{R}\omega^2 + [\vec{\varepsilon}, \vec{R}] = -\omega^2 \vec{R}_0 + [\vec{\varepsilon}, \vec{R}], \quad (5.3)$$

где \vec{R}_0 – вектор, соединяющий ось вращения с точкой по нормали к оси. Из (5.3) видно, что полное ускорение точки твердого тела есть сумма двух ускорений: нормального, равного $-\omega^2 \vec{R}_0$, и тангенциального, равного $[\vec{\varepsilon}, \vec{R}]$.

В случае плоского движения твердого тела все его точки перемещаются в параллельных плоскостях. Примером плоского движения

является движение колес велосипеда при движении по прямой дороге. Плоское движение может быть представлено как суперпозиция двух движений твердого тела: поступательного и вращательного. Представим себе, что твердое тело произвольной формы совершило перемещение в плоскости рисунка из положения 1 в положение 2 (рис. 5.3). Это перемещение можно представить как поступательное перемещение прямой AB и поворот на угол $\Delta\varphi$ вокруг оси, проходящей через точку B перпендикулярно плоскости рисунка. Положение оси вращения зависит от выбора значения поступательного перемещения, но угол поворота во всех случаях будет одинаковым. Таким образом, результирующее перемещение $\Delta\vec{R} = \Delta\vec{R}_{\text{пост}} + [\Delta\vec{\varphi}, \vec{R}]$, а скорость будет определяться выражением

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{пост}} + [\vec{\omega}, \vec{R}]. \quad (5.4)$$

При описании плоского движения тела скорость поступательно-го движения тела можно выбирать произвольно, в частности равной нулю. В этом случае говорят, что вращение тела происходит вокруг мгновенной оси вращения, потому что в следующий момент времени ось вращения может изменить свое положение относительно тела. Если мгновенная ось проходит через точки тела, то они в этот момент времени имеют нулевую скорость движения. Например, при качении колеса по прямой дороге без скольжения мгновенная ось вращения проходит через точку касания обода колеса с дорогой.

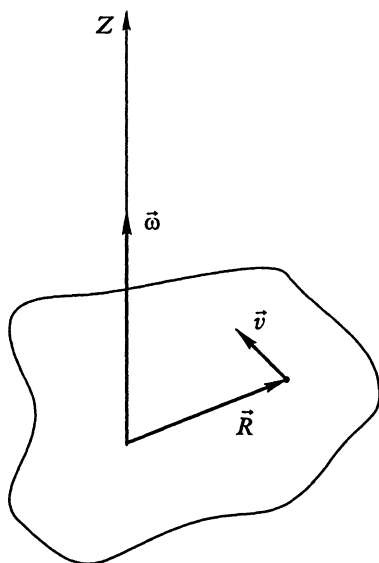


Рис. 5.2

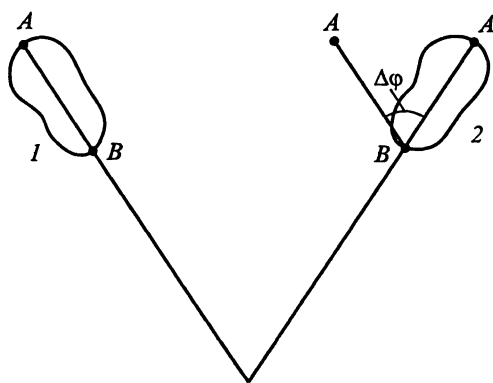


Рис. 5.3

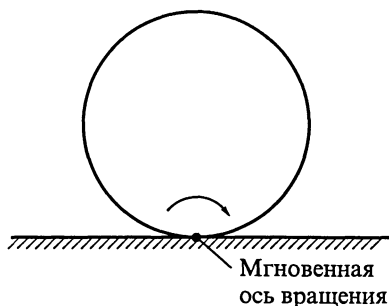


Рис. 5.4

В каждый момент времени можно считать, что все точки колеса обращаются вокруг мгновенной оси с одинаковой угловой скоростью (рис. 5.4).

При движении твердого тела вокруг закрепленной точки поступательное движение тела невозможно. Примером такого рода движения является движение волчка. Наблюдения за его вращением позволяют сделать вывод о том, что в этом случае тело вращается

вокруг оси, неподвижной относительно тела, но вращающейся относительно системы координат, связанной с наблюдателем. Результирующее движение в данном случае можно представить как суперпозицию двух вращений.

При свободном движении твердое тело может участвовать в поступательном движении и вращении относительно трех независимых осей вращения. Примером свободного движения является полет копья или диска, выпущенных рукой спортсмена. Свободное движение является наиболее сложным видом движения твердого тела.

5.2. Динамика поступательного движения твердого тела

Предположим, что твердое тело с плотностью $\rho(x, y, z)$, объемом V движется поступательно. Для вывода уравнения движения твердого тела в этом случае разобьем твердое тело на отдельные малые элементы, которые можно считать материальными точками в условиях рассматриваемой задачи. Массу каждого элемента обозначим через dm . В пределах выделенного малого объема dV плотность тела будем считать постоянной, тогда $dm = \rho(x, y, z) dV$. Запишем уравнение второго закона Ньютона для элемента массой dm :

$$\frac{d^2(dm\vec{R})}{dt^2} = d\vec{f}_i + d\vec{F}_e, \quad (5.5)$$

где $d\vec{f}_i$ – равнодействующая внутренних сил, а $d\vec{F}_e$ – равнодействующая внешних сил, действующих на выделенный элементарный объем твердого тела. После интегрирования (5.5) по всем элементарным массам твердого тела получим:

$$\int \frac{d^2(dm\vec{R})}{dt^2} = \int d\vec{f}_i + \int d\vec{F}_e. \quad (5.6)$$

В правой части сумма всех внутренних сил равна нулю по третьему закону Ньютона, а сумма всех внешних сил представляет равнодействующую внешних сил \vec{F} , действующих на твердое тело. В левой части (5.6) подынтегральное выражение умножим и разделим на массу твердого тела $M = \int dm = \int \rho(x, y, z) dV$. После этого (5.6) примет вид:

$$\frac{\int M \frac{d^2(dm\vec{R})}{dt^2}}{M} = \vec{F}. \quad (5.7)$$

Изменив последовательность интегрирования и дифференцирования в левой части (5.7), получим:

$$\frac{d^2 M \int \frac{dm\vec{R}}{M}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (5.8)$$

Обозначим $\int (dm\vec{R})/M$ через \vec{R}_c – радиус-вектор центра масс твердого тела. Тогда (5.8) запишется в виде:

$$\frac{d^2(M\vec{R}_c)}{dt^2} = \vec{F}. \quad (5.9)$$

Из (5.9) следует, что поступательное движение твердого тела можно рассматривать как движение одной точки с массой, равной массе твердого тела, сосредоточенной в центре масс твердого тела, происходящее под действием внешних сил, приложенных к центру масс.

Так как радиус-вектор центра масс твердого тела определяется выражением

$$\vec{R}_c = \frac{\int dm\vec{R}}{M}, \quad (5.10)$$

дифференцированием по времени (5.10) нетрудно получить выражение для скорости центра масс твердого тела \vec{V}_c :

$$\vec{V}_c = \frac{\int \vec{v} dm}{M}. \quad (5.11)$$

Координаты центра масс твердого тела можно определить из (5.10):

$$X_c = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV}; \quad Y_c = \frac{\int \rho y dV}{\int \rho dV}; \quad Z_c = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV}, \quad (5.12)$$

а координаты скорости центра масс твердого тела – из (5.11):

$$V_{xc} = \frac{\int \rho v_x dV}{\int \rho dV}; \quad V_{yc} = \frac{\int \rho v_y dV}{\int \rho dV}; \quad V_{zc} = \frac{\int \rho v_z dV}{\int \rho dV}. \quad (5.13)$$

Таким образом, поступательное движение твердого тела однозначно описывается движением центра масс, происходящим под действием всех внешних сил, действующих на твердое тело.

5.3. Динамика вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции твердого тела относительно оси вращения

Особенности вращения твердого тела вокруг неподвижной оси вращения удобно изучать, наблюдая движение крестовины, способной вращаться вокруг неподвижной оси симметрии, перпендикулярной плоскости чертежа (рис. 5.5). На оси кроме крестовины укреплены жестко связанные с ней два шкива разных радиусов. На стержнях крестовины симметрично оси вращения закрепляются четыре груза, одинаковых по форме и имеющих равные массы M . Расстояния грузов до оси вращения можно изменять в процессе эксперимента. Подобное устройство называют маятником Обербека. Момент импульса крестовины с грузами в этом случае относительно центра симметрии направлен вдоль оси вращения.

Намотаем на малый шкив нить, перекинем ее через блок B и подвесим на ней тело массой m . Крестовина придет во вращение под действием силы натяжения нити. Меняя массу m , можно убедиться, что угловое ускорение увеличивается с ростом силы натяжения.

Намотаем на малый шкив нить, перекинем ее через блок B и подвесим на ней тело массой m . Крестовина придет во вращение под действием силы натяжения нити. Меняя массу m , можно убедиться, что угловое ускорение увеличивается с ростом силы натяжения.

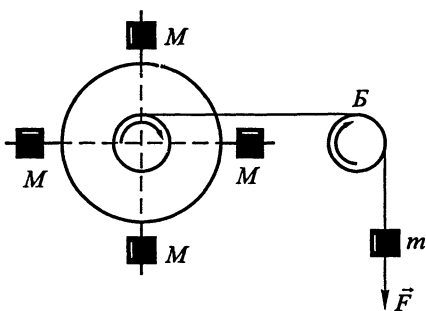


Рис. 5.5

Меня положение грузов с массами M при заданной силе натяжения, можно убедиться, что угловое ускорение при этом изменяется: оно уменьшается, если грузы удалять от оси вращения.

Если сила натяжения со стороны нити вместо малого шкива будет действовать на большой, то угловое ускорение возрастает при неизменном расположении грузов.

Таким образом, угловое ускорение твердого тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, зависит как от распределения масс вращающегося тела относительно оси вращения, так и от значения момента силы натяжения нити относительно оси вращения.

Для описания вращения твердого тела вокруг неподвижной оси в этом случае выберем систему координат так, чтобы ее начало лежало на оси вращения, ось OZ совпадала с осью вращения и была направлена вдоль вектора угловой скорости. Для описания вращения твердого тела воспользуемся выражением (4.14) для z -проекции уравнения моментов $dL_z/dt = M_z$. Применительно к рассматриваемому случаю L_z – это проекция момента импульса твердого тела, а M_z – это проекция момента внешней силы на ось OZ .

Значение L_z можно определить по формуле (4.17), заменяя m на dm и суммирование на интегрирование по всему объему твердого тела. В результате имеем:

$$L_z = \omega_z \int (x^2 + y^2) dm = \omega_z \int (x^2 + y^2) \rho dV. \quad (5.14)$$

Выражение $I_z = \int (x^2 + y^2) \rho dV$ называется *моментом инерции* твердого тела относительно оси OZ .

Угловое ускорение твердого тела будет вызываться только той составляющей силы натяжения, которая создает проекцию момента силы на ось OZ , отличную от нуля. Действие других составляющих внешней силы компенсируется силами упругости, возникающими в подшипниках, обеспечивающих крепление оси вращения. Силы упругости приводят к созданию моментов сил, действующих на твердое тело так, что их проекции на оси OX и OY полностью компенсируют проекции момента внешних сил на оси OX и OY .

Проекцию момента внешней силы на ось вращения OZ можно определить, представив радиус-вектор и силу в виде суммы двух составляющих: параллельной и перпендикулярной оси OZ : $\vec{R} = \vec{R}_\perp + \vec{R}_\parallel$; $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel$.

Тогда выражение для момента силы будет иметь вид:

$$\vec{M} = [(\vec{R}_\perp + \vec{R}_\parallel), (\vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel)] = [\vec{R}_\perp, \vec{F}_\perp] + [\vec{R}_\perp, \vec{F}_\parallel] + [\vec{R}_\parallel, \vec{F}_\perp] + [\vec{R}_\parallel, \vec{F}_\parallel]. \quad (5.15)$$

Последнее слагаемое в выражении (5.15) равно нулю как векторное произведение двух коллинеарных векторов. Второе и третье слагаемые не могут давать вклада в проекцию вектора \vec{M} на ось OZ , так как они соответствуют векторам, направленным перпендикулярно этой оси. Первое слагаемое соответствует составляющей вектора \vec{M} , параллельной оси OZ . Действительно, $[\vec{R}_\perp, \vec{F}_\perp] = (F_y x - F_x y) \vec{k}$ представляет собой вектор, направленный вдоль оси OZ ; модуль этого вектора зависит от проекций векторов \vec{R} и \vec{F} на оси OX и OY и численно равен произведению перпендикулярной составляющей внешней силы на плечо силы – кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы.

С учетом сказанного уравнение моментов, определяющее движение твердого тела вокруг произвольной неподвижной оси, может быть записано в виде:

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = M_z, \quad (5.16)$$

где I – момент инерции твердого тела относительно оси вращения, ω – угловая скорость вращения, M_z – проекция момента внешних сил на ось вращения.

Уравнение (5.16) называется *основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси*. По форме оно напоминает основное уравнение динамики для материальной точки с тем отличием, что роль массы играет момент инерции относительно оси вращения, роль скорости – угловая скорость, роль силы – момент силы относительно оси вращения.

Так как для твердого тела I не изменяется в процессе движения, то (5.16) можно записать в виде:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_z. \quad (5.17)$$

Если момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю, то произведение момента инерции твердого тела относительно оси вращения на угловую скорость, или проекция момента импульса на ось вращения, не изменяются со временем:

$$I\omega = \text{const}. \quad (5.18)$$

Форма записи закона сохранения проекции момента импульса на ось вращения аналогична закону сохранения проекции импульса материальной точки на некоторое направление при условии замены t на I , v на ω . Эту аналогию можно продолжить, рассмотрев вы-

ражение и для кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг оси. Если учесть, что скорость элемента твердого тела массой dm равна $v = \omega r$, где r – расстояние от элемента до оси вращения, то кинетическую энергию твердого тела можно представить так:

$$K = \int dm \frac{\omega^2 r^2}{2} = \int r^2 dm \frac{\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (5.19)$$

где I – момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Нетрудно увидеть сходство (5.19) с выражением для кинетической энергии материальной точки, имеющей скорость \vec{v} : $K = mv^2/2$.

Если твердое тело вращается вокруг оси так, что его момент импульса относительно некоторого центра составляет некоторый угол с осью вращения, то для сохранения постоянной угловой скорости вращения на ось со стороны подшипников должна действовать сила, момент которой относительно центра обеспечивал бы поворот вектора момента импульса вокруг оси, сохраняющий его проекцию на ось вращения. В качестве примера такой ситуации рассмотрим вращение однородного стержня, жестко скрепленного с осью вращения под углом α , как показано на рис. 5.6. Момент импульса \vec{L} стержня относительно точки O будет направлен под углом $\pi/2 - \alpha$. Вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения вверх. Вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения вверх. Тогда в процессе движения стержня вектор момента импульса будет поворачиваться относительно оси вращения так, чтобы его проекция на ось оставалась постоянной. При этом на стержень со стороны подшипников должны действовать силы реакции, момент \vec{M} относительно точки O равен $d\vec{L}/dt$. Из рис. 5.6 видно, что $d\vec{L} = [\vec{\omega}, \vec{L}]dt$. Отсюда

$$\vec{M} = [\vec{\omega}, \vec{L}], \quad (5.20)$$

т. е. для поддержания вращения с постоянной угловой скоростью в этом случае на тело со стороны подшипников должны действовать силы, изменяющие в пространстве направление вектора \vec{L} твердого тела.

Если угол α будет равен $\pi/2$, то для поддержания вращения вокруг оси необходимость в действии сил реакции со стороны подшипников отпадает. В этом случае ось вращения твердого тела называют *свобод-*

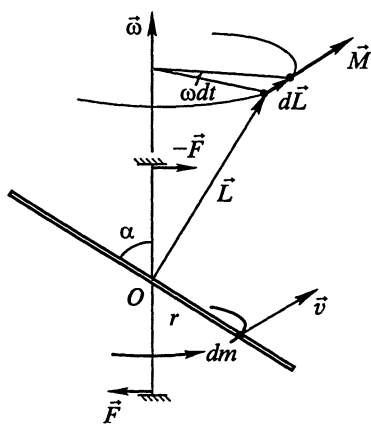


Рис. 5.6

ной осью твердого тела. В опыте с маятником Обербека вращение происходило вокруг свободной оси.

5.4. Определение момента инерции твердого тела. Теорема Штейнера

Как видно из выражений (5.17) и (5.19), момент инерции твердого тела относительно оси вращения играет существенную роль при описании вращения тела вокруг оси и определении кинетической энергии твердого тела при вращении. Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси вращения можно определить экспериментально или рассчитать теоретически. Расчет момента инерции проводится с использованием выражения (5.14) и методов интегрального исчисления. Момент инерции тела, так же как и его масса, является аддитивной величиной. В опыте с маятником Обербека момент инерции твердого тела определяется суммой моментов инерции четырех металлических стержней относительно оси вращения, проходящей через конец стержня, момента инерции двух шкивов, представляющих собой цилиндрические тела с осью вращения, проходящей через их центр инерции, и момента инерции четырех грузов, укрепленных на стержнях.

Определим момент инерции каждого из этих тел относительно оси вращения. Момент инерции однородного металлического стержня длиной l относительно оси вращения, проходящей через конец стержня, можно найти, разбив стержень по длине на элементарные участки массой dm , равной произведению плотности ρ материала стержня на элементарный объем Sdx , где S – площадь поперечного сечения стержня, dx – длина выделенного элементарного участка вдоль оси OX (рис. 5.7). Момент инерции dI элемента массой dm относительно оси вращения OY равен

$$dI = \rho S x^2 dx. \quad (5.21)$$

Интегрируя (5.21) по x в пределах от 0 до l , получим:

$$I = \rho S \int_0^l x^2 dx = \frac{\rho S l^3}{3}. \quad (5.22)$$

Учитывая, что масса стержня $m = \rho S l$, выражение (5.22) перепишем в виде:

$$I = \frac{ml^2}{3}. \quad (5.23)$$

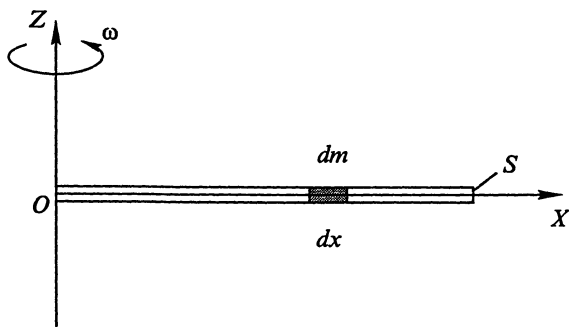


Рис. 5.7

Для определения момента инерции цилиндра плотностью ρ , массой m , радиусом R , высотой H относительно оси цилиндра разобьем его мысленно на элементарные кольца радиусом r , толщиной dr (рис. 5.8). Момент инерции каждого кольца относительно оси цилиндра равен

$$dI = 2\pi\rho Hr^3 dr. \quad (5.24)$$

Момент инерции всего цилиндра получим, интегрируя (5.24) по r от нуля до R :

$$I = \int_0^R 2\pi\rho Hr^3 dr = \frac{\pi\rho HR^4}{2} = \frac{mR^2}{2}. \quad (5.25)$$

Момент инерции грузов, перемещаемых вдоль стержней, можно определить довольно просто, если их расстояние r до оси вращения значительно больше их размеров. Тогда, принимая их за материальные точки, найдем, что момент инерции груза относительно оси

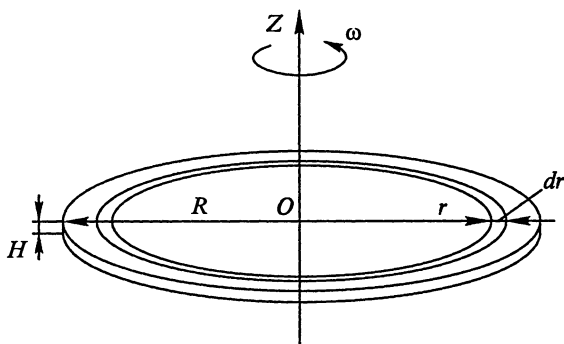


Рис. 5.8

вращения равен $m_r r^2$, где m_r – масса груза. Складывая моменты инерции всех тел, образующих маятник Обербека, получим общий момент инерции механической системы.

Как мы уже убедились при определении момента инерции цилиндрического тела, расчет момента инерции существенно упрощается, если тело обладает симметрией относительно оси вращения. Это правило справедливо и для случая симметрии тела относительно его центра масс. В качестве примера рассмотрим сплошной шар с плотностью ρ , радиусом R , массой m . Наличие центральной симметрии у шара позволяет утверждать, что момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр, имеет одинаковое значение. Воспользовавшись соотношением (4.20), получим связь между значением момента инерции шара I_0 относительно центра масс и значением момента инерции I относительно оси, проходящей через его центр: $3I = 2I_0$, откуда $I = 2/3 I_0$. Значение I_0 можно определить сравнительно просто, если разбить объем шара на элементарные шаровые слои радиусом r и толщиной dr (рис. 5.9). Каждый из таких слоев будет иметь момент инерции относительно центра шара, равный $4\pi r^4 \rho dr$. Интегрируя это выражение по r от 0 до R , получим для I_0 следующее значение: $I_0 = 4\pi \rho R^5/5 = 3mR^2/5$. Отсюда

$$I = \frac{2mR^2}{5}. \quad (5.26)$$

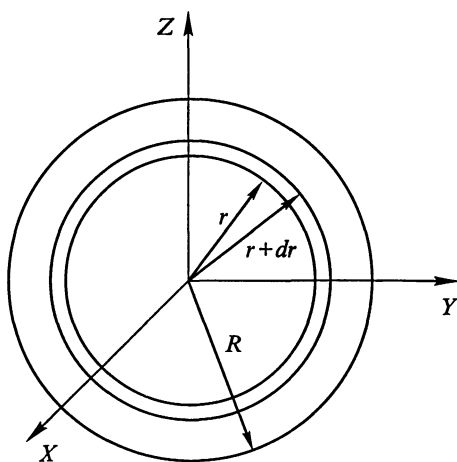


Рис. 5.9

Зная момент инерции I_0 тела относительно оси, проходящей через его центр масс, можно определить момент инерции I тела относительно любой параллельной оси. Связь между значениями I и I_0 устанавливает теорема Штейнера, в которой утверждается, что момент инерции тела массой m относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и величины md^2 , где d – расстояние между осями:

$$I = I_0 + md^2. \quad (5.27)$$

Для доказательства теоремы Штейнера разобьем мысленно тело массы m на элементы массой dm . Обозначим расстояния от этих элементов до параллельных осей через \vec{r} и \vec{r}_0 . Смысл введенных обозначений ясен из рис. 5.10. Так как $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{d}$, то $r^2 = r_0^2 + d^2 + 2\vec{d} \cdot \vec{r}_0$. Здесь \vec{r}_0 — радиус-вектор элемента массой dm относительно центра масс тела.

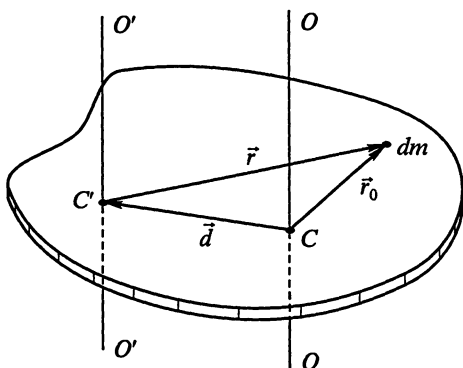


Рис. 5.10

Так как $I = \int r^2 dm$, то

$$I = \int r_0^2 dm + d^2 \int dm - 2 \int \vec{d} \cdot \vec{r}_0 dm = I_0 + md^2,$$

так как последнее слагаемое, выражающее радиус-вектор центра масс в системе центра масс, равно нулю. Следовательно, $I = I_0 + md^2$, что и требовалось доказать.

5.5. Рычаги. Пара сил

Примером движения твердого тела вокруг неподвижной оси является движение рычага.

Рычагом называется твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения и подверженное действию нескольких (не менее двух) моментов внешних сил. Часто ось вращения проходит через центр масс, что позволяет не считаться с силой тяжести, действующей на рычаг.

Если внешние силы приложены по разные стороны относительно оси вращения O , то рычаг называют *рычагом первого рода*. Если же они лежат по одну сторону, то — *рычагом второго рода*. Так, ножницы — рычаг первого рода, а весло, вставленное в уключину, — рычаг второго рода, так как точкой опоры (не вполне неподвижной) является конец весла, погруженный в воду. Схематическое изображение обоих рычагов дано на рис. 5.11, а, б.

Конечно, рычаг может быть и не прямым, а силы могут быть направлены под любым углом к его оси.

Предполагается, что до приложения сил рычаг находился в покое. Интерес представляет нахождение условий равновесия рычага.

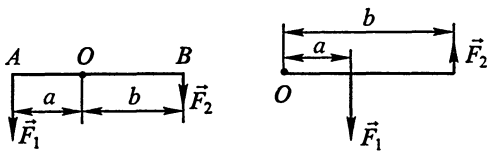


Рис. 5.11

Так как ось рычага неподвижна, то он имеет одну степень свободы и для равновесия, т. е. покоя или равномерного вращения, необходимо выполнить лишь одно требование: *сумма моментов внешних сил относительно оси*

должна быть равна нулю. Оно является следствием уравнения (5.16).

На рис. 5.11 след оси обозначен буквой O . Приписывая моментам, создающим вращение в противоположные стороны, разные знаки, получаем условие равновесия:

$$F_1 a - F_2 b = 0.$$

Поэтому

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{a}{b}.$$

Так как линейные перемещения точек приложения сил прямо пропорциональны длинам плеч рычага, то из этого соотношения следует «золотое правило» механики: *что проигрывается в расстоянии, то выигрывается в силе.* При этом предполагается, что вращение рычага равномерное или же что рычаг находился в равновесии, нарушенном исчезающе малой силой, добавленной к одной из сил (чтобы получить поворот в нужном нам направлении).

К вопросу о равновесии рычага можно подойти и с иной точки зрения. Пусть силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 параллельны друг другу и перпендикулярны оси рычага. Если рычаг при этом находится в равновесии, то это возможно потому, что некоторая воображаемая сила \vec{F} , способная заменить реальные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , проходит через ось вращения O . Эту силу называют *равнодействующей данных сил*. Так как замена реальных сил равнодействующей не должна сказаться на состоянии рычага, то момент этой силы относительно любой оси вращения должен равняться сумме моментов сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 относительно той же оси.

Проведем оси через точки A и B (перпендикулярно плоскости чертежа, рис. 5.11, а). Получаем два условия:

$$Fa = F_2(a + b), \quad Fb = F_1(a + b).$$

Следовательно, должно быть:

$$F = F_1 + F_2 \quad (5.28)$$

и

$$\frac{a}{b} = \frac{F_2}{F_1}, \quad (5.29)$$

т. е. точка приложения равнодействующей делит расстояние между силами на отрезки, обратно пропорциональные модулям сил.

Уравнения (5.28) и (5.29) определяют известные из курса средней школы правила сложения параллельных сил одного направления.

Повторяя те же рассуждения для рычага второго рода, найдем, что значение равнодействующей определяется разностью модулей слагаемых сил; направлена равнодействующая в сторону большей силы. Положение точки приложения равнодействующей по-прежнему определяется уравнением (5.29).

Если человек несет на плече тяжелый брус, то он может положить его на плечо так, чтобы центр масс лежал на нем. В этом случае брус находится в равновесии, а сила давления на плечо равна весу бруса.

Если сместить брус немного вперед, то к переднему концу его придется приложить силу, направленную вверх (что по физиологическим причинам не очень удобно сделать); но при этом сила давления на плечо уменьшится.

Если же сместить брус немного назад, то к переднему концу придется приложить силу, направленную вниз (что сделать удобно), но при этом сила давления на плечо возрастет.

Система двух равных по модулю противоположно направленных сил называется парой сил. Под действием пары сил тело приходит во вращение вокруг любой оси OZ , перпендикулярной плоскости, содержащей пару сил.

При этом момент пары сил не зависит от положения точки, относительно которой он рассматривается. Действительно, как видно из рис. 5.12, момент пары $\vec{M} = [\vec{R}_1, \vec{F}] - [\vec{R}_2, \vec{F}] = [\vec{h}, \vec{F}]$, где $\vec{h} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$.

Но $h \sin \alpha = h_0$, где h_0 – расстояние между силами пары (плечо пары). Поэтому получаем:

$$M_z = h_0 F, \quad (5.30)$$

т. е. *вращающий момент пары сил не зависит от положения оси вращения.*

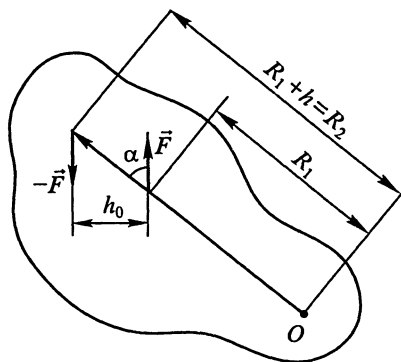


Рис. 5.12

Если ось вращения проходит через центр масс тела перпендикулярно плоскости, содержащей пару сил, то оно под действием пары ускоренно вращается вокруг этой оси.

5.6. Маятники

В качестве примера движения твердого тела вокруг закрепленной оси рассмотрим движение симметричного тела (диска, гантели), подвешенного на тонкой длинной упругой нити (рис. 5.13), представляющего собой крутильный маятник.

Если повернуть его в горизонтальной плоскости на угол α , то в закручивающейся нити подвеса возникнут силы, возвращающие тело в начальное положение. При небольших углах закручивания момент этих сил пропорционален углу (упругая деформация) и уравнение движения имеет вид:

$$I\ddot{\alpha} = -D\alpha, \quad (5.31)$$

где I – момент инерции тела, D – постоянная кручения. Так как (5.31) по форме не отличается от (3.2), то будут совпадать и решения обоих уравнений. Следовательно, крутильный маятник совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}. \quad (5.32)$$

О постоянной кручения мы будем еще говорить в главе 6, здесь отметим лишь, что она пропорциональна четвертой степени диаметра нити и обратно пропорциональна ее длине. Поэтому в приборах, предназначенных для измерения малых моментов силы, применяются очень длинные и по возможности тонкие нити подвеса. При этом частота собственных колебаний оказывается малой, что создает известные трудности при измерениях.

Если колебания тела, имеющего горизонтальную ось вращения, вызваны силой тяжести, то маятник называют физическим; таковым может быть любое тело, имеющее горизонтальную ось вращения O , проходящую выше центра тяжести C (рис. 5.14).

Если отклонить тело на угол α и предоставить его самому себе, то возникает возвращающий момент, равный

$$M = -Fh \sin \alpha = -mgh \sin \alpha,$$

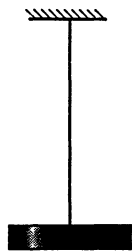


Рис. 5.13

где h – расстояние от оси вращения до центра тяжести. В случае малых углов отклонения синус можно заменить углом, тогда уравнение движения принимает вид:

$$I\ddot{\alpha} = -mgh\alpha.$$

Входящий в уравнение момент инерции I относительно оси O равен:

$$I = I_0 + mh^2,$$

где I_0 – момент инерции относительно оси, проведенной через центр тяжести параллельно оси O . Очевидно, и здесь получают гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_0 + mh^2}}. \quad (5.33)$$

Анализ этой формулы показывает, что частота обращается в нуль при $h = 0$, если ось проходит через центр тяжести. При увеличении h частота растет и достигает наибольшего значения при

$$h_m = \sqrt{\frac{I_0}{m}}.$$

Дальнейшее увеличение h сопровождается уменьшением частоты колебаний.

Для наглядной проверки уравнения (5.33) удобен маятник, имеющий форму равнобедренного треугольника с небольшим углом при вершине ($10-15^\circ$). Вдоль самой длинной высоты делается ряд отверстий (начиная от центра масс и выше), для того чтобы можно было легко менять длину h . Напомним, что центр масс треугольника лежит на пересечении его медиан.

Если маятник представляет собой маленький шарик, подвешенный на длинной нити (длина h), то шарик приближенно можно уподобить материальной точке. Тогда момент инерции его

$$I \approx mh^2 \quad (5.34)$$

и из уравнения (5.33) для такого маятника получается следующее значение частоты:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}. \quad (5.35)$$

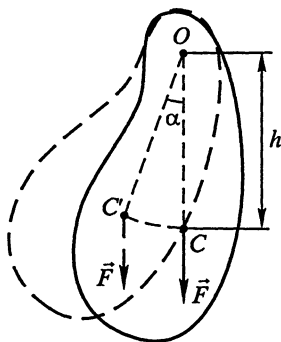


Рис. 5.14

Здесь нельзя устремлять h к нулю, так как при этом потеряет силу приближение (5.34). Но пока оно допустимо, с уменьшением длины частота монотонно возрастает; кроме того, она не зависит от массы. Такой маятник называется *математическим*.

Рассмотренные колебания, происходящие под действием внутренних сил, называются *собственными колебаниями*.

В реальных условиях существует не учтенное нами трение, постепенно вызывающее убывание амплитуды, вплоть до прекращения движения. Такие *затухающие колебания называются свободными*. Они будут изучены в § 10.4.

Если амплитуда колебаний маятников всех типов немала, то колебания перестают быть гармоническими, но остаются периодическими. Для физического или математического маятника гармоничность практически сохраняется для углов, меньших $3-4^\circ$. При увеличении углов отклонения частоты колебаний уменьшаются.

Интересной особенностью обладает «дуговой маятник» (рис. 5.15). Он представляет собой очень тонкую дугу окружности радиусом R , опирающуюся на произвольный центральный угол 2β . Горизонтальная ось вращения маятника A расположена посередине дуги. Масса маятника m . Центр масс его лежит в точке C , расположенной выше геометрического центра дуги O . Обозначим расстояние OC буквой y . Момент инерции относительно точки A есть:

$$I_A = I_C + m(R-y)^2.$$

Так как момент инерции относительно точки O равен:

$$I_O = mR^2 = I_C + my^2,$$

то получается:

$$I_A = 2mR(R-y).$$

При отклонении маятника на малый угол α возникает вращающий момент, равный

$$M = -mg(R-y)\alpha.$$

Поэтому частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{mg(R-y)}{2mR(R-y)}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

оказывается не зависящей от m и y , т. е. одинаковой для всех дуг, включая полную окружность.

Для демонстрации этого любопытного свойства следует брать дуги, толщина которых в 15–20 раз меньше радиуса.

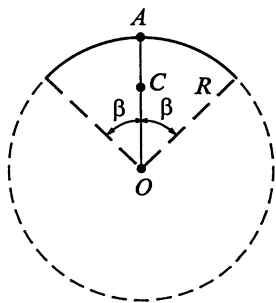


Рис. 5.15

Использование особого маятника – баллистического – рассматривалось в §4.5.

5.7. Динамика плоского движения твердого тела

В случае плоского движения твердого тела его центр масс движется в определенной плоскости, а вектор угловой скорости при движении остается перпендикулярным этой плоскости. Произвольное перемещение твердого тела можно представить как наложение перемещений двух движений: поступательного и вращательного. Как было выяснено выше, ось вращения при этом можно выбирать произвольно, угловое перемещение не зависит от выбора оси. Описание же поступательного движения зависит от выбора оси вращения. Удобно ось вращения выбрать так, чтобы она проходила через центр масс тела, совершающего плоское движение. При таком выборе движение твердого тела будет описываться уравнением для поступательного движения центра масс тела и уравнением для вращательного движения тела относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости, в которой движется центр масс тела. Изменение импульса тела со временем в этом случае определяется равнодействующей внешних сил, действующих на тело, приложенной к центру масс, а изменение момента импульса относительно оси вращения определяется моментом внешних сил относительно этой оси:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (5.36)$$

Для определенности мы считаем, что движение твердого тела происходит в плоскости XOY , а ось вращения OZ перпендикулярна этой плоскости.

Представим себе, что плоское движение твердого тела происходит под действием одной внешней силы \vec{F} , лежащей в плоскости движения и приложенной к произвольной точке твердого тела. Механическое состояние тела не изменится, если предположить, что к центру масс тела приложены силы \vec{F} и $-\vec{F}$. Тогда можно считать, что на тело действуют три силы: сила \vec{F} , приложенная к центру масс тела, и две одинаковые силы, равные по модулю, противоположные по направлению, т. е. пара сил, момент которых относительно оси OZ равен $\vec{F}h$, где h – расстояние между линиями действия сил.

Кинетическая энергия твердого тела массой m , совершающего плоское движение, складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движе-

ния относительно оси вращения, проходящей через центр масс тела: $K = mV_c^2/2 + I_{0z}\omega^2/2$ (здесь V_c – скорость центра масс тела в инерциальной системе отсчета, I_{0z} – момент инерции тела относительно оси OZ , проходящей через центр масс тела, ω – угловая скорость тела).

5.8. Мгновенные оси вращения

В качестве примера плоского движения твердого тела рассмотрим движение колеса, катящегося по горизонтальной поверхности. При этом движении колесо в каждый момент вращается вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией касания его с полом. Мгновенная ось сама поступательно перемещается в пространстве. Допустим, что движение колеса происходит без скольжения. Тогда его можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного движения центра масс колеса со скоростью v и вращения колеса вокруг оси, проходящей через центр масс, с угловой скоростью

$$\omega = \frac{v}{R},$$

где R – радиус колеса.

Скорости отдельных точек окружности, складываясь векторно со скоростью центра масс, изменяются, как видно из рис. 5.16, от $2v$ до нуля (в точке B , отвечающей мгновенной оси). Этот рисунок позволяет понять, почему крылья автомобилей с внутренней стороны забрызгиваются грязью: отрывающиеся от колес частицы грязи имеют некоторую скорость относительно машины, причем для частиц, отрывающихся от верхней части колеса, эта скорость направлена вперед.

Аналогично можно объяснить и такой простой опыт. С наклонной плоскости под действием силы тяжести скатываются два цилиндра одинакового радиуса, одинаковой массы, но с различными моментами инерции (один из цилиндров полый и сделан из более плотного материала – он имеет больший момент инерции; другой цилиндр сплошной). Опыт показывает, что быстрее скатывается цилиндр с меньшим моментом инерции (сплошной). Действительно, работа силы тяжести в обоих случаях одинакова, так как центры тяжести обоих цилиндров опускаются одинаково, если они ска-

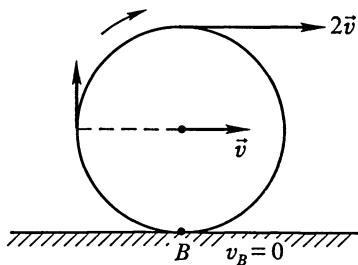


Рис. 5.16

тываются с одной наклонной плоскости. При этом тела приобретают кинетическую энергию, равную

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Но так как $v = \omega R$, то

$$K = \frac{\omega^2}{2}(MR^2 + I).$$

Отсюда следует, что большему моменту инерции отвечает меньшая угловая скорость ω , а значит, и скорость v .

Кинетическая энергия, приобретаемая катящимся цилиндром за счет потенциальной энергии тяготения, равна:

$$K = Mgh,$$

где h – разность высот центра масс в начале и в конце движения, поэтому конечная скорость поступательного движения цилиндра

$$v = \omega R = R\sqrt{\frac{2Mgh}{I + MR^2}} = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{I}{MR^2}}} < v_0, \quad (5.37)$$

где v_0 – скорость, которую он приобрел бы при свободном падении или соскальзывании (без вращения) с той же высоты. Неравенство (5.37) вполне понятно, так как при скатывании цилиндр приобретает и энергию вращательного движения.

Подобное же уменьшение скорости центра масс происходит, если подпиленное дерево падает, опираясь на свое основание. Принимая дерево за однородный стержень длиной H и массой M , напишем закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

где I – момент инерции стержня относительно его конца, равный

$$I = \frac{1}{12}MH^2 + M\left(\frac{H}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}MH^2.$$

Так как скорость центра масс в этом случае есть

$$v = \frac{1}{2}\omega H,$$

то получается:

$$v = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{MgH}{I}} = \sqrt{\frac{3}{4}gH} < v_0 = \sqrt{2gH}.$$

Понятие о мгновенных осях позволяет разобраться и в изящном опыте с «капризной катушкой». Упавшая на пол катушка ниток откатывается еще дальше, если потянуть за нитку, образующую с полом большой угол α (рис. 5.17). Если же сообщить нитке наклон под меньшим углом β , то катушка послушно катится к вам в руки. Дело в том, что в обоих случаях возникает вращение вокруг мгновенной оси B , нормальной к плоскости рисунка. В первом случае создается момент, вызывающий вращение против часовой стрелки, и катушка откатывается; во втором случае момент создает вращение по часовой стрелке и катушка приближается к экспериментатору.

Рассмотрим более подробно примеры плоского движения твердого тела и сопровождающие его явления, происходящие при качении твердого тела по твердому основанию. Мы увидим, что они сложны, так как приходится считаться сразу с несколькими видами трения. Поэтому данный трудный вопрос, имеющий важное практическое значение, будет рассмотрен лишь приблизительно.

Если сообщить цилиндру горизонтальную скорость \vec{V}_0 , нормальную к его оси, и положить его без толчка на горизонтальную плоскость, то скорость перемещения его центра масс будет убывать, но возникнет вращение цилиндра. В каждый момент цилиндр будет вращаться вокруг мгновенной оси, совпадающей с образующей цилиндра, касающейся плоскости. Эта ось все время поступательно перемещается вместе с цилиндром. При этом угловая скорость сначала растет, а затем начинает убывать.

Если же раскрутить круговой цилиндр вокруг его оси и положить без толчка на горизонтальную плоскость, то он покатится по ней. При этом центр масс цилиндра приобретет скорость, увеличивающуюся от нуля до V , а затем снова уменьшающуюся до нуля. Угловая скорость цилиндра будет непрерывно убывать.

Оба явления родственны друг другу, поэтому мы ознакомимся

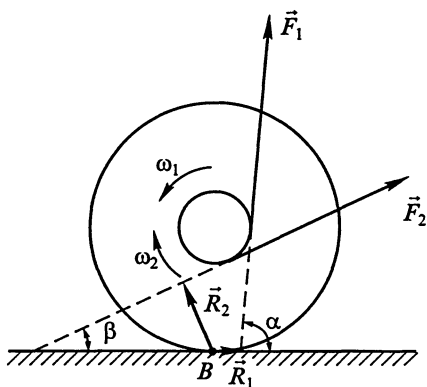


Рис. 5.17

только с первым, так как исследование второго не вызовет затруднений у читателя.

Итак, пусть однородный цилиндр радиусом R , массой m в момент $t=0$ имеет горизонтальную скорость \vec{V}_0 и кинетическую

энергию $K_0 = \frac{1}{2} m V_0^2$. Он положен на горизонтальную плоскость (рис. 5.18). Начальная угловая скорость $\omega_0 = 0$.

Цилиндр начинает скользить по плоскости. Возникающую силу трения скольжения \vec{F} примем не зависящей от скорости скольжения. Скорость поступательного движения \vec{v} начнет убывать. Одновременно возникнет вращение цилиндра по часовой стрелке. Угловая скорость ω будет возрастать, а скорость \vec{v} скольжения точек цилиндра, соприкасающихся в каждый момент с плоскостью по линии B (мгновенной оси вращения), будет уменьшаться.

Рассмотрим динамику и энергетику этого движения. Приложим к центру масс цилиндра силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , равные по модулю силе трения скольжения \vec{F} :

$$F_1 = F_2 = F.$$

Сила \vec{F}_1 создаст поступательное ускорение, направленное противоположно скорости и равное по модулю

$$a = \frac{F}{m}. \quad (5.38)$$

Пара сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) создаст угловое ускорение относительно оси цилиндра O :

$$\varepsilon = \frac{RF}{I}, \quad (5.39)$$

где I – момент инерции цилиндра относительно этой оси.

Скорость поступательного движения цилиндра будет убывать по закону

$$v = V_0 - at, \quad (5.40)$$

а угловая скорость будет возрастать:

$$\omega = \varepsilon t. \quad (5.41)$$

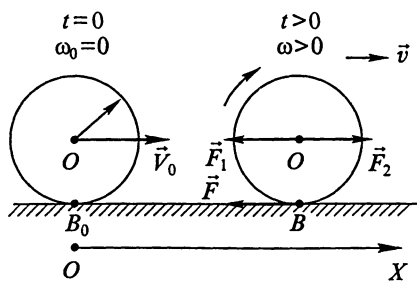


Рис. 5.18

Скорость скольжения будет уменьшаться по закону

$$u = V_0 - at - \epsilon R t \quad (5.42)$$

и обратится в нуль в момент T , равный

$$T = \frac{V_0}{a + \epsilon R} = \frac{m V_0}{F} \frac{n-1}{n},$$

где для сокращения дальнейших записей введен положительный и больший единицы параметр

$$n = 1 + \frac{I}{m R^2}.$$

Все дальнейшие вычисления делаются для момента T . Из (5.40) находим скорость поступательного движения

$$v_T = \frac{V_0}{n}$$

и кинетическую энергию этого движения

$$K = \frac{K_0}{n^2}. \quad (5.43)$$

Из (5.39) находим угловую скорость

$$\omega_T = \frac{V_0}{n R}$$

и кинетическую энергию вращательного движения

$$K_{\text{вр}} = \frac{1}{2} I \omega_T^2 = K_0 \frac{n-1}{n^2}. \quad (5.44)$$

Полная кинетическая энергия цилиндра в момент T

$$K_T = K + K_{\text{вр}} = \frac{K_0}{n}. \quad (5.45)$$

Путь, пройденный в поступательном движении, есть

$$x = V_0 T - \frac{1}{2} a T^2 = \frac{K_0}{F} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Работа силы трения (внешней силы) на этом пути

$$A_1 = -Fx = -K_0 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (5.46)$$

Эта работа отрицательна и совершается за счет начальной кинетической энергии цилиндра. Кроме того, сила трения скольжения совершает положительную работу, раскручивая цилиндр. Действительно, за время T цилиндр поворачивается (относительно оси O) на угол

$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon T^2.$$

Поэтому с горизонтальной плоскостью (по линии B) успевает соприкоснуться поверхность цилиндра, имеющая в развернутом виде длину

$$L = \varphi R = \frac{K_0}{F} \frac{n-1}{n^2}.$$

Работа силы трения скольжения на этой поверхности есть

$$A_2 = K_0 \left(\frac{n-1}{n^2} \right).$$

Полная работа силы трения скольжения

$$A = A_1 + A_2 = K_0 \left(-1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = -K_0 \left(1 - \frac{1}{n} \right) = K_T - K_0 < 0. \quad (5.47)$$

Она равна, как это и должно быть, изменению кинетической энергии цилиндра.

Таким образом, *сила трения не только вызывает необратимую потерю энергии на нагревание трущихся поверхностей, равную*

$$\Delta K = K_0 \left(1 - \frac{1}{n} \right), \quad (5.48)$$

но и способствует возникновению вращательного движения, причем часть кинетической энергии поступательного движения переходит в кинетическую энергию вращения.

В табл. 5.1 приводятся относительные значения энергий для тонкостенной трубы ($I = mR^2$, $n = 2$) и для сплошного цилиндра ($I = \frac{1}{2} mR^2$, $n = 1,5$). Они относятся к моменту T .

Таблица 5.1

Физическая величина	Цилиндр, сначала движущийся поступательно		
	Отношение энергии K/K_0	Труба	Сплошной цилиндр
Кинетическая энергия поступательного движения (уравнение 5.43)	$\frac{1}{n^2}$	0,25	0,45
Кинетическая энергия вращательного движения (уравнение 5.44)	$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$	0,25	0,22
Необратимые потери энергии на нагревание (уравнение 5.48)	$1 - \frac{1}{n}$	0,50	0,33

Подобным же образом решается и задача о поведении цилиндра, предварительно раскрученного до угловой скорости ω_0 и положенного без толчка на горизонтальную поверхность (начальная скорость поступательного движения $V_0 = 0$). Этот цилиндр приходит в ускоренное поступательное движение, причем вращение его замедляется. Для момента T_1 , когда скольжение прекращается, данные о распределении его первоначальной энергии приводятся в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Физическая величина	Цилиндр, сначала раскрученный		
	Отношение энергии K/K_0	Труба	Сплошной цилиндр
Кинетическая энергия поступательного движения (уравнение 5.43)	$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$	0,25	0,22
Кинетическая энергия вращательного движения (уравнение 5.44)	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$	0,25	0,11
Необратимые потери энергии на нагревание (уравнение 5.48)	$\frac{1}{n}$	0,50	0,67

После исчезновения скольжения, т. е. при $t > T$ и $t > T_1$, качество, как показывает опыт, происходит с замедлением как поступательного, так и вращательного движения (рис. 5.19). В конце концов цилиндр останавливается. Следовательно, здесь проявляется новый вид трения – трение качения; оно существовало и в первой части процесса, но там его можно было не учитывать, так как оно гораздо меньше трения скольжения.

Трение качения можно объяснить деформациями поверхности, по которой катится цилиндр, и самого цилиндра. Законы этих деформаций сложны и до конца не исследованы. Но, во всяком случае, в результате деформаций возникают силы, замедляющие и по-

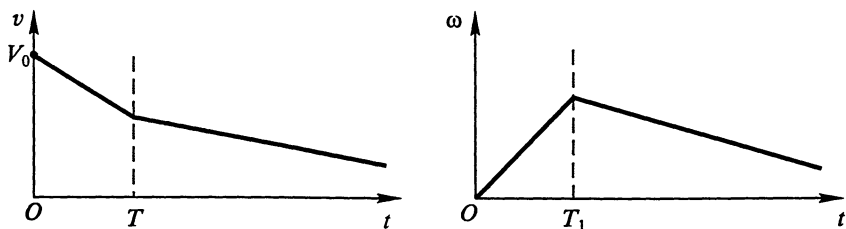


Рис. 5.19

ступательное движение, и вращение. Силы трения скольжения (как было показано выше) могут тормозить лишь одно из движений, вызывая ускорение второго.

Физическую картину трения качения упрощенно можно описать следующим образом. На рис. 5.20, а в сильно преувеличенном масштабе показана деформированная плоскость. Силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , возникающие в результате деформации полотна дороги и действующие на заднюю и переднюю половины цилиндра, движущегося вправо, очевидно, неодинаковы, причем $F_1 < F_2$. Сложив их, получим силу трения качения \vec{F}_k . Перенесем ее точку приложения (рис. 5.20, б) в точку В, лежащую на одной горизонтали с осью О цилиндра, и разложим на составляющие \vec{F}_3 и \vec{F}_4 .

Сила \vec{F}_3 вызывает торможение поступательного движения с ускорением \vec{a}_1 , направленным в сторону, противоположную вектору \vec{v} , и равным по модулю

$$a_1 = \frac{F_3}{m}. \quad (5.49)$$

Сила \vec{F}_4 создает торможение вращательного движения с угловым ускорением

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{F_4 h \bar{\omega}}{I}.$$

Отрезок h называют «выносом» силы трения качения. Обычно он бывает очень мал по сравнению с радиусом цилиндра, чем и объясняется малость углового замедления.

Силы трения скольжения и качения легко сравнить в следующем опыте (рис. 5.21).

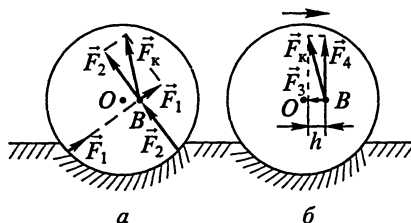


Рис. 5.20

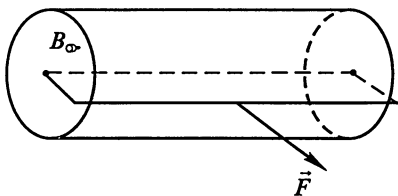


Рис. 5.21

Небольшой цилиндр снабжен рамой, к которой прикладывается внешняя горизонтальная сила \vec{F} . Стопорный винт (его можно ввинтить в точке B) позволяет предотвратить вращение цилиндра. Если цилиндр катится, то для поддержания этого движения нужна малая сила. Если же ввернуть стопорный винт, то цилиндр начинает скользить и требуемая сила возрастает во много раз. Этот опыт поясняет пользу, приносимую подшипниками, где трение скольжения заменено трением качения.

При движении без скольжения возникает сила трения сцепления (покоя), действующая по линии касания цилиндра с плоскостью. Так как взаимодействующие точки находятся в относительном покое, то эта сила работы не совершает. Но роль ее иногда весьма значительна. Так, трение сцепления позволяет осуществить передачу энергии при помощи бесконечного ремня (трансмиссия).

Пусть на оси некоторого двигателя имеется шкив 1, соединенный бесконечным ремнем со шкивом 2, помещенным на оси некоторой машины (рис. 5.22). Благодаря трению сцепления шкив 1 увлекает ремень в направлении, указанном стрелкой. В свою очередь ремень благодаря тому же трению увлекает шкив 2, который совершает некоторую полезную работу. Однако если сопротивление движению шкива 2 слишком велико, то сила трения сцепления (имеющая верхний предел, как и сила трения покоя при поступательном движении) не может его преодолеть, и ремень будет проскальзывать над шкивом (этим же объясняется буксование колес автомобиля при скользкой дороге и слишком большой мощности работы двигателя). При этом достаточно небольшой боковой силы, чтобы вызвать соскальзывание ремня, так как трение сцепления заменяется здесь трением скольжения, а последнее меньше.

По той же причине (ограниченность сверху силы трения покоя) при ходьбе по скользкой поверхности приходится идти осторожно, чтобы сила, с которой нога отталкивается от земли, не превысила силу трения сцепления.

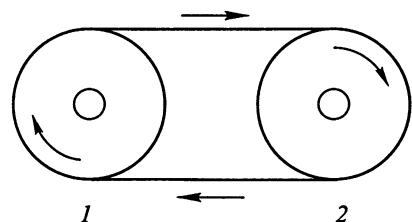


Рис. 5.22

Мы рассмотрели только самые простые законы движения твердого тела. Подчеркнем, что хотя мы считали иногда, что под внешними воздействиями тело не деформируется (и, в частности, его мо-

мент инерции не изменяется при изменении скорости вращения), но фактически весьма малые деформации, конечно, происходят. Возникающие при этом внутренние силы и обеспечивают возможность движения тела как целого.

Но эти внутренние силы не способны изменить полный импульс тела или момент этого импульса.

Поэтому во всех наших расчетах эти силы и не учитывались.

Мы не считались также с возможностью разрушения твердого тела под действием внешних сил; некоторые соображения о прочности тел будут рассмотрены в гл. 6.

В заключение рассмотрим элементы теории движения самодвижущихся повозок (трамвай, автомобиль и пр.).

Схема автомобиля с задними ведущими колесами показана на рис. 5.23. Ведущие колеса (радиусом R) приводятся в движение двигателем, действующим на ось радиусом $r < R$ и создающим относительно оси вращающий момент M . Но внутренняя сила не может сместить центр масс автомобиля. Это легко показать на опыте, подвесив на нитях любую заводную игрушку: колеса будут вращаться, а игрушка останется неподвижной.

Движение автомобиля обеспечивается внешней силой трения сцепления \vec{F} . Приложив к оси колеса силы

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F},$$

найдем (как и выше), что сила \vec{F}_1 сообщает поступательное ускорение

$$a_1 = \frac{\vec{F}_1}{m},$$

где m — масса автомобиля, а пара сил (\vec{F}, \vec{F}_2) создает вращающий момент

$$M_1 = RF,$$

противоположный по знаку моменту M , так что угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{M - M_1}{I},$$

где I — момент инерции колеса относительно оси. Если движение происходит без скольжения, то выполняется еще дополнительное условие:

$$a = \varepsilon R.$$

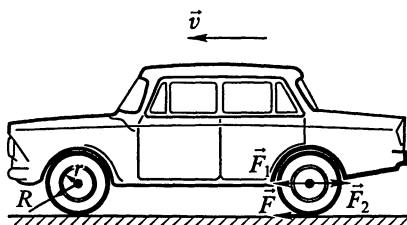


Рис. 5.23

Найдем связь между M и F для этого случая:

$$F = m\epsilon R = \frac{mR}{I}(M - RF).$$

Поэтому

$$F = \frac{M}{R} \frac{I}{1 + \frac{I}{mR^2}}.$$

Так как масса автомобиля m велика по сравнению с массой колес, то можно с хорошим приближением принять:

$$F \approx \frac{M}{R}. \quad (5.50)$$

Так как трение сцепления имеет верхний предел F_0 , то движение без скольжения возникнет, если будет соблюдено условие

$$M < RF_0 = M_0. \quad (5.51)$$

Чтобы начать движение без рывка, водитель должен обеспечить малое ускорение, т. е. разность

$$\Delta F = F - F_0$$

должна быть мала. Невыполнение этого условия вызовет «рывок» автомобиля. Несоблюдение требования (5.51) приведет к скольжению колес (пробуксовке); сила трения, а с ней и движущая сила резко уменьшатся, и автомобиль может вообще не сдвинуться с места.

После достижения автомобилем желаемой скорости он движется с постоянной скоростью, причем

$$\vec{a} = 0, \quad \vec{\epsilon} = 0, \quad M = RF_k, \quad (5.52)$$

где F_k – модуль силы трения качения.

Работающий двигатель сообщает колесу момент механического импульса. При этом сам двигатель, связанный с корпусом машины, также приобретает равный по модулю и противоположный по направлению момент механического импульса. В нашем случае корпус автомобиля должен был бы вращаться по часовой стрелке. Этому препятствует сила тяжести, действующая на автомобиль. Давление передних колес на дорогу при движении уменьшается. Действительно, при резком включении двигателя передок автомобиля слегка подпрыгивает.

Давление же на ведущие (задние) колеса несколько увеличивает, что выгодно, так как растет сила трения, а с ней и возможная движущая сила.

Так как автомобили с прицепами (или электровозы и тепловозы поездов) должны преодолевать трение колес движимых ими прицепов (вагонов), то приходится значительно увеличивать массу автомобиля (тепловоза), чтобы повысить предельную силу трения сцепления \vec{F}_0 .

Наконец, при торможении, когда к оси колеса прижимаются тормозные колодки, создающие тормозящий момент, его следует увеличивать постепенно, чтобы избежать нарушения условия (5.51) и не вызвать скольжения. Оно особенно опасно для нерельсового транспорта, так как из-за малости трения скольжения даже небольшие случайные силы, направленные непараллельно скорости, создают большое боковое ускорение. Автомобиль «заносит», он становится неуправляемым. Легко понять, что во избежание начавшегося заноса автомобиль с задними ведущими колесами приходится выводить в управляемое состояние, сперва осторожно поворачивая руль для движения автомобиля в направлении возникшего скольжения, а затем уже выправляя в нужную сторону. В последнее время среди легковых автомобилей начали получать распространение машины с передними ведущими колесами. В этом случае при заносе, наоборот, руль нужно поворачивать в сторону, противоположную возникшему скольжению.

5.9. Динамика твердого тела, закрепленного в одной точке

Предположим, что твердое тело движется таким образом, что одна его точка остается все время неподвижной. Поступательное движение тело в этом случае совершать не может. Основным уравнением динамики служит уравнение моментов относительно неподвижной точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (5.53)$$

Описание движения в этом случае – довольно трудная задача, и мы ограничимся рассмотрением нескольких примеров.

В качестве первого примера рассмотрим движение тяжелого симметричного диска, способного вращаться вокруг своей оси симметрии AA (рис. 5.24). Такое вращающееся тело называется гироскопом. Подшипники оси гироскопа закреплены в кольце B , которое

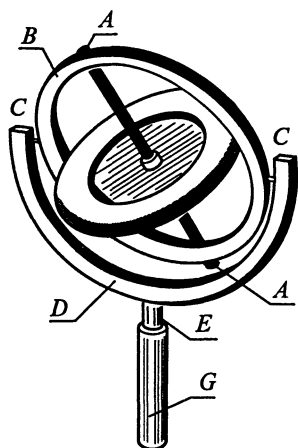


Рис. 5.24

само способно вращаться вокруг оси CC , перпендикулярной оси AA . Подшипники оси CC закреплены в полукольце D , способном вращаться вокруг оси E , опирающейся на неподвижный подпятник, расположенный в нижней части трубки G . Все три оси вращения пересекаются в центре масс гироскопа. Таким образом, гироскоп, вращаясь вокруг оси AA , может поворачиваться вокруг двух других взаимно перпендикулярных осей так, что его центр масс остается неподвижным относительно инерциальной системы отсчета. Такой подвес называется кардановым подвесом, по имени французского инженера, который впервые применил его в технике.

Если, взяв трубку G в руку, поворачивать карданов подвес с нераскрученным диском, то ось гироскопа практически не меняет своего положения в пространстве. Но при этом даже слабое воздействие на кольца подвеса приводит к повороту диска гироскопа вокруг осей CC или E .

Если гироскоп раскрутить вокруг оси AA , то кратковременные воздействия внешней силы на кольцо B и полукольцо D почти не изменяют положение оси вращения гироскопа.

Объясняется это тем, что вращающийся гироскоп имеет большой момент импульса относительно центра масс. Кратковременное воздействие внешней силы создает лишь небольшой прирост момента импульса относительно центра масс, что практически не изменяет вектора момента импульса гироскопа.

Если ось вращения совпадает с осью симметрии гироскопа, то эта ось является свободной осью вращения. Для поддержания вращения вокруг такой оси не нужны внешние силы. Если при вращении гироскопа начать поворачивать его ось вращения, то сразу в подшипниках крепления оси возникнут силы, момент которых будет препятствовать дальнейшему повороту оси вращения.

Это явление обеспечивает устойчивость гироскопа к внешним воздействиям, которое используется в различных навигационных приборах, либо указывающих направление движения (гироскопический компас), либо автоматически устраняющих отклонение от заданного направления движения (автопилот).

Своеобразие действия внешней силы на гироскоп особенно четко проявляется при наблюдении за движением уравновешенного

гироскопа, в котором ось вращения – это горизонтальная ось, на одном конце которой укреплен гироскоп, а на другом – уравнивающее тело массой, равной массе гироскопа. Ось гироскопа может поворачиваться вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс уравновешенной системы (рис. 5.25). При закручивании гироскопа вокруг своей горизонтальной оси ее положение в пространстве остается постоянным, так как момент импульса относительно оси вращения не меняется.

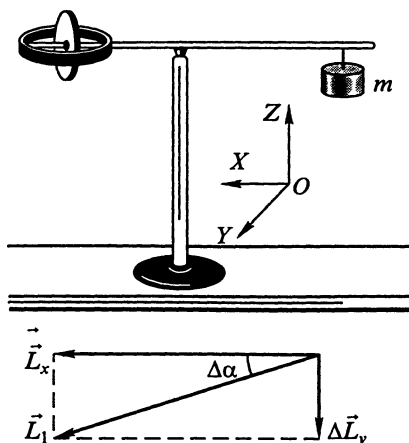


Рис. 5.25

Нарушим равновесие гироскопа, сместив уравнивающий груз вдоль оси вращения или подвесив к ней дополнительное тело малой массы. Появившийся вращающий момент M_y , казалось бы, должен повернуть гироскоп в вертикальной плоскости вокруг оси Y . Однако опыт показывает, что гироскоп поворачивается вокруг оси Z .

Конечно, никакого противоречия законам механики здесь нет. Под действием вращающего момента гироскоп приобретает добавочный момент импульса

$$\Delta L_y = M_y \Delta t.$$

Этот момент векторно складывается с первоначальным моментом \vec{L}_x (см. рис. 5.25). Вектор суммарного момента \vec{L}_1 поворачивается вокруг вертикальной оси Z на угол

$$\Delta \alpha = \Omega_z \Delta t,$$

где Ω_z – угловая скорость этого вращения, называемого прецессией. Следовательно, поворачивается и весь гироскоп, а с ним и векторы $L_x \vec{i}$ и $L_y \vec{k}$.

За малый промежуток времени Δt вектор $L_x \vec{i}$ успеет повернуть на малый угол. Тогда из векторной диаграммы получаем:

$$\frac{\Delta L_y}{L_x} = \frac{M_y \Delta t}{I_x \omega_x} = \operatorname{tg}(\Delta \alpha) \approx \Delta \alpha = \Omega_z \Delta t.$$

Поэтому угловая скорость прецессии оказывается равной

$$\Omega_z = \frac{M_y}{I_x \omega_x}.$$

Если прекратить внешнее воздействие, сняв дополнительный грузик, прецессия мгновенно прекращается, так как перестает меняться момент механического импульса L_x . Дело в том, что дополнительный вращающий момент M_y *определяет угловую скорость прецессии*; поэтому при его исчезновении исчезает и скорость (но угол поворота, описанный за время Δt существования прецессии, конечно, остается).

Привычным же для нас является сообщение силой ускорения; при прекращении действия силы ускорение исчезает, но сохраняется приобретенная телом скорость.

На рис 5.26 показан волчок, вращающийся вокруг оси, проходящей через его центр масс. На тело действует сила тяжести и сила реакция опоры. Трение в точке опоры учитывать не будем. В соответствии с уравнением моментов пара сил, действующих на волчок, вызовет изменение направления вектора \vec{L} на $\Delta\vec{L}$. Вектор $\Delta\vec{L}$ направлен за чертеж. Волчок будет прецессировать вокруг оси OZ . Угловая скорость прецессии Ω определяется так же, как и угловая скорость прецессии уравновешенного гироскопа.

Если прецессирующий гироскоп (волчок) поставить на лист фанеры или твердого картона, который экспериментатор держит в руке, и быстро опустить лист вниз, то гироскоп начнет свободно падать, причем прецессия мгновенно прекратится и ось гироскопа во все время падения сохранит свое направление в пространстве.

В отсутствие трения прецессия продолжалась бы неопределенно долго. Силы трения уменьшают угловую скорость гироскопа и создают дополнительный момент механического импульса, заставляющий гироскоп поворачиваться вокруг горизонтальной оси. Поэтому замедляющий свое вращение гироскоп в конце концов опрокидывается.

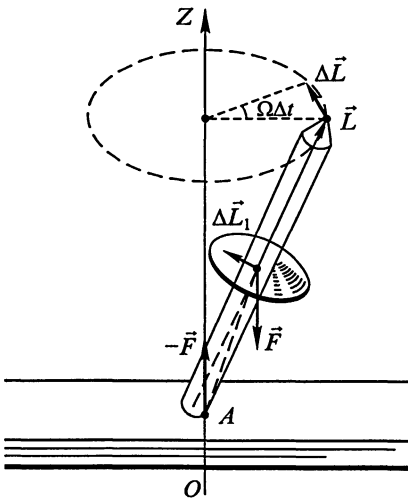


Рис. 5.26

Довольно сложное влияние сил трения удобнее обсудить, рассматривая поведение волчка.

Так как волчок опирается на тупое основание (в точке A) и существует трение скольжения, направленное из-за чертежа к читателю, то возникает дополнительный прирост импульса $\Delta \vec{L}_1$, лежащий в плоскости чертежа и направленный слегка вверх. Складываясь с \vec{L} , этот прирост заставляет \vec{L} занять более вертикальное положение, т. е. волчок должен приподняться, что и наблюдается в действительности.

Конечно, это явление существует лишь пока существует прецессия.

5.10. Динамика свободного движения твердого тела

При свободном движении твердого тела уравнениями движения являются уравнения, описывающие движение центра масс тела и вращательное движение тела относительно центра масс:

$$\frac{d\vec{P}_c}{dt} = \vec{F}; \quad \frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{M}_c, \quad (5.54)$$

где \vec{P}_c – импульс поступательного движения твердого тела, \vec{F} – равнодействующая внешних сил, действующих на тело, \vec{L}_c – момент импульса тела относительно его центра масс, \vec{M}_c – момент внешних сил относительно центра масс. Хорошо известным примером свободного движения твердого тела является его движение в однородном поле тяжести Земли. В этом случае внешней силой, действующей на тело, служит сила тяжести, действующая со стороны Земли. Момент силы тяжести относительно центра масс равен нулю. Если ось OZ направить по вертикали, то уравнения движения твердого тела в этом случае примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_c}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 Y_c}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 Z_c}{dt^2} = -g; \\ \frac{dL_{xc}}{dt} = 0; \quad \frac{dL_{yc}}{dt} = 0; \quad \frac{dL_{zc}}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Из уравнений (5.55) видно, что центр масс твердого тела будет двигаться по параболе, параметры которой зависят от начальных условий, а проекции момента импульса на оси координат будут в процессе движения оставаться постоянными. Характер движения твердого тела (устойчивое вращение вокруг оси, кувыркание) зависит от ориентации тела относительно оси вращения, заданной в начале движения. Как было показано выше, вращение вокруг свобод-

ных осей не требует действия на тело момента внешних сил. Также было выяснено, что условием вращения вокруг свободных осей является пропорциональность между проекциями момента импульса и угловой частоты на ось вращения. Это условие выполняется только для трех направлений осей вращения в твердом теле (эти оси называют главными осями инерции твердого тела). Причем устойчивое свободное вращение наблюдается в том случае, если свободные оси совпадают с главными осями, соответствующими минимальному и максимальному значениям момента инерции твердого тела. Этот эффект легко продемонстрировать, подбрасывая вверх картонную коробку, имеющую форму параллелепипеда, сообщая ей вращение вокруг осей, перпендикулярных ее граням.

Сохранение момента импульса твердых тел, свободно движущихся в пространстве, широко используется при конструировании спортивных снарядов с целью увеличения дальности их полета, а также в военном деле для повышения дальности и точности стрельбы из нарезного оружия.

Так как моменты инерции тела относительно различных осей, вообще говоря, отличаются друг от друга, то вектор момента импульса (относительно точки)

$$\vec{L} = I_x \vec{\omega}_x + I_y \vec{\omega}_y + I_z \vec{\omega}_z$$

не совпадает по направлению с вектором угловой скорости

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z,$$

что весьма затрудняет рассмотрение движения в общем виде.

Свободное твердое тело может совершать три независимых поступательных движения (относительно трех взаимно перпендикулярных координатных осей) и три независимых вращения (относительно трех главных осей). Следовательно, как уже отмечалось, оно обладает шестью степенями свободы. Такое движение весьма сложно, и мы не будем его рассматривать.

5.11. Условия равновесия твердого тела

Предположим, что вначале тело покоилось и мы хотим, чтобы появившиеся внешние силы не выводили его из состояния равновесия. Тогда мы должны потребовать выполнения шести условий равновесия (свободное тело имеет шесть степеней свободы).

Неподвижность центра масс требует обращения в нуль суммы сил, действующих на тело:

$$\sum \vec{F}_i = 0, \quad (5.56)$$

т. е.

$$\sum F_{ix} = \sum F_{iy} = \sum F_{iz} = 0.$$

Отсутствие вращений требует исчезновения вращающих моментов внешних сил:

$$\sum \vec{M}_i = 0,$$

т. е.

$$\sum M_{ix} = 0; \quad \sum M_{iy} = 0; \quad \sum M_{iz} = 0.$$

Эти шесть уравнений и решают вопрос о равновесии свободно-го тела.

Напомним, что если изучается движение материальной точки, то остаются три условия равновесия (5.56), так как точка не может вращаться вокруг самой себя. При изучении движения тела, имеющего неподвижную ось, имеется всего одно условие: сумма моментов сил относительно этой оси должна обращаться в нуль.

Помимо определения условий равновесия тела представляет интерес и вопрос о его устойчивости. Если тело немного сместить из положения равновесия и предоставить самому себе, то возможны три случая:

- 1) оно самопроизвольно возвращается в положение равновесия (устойчивое равновесие);
- 2) оно остается в новом положении (безразличное равновесие);
- 3) оно еще дальше отходит от положения равновесия (неустойчивое равновесие).

Если тело имеет точку (или линию) опоры либо подвешено на нити или пружине и если действуют только консервативные силы (например, сила тяжести), то наиболее устойчивым будет состояние, отвечающее минимуму потенциальной энергии.

Таково состояние любого маятника – при выведении его из положения равновесия потенциальная энергия растет и возникают силы, возвращающие маятник в первоначальное положение.

Это весьма общее положение можно проиллюстрировать при помощи модели весов. Она состоит из опорного стержня A и горизонтального стержня, несущего два шарика массой m_i (их можно перемещать по вертикали) и имеющего выступ в виде призмы. Ребро призмы опирается на дно углубления в верхней части опорного стержня (рис. 5.27, a).

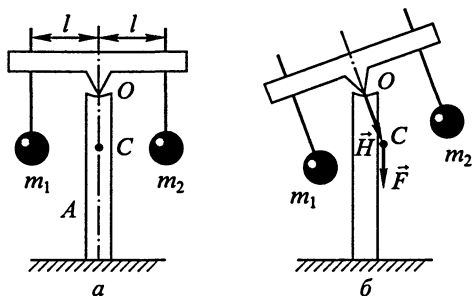


Рис. 5.27

Условие равновесия требует, чтобы центр тяжести C подвижной части прибора лежал на вертикали, проходящей через ребро опорной призмы. При симметрии конструкции это равнозначно требованию равенства масс m_1 и m_2 . Если немного отклонить подвижную часть прибора, то центр масс поднимется (рис. 5.27, б) и относительно точки опоры O

возникнет вращающий момент

$$\vec{M} = -[\vec{H}, \vec{F}] = -[\vec{H}, m\vec{g}],$$

стремящийся вернуть его в первоначальное положение (здесь m — полная масса подвижной части).

При самом низком положении шаров центр масс расположен низко и вращающий момент возвращает системы в положение равновесия. Если же поднять шары, то центр тяжести также поднимется. При отклонении на тот же угол вращающий момент будет меньше, но система станет менее устойчивой. Когда точка C окажется выше точки опоры, система станет совершенно неустойчивой.

5.12. Законы Ньютона и законы сохранения в механике

В нашем курсе обширный опытный материал по механике был обобщен в трех законах Ньютона. Как следствие, из них были получены законы сохранения механического импульса, момента механического импульса и механической энергии для замкнутых консервативных систем. Затем закон сохранения энергии был обобщен и на немеханические виды энергии (например, внутреннюю энергию).

Но возможен и другой путь построения классической механики. Можно постулировать законы сохранения и из них получить законы динамики. Так как понятия импульса и момента импульса обобщаются также на область немеханических явлений (в частности, на электромагнитные явления), то такой подход в некоторых отношениях является более общим. Строгий вывод дается в курсе теоретической физики. Здесь можно лишь показать на простых примерах,

как законы Ньютона получаются из законов сохранения. Полный механический импульс замкнутой системы

$$\vec{P}_c = \sum \vec{p}_i = \vec{V}_c M,$$

где \vec{V}_c – скорость движения центра масс; M – масса системы, сосредоточенная в центре масс (см. § 4.1).

Внутренние взаимодействия между телами системы не могут изменить полного импульса. Это утверждение равносильно первому закону Ньютона. Если же система подвергнется внешнему воздействию, то импульс изменится. При этом (так как масса, по Ньютону, постоянна) можно написать для изменения импульса

$$\frac{d\vec{P}_c}{dt} = M \frac{d\vec{V}_c}{dt}$$

и рассматривать правую часть уравнения как характеристику результата внешнего воздействия, назвав воздействие силой \vec{F} :

$$M \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \vec{F}.$$

Таким образом получаем второй закон Ньютона: сила определяет ускорение, приобретаемое центром масс системы (или, в простейшем случае, свободной точкой).

Вернемся теперь к замкнутой системе (пусть она состоит из двух материальных точек), тогда

$$\sum \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0, \quad (5.58)$$

где \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} – внутренние силы, действующие между точками системы. Из (5.58) следует, что

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Эти силы не должны образовывать пару сил, так как это противоречило бы закону сохранения момента импульса (пара сил вызвала бы его изменение). Следовательно, силы должны быть направлены по прямой, проходящей через взаимодействующие точки. Таким образом, мы пришли к третьему закону Ньютона.

В теоретической физике будет показано, что законы сохранения неразрывно связаны со свойствами симметрии пространства и времени.

Пространство однородно. Это, в частности, означает, что при перемещении замкнутой механической системы из одного места в другое (без нарушения условий ее существования) ход физических процессов в ней не изменится. Следовательно, не изменится и ее полный импульс.

Пространство изотропно. Это, в частности, значит, что поворот замкнутой механической системы как целого (без нарушения условий ее существования) не повлияет на дальнейший ход физических процессов в ней. Следовательно, сохранится и момент механического импульса системы.

Время однородно. Это, в частности, означает, что состояние и ход процессов в замкнутой системе не зависят от выбора начала отсчета времени. Можно показать, что отсюда следует сохранение энергии системы и независимость физических законов от времени.

Глава 6

МЕХАНИКА УПРУГИХ ТЕЛ

6.1. Упругие тела. Виды упругих деформаций

Реальные тела при взаимодействии изменяют свою форму и размеры. Изменение размеров и формы тела называется деформацией. Различают упругие и пластические деформации. Упругими деформациями называют такие деформации, которые исчезают после прекращения взаимодействия с другими телами. Пластические деформации сохраняются и после прекращения взаимодействия. Если в телах наблюдаются только упругие деформации, то они называются абсолютно упругими телами. Абсолютно упругое тело, так же как и абсолютно твердое тело, является идеализацией реальных тел. Причиной упругих свойств твердых тел являются силы, действующие между молекулами или атомами вещества. Механика не изучает природу и происхождение межмолекулярных сил, ограничиваясь макроскопическим описанием их характера. С точки зрения механического подхода к описанию взаимодействия отдельных частей упругих тел считается, что между ними действуют короткодействующие поверхностные силы, приложенные к элементарным площадкам поверхности, ограничивающей объем рассматриваемой части тела, причем модули и направления этих сил зависят как от деформации внутри тела в месте расположения элементарной площадки, так и от направления нормали к ее поверхности.

Для количественного описания деформации упругих тел введем ее количественную характеристику. Рассмотрим две произвольные точки упругого тела с координатами x и $x + dx$. Пусть при изменении формы тела первая точка сместится от первоначального положения на ξ , а вторая на $\xi + d\xi$. Отношение

$$\varepsilon = d\xi/dx \quad (6.1)$$

называется *относительной деформацией* упругого тела в точке x . Таким образом, количественной мерой деформации, или просто деформацией, тела в данной точке является отношение смещения двух бесконечно близко расположенных точек к первоначальному расстоянию между ними. Следует отметить, что направления $d\xi$ и dx не обязательно совпадают друг с другом. Например, можно пред-

ставить себе деформацию, при которой $d\xi$ перпендикулярно dx . Такая деформация называется деформацией сдвига. Если $d\xi$ и dx совпадают по знаку, то деформация называется растяжением при положительном значении ϵ и сжатием при отрицательном значении ϵ . Любую деформацию упругого тела можно представить как суперпозицию двух независимых деформаций: растяжения (сжатия) и сдвига. На рис. 6.1 показаны некоторые примеры деформации модели упругого тела. Если при растяжении или сжатии изменение расстояния между соседними точками остается одинаковым по всей длине образца, то такая деформация называется однородным растяжением (сжатием). При однородном сдвиге остается постоянным расстояние между соседними точками упругого тела в направлении, перпендикулярном деформации. При однородном растяжении (сжатии) деформация одинакова для всех точек тела, следовательно, ее легко можно определить по изменению размеров тела. Так, при однородном растяжении $\epsilon = \Delta x/x$, где Δx – абсолютное удлинение тела, x – его первоначальная длина. При однородном сдвиге за меру деформации γ принимают тангенс угла сдвига α : $\gamma = \text{tg}\alpha$.

При деформации растяжения или сжатия происходит непременно и изменение поперечных размеров тел. Всякое растяжение тела всегда сопровождается соответствующим сокращением его поперечного сечения и, наоборот, сжатие – увеличением поперечного

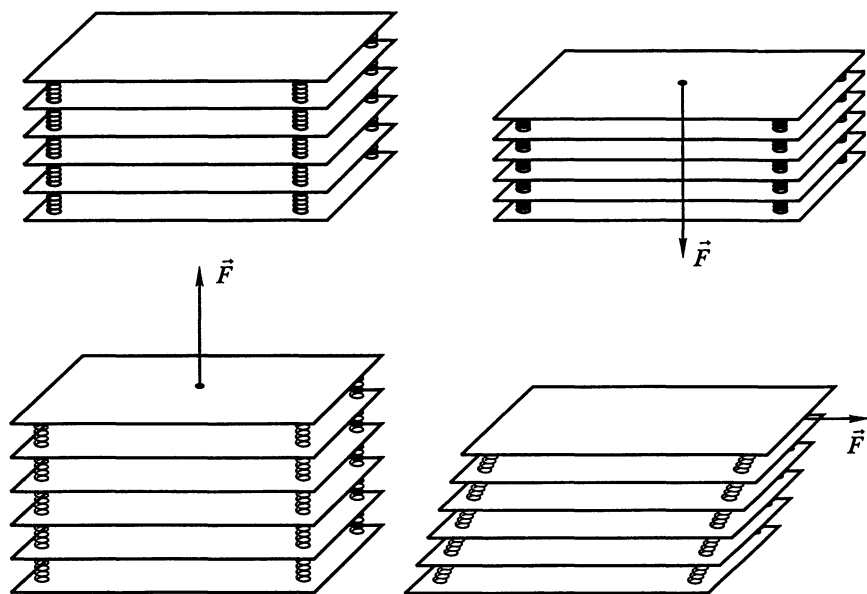


Рис. 6.1

сечения. Характеристикой поперечной деформации тела служит отношение изменения его поперечных размеров Δd к первоначальному поперечному размеру d : $\varepsilon_{\perp} = \Delta d/d$. Величина

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} \quad (6.2)$$

называется *коэффициентом поперечного сжатия*, или *коэффициентом Пуассона*.

Выразим относительное изменение объема упругого тела, используя выражение для коэффициента Пуассона.

Рассмотрим деформацию растяжения куба с ребром единичной длины. После растяжения продольное ребро куба будет иметь длину $1 + \varepsilon$, поперечное ребро $1 + \varepsilon_{\perp}$. Объем куба после деформации станет равным $(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_{\perp})^2$. Относительное изменение объема с точностью до бесконечно малых деформаций второго порядка

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu). \quad (6.3)$$

Так как μ для реальных тел меньше 0,5, то у всех упругих тел объем при растяжении увеличивается, при сжатии уменьшается.

6.2. Упругие напряжения

Представим себе, что мы произвели разрез площадью dS внутри упругого тела и убрали часть объема с той стороны, куда направлена нормаль \vec{n} по отношению к оставшейся части тела. Подберем такую силу $\Delta \vec{f}$, которую надо приложить со стороны нормали \vec{n} , чтобы заменить этой силой действие вырезанного объема тела. Сила, как мы уже отмечали, действует только на поверхность сделанного разреза площадью dS . Эта сила, вообще говоря, направлена не по нормали к поверхности разреза, и ее модуль пропорционален значению dS . Последнее обстоятельство позволяет рассматривать отношение $d\vec{f}/dS$ как количественную характеристику напряженного состояния упругого тела в данном месте при данной ориентации сечения в теле. Это отношение называется *напряжением*, обозначается греческой буквой $\vec{\sigma}$ и выражается в паскалях (Па):

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{f}}{dS}. \quad (6.4)$$

Используя поверхностный характер силы внутреннего напряжения в упругом теле, установим связь между напряжением на произ-

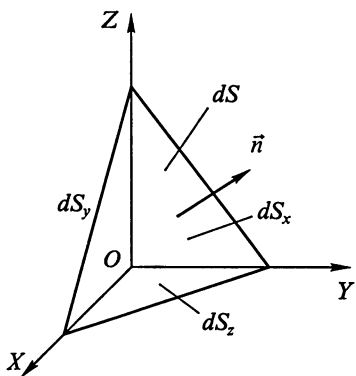


Рис. 6.2

вольно ориентированной площадке внутри тела в какой-то ее точке и напряжением на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку. Для этого рассмотрим тетраэдр бесконечно малого объема, ограниченного произвольно ориентированной гранью с внешней нормалью \vec{n} и площадью dS и тремя взаимно перпендикулярными гранями с площадями dS_x , dS_y , dS_z , параллельными координатным плоскостям (рис. 6.2). Внешние нормали к этим граням направлены антипараллельно осям координат. На каждую из боковых

граней будет действовать своя поверхностная сила, по направлению не совпадающая, вообще говоря, с направлением соответствующей нормали. Запишем уравнение второго закона Ньютона для выделенного элементарного объема упругого тела, считая, что на этот объем кроме поверхностных сил могут действовать объемные или массовые силы типа силы тяжести. Равнодействующую таких внешних сил обозначим через \vec{F} .

Из второго закона Ньютона для произведения массы выделенного объема тела на его ускорение имеем:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{\sigma}dS + \vec{\sigma}_{-x}dS_x + \vec{\sigma}_{-y}dS_y + \vec{\sigma}_{-z}dS_z. \quad (6.5)$$

Устремим объем тетраэдра к нулю. Имея в виду, что объемные и массовые силы и произведение ma стремятся к нулю гораздо быстрее слагаемых, выражающих поверхностные силы в (6.5), получим:

$$\vec{\sigma}dS + \vec{\sigma}_{-x}dS_x + \vec{\sigma}_{-y}dS_y + \vec{\sigma}_{-z}dS_z = 0, \quad (6.6)$$

или с учетом того, что $dS_x = dSn_x$; $dS_y = dSn_y$; $dS_z = dSn_z$, где n_x , n_y , n_z — проекции \vec{n} на оси координат, и $\vec{\sigma}_{-x} = -\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_{-y} = -\vec{\sigma}_y$, $\vec{\sigma}_{-z} = -\vec{\sigma}_z$, из (6.6) получим:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_x n_x + \vec{\sigma}_y n_y + \vec{\sigma}_z n_z. \quad (6.7)$$

Из полученного выражения видно, что напряжение в каждой точке упруго деформированного тела характеризуется тремя векторами или девятью их проекциями. Такие величины являются тензорными величинами. Таким образом, напряжение есть тензорная величина.

Связь между напряжением и деформацией упругого тела была установлена английским физиком Р. Гуком в 1660 г.

6.3. Закон Гука. Предел упругости и предел прочности

Рассмотрим простейший опыт по изучению деформации растяжения, проводимый с помощью так называемой разрывной машины. Схема эксперимента показана на рис. 6.3. Испытуемый образец зажимается в держателях разрывной машины, к которым прикладывается сила \vec{F} , вызывающая удлинение образца. Как показывает эксперимент, при напряжениях от 0 до $(1,5 \dots 2,0) \cdot 10^6$ Па зависимость между напряжением и деформацией для стального стержня линейна и обратима:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (6.8)$$

где E – так называемый *модуль Юнга*, названный в честь английского физика Т. Юнга (1773 – 1829), известного своими работами в области физики упругих тел. Сила упругости, действующая в этом случае на поперечное сечение образца площадью S , равна

$$F = \sigma S = ESx/l = kx, \quad (6.9)$$

где x – удлинение образца, k – жесткость образца.

Из (6.9) видно, что

$$k = ES/l. \quad (6.10)$$

При напряжениях $(1,5 \dots 2,5) \cdot 10^6$ Па сохраняется обратимость деформаций стального стержня, но закон Гука уже не соблюдается. Это область нелинейной упругости. Наибольшее напряжение, при котором еще справедлив закон Гука, называется пределом пропорциональности $\sigma_{\text{п}}$; напряжение, при котором деформации перестают быть обратимыми, называется пределом упругости $\sigma_{\text{упр}}$. При напряжениях, превышающих предел упругости, наблюдается новое явление: стержень получает деформацию, которая не исчезает и после снятия нагрузки, $\varepsilon_{\text{ост}}$ (рис. 6.4).

Деформация при нагрузках, превышающих предел упругости, имеет особый характер – она увеличивается даже без изменения напряжения. Образец «течет», удлиняется при постоянном напряжении в образце. Такая деформация называется пластической. Благодаря пластической деформации возможно осуществление ряда технологических процессов, таких, как волочение, ковка, прессование, штамповка. При дальнейшем возрастании напряжения в материалах, главным образом в металлах, наблюдается явление упрочнения материала. Процесс упрочнения материала холодной отковкой, прокаткой и другими способами называется гартованием (от англ. *hard* – твердый). Все расчеты инженерных сооружений проводятся таким образом, чтобы максимальное напряжение в материале составляло не более 60% от значения его предела упругости.

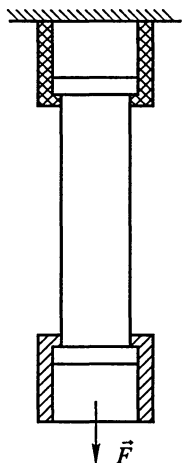


Рис. 6.3

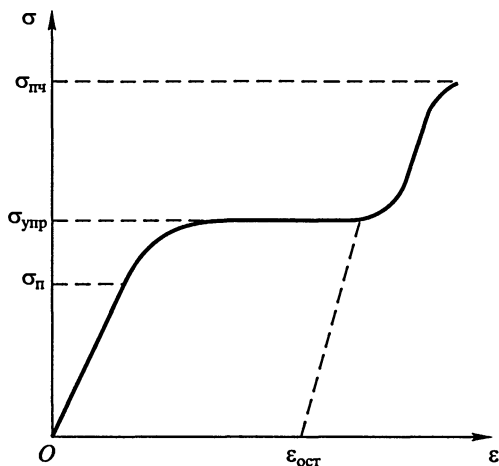


Рис. 6.4

Напряжение, при котором наступает разрушение образца, называется пределом прочности $\sigma_{пч}$.

При деформации сдвига сила, вызывающая эту деформацию, будет направлена параллельно поверхности, что вызовет касательные напряжения в образце (рис. 6.5). В пределах упругих деформаций напряжение при сдвиге τ пропорционально деформации сдвига γ :

$$\tau = G\gamma, \quad (6.11)$$

где G – модуль сдвига. Модуль сдвига и модуль Юнга связаны соотношением:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (6.12)$$

В табл. 6.1 приводятся значения модуля Юнга, предела прочности и предела упругости для некоторых металлов.

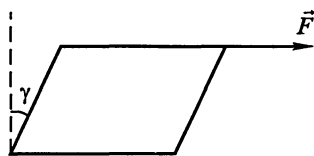


Рис. 6.5

Значения модуля Юнга, предела упругости и предела прочности и соотношение между ними определяют такие свойства материала, как упругость, хрупкость, прочность, пластичность.

Таблица 6.1

Металл	Модуль Юнга E , ГПа	Предел прочности $\sigma_{пч}$, ГПа	Предел упругости $\sigma_{упр}$, ГПа
Свинец	19	0,02	0,0025
Олово	30	0,02	0,0034
Медь	100	0,2	0,03
Железо	190	0,35	0,05
Углеродистая сталь	200	0,75	0,33
Молибденовая сталь	220	1,5	0,6

6.4. Неоднородные упругие деформации

К неоднородным упругим деформациям сжатия и растяжения относится, например, изгиб. Если балку прямоугольного сечения положить на две опоры, то она прогнется под действием силы тяжести или силы \vec{F} , приложенной к балке (рис. 6.6). Деформацию балки можно характеризовать прогибом d в центре балки. Можно показать, что прогиб балки зависит от силы, действующей на балку, модуля Юнга и от ее геометрических размеров следующим образом:

$$d = \frac{4Fl^3}{Eab^3}, \quad (6.13)$$

где a – ширина балки, b – ее толщина, l – расстояние между опорами балки. С помощью простого опыта можно убедиться в резкой зависимости прогиба балки от ее толщины. Положим тонкую метровую металлическую линейку на две опоры, к середине линейки подвесим груз массой 100 ... 200 г. Прогиб линейки при этом составит несколько сантиметров. Если линейку повернуть на 90° , положив ее «на ребро», то прогиб линейки при той же нагрузке будет незаметным для наблюдателя. Объяснение этого явления очевидно, так как при повороте линейки ее ширина и толщина меняются местами, что приводит, согласно выражению (6.13), к резкому уменьшению прогиба.

Примером неоднородной деформации сдвига является кручение. Рассмотрим цилиндрический образец радиусом r , длиной L , один конец которого закреплен, а к другому приложена сила, вызывающая его закручивание на угол φ относительно закрепленного сечения (рис. 6.7). Деформацию образца можно характеризовать

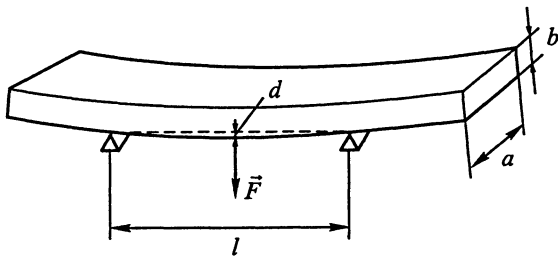


Рис. 6.6

сдвигом $\gamma = AA'/L = \rho\varphi/L$, связанным с напряжением законом Гука (6.11):

$$\tau = \frac{G\rho\varphi}{L}. \quad (6.14)$$

Сила dF , действующая на элемент поверхности площадью dS в поперечном сечении образца, равна произведению τdS или, с учетом (6.14),

$$dF = \tau dS = \frac{G\rho\varphi dS}{L}. \quad (6.15)$$

Из рис. 6.7 видно, что

$$dS = \rho d\rho d\theta. \quad (6.16)$$

Следовательно, $dF = G\rho^2 d\rho d\theta \varphi/L$, и момент dM этой силы относительно оси закручивания равен:

$$dM = \frac{G\rho^3 d\rho d\theta \varphi}{L}. \quad (6.17)$$

Полный момент упругих сил можно определить, интегрируя (6.17) по ρ от нуля до r и по θ от нуля до 2π . Выполнив интегрирование, получим:

$$M = \frac{Gr^4 \pi \varphi}{2L} = K\varphi. \quad (6.18)$$

Здесь K – модуль кручения:

$$K = \frac{Gr^4 \pi}{2L}. \quad (6.19)$$

Из полученного для модуля кручения выражения видно, что его значение определяется не только упругими свойствами материала образца, но и его геометрическими параметрами. Особенно резко выражена зависимость от радиуса образца. Модуль кручения изменяется пропорционально четвертой степени радиуса. Следовательно, чем меньше радиус, тем меньшая сила вызовет закручивание образца на определенный угол. Это обстоятельство используется в физике для измерения малых сил с помощью крутильных весов, изобретенных английским физиком Кавендишем. С помощью крутильных весов Кулоном был открыт закон взаимодействия электрических зарядов, Кавендишем измерено значение гравитационной постоянной.

Модуль кручения может быть измерен экспериментально методом крутильных колебаний. Если на упругой нити подвесить тело с известным моментом инерции I , закрутить его вокруг оси кручения нити и предоставить самому себе, то оно будет совершать гармонические колебания. Уравнение колебаний нетрудно получить с помощью основного закона динамики для вращательного движения. Именно:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -K\varphi. \quad (6.20)$$

Период крутильных колебаний T , очевидно, равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}. \quad (6.21)$$

Измерив период колебания из опыта, зная момент инерции маятника, можно вычислить значение модуля кручения.

6.5. Энергия упругой деформации. Вектор Умова

Рассмотрим работу внешней силы, действующей на образец с первоначальной длиной l при его медленном растяжении. В этом случае можно считать модуль внешней силы равным модулю силы упругости. Элементарная работа силы \vec{F} при бесконечно малом уд-

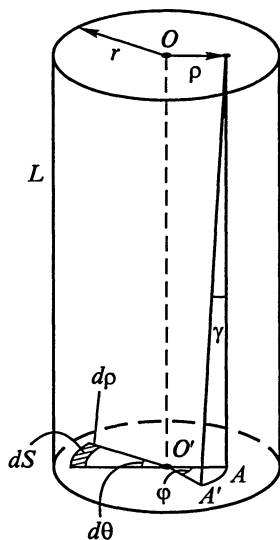


Рис. 6.7

линии dx равна $dA = Fdx$. С учетом того, что $F = kx$, для dA получим:

$$dA = kx dx. \quad (6.22)$$

Полную работу при изменении удлинения образца от 0 до x определим, проинтегрировав (6.22) в соответствующих пределах:

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{S l E \varepsilon^2}{2} = \frac{V E \varepsilon^2}{2}, \quad (6.23)$$

где V – объем образца. В соответствии с теоремой об изменении механической энергии тела работа внешней силы пойдет на изменение потенциальной энергии деформированного тела, которая называется энергией упругой деформации $U_{\text{упр}}$. Из выражения (6.23) видно, что энергию упругой деформации можно представить как произведение объема на величину $w = E\varepsilon^2/2$, которую можно рассматривать как объемную плотность энергии упругой деформации. Применяя закон Гука, объемную плотность энергии упругой деформации можно выразить несколькими соотношениями, эквивалентными друг другу:

$$w = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (6.24)$$

Рассмотрим пример, позволяющий оценить объемную плотность энергии упругой деформации для стали.

Плотность энергии при упругом растяжении стали, доведенном до предельного значения

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{\sigma_{\text{упр}}}{E} = \frac{3,3 \cdot 10^8 \text{ Па}}{2 \cdot 10^{11} \text{ Па}} = 1,65 \cdot 10^{-3},$$

равна:

$$w_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_{\text{упр}} = 2,7 \cdot 10^5 \text{ Дж/м}^3.$$

Как известно, относительное удлинение стального стержня, находящегося при комнатной температуре, при нагревании его на 1 К составляет:

$$\varepsilon = 10^{-5}, \text{ т. е. около } 0,5\% \varepsilon_{\text{пр}}.$$

Развивающееся при этом напряжение довольно велико:

$$\sigma = \varepsilon E = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Но плотность энергии деформации $w = 10 \text{ Дж/м}^3$ мала по сравнению с приростом плотности внутренней энергии

$$\Delta w_{\text{вн}} = C \cdot 1 \text{ К} = 3,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3,$$

где $C = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{К)}$ – теплоемкость единицы объема стали.

В заключение отметим, что все вычисленные здесь плотности энергии исчезающе малы по сравнению с плотностью энергии покоя

$$w = \rho c^2 = 7 \cdot 10^{20} \text{ Дж/м}^3,$$

где $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ – плотность стали, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Тем не менее именно наличием дополнительной энергии у тела, деформированного силой \vec{F} , объясняется развитие упругой силы:

$$(F_{\text{упр}})_x = -kx, \quad (6.25)$$

противонаправленной равному по модулю внешнему воздействию.

Даже для очень малых деформаций реальных тел закон Гука выполняется только приближенно; абсолютно упругих деформаций в природе не бывает, это идеализация.

Пусть, например, напряжение $\sigma = \sigma(\epsilon)$ – некоторая однозначная функция относительного удлинения ϵ . Тогда в разложении $\sigma(\epsilon)$ в ряд по степеням ϵ отсутствует нулевой член, так как при $\epsilon = 0$ $\sigma = 0$ (если тело не подвергалось действию сил, то нет и деформаций). Поэтому

$$\sigma = E\epsilon + \alpha\epsilon^2 + \beta\epsilon^3 + \dots,$$

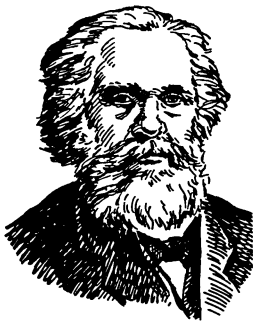
где коэффициенты α, β, \dots – постоянные, зависящие от материала стержня.

Если относительное удлинение ϵ столь мало, что высшими степенями ϵ можно пренебречь, тогда получается закон Гука (6.8). При этом относительная ошибка при его использовании составляет:

$$\Delta = \frac{\alpha\epsilon^2}{\epsilon E} \sim \epsilon.$$

Теперь рассмотрим глубокую идею Н. А. Умова о потоке энергии при механических процессах. Хотя в механике ею пользуются редко, в электродинамике подобная идея оказалась очень плодотворной.

Если требуется привести в движение некоторое тело 1 (рис. 6.8), то это можно осуществить либо при помощи тяги его со стороны тела 2, либо толкая его телом, расположенным слева.



Умов Николай Алексеевич (1846–1915), русский физик. В 1867 г. окончил Московский университет. С 1893 по 1911 г. — профессор Московского университета. С 1896 г. возглавлял кафедру физики. В 1874 г. в докторской диссертации «Уравнение движения энергии в телах» впервые ввел понятие о плотности потока энергии в сплошных средах. Другие работы посвящены механике, теории колебаний, электричества, земному магнетизму, оптике, молекулярной физике.

Пусть мгновенная скорость тел \vec{v} направлена вправо. Это направление считаем положительным. Движущая сила \vec{F} направлена так же. Элементарная работа этой силы за время dt равна:

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v} dt.$$

Площадь соприкосновения тел обозначим через S_1 . Тогда силу \vec{F} можно представить в виде

$$\vec{F} = \sigma \vec{S}_1,$$

причем, как и раньше, здесь площадь характеризуется вектором \vec{S}_1 , направленным в сторону внешней нормали \vec{n}_1 к ускоряемому телу.

Тогда работа силы будет равна:

$$dA = \sigma \vec{v} \cdot \vec{S}_1 dt = -\vec{Y} \cdot \vec{S}_1 dt,$$

где вектор

$$\vec{Y} = -\sigma \vec{v}, \quad (6.26)$$

характеризующий энергию, проходящую через единицу площади в единицу времени, называется в общем случае *плотностью потока энергии* (в механике его называют *вектором Умова*). Единицей плотности потока энергии в СИ является 1 Вт/м².

Такой же результат получается при толкании.

Вектор Умова *отрицателен при тяге, положителен при толкании, т. е. всегда направлен внутрь тела, приводимого в движение.*

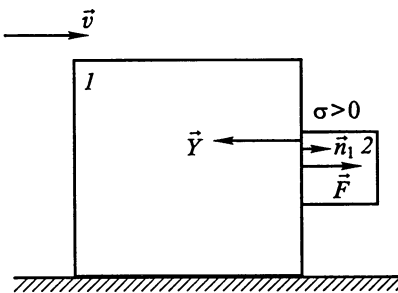


Рис. 6.8

Вектор Умова дает весьма наглядное представление об обмене энергией взаимодействующими телами. Но, конечно, процесс взаимодействия, включающий в себя обмен энергией, не исчерпывается только этим обменом.

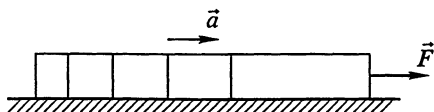


Рис. 6.9

Мы воспользуемся представлением о потоке энергии при изучении волновых движений как в механике, так и в электродинамике (где этот вектор применяется наиболее часто), а также в оптике.

В § 6.1 и 6.3 рассматривались статические деформации (деформируемое тело находилось в состоянии равновесия). При этом деформация распределена вдоль тела равномерно.

Если же сила сообщает телу некоторое ускорение, то деформации в нем распределяются неравномерно. Пусть на неподвижном стержне были сделаны отметки вдоль его оси на равных расстояниях друг от друга. Если приложить к торцу стержня силу (рис. 6.9), сообщающую телу ускорение \vec{a} , то расстояния между отметками изменятся – они станут тем больше, чем ближе находятся отметки к этому торцу; силы, действующие между соседними участками стержня, убывают (в нашем примере) справа налево, так как каждый предшествующий участок создает силу, ускоряющую все участки, расположенные за ним.

Глава 7

ГИДРОАЭРОДИНАМИКА

7.1. Давление в жидкостях и газах. Закон Паскаля

В отличие от твердых тел жидкости и газы в состоянии равновесия не сопротивляются изменению их формы. Они принимают форму сосуда, в который они помещены. Это обстоятельство связано с тем, что в жидкостях и газах отсутствуют касательные напряжения. Напряжения в жидкостях и газах при равновесии нормальны к поверхности, выделенной внутри объема жидкости или газа, и направлены в сторону, противоположную внешней нормали. Для газов напряжения всегда проявляются в виде давления, для жидкостей – в виде давления и натяжения. Однако в подавляющем большинстве случаев напряжения в жидкостях, так же как и в газах, проявляются в виде давления. Таким образом, можно принять, что напряжение для жидкостей и газов выражается следующим образом:

$$\vec{\sigma} = -p\vec{n}, \quad (7.1)$$

где p – давление, \vec{n} – внешняя нормаль к элементарной площадке внутри жидкости или газа.

Подставляя (7.1) в (6.7), получим:

$$p\vec{n} = p_x n_x \vec{i} + p_y n_y \vec{j} + p_z n_z \vec{k}. \quad (7.2)$$

Умножая (7.2) скалярно и последовательно на \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , получим:

$$p\vec{n} \cdot \vec{i} = p_x n_x \vec{i} \cdot \vec{i}; \quad p\vec{n} \cdot \vec{j} = p_y n_y \vec{j} \cdot \vec{j}; \quad p\vec{n} \cdot \vec{k} = p_z n_z \vec{k} \cdot \vec{k}. \quad (7.3)$$

Так как $\vec{n} \cdot \vec{i} = n_x$; $\vec{n} \cdot \vec{j} = n_y$; $\vec{n} \cdot \vec{k} = n_z$, а $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$; $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$; $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, то из (7.3) получаем:

$$p = p_x = p_y = p_z. \quad (7.4)$$

Учитывая, что ориентация большой грани тетраэдра может быть произвольной, можно сделать вывод о том, что давление внутри жидкостей и газов в состоянии равновесия не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует. Это утверждение состав-

Паскаль Блез (1623–1662), французский физик и математик. В 1653 г. сформулировал основной закон гидростатики. Исследовал атмосферное давление, установил его зависимость от высоты, измерил вес воздуха, подтвердил существование атмосферного давления, исследовал зависимость показаний барометра от влажности воздуха.



ляет содержание закона, открытого Паскалем в 1653 г. и названного его именем.

Выполнение закона Паскаля можно наблюдать в простом эксперименте, схема которого показана на рис. 7.1. В воду погружается небольшой пустотелый цилиндр, торцевые поверхности которого затянуты тонкой резиновой пленкой. Цилиндр заполнен воздухом и соединен с манометром. В процессе опыта можно изменять ориентацию цилиндра, поворачивая его вокруг оси крепления. Наблюдения показывают, что изменение ориентации цилиндра не сказывается на показаниях манометра, что подтверждает справедливость закона Паскаля.

Если жидкость находится в равновесии и испытывает действие внешней поверхностной силы, вызывающей в жидкости давление, то это давление в соответствии с законом Паскаля передается внутри жидкости по всем направлениям без изменений. На этом следствии из закона Паскаля основан принцип действия гидравлического пресса и других гидравлических механизмов.

Рассмотрим условия равновесия жидкостей и газов при воздействии на них кроме поверхностных еще и массовых или объемных сил, примером которых может служить сила тяжести. В случае действия массовой силы ее значение пропорционально объему тела dV . Если объемную плотность такой

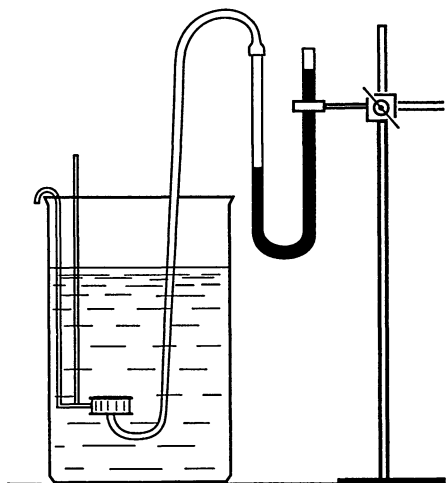


Рис. 7.1

силы обозначить через \vec{f} , то сила $d\vec{F}$, действующая на элементарный объем dV , будет равна $d\vec{F} = \vec{f}dV$. При равновесии сумма массовых и поверхностных сил, действующих на элементарный объем dV , будет равна нулю:

$$\vec{f}dV - \int_s p d\vec{S} = 0. \quad (7.5)$$

Интегрирование здесь проводится по поверхности элементарного объема. Для непосредственного подсчета поверхностной силы давления рассмотрим элементарный объем в виде куба с ребрами dx, dy, dz , параллельными осям координат (рис. 7.2). Центр куба C будет иметь координаты x, y, z . Подсчитаем давление на грани куба, перпендикулярные оси OX , площадь которых равна $dz dy$. Если

давление на левой грани принять равным $p\left(x - \frac{dx}{2}\right)$, а на правой

$p\left(x + \frac{dx}{2}\right)$, то результирующая сила, действующая на куб вдоль оси OX , равна:

$$d\vec{F}_x = \left[p\left(x - \frac{dx}{2}\right) - p\left(x + \frac{dx}{2}\right) \right] \vec{i} dy dz = -\frac{dp}{dx} \vec{i} dx dy dz = -\frac{dp}{dx} \vec{i} dV. \quad (7.6)$$

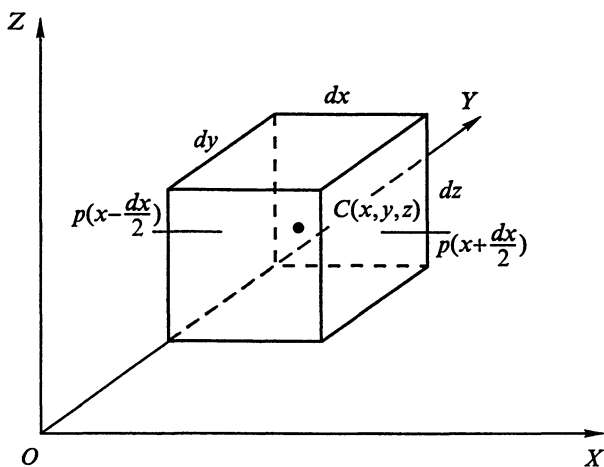


Рис. 7.2

Аналогичным образом можно получить выражения для сил, действующих на грани, перпендикулярные оси OY и оси OZ :

$$d\vec{F}_y = -\frac{dp}{dy} \vec{j} dV; \quad d\vec{F}_z = -\frac{dp}{dz} \vec{k} dV. \quad (7.7)$$

Окончательно для поверхностной силы $d\vec{F}_n$, действующей на элементарный куб, из (7.6) и (7.7) имеем:

$$d\vec{F}_n = -\frac{dp}{dx} \vec{i} dV - \frac{dp}{dy} \vec{j} dV - \frac{dp}{dz} \vec{k} dV = -\left[\frac{dp}{dx} \vec{i} + \frac{dp}{dy} \vec{j} + \frac{dp}{dz} \vec{k} \right] dV. \quad (7.8)$$

Вектор, стоящий в квадратных скобках, проекции которого есть частные производные давления по координатам радиуса-вектора центра куба, называется градиентом давления и обозначается как $\text{grad } p$. С помощью этого вектора выражение (7.8) примет вид:

$$d\vec{F}_n = -\text{grad } p \cdot dV, \quad (7.9)$$

и выражение (7.5) запишется в виде:

$$\vec{f} dV - \text{grad } p \cdot dV = 0.$$

После сокращения на dV получим уравнение равновесия жидкости (газа):

$$\vec{f} - \text{grad } p = 0,$$

или

$$\vec{f} = \text{grad } p. \quad (7.10)$$

7.2. Архимедова сила. Закон Архимеда

В случае действия силы тяжести $\vec{f} = \rho \vec{g}$, где ρ – плотность жидкости или газа, \vec{g} – ускорение свободного падения. Значение силы тяжести, действующей на элементарный объем, будет равно весу жидкости или газа в этом объеме. Из выражения (7.5) следует, что результирующая сила давления, действующая на поверхность элемента объемом dV , как раз равна весу жидкости или газа внутри этого объема. Если вместо элементарного объема рассмотреть произвольный объем, то условие равновесия останется прежним: вес жидкости или газа в выделенном объеме равен поверхностной силе давления жидкости или газа, находящихся внутри этого объема. Если рассматриваемый объем внутри жидкости или газа заменить телом с другой произвольной плотностью, то поверхностная сила при этом не изменится, т. е. останется равной весу вытесненной жидко-

сти или вытесненного газа в этом объеме. Впервые этот вывод был сделан древнегреческим мыслителем Архимедом в III в. до н. э., поэтому поверхностная сила, действующая на тела, погруженные в газ или жидкость, называется архимедовой силой, а закон, в соответствии с которым на всякое тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная по модулю весу вытесненного объема жидкости или газа, называется законом Архимеда. Архимедова сила приложена к центру тяжести вытесненного объема жидкости или газа.

В случае, когда внесенное тело однородно, его поведение определяется только соотношением между плотностями тела ρ_t и жидкости $\rho_{ж}$. При $\rho_t < \rho_{ж}$ тело всплывает, при $\rho_t > \rho_{ж}$ – тонет. Если же тело неоднородно и его центр тяжести не совпадает с центром тяжести вытесненного им объема жидкости, то возникает еще и вращение тела. Так, в куске пластилина произвольной формы можно поместить (вблизи его поверхности) небольшое металлическое тело, подобрав его так, чтобы обеспечить плавание куска внутри жидкости. Если погрузить тело в жидкость, расположив металл сверху, то тело переворачивается и металл оказывается внизу. Если архимедова сила превышает силу тяжести, то тело всплывает и равновесие наступает при нахождении под водой лишь некоторой части тела.

Выведем плавающее тело (модель корабля) из положения равновесия, слегка наклонив его. При этом объем погруженной части тела (корабля) изменится, изменится и архимедова сила, причем точка ее приложения сместится в сторону более погруженной части тела (рис. 7.3). Образовавшаяся пара сил будет возвращать тело в первоначальное положение, если направление архимедовой силы пересечется с наклонившейся линией AB , содержащей центр тяжести тела, выше центра тяжести C (рис. 7.3, слева). Если же точка пересечения M окажется ниже центра тяжести, то тело перевернется (рис. 7.3, справа). Эта точка M называется *метacentром*. Для «устойчивости» корабля она должна располагаться выше центра тяжести последнего.

Давление жидкости на дно сосуда определяется весом столба жидкости с единичным основанием, опирающегося на дно:

$$p = \rho g H.$$

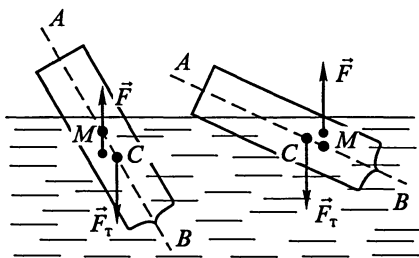


Рис. 7.3

Сила давления, действующая со стороны жидкости на опору, поддерживающую сосуд, т. е. вес жидкости, конечно, равна по модулю mg (m – масса жидкости) и не зависит от формы сосуда, а только от массы жидкости. Для сосуда с вертикальными стенками, показанного на рисунке 7.4, а, это очевидно. В случае, поясняемом рис. 7.4, б, к силе давления жидкости на дно \vec{F}_d прибавляется вертикальная составляющая $\Delta\vec{f}$ сил давления \vec{f} жидкости на стенки, жестко связанные с дном. Для случая, представленного на рис. 7.4, в, вертикальная составляющая сил \vec{f} вычитается из силы давления на дно. Таким образом, в общем случае полная сила, действующая на дно сосуда,

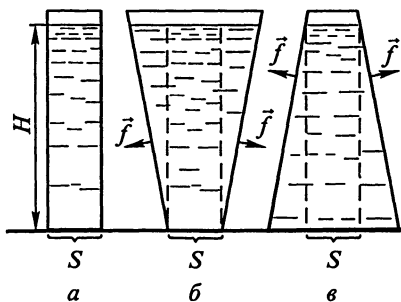


Рис. 7.4

$$\vec{F}_i = \vec{F}_d \pm \Delta\vec{f} = m_i\vec{g},$$

где $F_d = pS_i$.

Так как газы, подобно жидкостям, обладают упругостью объема (но не формы), то статика газов мало отличается от статики жидкостей. Различие возникает лишь из-за сравнительно легкой сжимаемости газов. Поэтому при больших объемах приходится учитывать различие в плотности газа в разных его слоях. Это усложняет расчеты, но не вносит чего-либо принципиально нового.

Рассчитаем зависимость атмосферного давления от высоты. Выберем ось координат h (рис. 7.5) и построим мысленно прямой цилиндр, нижнее основание которого совпадает с поверхностью Земли, где имеется давление p_0 . На высоте h давление будет меньше; обозначим его p . На высоте $h + dh$ давление еще меньше: $p - dp$. При равновесии

$$dp = -\rho g dh,$$

где ρ – плотность газа. Если температура газа постоянна по всей высоте столба, то между давлением и плотностью, по закону Бойля – Мариотта, существует простая связь:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}.$$

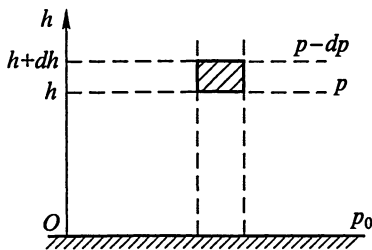


Рис. 7.5

Тогда легко выполнить интегрирование в пределах $(0, h)$ и (p_0, p) и найти давление:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g H}{p_0}\right). \quad (7.11)$$

Эта формула, называемая *барометрической*, строго верна для совершенно спокойной атмосферы постоянного состава и постоянной температуры.

Из соотношения (7.11), в частности, следует, что состав атмосферы должен с высотой изменяться – доля более тяжелых газов (кислород, азот) должна уменьшаться при увеличении высоты над Землей быстрее, чем доля более легкого водорода. В самом деле, ведь полное давление есть сумма отдельных давлений, создаваемых различными газами (*закон Дальтона*), а убыль давления для газов большей плотности должна происходить быстрее. В действительности состав атмосферы вплоть до довольно больших высот (порядка десятка километров) *не меняется*, что можно объяснить неучтенными при выводе формулы (7.11) явлениями ее перемешивания. Мы еще вернемся в молекулярной физике к формуле (7.11) и уясним ее глубокий физический смысл. Сейчас же отметим, что для практических целей удобно выразить высоту в километрах и, подставив величины, характеризующие воздух при нормальных условиях: $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$; $p_0 = 1,03 \cdot 10^5 \text{ Па}$, получить следующее выражение:

$$p = p_0 \exp(-Ah),$$

где $A = 0,125 \text{ км}^{-1}$.

На высоте величайшей вершины мира – Джомолунгмы (Эвереста, $h \approx 9 \text{ км}$) – давление должно равняться:

$$p = 0,3 p_0,$$

что более или менее хорошо отвечает действительности.

При малых высотах, разлагая (7.11) в ряд, находим:

$$p = p_0 - \rho_0 g h;$$

это простое соотношение справедливо примерно до высот порядка километра.

Архимедова сила определяет *подъемную силу аэростата*. Последний представляет собой каплеобразную оболочку, заполненную газом с плотностью, меньшей плотности воздуха. Если возникающая при этом подъемная сила превышает силу тяжести, действующую на аэростат, то он поднимается в верхние слои атмосферы. При этом

избыточное давление внутри оболочки возрастает, что может привести к ее разрыву. Чтобы этого не случилось, внизу оболочки имеется небольшое отверстие, позволяющее части газа вытечь наружу (давление газа у отверстия равно давлению наружного воздуха). Подъем прекращается, когда подъемная сила сравнивается с силой тяжести, действующей на аэростат.

Представляют интерес случаи, когда жидкость, находящаяся в ускоренно движущемся сосуде, движется как одно целое, т. е. неподвижна относительно стенок сосуда.

Так, если сосуд с жидкостью падает вертикально с ускорением \vec{a} , то на глубине h гидростатическое давление вышележащего столба жидкости равно:

$$p = \rho(g - a)h.$$

При свободном падении ($\vec{a} = \vec{g}$) получается:

$$p = 0,$$

т. е. состояние невесомости. Здесь начинают проявляться особенности поверхностного слоя жидкости (они будут рассмотрены в молекулярной физике) и жидкость принимает форму шара.

При движении сосуда под действием внешней силы \vec{F} с постоянным горизонтальным ускорением \vec{a} (рис. 7.6) в горизонтальных слоях на каждый элемент объема жидкости действует разность горизонтальных сил давления:

$$dF_1 - dF_2 = (p_1 - p_2) dS = \rho adSdx = adm,$$

где dm – масса выбранного элемента объема.

Если сосуд равномерно вращается вокруг своей вертикальной оси, то поверхность жидкости принимает форму параболоида вращения, после чего жидкость движется вместе с сосудом как твердое тело. Поэтому внутри жидкости создается такое распределение давлений (в горизонтальных слоях), что каждый элемент объема под действием сил давления $d\vec{F}_1$ и $d\vec{F}_2$ приобретает необходимое центростремительное ускорение. Сила давления растет по направлению от оси вращения к стенке сосуда. Если в жидкости имеется вкрапление с плотностью, отличной от плотности жидкости, то под действием указанной выше силы оно будет перемещаться либо к оси, если его плотность меньше плотности жидкости, либо к

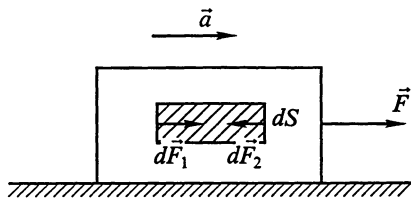


Рис. 7.6

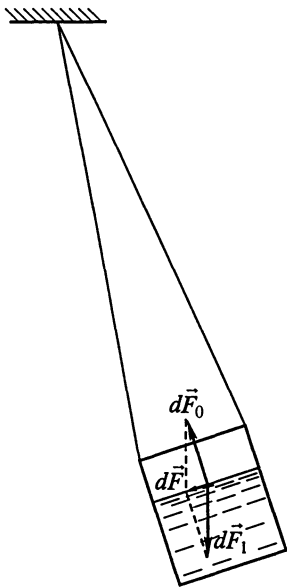


Рис. 7.7

стенке, если его плотность превышает плотность жидкости. На этом принципе работают различные центробежные сепараторы и центрифуги.

Интересен также случай «жидкого маятника»: на двух нитях подвешивается сосуд с водой (рис. 7.7), представляющий физический маятник. При возбуждении его колебаний вода в нем сначала движется сложным образом, но потом успокаивается, причем ее свободная поверхность все время остается параллельной дну сосуда. При этом на поверхностный элемент жидкости со стороны нижележащих слоев действует сила давления

$$dF_0 = p dS,$$

где dS – площадь горизонтальной грани. Сумма силы $d\vec{F}_0$ и силы тяжести $d\vec{F}_1$, действующей на элемент ($dF_1 = \rho g dh dS$, dh – высота элемента), как раз равна силе $d\vec{F}_i$, необходимой для сообщения элементу касательного ускорения \vec{a} , равного мгновенному ускорению сосуда.

При вращении жидкого шара вокруг оси симметрии (например, на ранних стадиях существования планет) необходимые центростремительные ускорения создаются вследствие деформации шара – он немного сжимается вдоль полярной оси и расширяется вдоль экваториальных диаметров. Так, у земного шара его экваториальный диаметр превышает полярный на 0,4%. Впрочем, степень сжатия в данном случае зависит не только от вращения, но и от ряда других причин (неоднородность Земли и др.).

7.3. Слоистое (ламинарное) и турбулентное течение.

Уравнение непрерывности струи

Переходя к изучению движения жидкостей и газов, сразу же отметим, что возможность перемешивания слоев жидкости существенно усложняет ее движение по сравнению с движением твердого тела.

Простой опыт убеждает в возможности течения двух типов. По сравнительно широкой трубе течет стационарный поток воды. Узкая трубка создает на оси трубы струю подкрашенной воды

(рис. 7.8, а). При малых скоростях течения оба потока текут не смешиваясь. Течение, при котором струи не перемешиваются и в каждой точке сечения потока существует определенная скорость течения, называется *стационарным слоистым (ламинарным)*. В этом случае можно ввести понятие о *линии тока* – траектории отдельного элемента объема жидкости, не пересекаемой никакой другой линией тока. Совокупность таких линий тока, опирающаяся на некоторое элементарное сечение, называется *трубкой тока*. Трубки тока не пересекаются друг с другом, и жидкость нигде не выходит через стенки трубки тока. Все сечение трубы, заполненной слоистым потоком жидкости, является макроскопической трубкой тока.

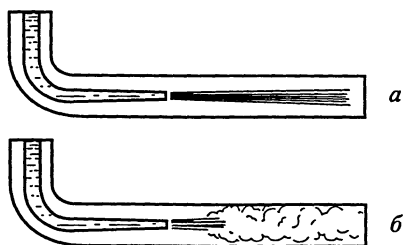


Рис. 7.8

При увеличении скорости возникают более сложные явления. Струя окрашенной жидкости сначала начинает дрожать, а потом перемешивается с прозрачными струями, так что вся труба заполняется беспорядочно движущейся окрашенной жидкостью, но в целом жидкость перемещается вдоль трубы (рис. 7.8, б); такое течение называют *турбулентным*. Оно, конечно, сложнее слоистого.

В реальных условиях стационарное слоистое течение возможно только под действием внешних сил, так как оно сопровождается трением жидкости о стенки трубы и внутренним трением слоев, текущих с относительными скоростями, отличными от нуля. В идеализированном случае несжимаемой (что близко к действительности для жидкостей и часто выполняется и для газов) и лишенной трения жидкости (это допущение более грубо, но иногда приемлемо) течение ее по трубе, расположенной горизонтально, могло бы происходить и без действия внешних сил, за счет первоначального импульса, сообщенного жидкости. Если сечение трубы меняется и она заполнена жидкостью полностью, то условия течения и его описание усложняются. Но при стационарном течении через каждое сечение за одинаковые промежутки времени должна протекать жидкость одинаковой массы. Как видно из рис. 7.9, эта масса может быть представлена произведениями:

$$\rho_1 S_1 v_1 dt = \rho_2 S_2 v_2 dt = dm = \text{const}, \quad (7.12)$$

где S_i – площадь сечения трубы; v_i – скорость в данном сечении; dt – выбранный промежуток времени; ρ_i – плотность жидкости. Уравне-

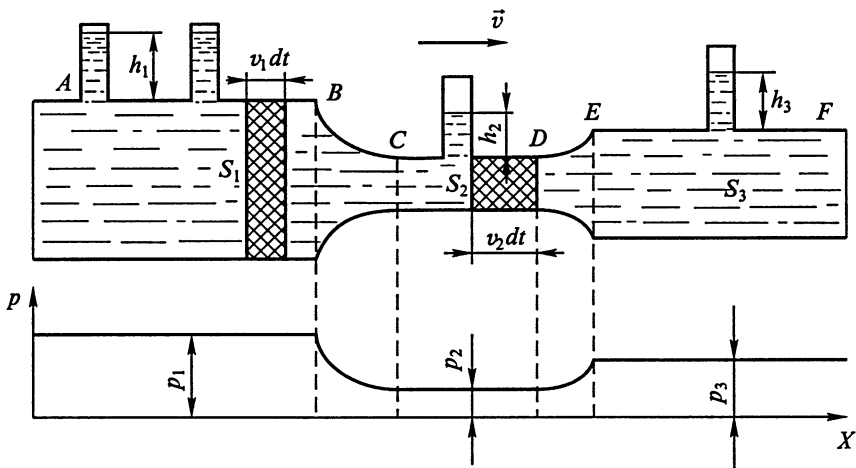


Рис. 7.9

ние (7.12) называется *уравнением непрерывности струи*. В случае нежимаемой жидкости ее плотность везде одинакова и вместо (7.12) можно записать

$$S_i v_i = \text{const.}$$

Из этого выражения сразу видно, что скорость течения обратно пропорциональна площади сечения (поэтому, например, через горные реки с быстрым течением переходят по возможности в широких местах). Но изменение скорости требует действия силы. Следовательно, на переходных участках *BC* и *DE* (где изменяется сечение трубы) должны возникать соответственно ускоряющие и замедляющие силы. Значит, давление на участке *AB* должно быть больше, чем на участке *CD*, а давление на участке *EF* должно быть больше, чем на участке *CD*. На каждом из указанных участков (постоянное сечение трубы) давление сохраняется неизменным, так как ускорение там отсутствует, а трением мы пренебрегаем. В этом можно убедиться, снабдив трубу манометрами, сечение которых параллельно линиям тока. Если участок трубопровода невелик, так что трение сказывается незначительно, то распределение давлений, измеряемых манометрами (см. рис. 7.9), отвечает сделанным выше заключениям. Рассмотренное давление называется *статическим*.

При закрывании правого конца трубы и прекращении подачи жидкости все давления выравниваются, так как течение жидкости прекращается.

7.4. Уравнение Бернулли. Импульс струи

Перейдем теперь к установлению законов стационарного слоистого течения идеальной жидкости. Для общности рассмотрим наклонный участок трубопровода, находящегося в поле земного тяготения (рис. 7.10). Трубопровод считаем целиком заполненным жидкостью во всех сечениях. Выделим мысленно некоторый элемент, например, ограниченный сечениями 1, 2. За малое время dt он сместится в положение, ограниченное сечениями 1', 2'. При этом через сечение 1' протечет жидкость массой dm , занимающая объем $S_1 v_1 dt$. За это же время через сечение 2 пройдет жидкость такой же массы, занимающая такой же объем $S_2 v_2 dt$, но с иной скоростью течения. Если поток стационарен, то в объеме, заключенном между сечениями 1' и 2, никаких изменений не произойдет, хотя одни частицы заменятся другими. Поэтому нужно исследовать только изменения, происшедшие с элементами 1, 1' и 2, 2'.

Работа внешних сил, действующих на жидкость, складывается из работы сил статического давления и работы силы тяжести. Эта работа определяет изменение кинетической энергии выделенных объемов. Запишем уравнение закона сохранения и превращения энергии:

$$\frac{1}{2} \rho v_2 S_2 dt v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1 S_1 dt v_1^2 = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt + g(h_1 - h_2) dm,$$

где h_1, h_2 – высоты центра тяжести объемов 1, 1' и 2, 2' над горизонтом; p_1 – статическое давление, создаваемое жидкостью, находящейся выше сечения 1; p_2 – давление слоев, расположенных ниже сечения 2'. Переносим слагаемые с одинаковыми индексами в одну часть уравнения и сокращая массы $dm = S_i v_i dt \rho$, получаем в любом сечении:

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gh = \text{const.} \quad (7.14)$$

Для удобства записи можно, конечно, умножить уравнение на постоянную плотность ρ . Тогда мы придем к общепринятой форме записи уравнения Бернулли (Даниил Бернулли,

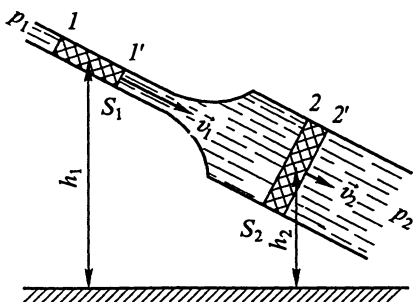


Рис. 7.10

1700–1782) для стационарного слоистого потока идеальной жидкости:

$$\frac{1}{2}\rho v_i^2 + p_i + \rho gh_i = \text{const.} \quad (7.15)$$

Силы трения, существующие в реальной жидкости, учесть труднее. При их учете мы должны были бы вместо (7.15) написать:

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + \rho \frac{dA}{dm} = \\ &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + p_{\text{тр}}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

где dA – элементарная работа против сил трения; $p_{\text{тр}}$ – изменение давления, соответствующее этой работе (отнесенной к единице объема жидкости). Отметим, что изменение давления $p_{\text{тр}}$ зависит от расстояния между элементами 1 и 2, увеличиваясь вместе с ним, так как силы трения действуют и на жидкость, заключенную между сечениями 1' и 2.

При этом если сечение 1 расположено выше по течению, чем сечение 2, то слагаемое, учитывающее работу силы трения, отнесенную к единице объема жидкости, должно быть взято со знаком «плюс». Следовательно, *давление во втором сечении оказывается меньше, чем в идеализированном случае*. Поэтому даже для течения по горизонтальной трубе постоянного сечения в реальных условиях требуется создание некоторой разности давлений. Она неизбежно существует во всех опытах, но делается заметной лишь при достаточно длинных трубах.

Перейдем к обсуждению следствий из уравнения (7.15). Для измерения статического давления, как мы уже видели, нужен манометр с сечением, параллельным линиям тока жидкости (1 на рис. 7.11). Для измерения второго слагаемого, иногда называемого *динамическим давлением*, применяется трубка 2 с сечением, перпендикулярным линиям тока (см. рис. 7.11). Жидкость в ней тормозится, ее кинетическая энергия переходит в потенциальную, и высота подъема жидкости служит мерой суммы $p + \frac{1}{2}\rho v^2$. Эта трубка называется *трубкой Пито*.

По показаниям подобных манометров можно определить скорость течения и объем ежесекундно протекающей жидкости.

На таких же идеях основаны различные приборы для измерения полной массы жидкости, протекшей за некоторый промежуток времени (водомеры и газометры).

Уравнение Бернулли в форме (7.15) применимо к течению газа только в тех случаях, когда можно пренебречь изменением объема газа и возможными изменениями его внутренней энергии при сжатии и расширении.

Пусть, например, газ течет из очень широкого сосуда, где давление равно атмосферному, в узкий, где статическое давление меньше на 1%. Скорость газа в первом сосуде можно считать очень малой. Какова она во втором сосуде?

Пренебрегая малым изменением плотности газа, получаем из уравнения Бернулли:

$$p_1 - p_2 = 0,01p = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \approx \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

При нормальной температуре (273 К) плотность воздуха $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$. Поэтому скорость газа оказывается равной

$$v_2 = \sqrt{\frac{2p}{100\rho}} = 40 \text{ м/с,}$$

что подтверждается опытом. Итак, уравнение (7.15) приложимо и к газам, движущимся довольно быстро.

Если продувать струю воздуха между двумя шариками или плоскими поверхностями, например, листами плотной бумаги, подвешенными на нитях, то наблюдается их взаимное притяжение. Это объясняется тем, что давление между ними, в соответствии с уравнением Бернулли, падает. Такое же явление может возникнуть при движении больших судов в узком канале, где суда заметно уменьшают сечение потока жидкости.

Поэтому движение в каналах строго регулируется.

Струя воды, вытекая из узкого отверстия 1 (рис. 7.12), создает разрежение и увлекает окружающий ее газ, что позволяет откачивать воздух из не показанного на рисунке большого сосуда 2. Подобный простой водоструйный насос может снижать давление до сотых долей атмосферного.

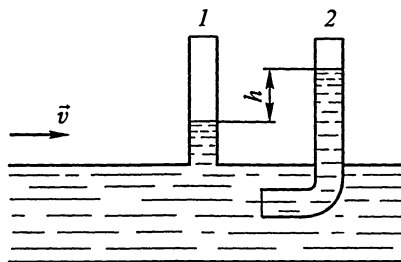


Рис. 7.11

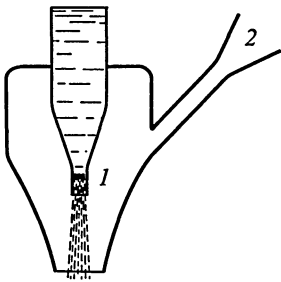


Рис. 7.12

Этот же принцип используется и в более совершенных насосах, рассматриваемых в молекулярной физике. На том же принципе работают пульверизатор (рис. 7.13) и автомобильный карбюратор. Но в них струя газа увлекает жидкость, последняя при этом разбивается на мелкие капельки.

При изучении течения жидкостей приходится считаться не только с их энергией, но и с их механическим импульсом.

В рассмотренных выше примерах изменение импульса происходило (в горизонтальных трубах) в тех их участках, где изменялось сечение трубы. Изменение импульса элемента жидкости массой dm в общем случае определяется действием силы \vec{F} :

$$(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)dm = \int_0^{\tau} \vec{F}d\tau.$$

Здесь τ – время протекания элемента массой dm через участок с меняющимся сечением; \vec{F} – сила, расчет которой довольно сложен.

Мы рассмотрим два простых примера.

1. Водопроводный кран (рис. 7.14) изменяет импульс вытекающей жидкости, действуя на нее с силой

$$\vec{F} = -\vec{F}_1, \quad (7.17)$$

и сам испытывает действие силы \vec{F}_1 . При этом

$$\vec{F} = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1),$$

где μ – масса жидкости, вытекающей каждую секунду.

2. Из широкого открытого сверху сосуда жидкость вытекает через малое отверстие площадью S (рис. 7.15), находящееся на глубине h . Стенки сосуда вблизи отверстия закруглены, чтобы изменение скорости могло происходить постепенно; это позволяет не считаться со сжатием струи, имеющим место у стенок, образующих прямой угол. Уравнение (7.15) дает:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 + \rho gh.$$

Так как $V_0 \ll v$, то получается интересный результат:

$$v = \sqrt{2gh},$$

т. е. скорость вытекания такая же, какая была бы при свободном падении жидкости с высоты h . Этот результат был получен учеником Галилея Э. Торричелли.

Вытекающая вода уносит импульс, равный

$$dm\vec{v} = \rho v S dt \vec{v} = \vec{F} dt,$$

где \vec{F} – сила, действующая на воду; по модулю она равна:

$$F = \rho v^2 S = 2\rho g S h.$$

Такою же по модулю, но противоположную по направлению силу испытывает сосуд.

Эта сила, как и сила \vec{F}_1 в уравнении (7.17), есть *реактивная сила*, встречающаяся в уравнении Мещерского (4.30).

Если бы отверстие было закрыто пробкой, то на нее действовала бы вдвое меньшая сила (статическая):

$$F_{ст} = \rho g h S.$$

Различие в модулях сил \vec{F} и $\vec{F}_{ст}$ объясняется перераспределением давлений внутри жидкости после открывания отверстия. Если изображенный на рисунке сосуд поставить на подвижную тележку, то после открывания отверстия тележка покатится влево.

Уравнение Бернулли описывает установившееся, не зависящее от времени, течение жидкости. В процессе установления такого движения сила тяжести играет существенную роль. Пусть горизонтальная труба сначала не заполнена жидкостью. Затем ее начинают заполнять, подавая жидкость в узкий участок трубы под некоторым давлением. Струя, выходящая из узкой части в широкую, под действием силы тяжести растекается по дну и постепенно заполняет всю трубу. После этого течение становится стационарным.

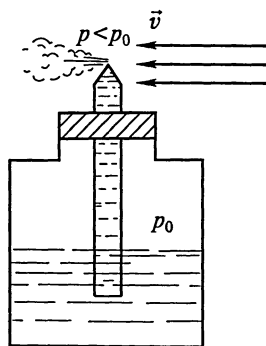


Рис. 7.13

Торричелли Эванджелюста (1608–1647), итальянский физик и математик. В 1641 г. открыл закон для скорости вытекания жидкости из отверстия в сосуде и формулу для определения ее значения. В 1643 г. открыл существование атмосферного давления и вакуума (торричеллиевская пустота), в 1644 г. изобрел ртутный барометр. Во время опытов с ртутным барометром опроверг бытовавшее до него мнение, что «природа боится пустоты».



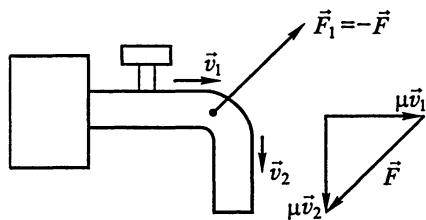


Рис. 7.14

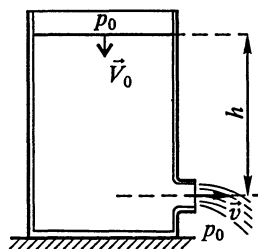


Рис. 7.15

Но если бы такая операция производилась в условиях невесомости, то струя двигалась бы через широкое сечение трубы по ее оси (мы не учитываем деформации струи под действием сил поверхностного натяжения), не заполняя объем широкой части. Движение могло бы быть стационарным, но пользоваться уравнением Бернулли было бы недопустимо.

Если же заранее заполнить жидкостью всю трубу (при закрытом выходном отверстии), оставить ее соединенной с питающим устройством и открыть выходное отверстие, то стационарное течение установится и уравнение Бернулли будет приложимо как в обычных условиях, так и в условиях невесомости.

Но и в этих случаях следует сделать одну оговорку. Из уравнения

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

получаем:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right].$$

Учитывая уравнение непрерывности струи (7.13), перепишем предыдущее уравнение в таком виде:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right].$$

Если

$$\frac{S_1}{S_2} > 1,$$

то p_2 может оказаться отрицательным, что физически невозможно.

Почему же уравнение Бернулли дало отрицательный результат?

Вспомним, что мы в самом начале предположили, что течение жидкости слоистое. Но мы не определили условий, при которых оно существует. А уравнение Бернулли описывает, что происходит *только при слоистом течении*. В рассматриваемом случае условия не соответствуют требованиям, необходимым для слоистого течения (сечение S_1 слишком мало); поэтому и уравнение Бернулли не может быть применено.

Нельзя (при заданных сечениях $S_1 > S_2$) задавать произвольные значения p_1 и v_1 ; они могут не удовлетворить требованиям стационарности течения. Но могут быть заданы произвольные $p_1 > p_2$; они всегда позволят найти стационарные значения скоростей v_1 и v_2 .

В разветвленном водоводе (рис. 7.16, а), очевидно, давление p_i во всех параллельных трубах (их может быть и больше, чем три) должно быть одинаковым ($p_i = \text{const}$). Тогда из уравнения Бернулли следует, что скорости течения v_i все одинаковы:

$$v_i = \text{const.}$$

Из уравнения непрерывности в этом случае получаем:

$$vS = v_i \sum_i S_i; \quad v_i = v \frac{S}{\sum_i S_i}.$$

Потом из уравнения Бернулли находим общее давление:

$$p_i = p + \frac{1}{2} \rho (v^2 - v_i^2).$$

Таким образом, задача, в сущности, сводится к рассмотрению последовательно включенных труб с сечениями S и $(S_1 + \dots + S_n)$. Но могут быть разветвленные водоводы, выходные отверстия которых не соединены друг с другом (рис. 7.16, б). В этом случае требование равенства давлений во всех разветвлениях отпадает.

На этом рисунке главная труба (S, p, v) разветвляется на две. В общем случае число разветвлений больше. Примем его равным n . Режимы течения в разветвлениях характеризуются величинами S_i, p_i, v_i .

При слоистом течении каждой трубке тока сечением S_i бу-

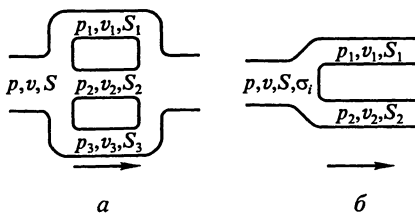


Рис. 7.16

дет отвечать трубка тока с сечением σ_i в неразветвленной части. Значения σ_i заранее неизвестны. Можно составить следующие уравнения:

$$v\sigma_i = v_i S_i \quad (n \text{ уравнений}),$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_i + \frac{1}{2}\rho v_i^2 \quad (n \text{ уравнений}).$$

Кроме того,

$$\sum_i \sigma_i = S.$$

Итак, имеется $2n + 1$ уравнений, содержащих $4n + 3$ величины. Задавая, как обычно, значения S_i , S и p , v (т. е. всего $n + 3$ величины), мы получим $3n$ неизвестных; определить их из $2n + 1$ уравнений, конечно, невозможно.

Но можно так изменить постановку задачи, что она станет разрешимой. Именно: зададим сечения только в разветвлениях S_i (числом n), p и v и потребуем, чтобы в разветвлениях получились давления p_i (также числом n).

Тогда число заданных величин составит $2n + 2$, а число неизвестных сравняется с числом уравнений $2n + 1$.

Из уравнений Бернулли определяются значения скоростей v_i , а из уравнений непрерывности струи — значения сечений σ_i . После этого определится и площадь сечения главной трубы.

Конечно, при задании давлений p_i нужно соблюдать условие

$$p_i < p + \frac{1}{2}\rho v^2.$$

Можно также задать скорости v_i , соблюдая неравенство

$$\frac{1}{2}\rho v_i^2 < p + \frac{1}{2}\rho v^2,$$

и определить последовательно p_i , σ_i и S . Наконец, можно задать k значений давлений p_i и $n - k$ значений скоростей v_i и определить остальные p_i и v_i , σ_i и S .

Но если бы были заданы S_i , p , v_i и σ_i , причем, конечно, должно было бы быть удовлетворено и условие

$$\sum \sigma_i = S,$$

то могли бы получиться невозможные решения для некоторых скоростей:

$$\frac{1}{2}\rho v_k^2 > p + \frac{1}{2}\rho v_k^2,$$

что потребовало бы изменения σ_k ; для сохранения суммы σ_i понадобились бы изменения и других значений σ_i , т. е. задача оказалась бы неразрешимой.

Итак, оказывается, что *одновременное задание p , v и S недопустимо*.

Следует заметить, что в практических условиях расчет водоводов делается не по уравнению Бернулли, а с учетом трения, имеющегося в жидкости. При этом для водоводов с открытыми выходными концами задача в общем виде не решается. Часто ее начинают считать с конца, задав давления на выходе, несколько большие атмосферного. Кроме того, на практике водоводы редко бывают горизонтальными, что также приходится учитывать при их расчетах.

В заключение остановимся на достаточно подробном рассмотрении простого, но важного для практики устройства – сифона. Это необходимо, так как, к сожалению, широко распространено ошибочное мнение, что сифон работает под действием атмосферного давления. Как известно, сифон – это изогнутая трубка, верхний конец ее (рис. 7.17) находится в сосуде A , нижний – над сосудом B . Если трубка была заполнена жидкостью, то происходит самопроизвольное перетекание ее в сосуд B . Оно продолжается, пока конец трубки не выйдет из жидкости (в сосуде A). Очевидно, атмосферное давление на жидкость в верхнем сосуде p_A меньше, чем во втором p_0 , уже поэтому оно не может быть причиной перетекания.

Роль атмосферного давления сводится главным образом к некоторому упрочению струи (растворенные в жидкости газы не могут образовать больших пузырьков и нарушить целостность струи). Жидкость, освобожденная от растворенных газов (например, длительным кипячением), прекрасно течет и в вакууме. Работа сифона объясняется разностью сил тяжести, действующих на столбы жидкости в обоих коленах трубки. Цепочка, наброшенная на блок с горизонтальной осью вращения, сбегает в сторону своего более длинного конца, подтверждая сказанное выше о работе сифона.

Пусть сечение сосуда A много больше сечения трубки сифона. Тогда скорость v_A опускания

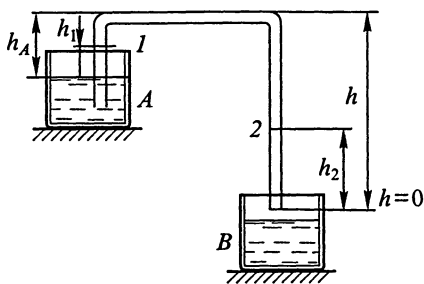


Рис. 7.17

уровня жидкости в нем очень мала по сравнению со скоростью v вытекания жидкости из отверстия трубки. Высоту уровня жидкости в сосуде A можно поддерживать постоянной. Так как трубка сифона имеет постоянное сечение, то скорость жидкости в ней везде постоянна и равна скорости истечения. Напишем уравнение Бернулли для этого уровня и нижнего конца трубки ($h = 0$):

$$p_A + \rho g(h - h_A) + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2.$$

Отсюда получаем для скорости истечения:

$$v^2 = v_A^2 + 2g(h - h_A) + (p_A - p_0)\frac{2}{\rho}.$$

Так как $v \gg v_A$ и разность атмосферных давлений мала по сравнению со вторым слагаемым правой части, то получается:

$$v = \sqrt{2g(h - h_A)}, \quad (7.18)$$

как и в случае сосуда Торричелли, рассмотренного выше.

Интересно оценить статическое давление в сифоне.

Для уровней 0, 1 и 2 уравнения Бернулли дают:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(h - h_A + h_1) = \frac{1}{2}\rho v^2 + p_2 + \rho gh_2.$$

Таким образом,

$$p_1 = p_0 - \rho g(h - h_A + h_1).$$

Оно меньше атмосферного и имеет минимум в горизонтальной части трубки сифона ($h_1 = h_A$).

В сечении трубки сифона, совпадающем с поверхностью жидкости в сосуде A , получается (так как $h_1 = 0$):

$$p_A = p_0 - \rho g(h - h_A).$$

Разность давлений

$$p_A - p_1 = \rho gh_1$$

и гонит жидкость в трубку сифона, заставляя ее двигаться в трубке со скоростью v , найденной независимо в уравнении (7.18).

В правой трубке на уровне 2 статическое давление, равное

$$p_2 = p_0 - \rho gh_2,$$

также меньше атмосферного; оно растет по мере опускания жидкости по трубке, а в ее верхней точке равно давлению в горизонтальной части трубки, как это и должно быть.

7.5. Трение в движущейся реальной жидкости.

Уравнение Пуазейля

Трение, существующее в реальной жидкости, значительно усложняет строгое описание ее движения. Сжимаемостью жидкости по-прежнему пренебрежем.

Во-первых, для преодоления сил трения необходимы внешние силы (разность давлений даже на концах горизонтальной трубы). Это легко показать на опыте, заставив, например, воду течь по узкой длинной трубке постоянного сечения, вдоль которой на равных расстояниях имеются манометры, измеряющие статическое давление (рис. 7.18). Опыт покажет, что разность давлений пропорциональна расстоянию между сечениями, в которых измеряется давление. Напомним, что в случае идеальной жидкости разности давлений не существовало бы. Если провести опыт с двумя трубами разных радиусов, то окажется, что разность давлений резко уменьшается при увеличении радиуса. Именно поэтому при опытах с достаточно широкими трубами можно было пренебречь силами трения.

Во-вторых, при существовании трения даже при стационарном слоистом течении скорость течения в сечении трубы (если жидкость смачивает стенки) меняется от нуля у поверхности стенок до наибольшего значения на оси трубы. Это легко показать на опыте. Вертикальную трубу заполняют водой, затем сверху осторожно наливают подкрашенную воду и открывают кран K (рис. 7.19) так, чтобы течение было очень медленным. Вскоре вверху образуется окрашенный «язык», имеющий форму параболоида вращения.

Это распределение скоростей является результатом существования трения между слоями жидкости, движущимися с различными скоростями.

Ньютон показал, что при стационарном слоистом течении реальной жидкости по трубе, стенки которой смачиваются жидкостью (так что скорость течения у самой стенки равна нулю), скорость течения \vec{v} отдельных слоев изменяется в направлении, перпендикулярном направлению скорости. При этом между соседними слоями возникает сила трения

$$\vec{f} = \eta \frac{dv}{dr} dS \frac{\vec{v}}{v},$$

где dS – элемент поверхности соприкасающихся слоев; η –

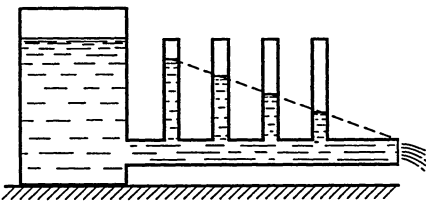


Рис. 7.18

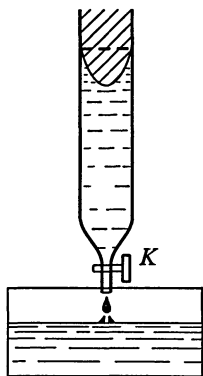


Рис. 7.19

вязкость жидкости; радиус-вектор \vec{r} направлен от центра, так что $\frac{dv}{dr} < 0$.

Рассмотрим течение жидкости в отрезке трубы радиусом R (рис. 7.20). Выделим мысленно цилиндр радиусом r , высотой dh . Кроме тормозящей силы трения, действующей на его боковую поверхность, при стационарном течении к торцам цилиндра должны быть приложены силы давления, обеспечивающие ускорение. Сумма всех сил должна равняться нулю:

$$\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r dh + \pi r^2 dp = 0.$$

Отсюда находим:

$$-dv = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dh} r dr.$$

Взяв интеграл по всему сечению трубы $(0, R)$ и помня, что при $r = R$ скорость равна нулю, находим наибольшую скорость (на оси трубы):

$$V = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{dp}{dh} \right) R^2. \quad (7.19)$$

Интегрируя в пределах (V, v) и $(0, r)$, находим скорость слоев внутри трубы:

$$-\int_v^V dv = \int_0^r \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dh} r dr.$$

Следовательно,

$$v = V - \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dh} r^2. \quad (7.20)$$

Из (7.19) и (7.20) получаем окончательный вид закона распределения скоростей в трубе:

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dh} (R^2 - r^2). \quad (7.21)$$

Если труба длиной h имеет постоянное сечение, то

$$\frac{dp}{dh} = \frac{p_1 - p_2}{h},$$

где $p_1 - p_2$ – разность давлений на ее концах.

С учетом полученного выражения (7.21) запишется в виде:

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{p_1 - p_2}{h} (R^2 - r^2). \quad (7.22)$$

Теперь можно найти объем жидкости, протекающей по трубе за некоторое время t . Выделим цилиндрический слой сечением $2\pi r dr$ и высотой $h = vt$. Вся жидкость, заключенная в нем, протечет за время t через выбранное сечение. Суммирование по всему сечению трубы приводит к уравнению Пуазейля, определяющему объем протекшей жидкости или массу, если результат интегрирования умножить на плотность жидкости:

$$M = \rho \int_0^R 2\pi r dr vt = \frac{\rho\pi}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{h} R^4 t = \mu t, \quad (7.23)$$

где μ – масса ежесекундно протекающей жидкости.

Пользуясь уравнениями (7.20) и (7.21), можно найти кинетическую энергию ежесекундно протекающей жидкости:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^R \rho v^2 \cdot 2\pi r v dr = \frac{1}{2} \mu V^2. \quad (7.24)$$

Сильная зависимость скорости течения от радиуса трубы позволяет легко регулировать поток жидкости (вспомните водопроводный кран).

Так как поток стационарен, то разность давлений требуется только для преодоления сил трения. В случае идеальной жидкости вместо (7.23) и (7.24) получилось бы:

$$\mu_{ид} = \pi R^2 \rho V_{ид}, \quad K_{ид} = \frac{1}{2} \mu_{ид} V_{ид}^2.$$

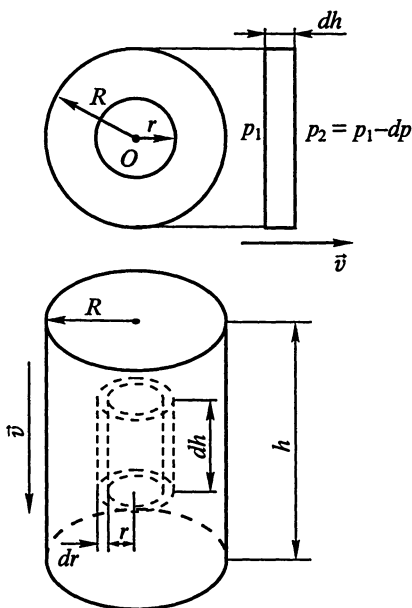


Рис. 7.20

7.6. Число Рейнольдса

В § 7.3 был описан опыт, доказывающий, что при большой скорости течения реальной жидкости слоистое течение сменяется более сложным – турбулентным (см. рис. 7.8).

То же самое наблюдается и при набегании слоистого потока на какое-либо тело: при малых скоростях линии тока изгибаются, обтекая тело, но не перемешиваются, а позади тела снова становятся параллельными друг другу. Если же скорость набегания увеличивается, то возникает турбулентность и явление обтекания усложняется.

Для характеристики того или иного типа течения О. Рейнольдс (1842–1912) рассмотрел отношение кинетической энергии единицы объема жидкости (или обтекаемого тела) к потерям энергии на преодоление сопротивления движению. Для пояснения идеи Рейнольдса рассмотрим простейший случай шара, движущегося в жидкости. Система отсчета связана с жидкостью; начало координат находится в невозмущенном потоке, вдали от шара. Пусть радиус шара есть R , плотность ρ , скорость движения v .

Кинетическая энергия шара

$$K \sim \rho R^3 v^2.$$

Работа сил сопротивления за секунду пропорциональна наибольшему сечению движущегося тела, перпендикулярному вектору скорости, вязкости жидкости η и скорости движения. В случае шара

$$A \sim R^2 \eta v.$$

Безразмерное отношение этих величин (коэффициент пропорциональности принимается равным единице) называется *числом Рейнольдса*:

$$\frac{K}{A} = \text{Re} = \frac{Rv\rho}{\eta}. \quad (7.25)$$

В соответствии с принципом относительности Галилея можно также рассматривать набегание слоистого потока на шар.

При малых скоростях, когда возмущение потока невелико, он остается слоистым, этому случаю отвечают малые значения Re .

При увеличении скорости (и числа Рейнольдса) процесс усложняется – возникает турбулентность.

Но при очень больших числах Рейнольдса, когда потери на преодоление трения относительно малы, турбулентность опять перестает играть заметную роль.

Эти соображения применимы и к течению жидкости в трубах.
Отношение

$$\frac{\eta}{\rho} = \nu,$$

называют *кинематической вязкостью* и записывают число Рейнольдса в виде

$$Re = \frac{Rv}{\nu}. \quad (7.26)$$

При слоистом течении сопротивление движению тела пропорционально первой степени скорости (*закон Стокса*). При турбулентном движении оно возрастает и движущееся тело передает жидкости относительно большую долю своего механического импульса и энергии. Грубую оценку возникающего при этом возрастания сопротивления можно провести на следующем примере. Пусть плоская пластина площадью S движется со скоростью \vec{v} , нормальной к поверхности пластины. Тогда $Svdt$ есть элементарный объем жидкости, отталкиваемой пластиной за время dt . Умножив это произведение на плотность жидкости ρ , получим массу отталкиваемой жидкости. Если она приобретает при этом скорость \vec{v} , то передаваемый жидкости импульс

$$dp = \rho S v^2 dt.$$

При этом сила сопротивления, действующая на пластину,

$$f_1 = \frac{dp}{dt} = \rho S v^2,$$

т. е. пропорциональна квадрату скорости. Действительная сила сопротивления оказывается равной

$$f = C_x \rho v^2 S, \quad (7.27)$$

где C_x – коэффициент, существенно зависящий от формы тела; S – площадь наибольшего поперечного сечения тела, перпендикулярного невозмущенному потоку.

Иногда выражение (7.27) считают общим для всех скоростей и C_x рассматривают как функцию скорости.

Зависимость силы сопротивления от числа Рейнольдса для шара графически представлена на рис. 7.21, причем на участке I

$C_x = \frac{1}{v}$, на участке II $C_x = \text{const}$, на участке III $C_x \sim v$. Участки раз-

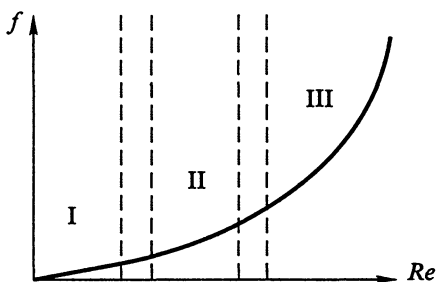


Рис. 7.21

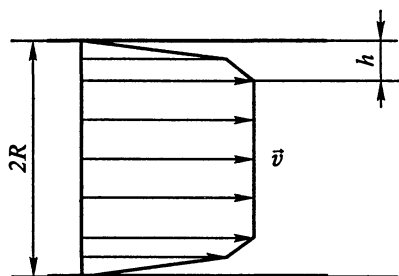


Рис. 7.22

делены переходными областями, где C_x зависит от скорости более сложно.

Все сказанное оправдывается и для тел иной формы. Однако следует подчеркнуть, что эти рассуждения верны лишь для скоростей, меньших скорости звука $v_{зв}$, которая в воздухе приблизительно равна 330 м/с. При звуковых и сверхзвуковых скоростях возникают качественно новые явления; они будут рассмотрены в газодинамике, после изучения основ молекулярной физики и термодинамики.

При турбулентном движении жидкости в трубе круглого сечения, несмотря на сложность движения отдельных частиц, жидкость в целом течет вдоль оси трубы. При этом скорость вблизи стенок постепенно растет от нуля до некоторого постоянного значения v ; *толщина слоя, где происходит это нарастание, мала по сравнению с радиусом трубы* (рис. 7.22).

7.7. Движение твердых тел в жидкости и газе.

Циркуляция скорости. Подъемная сила

Явления, происходящие при движении твердого тела в жидкости или газе, во многих случаях удобно рассматривать, связав систему отсчета с телом. Набегающий на него поток до взаимодействия будем считать слоистым, а вектор скорости потока – направленным горизонтально. При взаимодействии потока с твердым телом возникают так называемые *аэродинамические силы*, причем, в соответствии с третьим законом Ньютона, сила, испытываемая телом, равна по модулю и противоположна по направлению силе, действующей на поток. Сила, испытываемая телом, во многих случаях может быть представлена как сумма двух сил: первая (с коэффициентом C_x), называемая *лобовым сопротивлением*, направлена парал-

тельно скорости невозмущенного потока, вторая (с коэффициентом C_y) перпендикулярна первой; ее называют «подъемной» силой, хотя она может (при горизонтальном движении) быть направлена как вверх, так и вниз (но всегда перпендикулярно скорости невозмущенного потока).

Разрабатывая гидродинамику, Л. Эйлер пришел к парадоксальному выводу: идеальные жидкость или газ, лишённые трения, должны свободно обтекать тело, не обмениваясь с ним энергией.

Если тело имеет симметричную форму (на рис. 7.23 показано сечение шара), то обтекание будет симметричным. При этом лобовое сопротивление отсутствует. В реальных условиях из-за трения в газе происходит некоторое перераспределение линий тока, обтекание становится несимметричным, и это приводит к появлению аэродинамических сил.

Обратимся снова к рис. 7.23. На достаточном расстоянии от шара поток снова делается невозмущенным, частицы жидкости движутся с прежней скоростью \vec{v} . Если считать, что за пределами участка $B'C'$ поток остался невозмущенным, то показанную на рисунке часть потока можно считать продольным сечением макроскопической трубки тока и применять к ней уравнение Бернулли (хотя бы для качественных оценок).

Так как шар уменьшает свободное сечение трубки тока, то вблизи шара скорость потока должна измениться: при подходе к сечению $B'C'$ она должна расти; при удалении от него – убывать, стремясь к невозмущенному значению. В области A поток затормаживается. Следовательно, будет меняться и давление в различных частях возмущенного потока.

В покоящейся жидкости давление на все участки поверхности шара было бы одинаково. Постоянно оно и в невозмущенном потоке. На рис. 7.24 показаны силы, возникающие при обтекании шара идеальной жидкостью. В областях вокруг точек B и C , где скорость потока увеличена, силы давления на шар уменьшаются; это уменьшение условно показано стрелками, направленными от поверхности шара; в областях вблизи точек A и D , где поток затормаживается, силы давления на шар увеличиваются, что условно показано стрелками, направленными к поверхности шара.

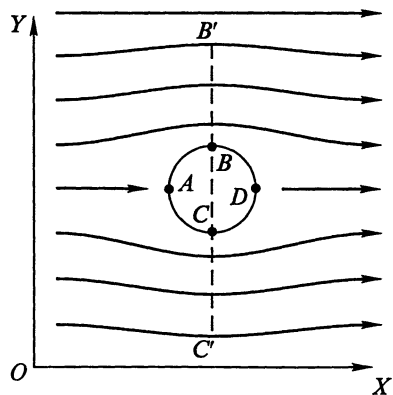


Рис. 7.23

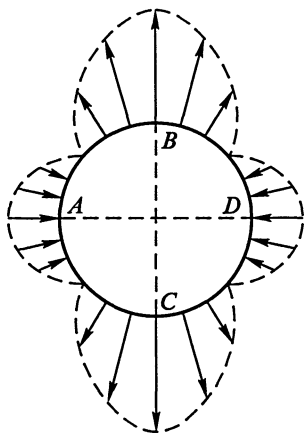


Рис. 7.24

Строго говоря, точки приложения этих сил следовало бы поместить на поверхности шара. Но картина, изображенная на рисунке, является в гидродинамике общепринятой, и мы ее будем использовать и в дальнейшем.

В силу симметрии все силы направлены по радиусам.

Распределение давления на поверхности шара в этом случае симметрично и сумма сил равна нулю.

Если форма тела несимметрична (например, имеется полусфера), то, как видно из рис. 7.25, в результате перераспределения давления лобовое сопротивление снова отсутствует, но возникает сила, направленная перпендикулярно невозмущенному потоку, – подъемная сила. Следует подчеркнуть, что в идеальной жидкости лобовое сопротивление будет отсутствовать и при произвольной форме тела, так как без сил трения невозможен энергетический обмен между жидкостью и телом. В реальной жидкости (или газе) существование трения приводит к иным изменениям течения: *несимметрия обтекания, обусловленная трением, вызывает появление лобового сопротивления и оказывает влияние на подъемную силу.*

Точные расчеты коэффициентов C_x и C_y весьма сложны даже при слоевом обтекании. Они еще более усложняются, когда течение теряет слоистый характер. Мы отметим лишь самые важные особенности возникающих при этом взаимодействий.

Вследствие трения скорость частиц жидкости в непосредственной близости к поверхности тела уменьшается; возникают силы, касательные к поверхности тела, направленные вдоль потока, т. е. создающие лобовое сопротивление.

Вследствие трения скорость частиц жидкости в непосредственной близости к поверхности тела уменьшается; возникают силы, касательные к поверхности тела, направленные вдоль потока, т. е. создающие лобовое сопротивление.



Эйлер Леонард (1707–1783), швейцарско-русский математик и физик. Физические исследования Эйлера посвящены механике, акустике, электричеству, математической физике, разработке физической картины мира. В механике установил закон сохранения момента импульса, разработал теорию движения твердого тела, в том числе теорию гироскопа, является одним из создателей механики сплошных сред.

Кроме того, нарушается симметрия обтекания, что приводит к перераспределению сил избыточного давления. Пока числа Рейнольдса невелики (в частности, при малых скоростях), искажение линий тока не приводит к их разрыву, поток остается слоистым.

Для шара в этих условиях картина обтекания показана на рис. 7.26; соответствующее распределение сил избыточного давления изображено на рис. 7.27.

Существенную роль играет следующий фактор: заметные возмущения течения происходят обычно в слое жидкости, прилегающем к поверхности движущегося тела, причем толщина этого «пограничного» слоя

$$\delta = \frac{l_x}{\sqrt{\text{Re}}},$$

где l_x – продольный размер тела. При больших числах Рейнольдса этот слой тонок.

Пусть шар радиусом $R = 0,1$ м движется в воде ($\eta = 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 10^3$ кг/м³) со скоростью $v = 10^{-3}$ м/с. Получаем:

$$\text{Re} = 100, \quad \delta = 10^{-2} \text{ м}, \quad \delta/R = 0,1.$$

При движении того же шара в воздухе ($\eta = 2 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\rho = 1,3$ кг/м³) со скоростью $v = 30$ м/с получим:

$$\text{Re} = 2 \cdot 10^5, \quad \delta = 7 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad \delta/R = 7 \cdot 10^{-3}.$$

Почти вся практическая аэродинамика имеет дело именно с такими случаями малой толщины слоя. За его пределами влияние вязкости почти не сказывается, и изменение характера течения можно описывать, пользуясь уравнением Бернулли (без учета вязкости).

Силы вязкости тормозят слои жидкости, непосредственно прилегающие к поверхности тела (пограничный слой). Если это торможение значительно, то около сечения BC может образоваться отрыв линий тока, расположенных за пограничным сло-

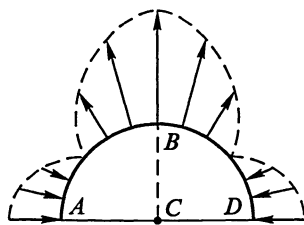


Рис. 7.25

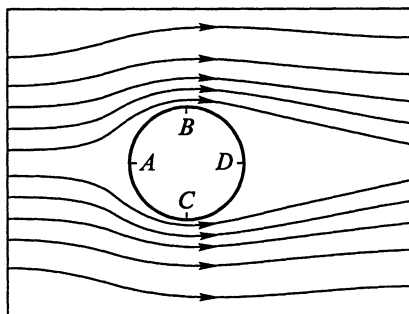


Рис. 7.26

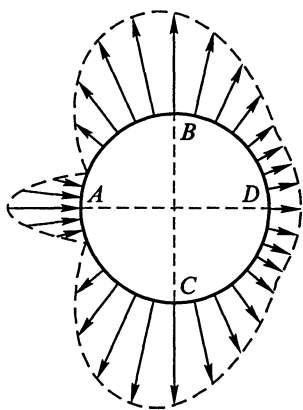


Рис. 7.27

ем, от этого слоя, причем линии тока начнут загибаться, проникая в область, прилегающую к точке D ; здесь начнут образовываться вихри, среднее значение давления понизится (рис. 7.28). Так как вихри уносят импульс и энергию, то лобовое сопротивление будет возрастать. Кроме того, вихри обладают моментом импульса. Так как невозмущенный поток им не обладал, то вихри должны иметь разные направления, причем их суммарный момент импульса равен нулю.

Образование вихрей существенно зависит от размеров и формы тела. Если имеются резкие изменения направления граничных линий тела, например если обтекается тонкая пластина (рис. 7.29), то условия для срыва вихрей будут благоприятны. Вихри будут срываться с обоих краев одинаково часто, имея моменты импульса противоположных знаков, так что полный момент импульса окажется равным нулю. Позади тела вихри образуют так называемый «след», протяженность которого может значительно превышать продольный размер тела. В пределах этого следа жидкость движется турбулентно. Лобовое сопротивление при этом, конечно, увеличивается, так как вихри уносят кинетическую энергию.

Конечно, условия обтекания и вихреобразования существенно зависят от формы тел. Поэтому лобовые сопротивления тел одинакового сечения, но разной формы сильно отличаются друг от друга (см. рис. 7.30, где около каждого тела указан его коэффициент C_x . При этом предполагается, что поток набегает на тело в направлении стрелки).

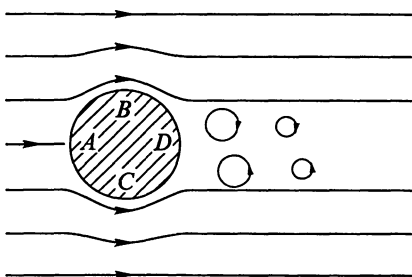


Рис. 7.28

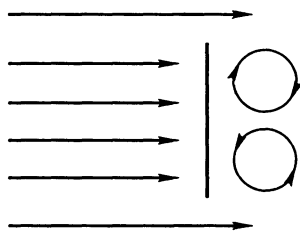


Рис. 7.29

Если симметрия набегания потока отсутствует, то может случиться, что условия образования вихрей одного знака облегчатся и число их относительно возрастет. Тогда уносимый момент механического импульса будет отличен от нуля. Но закон сохранения момента импульса должен выполняться. Поэтому в таком случае *должны возникнуть (и действительно возникают) вихри противоположного знака вокруг самого тела*. Это приводит к дополнительному перераспределению давления вокруг тела.

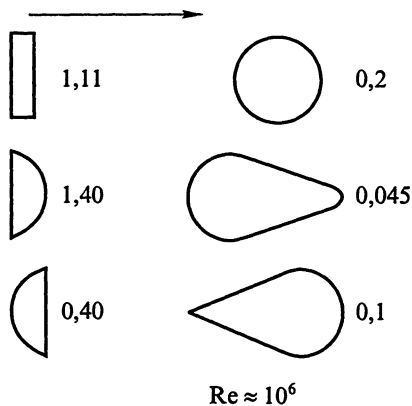


Рис. 7.30

Впервые на это важное обстоятельство указал и детально его изучил Н. Е. Жуковский (1847–1921).

Обратимся сначала к опыту, где такой вихрь создается искусственно. Пусть легкий бумажный цилиндр скатывается с наклонной плоскости (рис. 7.31). Благодаря трению он захватывает прилежащие слои воздуха и сообщает им момент импульса – воздух вращается вместе с цилиндром. Поэтому когда цилиндр покидает наклонную плоскость и начинает свободно падать, скорость обтекания с одной стороны цилиндра (для рис. 7.31 справа) оказывается меньше, чем с другой; в результате возникает поперечная (относительно потока воздуха) аэродинамическая сила, направленная влево и складывающаяся с силой тяжести, действующей на цилиндр.

Вследствие этого цилиндр, падая, опишет траекторию 1, более крутую, чем обычная траектория 2 (последнюю можно получить, скатывая тяжелый цилиндр, например деревянный, для которого аэродинамическая сила мала по сравнению с силой тяжести).

Тот же эффект позволяет поддерживать в струе воды или воздуха легкий шарик (например, для настольного тенниса), если удастся сообщить ему вращение в нужном направлении (рис. 7.32).

Этот эффект, называемый *эффектом Магнуса*, пытались ис-

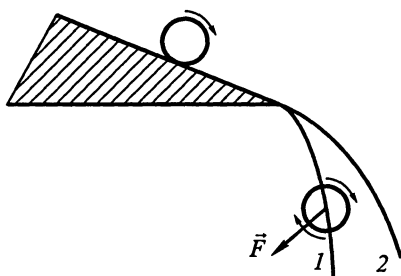


Рис. 7.31

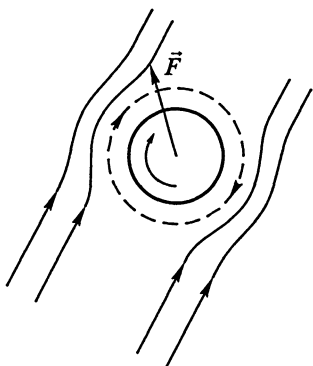


Рис. 7.32

пользовать в крупномасштабных устройствах, но практического применения он пока не получил.

У Жуковского возникла следующая идея: *если выбором подходящей формы тела обеспечить отрыв от него вихрей одного определенного направления, уносимых потоком, то вокруг тела должен образоваться устойчивый вихрь противоположного направления.* Это поясняет рис. 7.33.

При такой форме крыла самолета, когда от него отрывается вихрь воздуха, для которого характерно вращение против часовой стрелки, вокруг крыла из-за необходимости сохранения момента ме-

ханического импульса возникает вихрь противоположного знака. Над крылом эта циркуляция воздуха окажется сонаправленной со скоростью обтекающего крыло воздуха, а под крылом – направленной в противоположную сторону. Тогда результирующая скорость потока над крылом будет больше, чем под крылом. Эта разность скоростей тем самым увеличивает давление на крыло снизу и уменьшает сверху добавочно к разности давлений, создаваемых при такой форме крыла, когда его асимметричный профиль приводит к большей скорости потока над ним за счет меньшего размера нижней части крыла. Тогда давление под телом окажется еще больше, чем над ним, и *появится дополнительная аэродинамическая сила, имеющая достаточно большую подъемную составляющую.*

Жуковским был разработан специальный профиль самолетного крыла, обеспечивающий подъемную силу, значительно превосходящую ту силу, какая создается без образования вихрей.

По Жуковскому, подъемная сила, получаемая при образовании вихря, пропорциональна скорости невозмущенного потока v_0 и циркуляции скорости Γ , определяемой следующим образом:

$$\Gamma = \oint \vec{v}_0 \cdot d\vec{l} \sim \lambda v_0 \alpha \quad (7.28)$$

(здесь λ – длина хорды сечения крыла; α – угол атаки, т. е. угол между касательной к профилю и направлением скорости \vec{v}_0). Интеграл берется по контуру вихря. К сожалению, увеличение подъемной силы сопровождается и увеличением лобового сопротивления. Обе эти силы пропорциональны квадрату скорости; следовательно, мощность, необходимая для полета в этих условиях, растет как третья степень скорости. Увеличение необходимой мощности влечет за

собой увеличение веса двигателя, так что получить большую полезную нагрузку при больших скоростях полета очень трудно, но возможно.

Кроме того, так как вихреобразование начинается лишь при достаточно большой скорости, то самолет должен иметь ее при взлете и при посадке; поэтому длина взлетной полосы получается значительной, что требует больших затрат.

Вертолеты, т. е. аппараты с дополнительным горизонтальным винтом, могут взлетать и садиться при практически нулевой горизонтальной скорости, могут «висеть» в воздухе над определенной точкой земной поверхности. Но при горизонтальном полете их скорость невелика, так что вертолеты не могут заменить обычных самолетов, но лишь успешно дополняют их.

При горизонтальном полете самолета с постоянной скоростью динамика весьма несложна: сила тяги винта или турбины, возникающая при отбрасывании ими воздуха, уравнивает силу лобового сопротивления; подъемная сила уравнивает силу тяжести, действующую на самолет.

Изменяя ориентацию рулей и закрылков (подвижных участков на краях крыльев), летчик может изменять в полете соотношение действующих сил и регулировать режим полета.

Самолеты летают, «опираясь» на воздух. Ракеты, где движение возникает за счет эффекта отдачи, не нуждаются в воздухе как опоре, а потому могут летать на очень больших высотах и даже в космосе. Аэродинамика при больших (сверхзвуковых) скоростях существенно отличается от рассмотренных здесь процессов. Для ее понимания необходимо знание термодинамики. Поэтому особенности движения со сверхзвуковой скоростью будут рассмотрены в молекулярной физике.

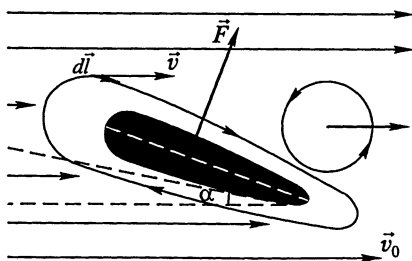


Рис. 7.33

Глава 8

ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

8.1. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Законы ньютоновской механики справедливы в инерциальных системах отсчета. Будут ли они выполняться в системах отсчета, движущихся с ускорением относительно инерциальной системы отсчета? Системы отсчета, движущиеся ускоренно относительно инерциальной системы отсчета, назовем неинерциальными системами отсчета (НИСО).

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим систему отсчета, движущуюся с постоянным ускорением \vec{a}_0 поступательно вдоль оси OX инерциальной системы отсчета (рис. 8.1). Для определенности координаты ИСО обозначим нештрихованными буквами, а координаты НИСО – штрихованными, соответственно к ИСО применим название нештрихованной системы отсчета, к НИСО – штрихованной системы отсчета.

Рассмотрим движение тела массой m под действием силы \vec{F} в нештрихованной системе отсчета, т. е. в инерциальной системе отсчета. Основное уравнение динамики в этом случае можно записать следующим образом: $m\vec{a} = \vec{F}$, где \vec{a} – ускорение тела в ИСО. При ма-

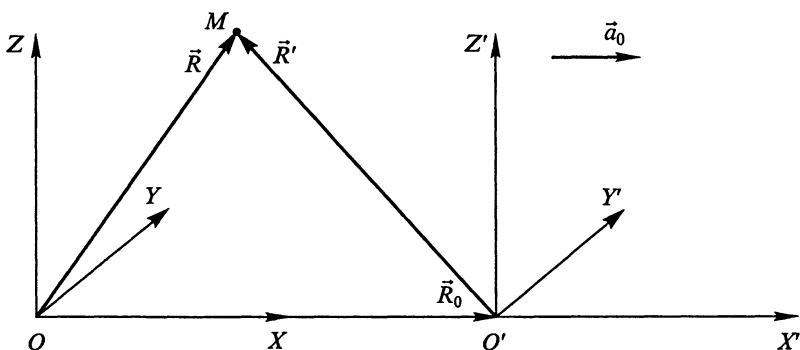


Рис. 8.1

лых по сравнению со скоростью света скоростях движения можно считать, что в любой момент времени справедливо правило сложения радиус-векторов, характеризующих положение тела в ИСО и НИСО:

$$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{R}_0, \quad (8.1)$$

где \vec{R} – радиус-вектор тела в ИСО, \vec{R}' – радиус-вектор тела в НИСО, \vec{R}_0 – радиус-вектор начала координат НИСО в ИСО ($\vec{R}_0 = \vec{v}_0 t + a_0 t^2/2$, где \vec{v}_0 – начальная скорость НИСО относительно ИСО).

Дважды дифференцируя (8.1) по времени, найдем связь между ускорением тела в штрихованной и нештрихованной системах координат:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0. \quad (8.2)$$

После подстановки (8.2) в уравнение движения тела, получим:

$$m\vec{a}' + m\vec{a}_0 = \vec{F}, \quad (8.3)$$

откуда

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0. \quad (8.4)$$

Из (8.4) видно, что в штрихованной системе отсчета основное уравнение динамики изменилось. В НИСО произведение массы на ускорение тела не равно равнодействующей силе, действующей на тело со стороны других тел, но отличается от нее на величину, равную произведению массы тела на ускорение НИСО относительно ИСО, взятому со знаком минус. Если считать, что эта величина также является силой, вызванной ускоренным движением систем отсчета, то форма второго закона Ньютона сохранится и для описания движения тел в НИСО. Эту силу называют силой инерции $\vec{F}_и$. С учетом сделанного замечания второй закон Ньютона для НИСО можно сформулировать следующим образом: **произведение массы тела на ускорение равно сумме сил, определяемых взаимодействием тел, и сил инерции, действующих на тело в НИСО.** Согласно определению силы инерции для ее нахождения нужно найти разность ускорений тела в ИСО и НИСО, умножить на массу тела и взять полученное произведение со знаком минус. Введение сил инерции позволяет сохранить формализм второго закона Ньютона для описания движения тел в НИСО, при этом силы инерции уже нельзя рассматривать как результат взаимодействия определенных тел. Это обстоятельство приводит к тому, что третий закон Ньютона не выполняется в НИСО. Не выполняется в НИСО и первый закон Ньютона, так как тело, не

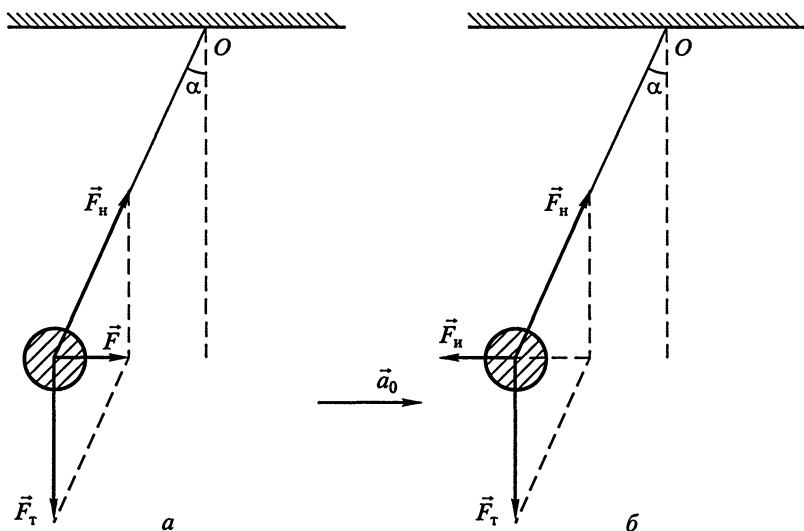


Рис. 8.2

взаимодействующее в НИСО с другими телами, движется в ней ускоренно.

Поясним возможность применения второго закона Ньютона с использованием сил инерции на конкретном примере.

Пусть на демонстрационной тележке укреплена рамка с подвешенным на ней маятником. Тележка приводится в ускоренное движение с помощью нити, переброшенной через блок, на конце которой подвешена гиря. При движении тележки с постоянным ускорением \vec{a}_0 относительно стола маятник отклонится назад под некоторым углом α к вертикали. Поведение маятника в инерциальной системе отсчета объясняется действием на маятник двух сил: силы тяжести $\vec{F}_g = m\vec{g}$ и силы натяжения нити \vec{F}_n , каждая из которых является результатом взаимодействия конкретных физических тел (рис. 8.2, а). По второму закону Ньютона сумма этих сил равна произведению массы маятника на его ускорение: $m\vec{a}_0 = m\vec{g} + \vec{F}_n$. Как видно из рисунка, $\text{tg } \alpha = a_0/g$.

С точки зрения наблюдателя, в НИСО тело покоится, сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю. Кроме силы тяжести и силы натяжения нити на тело действует сила инерции, равная $-m\vec{a}_0$. Векторная сумма этих сил равна нулю: $m\vec{g} + \vec{F}_n - m\vec{a}_0 = 0$ (рис. 8.2, б). Из рисунка видно, что $\text{tg } \alpha = a_0/g$, т. е. для значения угла отклонения маятника в НИСО получается величина, совпадающая со значением α в ИСО.

8.2. Равномерно вращающаяся система отсчета.

Центробежная сила инерции

Рассмотрим механические явления в равномерно вращающейся системе отсчета.

Поставим на столик центробежной машины узкий длинный сосуд с плоскими стенками, частично заполненный жидкостью, и укрепим на нем раму с несколькими маятниками. Сосуд совместим с одним из диаметров столика. Приведем машину в равномерное вращение вокруг вертикальной оси. При этом маятники отклонятся от вертикали, а уровень жидкости искривится (рис. 8.3).

Оба эффекта выражены тем сильнее, чем больше угловая скорость вращения прибора ω и чем дальше находятся маятники (или частицы жидкости) от оси вращения.

Обсудим эти явления в неподвижной ИСО и подвижной НИСО, связанной с вращающимся столиком.

а) *Неподвижная система (ИСО)*. Так как маятник вращается, то должна существовать сила \vec{F} , сообщающая ему центростремительное ускорение. Она возникает благодаря наклону нити подвеса (см. § 8.1). Для возникновения силы, сообщающей жидкости центростремительное ускорение, ее поверхность должна искривиться. Перемещение частиц жидкости происходит вследствие нарушения ее первоначального покоя.

Каковы условия равновесия отклоненного маятника? В устойчивом состоянии он находится на расстоянии ρ от оси вращения и отклонен на угол α (см. рис. 8.3). Поэтому сила, сообщающая маятнику центростремительное ускорение, равна:

$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_H = -m\omega^2\vec{\rho}. \quad (8.5)$$

Как видно из чертежа,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{F_T} = \frac{\omega^2 \rho}{g}, \quad (8.6)$$

и этим объясняется поведение маятников; для центрального маятника $\rho = 0$, и он не отклоняется от вертикали. Подобным же образом объясняется и поведение жидкости. Ее по-

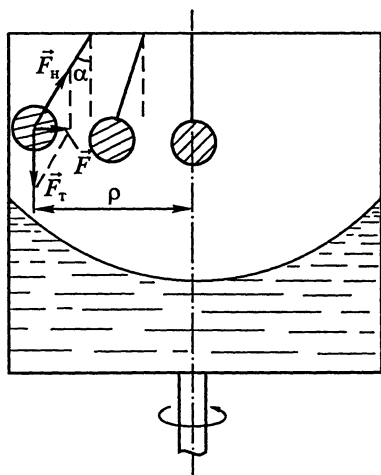


Рис. 8.3

верхность искривляется до тех пор, пока в каждой точке не будет выполняться условие (8.5), где роль силы натяжения играет сила реакции \vec{N} нижележащих слоев жидкости, нормальная к касательной поверхности в рассматриваемой точке (рис. 8.4, правая часть). Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{d\rho} = \frac{\omega^2 \rho}{g}. \quad (8.7)$$

Следовательно, сечение жидкости вертикальной плоскостью, проходящей через ось вращения, ограничено параболой

$$y = \frac{\omega^2 \rho^2}{2g},$$

а вся поверхность жидкости является параболоидом вращения.

б) *Подвижная система НИСО* – система отсчета, связанная с вращающимся столиком. Если мы хотим сохранить второй закон Ньютона, то должны ввести силу инерции $\vec{F}_{\text{цб}}$ (рис. 8.4, слева), удовлетворяющую условию

$$\vec{F}_{\text{цб}} + \vec{N} + m\vec{g} = 0.$$

Следовательно, получается:

$$\vec{F}_{\text{цб}} = -\vec{F} = m\omega^2 \vec{\rho}. \quad (8.8)$$

Эту силу принято называть *центробежной силой инерции*.

Из (8.8) следует, что центробежная сила инерции при медленных вращениях невелика. Именно поэтому вращение Земли вокруг своей оси (так же, как ее обращение вокруг Солнца) не сказывалось на проводившихся ранее опытах, как и на большинстве явлений, происходящих на Земле.

Если бы центробежная сила (НИСО) превысила силу тяготения тела, находящегося на экваторе, то тело не могло бы участвовать во вращении Земли и оторвалось бы от нее.

Необходимая для этого угловая скорость определяется условием

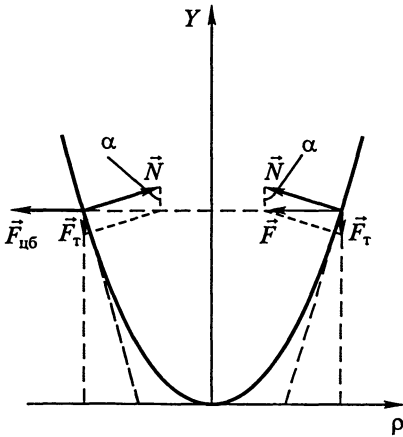


Рис. 8.4

$$m\omega^2 R = mg;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с.}$$

8.3. Силы инерции в произвольно движущейся НИСО

Рассмотрим силы инерции в произвольно движущейся НИСО. Произвольное движение НИСО всегда можно представить в виде суперпозиции поступательного и вращательного движений относительно ИСО. Как и раньше (см. 8.1),

$$\vec{R} = \vec{R}' + \vec{R}_0, \quad (8.9)$$

однако здесь орты $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ – функции времени, так как штрихованная система вращается с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через ее начало координат.

Дифференцируя (8.9) по времени, определим связь между абсолютной и относительной скоростями движения:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \right) + \left(x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) + \frac{d\vec{R}_0}{dt}. \quad (8.10)$$

Взяв производную по времени от (8.10), найдем связь между абсолютным и относительным ускорениями точки в инерциальной и неинерциальной системах координат:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = & \left(\frac{d^2x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{k}' \right) + \\ & + \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) + \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) + \\ & + \left(x' \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} \right) + \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Так как производная орта по времени равна векторному произведению вектора угловой скорости на орт, то

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}']; \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{j}']; \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{k}']. \quad (8.12)$$

Дифференцируя (8.12) по времени, получим:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} &= \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{i}'\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{i}'}{dt}\right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{i}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{i}']]; \\ \frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} &= \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{j}'\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{j}'}{dt}\right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{j}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{j}']]; \\ \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} &= \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{k}'\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{k}'}{dt}\right] = [\vec{\varepsilon}, \vec{k}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{k}']].\end{aligned}\quad (8.13)$$

С учетом (8.12) и (8.13) из (8.11) получим:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} &= \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right) + 2\left(\frac{dx'}{dt}[\vec{\omega}, \vec{i}'] + \frac{dy'}{dt}[\vec{\omega}, \vec{j}'] + \right. \\ &+ \left.\frac{dz'}{dt}[\vec{\omega}, \vec{k}']\right) + \{x'([\vec{\varepsilon}, \vec{i}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{i}']]) + y'([\vec{\varepsilon}, \vec{j}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{j}']]) + \\ &+ z'([\vec{\varepsilon}, \vec{k}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{k}']])\} + \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2}.\end{aligned}\quad (8.14)$$

После группировки слагаемых имеем:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} &= \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right) + 2\left(\frac{dx'}{dt}[\vec{\omega}, \vec{i}'] + \frac{dy'}{dt}[\vec{\omega}, \vec{j}'] + \right. \\ &+ \left.\frac{dz'}{dt}[\vec{\omega}, \vec{k}']\right) + (x'[\vec{\varepsilon}, \vec{i}'] + y'[\vec{\varepsilon}, \vec{j}'] + z'[\vec{\varepsilon}, \vec{k}']) + (x'[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{i}']] + \\ &+ y'[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{j}']] + z'[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{k}']]) + \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} = \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right) + \\ &+ 2\left(\frac{dx'}{dt}[\vec{\omega}, \vec{i}'] + \frac{dy'}{dt}[\vec{\omega}, \vec{j}'] + \frac{dz'}{dt}[\vec{\omega}, \vec{k}']\right) + [\vec{\varepsilon}, \vec{R}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{R}']] + \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2}.\end{aligned}\quad (8.15)$$

Введем стандартные обозначения: $d^2\vec{R}/dt^2 = \vec{a}_{\text{абс}}$ (абсолютное ускорение); $d^2x'/dt^2\vec{i}' + d^2y'/dt^2\vec{j}' + d^2z'/dt^2\vec{k}' = \vec{a}_{\text{отн}}$ (относительное ускорение); $dx'/dt = v'_{\text{отн}}$; $dy'/dt = v'_{y\text{отн}}$; $dz'/dt = v'_{z\text{отн}}$ (проекции относительной скорости); $d^2\vec{R}_0/dt^2 = \vec{a}_0$ и проведем соответствующие замены в (8.15):

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'_{\text{отн}}] + [\vec{\varepsilon}, \vec{R}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{R}']] + \vec{a}_0.\quad (8.16)$$

Второе слагаемое в выражении (8.16) называется кориолисовым ускорением $\vec{a}_{\text{кор}}$ по имени французского физика Кориолиса, впервые использовавшего это понятие в механике. Сумма последних трех слагаемых называется переносным ускорением $\vec{a}_{\text{пер}}$, так как оно зависит от характера переносного движения НИСО и ИСО. С учетом введенных понятий выражение (8.16) можно переписать следующим образом:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{кор}} + \vec{a}_{\text{пер}}, \quad (8.17)$$

где

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega}, \vec{v}'_{\text{отн}}]; \quad \vec{a}_{\text{пер}} = [\vec{\varepsilon}, \vec{R}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{R}']] + \vec{a}_0. \quad (8.18)$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$m\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{F}, \quad (8.19)$$

где \vec{F} – это сила, действующая на тело в ИСО.

Подставим (8.17) в (8.19) и выразим $m\vec{a}_{\text{отн}}$:

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}'_{\text{отн}}] - m\vec{a}_{\text{пер}}. \quad (8.20)$$

В этом случае на тело кроме внешней силы \vec{F} действуют две силы инерции: сила инерции Кориолиса

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}'_{\text{отн}}] \quad (8.21)$$

и переносная сила инерции $\vec{F}_{\text{пер}}$, которая состоит из трех слагаемых:

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m[\vec{\varepsilon}, \vec{R}'] + m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{R}']] + m\vec{a}_0. \quad (8.22)$$

Первое слагаемое в (8.22), зависящее от вращательного ускорения $[\vec{\varepsilon}, \vec{R}']$, не имеет своего названия; второе слагаемое, зависящее от осецистремительного ускорения $[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{R}']]$, называется центробежной силой инерции, третье, зависящее от ускорения подвижного начала НИСО \vec{a}_0 , называется силой инерции поступательного движения.

Сила инерции Кориолиса перпендикулярна как направлению угловой скорости, так и направлению относительной скорости движения тела; ее направление определяется по правилу векторного произведения из (8.21).

Уравнение (8.20) представляет собой математическую формулировку основного уравнения динамики для материальной точки в НИСО.

Рассмотрим пример описания движения материальной точки массой m , имеющей скорость относительного движения в равномерно вращающейся системе отсчета, равной по модулю $v'_{\text{отн}}$ и направленной по радиусу от оси вращения.

С точки зрения наблюдателя в ИСО тело будет двигаться ускоренно, так как на него действует сила, равная $-m\omega^2\vec{R}$, которая

создает центростремительное ускорение, и сила, равная $2m[\vec{\omega}, \vec{v}'_{отн.}]$, которая создает кориолисово ускорение. Эти силы вызываются взаимодействием движущегося тела со связью, обеспечивающей движение тела по определенной траектории. С точки зрения наблюдателя в НИСО движение тела равномерное, поэтому сумма сил, действующих на тело, включая центробежную силу инерции и силу Кориолиса, будет равна нулю. Траектория движения тела в НИСО – прямая линия.

Так как Земля вращается относительно оси, проходящей через ее центр, то система отсчета, связанная с Землей, является неинерциальной. Следовательно, в ней должно проявляться действие сил инерции. Действительно, существует ряд явлений, таких, например, как зависимость веса тела от широты места; отклонение тел, брошенных вертикально вниз, к востоку и к экватору; поворот плоскости колебаний маятника Фуко, которые можно объяснить действием сил инерции. Рассмотрим проявление сил инерции на Земле более подробно.

8.4. Проявление сил инерции на Земле

При описании механических явлений на Земле необходимо учитывать ее суточное вращение. Рассмотрим зависимость веса тела на поверхности Земли от широты места. Примем Землю за однородный шар радиусом R_3 . Как известно, однородный шар притягивает тела с силой тяготения \vec{F}_T , направленной строго к центру и зависящей от расстояния до центра. Из рис. 8.5 видно, что на тело, находящегося

на широте φ на поверхности Земли, действуют силы тяготения \vec{F}_T , сила реакции опоры \vec{N} и центробежная сила инерции $m\omega^2\vec{R}_0$, где \vec{R}_0 – радиус-вектор, проведенный по нормали от оси вращения Земли в место расположения тела. Модуль R_0 равен радиусу Земли R_3 , умноженному на $\cos \varphi$. Сумма этих сил равна нулю:

$$\vec{F}_T + \vec{N} + m\omega^2\vec{R}_0 = 0. \quad (8.23)$$

Вес тела $\vec{P} = -\vec{N}$, следовательно, из (8.23) имеем:

$$\vec{P} = \vec{F}_T + m\omega^2\vec{R}_0, \quad (8.24)$$

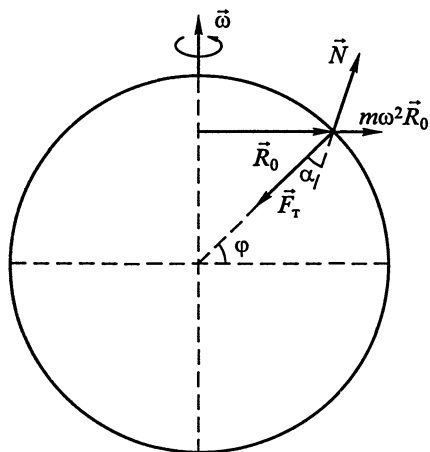


Рис. 8.5

или с учетом того, что $F_T = mg_T$, где g_T – ускорение, создаваемое силой тяжести на широте места φ , получим:

$$\vec{P} = m\vec{g}_T + m\omega^2\vec{R}_0 = m(\vec{g}_T + \omega^2\vec{R}_0) = m\vec{g}, \quad (8.25)$$

где \vec{g} – ускорение свободного падения на широте φ .

Из (8.25) видно, что вес тела, вообще говоря, не совпадает по направлению с силой тяжести, и только при значениях φ , равных нулю (на экваторе) и 90° (на полюсе), наблюдается совпадение направления силы тяготения и веса. Так как положение отвеса в поле тяжести Земли определяется весом, то его направление в общем случае не будет совпадать с направлением действия на тело силы тяготения. Для сферически-симметричной формы Земли угол α , характеризующий отклонение отвеса от направления радиуса Земли (см. рис. 8.5), можно определить из выражения

$$\sin \alpha = \frac{\omega^2 R_3 \cos \varphi \sin \varphi}{g} = \frac{\omega^2 R_3 \sin 2\varphi}{2g}. \quad (8.26)$$

Наибольшим отклонение отвеса от направления радиуса Земли будет на широте 45° . На полюсе и на экваторе Земли отклонение отвеса равно нулю. При этом на полюсе ускорение свободного падения равно ускорению, создаваемому силой тяжести, а на экваторе меньше его на величину $\omega^2 R_3$. Принимая средний радиус Земли $R_3 = 6,4 \cdot 10^6$ м, находим $\omega^2 R_3 = (7,3 \cdot 10^{-5}) \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ м/с}^2 = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$, что составляет 0,3% ускорения свободного падения.

Считая, что угол α небольшой, можно получить для ускорения свободного падения выражение, определяющее его зависимость от широты места:

$$g = g_T - \omega^2 R_3 \cos^2 \varphi. \quad (8.27)$$

Это незначительное влияние собственного вращения Земли могло бы быть измерено современными методами без труда. К сожалению, оно маскируется влиянием других причин – нестрогой шарообразностью Земли и ее неоднородностью. Известно, что полярный радиус Земли меньше экваториального примерно на 0,3%. Поэтому ускорение свободного падения, зависящее от радиуса, на экваторе меньше, чем на полюсе. Различие составляет около 0,6%, что вдвое превышает уменьшение ускорения, обусловленное собственным вращением Земли.

Экспериментальные измерения ускорения свободного падения показали, что на полюсе $g_p = 9,832 \text{ м/с}^2$, а на экваторе $g_e = 9,780 \text{ м/с}^2$.

Другим эффектом, связанным с вращением Земли, является отклонение свободно падающих тел от направления отвеса к востоку и эк-

ватору. Это явление можно объяснить действием на падающее тело наряду с силой тяжести еще и силы инерции Кориолиса. Ускорение тела в этом случае в системе отсчета, связанной с Землей, будет равно сумме ускорения свободного падения и кориолисова ускорения:

$$\vec{a} = \vec{g} + 2[\vec{v}'_{\text{отн}}, \vec{\omega}]. \quad (8.28)$$

Предположим, что тело падает свободно в поле тяжести Земли с нулевой начальной скоростью. Из (8.28) видно, что в начале движения ускорение тела определяется ускорением свободного падения. По мере увеличения скорости движения кориолисово ускорение будет возрастать и кориолисова сила инерции будет отклонять падающее тело к востоку и к экватору от направления отвеса.

Действие силы инерции Кориолиса проявляется в повороте плоскости качания математического маятника с большой добротностью. Впервые этот эффект наблюдал французский физик Фуко в 1850 г.

Модель опыта Фуко легко показать, установив на столике центробежной машины вертикальную рамку и укрепив на ней маятник (рис. 8.6). Заставим маятник качаться в плоскости рамки и начнем медленно поворачивать столик вокруг вертикальной оси. При этом плоскость колебаний маятника сохраняет свое положение относительно стен комнаты, а плоскость рамки последовательно занимает положения O_3O_6 , O_4O_1 , O_5O_2 .

С точки зрения наблюдателя в неподвижной системе (ИСО) это вполне понятно: маятник не участвует во вращении столика, а последний поворачивается в пространстве. С точки зрения наблюдателя в подвижной системе (НИСО) плоскость колебаний маятника поворачивается и, следовательно, на маятник действует сила инерции Кориолиса (наблюдатель не видит рамки).

Реальный опыт Фуко, доказывающий суточное вращение Земли, удастся в высокой аудитории с большим маятником (длиной несколько метров). Для фиксации плоскости колебаний маятника его освещают сильным источником света в первоначальной плоскости качаний; полученную на экране тень нити подвеса отмечают, например, цветной чертой.

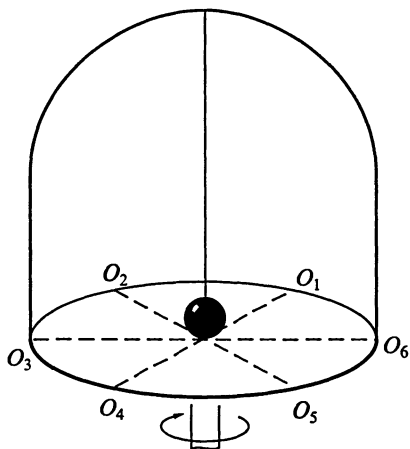


Рис. 8.6

При первых колебаниях тень нити совпадает с этой чертой. Но через 5–10 мин Земля успевает повернуться на $1-2^\circ$ и смещение тени становится вполне отчетливым. Чтобы запустить маятник без случайного бокового толчка (толчок исказил бы результаты опыта), маятник закрепляют в положении наибольшего отклонения петель из тонкой нити, а затем нить пережигают.

Наблюдатель видит постепенный поворот плоскости колебаний маятника вокруг вертикали, проходящей через точку подвеса маятника и, следовательно, относительно стен здания, где находится маятник.

Легко сообразить, что для наблюдателя, находящегося на Земле, на полюсе плоскость колебаний поворачивается с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли.

При этом вектор $\vec{\omega}$ и вертикаль параллельны друг другу (рис. 8.7), так как все меридиональные плоскости пересекаются по оси вращения Земли. Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{v}'_{отн}$ при этом взаимно перпендикулярны. Если же маятник находится в точке с географической широтой φ , то нужно учитывать вертикальную (для данной точки) компоненту вектора $\vec{\omega}$:

$$\omega_\varphi = \omega \sin \varphi.$$

Она и определит угловую скорость поворота плоскости качания маятника.

На экваторе маятник, колеблющийся в плоскости меридиана, не будет подвержен действию силы Кориолиса, так как векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{v}'_{отн}$ параллельны.

Если маятник качается в плоскости экватора, то сила Кориолиса направлена по радиусу Земли и в зависимости от направления скорости $\vec{v}'_{отн}$ кориолисово ускорение то будет прибавляться к ускорению свободного падения, то вычитаться из него. Поэтому периоды колебаний двух одинаковых маятников, колеблющихся на экваторе в его плоскости и в плоскости меридиана, различны. Однако это различие настолько мало, что его невозможно обнаружить в лекционном опыте. Подчеркнем, что последние рассуждения об опыте Фуко мы вели в НИСО.

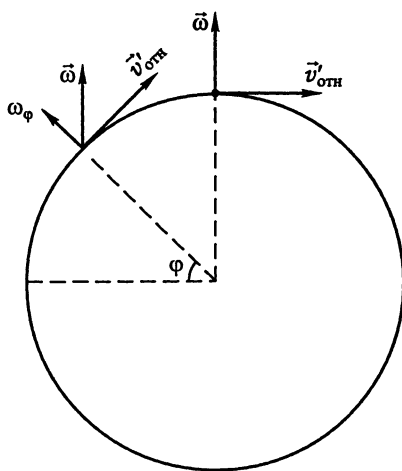


Рис. 8.7

8.5. Эквивалентность сил инерции и сил тяготения

Для описания движения тел в НИСО вводятся силы инерции, пропорциональные инертной массе тела. Все тела под действием сил инерции будут двигаться в выбранной НИСО с одинаковыми ускорениями. Ситуация аналогична той, которая наблюдается при движении тел в поле тяжести Земли. Нам уже известно из результатов многочисленных экспериментов, что все тела на Земле под действием силы тяжести движутся с одинаковым ускорением. После выхода человека в космическое пространство, создания внеземных космических станций подобного рода эксперименты были проведены и вне Земли и дали аналогичные результаты.

Это обстоятельство позволяет утверждать, что массы гравитационная и инертная любого тела пропорциональны друг другу. Ниже мы рассмотрим ряд физических экспериментов, с высокой точностью доказавших равенство гравитационной и инертной масс. При надлежащем выборе единиц этих величин можно считать их просто равными друг другу. Физическая эквивалентность гравитационной и инертной масс позволяет рассматривать силы инерции как разновидность сил тяжести, возникающих всякий раз, когда тело движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчета. Уравнения движения тел в НИСО подтверждают такую точку зрения. Если бы можно было создать такие условия, при которых силы тяготения были подобны по своей конфигурации силам инерции, движение тел под действием сил тяготения не отличалось бы от движения в НИСО под действием сил инерции.

А. Эйнштейн предположил, что не только механические явления протекают одинаково под действием сил инерции и тяготения, но и любые физические процессы и явления под действием сил тяготения и сил инерции в замкнутых системах протекают совершенно одинаково при одинаковых начальных условиях. Это утверждение и составляет содержание принципа эквивалентности сил инерции и сил тяготения.

Если силы тяготения и силы инерции однородны в некоторой области пространства, то они могут скомпенсировать друг друга. В этом случае наблюдается невесомость, и системы отсчета, связанные с телами, находящимися в состоянии невесомости, можно рассматривать как инерциальные системы отсчета. Инерциальность подобных систем отсчета наблюдается только в ограниченной области пространства, поэтому их называют локально инерциальными системами отсчета. Примером локально инерциальной системы отсчета может служить система отсчета, связанная с кабиной космической орбитальной станции.

8.6. Законы сохранения в НИСО

Как видно из соотношения (8.20), выражающего основной закон динамики для НИСО, силы инерции играют роль внешних сил при описании движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета. Это обстоятельство определяет условия выполнения законов сохранения в НИСО.

Запишем второй закон Ньютона для НИСО в виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_n, \quad (8.29)$$

здесь \vec{p}' – импульс тела в НИСО, \vec{F} – равнодействующая сила, действующая на тело со стороны взаимодействующих с ним других тел, \vec{F}_n – результирующая сила инерции. Из выражения (8.29) видно, что в случае, если сумма всех сил, действующих на тело в НИСО, включая силы инерции, будет равна нулю, то изменение импульса тела со временем также равно нулю. В этом случае импульс тела не будет изменяться во время движения, т. е. $\vec{p}' = \text{const}$.

Для рассмотрения изменения кинетической энергии тела в НИСО умножим скалярно левую и правую части (8.29) на $d\vec{R}'$. После умножения получим:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{R}' = \vec{F} \cdot d\vec{R}' + \vec{F}_n \cdot d\vec{R}'. \quad (8.30)$$

Так как $d\vec{R}' = \vec{v}' dt$, то левая часть (8.30) представляет собой приращение кинетической энергии тела в НИСО, а правая – работу внешних сил и сил инерции, действующих на тело в НИСО. Так как сила инерции Кориолиса работы не производит из-за взаимной перпендикулярности этой силы и вектора относительной скорости, то работа сил инерции будет определяться только работой переносной силы инерции. Таким образом, для изменения кинетической энергии тела в НИСО можно записать следующее выражение:

$$dK' = \vec{F} \cdot d\vec{R}' + \vec{F}_{\text{пер}} \cdot d\vec{R}'. \quad (8.31)$$

Если правая часть полученного выражения равна нулю, то кинетическая энергия тела в НИСО изменяться не будет.

Умножим векторно \vec{R}' на (8.29), тогда получится выражение, определяющее изменение момента импульса тела \vec{L}' относительно начала координат в НИСО:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M} + \vec{M}_n, \quad (8.32)$$

где $\vec{M} = [\vec{R}', \vec{F}]$ – момент внешних сил, действующих на тело в НИСО, $\vec{M}_и = [\vec{R}', \vec{F}_и]$ – момент сил инерции, действующих на тело в НИСО. При равенстве суммы моментов сил взаимодействия и сил инерции нулю момент импульса тела не будет изменяться со временем в НИСО. Если выбрать начало отсчета НИСО в точке, совпадающей с центром масс системы материальных точек или твердого тела, то момент сил инерции будет равен нулю, так как точка приложения равнодействующей всех сил инерции совпадает с центром масс. Именно поэтому при описании движения твердого тела мы выбрали начало отсчета НИСО в центре масс этого тела, что позволяло не учитывать в расчетах действия момента сил инерции.

Глава 9

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

9.1. Границы применимости классической механики

Классическая механика Ньютона превосходно объясняет весь широкий круг явлений макроскопического масштаба. На следствиях из законов Ньютона основана почти вся современная техника. Однако уже в конце XIX в. выяснилось, что выводы механики противоречат некоторым опытным данным, и возник вопрос о границах применимости механики Ньютона.

В частности, при изучении движения быстрых заряженных частиц – электронов ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг) – оказалось, что их движение не подчиняется законам механики. Действуя электрическим полем на электрон (с ничтожно малой начальной скоростью), можно сообщить ему кинетическую энергию за счет работы электрических сил.

Если свободный электрон пройдет в электрическом поле разность потенциалов U , то конечную скорость v можно вычислить из классического уравнения

$$A = eU = K = \frac{1}{2} m_0 v^2, \quad (9.1)$$

где A – работа сил электростатического поля. Отсюда

$$v = \sqrt{2U \frac{e}{m_0}}. \quad (9.2)$$

Пусть затем электрон, двигаясь по инерции, попадет на экран Э, покрытый слоем вещества, светящегося при торможении электронов; на экране появится светящаяся точка A (рис. 9.1) (в действительности опыт проводится не с единственным электроном, а с узким электронным пучком; но взаимодействие электронов друг с другом в условиях опыта несущественно).

Заставим пучок, летящий к экрану, пройти между пластинами заряженного плоского конденсатора, в котором создано электроста-

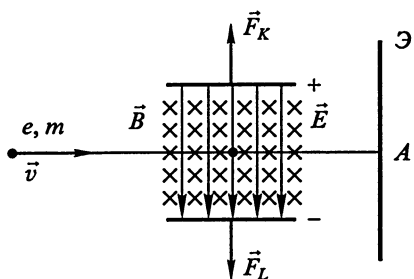


Рис. 9.1

тическое поле напряженностью \vec{E} ; на электрон подействует кулоновская сила (см. рис. 9.1)

$$\vec{F}_K = e\vec{E}.$$

Перпендикулярно плоскости чертежа можно создать магнитное поле с индукцией \vec{B} , направленной за чертеж. Тогда электрон испытает дополнительно еще воздействие магнитной составляющей силы Лоренца

$$\vec{F}_L = e[\vec{v}, \vec{B}].$$

При этом след пучка как-то сместится по экрану трубки. Но можно подобрать условия опыта так, чтобы силы стали равными по модулю и антипараллельными:

$$eE = evB. \quad (9.3)$$

Тогда след пучка вернется в точку A . Из уравнения (9.3) можно найти скорость электрона

$$v = \frac{E}{B},$$

так как E и B поддаются измерению, и сравнить с теоретическим значением (9.2).

На рис. 9.2 приведены результаты подобных опытов, проведенных впервые в самом начале XX в. Квадрат расчетной скорости v^2 в функции U представляется наклонной прямой линией 1. Графиком квадрата истинной скорости является кривая 2; сопоставление графиков показывает, что при малых скоростях механика Ньютона хорошо отвечает опытам; но при скоростях, приближающихся к скорости света в вакууме, действительная скорость растет гораздо медленнее расчетной и не превышает скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Расхождение теории с опытом можно было приписать трем причинам:

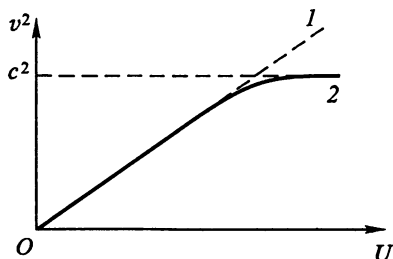


Рис. 9.2

- а) уменьшению заряда электрона;
- б) увеличению массы электрона;
- в) неприменимости механики Ньютона к столь быстрым движениям.

Множество специальных экспериментов и опытных данных свидетельствуют о неизменности заряда. Один из самых убедительных аргументов: если бы заряд зависел от скорости, то атомы не могли бы быть нейтральными, так как электроны движутся относительно ядра с различными и сопоставимыми со скоростью света скоростями; но нейтральность атомов проверена с высокой точностью.

Анализируя результаты описанных здесь и других опытов (в частности, оптических, рассмотрение которых возможно только в «Опике и атомной физике»), физики начала XX в. пришли к выводу, что для согласования опытов с теорией следует приписать электрону импульс

$$\vec{p} = m_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (9.4)$$

(здесь $\beta = \frac{v}{c}$), отличающийся от классического импульса $\vec{p}_0 = m_0 \vec{v}$

множителем $(1-\beta^2)^{-1/2}$, и истолковали этот результат как возрастание массы электрона со скоростью; это возрастание заметно только при скоростях, близких к скорости света (табл. 9.1).

Таблица 9.1

$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{p}{p_0}$	$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{p}{p_0}$
10^{-5}	$1 + 1 \cdot 10^{-10}$	0,99	7,09
10^{-2}	$1 + 5 \cdot 10^{-5}$	0,995	10,01
0,1	1,0005	$1 - 5 \cdot 10^{-5}$	100
0,5	1,155	$1 - 5 \cdot 10^{-7}$	1000
0,9	2,294	$1 - 5 \cdot 10^{-9}$	10000
0,95	3,202	$1 - 5 \cdot 10^{-11}$	1 000 000

Из таблицы видно, что при значениях β , близких к единице, введение поправки совершенно необходимо.

В технике с этой поправкой приходится считаться, например, при расчете современных ускорителей заряженных элементарных частиц.

В настоящее время, после создания специальной теории относительности, единственно правильным является утверждение, что при $v \rightarrow c$ механика Ньютона становится неприменимой к описанию явлений. Однако по привычке физики часто говорят о «зависимости массы от скорости».

Затруднения возникли также при попытках применить механику Ньютона к вопросам распространения света. По Ньютону, скорость света, измеренная в ИСО, должна зависеть от относительной скорости движения источника и приемника. По образному выражению Эйнштейна, если «бежать навстречу свету», то его относительная скорость должна возрасти; если же «убегать от света», то она должна уменьшиться. Однако ряд очень тонких опытов (они будут рассмотрены в «Оптика и атомной физике») показал, что определяемая в этих условиях скорость света в вакууме остается постоянной и равной c .

Для объяснения этих (и некоторых других) опытных результатов нужно было создать новую теорию, которая, объясняя эти факты, содержала бы ньютоновскую механику как предельный случай для малых скоростей ($\beta \ll 1$).

Это и удалось сделать в 1905 г. А. Эйнштейну (1879–1955). Новая, релятивистская (от лат. *relativus* – относительный), механика получила название специальной (частной) теории относительности (СТО).

Для лучшего понимания новизны идей Эйнштейна вспомним еще раз основы механики Ньютона.

9.2. Механика Ньютона и принцип относительности Галилея

В основе механики Ньютона лежит представление об абсолютности однородного и изотропного пространства, а также об абсолютности однородного времени. Их свойства не зависят от присутствия вещества и происходящих физических процессов.

Для описания физических процессов необходимо выбрать систему отсчета (оси координат и часы), в которой будет производиться описание.

Механика Ньютона выделяет инерциальные системы отсчета (ИСО), движущиеся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, и утверждает их равноправие: во всех таких системах выполняются законы Ньютона и форма их записи не изменяется. Для дальнейшего важно утверждение, что никакими механическими опытами, проведенными внутри ИСО, нельзя обнаружить ее движе-

ние. Это важное утверждение называют *принципом относительности Галилея* (или механическим принципом относительности).

При исследовании движений приходится иногда переходить от одной системы отсчета (с координатной системой $OXYZ$) к другой системе отсчета (с координатной системой $O'X'Y'Z'$), причем вторая система отсчета движется относительно первой равномерно и прямолинейно со скоростью \vec{v} .

В § 2.6 были рассмотрены преобразования Галилея. Выяснилось, что координаты и скорости точек при этих преобразованиях изменяются, при этом действует закон сложения скоростей Галилея:

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}; \quad \vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}; \quad (9.5)$$

здесь \vec{u}' и \vec{u} – скорости точки в обеих системах координат. Но расстояние между двумя точками и промежуток времени между двумя событиями оказались неизменными:

$$\Delta \vec{R} = \Delta \vec{R}'; \quad \Delta t = \Delta t'. \quad (9.6)$$

Ускорения точки в обеих системах отсчета одинаковы:

$$\vec{a} = \vec{a}'.$$

Так как массы в механике Ньютона не зависят от выбора системы отсчета (т. е. от движения тел), то во всех ИСО изменения импульса во времени также одинаковы:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt = d\vec{p}' = \vec{F}'dt. \quad (9.7)$$

Следовательно, в соответствии со вторым законом во всех ИСО одинаковы и силы:

$$\vec{F} = \vec{F}'.$$

Далее, в механике Ньютона предполагается, что взаимодействие передается мгновенно, с бесконечно большой скоростью. Действительно, пусть в момент t положение взаимодействующих тел изменится. Возникает вопрос: сразу ли это изменение скажется на силах, действующих на тело? Судя по записи закона, сразу. Но если скорость распространения взаимодействия конечна, то должно возникнуть некоторое запаздывание. Если изменение положения тел произошло в момент t , то ускорение должно относиться к более позднему моменту $t + \frac{R}{c_1}$, где R – расстояние между взаимодействующими объектами, c_1 – скорость передачи взаимодействия.

Представление о бесконечной скорости облегчает решение механических задач: достаточно иметь для всех систем отсчета одни-

единственные часы и посылать сигналы времени – они везде будут приниматься мгновенно, так как время во всех ИСО одинаково.

Бесконечно большое значение скорости распространения взаимодействия принималось физикой XVII – XIX вв., но не было (и не могло быть) проверено на опыте тогдашними средствами. Пока изучались медленные движения, это допущение не вело к противоречию с опытом.

Из абсолютности времени следует также, что два физических явления (события), одновременные в одной системе отсчета, будут таковыми же и в другой. Это очевидно для событий, происходящих в одном месте. Но для событий, происходящих в разных местах, это утверждение совсем не очевидно; оно основано на допущении бесконечной скорости распространения взаимодействий (значит, и сигналов).

9.3. Принцип относительности Эйнштейна

Анализируя основы механики Ньютона, А. Эйнштейн пришел к заключению, что *представление об абсолютности пространства и времени ошибочно*; например, расстояния между двумя точками или же промежутки времени между двумя событиями должны зависеть от движения наблюдателя, производящего измерения.

По Эйнштейну, всякое физическое явление (событие) должно описываться зависящими друг от друга пространственными координатами и временной координатой, определяющими место и время совершения события, причем следует учитывать скорость распространения сигналов. *Представление об абсолютности одновременности также ошибочно и должно быть пересмотрено.*

В основу своей теории, созданной в 1905 г., Эйнштейн положил два постулата.

1. Взаимодействия передаются с конечной скоростью, причем существует предельная скорость передачи взаимодействий (или сигналов), равная скорости света c в вакууме. Измеряемая во всех опытах скорость света в вакууме не зависит от относительного движения источника сигналов и их приемника и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Этот постулат – результат обобщения точных измерений скорости света в движущихся системах отсчета, выполненных к этому времени в оптических экспериментах.

2. Любое физическое явление *во всех инерциальных системах* протекает (при одинаковых условиях) одинаково.

Напомним, что Галилей утверждал то же самое, но лишь для механических явлений.

Ньютон и его последователи сохранили принцип Галилея для механических явлений. В те времена физики считали, что все явления могут быть сведены к механическим. Такое представление сохранилось до конца XIX в. Когда же выяснилось, что это невозможно, то для сохранения равноправия всех ИСО оказалось необходимым принцип Галилея заменить более общим принципом, охватывающим все физические явления (события). Понадобился гений Эйнштейна, чтобы сделать это обобщение.

Равноправие ИСО означает, что основные уравнения механики (и электродинамики), записанные с учетом постоянства скорости света, должны сохранять свой вид во всех инерциальных системах.

Во время создания специальной теории относительности уже были известны фундаментальные законы электродинамики, выраженные в уравнениях электромагнитного поля, написанных Максвеллом. Они не сохраняли форму при преобразованиях Галилея. Законы Ньютона в классической форме сохраняли свой вид при галилеевских преобразованиях. Следовательно, нужно было отказаться или от уравнений Максвелла, или от преобразований Галилея, или от формы законов Ньютона.

Эйнштейн пошел по второму пути. Он заменил преобразования Галилея иными (преобразованиями Лоренца) и получил новое выражение для механического импульса. Тогда и уравнения механики, и уравнения электродинамики удовлетворили постулатам Эйнштейна и преобразованиям Лоренца.

Особое значение Эйнштейн придавал понятию одновременности двух пространственно удаленных событий. Рассмотрим ход его рассуждений.

Прежде всего, коль скоро сигнал распространяется с конечной скоростью, уже нельзя обойтись одними часами в двух инерциальных системах отсчета. Напротив, в каждой из них должно быть поставлено множество часов, идущих одинаково точно и синхронно (т. е. показывающих в любой данный момент одно и то же время). В системе отсчета, где часы покоятся, можно обеспечить одинаковость хода часов, измеряя промежуток времени, в течение которого происходит группа событий, например излучение определенного числа световых волн атомами какого-либо газа (именно так и устанавливается в наше время эталон времени). Все часы регулируются до тех пор, пока измеренная ими длительность процесса не будет совпадать с длительностью, измеренной эталонными часами.

Для синхронизации отрегулированных часов Эйнштейн предложил следующую мысленную операцию. Два наблюдателя (в системе, где часы неподвижны) располагаются в двух точках системы. Они имеют зеркала, обращенные друг к другу и параллельные друг

другу, и часы. Старший наблюдатель с часами, источником световых сигналов и приспособлениями для их приема располагается на прямой, соединяющей младших наблюдателей, и посылает сигналы. Они отражаются от зеркал младших наблюдателей и возвращаются к старшему, который меняет свое положение до тех пор, пока сигналы не вернутся к нему одновременно, т. е. когда он будет как раз посередине между младшими наблюдателями. Тогда он посылает в момент t по своим часам еще один сигнал и определяет момент его возвращения $t + 2\Delta t$. Значит, сигнал распространяется в одну сторону (к младшим наблюдателям) за промежуток времени Δt . Теперь старший наблюдатель приказывает младшим в момент получения ими еще одного сигнала установить на своих часах показания, равные t_1 , а сам посылает сигнал в момент $t_1 - \Delta t$.

Таким способом можно синхронизировать все часы в данной ИСО. Такая же операция производится с часами, неподвижными в другой ИСО. Для синхронизации часов обеих систем старшие наблюдатели располагаются в началах координат и в момент пространственного совпадения последних устанавливают на своих часах одинаковые показания (разумеется, эта операция предшествует операции, обеспечивающей общую синхронизацию всех часов).

9.4. Относительность длин и длительностей. Интервал

Рассмотрим теперь две неподвижные друг относительно друга ИСО (рис. 9.3); направления одноименных осей координат совпадают; в обеих системах имеются отрегулированные и синхронизированные часы. В начале координат штрихованной системы располагается источник света. В этой же системе имеются зеркала 1 и 2, перпендикулярные оси абсцисс, и зеркала 3 и 4, перпендикулярные оси ординат. Расстояния между зеркалами равны h . В момент $t = 0$ из начала координат O' посылаются кратковременные сигналы в направлениях X' и Y' . Отразившись от соответствующих зеркал, они возвращаются к началу координат O' через промежуток времени

$$t'_x = t'_y = t_0 = \frac{2h}{c}, \quad (9.8)$$

что и отмечается наблюдателем A , связанным с точкой O' . При этом он утверждает, что сигналы достигали зеркал 2 и 4 через промежуток времени

$$t'_2 = t'_4 = 0,5t_0 = \frac{h}{c}.$$

Такие же заключения сделает и наблюдатель B , связанный с началом O нештрихованной системы координат, совпадающим в момент $t = 0$ с началом O' , так как эта система также неподвижна.

Как опишут эти же события наблюдатели, если в момент $t = 0$ штрихованная система будет двигаться относительно нештрихованной системы равномерно и прямолинейно со скоростью \vec{v} , параллельной оси абсцисс?

Наблюдатель A , связанный со штрихованной системой, останется при прежних утверждениях. Наблюдатель B , связанный с нештрихованной системой, находясь на позициях классической физики, должен рассуждать так: свет распространяется в «световом эфире» (гипотетическая среда, введенная физиками XVII – XIX вв., не допуская существования вакуума) со скоростью c . Эфир заполняет все пространство. Распространение света подчиняется закону сложения скоростей Галилея. Следовательно, к зеркалу 2 свет движется со скоростью

$$c_2 = c - v$$

и достигает его через промежуток времени

$$t_2 = \frac{h}{c - v}.$$

После отражения его скорость становится равной $c + v$ и для возвращения к зеркалу 1 потребуется время

$$t_1 = \frac{h}{c + v}.$$

Общее время движения сигнала есть

$$t_x = t_1 + t_2 = \frac{2hc}{c^2 - v^2} = \frac{2h}{c} \frac{1}{(1 - \beta^2)},$$

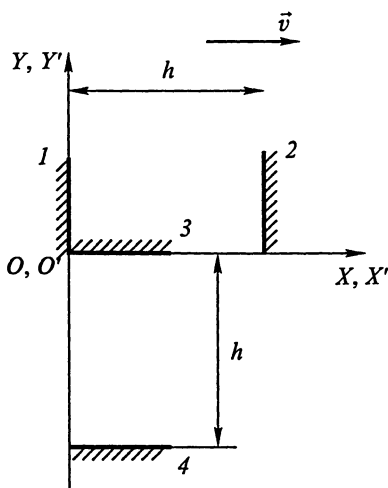


Рис. 9.3

где

$$\beta = \frac{v}{c} < 1.$$

Поэтому с точки зрения наблюдателя B получается:

$$t_x > t'_x.$$

Что касается сигнала, идущего к зеркалу 4, то для неподвижного наблюдателя распространение происходит в соответствии с рис. 9.4. Свет распространяется по гипотенузе треугольника со сторонами h и vt_4 . Поэтому свет достигнет зеркала 4 через промежуток времени

$$t_4 = \frac{h}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Такое же время требуется и на возвращение сигнала к зеркалу 3, так что общее время движения сигнала

$$t_y = t_3 + t_4 = \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.10)$$

Итак, неподвижный наблюдатель, мыслящий классически, приходит к выводу о неодновременности возвращения сигналов:

$$t_x \neq t_y. \quad (9.11)$$

Однако анализ весьма точных оптических опытов, повторявшихся со все большей точностью, показал, что в рассматриваемом выше опыте должно получаться

$$t_x = t_y.$$

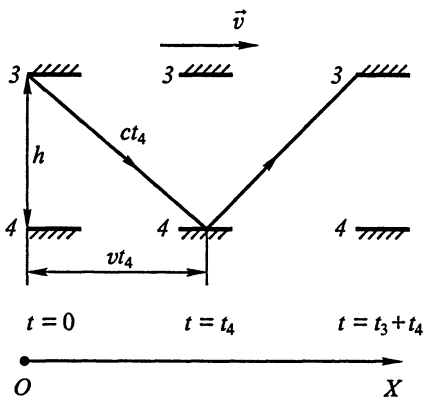


Рис. 9.4

Таким образом, классический способ расчета, при котором предполагалось, что закон сложения скоростей Галилея и расстояния между зеркалами сохраняются при переходе от движущейся системы к неподвижной, привел к противоречию с опытом.

Объясним теперь рассмотренные выше эксперименты с точки зрения СТО, учтя первый

постулат (см. § 9.3). Для отличия от ранее написанных формул будем обозначать промежутки времени прописными буквами T_i , а расстояния — H .

Расчет времени распространения светового сигнала вдоль оси X поясняется рис. 9.5: пока свет дойдет до зеркала 2, оно успеет сместиться на расстояние vT_2 . Поэтому путь, пройденный светом, есть

$$cT_2 = H_x + vT_2; \quad T_2 = \frac{H_x}{c-v}.$$

Возвращаясь к зеркалу 1, свет пройдет путь

$$cT_1 = H_x - vT_1;$$

поэтому время его возвращения

$$T_1 = \frac{H_x}{c+v}$$

и полная продолжительность процесса, когда свет распространяется вдоль оси абсцисс,

$$T_x = T_1 + T_2 = \frac{2H_x}{c} \frac{1}{1-\beta^2}. \quad (9.12)$$

Распространению света между зеркалами 3 и 4 по-прежнему соответствует рисунок 9.4 (с измененными обозначениями). Полная продолжительность этого процесса

$$T_y = \frac{2H_y}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.13)$$

Но так как вдоль оси Y зеркала не движутся, то

$$H_y = H = h. \quad (9.14)$$

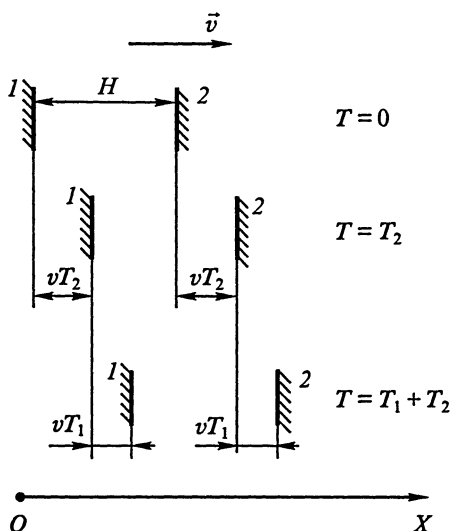


Рис. 9.5

Согласно данным опыта продолжительность обоих процессов одинакова:

$$T_x = T_y.$$

Поэтому должно быть:

$$H_x = h\sqrt{1-\beta^2}, \quad (9.15)$$

т. е. если наблюдатель измеряет длину движущегося мимо него отрезка, расположенного вдоль направления движения, то он получит меньшее значение, чем при измерении длины того же неподвижного отрезка.

Подставив (9.15) в (9.12), получим значение T_x , измеренное наблюдателем B (в нештрихованной системе):

$$T_x = \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Сравнивая с (9.8), получаем:

$$T_x = t_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (9.16)$$

т. е. эта длительность больше, чем длительность, измеренная наблюдателем A (в штрихованной системе):

$$T_x > t_0.$$

Длина пути, пройденного световым сигналом, с точки зрения наблюдателя B , как видно из рис. 9.5, равна:

$$x = 2H_x + vT_2 - vT_1 = 2H_x + \frac{vH_x}{c-v} - \frac{vH_x}{c+v} = \frac{2H_x}{1-\beta^2}.$$

При этом скорость света оказывается равной (см. 9.12):

$$c_x = \frac{x}{T_x} = c,$$

как это и должно быть.

Что касается промежутка времени T_y , то, как видно из (9.10), (9.13) и (9.14), он равен:

$$T_y = t_y,$$

т. е. в направлении, перпендикулярном движению, никаких изменений с длительностью событий (как и с длинами отрезков) не происходит.

Путь, пройденный светом в этом процессе, равен, как видно из рис. 9.4,

$$2l = \frac{2h}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и отношение

$$\frac{2l}{T_y} = c,$$

что и следовало ожидать.

Так как движение двух рассматривавшихся выше ИСО относительно, то можно было бы считать штрихованную систему неподвижной, а нештрихованную – движущейся со скоростью $-\vec{v}$. Очевидно, при этом наблюдатели поменялись бы ролями: наблюдатель *A* нашел бы изменение длин и длительности, наблюдатель *B* – нет. *И при этом каждый был бы прав со своей точки зрения.*

Таким образом, проводя измерения в собственной системе отсчета, каждый наблюдатель оценивает собственную длину отрезков как наибольшую, а промежутки собственного времени как наименьшие.

Возвращение обоих сигналов в начало координат (одноместные события), конечно, происходит одновременно для обоих наблюдателей; если бы было не так, то две системы ИСО оказались бы неравноправными. Но приход к зеркалам 2 и 4 (разноместные события) в штрихованной системе происходит одновременно ($t'_x = t'_y$), а в нештрихованной – разновременно ($T_2 \neq T_4$).

Прямое доказательство справедливости (9.16) имеется в ядерной физике. Известна нестабильная частица мюон, рождающаяся в космических лучах в атмосфере. Она обладает единичным электрическим зарядом; масса ее примерно в 270 раз превышает массу электрона; она движется (относительно лаборатории) со скоростью, весьма близкой к скорости света:

$$v = c(1 - 5 \cdot 10^{-5}).$$

В условиях лаборатории можно определить среднее время жизни мюона в системе отсчета, связанной с ним. Оно оказывается равным

$$t_0 = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ с.}$$

Экспериментально установлено, что в атмосфере частица проходит путь, достигающий 500 м, следовательно, она наблюдается в течение промежутка времени

$$T = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Но это наблюдение происходит в системе отсчета, где мезон движется. Поэтому, используя уравнение (9.16), получаем, зная t_0 :

$$T_1 = \frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ с},$$

что по порядку величины соответствует опыту.

Итак, в СТО длина отрезка и длительность промежутка времени оказываются относительными, зависящими от скорости системы отсчета.

Но, как показал Эйнштейн, в СТО существует инвариантное (не изменяющееся при переходе из одной ИСО в другую) соотношение между пространственным отрезком R и промежутком времени t (оно называется *интервалом*):

$$S^2 = c^2 t^2 - R^2.$$

Глубокий физический смысл интервала выяснится в курсе теоретической физики. Здесь отметим лишь одно важное следствие. Пусть в начале некоторой системы отсчета, расположенной в некоторой среде (или в вакууме), находится источник каких-либо сигналов. Опишем из начала координат сферу радиусом $R = ct$. Так как любое взаимодействие (сигнал), по первому постулату Эйнштейна, распространяется со скоростью, не превышающей c , то можно утверждать, что никакое изменение, возникшее вне сферы через промежуток времени $t_1 > t$, не может зависеть от сигнала, посланного из центра в момент $t = 0$.

Развитие этого утверждения позволяет доказать, что, несмотря на относительность одновременности пространственно разделенных событий, *их причинная связь никогда не нарушается*, т. е. «причина» никогда не может стать «следствием», а всегда ему предшествует.

Так, при выстреле из револьвера причиной является расширение раскаленных газов, следствием – возникновение звуковой волны и вылет пули. Ни при каких условиях не может случиться, чтобы наблюдатель, пространственно удаленный от стрелка, заметил попадание пули в мишень или услышал звук (следствия) раньше, чем увидит световую вспышку (причину).

В заключение отметим, что анализ условий распространения света в движущихся системах отсчета, подробнее проводимый в «Опике и атомной физике», приводит еще к одному важному выводу: *переменное электромагнитное поле* (свет является его частным случаем) *существует само по себе*, а не в гипотетическом «эфире», как это предполагалось физикой XIX в., так как физики считали свет «колебаниями эфира».

В отличие от звука, представляющего собой колебания давления воздуха, переменное электромагнитное поле ни с какой средой не связано. Оно является новой формой материи наряду с давно известной ее формой – веществом.

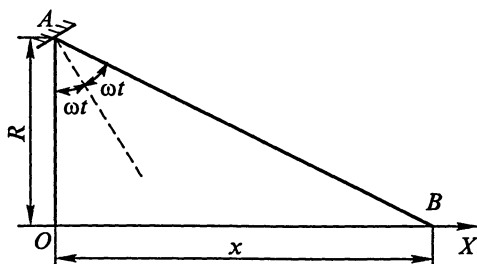


Рис. 9.6

При становлении СТО высказывались многочисленные возражения против первого постулата. Все они оказались несостоятельными. Приведем одно из возражений.

Пусть световой луч из точки O падает на зеркало, способное поворачиваться вокруг оси A (рис. 9.6). Пусть в момент $t = 0$ угол падения $\alpha = 0$. Зеркало поворачивается с постоянной угловой скоростью ω . Направление отраженного луча поворачивается с двойной скоростью 2ω . Пусть в момент $t > 0$ отраженный луч направлен по прямой AB . Таким образом, световой зайчик, движущийся по экрану, совпадающему с осью X (рис. 9.6), как будто бы проходит расстояние

$$OB = x = R \operatorname{tg}(2\omega t),$$

двигаясь со скоростью

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2R\omega}{\cos^2(2\omega t)}$$

(формула годится для углов $\omega t < 45^\circ$). При приближении угла падения к 45° скорость светового зайчика, очевидно, может превзойти скорость света c . Это произойдет в момент t_1 , определяемый условием

$$\cos^2(2\omega t_1) = \frac{2R\omega}{c}.$$

Ошибка, допущенная при этом рассуждении, поучительна. Ведь никакие фотоны не движутся вдоль оси X ; они лишь пересекают ее в разных точках. Фотон, летящий в направлении AB со скоростью c , достигнет точки B через промежуток времени

$$T = \frac{AB}{c} = \frac{R}{c \cos(\omega t)},$$

где t – момент, в который луч отражается в данном направлении. Но в момент t в точке B никаких фотонов еще нет!

$$\frac{T}{t} = \frac{1}{\cos(2\omega t)}.$$

При стремлении угла $2\omega t$ к 90° оно неограниченно растет, т. е. световой зайчик попадает в точку B со все большим запаздыванием, и никаких сверхсветовых скоростей фотоны в данном случае не имеют.

Отметим теперь, что бесконечно большая скорость распространения сигналов, неявно допускавшаяся классической физикой, иногда приводит к явно невозможным заключениям.

В примере, рассмотренном выше, при допущении бесконечной скорости сигнала моменты его посылки и возвращения просто совпали бы друг с другом.

Вот что писал сам Эйнштейн о связи между пространством и временем: «В дорелятивистской физике пространство и время были отдельными понятиями. Время приписывалось событиям независимо от выбора пространства отсчета. Механика Ньютона обладала относительностью по отношению к пространству отсчета, так что, например, утверждение, что два одновременных события произошли в одном и том же месте, не имело объективного (т. е. независимого от пространства отсчета) содержания. Но эта относительность не сказывалась на построении теории. О точках пространства и моментах времени говорили так, как будто они были абсолютной реальностью. Не замечалось, что истинным элементом пространственно-временной локализации является событие, определенное четырьмя числами x, y, z, ct . Представление о чем-либо происходящем есть всегда представление о четырехмерном континууме, но понимание этого было затемнено абсолютным характером дорелятивистского времени. После отказа от абсолютности времени и особенно одновременности сразу проявилась четырехмерность пространственно-временного представления.

Физической реальностью обладают не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие».

9.5. Элементы релятивистской механики

Постоянство скорости света во всех ИСО, конечно, несовместимо с законом сложения скоростей Галилея (9.5) и, следовательно, с преобразованиями координат Галилея (см. § 2.6).

В специальной теории относительности преобразования Галилея заменены *преобразованиями Лоренца*, имеющими следующий вид (ес-

ли при $t = t' = 0$ начала координат двух ИСО совпадают, одноименные оси параллельны друг другу и штрихованная система движется относительно нештрихованной вдоль оси X со скоростью (\vec{v}) :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt); & x &= \gamma(x' + vt'); \\ y' &= y; & y &= y'; \\ z' &= z; & z &= z'; \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right); & t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \end{aligned} \quad (9.17)$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$.

Для нахождения закона преобразования скоростей возьмем дифференциалы от обеих частей всех уравнений:

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - vdt); & dx &= \gamma(dx' + vdt'); \\ dy' &= dy; & dy &= dy'; \\ dz' &= dz; & dz &= dz'; \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right); & dt &= \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right). \end{aligned}$$

Деля дифференциалы координат на дифференциалы соответствующих времен, получим выражения для преобразования скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{dx}{dt} \frac{v}{c^2}}; & \frac{dx}{dt} &= \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{dx'}{dt'} \frac{v}{c^2}}; \\ \frac{dy'}{dt'} &= \frac{dy}{dt} \frac{1}{1 - \frac{dx}{dt} \frac{v}{c^2}} \frac{1}{\gamma}; & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt'} \frac{1}{1 + \frac{dx'}{dt'} \frac{v}{c^2}} \frac{1}{\gamma}; \\ \frac{dz'}{dt'} &= \frac{dz}{dt} \frac{1}{1 - \frac{dx}{dt} \frac{v}{c^2}} \frac{1}{\gamma}; & \frac{dz}{dt} &= \frac{dz'}{dt'} \frac{1}{1 + \frac{dx'}{dt'} \frac{v}{c^2}} \frac{1}{\gamma}. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование скоростей уже не подчиняется принципу независимости движений.

Если изучается распространение света вдоль оси X в вакууме

$\left(\frac{dx}{dt} = c\right)$, то

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{c-v}{1-\frac{v}{c}} = c, \quad (9.18)$$

как это и требуется вторым постулатом Эйнштейна.

При $\beta \ll 1$ получаются преобразования Галилея как предельный случай преобразований Лоренца.

Не приводя длительных вычислений ускорений, укажем, что они не сохраняются при переходе от одной ИСО к другой.

Как уже указывалось, уравнения электродинамики Максвелла сохраняют свою форму при преобразованиях Лоренца. Применяя преобразования Лоренца в механике, Эйнштейн получил новое выражение для механического импульса:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.19)$$

При его использовании второй закон Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (9.20)$$

сохраняет свою форму.

При $\beta \ll 1$ из (9.19) и (9.20) для импульса и второго закона получаются классические выражения.

Так как при преобразованиях Лоренца ускорения не сохраняются, то их связи с силами существенно усложняются. Действительно, из (9.19) и (9.20), введя для сокращения обозначение

$$\mu = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

получим:

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{d\mu}{dt} = \mu \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{d\mu}{dv} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (9.21)$$

Таким образом, *сила в общем случае не сонаправлена с ускорением.* Сонаправленность сохраняется в двух частных случаях:

а) пусть скорость меняется только по направлению. Тогда получается:

$$v = \text{const}; \quad \mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

б) пусть скорость меняется только по модулю. Тогда уравнение (9.21) является скалярным:

$$\left(\mu + v \frac{d\mu}{dt} \right) \frac{dv}{dt} = F.$$

Сложная связь между силами и ускорениями, естественно, не позволяет в релятивистской механике находить в соответствии с принципом суперпозиции результирующее ускорение тела как векторную сумму ускорений, сообщаемых телу отдельными силами. Однако сохранение формы второго закона Ньютона в релятивистском случае

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \text{где } \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

позволяет и при $v \leq c$ по отношению к силам, импульсам и их производным по времени использовать принцип суперпозиции.

Заметим, что коэффициенты при ускорении в этих (и более сложных) случаях оказываются различными. Конечно, они имеют размерность массы.

Теперь рассмотрим простейший пример: движение точки, не имевшей начальной скорости, под действием постоянной силы.

Пусть на неподвижную точку массой m_0 в момент $t = 0$ начинает действовать постоянная сила \vec{F} . Второй закон в релятивистской форме дает:

$$Fdt = dp = m_0 c db, \quad \text{где } b = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Интегрируя по времени от нуля до t и по b от нуля до b , получаем:

$$Ft = \frac{m_0 c \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Следовательно,

$$\beta^2 = \frac{F^2 t^2}{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}.$$

При неограниченном возрастании времени получается в соответствии со вторым постулатом Эйнштейна:

$$\beta \rightarrow 1, \quad v \rightarrow c.$$

При малых t (малые β) приходим к классическому результату:

$$v = \frac{Ft}{m_0}.$$

Но при больших t классическое приближение не годится, так как оно допускает $v > c$.

Рассчитаем работу силы в простейшем случае: пусть сила параллельна перемещению и в момент $t = 0$ скорость $v_0 = 0$. При элементарном перемещении $vd t$ работа

$$dA = F dt v = v dp.$$

Но импульс можно представить в виде

$$p = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Поэтому

$$dp = m_0 c (1-\beta^2)^{-3/2} d\beta$$

и элементарная работа

$$dA = m_0 c \frac{v d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} = m_0 c^2 \frac{\beta d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя левую часть в пределах $0, A$ и правую – в пределах $0, \beta$, находим работу силы A и равную ей кинетическую энергию K , приобретенную материальной точкой (или поступательно движущимся телом):

$$A = K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \quad (9.22)$$

При $\beta = 0$ $K = 0$, как это и должно быть. При малых β , пользуясь приближенным выражением

$$(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2,$$

получаем:

$$K = m_0 c^2 \cdot \frac{1}{2}\beta^2 = \frac{m_0 v^2}{2},$$

что соответствует классической механике. Но при больших значениях выражение (9.22) расходится с классическим.

9.6. Релятивистская связь между массой и энергией

Уравнение (9.22) можно переписать в виде

$$K + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = E. \quad (9.23)$$

Второе слагаемое левой части, имеющее размерность энергии, привело Эйнштейна к гениальной мысли, что *масса покоя тесно связана с энергией, так что уравнение (9.23) определяет полную энергию тела E*. Введем теперь в (9.23) релятивистский импульс, тогда получим:

$$E = m_0c^2 \sqrt{\frac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1} = c \sqrt{\frac{m_0^2 v^2}{1-\beta^2} + m_0^2 c^2} = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (9.24)$$

Из соотношения (9.24) получаются весьма важные следствия. Пусть тело покоится ($p = 0$). Тогда

$$E = E_0 = m_0c^2,$$

т. е. *покоящееся тело обладает энергией*

$$E_0 = m_0c^2, \quad (9.25)$$

называемой энергией покоя (собственной энергией).

При изменении физического состояния неподвижного тела его энергия покоя должна меняться вместе с изменением внутренней энергии, составляющей часть собственной. Однако нагревание, электризация, намагничивание и т. д. изменяют полную энергию макроскопических тел неощутимо мало. Например, для изменения массы покоя водорода на 1 % его следовало бы нагреть до температуры порядка 10^7 K^1 .

Соотношение (9.25), устанавливающее существование энергии покоя, неразрывно связанной с массой покоя, является одним из важнейших следствий специальной теории относительности. Открытие этой связи коренным образом изменило возможности энергоснабжения человечества. Не менее важно и методологическое зна-

¹ Напомним, что в СИ температура является четвертой основной величиной и выражается в кельвинах (К).

чение этого соотношения, объединяющего ранее разобщенные физические понятия.

Уравнение (9.23) можно написать в виде

$$K = E - E_0, \quad (9.26)$$

показывающем, что кинетическая энергия есть разность между полной энергией и энергией покоя. Но ее значение отличается от классического. И только при малых скоростях ($\beta \leq 1$) получается:

$$K = m_0 c^2 \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2} \beta^2} - 1 \right] \approx \frac{m_0 c^2 \beta^2}{2} = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Из вышеизложенного следует, что ньютоновская механика применима в тех случаях, когда полная энергия мало отличается от энергии покоя. Если же полная энергия в десятки раз превышает энергию покоя, то ее практически можно считать кинетической энергией. Но, конечно, в этом случае классическая механика должна быть заменена СТО.

Если в уравнении (9.24) положить $m_0 = 0$, то получится:

$$E = pc.$$

Этот неожиданный результат предсказывает существование физических объектов, обладающих импульсом и энергией, но лишенных массы покоя; они не могут покоиться ни в какой системе отсчета. Таким объектом являются введенные в физику Эйнштейном «атомы» света – фотоны; они, конечно, движутся со скоростью света, их импульс равен:

$$p = \frac{E}{c}. \quad (9.27)$$

Созданная Планком в 1900 г. теория излучения и громадное количество опытных данных из оптики и атомной физики заставляють приписать фотону энергию

$$E = h\nu, \quad (9.28)$$

где ν – частота излучаемого света, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – *постоянная Планка*, одна из важнейших постоянных квантовой физики.

Нагревание тела, поглощающего свет, свидетельствует о том, что свет обладает энергией. Световое давление на преграду, экспериментально обнаруженное П. Н. Лебедевым в конце прошлого века, доказывает, что свет обладает импульсом.

Уравнение (9.25), связывающее собственную энергию с массой, нашло полное подтверждение в ядерной физике.

Как известно, ядра атомов состоят из ядер водорода – протонов и нейтральных частиц – нейтронов. Число протонов Z определяет место элемента в периодической системе Менделеева; сумма числа протонов Z и числа нейтронов N определяет массовое число элемента, т. е. округленную до ближайшего целого числа массу сложного ядра, выраженную в атомных единицах массы ($1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$).

По классическим представлениям, масса ядра должна равняться сумме масс частиц, образующих ядро. Опыты же показали, что для всех ядер выполняется условие

$$m_{\text{я}} < Zm_p + Nm_n,$$

где $m_{\text{я}}$ – масса покоя ядра; m_p – масса покоя протона; m_n – масса покоя нейтрона. Если умножить обе части неравенства на c^2 , то получится соотношение между соответствующими собственными энергиями:

$$E_{\text{я}} < E_p + E_n.$$

Поэтому можно сделать следующие заключения.

1. При образовании ядра из составных частиц происходит выделение энергии в количестве

$$\Delta E = (E_p + E_n) - E_{\text{я}}$$

на каждое образовавшееся ядро. Это либо энергия излучений, сопровождающих ядерный синтез, либо кинетическая энергия, приобретаемая ядром при его образовании, впоследствии утрачиваемая при столкновениях с другими частицами.

2. Для разделения ядра на элементарные составные части (протоны и нейтроны) требуется сообщить ему энергию, не меньшую, чем ΔE (так как продукты разделения могут обладать еще и кинетической энергией). Величина ΔE называется *энергией связи*. Так как вместо ΔE можно всегда написать

$$\Delta E = c^2 \Delta m, \tag{9.29}$$

то часто говорят о том, что *ядро обладает недостатком (дефектом) массы Δm* . Современная ядерная энергетика развивается на базе уравнения (9.29).

Подробное рассмотрение этих вопросов читатель найдет в «Опике и атомной физике».

9.7. Соударения при релятивистских скоростях

Классическая теория соударений, рассмотренная в гл. 4, изучает три вида соударений:

1. Неупругие, когда частицы образуют одно целое, и кинетическая энергия частично переходит во внутреннюю.

2. Упругие, когда кинетическая энергия перераспределяется между частицами, внутренняя энергия не изменяется, частицы разлетаются.

3. Соударения, при которых кинетическая энергия частично переходит во внутреннюю, но частицы разлетаются. Последние встречаются чаще всего, но в общем виде мы их не изучали из-за сложности расчетов.

Во всех этих случаях масса частиц считалась постоянной.

При релятивистских скоростях и взаимодействиях выполняются законы сохранения релятивистского импульса и полной энергии. Но при этом взаимодействия могут быть столь сильными, что *заметно изменяется масса покоя частиц*, т. е. будут рождаться новые частицы. Разумеется, расчеты при этом усложняются. Поэтому мы ограничимся простейшими случаями.

1. *Соударения частиц в ускорителях.* В ускорителях часто используется неупругое соударение частицы массой m_0 , имеющей большую скорость \vec{v} , с медленно движущейся частицей равной массы, начальную скорость которой можно принять равной нулю.

Закон сохранения релятивистского импульса дает:

$$m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = M c \frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}. \quad (9.30)$$

При этом M не обязательно равняется $2m_0$.

Закон сохранения полной энергии запишется так:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_0 c^2 = \frac{M c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}. \quad (9.31)$$

Деля (9.31) на (9.30), находим β_1 :

$$\beta_1 = \frac{\beta}{1 + \sqrt{1-\beta^2}} < \beta.$$

Зная β и β_1 , с помощью (9.30) находим массу:

$$M = 2m_0 \sqrt{\frac{1-\beta_1^2}{1-\beta^2}} \frac{\beta}{\beta_1} > 2m_0.$$

Прирост внутренней энергии (величина, наиболее интересующая экспериментаторов) равен убыли кинетической энергии:

$$\Delta K = (M - 2m_0)c^2.$$

Кинетическая энергия до соударения (9.22) равна:

$$K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Коэффициент использования кинетической энергии:

$$\alpha = \frac{\Delta K}{K}.$$

Разумеется, он всегда меньше единицы.

В таблице 9.2 приведены значения β и α (для соударения быстрой частицы с неподвижной).

Таблица 9.2

β	10^{-2}	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995
α	0,50	0,48	0,47	0,44	0,42	0,37	0,34	0,29

Чтобы увеличить значения α , были предложены ускорители частиц, работающие на встречных пучках. Полагая массы соударяющихся частиц равными, а скорости – равными по модулю и противоположными по направлению, из закона сохранения импульса найдем:

$$p_1 - p_2 = 0.$$

Полная кинетическая энергия частиц до соударения

$$K_1 = 2K.$$

Так как после соударения частицы останавливаются, то коэффициент использования кинетической энергии в этом случае при любых значениях β равен единице. В этом большое преимущество встречных пучков.

Если после соударения (его нельзя назвать ни упругим, ни неупругим) появляются две частицы, то следует учитывать, что их

массы покоя могут отличаться от масс покоя исходных частиц и что может происходить обмен не только кинетической, но и внутренней энергией. Для решения таких задач законов сохранения недостаточно и нужны дополнительные сведения или задание, например, предполагаемого направления движения одной из частиц, образующихся после соударения (см. «эффект Комптона»).

2. *Поглощение фотона покоящимся свободным электроном.* Пусть фотон имеет частоту ν , электрон – массу покоя m_0 . Скорость электрона после соударения обозначим через v . Закон сохранения импульса дает:

$$\frac{h\nu}{c} = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.32)$$

Закон сохранения полной энергии выглядит так:

$$h\nu + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.33)$$

Выразив из (9.32) $h\nu$ и подставив в (9.33), получим:

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad 1-\beta = \sqrt{1-\beta^2}. \quad (9.34)$$

Уравнение (9.34) удовлетворяется при $\beta = 0$, что физически бессмысленно, так как противоречит закону сохранения импульса; другое возможное решение $\beta = 1$ противоречит первому постулату СТО.

Следовательно, свободный электрон не способен поглотить фотон, что вполне согласуется с опытными данными.

Свободный электрон, имеющий до столкновения какую-либо скорость, также не способен поглотить фотон.

3. *Эффект Комптона.* В опытах Комптона фотоны, имеющие частоту ν_0 , соударялись с электронами атома, очень слабо связанными с ядрами атомов; после соударения частицы разлетались, при этом изменялась частота фотонов, а электроны приобретали большие скорости. Поэтому при расчете такого процесса электрон до соударения можно считать покоящимся. Составим уравнения сохранения импульса и энергии:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e \quad \left(p_0 = \frac{h\nu_0}{c}, p = \frac{h\nu}{c}, p_e = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c} \right) \quad (9.35)$$

и

$$hv_0 + m_0c^2 = hv + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (9.36)$$

Задача разрешима до конца, так как модуль скорости фотона не меняется и число неизвестных равно числу уравнений.

Нарисуем (рис. 9.7) векторную диаграмму импульсов (9.35). Пусть фотон рассеян на некоторый угол φ . Из векторного треугольника получаем:

$$\frac{m_0^2 v^2}{1-\beta^2} = \left(\frac{hv_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{hv}{c}\right)^2 - 2h^2 v_0 \frac{v}{c^2} \cos \varphi,$$

где v – новая частота фотона.

Умножив обе части уравнения на c^2 , получим:

$$\frac{m_0^2 v^2 c^2}{1-\beta^2} = (hv_0)^2 + (hv)^2 - 2h^2 v_0 v \cos \varphi. \quad (9.37)$$

В уравнении (9.36) перенесем hv в левую часть и возведем уравнение в квадрат:

$$\begin{aligned} m_0^2 c^4 + h^2 (v_0 - v)^2 + 2m_0 c^2 h (v_0 - v) &= \\ = m_0^2 c^4 + h^2 v_0^2 + h^2 v^2 - 2h^2 v_0 v + 2m_0 c^2 h (v_0 - v) &= \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2}. \end{aligned}$$

Вычтем это уравнение из (9.37). После несложных вычислений найдем:

$$c(v_0 - v) = \frac{h}{m_0 c} v_0 v (1 - \cos \varphi).$$

Разделив на $v_0 v$ и замечая, что $\frac{c}{v} = \lambda$ – длина волны, приходим к окончательному результату:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi). \quad (9.38)$$

Подставив известные значения величин, получим:

$$\Delta\lambda = 2,42 \cdot 10^{-12} (1 - \cos \varphi) \text{ м}. \quad (9.39)$$

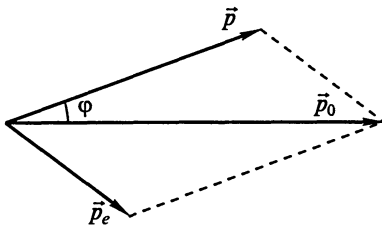


Рис. 9.7

Итак, при рассеянии длина волны увеличивается, причем это увеличение не зависит от длины волны, а зависит только от угла рассеяния. Так как длины световых волн порядка 10^{-7} м, то проверить уравнение (9.39) весьма трудно. Но в 1923 г. Комптон изучал рассеяние рентгеновских фотонов, которым отвечает длина волны в доли нанометра. Расчет превосходно совпал с

результатами опыта.

Далее можно вычислить угол рассеяния электрона и его скорость, причем опыт и здесь подтверждает теорию. Наконец, позже было показано, что число фотонов, рассеиваемых под некоторым углом, совпадает с числом электронов, рассеянных под соответствующим углом.

Таким образом, не подлежит никакому сомнению приложимость законов сохранения импульса и полной энергии к элементарным актам взаимодействия микрочастиц.

Специальная теория относительности не только выдержала многочисленные опытные проверки, но и прочно вошла в технику: ядерная энергетика, теория ускорителей заряженных частиц, применение рентгеновских и гамма-излучений – все это требует учета эффектов, предсказываемых СТО.

Специальная теория относительности оказала большое влияние на методологию физики, объединив ранее разрозненные понятия (пространство и время, энергию и массу). Она отбросила ошибочные представления об абсолютном (независимом от материи) характере пространства и времени, а также о гипотетическом «эфире». Ее методы нашли применение во многих разделах современной физики.

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

10.1. Колебательные системы.

Уравнения колебательного движения

Если на твердое тело подействовать внешней силой, которая приведет к появлению в нем упругой деформации, а затем быстро снять деформирующее усилие, то возникнут колебания. Возникшие в результате воздействия на тело внутренние упругие силы, стремящиеся вернуть элементарные объемы тела в положение равновесия, не могут при снятии напряжения исчезнуть сразу. Каждый элемент объема, дойдя до положения равновесия, будет обладать конечной скоростью (энергия упругой деформации переходит в кинетическую) и поэтому пройдет положение равновесия по инерции. По мере дальнейшего движения будет увеличиваться отклонение от положения равновесия в противоположную сторону; пропорционально смещению будет возрастать антинправленная ему сила упругости, которая была равна нулю при прохождении положения равновесия. При этом, например, растяжение будет заменяться сжатием. Затем процесс повторится в противоположном направлении. В отсутствие трения колебания продолжались бы сколь угодно долго. Наличие трения приводит к тому, что часть энергии колебаний переходит во внутреннюю энергию (тело нагревается), наибольшие смещения от положения равновесия со временем уменьшаются и колебания постепенно прекращаются.

Таким образом, *колебательное движение создается благодаря силам упругости, возвращающим элементы объема упругого тела к положению равновесия, и наличию у этих элементов инертности.*

Движение элемента объема подобно движению маятника, например, пружинного. Поэтому мы сначала углубим рассмотрение колебаний маятника, а позже обратимся к изучению колебаний упругого тела.

Мы видели, что выведенный из положения равновесия и предоставленный самому себе маятник (при малых смещениях и пренебрежении трением) совершает гармонические колебания. Назовем их *собственными* колебаниями, а их частоту – *собственной частотой*.

В действительности сила трения всегда существует, поэтому колебания постепенно затухают. Колебания, происходящие в отсутствие внешнего периодического воздействия при наличии трения, называются *свободными*. На рис. 10.1, где показано изменение смещения x в функции времени t , изображены такие свободные колебания, которые затухают со временем; смысл чисел, стоящих у кривых, пояснен в § 10.2.

Если же на маятник действует внешняя периодическая сила, причем действие ее достаточно длительно (точный смысл последних слов станет ясен из дальнейшего), то *могут установиться вынужденные незатухающие колебания* (см. § 10.3).

Запишем уравнение движения пружинного маятника массой m в случае простейшей упругой деформации – продольного растяжения (сжатия). Пусть на маятник, смещенный из положения равновесия на \vec{x} , действует внешняя сила $\vec{F}_{\text{внш}}$, параллельная смещению. Тогда уравнение движения в соответствии со сказанным имеет вид

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{\text{внш}} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (10.1)$$

В случае упругой деформации $\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{x}$. Законы трения могут быть различны (см. гл. 3). Мы здесь ограничимся простым, но очень важным в практическом отношении случаем трения, когда сила трения пропорциональна скорости:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\dot{\vec{x}},$$

где r – коэффициент трения – постоянная положительная величина; так характеризуется жидкое трение при не слишком больших скоростях движения.

Тогда уравнение движения (10.1) можно записать в виде

$$m\ddot{\vec{x}} + r\dot{\vec{x}} + k\vec{x} = \vec{F}_{\text{внш}}. \quad (10.2)$$

Так как все векторы параллельны, то уравнение (10.2) можно переписать в скалярной форме:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_{\text{внш}}. \quad (10.3)$$

Покажем, что по форме уравнение (10.3) типично для любого маятника с одной степенью свободы.

Полученное в гл. 5 для крутильного маятника уравнение движения (5.31) с учетом трения примет вид

$$I_1\ddot{\phi} + r_1\dot{\phi} + D\phi = M, \quad (10.4)$$

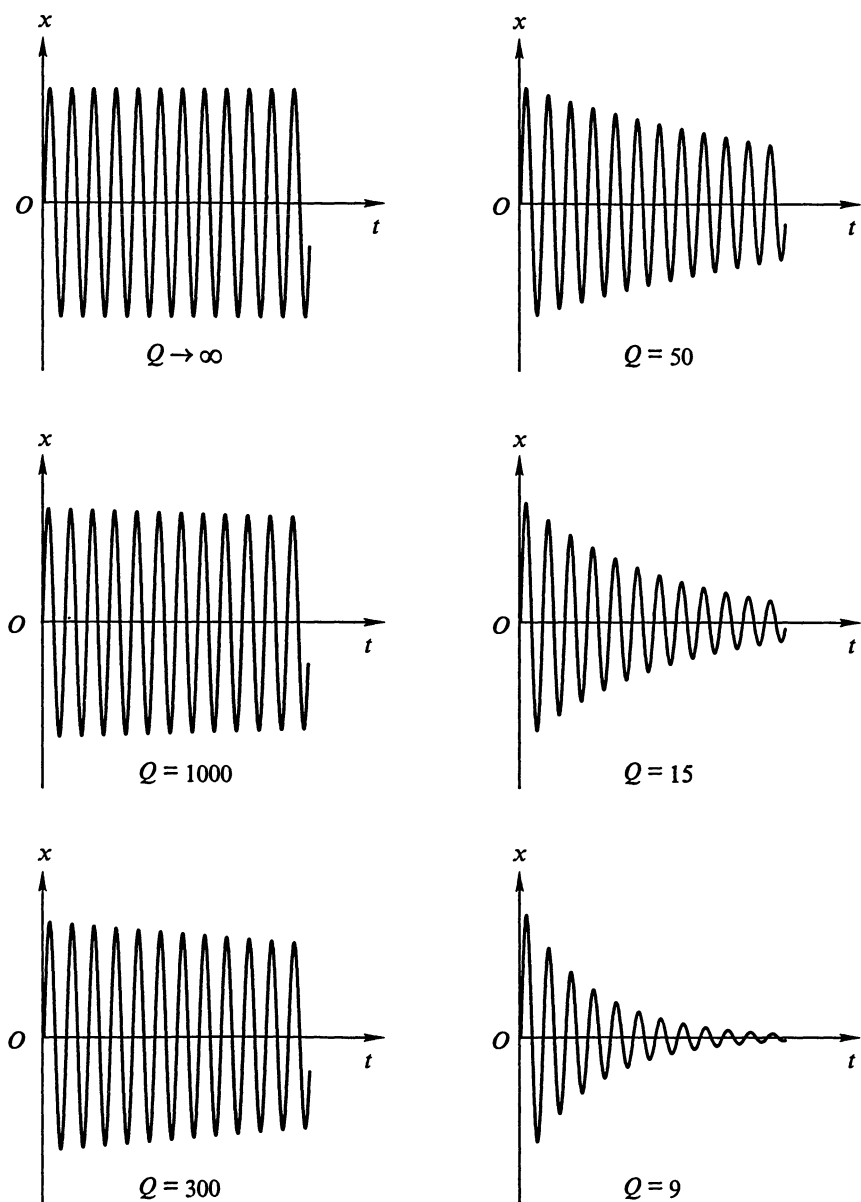


Рис. 10.1

где I_1 – момент инерции маятника относительно оси вращения; φ , $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ – угловое смещение, скорость и ускорение; D – постоянная кру-

чения; M – модуль момента внешних сил; r_1 – коэффициент трения при кручении.

Аналогичными являются уравнения движения для тел, колеблющихся под действием квазиупругих сил, например:

для математического маятника длиной l (при малых углах отклонения φ)

$$I_2\ddot{\varphi} + r_2\dot{\varphi} + mgl\varphi = M, \quad (10.5)$$

где $I_2 = ml^2$;

для физического маятника

$$I_3\ddot{\varphi} + r_3\dot{\varphi} + mga\varphi = M, \quad (10.6)$$

где a – расстояние от оси до центра тяжести.

Уравнения (10.3 – 10.6) в математическом отношении одинаковы. Это неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка, правая часть которых характеризует внешнее воздействие (силу или момент силы при вращении системы).

У членов левой части коэффициентами при переменных являются постоянные, определяющие соответственно инертность тела (m и I), потери на трение (r), упругость (k и D) или квазиупругость (mgl и mga).

Сходство уравнений для колебательных систем выходит далеко за пределы механики. Например, рассмотрим электрическую цепь, где к внешнему источнику ЭДС $\mathcal{E}_{\text{внш}}$ подключены последовательно соединенные катушка индуктивностью L , конденсатор емкостью C , резистор сопротивлением R^1 . Мгновенное значение заряда конденсатора обозначим q ; скорость его изменения $\frac{dq}{dt} = \dot{q}$ определяет ток

i в контуре; скорость изменения тока

$$-L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$$

определяет ЭДС самоиндукции, возникающую в катушке, обладающей индуктивностью L . Тогда $L\dot{q}$ – разность потенциалов, поддерживаемая на катушке, $R\dot{q}$ – разность потенциалов на резисторе (закон Ома), $\frac{q}{C}$ – разность потенциалов на конденсаторе.

¹ Так обычно характеризуют сопротивления всех проводников контура, хотя, конечно, это может быть и специально включенный элемент цепи с этим сопротивлением.

Сумма этих разностей потенциалов в каждый момент равна внешней э.д.с. $\mathcal{E}_{\text{вн}}$.

Таким образом, получается:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}_{\text{внш}}, \quad (10.7)$$

что аналогично уравнению (10.3). При этом устанавливаются электромеханические аналогии следующих величин:

$$\begin{aligned} L - m; \quad q - x; \quad F_{\text{внш}} - \mathcal{E}_{\text{внш}}; \\ R - r; \quad \dot{q} - \dot{x}; \\ \frac{1}{C} - k; \quad \ddot{q} - \ddot{x}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Эта формальная аналогия основана на физической схожести процессов. При колебаниях маятника его кинетическая энергия периодически переходит в потенциальную, причем часть энергии необратимо теряется из-за существования трения, переходя во внутреннюю энергию маятника и окружающей среды. При разряде конденсатора запасенная в нем энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля тока (и обратно), частично переходя необратимо во внутреннюю энергию резистора, нагреваемого током.

В дальнейшем, при анализе электрических явлений, мы убедимся в верности результатов, получаемых на основании электромеханической аналогии. Сейчас же это дает нам право при необходимости иллюстрировать результаты из механики соответствующими электрическими явлениями (наблюдение которых во многих случаях более удобно и наглядно).

10.2. Свободные колебания. Добротность колебательной системы

Рассмотрим особенности колебаний в отсутствие внешних сил ($\vec{F}_{\text{внш}} = 0$), т. е. *свободных колебаний*, на примере пружинного маятника. В этом случае применимо уравнение движения (10.3), которое нужно записать в виде

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0, \quad (10.9)$$

где m – масса тела, находящегося на конце пружины с жесткостью k .

Если трения нет ($r=0$), решение уравнения соответствует гармоническим колебаниям:

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (10.10)$$

изученным нами в §3.1. Напомним, что в соответствии с §3.1 частота *собственных колебаний*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

а амплитуда и начальная фаза (как уже известно) могут быть определены, если кроме уравнения движения заданы *два значения смещения или скорости* в произвольные моменты времени (начальные условия).

Мгновенное значение кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

а потенциальной энергии

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Поэтому полная энергия, равная

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2, \quad (10.11)$$

не зависит от времени, так как упругая сила консервативна. Такие колебания, однажды возникнув, должны длиться неопределенно долго – мы назвали их незатухающими. Но тогда же было подчеркнуто, что представление о незатухающих колебаниях – идеализация, так как в действительности всегда существует трение, вызывающее потерю энергии и постепенное уменьшение амплитуды колебаний. Теперь мы учтем это обстоятельство.

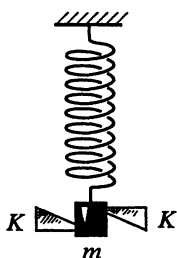


Рис. 10.2

Простое наблюдение за колебаниями пружинного маятника с двумя плоскими крыльями K (рис. 10.2), которые можно расположить сначала параллельно вектору скорости маятника, а затем – перпендикулярно ему, показывает, что в первом случае колебания происходят длительное время без заметного уменьшения амплитуды, а во втором –

амплитуда заметно падает уже за время нескольких колебаний. Дело в том, что воздух оказывает во втором случае более сильное сопротивление, чем в первом. Если зарегистрировать зависимость смещения от времени (практически это лучше сделать, записав на осциллографе затухающие электрические колебания; в соответствии с отмеченной выше электромеханической аналогией закон затухания должен быть одинаков), то получится кривая, подобная одной из кривых, изображенных на рис. 10.1.

Затухание может быть вызвано разными причинами. Так, физический маятник, представляющий собой массивную медную пластину на стержне, колеблется в воздухе без заметного затухания. Но если пластина движется между полюсами электромагнита, то в пластине возникают индукционные токи. По правилу Ленца, они противодействуют вызвавшей их причине (а эта причина – движение маятника); поэтому при взаимодействии этих токов с магнитным полем электромагнита возникают тормозящие силы; кинетическая энергия маятника расходуется на нагревание пластины и постепенно уменьшается. Усиливая магнитное поле (сближением полюсов электромагнита или увеличением силы тока в его обмотках), можно добиться очень сильного затухания – движение может даже потерять периодический характер, стать аperiodическим.

Нас, однако, в первую очередь будут интересовать условия, когда периодичность движения сохраняется, а коэффициент трения остается постоянным, т. е. сила трения пропорциональна скорости.

Вернемся к уравнению колебаний пружинного маятника (10.3), где трение учтено (свободные колебания), и перепишем его, введя стандартные обозначения

$$\frac{r}{m} = 2\alpha; \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad (10.12)$$

в виде

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (10.13)$$

Не имея возможности провести здесь строгое решение дифференциального уравнения (10.13), мы пойдем путем, несколько искусственным, но более доступным читателю.

Рассматривая кривые (рис. 10.1), являющиеся графиками искомого решения, замечаем, что наибольшие отклонения (одного знака) монотонно убывают со временем. Обозначим через X_m начальную амплитуду, а через X – амплитуду одного из последующих смещений. Можно предположить, что убыль амплитуды пропорцио-

нальна ее значению и времени:

$$-dX = pXd t,$$

где p – постоянная. Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dX}{X} = -pdt.$$

Интегрирование левой части от X_m до X , а правой – от нуля до t приводит к результату:

$$X = X_m \exp(-pt). \quad (10.14)$$

Но так как движение обладает повторяемостью, то можно предположить, что решение уравнения (10.13) имеет вид

$$x = X_m \exp(-pt) \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (10.15)$$

Если это предположение верно, то при подстановке x и его производных в (10.13) должно получиться тождество.

Сначала найдем производные:

$$\dot{x} = -X_m p \exp(-pt) \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - X_m \omega_1 \exp(-pt) \sin(\omega_1 t + \varphi_0);$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & X_m p^2 \exp(-pt) \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - X_m \omega_1^2 \exp(-pt) \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \\ & + 2X_m p \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0). \end{aligned}$$

При подстановке в (10.13) множители $X_m \exp(-pt)$ сократятся и останется:

$$\begin{aligned} & p^2 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - \omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + 2p\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) - \\ & - 2\alpha p \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - 2\alpha\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + \omega_0^2 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) \equiv 0. \end{aligned}$$

Это тождество должно выполняться в любой момент. Пусть $(\omega_1 t_1 + \varphi_0) = 0$. Тогда должно быть:

$$p^2 - \omega_1^2 - 2\alpha p + \omega_0^2 = 0. \quad (10.16)$$

Если же $(\omega_1 t_2 + \varphi_0) = \frac{\pi}{2}$, то $2p\omega_1 - 2\alpha\omega_1 = 0$.

Отсюда следует, что

$$p = \alpha. \quad (10.17)$$

Учитывая (10.17), получаем из (10.16):

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2. \quad (10.18)$$

Так как ω_1 – частота колебаний (действительная величина), то необходимо выполнение еще одного условия:

$$\omega_0 > \alpha. \quad (10.19)$$

Итак, мы показали, что наше предположение о решении уравнения свободных колебаний (10.13) в форме (10.15) обосновано.

Таким образом,

$$x = X_m \exp(-\alpha t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (10.20)$$

Величины X_m и φ_0 могут быть определены, если будут известны два значения смещения (или скорости) в произвольные моменты времени, например при $t=0$ (начальные условия).

Здесь $X_m \exp(-\alpha t)$ – убывающая со временем амплитуда свободных колебаний, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ – частота свободных колебаний, α –

коэффициент затухания (вспомним, что $\alpha = \frac{r}{2m}$ (см. 10.12) характеризует трение, в частности при $\alpha \rightarrow 0$ $\exp(-\alpha t) \rightarrow 1$, $\omega_1 \rightarrow \omega_0$, т. е. затухающие свободные колебания переходят в гармонические собственные колебания с неизменной амплитудой X_m и частотой ω_0).

Решение (10.20) легко получается при помощи метода комплексных амплитуд (см. § 10.4).

Из уравнений (10.18) и (10.20) следует, что затухание сказывается и на амплитуде, и на частоте – последняя, как и следовало ожидать, несколько уменьшилась. Однако во многих практических случаях, когда трение мало, этим влиянием на частоту можно пренебречь и приближенно считать частоту ω_1 равной частоте собственных колебаний ω_0 . Подчеркнем, что решение (10.20) описывает *затухающие негармонические колебания*. Хотя периодичность движе-

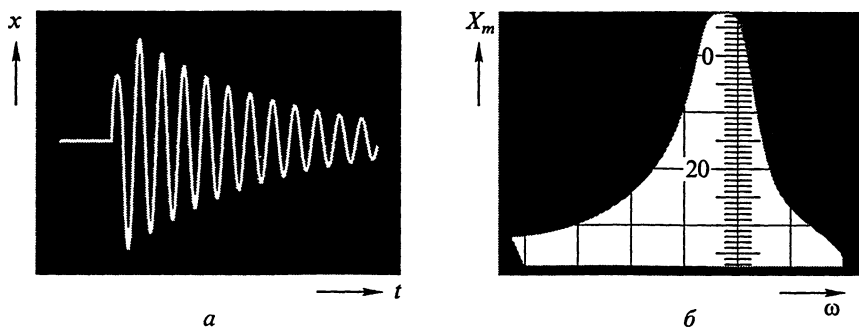


Рис. 10.3

ния сохранилась, но о гармоничности говорить уже не приходится, так как множитель перед косинусом – непостоянная величина.

На рис. 10.3, а изображен временной ход затухающего процесса, где удастся проследить около тридцати колебаний. Результат гармонического анализа (см. § 1.9) этого процесса показан на рис. 10.3, б (по оси абсцисс отложены частоты, по оси ординат – соответствующие амплитуды). Как видно, эти затухающие колебания имеют практически непрерывный спектр (максимальная амплитуда соответствует частоте ω_0).

Выражение (10.20) обладает замечательной особенностью. Найдем отношение двух последующих амплитуд, отделенных промежутком времени, равным периоду колебаний $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$:

$$\frac{X_1}{X_2} = \exp(\alpha T_1) = \text{const.}$$

Обычно в расчетах используют величину

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = \alpha T_1 \approx \alpha T_0, \quad (10.21)$$

называемую *логарифмическим декрементом затухания*.

Логарифмический декремент затухания – постоянная для данной колебательной системы величина.

Наряду с декрементом пользуются понятием *добротности Q*:

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega_0}{2\alpha}. \quad (10.22)$$

Можно показать, что добротность пропорциональна отношению полной энергии E колебательной системы к энергии W_{π} , теряемой за период:

$$Q = 2\pi \frac{E}{W_{\pi}}. \quad (10.23)$$

Очевидно, добротность, как и декремент, имеет нулевую размерность.

Считая, что затуханием можно пренебречь, если процесс изучается в течение времени, пока амплитуда уменьшится до 0,8 своего начального значения, соответствующее число колебаний n можно найти из соотношения

$$\frac{X_1}{X_{n+1}} = \exp(\alpha T_0 n) = \exp\left(\frac{\pi}{Q} n\right) = 1,25.$$

Отсюда

$$n = 0,075 Q.$$

С другой стороны, если считать, что колебания практически прекратятся, когда амплитуда упадет до 0,1 ее начального значения, то число колебаний, совершаемых системой до ее практического успокоения, окажется равным

$$N = 0,75 Q. \quad (10.24)$$

Приведем несколько примеров.

Хороший камертон имеет добротность $Q \approx 3000$; если он поставлен на резонансный ящик (при этом увеличивается доля энергии, теряемой на «излучение» – создание звука в окружающем воздухе), добротность падает в несколько десятков раз.

Маятник, при помощи которого хорошо демонстрируется опыт Фуко, должен иметь добротность порядка нескольких сотен.

Добротность маятника с крыльями, описанного выше, не превышает десяти (когда крылья перпендикулярны плоскости колебаний). Добротность электрических колебательных систем может достигать значений порядка 10^4 ; добротность атома, который тоже является колебательной системой, достигает $10^6 \dots 10^7$. Числа, стоящие у кривых (см. рис. 10.1), характеризуют добротность соответствующих колебательных систем.

Добротность можно представить и таким образом:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{r} = \frac{\rho}{r}. \quad (10.25)$$

Величина $\rho = \sqrt{km}$ имеет ясный физический смысл: она равна отношению амплитуды силы упругости kX_m к амплитуде скорости $\omega_0 X_m$:

$$\rho = \sqrt{km} = \frac{k}{\omega_0}; \quad \dim \rho = T^{-1}M. \quad (10.26)$$

Эта важная характеристика системы называется *волновым*, или *колебательным*, *сопротивлением*.

До сих пор мы предполагали, что затухание невелико, так что выполнялось неравенство

$$\omega_0 > \alpha.$$

Если этого нет и затухание так велико, что $\omega_0 < \alpha$, то движение теряет периодический характер. Мы не будем аналитически

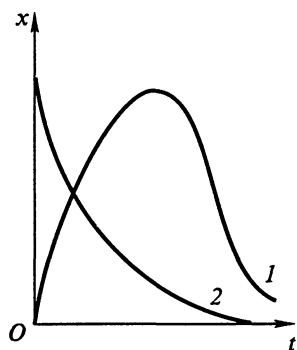


Рис. 10.4

исследовать этот случай и ограничимся лишь двумя замечаниями.

Если система выводится из положения равновесия толчком (т. е. ей сообщается кинетическая энергия), то она движется от положения равновесия до некоторого наибольшего отклонения (рис. 10.4, кривая 1), а затем асимптотически приближается к положению равновесия. Если систему предварительно вывести из положения равновесия, сообщив ей потенциальную энергию, а затем предоставить самой себе, то она также постепенно возвращается в положение равновесия (рис. 10.4, кривая 2).

Можно показать, что для быстреего приближения системы к положению равновесия должно выполняться условие $\omega_0 = \alpha$.

10.3. Вынужденные колебания. Резонанс

Затухающие колебания происходят под действием сил, возникающих в самой колебательной системе, – силы упругости и силы трения. Для практики особый интерес представляет возможность возбуждения *незатухающих колебаний с помощью внешних сил*.

В этом случае для маятника, на примере которого мы ведем аналитическое рассмотрение, уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_{\text{вн}}. \quad (10.27)$$

Если внешняя сила $F_{\text{внш}}$ постоянна, то она лишь смещает положение равновесия на отрезок

$$X_{\text{ст}} = \frac{F_{\text{внш}}}{k},$$

и затухающие колебания происходят около этого положения. При этом потенциальная энергия деформированной пружины после прекращения затухающих колебаний

$$U = \frac{1}{2} k X_{\text{ст}}^2 = \frac{1}{2} F_{\text{внш}} X_{\text{ст}},$$

т. е. составляет только половину работы $A = F_{\text{внш}} X_{\text{ст}}$, совершенной внешней силой. Вторая половина работы расходуется на преодоление силы трения.

Более интересно движение, возникающее под действием периодической внешней силы. Его называют *вынужденными колебаниями*.

Вынужденные колебания можно, например, возбудить периодически действующей кратковременной постоянной силой (толчками); время действия толчка примем много меньшим периода собственных колебаний системы.

Так, если ударять по маятнику (шар на нити) в те моменты, когда он проходит положение равновесия, причем направление силы удара совпадает с направлением мгновенной скорости, то после нескольких ударов шар раскачается сильно. Если же частота ударов не соответствует частоте системы, то одни удары будут ускорять, другие – замедлять движение, и раскачать маятник сколь-нибудь сильно не удастся.

Из сказанного понятно, что сила, изменяющаяся по гармоническому закону, сможет сильно раскачать систему, если ее частота будет соответствовать собственной частоте системы.

Действительно, будем считать внешнюю силу меняющейся по гармоническому закону:

$$F_{\text{внш}} = F_m \cos \omega t.$$

Вводя прежние обозначения, перепишем уравнение (10.27) в виде

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega t, \quad \text{где } B = \frac{F_m}{m}. \quad (10.28)$$

Ясно, что под действием периодической силы должны возникнуть колебания с частотой изменения этой силы ω . Однако опыт показывает, что колебания устанавливаются лишь постепенно. На рис. 10.5 показана запись установления процесса вынужденных колебаний при $\omega \neq \omega_0$, а на рис. 10.6 – при $\omega = \omega_0$ (для двух разных значений добротности при одной и той же амплитуде внешней силы). В последнем случае характерно *монотонное нарастание амплитуды в течение времени установления, увеличение длительности процесса установления и рост амплитуды при увеличении добротности*.

Возникновение вынужденных колебаний удобно наблюдать на таком простом приборе. Волчок укреплен в кольце, к которому приварена пластина, несущая ряд плоских пружин разной длины (частоты их собственных колебаний растут при укорочении пружины). Волчок приводят в быстрое вращение; так как его центрирование неидеально, то он оказывает периодическое воздействие на пластину и приводит пружины в вынужденные колебания. Из-за трения частота вращения волчка (и, следовательно, частота возбуждения пружин) непрерывно убывает. Начальная частота вращения волчка

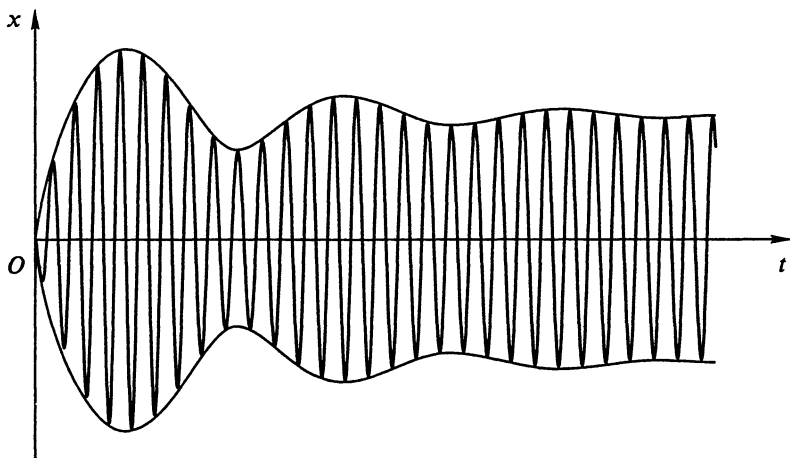


Рис. 10.5

должна значительно превышать собственные частоты всех пружин. В этом случае пружины сначала покоятся, а затем поочередно одна из пружин (начиная с самой короткой) колеблется сильнее всех; ее ближайшие соседки справа и слева колеблются слабее, более далекие колеблются совсем слабо или покоятся. Наибольшее возбуждение постепенно переходит ко все более длинным пружинам; потом они все успокаиваются, хотя волчок еще вращается – частота его вращения стала значительно меньше собственной частоты самой длинной пружины.

Из этих наблюдений следует, что вынужденное движение носит колебательный характер и амплитуда зависит от соотношения между частотой вынуждающей силы и собственной частотой колебаний системы.

Детальными процессами установления вынужденных колебаний мы здесь интересоваться не будем, это будет сделано при изучении электрических колебаний. Ограничимся пояснением: сложный процесс установления колебаний объясняется тем, что при нарушении состояния покоя системы обязательно возникают (кроме вынужденных) собственные колебания, складывающиеся с вынужденными. Поэтому процесс установления длится тем дольше, чем дольше существуют заметные собственные колебания, т. е. чем больше добротность. При этом в отдельные промежутки времени амплитуды могут превышать амплитуду установившихся колебаний (см. рис. 10.5). Во избежание подобных перегрузок на практике амплитуду вынуждающей силы в начале движения делают малой и лишь постепенно доводят до нужного значения.

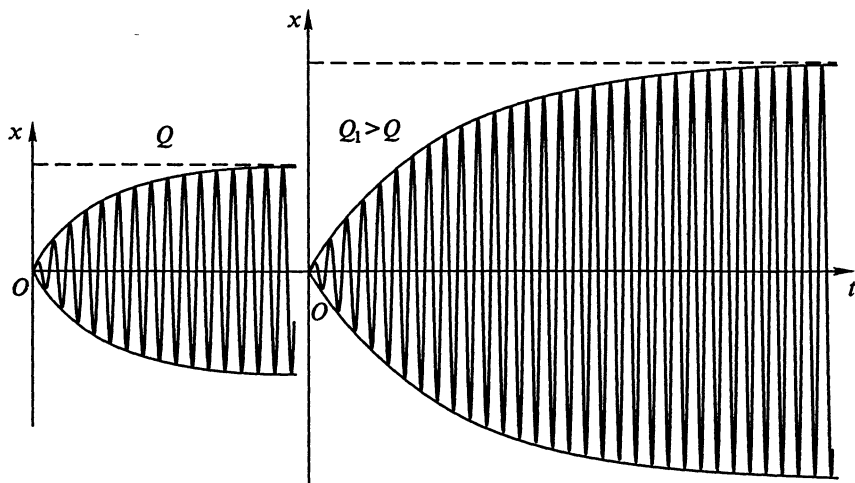


Рис. 10.6

Теперь займемся исследованием установившихся колебаний. Предположим, что решением уравнения (10.28) является выражение

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (10.29)$$

где установившаяся амплитуда X_m и разность фаз φ_0 между вынуждающей силой и смещением должны быть определены.

Найдем скорость и ускорение:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega X_m \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = V_m \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \\ \ddot{x} &= \omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x. \end{aligned}$$

Подставляя их в уравнение (10.28), получаем:

$$-(\omega^2 - \omega_0^2)X_m \cos(\omega t + \varphi_0) + 2\alpha\omega X_m \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \equiv B \cos \omega t.$$

Это выражение должно удовлетворяться тождественно при всех значениях времени. Можно было бы использовать аналитический метод, примененный в предыдущем параграфе. Но проще воспользоваться методом векторных диаграмм (см. § 1.8). Векторы, представляющие левую часть уравнения, взаимно перпендикулярны и зависят от частоты; их сумма равна одному и тому же вектору, представляющему правую часть уравнения. Поэтому, построив

окружность диаметром B , можно утверждать, что вершины рассматриваемого векторного треугольника лежат на этой окружности (рис. 10.7).

Из прямоугольного треугольника сразу получается:

$$X_m^2 = \frac{B^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (10.31)$$

Итак, амплитуда вынужденных колебаний зависит не только от амплитуды внешней силы, но и от соотношения между частотой вынуждающей силы ω и собственной частотой ω_0 .

При постоянной силе ($\omega = 0$) амплитуда вынужденных колебаний

$$X_m = \frac{B}{\omega_0^2} = \frac{F_m}{k} = X_{ст},$$

т. е. известному уже статическому смещению (вынужденных колебаний нет).

При увеличении частоты ω (и при неизменной амплитуде внешней силы) амплитуда смещения растет, проходит через максимум и снова уменьшается, стремясь к нулю при неограниченном возрастании частоты. Это и понятно: инертная система «не успевает» следовать за очень быстрыми изменениями внешней силы.

Поэтому, например, электроизмерительные приборы постоянного тока не дают отклонений в цепи переменного тока ($\omega = 314 \text{ с}^{-1}$).

Мы не будем подробно исследовать решение (10.31), так как больший практический интерес представляет поведение скорости (оно и более содержательно с физической точки зрения).

Уравнения (10.30) и (10.31) позволяют найти амплитуду скорости:

$$V_m = \frac{F_m}{m \sqrt{\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2 + 4\alpha^2}} = \frac{F_m}{\sqrt{\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 + r^2}}, \quad (10.32)$$

а также фазовый сдвиг между скоростью и силой:

$$\operatorname{tg} \theta = -\operatorname{ctg} \varphi_0 = -\frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{r}. \quad (10.33)$$

При выполнении условия резонанса

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (10.34)$$

амплитуда становится максимальной и равной

$$V_{mp} = \frac{F_m}{r}$$

и фазовый сдвиг между внешней силой (10.28) и скоростью (10.30) обращается в нуль.

Вычислим работу внешней силы за

период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^T \vec{F}_{\text{внш}} \cdot \vec{v} dt = F_m V_m \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t + \theta) dt = \\ &= F_m V_m \left[\cos \theta \int_0^T \cos^2 \omega t dt - \sin \theta \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt \right] = \\ &= F_m V_m \left[\frac{\cos \theta}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t) d(\omega t) - \frac{\sin \theta}{2} \int_0^T \sin 2\omega t dt \right] = \frac{F_m V_m \cos \theta}{2\omega}, \end{aligned}$$

так как второй интеграл равен нулю. При $\omega = \omega_0$ работа принимает наибольшее значение:

$$A_m = \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{r} T, \quad (10.35)$$

так как амплитуда скорости максимальна, а сила все время сонаправлена со скоростью.

Такое состояние системы называют *состоянием резонанса*. Это состояние наступает не сразу, так как по мере роста скорости растут и сила трения. Установившееся состояние наступает при выполнении условия $\vec{F}_{\text{внш}} = -\vec{F}_{\text{тр}}$, или

$$F_{\text{внш}} = F_{\text{тр}} = r V_{mp},$$

т. е. при $V_{mp} = \frac{F_{\text{внш}}}{r}$, что было найдено выше.

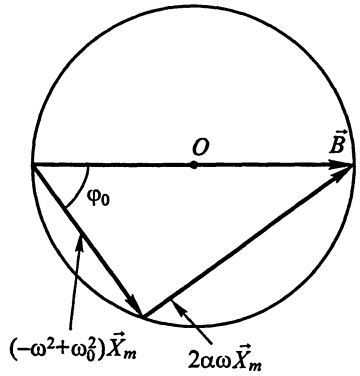


Рис. 10.7

На рис. 10.8 изображены *резонансные кривые (амплитудно-частотные характеристики)*, определяющие зависимость квадрата амплитуды скорости от частоты. При этом по оси ординат отложена

величина $\beta = \left(\frac{V_m}{V_{mp}}\right)^2$, а по оси абсцисс – относительная рас-

стройка (отклонение от резонансной частоты) $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0}$, выраженная в процентах. Около кривых указаны значения добротности системы.

Величина

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = h,$$

при которой

$$\left(\frac{V_m}{V_{mp}}\right)^2 = 0,5,$$

называется шириной резонансной кривой; она очень просто связана с добротностью. Действительно, из уравнений (10.32) и (10.34),

если $\left(\frac{V_m}{V_{mp}}\right)^2 = 0,5$, получаем :

$$0,5 = \frac{F_m^2}{4\alpha^2 m^2} = \frac{F_m^2}{4\alpha^2 m^2 + m^2 \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2}.$$

После сокращений это уравнение приводится к виду

$$2 = 1 + \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{4\alpha^2 \omega^2}.$$

Отсюда

$$2\alpha\omega \approx 2\alpha\omega_0 = 2\omega_0\Delta\omega.$$

Поэтому ширина кривой оказывается равной

$$h = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (10.36)$$

Так как h может быть легко измерено по кривой, то получается практически удобный метод измерения добротности.

Амплитуда смещения при резонансе

$$X_{mp} = \frac{F_m}{2\alpha m \omega_0} = \frac{F_m}{k} \frac{\omega_0}{2\alpha} = X_{ст} Q, \quad (10.37)$$

и смещения описываются уравнением

$$x_p = X_{ст} Q \sin \omega t.$$

Таким образом, при высокой добротности системы амплитуда смещения может во много раз превысить статическое отклонение, или амплитуду нерезонансных колебаний.

Из (10.31) следует, что наибольшая амплитуда смещения получается не на резонансной частоте, а на частоте, несколько меньшей; ее значение равно:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \approx \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\alpha^2}{\omega^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

Во многих практически важных случаях $Q \gg 1$, и можно считать

$$\omega = \omega_0.$$

Таким образом, чем выше добротность, тем уже резонансная кривая и тем больше амплитуды скорости и смещения.

Явление резонанса во многих случаях очень полезно: им пользуются в акустике – для усиления звучания музыкальных инструментов; в радиотехнике – для выделения нужного сигнала из множества других, отличающихся по частоте; в многоканальной телеграфии и т. д. Соответствующие колебательные системы обладают большой добротностью.

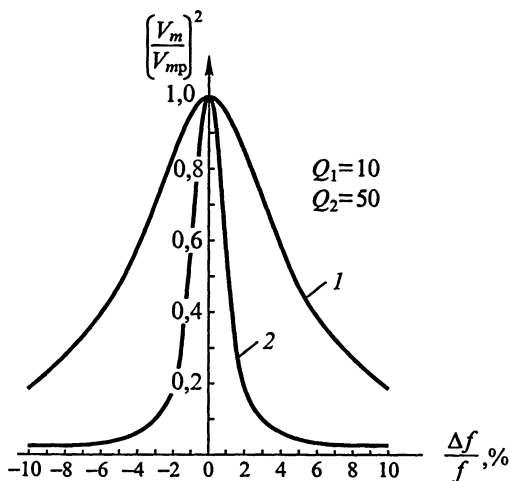


Рис. 10.8

Но иногда резонанс оказывается вредным: он может вызвать колебания машин и их фундаментов. Для устранения резонанса пользуются системами с малой добротностью.

В системе могут быть слабо выражены инертные ($m \rightarrow 0$) или упругие ($k \rightarrow 0$) свойства, тогда она не будет обладать собственной частотой. В этом случае внешняя периодическая сила также вызовет вынужденные колебания, описываемые уравнением (10.29), однако никаких резонансных явлений при этом не возникнет.

При анализе решения (10.29) нам не понадобились начальные условия, так как мы искали частное (а не полное) решение дифференциального уравнения (10.27), справедливое после исчезновения заметных собственных колебаний.

В заключение заметим, что одновременное существование собственных и вынужденных колебаний связано с линейностью системы и подчинением ее принципу суперпозиции.

Мы ограничились изучением влияния гармонической внешней силы. Если сила периодична, но не гармонична, то по теореме Фурье ее можно представить как сумму гармонических сил, и создаваемые ими колебания будут в соответствии с принципом суперпозиции просто складываться.

10.4. Рассмотрение вынужденных колебаний методом комплексных амплитуд¹

В § 10.3 при решении уравнения вынужденных колебаний (10.29) мы использовали метод векторных диаграмм. Тот же результат даст и аналитический метод комплексных амплитуд (см. § 1.9). Покажем это.

Положим, что внешняя сила в уравнении установившихся вынужденных колебаний (10.28) задается в виде

$$\dot{F} = mB \exp(i\omega t),$$

где B – действительная величина. Решение ищем в виде

$$\dot{x} = \dot{X}_m \exp(i\omega t).$$

Подставив это решение в (10.28), находим комплексную амплитуду

$$\dot{X}_m (-\omega^2 + 2i\alpha\omega + \omega_0^2) = B,$$

¹ При первом чтении этот параграф можно опустить.

отсюда

$$\dot{X}_m = \frac{B}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\alpha\omega} = X_m \exp(-i\varphi_0).$$

Найдя модуль и фазу комплексного числа \dot{X}_m , получим действительную амплитуду и начальную фазу вынужденных колебаний:

$$X_m = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0 - \omega}.$$

Итак, решение имеет вид

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

что совпадает с ранее найденным выражением (10.29).

10.5. Колебания в нелинейных системах

Во всех рассмотренных выше случаях параметры системы (r , m , k) были постоянны, а уравнения движения – линейны. При этом оказалось, что установившиеся вынужденные колебания происходят с частотой внешней периодической силы. *Никаких добавочных частот не возникало*; постоянная сила вызывала лишь статическое смещение.

Но существует большой класс *нелинейных колебательных систем*, параметры которых зависят от состояния движения. Трудности анализа колебаний в таких системах связаны с тем, что они описываются нелинейными дифференциальными уравнениями (поэтому и системы называют нелинейными); *принцип суперпозиции к ним применить нельзя*: он, как отмечалось в гл. 2, справедлив лишь для линейных систем, т. е. систем, описываемых линейными уравнениями. Напомним приводившийся ранее пример: пусть на пружинный маятник действует сила, растягивающая пружину так значительно, что предел упругости оказывается превзойденным. Тогда в выражении

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

жесткость уже не постоянна, но зависит от силы: $k = f(F)$.

В этом случае прежними методами задачу решать, конечно, нельзя. Система будет вести себя по-разному при движении «туда» и «обратно». При двух одновременных воздействиях отклик будет отличен от суммы откликов на каждое воздействие в отдельности и т. д.

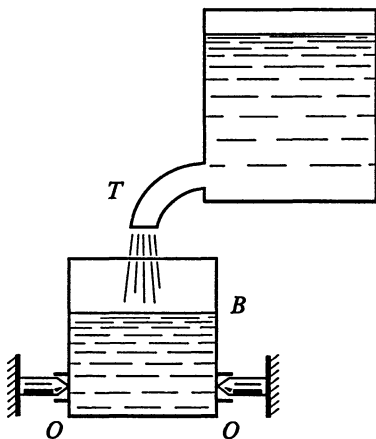


Рис. 10.9

простых систем.

На рис. 10.9 изображена система, состоящая из источника энергии (водопровода), наполняющего через трубу T цилиндрический сосуд B ; этот сосуд может поворачиваться вокруг оси OO , расположенной так, что пустой сосуд находится в состоянии устойчивого равновесия. Но при заполнении сосуда водой его центр масс поднимается и устойчивость равновесия теряется – сосуд опрокидывается и быстро опорожняется, после чего возвращается в исходное состояние и процесс возобновляется. Изменение массы воды в сосуде со временем можно представить графически (рис. 10.10). Получающиеся колебания называются пилообразными, или релаксационными. Период этих колебаний зависит от скорости подачи воды и от положения оси вращения. Нелинейность этой системы заключается в сложной зависимости вращающего момента, действующего на сосуд, от массы воды, запасенной в сосуде (так как по мере заполнения сосуда жидкостью меняется положение центра масс относительно оси вращения).

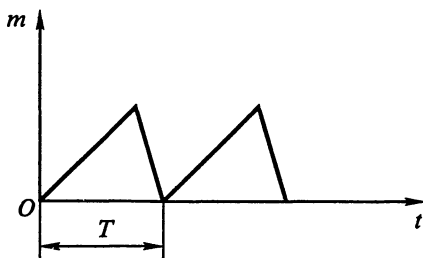


Рис. 10.10

Одной из важнейших особенностей нелинейных систем является возникновение частот, отличных от частоты внешней силы, что широко используется в технике. В частности, в некоторых нелинейных системах появляется возможность получить незатухающие колебания под действием постоянной внешней силы.

Точных методов решения нелинейных уравнений не существует, применяются лишь приближенные. К этому вопросу мы вернемся при рассмотрении электрических явлений; здесь же с качественной стороны обсудим поведение нескольких

простых систем.

Подобные же колебания, получаемые в электрических цепях, применяются, в частности, для управления движением электронного луча в электронных осциллографах и телевизорах.

Устройства для их получения называют релаксаторами.

Простым, очень наглядным примером нелинейной электромеханической системы, совершающей механические колебания под действием источника постоянной электродвижущей силы, является пружина (рис. 10.11), обтекаемая током. Один конец пружины закреплен, другой погружен в чашечку с ртутью или раствором электролита. При замыкании электрической цепи витки, обтекаемые током одинакового направления, притягиваются, пружина сжимается, ее конец выходит из ртути и цепь разрывается; после разрыва цепи упругие силы восстанавливают первоначальную длину пружины, цепь замыкается и все повторяется снова.

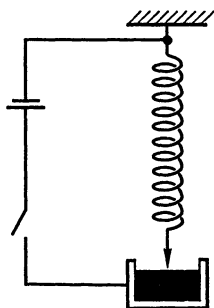


Рис. 10.11

Подобные системы называются *автоколебательными*, так как колебания в них получаются под действием постоянной силы; но сама система управляет расходом энергии источника (то включая его, то выключая). Для таких систем характерны нелинейность какого-либо параметра и наличие «обратной связи», т. е. механизма, приводимого в действие внешней силой и в свою очередь воздействующего на источник. Так, в нашем примере нелинейность – это зависимость сопротивления цепи от протекающего по ней тока (при достаточной силе тока происходит разрыв цепи). Обратная связь осуществляется либо электромагнитным, либо упругим взаимодействием витков.

Частота колебаний определяется параметрами самой системы, а не источником питания. Колебания получаются негармоническими.

Если «обратная связь» осуществлена неправильно, то она не будет способствовать возникновению колебаний. Например, если изготовить пружину, у которой соседние витки намотаны «встречными винтами», т. е. в противоположные стороны, то между витками при протекании тока возникнут силы отталкивания, пружина не сможет сжиматься и ртутный контакт не будет разрываться – никаких колебаний не получится.

К сожалению, жесткость такой пружины оказывается гораздо больше, чем в предыдущем случае. Поэтому ее собственные колебания имеют малую амплитуду, что уменьшает наглядность опыта.

Очень наглядный электромеханический автогенератор изображен на рис. 10.12. Катушка со стальным сердечником $L1$, питаемая источником постоянной ЭДС, подвешена на четырех пружинах к углам неподвижной рамы (на схематическом рисунке пружины не показаны). Катушка может совершать вертикальные колебания с пе-

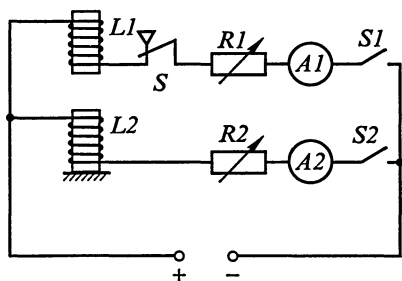


Рис. 10.12

риодом 1–2 с. При движении вниз она размыкает контакт S и ток I_1 в ней исчезает. Такая же неподвижная катушка L_2 , питаемая тем же источником ЭДС, может быть (в случае необходимости) повернута вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее середину, на 180° . Резисторы R_1 и R_2 позволяют регулировать силу тока в катушках, измеряемую амперметрами A_1 и A_2 .

Если катушки установлены так, что токи в них имеют одинаковое направление, то при замыкании ключей S_1 и S_2 катушка L_1 притянется к катушке L_2 , причем контакт S разорвется, ток I_1 исчезнет. Упругая сила пружины вернет катушку L_1 в первоначальное состояние, и процесс возобновится, т. е. возникнут автоколебания.

При повороте катушки L_1 на 180° сила притяжения между катушками L_1 и L_2 заменится силой отталкивания, контакт S не разорвется, колебания не возникнут (обратная связь подобрана неверно).

Чисто механической автоколебательной системой являются часы с маятником («ходики»), изображенные на рис. 10.13. Они имеют зубчатое колесо 2 с зубцами специальной формы; зубцы при движении колеса 2 то задерживают, то освобождают пластину специальной формы 1, жестко связанную с осью O ; на этой же оси закреплен маятник (колебательная система). С зубчатым колесом жестко связан шкив, несущий цепь 3; на конце цепи имеется тяжелая гиря (источник потенциальной энергии, питающий систему). При колебаниях маятника, пока зубцы задерживают пластину, направление силы, испытываемой пластиной, проходит через ось вращения и вращающий момент равен нулю. Когда же пластина сходит с зубцов, она (и маятник) испытывает кратковременный толчок, действие кратковременного вращающего момента, создаваемого опускающейся гирей и увеличивающего энергию маятника. Устройство рассчитано так, что потеря кинетической энергии маятником за половину периода как раз равна приросту энергии его за счет работы вращающего момента. Толчки происходят при прохождении маятником положения равновесия, дважды за период.

В часах очень отчетливо проявляется *примечательное свойство автоколебательных систем: они не могут прийти в движение самостоятельно, их сперва нужно толкнуть*. Если толчок не слишком слаб, то работа силы, создающей вращающий момент, будет пре-

вышать потерю энергии и маятник будет раскачиваться. Если первоначальный толчок слишком силен, то работа вращающего момента не сможет компенсировать потерю кинетической энергии и амплитуда будет уменьшаться, пока потери на трение за период не сравняются с приростом энергии за счет опускающейся гири.

В обоих случаях *установившаяся амплитуда колебаний оказывается независимой от начальных условий*, что является отличительным признаком нелинейной колебательной системы.

Заметим, что сила сухого трения нелинейна (она меняет направление при изменении направления скорости, но не зависит от ее модуля); поэтому автоколебания часто самопроизвольно возникают в системах с сухим трением.

Еще один тип колебаний – параметрические – имеет место в тех случаях, когда в процессе движения периодически изменяются параметры системы.

Так, при раскачивании на качелях можно увеличить амплитуду, обусловленную первоначальным толчком (он необходим, так как самопроизвольно система в колебательное движение не придет), если приседать в моменты наибольшего отклонения качелей и выпрямляться при прохождении ими положения равновесия. При этом потенциальная энергия (в поле тяжести Земли) при приседаниях уменьшается на меньшую величину, чем увеличивается при выпрямлениях, так как человек приседает, будучи наклонен к вертикали, а приподнимается – по вертикали; изменение же потенциальной энергии определяется проекцией перемещения на вертикаль.

Таким образом, дважды за период колебаний качелей энергия системы получает приращения; если они больше потерь на трение, система может значительно раскачаться. Когда обе эти величины сравниваются, колебания станут устойчивыми. Изменяемым параметром здесь является момент инерции человека. Как и автоколебания, параметрические колебания оказываются не строго гармоническими; однако в обоих случаях это отличие можно сделать достаточно малым. Наиболее интересные применения параметрические колебания нашли в радиотехнике.

Строго говоря, все реальные системы, в сущности, нелинейны и широко распространенное линейное рассмотрение их лишь приближение, справедливое только при достаточно малых амплитудах колебаний.

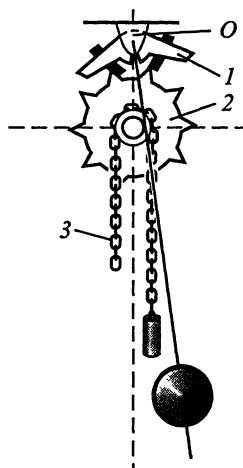


Рис. 10.13

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

11.1. Колебания в связанных системах. Образование волн

Для описания колебаний материальных точек или макроскопических тел, изучавшихся до сих пор, достаточно было задать закон изменения одной координаты: системы обладали одной степенью свободы. Но во многих случаях колебательные системы бывают связаны друг с другом. Так, два одинаковых маятника массами m (рис. 11.1), способные колебаться в плоскости, перпендикулярной чертежу, представляют собой простейшую связанную систему. Связь создает нить, натягиваемая весом груза массой m_1 (при этом $m_1 \ll m$).

Если вывести один маятник из положения равновесия и предоставить самому себе, то импульс и энергия от первого маятника будут передаваться второму, затем обратно. Положение нити связи влияет на скорость передачи движения; чем ниже расположена нить, тем сильнее связь между маятниками, тем быстрее происходит обмен импульсом и энергией.

Такая же картина наблюдается, вообще говоря, если оба маятника выводятся из положения равновесия одновременно. И только в двух случаях возникает устойчивое движение (без обмена энергией и импульсом):

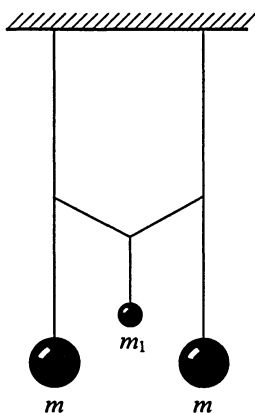


Рис. 11.1

1. Если отклонить оба маятника (длиной l) в одну сторону на равные малые углы и одновременно отпустить их, то при колебаниях нить связи не будет деформироваться; маятники будут колебаться синхронно, в одинаковой фазе. Частота колебаний равна при этом частоте колебаний каждого маятника в отдельности. Если считать маятники математическими, то эта частота

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

2. Если отклонить маятники в противоположные стороны на равные малые углы и од-

новременно отпустить их, то они будут колебаться в противоположных фазах, также не обмениваясь энергией. Так как нить связи при этом деформируется, создавая дополнительное ускорение, то частота в этом случае увеличивается до значения

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} + \Delta},$$

где положительное слагаемое Δ зависит от деформации и натяжения нити связи.

Эти два колебания называют *нормальными колебаниями системы*.

Можно показать, что все другие случаи движения (различные углы начального отклонения и различные начальные фазы, при которых колебания происходят с обменом энергией между маятниками), являются наложением двух нормальных колебаний (*система имеет две степени свободы*).

Такой же обмен энергией можно наблюдать и на цепочке одинаковых маятников, связанных друг с другом: если возбудить колебания одного из них, то движение постепенно передается все дальше и дальше. Каждый маятник повторяет движение, совершаемое его соседом, но с некоторым запаздыванием по фазе. Принято говорить, что *в данном случае по системе маятников распространяется волна*.

В общем случае *волной называют периодическое возмущение* (нарушение равновесного состояния) *среды* (системы материальных точек), *распространяющееся в этой среде и передающее импульс и энергию*. *Переноса вещества при этом не происходит*.

Так как маятники в рассмотренных примерах движутся в направлении, перпендикулярном распространению процесса, то волна называется *поперечной*. Если же колебания происходят вдоль линии распространения (например, продольные колебания витков длинной пружины), то волну называют *продольной*. Система, содержащая *n* связанных одинаковых маятников, имеет *n* степеней свободы и *n* нормальных частот.

В рассмотренных примерах связь между частями системы была вызвана силами упругости – такую волну называют *упругой*. Но связи могут быть и неупругими. Между электрически заряженными металлическими или диэлектрическими шариками – маятниками, не связанными упругими нитями, передача импульса и энергии осуществляется за счет сил кулоновского взаимодействия.

Между маятниками, выполненными в виде катушек с током, связь является электромагнитной (за счет силы Ампера). Обе эти системы являются электромеханическими.

Во всех случаях, о которых мы говорили выше, *распространение волны происходит вдоль прямой линии, поэтому такую волну называют одномерной (или линейной)*. Примером одномерной волны в акустике служит поперечная волна, распространяющаяся по натянутой струне, или продольная волна, распространяющаяся вдоль воздушного столба в трубе, где она возбуждается поршнем, закрывающим все сечение трубы и периодически движущимся вдоль оси трубы.

На поверхности воды плоскую волну можно получить, приводя в колебание длинную пластину, сообщающую движение воде сразу по всей ширине водяной ванны. В пространстве волна будет практически плоской, если она создается плоским поршнем больших размеров, колеблющимся взад-вперед, а процесс изучается в средней части волны, не вдалеке от поршня.

Если связанные колебательные системы распределены в плоскости, то получается двумерная волна. Ее легко наблюдать на поверхности воды. Создав возмущение в некоторой точке, замечаем, что оно распространяется в виде круговых волн. В данном случае *волна не является упругой*, так как движение частиц на поверхности воды в вертикальной плоскости обусловлено *не упругими силами* (жидкость не сопротивляется изгибу), *а силой тяжести и силами поверхностного натяжения*, существующими в поверхностных слоях жидкости.

Однако кинематические характеристики поверхностных волн не отличаются от характеристик упругих волн, поэтому первые могут служить моделью при изучении вторых.

В самом общем случае волна может распространяться в пространстве. Пусть волна возбуждается периодически пульсирующим шаром, находящимся в однородной изотропной упругой среде (например, в воздухе); тогда на любой шаровой поверхности, имеющей общий центр с пульсирующим шаром и радиус, превышающий ради-

ус шара, все точки будут колебаться в одинаковой фазе – получается пространственная шаровая (сферическая) волна (ее плоское сечение для трех значений времени t показано на рис. 11.2, а).

Поверхность, содержащую точки, колеблющиеся в данный момент времени в одинаковой фазе, называют волновым фронтом. Линии,

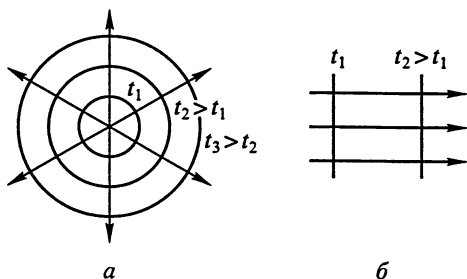


Рис. 11.2

определяющие направление распространения волны, называют лучами. В однородной изотропной среде лучи нормальны к волновым фронтам.

Вдали от источника (рис. 11.2, б) небольшой участок фронта сферической волны практически является плоским; при этом все лучи, пронизывающие его, параллельны друг другу. В этом случае рассматриваемая часть волны называется *плоской волной*. Ее математическое описание наиболее просто и совпадает с описанием одномерной волны.

Плоскость, проходящую через луч, и направление, в котором происходят колебания, называют *плоскостью колебаний*. Если в поперечных волнах эта плоскость не меняет своего положения со временем, то *поперечную волну называют линейно поляризованной или плоскополяризованной*. Возможны и другие, более сложные типы поляризации; они будут рассмотрены в оптике.

Плоскость, перпендикулярную плоскости колебаний и также проходящую через луч, иногда называют *плоскостью поляризации*.

Для продольной волны положение плоскости колебаний, очевидно, определить однозначно невозможно. Поэтому при рассмотрении продольных волн этим понятием не пользуются.

Кроме механических волн, обусловленных силами упругости, существуют механические волны, вызванные силами иной природы (например, упомянутые выше поверхностные волны на свободной поверхности жидкости), а также волны иной природы – электромагнитные (включающие и световые). Несмотря на различную природу, распространение всех этих волн подчиняется общим математическим закономерностям (как это было и в случае колебаний). В дальнейшем упругие волны мы будем характеризовать «обобщенным смещением», т. е. скалярной величиной z , которая может представлять как смещение частиц в продольной волне, происходящее в направлении луча, так и смещение в линейно поляризованной поперечной волне, либо давление, создающееся в акустической волне.

Лишь при определении скорости распространения и изучении энергетических соотношений потребуется знание природы и типа волны.

Как и в случае колебаний, мы ограничимся волнами с малыми смещениями z , чтобы возникающие деформации можно было считать упругими, подчиняющимися закону Гука и, следовательно, принципу суперпозиции. Здесь применимость этого принципа становится особенно наглядной. Например, при распространении двух волн каждая из них распространяется так, как если бы другой не было, и результат их наложения находится простым суммированием смещений составляющих волн.

Мы ограничимся рассмотрением только *гармонических волн*; более сложные волны могут быть представлены совокупностью этих простейших. Наконец, мы допустим, что скорость распространения волн не зависит от частоты колебаний (это допущение строго справедливо только для непоглощающих идеально прозрачных сред).

11.2. Бегущие волны. Скорость распространения волны

Если в неограниченной среде беспрепятственно распространяется одна-единственная волна, то ее называют *бегущей*. Наложение нескольких бегущих волн друг на друга создает, как мы увидим далее, более сложный процесс.

Составим *уравнение бегущей волны*, позволяющее определять смещение любой точки волны в любой момент времени. Для простоты начнем с одномерной волны, распространяющейся в положительном направлении вдоль оси X со скоростью \vec{v} . Полученные результаты, очевидно, будут справедливы и для плоской волны.

Пусть точка, находящаяся в начале координат, движется по закону

$$z_0 = Z_m \cos \omega t = Z_m \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right). \quad (11.1)$$

Напомним, что z здесь «обобщенное смещение», Z_m – его амплитуда.

Тогда точка, имеющая в положении равновесия координату x , будет двигаться по закону

$$z = Z_m \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right], \quad (11.2)$$

так как время запаздывания ее движения относительно первой точки есть

$$\tau = \frac{x}{v}.$$

Уравнение (11.2) можно переписать в виде

$$z = Z_m \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] = Z_m \cos(\omega t - kx), \quad (11.3)$$

где $\lambda = vT$ – расстояние, на которое волна распространяется за один период колебаний точек системы. Это расстояние называется *длиной волны*, или *пространственным периодом*.

Очевидно, точки, удаленные друг от друга на расстояние $\Delta x = \lambda$, в любой момент колеблются в одинаковой фазе, так как при $\Delta x = \lambda$ получается:

$$2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi.$$

Коэффициент

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

называют волновым числом: он определяет число волн, укладывающихся на отрезке длиной 2π м; подобно этому угловая частота ω определяет число периодов T , «укладывающихся» на отрезке времени в 2π с. Уравнение (11.2) и есть уравнение бегущей плоской волны. При заданном x оно позволяет определить положение точки (с координатой положения равновесия x) в любой момент времени t . При заданном t оно позволяет определить мгновенные положения всех колеблющихся точек.

На рис. 11.3 показаны графики смещений во времени двух точек, положения равновесия которых x , $x_1 + \frac{\lambda}{4}$ отличаются на четверть длины волны.

На рис. 11.4 показаны смещения различных точек той же волны в два разные момента времени, отличающиеся на четверть периода. Рисунок 11.4 можно назвать «мгментальными фотографиями» бегущей волны. Стрелки у отдельных точек характеризуют относительные значения и направления их мгновенной скорости.

Мгновенная фотография продольной волны, образовавшейся на горизонтальной пружине в момент достижения волной закрепленного конца пружины A , показана на рис. 11.5.

Мгновенное распределение точек, колеблющихся в бегущей продольной волне, можно получить из графика поперечной волны, если все вертикальные смещения повернуть на 90° (положительные – по часовой стрелке, отрицательные – против). Такая операция проделана на рис. 11.6. Положение рав-

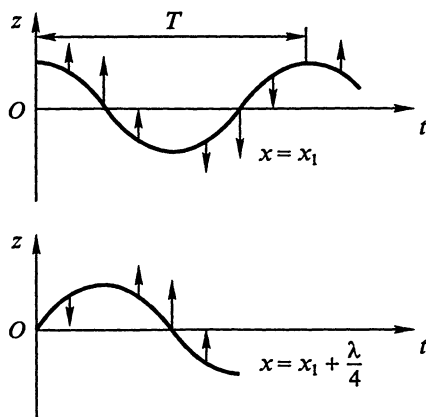


Рис. 11.3

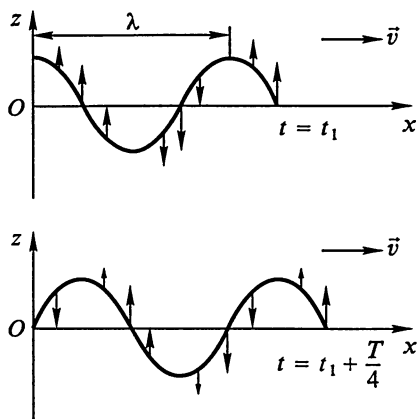


Рис. 11.4

новесия точек определяется пересечением вертикальных смещений с осью x ; номера точек во вспомогательной поперечной волне и основной (продольной) волне одинаковы.

На рис. 11.6 отчетливо видно, что в продольной волне вблизи точек, находящихся в данный момент в положении равновесия (точки 12, 24), возникают сгущения или разрежения частиц среды; вблизи точек, находящихся в состоянии наибольшего отклонения от положения равновесия (точки 6 и 18), их относительные смещения самые малые.

Сопоставление рисунков наглядно показывает, что использование в (11.1) символики обобщенного смещения позволяет количественно описать как поперечные, так и продольные волны.

Выражения (11.2) и (11.3) пригодны также для описания гармонических волн любой природы.

Известно, что в одном моле любого газа содержится одно и то же число молекул, оно называется *постоянной Авогадро*:

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

При нормальных условиях (атмосферное давление $p = 10^5$ Па, температура $T = 273$ К) 1 моль газа занимает объем

$$V = 0,022 \text{ м}^3.$$

Следовательно, одна молекула встречается в среднем в объеме

$$w = \frac{V}{N_A} = 3,7 \cdot 10^{-26} \text{ м}^3,$$

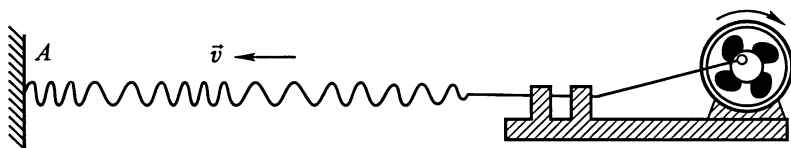


Рис. 11.5

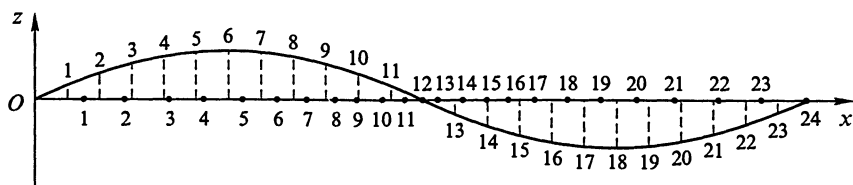


Рис. 11.6

и среднее расстояние между молекулами

$$l = \sqrt[3]{w} = 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

Как будет показано в § 11.3, амплитуда смещения в звуковой волне средней громкости при частоте $\omega = 6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ равна примерно

$$Z_m = 10^{-8} \text{ м.}$$

Таким образом, на рис. 11.6 относительный масштаб по осям z и x более или менее соответствует этому случаю.

Найдем скорость распространения плоской продольной волны в однородной среде плотностью ρ .

Пусть поперечное сечение фронта волны, бегущей вправо, в момент t занимает положение l (рис. 11.7). При его движении возникает продольное сжатие (местное уплотнение) на участке

$$dx = v dt$$

и через сечение площадью S пройдет слева дополнительный (сжатый) элемент массой

$$dm = \rho v S dt,$$

обладающий механическим импульсом:

$$v dm = v^2 S \rho dt.$$

По второму закону Ньютона изменение импульса вызвано направленной вправо силой $d\vec{f}$

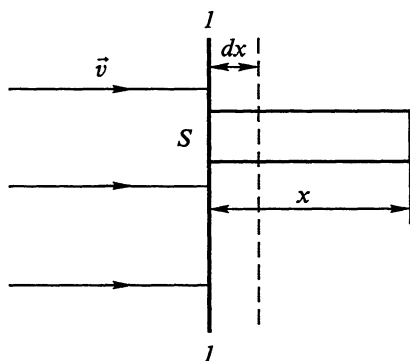


Рис. 11.7

(создаваемой деформированной средой, расположенной левее сечения l):

$$df = Sdp,$$

где dp – избыточное давление на границе раздела l . Поэтому

$$Sdp = Sv^2dp.$$

Отсюда находим скорость распространения волны

$$v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

В частном случае продольной волны в твердом теле введем относительное смещение $\varepsilon = \frac{dx}{x}$ и модуль Юнга E . Так как

$$\varepsilon = \frac{dx}{x} = \frac{dp}{E} = \frac{d\rho}{\rho}$$

(изменение объема равно Sdx , но $S = \text{const}$), то скорость продольной упругой волны сжатия получается равной

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (11.4)$$

Можно показать, что для поперечных волн скорость распространения определяется величиной

$$v_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где G – модуль сдвига, связанный с модулем Юнга соотношением

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

(μ – коэффициент Пуассона, § 6.3).

Так как модуль сдвига меньше модуля Юнга, то поперечные волны распространяются медленнее продольных. Это дает возможность сейсмологам определять расстояния от их приборов до места возникновения землетрясения (порождающего волны), измеряя запаздывание прихода поперечных волн относительно продольных.

В теоретической физике показывается, что поперечная волна в натянутой струне (или в резиновом шнуре) распространяется со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}, \quad (11.5)$$

где ρ_l – линейная плотность вещества, F – сила ее натяжения.

Следует подчеркнуть, что *скорость распространения волны не имеет никакого отношения к скорости движения отдельных точек*. Пока амплитуды колебаний малы (а мы будем заниматься только такими случаями), скорость распространения не зависит от амплитуды; в широком интервале частот она также не зависит и от частоты.

Так, в приведенном выше примере ($Z_m = 10^{-8}$ м, $\omega = 6 \cdot 10^3$ с $^{-1}$) амплитуда скорости молекул $Z_m \omega = 6 \cdot 10^{-5}$ м/с, а скорость звука в воздухе (см. ниже) равна 330 м/с.

Скорость распространения продольных волн в металлах составляет около 4500 ... 5000 м/с, в воде – 1500 м/с (речь идет об упругих колебаниях – сжатии и расширении, которые можно возбудить в глубине водоема). Неупругие поверхностные волны на воде распространяются гораздо медленнее (их скорость не превышает 0,1 м/с), что делает их удобными для наблюдений.

Упругие волны в газе (где имеют место только продольные волны), как будет доказано в молекулярной физике, распространяются со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{RT}{M}} \gamma, \quad (11.6)$$

где M – молярная масса газа; T – абсолютная температура; $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – газовая постоянная; γ – безразмерная величина, связанная с процессами, происходящими в газе при его деформациях (для воздуха $\gamma = 1,4$). Так как молярная масса воздуха $M = 29$ кг/моль, то для скорости звука при $T_0 = 273$ К получается $v = 330$ м/с. При другой температуре T скорость, как видно из формулы (11.6), равна:

$$v_T = v \sqrt{\frac{T}{T_0}}.$$

Обычно температура воздуха близка к $T = 300$ К и скорость продольных колебаний в нем (скорость звука) близка к 330 м/с.

Уравнение (11.2) описывает волну, распространяющуюся в направлении оси X . При изменении направления распространения волны на противоположное второе слагаемое в аргументе косинуса меняет знак (так как v заменяется на $-v$).

11.3. Энергия волны

Амплитуду колебаний всех точек одномерной (плоской) волны мы считали везде одинаковой, так как не учитывали затухания (мы его учтем позже). Математическое описание плоской волны наиболее просто; мы и будем вести расчеты для этого случая.

Для нахождения *мгновенных скоростей точек волны* следует фиксировать координаты точек волны (11.3) и взять частную производную по времени от смещения. При этом получится:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \omega Z_m \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right); \quad k = \frac{\omega}{v}. \quad (11.7)$$

Если волна распространяется в непрерывной среде плотностью ρ , то, выделив на волновом фронте участок площадью S , на который опирается цилиндр длиной dx , найдем, что его мгновенная кинетическая энергия

$$dK = \frac{1}{2} \rho S dx \omega^2 Z_m^2 \cos^2 \varphi(t, x), \quad (11.8)$$

где $\rho S dx = dm$ – масса выделенного элемента объема среды, имеющего скорость $\frac{\partial z}{\partial t}$, а

$$\varphi(t, x) = \omega t - kx + \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, как и в случае колебаний одиночного маятника, *кинетическая энергия максимальна при прохождении колеблющихся в волне частиц через положение равновесия и обращается в нуль при наибольшем отклонении точек.*

Скорость точек меняет направление при наибольшем отклонении их от положения равновесия.

Одиночный маятник, находящийся в положении наибольшего отклонения, имеет наибольшую потенциальную энергию. В волне дело обстоит иначе. Действительно, потенциальная энергия деформации определяется *не абсолютным смещением, а значением относительного смещения соседних точек.* Если, например, длинную спиральную пружину перемещать целиком вдоль ее оси, то никакой продольной деформации не произойдет даже при очень больших смещениях. Подобно этому, если тонкую металлическую или деревянную пластину передвинуть параллельно самой себе (не деформируя), то даже при очень больших смещениях изменение

потенциальной энергии (энергии деформации) будет равно нулю. Но при растяжении пружины (или изгибе пластины) энергия деформации, конечно, появляется. Итак, *потенциальная энергия деформации зависит от относительного смещения точек в фиксированный момент времени t* (рис. 11.8). Так, точка, имевшая в положении равновесия координаты $(x, 0)$, смещена в положение 1 с координатами (x, z) . Соседняя точка с координатами положения равновесия $(x + dx, 0)$ смещена в положение 2 с координатами $(x + dx, z + dz)$, в данном случае $dz < 0$. При этом

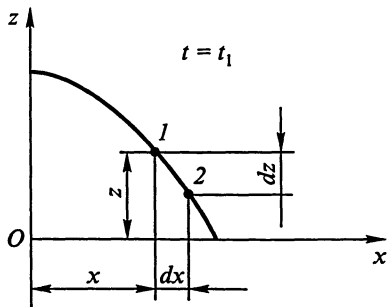


Рис. 11.8

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx.$$

Поэтому относительное смещение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\omega}{v} Z_m \cos \varphi(x, t). \quad (11.9)$$

Для потенциальной энергии элемента объема Sdx для продольной волны получается выражение

$$dU = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 S dx = \frac{1}{2} \frac{E}{v^2} \omega^2 Z_m^2 S dx \cos^2 \varphi(x, t). \quad (11.10)$$

Сравнивая с (11.8), убеждаемся, что *потенциальная энергия максимальна в те же моменты и в тех же элементах объема, где максимальна кинетическая энергия*, т. е. при прохождении точек через положение равновесия. Такое отличие распределения энергии от случая одиночного маятника объясняется тем, что в волне точки обмениваются энергиями, а одиночный маятник только преобразует свою энергию из одного вида в другой.

Полный запас энергии волны в выбранном объеме равен:

$$\frac{E}{v^2} (Z_m \omega)^2 \cos^2 \varphi(x, t) S dx. \quad (11.11)$$

Мгновенная плотность энергии (энергия, приходящаяся на единицу объема) в волне

$$w = \frac{E}{v^2} (Z_m \omega)^2 \cos^2 \varphi(x, t) = \rho (Z_m \omega)^2 \cos^2 \varphi(x, t). \quad (11.12)$$

На практике нас не очень интересует, что делается в элементе объема в данный момент; *важнее знать, что происходит во времени в среднем*. Усредняя выражение (11.12) за период колебаний, получаем (так как средний квадрат косинуса за период равен 0,5):

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho (Z_m \omega)^2. \quad (11.13)$$

Итак, бегущая волна несет с собой энергию. Через поперечное сечение площадью 1 м^2 за 1 с пройдет энергия, заключенная в объеме параллелепипеда с длиной, численно равной скорости волны v :

$$I = \bar{w} v = \frac{1}{2} (\rho v) (Z_m \omega)^2. \quad (11.14)$$

Эту величину называют *интенсивностью волны, или поверхностной плотностью потока энергии*. Она зависит от двух сомножителей: первый (ρv) характеризует среду, второй – свойства колеблющейся точки в волне. Величина $R = \rho v$ называется *удельным акустическим сопротивлением среды*. Второй сомножитель можно связать с избыточным давлением, возникающим в волне: интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды и частоты. Если волна продольная, то относительное смещение служит одновременно и мерой относительного сжатия. Для наибольшего сжатия в соответствии с законом Гука имеем:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_m = \frac{\sigma_m}{E} = \frac{p_m}{E},$$

где σ_m – амплитуда напряжения, p_m – амплитуда избыточного давления. Пользуясь соотношением (11.14), находим:

$$\omega Z_m = \frac{p_m v}{E} = \frac{p_m}{R}. \quad (11.15)$$

Тогда для интенсивности получается полезное для практики выражение

$$I = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{R}. \quad (11.16)$$

Так, при распространении звука небольшой громкости в воздухе ($R = 430 \text{ Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$) амплитуда переменного избыточного давления равна примерно $0,1 \text{ Па}$, а атмосферное давление, как известно, составляет около 10^5 Па . При периоде колебаний $T = 10^{-3} \text{ с}$ амплитуда смещения слоев воздуха составит всего $4 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, а интенсивность звуковой волны 10^{-5} Вт/м^2 . При той же амплитуде смещения в воде, обладающей удельным акустическим сопротивлением, равным

$$R_{\text{в}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1} = 3500 R,$$

энергия была бы соответственно больше (в 3500 раз).

Уравнение (11.14) можно представить в следующем виде:

$$I = \frac{1}{2} \left(E \frac{\omega Z_m}{v} \right) (\omega Z_m) = \frac{1}{2} \left(E \frac{\partial z}{\partial x} \right)_m \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_m.$$

Сравнив его с вектором Умова, введенным в гл. 6 (уравнение 6.26), убеждаемся, что в нашем случае поток мощности для бегущей волны соответствует вектору Умова, также зависящему от напряжения и скорости.

До сих пор мы рассматривали плоскую волну. Чтобы написать уравнение круговой поверхностной волны, мы должны в уравнении (11.2) заменить x на r – радиус-вектор рассматриваемой точки, лежащей на фронте волны; начало вектора лежит в точке возбуждения волны. Кроме того, надо учесть, что амплитуда убывает с расстоянием, поскольку число точек, вовлекаемых в колебание, растет пропорционально радиусу. Так как энергия колеблющейся точки пропорциональна квадрату амплитуды, то амплитуда в этой волне должна меняться обратно пропорционально корню квадратному из радиуса, поэтому для поверхностной круговой волны получается следующий закон движения:

$$z = Z_m \cos(\omega t - kr) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr). \quad (11.17)$$

Таков же закон распространения цилиндрических пространственных волн, образующихся при распределении возбуждающих точек на оси цилиндра, перпендикулярной направлению распространения волн.

В сферической волне, где число возбуждаемых точек пропорционально квадрату радиуса, амплитуда изменяется обратно пропорционально радиусу волны (начало его лежит в точке возбуждения). Поэтому уравнение бегущей сферической волны имеет вид:

$$z = Z_m \cos(\omega t - kr) = \frac{B}{r} \cos(\omega t - kr). \quad (11.18)$$

В уравнениях (11.17) и (11.18) A и B имеют размерности соответственно $L^{3/2}$ и L^2 .

Если рассматривается ограниченная область, размеры которой малы по сравнению с радиусом волны, то в ее пределах заметного изменения амплитуды не происходит, а радиус-векторы оказываются практически параллельными друг другу; тогда мы снова приходим к плоской волне.

Если среда обладает заметным поглощением, то интенсивность I волны при прохождении пути dx уменьшается, причем

$$-dI = \alpha I dx.$$

Интегрируя это выражение на отрезке $(0, x)$ и приняв в начале отрезка $I = I_0$, получаем интегральный закон поглощения энергии:

$$I = I_0 \exp(-\alpha x). \quad (11.19)$$

Величина α называется *коэффициентом поглощения энергии*. Аналогичный закон может быть записан и для амплитуды избыточного давления:

$$p_m = p_0 \exp(-0,5\alpha x).$$

Для воздуха $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$.

Звуковая волна (шаровая), распространяясь в воздухе, ослабляется как за счет поглощения, так и за счет увеличения размеров ее фронта. Так как α невелико, то на расстоянии до 1 км основной является вторая причина (ослабление в миллионы раз). На больших расстояниях, практически не представляющих особого интереса, роль поглощения становится решающей.

В области ультразвуковых частот (10^5 Гц и выше) улучшаются возможности создания волн, имеющих почти плоский фронт; в этом случае ослабление волны определяется в первую очередь ее поглощением.

11.4. Интерференция волн. Стоячие волны

Рассмотрим теперь, что произойдет, если в среде существуют одновременно волны, порождаемые источниками, удовлетворяющими следующим жестким требованиям:

- а) источники колеблются со строго одинаковой частотой;
- б) разность фаз между колебаниями источников длительное время (т. е. во все время изучения процесса, охватывающего большое число периодов) сохраняется постоянной. Взаимное влияние источников друг на друга не учитывается, хотя при малых расстояниях между источниками оно может иметь место;

в) если волны поперечные, то колебания, создаваемые обоими источниками, происходят в одной плоскости.

Источники, удовлетворяющие этим условиям, называются *когерентными*. Они могут быть созданы различными способами. Так, два громкоговорителя, питаемые общим генератором переменного тока звуковой частоты, являются очень удобными для практики когерентными источниками упругих звуковых волн в воздухе.

Расстояние между когерентными источниками должно превышать длину волны, создаваемой ими в окружающей среде.

Простым примером чисто механических когерентных источников являются две проволочки, прикрепленные к общей горизонтальной пружине и погруженные своими концами в водяную ванну. Освещая ванну снизу (ее дно должно быть прозрачным) и наблюдая проходящий свет на экране, мы увидим (в отсутствие волн) равномерно освещенное поле зрения. Когда же при колебаниях пружины в воде создаются поверхностные круговые волны, то различие в преломлении света на плоской и изогнутой поверхности воды приводит к образованию неравномерно освещенных участков. При колебаниях одной проволочки видны бегущие круговые волны, распространяющиеся от места погружения конца проволочки к краям ванны. При колебаниях обеих проволочек получается неподвижная картина – система гипербол, имеющих фокусы в точках расположения источников. Следовательно, вся поверхность воды разбивается на области с различными амплитудами колебаний. Так как волны подчиняются принципу суперпозиции, то для описания полученной картины следует просто сложить колебания, возникающие в каждой точке поверхности воды.

Итак, пусть оба источника – S_1 и S_2 (рис. 11.9) – колеблются по закону

$$z = Z_m \cos \omega t. \quad (11.20)$$

В точку A волны приходят с различными фазами (различие зависит от расстояний R_i):

$$z_1 = \frac{Z_m}{\sqrt{R_1}} \cos(\omega t - kR_1); \quad z_2 = \frac{Z_m}{\sqrt{R_2}} \cos(\omega t - kR_2).$$

В условиях опыта R_1 незначительно отличается от R_2 . Поэтому, принимая для простоты равенство амплитуд обеих волн (R – среднее расстояние до источников), получаем:

$$z_1 = \frac{Z_m}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR_1); \quad z_2 = \frac{Z_m}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR_2). \quad (11.21)$$

В аргументе косинуса усреднять R_i нельзя.

Складывая, находим:

$$z = z_1 + z_2 = \frac{2Z_m}{\sqrt{R}} \cos\left(\pi \frac{R_1 - R_2}{\lambda}\right) \cos(\omega t - kR). \quad (11.22)$$

Геометрическим местом точек, колеблющихся с одинаковой амплитудой, являются *гиперболы* (в пространстве это были бы гиперлоиды вращения с осью, проходящей через источники). Гипербола нулевого порядка, для которой разность хода волн

$$\Delta = R_1 - R_2 = 0,$$

вырождается в прямую, проходящую через середину расстояния между источниками перпендикулярно оси. Гиперболы с большими разностями хода располагаются по обе стороны от нулевой и тем дальше, чем больше разность хода. Наконец, гипербола, соответствующая наибольшей разности хода, вырождается в *прямую, совпадающую с осью*, причем для всех точек оси (вне отрезка S_1S_2) эта наибольшая разность хода равна расстоянию между источниками:

$$\Delta_m = m\lambda. \quad (11.23)$$

При разности хода, равной целому числу волн:

$$\Delta = n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

колебания имеют наибольшую амплитуду. При разности хода, составляющей нечетное число полуволн:

$$\Delta = (2n - 1) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

амплитуда колебаний наименьшая (нулевая). Из-за инерции светового восприятия глаз видит неподвижные гиперболы разной степени освещенности, зависящей от амплитуды.

Явление, при котором происходит *перераспределение энергии колебаний в пространстве* (в зависимости от разности хода волн), называется *интерференцией волн*.

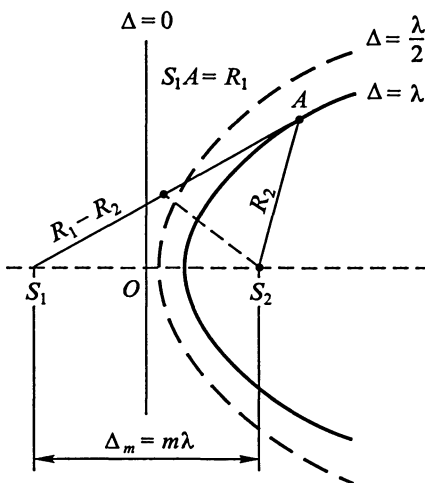


Рис. 11.9

Если источники расположены слишком близко друг к другу, так что наибольшая разность хода не достигает половины длины волны, то в пространстве, где волны перекрываются, *интерференционная картина не возникает* (нет ни одного минимума).

Это легко проверить, слушая звук, создаваемый двумя когерентными громкоговорителями, постепенно приближаемыми друг к другу.

Большой практический интерес представляет частный случай интерференции, когда две плоские когерентные волны равной амплитуды распространяются навстречу друг другу (например, в одномерной неограниченной среде); при этом *возникают «стоячие волны»*. Полагая, что волны распространяются вдоль оси X , можем задать бегущие волны уравнениями

$$z_1 = Z_m \cos(\omega t - kx), \quad z_2 = Z_m \cos(\omega t + kx).$$

Тогда суммарное смещение будет описываться выражением

$$z = z_1 + z_2 = 2Z_m \cos kx \cos \omega t. \quad (11.24)$$

Таким образом, *вместо косинуса, являющегося функцией двух переменных, появляется произведение двух косинусов, каждый из которых зависит от одной переменной*. Это означает появление у суммарного процесса новых физических свойств.

Распределение скоростей в стоячей волне подчиняется уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -2\omega Z_m \cos kx \sin \omega t. \quad (11.25)$$

Следовательно, имеются точки, постоянно находящиеся в покое, характеризуемые координатами $x = \frac{\pi}{2}(2n-1)\frac{1}{k} = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$, где

$n=0, 1, \dots$. Они отстоят друг от друга на $\frac{\lambda}{2}$ и называются *узлами смещения*.

Распределение относительных смещений и, следовательно, потенциальной энергии деформации таково:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2kZ_m \sin kx \cos \omega t. \quad (11.26)$$

Это означает, что имеются *узлы деформации* (при $x = \frac{\pi n}{k} = n\frac{\lambda}{2}$, т. е. посредине между узлами смещения).

Мгновенные распределения смещений для трех моментов времени изображены на рис. 11.10. Стрелками указаны мгновенные распределения скоростей. В момент $t = 0$ смещения всех точек наибольшие. В момент t_1 смещения всех точек составляют 0,7 соответствующих амплитуд. Такое же соотношение существует и между скоростями точек.

Кинетическая энергия $K \sim \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2$ концентрируется вблизи точек, имеющих наибольшую амплитуду скорости (и, следовательно, абсолютного смещения). Эти области называют *пучностями скорости* (или абсолютного смещения); *расстояние между ними равно половине длины волны.*

Энергия деформации $U \sim \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$ концентрируется вблизи точек, обладающих *наибольшим относительным смещением* (наименьшим абсолютным). Эти области называют *пучностями деформации*; они также расположены на расстоянии *полуволны друг от друга.*

Из (11.25) и (11.26) следует, что максимумы обеих энергий, равные по абсолютному значению, смещены во времени на четверть периода.

Поэтому есть моменты, когда все точки на мгновение останавливаются ($\omega t = \pi n$, $n = 0, 1, \dots$) и волна обладает только энергией деформации. Через четверть периода

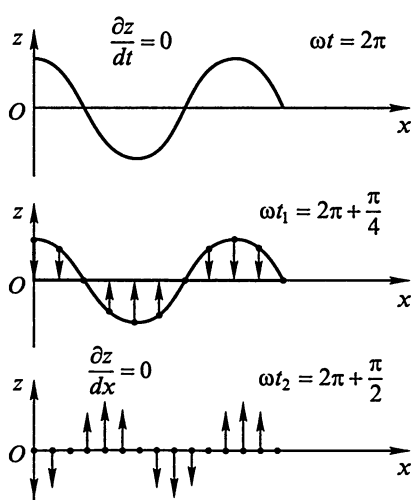


Рис. 11.10

да $\left(\omega t = (2n + 1)\frac{\pi}{2}\right)$ все точки среды одновременно проходят через свои положения равновесия с максимальными скоростями; деформации полностью исчезают, и волна обладает лишь кинетической энергией.

Так как мгновенное значение потока мощности пропорционально произведению $\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$, то в стоячей волне оно пропорционально $\sin 2kx \sin 2\omega t$.

Следовательно, среднее значение потока мощности за период T

равно нулю: в стоячей волне нет направленного переноса энергии. Происходит лишь периодическое ее перераспределение между соседними пучностями K и U .

Отметим в заключение, что скорости в пучностях деформации минимальны, поэтому пучности деформации иногда называют узлами скорости. Соответственно пучности скорости являются узлами деформации. Поэтому, говоря о пучностях и узлах, обязательно следует указывать, о какой физической величине (деформации или скорости) идет речь.

11.5. Отражение волн

Одномерные стоячие волны в лекционных условиях получают, заставляя бегущую волну отразиться назад от границы раздела двух сред.

Волна, дошедшая до границы раздела сред, частично отражается. Так, если левый конец горизонтального шнура жестко привязан к гвоздю, вбитому в стенку, а другой находится в руках экспериментатора, то при ударе по шнуру, например сверху вниз, можно заметить, что возникает местный изгиб шнура вниз – кратковременная деформация, бегущая по шнуру влево (рис. 11.11, а). После отражения от закрепленного конца отраженный изгиб имеет противоположный знак: шнур изгибается вверх. Это легко понять, если учесть, что у точки закрепления развиваются силы, препятствующие приходящему изгибу; они порождают изгиб противоположного знака, начинающий распространяться вправо (рис. 11.11, б). Смещение закрепленного конца все время отсутствует. Поэтому и в отраженной деформации, бегущей вправо, знак смещения изменен на обратный. Если отражается гармоническая волна, то такое изменение равносильно «потере» (или «приобретению») полуволны.

Действительно, на закрепленном конце (граница раздела, $x = 0$) имеем:

$$z_{\text{над}} = Z_m \cos \omega t; \quad z_{\text{отр}} = -z = Z_m \cos(\omega t \pm \pi).$$

Если второй конец шнура свободен (можно воспользоваться вертикально висящим шнуром и возбуждать его в одной из точек верхней части), то изгиб отражается на конце шнура без перемены знака смещения. Это значит, что при отражении бегущая (падающая) и отраженная волны на свободном конце шнура имеют смещения одинаковых знаков, в результате чего смещение удваивается. Но при этом на конце шнура отсутствует деформация.

При возбуждении шнура гармонической силой образуются бегущая и отраженная волны. При надлежащей длине шнура (см. ниже) создается стоячая волна.

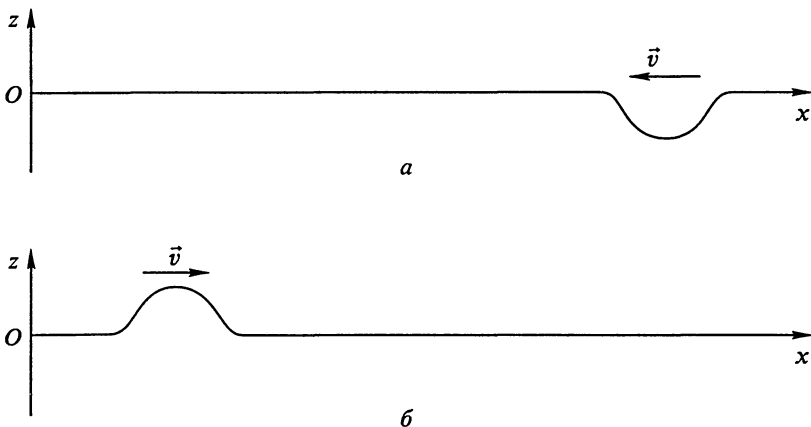


Рис. 11.11

Можно показать, что в общем случае (при нормальном падении волны на плоскую границу раздела сред 1 и 2) коэффициент отражения (по амплитуде) зависит от соотношения акустических сопротивлений сред:

$$\Gamma_z = \frac{Z_{\text{отр}}}{Z_{\text{пад}}} = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}. \quad (11.27)$$

Коэффициент отражения (по энергии) определяется квадратом выражения (11.27):

$$\Gamma_w = \left(\frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} \right)^2. \quad (11.28)$$

При равенстве акустических сопротивлений сред волна полностью проходит во вторую среду – отражение отсутствует. При большом различии акустических сопротивлений отражение получается почти полным.

Из (11.27) и (11.28) следует, что отражение энергии одинаково при переходе волны из среды 1 в среду 2 и при обратном переходе.

Амплитуда отраженной волны при этом также не меняется, фазы же оказываются противоположными.

При наклонном падении выражения для коэффициентов отражения усложняются.

Образование стоячих волн в одномерной среде (шнуре) удобно показать на следующем опыте. К камертону K , возбуждаемому электромагнитным способом, прикреплен конец шнура (рис. 11.12),

имеющего плотность ρ и сечение S . Другой конец шнура переброшен через блок и натягивается весом груза, прикрепленного к этому концу. Так как скорость распространения волны зависит от натяжения шнура (уравнение 11.5), то, регулируя натяжение шнура подбором груза, можно получить на нем интенсивные стоячие волны; для этого необходимо, чтобы бегущие волны подходили к границе раздела в одной и той же фазе. Это возможно в том случае, если на участке среды, где мы хотим получить стоячую волну (оба конца участка закреплены или свободны), укладывается целое число полуволн (четное число четвертей волн).

Если же один конец участка среды закреплен, а другой свободен, то его длина должна равняться нечетному числу четвертей волн, так как при одном из отражений происходит описанный выше скачок фазы. Изменяя длину шнура и его натяжение, можно получить разное число волн при одной и той же частоте возбуждающих колебаний. Наименьшая частота возникающих волн соответствует основному тону, бóльшие частоты – более высоким тонам (обертонам).

Когда на шнуре укладывается *целое число полуволн* (оба его конца можно считать закрепленными), то он колеблется в *резонансе* с вынуждающей силой, создаваемой камертоном, и амплитуда колебаний делается значительной. На рис. 11.12 показаны два возможных типа возбужденных стоячих волн: при $n = 1$ возбуждается основной тон (частота колебаний наименьшая), при $n = 2$ – второй обертон.

Такое же распределение получилось бы у стержня со свободными концами, только на концах был бы максимум смещения, а по середине – нулевое смещение (при $n = 1$). Если же *один конец стержня свободен, а другой закреплен* (рис. 11.13), то интенсивные стоячие волны получаются при условии, что *на длине стержня укладывается нечетное число четвертей волны*, так как на одном конце смещение должно быть нулевым, а на другом – наибольшим.

В опыте, описанном в § 10.3, вращающийся волчок возбуждал стоячие волны (на основном тоне) в плоских пружинах; на каждой из них укладывалась четверть волны.

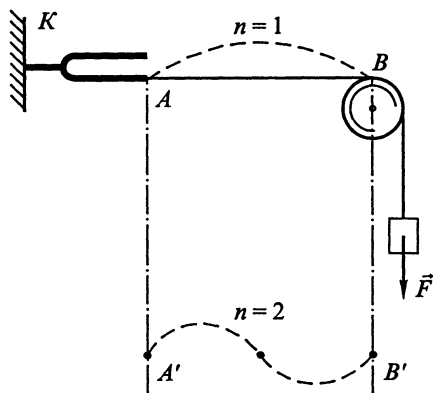


Рис. 11.12

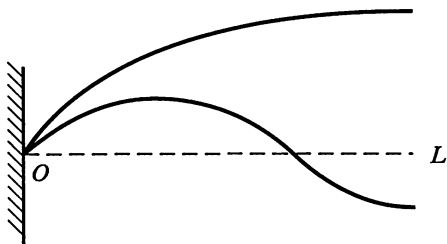


Рис. 11.13

Камертон, изобретенный в самом начале XVIII в., – это U-образно изогнутый стержень, совершающий поперечные колебания на основной частоте. Концы его ветвей свободны, узел смещений (пучность относительных деформаций) находится у середины ветвей. Там развиваются наибольшие силы, направленные

вертикально. Они приводят прикрепленный к этой части вертикальный стержень (стебель камертона) в вертикальные продольные колебания.

Обычно стебель крепится к верхней крышке деревянного «резонансного» ящика, длина которого в два-три раза больше двух других сторон. Ящик с одной стороны открыт. Продольно колеблющийся стержень возбуждает поперечные колебания верхней крышки ящика; в результате этого столб воздуха, заполняющего ящик, приходит в вынужденные резонансные продольные колебания, так как длина столба равна четверти длины волны в воздухе.

Специальная форма основного стержня камертона обеспечивает весьма малую амплитуду его колебаний на обертонах. Поэтому *хорошие камертоны возбуждают практически чистогармонические воздушные волны, воспринимаемые ухом как чистые музыкальные тона*. Нельзя не поразиться искусству старых мастеров, создавших столь совершенный источник звука в то время, когда теория колебаний только зарождалась. Добротность современных камертонов очень высока ($Q = 10^4$).

Стоячие волны удобны для определения длины волны. Зная длину волны, можно найти частоту (при известной скорости распространения) или скорость (при известной частоте).

Стоячие волны (и соответствующие им частоты) являются *нормальными волнами (частотами)* системы (см. § 11.1).

При возбуждении колебательной системы кратковременным единичным ударом, например при ударе молоточком по ветви камертона, возникают колебания последнего на собственной частоте. Это объясняется тем, что возбуждающий импульс имеет непрерывный спектр; в последнем обычно содержится и собственная частота колебаний камертона. Поэтому и возникают интенсивные колебания.

Такое же явление происходит и при ударе по торцу прямолинейного упругого стержня, имеющего несколько собственных частот.

Так как амплитуды высших гармоник обычно быстро уменьшаются с номером гармоники и одновременно уменьшается добротность стержня (по отношению к частотам гармоник), то звук, издаваемый стержнем, более или менее монохроматичен.

11.6. Принцип Гюйгенса

Вернемся к волнам, распространяющимся на поверхности воды или в пространстве. Если волна встречает на своем пути препятствие, линейные размеры которого соизмеримы с длиной волны, то ее фронт деформируется и волна не только отражается, но и огибает препятствие, что легко показать на водяных волнах, ставя на их пути небольшие преграды или сплошной экран с небольшими отверстиями. *Отклонение волны от прямолинейного распространения (огибание препятствий) называется дифракцией.*

Для определения волнового фронта при дифракции и других отклонениях от прямолинейного распространения современник Ньютона Х. Гюйгенс (1629–1695) предложил принцип, физическое содержание которого будет раскрыто в оптике. Этот принцип заключается в следующем. Если известны положение волнового фронта в момент t , направление распространения волны и скорость ее распространения \vec{v} , то можно каждую точку волнового фронта рассматривать как источник вторичных элементарных когерентных волн (*распространяющихся только вперед!*). Построив части шаровых элементарных волн, опирающиеся на мгновенный волновой фронт и имеющие радиус $v\Delta t$, и проведя их огибающую, получим положение волнового фронта в момент $t + \Delta t$. Отметим, что принцип Гюйгенса *ничего не говорит о распределении амплитуд по деформированному волновому фронту.*

Поставим на пути волны непрозрачный экран с небольшим (по сравнению с длиной волны) отверстием. Согласно принципу Гюйгенса, огибающая элементарных волн, выходящих из отверстия, оказывается почти полусферой, так как такое отверстие подобно точечному источнику волн. Если же на пути волны имеется экран с рядом малых отверстий (рис. 11.14), то огибающая будет почти плоской.

Пусть плоская волна, имеющая фронт, перпендикулярный плоскости чертежа, падает на плоскую границу раздела AD двух сред (рис. 11.15). Пользуясь принципом Гюйгенса, изучим сначала ее отражение. Положе-

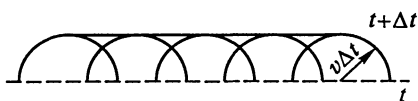


Рис. 11.14

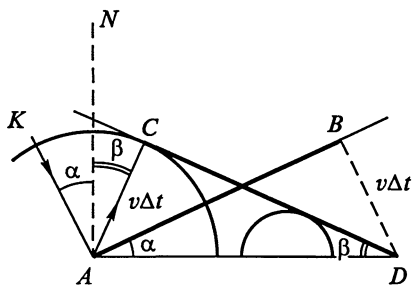


Рис. 11.15

в момент t показано линией AB . К моменту $t + \Delta t$ колебания, идущие по направлению BD , достигнут границы раздела. Но за это время уже образуются отраженные волны, изображенные на рисунке. Их огибающая CD определит положение отраженного волнового фронта в момент $t + \Delta t$. Из равенства треугольников ABD и ACD получаем:

$$\alpha = \beta, \quad (11.29)$$

т. е. угол падения равен углу отражения.

Кроме того, падающий луч KA , перпендикуляр AN , построенный из точки падения луча к границе раздела, и отраженный луч AC лежат в общей плоскости (плоскости падения), причем углы падения и отражения располагаются по обе стороны перпендикуляра. Положение плоскости падения определяется падающим лучом и перпендикуляром.

Одновременно с отражением имеет место и прохождение волны во вторую среду. Пусть скорости распространения волн в обеих средах равны соответственно \vec{v}_1 и \vec{v}_2 ($v_1 > v_2$). Линия AB (рис. 11.16) представляет след плоского волнового фронта в момент t . Линия CD соответствует следу волнового фронта в момент $t + \Delta t$. Из треугольников ABD и ADC получаем:

$$\sin \alpha = \frac{v_1 \Delta t}{AD}; \quad \sin \gamma = \frac{v_2 \Delta t}{AD}; \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (11.30)$$

При этом падающий KA и преломленный AC лучи и перпендикуляр AN , построенный из точки падения луча к поверхности раздела, снова лежат в плоскости падения.

Соотношения (11.29) и (11.30) справедливы не только для лучей, но и для соответствующих им волновых фронтов.

Постоянное (не зависящее от угла падения) отношение

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12} \quad (11.31)$$

называют *относительным показателем преломления*.

Полученные здесь законы отражения, известные из школьного курса физики, были установлены опытным путем (для световых лу-

чей) в III в. до н. э.; законы преломления нашел В. Снеллиус (1580 – 1626). Волновые свойства света в то время еще не были известны и законы формулировались только для лучей.

Принцип Гюйгенса при рассмотрении света как волнового процесса позволил не только получить законы отражения и преломления света, но и объяснить прямолинейность его распространения.

Введенные представления о волновом фронте как совокупности источников вторичных элементарных волн и описание волнового процесса как наложения этих вторичных волн оказались справедливы не только для световых, но и для любых волновых процессов независимо от их природы, и сохранили свое значение до настоящего времени.

Принцип Гюйгенса, в частности, указывает на возможность рассмотрения поведения волн во всем пространстве, если известны вторичные волны, порожденные в какие-либо ранние моменты времени.

Сам Гюйгенс в такой общей формулировке свой принцип не формулировал, его современную трактовку мы более подробно рассмотрим в «Оптике и атомной физике».

В заключение сделаем следующее замечание. Мы изучали волны на простейших примерах, когда тригонометрическая форма записи соответствующих выражений не приводила к трудностям при математических преобразованиях. На практике часто приходится сталкиваться со значительно более сложными волновыми явлениями. При их исследовании, как и при изучении колебаний в системах с одной степенью свободы, с успехом применяется метод комплексных амплитуд, в чем мы убедимся при изучении электромагнитных волн.

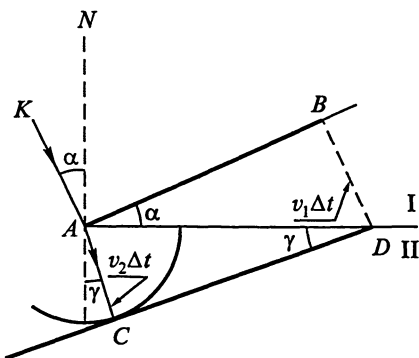


Рис. 11.16

11.7. Звук. Волновая природа звука

Учение о возбуждении, распространении и восприятии упругих звуковых волн называют акустикой. Очевидно, прежде всего нужно показать на опыте, что звук имеет волновую природу.

Известный опыт со звонком, помещенным под колокол воздушного насоса, и последующей откачкой воздуха из-под колокола доказывает, что для распространения звука необходима упругая среда. Волновые свойства звука обнаруживаются в интерференцион-

ных опытах (в частности, в опытах по стоячим волнам) и при явлении резонанса. Для наблюдения интерференции звука в аудитории нужно расположить два громкоговорителя, питаемых от одного звукового генератора, на расстоянии нескольких метров друг от друга. Большое расстояние между источниками необходимо для того, чтобы наибольшая разность хода волн, создаваемых громкоговорителями, была не слишком мала (см. § 11.4).

Предложив слушателям сидеть неподвижно, следует изменять расстояние между громкоговорителями, что, конечно, скажется на результатах интерференции волн и будет восприниматься слушателями как чередование усиления и ослабления звука.

Если же использовать звуковую волну длиной 2–3 м, чему отвечает частота около 100 Гц, и расположить источники на расстоянии, меньшем длины полуволны, то при сближении источников интерференция не наблюдается (см. § 11.4).

Наглядную звуковую стоячую волну можно создать в газовом столбе. Для этого берется металлическая труба, с одной стороны закрытая массивным диском, а с другой – тонкой резиновой мембраной. Вдоль верхней образующей трубы просверлен ряд узких (радиус не больше 0,25 мм), близких друг к другу отверстий (расстояние 5–7 мм).

На нижней образующей делается отверстие для подведения горючего газа. Перед опытом трубу, расположенную горизонтально, заполняют газом и у всех отверстий зажигают небольшие язычки пламени. Получается линия одинаковых язычков, так как условия горения для всех отверстий практически одинаковы. Затем у резиновой мембраны устанавливают громкоговоритель, питаемый от звукового генератора. Изменяя частоту генератора, можно получить в трубе стоячую волну; при этом звуковое давление вдоль оси трубы распределяется неравномерно, образуются узлы и пучности давления. Поэтому и условия свечения газа периодически меняются вдоль трубы. В этом опыте легко измерить длину волны.

Меняя частоту возбуждения, можно убедиться в том, что газовый столб имеет несколько собственных частот (см. § 11.5).

При обычно применяемых в опытах частотах, хорошо воспринимаемых человеческим ухом (около 1000 Гц), длина звуковой волны в воздухе составляет 0,2–0,3 м. В использованном газе она несколько больше, так как его молярная масса меньше, чем воздуха.

Резонансные свойства акустических систем можно показать на следующих опытах.

1. Если возбудить камертон, держа его в руке, то слышен слабый звук: поверхность колеблющихся ветвей мала и отдача звука во

внешнее пространство (излучение) невелика. Если же поставить камертон на приданный ему резонансный ящик, то излучение резко возрастает за счет увеличения размеров излучающей поверхности (открытый конец ящика). Если камертон ставят на ящик, рассчитанный для камертона иной частоты, то заметного усиления звука не наблюдается, так как отсутствует резонанс.

Отметим попутно, что если поставить звучащий камертон на крышку стола, излучение звука обычно заметно возрастает. Дело в том, что крышка стола (большая мембрана) обладает многими собственными частотами; одна из них может оказаться близкой к собственной частоте камертона.

2. Поставив на некотором расстоянии друг от друга два одинаковых камертона на резонансных ящиках и возбудив один из них, можно затем заглушить колебания возбудителя; при этом будет слышен (более слабый) звук второго камертона, пришедшего в резонансные колебания. Если же слегка изменить частоту одного из камертонов, надев на ветвь небольшой груз (при этом частота уменьшается), то резонансного возбуждения не происходит. При одновременном возбуждении обоих камертонов в первом случае (равные частоты) слышен звук определенной частоты с медленно уменьшающейся громкостью (вследствие затухания колебаний камертонов); во втором же случае (немного различные частоты) отчетливо слышны звуковые биения, частоту которых можно регулировать перемещением грузика вдоль ветви камертона.

3. Так как камертон обладает только одной собственной частотой и высокой добротностью, то он является превосходным гармоническим анализатором звука. Для демонстрации этого возьмем три камертона с одинаковой собственной частотой ω_1 . Первый оставим без изменений. На ветвь второго наденем небольшой грузик. Возбуждая одновременно оба камертона, получим биения, происходящие 1–2 раза в секунду; при этом частота второго камертона будет равна $\omega_1 - \Delta\omega$. Затем наденем грузик на ветвь третьего камертона и, возбудив его одновременно со вторым, получим биения той же частоты; следовательно, собственная частота третьего камертона равна $\omega_1 - 2\Delta\omega$. Далее возбудим одновременно первый и третий камертоны. Принимая (для простоты расчета), что амплитуды колебаний камертонов одинаковы, получим изменения звукового давления, происходящие по закону

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_3 = p_m \cos \omega_1 t + p_m \cos [(\omega_1 - 2\Delta\omega)t] = \\ &= 2p_m \cos(\Delta\omega t) \cos[(\omega_1 - \Delta\omega)t]. \end{aligned}$$

Но при этом *второй камертон не придет в вынужденные колебания*, в чем можно убедиться, например, подвесив у края его ветви не-

большой легкий (бузиновый) шарик, касающийся ветви: шарик останется неподвижным.

Объясняется это тем, что в негармоническом сложном звуке нет гармонической составляющей с частотой $(\omega_1 - \Delta\omega)$.

Звуковая волна, распространяющаяся в газе, является продольной (см. § 11.1). В § 11.3 было вычислено, что при умеренной громкости звука амплитуда смещения частиц в плоской волне имеет значение порядка 10^{-8} м, что близко к среднему расстоянию между молекулами. Но для характеристики звука более важна амплитуда относительного смещения, определяющая возникающее избыточное (над имеющимся статическим атмосферным) давление; его амплитуда (см. § 11.3) равна: $p_m \approx 0,1$ Па, т. е. в 10^6 раз меньше статического. Таким образом, в обычных условиях акустические колебания очень слабы по интенсивности.

11.8. Источники и приемники звука

Возбуждение и прием звука производятся разнообразными устройствами, их можно разбить на две существенно различные группы: а) устройства, работающие на собственной частоте, и б) устройства, работающие на вынужденных частотах.

а) На собственных частотах работают камертоны, струны и воздушные столбы, используемые в различных музыкальных инструментах. Собственная частота колебаний струны может изменяться при изменении ее натяжения или длины; кроме того, в зависимости от места возбуждения струны (смычком) изменяется относительная интенсивность возникающих обертонов, что определяет тембр звука. Убедиться в сложности звука музыкальных инструментов можно, наблюдая форму кривой создаваемого ими звукового давления и его спектр при помощи микрофона, подключенного к осциллографу и анализатору спектра.

Так как интенсивность излучения звука зависит от размеров излучающей поверхности, то струнные инструменты снабжаются резонансными ящиками (объем, занятый воздухом в деке скрипки или рояля, обладает многими резонансными частотами в области звуков, порождаемых инструментом).

Органннe трубы имеют определенные собственные частоты. Духовые инструменты – это те же трубы, но с регулируемой собственной частотой; для усиления излучения звука выходные отверстия труб духовых инструментов увеличиваются.

б) Существуют также акустические приборы, воспроизводящие или воспринимающие самые разнообразные звуки: к первым отно-

сятся телефоны и громкоговорители, ко вторым – микрофоны. Эти приборы работают на вынужденных колебаниях, и резонансные явления были бы здесь очень вредны, так как одним из основных требований к этой аппаратуре является ее широкополосность, т. е. способность воспроизводить без искажения звуки в широком диапазоне частот (от десятков герц до двадцати килогерц). Наличие резонанса (или резонансов) делает амплитудно-частотную характеристику устройства неравномерной, что приводит к искажению истинного соотношения интенсивностей отдельных спектральных составляющих сложного звука и, конечно, нежелательно. Для устранения вредного влияния резонансов нужно либо убрать все собственные частоты, характерные для аппаратуры, из рабочей области частот (что практически трудно), либо же резко снизить добротность системы. Именно по последнему пути и идут на практике. Достаточно сравнить длительность звучания камертона (после его возбуждения) и громкоговорителя (после выключения питающего тока), чтобы ясно уловить различие в их добротности.

К основным частям наиболее распространенных в настоящее время динамических громкоговорителей относятся: магнит (или электромагнит), создающий радиальное магнитное поле; катушка, способная двигаться в этом поле и связанная с большой конусообразной мембраной – диффузором. При пропускании по катушке тока звуковой частоты катушка под действием силы Ампера приходит в вынужденные колебания и колеблет диффузор, создающий в окружающем пространстве упругие звуковые волны.

Амплитудно-частотная характеристика хорошего громкоговорителя, т. е. зависимость амплитуды излучаемого звука от частоты (при постоянной амплитуде силы тока в катушке), изображена на рис. 11.17.

Широкополосность характеристики (разность между крайними частотами, воспроизводимыми без искажений) определяет качество громкоговорителя; у уличных громкоговорителей она невелика (и на характеристике имеются резонансные пики); этим объясняется низкое качество звука, даваемого такими приборами. В качественных приборах ширина полосы соответствует всему диапазону слышимых звуков (20 ... 20 000 Гц, см. § 11.9). На таком же принципе построены и электродинамические телефоны; только диффузор заменен в них небольшой мембраной.

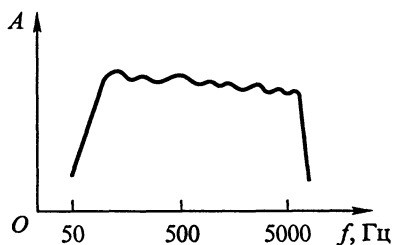


Рис. 11.17

Более распространенные электромагнитные телефоны имеют постоянный магнит, расположенный вблизи стальной мембраны. На магнит намотана катушка, обтекаемая током звуковой частоты Ω . Магнитная индукция B_0 постоянного магнита значительно превышает амплитуду B_m переменной индукции магнитного поля. Так как сила взаимодействия магнита с мембраной пропорциональна квадрату магнитной индукции, то получается:

$$F \sim (B_0 + B_m \cos \Omega t)^2 = B_0^2 + 2B_0 B_m \cos \Omega t + \frac{B_m^2}{2} + \frac{B_m^2}{2} \cos 2\Omega t.$$

Таким образом, телефон работает с искажениями – наряду с полезным сигналом частотой Ω появляется звук двойной частоты, но амплитуда ее относительно невелика.

Если убрать постоянный магнит, то удвоение частоты легко заметить; но при этом требуются сильные токи.

Применяемые в акустических приборах мембраны представляют собой двумерную колебательную систему, обычно закрепленную по краям. Такая система обладает несколькими собственными частотами, зависящими от геометрии мембраны и способа ее закрепления. При резонансном возбуждении она приходит в поперечные колебания и в ней устанавливаются стоячие волны. Распределение по поверхности мембраны линий узлов и пучностей смещения можно наблюдать, предварительно насыпав на горизонтально расположенную мембрану тонкий слой легкого порошка или песка: частицы сбрасываются с линий пучностей смещения и собираются в узловых линиях (фигуры Хладни).

Кроме частотной характеристики излучателя звука большое практическое значение имеет его *характеристика направленности*, т. е. зависимость излучения от направления. Откладывая в некотором масштабе отрезки, соответствующие интенсивности излучения в различных направлениях, и соединяя их концы плавной кривой, получают *диаграмму направленности*. Эта диаграмма тем острее, чем меньше отношение длины излучаемой волны к поперечному размеру излучателя (к его диаметру). Поэтому диаграммы излучателей расширяются для низких частот. У акустических излучателей направленность невелика, в чем легко убедиться, проходя мимо звучащего уличного громкоговорителя.

Вращая вертикально стоящий камертон вокруг вертикальной оси, легко заметить, что его излучение характеризуется довольно сложной диаграммой направленности.

Для мощных излучателей важен также коэффициент полезного действия, равный отношению излучаемой мощности к мощности, затрачиваемой на питание прибора.

Чувствительностью излучателя называют отношение создаваемого им звукового давления к напряжению (или силе тока), питающему излучатель.

Обратное отношение определяет *чувствительность приемника звука*.

Наиболее распространенными приемниками звука являются различные микрофоны, позволяющие управлять электрическим током в цепи при помощи звуковых колебаний, воспринимаемых мембраной микрофона.

Электромагнитный телефон может служить и микрофоном, если включить его в цепь постоянного тока и создавать перед мембраной звуковое давление. Изменения зазора между мембраной и полюсами магнита вызовут изменения магнитной индукции и породят переменную составляющую силы тока звуковой частоты.

Существуют также электродинамические микрофоны, устроенные подобно электродинамическим телефонам.

В ленточных микрофонах подвижная катушка заменена тонкой гофрированной лентой (толщина – несколько микрометров), выполняющей одновременно и роль мембраны. Эти микрофоны реагируют на весьма слабые звуки.

Широко распространены чувствительные (хотя и менее свободные от искажений) *угольные микрофоны*. В них мембрана опирается на капсулу с угольным порошком и при колебаниях вызывает изменения сопротивления порошка. Микрофон включен в цепь постоянного тока, соединенную через трансформатор с телефонной сетью. Переменная составляющая силы тока создает ЭДС индукции во вторичной обмотке трансформатора. В *конденсаторном микрофоне* мембрана в то же время служит одной из обкладок конденсатора C , включенного последовательно с резистором R в цепь источника постоянной ЭДС \mathcal{E} (рис. 11.18). При колебаниях мембраны меняется емкость (и заряд) конденсатора и в цепи получается изменяющийся во времени ток.

Переменное напряжение $u = iR$, создающееся на резисторе, снимается через разделительный конденсатор $C1$ (чтобы устранить влияние постоянного напряжения) и подается на усилитель или в телефонную сеть.

Частотная характеристика микрофона (зависимость выходного

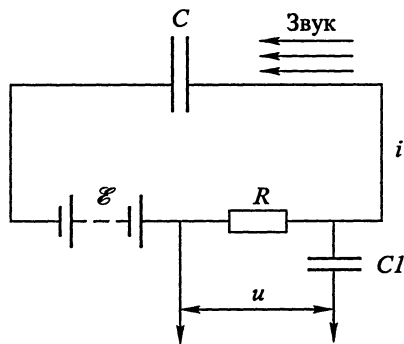


Рис. 11.18

напряжения от частоты при заданной амплитуде звукового давления) должна быть постоянна во всем диапазоне слышимых частот. Фактически она несколько искажена, как и у телефона.

Наконец, в *пьезоэлектрических микрофонах* звуковое давление вызывает появление переменной ЭДС на обкладках конденсатора, заполненного пьезоэлектриком (сегнетова соль, специальные керамики, кварц). Эти микрофоны отличаются малыми размерами и применяются, в частности, в слуховых аппаратах для лиц с пониженным слухом.

На этом же эффекте основаны звукозаписывающие устройства различных проигрывателей – игла, бегущая по бороздкам патефонной пластинки, создает давление на пьезоэлемент и порождает переменную ЭДС

Обратный пьезоэффект (возникновение механических колебаний при подаче на обкладки пьезоэлемента переменного напряжения) используется для получения ультразвуковых колебаний.

В магнитофонах запись (воспроизведение) звука осуществляется за счет изменения намагничивания специальной ленты, пропускаемой в узком зазоре магнитной головки, индукция магнитного поля которой пропорциональна силе тока в микрофоне (телефоне).

11.9. Физиологическая акустика

Остановимся вкратце на некоторых вопросах физиологической акустики. Нормальное человеческое ухо воспринимает звуки с частотами от 20 Гц до 20 кГц, но его чувствительность к различным частотам неодинакова. На рис. 11.19 нижняя кривая соответствует наименьшему давлению p_0 (интенсивности I_0), еще воспринимаемому на слух. Оно называется *порогом слышимости*. Около частоты $f = 3000$ Гц кривая имеет довольно размытый минимум, причем

$$p_0 \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ Па}, \quad I_0 \approx 10^{-12} \text{ Вт/м}^2.$$

Верхняя кривая (изученная хуже нижней, так как ее изучение связано с опасной для уха перегрузкой) характеризует давления (интенсивности), вызывающие в ухе болевое ощущение (порог осязания, или болевой порог). Это давление мало зависит от частоты и составляет примерно

$$p_{\max} = 30 \text{ Па}; \quad I_{\max} = 10 \text{ Вт/м}^2.$$

Вся область частот и давлений между этими кривыми доступна слуховому восприятию. В обычных условиях используется лишь очень небольшая часть этой области – природа, как всегда, обеспечивает безопасность работы живого организма.

Поразительна ширина диапазона интенсивностей, доступных восприятию:

$$\frac{I_{\max}}{I_0} = 10^{13};$$

у обычных измерительных приборов она редко превышает 100.

Приняв среднюю интенсивность слышимого звука равной 10^{-4} Вт/м² (при частоте 1000 Гц), находим амплитуду звукового давления [см. уравнение (11.18)]: $p_m = (2RI)^{1/2} = 0,3$ Па, что составляет весьма малую долю атмосферного давления p_a – всего лишь $3 \cdot 10^{-6} p_a$.

Существует и иная оценка интенсивности, принятая во многих разделах науки и техники.

За наименьшую стандартную интенсивность принимают интенсивность I_0 , определяемую конкретными условиями эксперимента. Тогда *уровень интенсивности* (мощности) любой волны (независимо от частоты), имеющей интенсивность I , по определению равен:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (11.32)$$

Эта величина выражается в децибелах (дБ).

Очевидно, 1 дБ соответствует интенсивности $I = 1,26I_0$, так как $\lg 1,26 = 0,1$.

Удвоению интенсивности соответствует увеличение уровня L на 3 дБ. Для самой широкой части области слышимости (см. рис. 11.19) получаем:

$$L = 120 \text{ дБ}.$$

В акустике физическому понятию интенсивности звука соответствует *физиологическое понятие громкости*. Пусть пороговая интенсивность на некоторой частоте есть I_f , а интенсивность данного звука той же частоты равна I . Безразмерную величину

$$L_f = 10 \lg \frac{I}{I_f},$$

выражаемую в фонах, называют уровнем громкости.

Еще раз подчеркнем, что введенная характе-

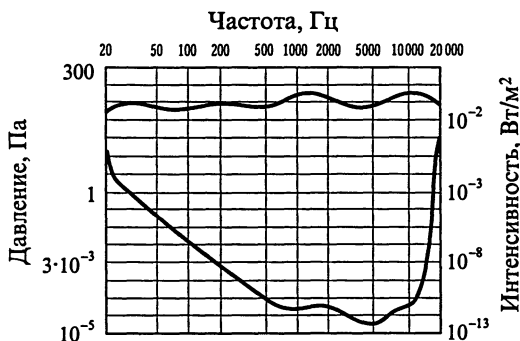


Рис. 11.19

ристика количественной оценки восприятия звука «в логарифмической шкале» удобна потому, что слышимость звуков – их воспринимаемая громкость – пропорциональна не I , а $\lg I$. Эта особенность, расширяющая «динамический диапазон» восприятия, характерна не только для слуха (но, например, и для зрения).

Изменение уровня громкости в самом широком месте диаграммы слышимости, где интенсивности отличаются в 10^{12} раз, составляет

$$L_f = 120 \text{ фонов.}$$

Но, например, при частоте 100 Гц, где порог слышимости равен $I_{100} = 10^{-8} \text{ Вт/м}^2$, максимальный уровень громкости составляет только

$$L_{100} = 80 \text{ фонов.}$$

Таким образом, число фонов определяет превышение интенсивности звука *данной частоты* над порогом слышимости *на той же частоте*.

Физической характеристике – частоте – соответствует физиологическая характеристика – высота тона. Если звук несложный, то высота поддается количественной оценке (музыкальные гаммы). Если звук сложен, высота может оцениваться только качественно.

Наконец, *сложный спектральный состав звука* (физическая характеристика) физиологи *описывают характеристикой «тембр»*, которая не поддается количественной оценке. Действительно, вопрос: «У кого больше тембр?» – не имеет смысла.

Замечательной особенностью уха является его способность реагировать только *на высоту тона и амплитуду, но не на фазовые сдвиги* в сложном звуке. Эта особенность была открыта Омом. Справедливость этого утверждения видна из того, что слушатели в концертном зале воспринимают мелодию одинаково, хотя, конечно, фазовые соотношения звуков, создаваемых разными инструментами, различны для слушателей в разных местах зала.

Имея два уха, мы можем определять направление, по которому приходит звук: мы поворачиваем голову, пока ощущения громкости в обоих ушах не сравняются. Однако при этом возможны ошибки в оценке направления прихода звука (спереди или сзади).

Если требуется получить сложный звук, то следует стремиться не к воспроизведению формы кривой звукового давления, но к *правильному воспроизведению амплитуд и частот*. На рис. 1.24 были изображены две кривые тока звуковой частоты, полученные

при одних и тех же частотах и амплитудах, но при различных начальных фазах слагающих колебаний. Хотя кривые имеют различный вид, но на слух оба звука, воспринимаемые при обтекании этими токами обмоток громкоговорителя, кажутся совершенно одинаковыми.

Сложный механизм создания звуков речи человеком в общих чертах таков: мы выдыхаем воздух через голосовые связки, находящиеся в нижней части горла, бессознательно регулируя их положение. Выходящая в полость рта струя воздуха совершает автоколебания. Собственные частоты полости регулируются положением языка, нёба, зубов и губ. Полость резонирует и обеспечивает достаточно мощное излучение звука. Если выдохнуть воздух и вдохнуть, например, гелий, то произносимые затем звуки имеют тембр, совершенно отличный от обычного тембра, так как замена воздуха гелием повышает резонансные частоты полости рта. Действительно, при данной форме резонатора его собственная длина волны

$$\lambda_0 = \frac{v}{f}$$

постоянна. В гелии (молярная масса $M = 4$ кг/моль) скорость звука больше, чем в воздухе ($M = 30$ кг/моль), примерно в 2,7 раза. Соответственно растет и собственная частота резонатора.

При произнесении той или иной гласной (на какой бы частоте она ни произносилась) в спектре звука обязательно присутствуют *одна или две частоты, почти не меняющиеся при переходе от низких тонов к высоким (форманты гласной). Каждой гласной отвечают свои форманты.*

Если воспроизводить звук, записанный на патефонной пластинке, вращая ее быстрее, чем она вращалась при записи (например, с частотой 45 об/мин вместо обычных 33,3 об/мин), то все основные частоты и все форманты будут воспроизведены с частотами, увеличенными в 1,35 раза. При этом (относительно небольшом) изменении частот все звуки воспринимаются как более высокие, но разборчивость речи еще сохраняется. Если же при воспроизведении звука выбрать еще большую частоту вращения пластинки (например, 78 об/мин), то наряду с резким повышением всех тонов совершенно исчезнет разборчивость, так как из-за сильного изменения частоты формант одни гласные превращаются в другие.

Что касается осознания смысла воспринятого звука, то этот сложный процесс, где наряду с физикой большую роль играют физиология и психология, выходит за рамки физики.

11.10. Эффект Доплера

Если источник звука (или наблюдатель) движется относительно воздуха, то частота воспринимаемого звука отличается от частоты испускаемого. Это явление открыто Х. До п л е р о м (1803 – 1853) и носит его имя.

Укрепив телефонную капсулу, питаемую током звуковой частоты, на конце длинного (1,5 ... 2 м) шнура можно, вращая капсулу перед аудиторией, показать эффект Доплера сразу большому числу слушателей.

При теоретическом рассмотрении явления следует подчеркнуть, что *все скорости (звука, наблюдателя и источника) отсчитываются относительно воздуха* – той среды, где распространяется звук.

Пусть в покоем воздухе, с которым связана система отсчета, находятся наблюдатель и источник звука S , излучающий звук частотой f_0 (длина волны в воздухе при этом равна $\lambda_0 = \frac{v}{f_0}$).

Если и источник, и наблюдатель A покоятся относительно воздуха, то мимо уха наблюдателя пройдут (и будут им восприняты) за 1 с волны, занимающие отрезок, длина которого l_1 численно равна v (рис. 11.20, *a*). Число этих волн $N_0 = \frac{v}{\lambda_0} = f_0$. Если же наблюда-

тель приближается к источнику со скоростью u_n , то через 1 с он окажется в точке B (рис. 11.20, *б*). Мимо его уха пройдут волны, занимающие отрезок, длина которого l_2 численно равна $v + u_n$; их число

$$N = \frac{v + u_n}{\lambda_0} = f_0 \left(1 + \frac{u_n}{v} \right) = f_1. \quad (11.33)$$

Следовательно, частота воспринимаемого звука *увеличивается*.

При удалении наблюдателя от источника число воспринимаемых им волн (и, следовательно, воспринимаемая частота) *будет уменьшаться*. Новое значение частоты, очевидно, равно:

$$f_2 = f_0 \left(1 - \frac{u_n}{v} \right). \quad (11.34)$$

При $u_n > v$ наблюдатель будет обгонять звуковую волну и воспринимаемая им частота будет равна:

$$f = f_0 \left(\frac{u_n}{v} - 1 \right).$$

Во всех случаях предполагается, что источник начал звучать раньше, чем начал двигаться наблюдатель.

При $u_{\text{н}} = v$ звуковое давление около наблюдателя все время будет постоянным, так что в этом случае звук не воспринимается.

Пусть теперь наблюдатель неподвижен относительно воздуха, а источник приближается к нему со скоростью u . Тогда длина волны, воспринимаемая наблюдателем, сократится по сравнению с λ_0 на

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{u}{v}.$$

Но так как между частотой и длиной волны существует известная связь:

$$f = \frac{v}{\lambda},$$

то воспринимаемая наблюдателем частота окажется равной

$$f_3 = f_0 \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \Delta\lambda} = f_0 \frac{1}{1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}} = f_0 \frac{1}{1 - \frac{u}{v}}, \quad (11.35)$$

т. е. частота увеличивается. По тем же причинам при удалении источника от наблюдателя длина волны, воспринимаемая последним, возрастает, а частота уменьшится до значения

$$f_4 = f_0 \frac{1}{1 + \frac{u}{v}}. \quad (11.36)$$

Формулы (11.33 – 11.36) можно объединить в следующую:

$$f = f_0 \frac{1 \pm \frac{u_{\text{н}}}{v}}{1 \mp \frac{u}{v}}, \quad (11.37)$$

где скорости $u_{\text{н}}$ и u положительны, верхние знаки соответствуют сближению, нижние – удалению.

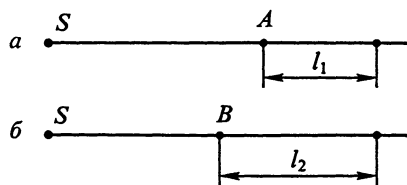


Рис. 11.20

При малых значениях $\frac{u_n}{v}$ и $\frac{u}{v}$, когда можно пренебречь вторыми степенями дробей, эта обобщенная формула приводится к виду

$$f = f_0 \left(1 \pm \frac{u_n}{v} \pm \frac{u}{v} \right), \quad (11.38)$$

где верхние знаки соответствуют сближению.

В заключение подчеркнем еще раз, что все скорости отсчитываются относительно воздуха, т. е. среды, где распространяется волна. Позже мы увидим, что эффект Доплера имеет место и в оптике; но в силу физических особенностей, присущих распространению света, он имеет другие количественные характеристики.

11.11. Ультразвуки и инфразвуки

Длина волны слышимых звуков довольно велика, а размеры звуковых излучателей обычно не слишком велики, поэтому, как правило, диаграмма направленности звуковых излучателей сравнительно широка. Гораздо бо́льшая направленность получается при создании ультразвуковых колебаний (частоты от 20 кГц до сотен миллионов герц; звуки более высоких частот называются гиперзвуками). Для их возбуждения используются два эффекта: пьезоэлектрический и магнитострикционный.

Пьезоэлектрический эффект – это способность некоторых кристаллов, в частности кварца, изменять размеры при создании в кристалле электрического поля.

Пусть h – толщина плоской пластинки кварца, т. е. расстояние между металлическими электродами, которые наносятся (методом напыления металла) на его поверхность. Тогда собственные частоты колебаний пластинки определяются выражением

$$f = \frac{v}{2h} n$$

($n = 1, 2, \dots$, v – скорость ультразвука в кварце), так как при собственных колебаниях на толщине h уложится целое число полуволн.

Подавая на электроды напряжение, меняющееся с частотой f , можно привести пластину в интенсивные вынужденные резонансные колебания, и она станет мощным излучателем ультразвука. Для лучшего излучения акустические сопротивления кварца и среды, воспринимающей излучение, должны быть близки друг к другу; поэтому ультразвуки хорошо излучаются в жидкость, а также в твердое тело. Кварцевые пластины способны излучать ультразвуковые

колебания с основной частотой от десятков до тысяч килогерц. Еще более высокие частоты получаются при возбуждении кварцевых пластин на обертонах. Часто вместо монокристаллического кварца используется керамика (например, титанат бария).

Магнитострикционный эффект заключается в способности ферромагнитных тел изменять свои размеры при намагничивании. Если ферромагнитный стержень поместить в продольное магнитное поле, меняющееся с ультразвуковой частотой, то он приходит в вынужденные колебания; при резонансе амплитуда этих колебаний резко возрастает. Таким образом, стержень также является ультразвуковым излучателем. Такие излучатели хорошо работают при низких ультразвуковых частотах (от сотен килогерц и ниже).

Для приема ультразвуковых колебаний используются такие же кварцевые пластины (или ферромагнитные стержни), так как существуют обратные эффекты: кварцевая пластина при механических воздействиях электризуется, а стержень изменяет свое намагничивание. Поэтому, связав кварцевую пластину с электрическим усилителем, можно зарегистрировать периодические изменения ее электризации в ультразвуковом поле. Намагниченность ферромагнитного стержня, находящегося в ультразвуковом поле и помещенного в катушку, периодически изменяется. При этом в катушке возникает электродвижущая сила индукции, легко регистрируемая электрическими устройствами.

Применения ультразвуков весьма многочисленны, и здесь можно указать лишь важнейшие.

1. Так как диаграмма направленности ультразвукового излучателя может быть сделана очень узкой, а поглощение ультразвуковых волн в воде не слишком велико, то возможна ультразвуковая подводная связь на значительных расстояниях. В частности, посылая с движущегося судна ультразвуковой импульс на дно и принимая импульс, отраженный дном, можно (по времени распространения импульсов) определять глубину океана во все время движения судна.

2. Пропуская ультразвуковой пучок через твердое тело или другие среды, можно изучать микроструктуру вещества и находить макроскопические неоднородности, не разрушая предмет исследований. На этом принципе основаны разнообразные дефектоскопы, а в последнее время с привлечением ЭВМ – и приборы медицинской диагностики.

3. Так как в ультразвуковой волне (благодаря высокой частоте) создаются громадные ускорения (в сотни раз превышающие ускорение свободного падения), то возможно получение различных физически интересных эффектов, не достижимых иными способами (например, получение эмульсий, кавитаций и др.).

Кавитацией называется образование в жидкости пузырьков воздуха, в которые жидкость интенсивно испаряется. Для образования пузырьков необходимо местное снижение давления в жидкости до значения, примерно равного значению давления ее насыщенного пара. При распространении ультразвуковой волны возникают сильные местные уменьшения давления (из-за высокой частоты колебаний), позволяющие кавитации развиваться. При последующем увеличении давления пузырьки схлопываются, создавая кратковременные (порядка микросекунды) повышения давления; они могут превышать атмосферное давление в сотни раз. При этом поверхностный слой приемника ультразвука частично разрушается. Это позволяет очищать ультразвуком загрязненные поверхности, причем весьма успешно. Кроме того, кавитация находит применение в биологии, в частности для разрыва живых клеток с целью выделения из них биологически активных веществ.

Инфразвуковыми волнами называются волны, соответствующие очень низким частотам (ниже 20 Гц). Укажем два интересных проявления этих волн. При волнении на море ветер, дующий вдоль поверхности моря, вызывает возникновение в воздухе колебаний с длиной волны, соответствующей расстоянию между гребнями водяных волн, — этому как раз и отвечают сверхнизкие частоты. Распространяясь в воздухе со скоростью, превышающей скорость распространения ветра и скорость распространения штормовых волн в море, инфразвуковые воздушные волны, достигая берега, служат предупреждением о приближающемся шторме. Инфразвуковые волны возникают в земной коре при землетрясениях и позволяют судить о местоположении очага землетрясения.

Инфразвуки, возникающие при взрывах или стрельбе из тяжелых орудий, могут быть использованы для определения направления на место взрыва (выстрела) с большого расстояния, так как в воздухе они поглощаются меньше, чем звуки более высоких частот.

Глава 12

ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ

12.1. Взаимодействие тел. Вещество и поле

Всемирное тяготение (гравитация), как уже отмечалось в § 2.5, является одним из фундаментальных взаимодействий. Частные проявления этого взаимодействия многократно обсуждались в предыдущих главах. Здесь мы его изучим подробнее.

Для тяготения характерно взаимодействие тел, удаленных друг от друга. Например, Земля притягивается к Солнцу и в свою очередь притягивает его к себе. Как же передается сила тяготения?

Ньютон, установивший количественную характеристику тяготения, но не знавший его причин, именно при обсуждении этого вопроса написал замечательные слова: «Гипотез я не измышляю», подчеркивая этим нежелание делать высказывания, не опирающиеся на факты или на идеи, уже подтвержденные фактами.

Но он высказал и другую глубокую мысль: «Предполагать... что тело может действовать на другое на любом расстоянии в пустом пространстве, без посредства чего-либо передавая действие и силу, – это, по-моему, такой абсурд, который немислим ни для кого, умеющего достаточно разбираться в философских предметах».

В настоящее время в физике считается, что взаимодействие между частицами вещества передается при помощи поля – особой формы материи, отличной от вещества и существующей наряду и одновременно с ним в пространстве, окружающем вещество. В конце курса физики мы увидим, что при определенных условиях поле и вещество могут испытывать взаимные превращения.

Хотя часто говорят, что тело (вещество) «создает» поле тяготения (или электрический заряд «создает» электромагнитное поле), но этот способ выражения недостаточно точен: поле существует вместе с веществом. Более того, в электродинамике мы узнаем, что электромагнитное поле, возникающее при изменении электромагнитного состояния вещества, может затем существовать совершенно самостоятельно.

Сейчас установилась точка зрения, что все взаимодействия между телами в природе осуществляются благодаря полям. Именно по-

средством соответствующих полей осуществляется гравитационное притяжение всех тел, притяжение или отталкивание электрических зарядов, взаимодействие токов и т. п. Взаимодействие в *меняющемся во времени электромагнитном поле* успешно описывают, вводя понятие о «частицах» поля – фотонах, имеющих массу покоя, равную нулю; этим фотоны отличаются от частиц вещества. Но фотоны обладают импульсом и энергией и могут взаимодействовать с веществом.

Теперь пытаются связать взаимодействие вещества и *меняющегося во времени поля тяготения* с особыми «частицами» – гравитонами. Однако обнаружить гравитоны на опыте пока не удастся. Это объясняется, по-видимому, недостаточной чувствительностью существующих приборов. Повышение чувствительности представляет громадные экспериментальные трудности, преодолеваемые очень медленно.

Нет также и достаточно ясных представлений о взаимодействии в постоянных (не меняющихся во времени) полях различной природы. Несмотря на существенное развитие наших представлений о природе гравитации (об этом будет еще говориться в конце главы), вопрос о способе передачи тяготения сейчас является в известной степени открытым. Поэтому мы сначала (§ 12.2 и 12.3) рассмотрим теорию тяготения Ньютона, сформулированную на языке сил тяготения, действующих между частицами вещества; при таком подходе, представляющем предельный случай полевого рассмотрения, скорость распространения взаимодействия считается бесконечно большой (по сравнению со скоростями взаимодействующих тел); роль промежуточной среды между ними не учитывается; допускается, что тела взаимодействуют на расстоянии (теория дальнего действия, см. § 2.3). Конечно, мы будем применять эту теорию лишь в тех пределах, где ее выводы не противоречат опыту. После этого (§ 12.4–12.6) будут развиты представления о поле тяготения и его основных свойствах.

12.2. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения

С давних пор люди задумывались над вопросом о строении окружающего мира. Как уже отмечалось, К. Птолемей одним из первых создал более или менее законченную картину Вселенной. Он считал Землю центром мироздания: все небесные тела двигались вокруг Земли по окружностям. Когда выяснилось, что небесные тела движутся более сложным образом, было сделано предположение, что они участвуют в нескольких круговых движениях.

Кеплер Иоганн (1571–1630), немецкий ученый, один из создателей небесной механики. Обобщая наблюдения датского астронома Тихо Браге, открыл три закона, названные его именем, описывающие движения планет Солнечной системы. Сконструировал телескоп, в котором объектив и окуляр – двояковыпуклые линзы, сформулировал закон обратной пропорциональной зависимости между освещенностью и квадратом расстояния до источника света, ввел понятие силы как причины ускорения.



По мере уточнения астрономических наблюдений устанавливались все большие отклонения от теории Птолемея¹. Но только в XVI в. Н. Коперник показал, что описание движения небесных тел упрощается, если систему координат связать с центром Солнца. Еще через полвека И. Кеплер, обрабатывая очень точные наблюдения Т. Браге (1546–1601), а также свои собственные, нашел три кинематических закона движения планет:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Радиус-вектор, связанный с планетой, описывает в равные промежутки времени Δt равные площади ΔS (рис. 12.1).

3. Кубы больших полуосей эллипсов пропорциональны квадратам времен обращения планет.

В 1687 г. Ньютон опубликовал закон всемирного тяготения, объясняющий физический смысл законов Кеплера и обобщающий их. Мы проследим за ходом мысли Ньютона, упростив математическую сторону дела. Вместо эллиптического движения рассмотрим движение по круговым орбитам, что вполне допустимо, так как эллиптичность большинства планетных орбит очень незначительна. При этом формулировка законов Кеплера упростится: Солнце окажется в центре круговой траектории. Смысл второго закона Кеплера сведет-

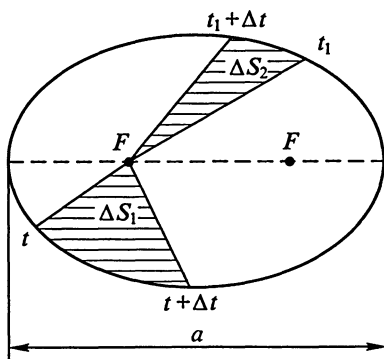


Рис. 12.1

¹ В настоящее время мы знаем, что философская идея Птолемея о Земле – центре мироздания – была совершенно ошибочна. Кинематическое же описание движения небесных тел в системе координат, связанной с Землей, вполне допустимо, и им до сих пор широко пользуются на практике.

ся к утверждению постоянства угловой скорости обращения планеты, третий закон даст:

$$R_i^3 = C_C T_i^2,$$

где R_i – радиус орбиты, T_i – период обращения планеты, C_C – постоянная (для всех планет Солнечной системы) величина.

Ньютон при определении центростремительного ускорения планет применяет второй и третий законы Кеплера:

$$a_i = \frac{4\pi^2}{T_i^2} R_i = \frac{4\pi^2 C_C}{R_i^2} = \frac{C'_C}{R_i^2}, \quad C'_C = 4\pi^2 C_C.$$

В это время уже было изучено движение спутников Юпитера, открытых Галилеем. Для них Ньютон получает:

$$a_i = \frac{4\pi^2}{R_i^2} C_{Ю} = \frac{C'_{Ю}}{R_i^2},$$

где $C'_{Ю}$ – уже другая постоянная, меньшая, чем C'_C . Наконец, для движения Луны вокруг Земли получается:

$$a_i = \frac{4\pi^2}{R_i^2} C_3 = \frac{C'_3}{R_i^2},$$

где C'_3 – еще одна постоянная, меньшая, чем две первые.

Ньютон делает гениальное предположение, что *каждая из постоянных зависит только от массы притягивающего тела*:

$$C'_C = GM_C, \quad C'_{Ю} = GM_{Ю}, \quad C'_3 = GM_3,$$

где G – общий для всех случаев коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц, а M_C , $M_{Ю}$, M_3 – соответственно массы Солнца, Юпитера, Земли. Постоянная G называется *постоянной тяготения*, или *гравитационной постоянной*, и является одной из фундаментальных физических постоянных.

Применяя теперь свой второй закон, Ньютон находит, что во всех случаях движение вызывается центральной силой (направленной всегда к притягивающему телу):

$$F = G \frac{Mm}{R^2},$$

где M и m – соответственно масса притягивающего и притягиваемого тела, R – расстояние между центрами тяжести тел, принимае-

мых за точки (что допустимо при их громадном относительном удалении).

Если условиться, что радиус-вектор направлен из центра притягивающего тела, то закон всемирного тяготения Ньютона принимает вид:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{R^3} \vec{R}. \quad (12.1)$$

Ньютон распространил закон (12.1) на все тела Вселенной. Он показал (в § 12.4 приводится современное доказательство), что однородный шар создает во внешнем пространстве такую же силу, как материальная точка с массой, равной массе шара, расположенная в центре последнего¹. Считая Землю однородным шаром, он сравнил ускорение свободного падения g у поверхности Земли с ускорением Луны, известным из астрономических наблюдений. Так как $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, $a_{\text{л}} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$, то получается:

$$\frac{g}{a_{\text{л}}} = 3600 = \left(\frac{R_{\text{л}}}{R_{\text{з}}} \right)^2,$$

как и должно быть, так как расстояние от Земли до Луны $R_{\text{л}}$ составляет 60 земных радиусов $R_{\text{з}}$.

Когда Ньютон открыл закон тяготения, расстояние от Земли до Луны было известно не очень точно. Поэтому результаты расчета, выполненного приведенным выше способом, были для него неубедительны. Ньютон задержал публикацию своего закона почти на два десятилетия. И лишь после того, как были получены более точные астрономические данные о значении $R_{\text{л}}$ и равенство выполнилось с большой точностью, Ньютон обнародовал свое замечательное открытие – такая научная осторожность была характерна для этого величайшего ученого.

Следует также отметить, что при своих расчетах Ньютон не знал (и так и не узнал) ни одного числового значения масс небесных тел, а также постоянной тяготения.

В проведенном выше рассуждении не учитывалось гравитационное взаимодействие планет. Оно относительно мало, так как масса Солнца велика по сравнению с массой любой планеты (она в 750 раз больше суммы масс всех планет); поэтому искажение траектории планеты притяжением соседних планет незначительно и можно было с ним не считаться.

¹ Это же верно для шара, состоящего из однородных шаровых слоев разной плотности.

12.3. Постоянная тяготения. Примеры применения закона всемирного тяготения

В формулу (12.1) входит коэффициент пропорциональности G . Так как единицы силы, массы и расстояния уже установлены, то нельзя произвольно распоряжаться этим коэффициентом – он должен быть определен из опыта. Это удалось сделать Г. Кавендишу (1731–1810) в 1798 г. при помощи крутильных весов, изобретенных Кулоном в 1794 г. Эти весы состояли из небольшой гантели (стержень с небольшими шариками массой m на концах), подвешенной за середину на длинной упругой и тонкой нити, заметно закручивавшейся уже под действием весьма малых сил. След нити, расположенной перпендикулярно чертежу, обозначен на рис. 12.2 буквой O . К гантели одновременно приближали два больших свинцовых шара (их масса M достигала 150 кг); ось вращения шаров составляла продолжение нити подвеса. Под действием силы тяготения гантель поворачивалась, нить подвеса закручивалась. Измеряя угол закручивания, можно было рассчитать вращающий момент, испытываемый гантелью, и силу взаимодействия между малыми и большими шарами. Зная массы взаимодействующих шаров и расстояние между их центрами, можно было вычислить *постоянную тяготения* G . По современным уточненным данным,

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2. \quad (12.2)$$

Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, поэтому, зная G и радиус Земли и считая Землю однородным шаром, можно найти ее массу. Получается $M_3 = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$. Отсюда средняя плотность Земли $\rho = 5500 \text{ кг/м}^3$; это значение более чем вдвое превосходит среднюю плотность поверхностных слоев Земли, что позволяет предполагать наличие внутри Земли плотного ядра.

По известному центростремительному ускорению Земли определяют массу Солнца:

$$M_C = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 3 \cdot 10^5 M_3.$$

Зная ускорения спутников планет, можно найти массы последних. Масса планет, не имеющих спутников, определяется по данным о возмущениях ими траекторий других планет.

Строго говоря, *Солнце и планеты обращаются вокруг общего центра масс*. Но так как масса Солнца много больше массы любой планеты, то центр масс системы лежит почти в центре масс Солнца; поэтому при наших рассуждениях мы и могли считать Солнце неподвижным. Более того, изучая возмущения движения наиболее удаленной из известных в то время планет – Урана,

Адамс и Лаверье независимо друг от друга и практически одновременно (в 1846 г.) нашли, что эти возмущения могут быть объяснены, если их приписать влиянию еще более далекой планеты; положение последней на небесном своде было ими предсказано на основании закона всемирного тяготения. Астрономы, действительно, обнаружили новую планету в указанном месте; она была названа Нептуном. В 1930 г. таким же образом был предсказан и обнаружен Плутон – еще более далекая планета Солнечной системы.

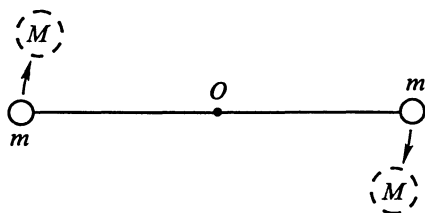


Рис. 12.2

Решая общую задачу движения под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, Ньютон показал, что возможны не только круговые и эллиптические, но и гиперболические (они наблюдаются у многих комет) и параболические траектории.

В настоящее время справедливость закона тяготения проверена вплоть до самых больших доступных астрономам расстояний. Замечательно, что силы тяготения не зависят от промежуточной среды (от действия силы тяготения нельзя защититься) и от природы тяготеющих тел. Опытным путем доказано, что тяготение испытывают незаряженные элементарные частицы (опыты производились с пучком нейтронов) и частицы света – фотоны. Обнаружить на опыте тяготение заряженных частиц трудно, так как другие взаимодействия у них значительно сильнее, чем тяготение. Однако нет сомнений, что закон тяготения распространяется и на заряженные элементарные частицы.

Действием силы тяготения со стороны Луны Ньютон объяснил возникновение приливов и отливов и казавшееся в то время совершенно непонятным явление их дважды в сутки (а не один раз).

Допустим для простоты, что Земля покрыта равномерным слоем воды (рис. 12.3). Ускорение, сообщаемое Луной, в точках *A*, *B*, *C* различно. Поэтому твердый земной шар с центром в точке *B* получит некоторое среднее ускорение: слой воды вблизи точки *C* – несколько большее, а слой воды вблизи точки *A* – несколько меньшее. Слои воды вблизи точки *C* будут несколько опережать земной шар, а близкие к точке *A* – отставать от него. Поэтому на линии, соединяющей центры Земли и Луны, образуются два водяных выступа (приливы), движущиеся вокруг центра Земли по мере ее вращения вокруг собственной оси и обращения Луны вокруг Земли (происхо-

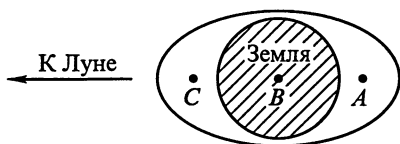


Рис. 12.3

дящего с гораздо меньшей угловой скоростью). В то же время на концах диаметра, перпендикулярного линии AC , уровень воды понижается (отливы). Очевидно, в каждом элементе водяного слоя приливы должны происходить

дважды в сутки (при пересечении линии AC). Соответственно два раза в сутки должны происходить и отливы. Так как Земля не вся покрыта водой, существуют силы трения, силы Кориолиса и тяготение со стороны Солнца, то истинная картина приливов и отливов оказывается гораздо сложнее. В частности, утверждение, что наибольшие приливы будут наблюдаться вдоль линии AC , оказывается неправильным. Но ньютонов принцип объяснения приливов остается в силе.

12.4. Поле тяготения. Напряженность поля. Теорема Остроградского–Гаусса

До сих пор мы рассматривали тяготение в духе идей Ньютона: между телами действуют силы тяготения, зависящие в каждый момент времени от расстояния между этими телами в этот момент.

Совершенно не ставился вопрос: если одно из тел переместится, то мгновенно ли это скажется на силе, испытываемой другими телами? Неявно предполагалось, что можно не считаться со временем передачи взаимодействия. Это означало, что скорость движения взаимодействующих тел исчезающе мала по сравнению со (неизвестной!) скоростью передачи взаимодействия.

Так думал и поступал Ньютон в своих превосходно оправдывавшихся расчетах. Позже его последователи стали считать, что взаимодействие передается мгновенно. Эта точка зрения, просуществовавшая в физике почти 200 лет, получила название теории дальнего действия.

В § 12.1 уже указывалось, что сам Ньютон стоял на совершенно иной точке зрения. Он считал, что в среде, заполняющей пространство между взаимодействующими телами, что-то происходит. Но в его время не было фактов, которые позволили бы понять *роль промежуточной среды, где взаимодействие передается от точки к точке (теория ближнего действия)*.

Дальнейшее развитие физики показало, что прав был Ньютон: *любое взаимодействие передается с конечной скоростью, не превышающей скорости света в вакууме*. По-видимому, тяготение передается

ся со скоростью, равной (или близкой) скорости света. В статических полях, где взаимодействующие тела неподвижны, скорость передачи взаимодействия роли не играет.

Будем рассматривать теорию тяготения с этой, более современной, точки зрения. При этом введем представление о совершенно новом физическом объекте – *поле тяготения (гравитационном поле)*.

По современным представлениям, *вокруг любого тела существует поле тяготения*. Оно существует независимо от присутствия других тел, проявляя себя в силовом действии на эти тела. Это утверждение базируется на неоднократно использовавшемся в динамике принципе суперпозиции: гравитационные поля нескольких материальных тел обладают тем свойством, что их взаимодействие с любым иным телом определяется геометрической суммой сил, создаваемых каждым полем. Вводимые нами характеристики поля определены в каждой точке, т. е. распределены в пространстве непрерывно.

Если в произвольную точку поля поместить небольшое «пробное тело» – материальную точку массой m и измерить силу \vec{F} , испытываемую этим «пробным телом», то рассматриваемую точку поля можно охарактеризовать векторной величиной – *напряженностью поля* $\vec{\Gamma}$, определяемой уравнением

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (12.3)$$

Следовательно, напряженность характеризует силу, испытываемую в данной точке поля единичной массой. Таким образом, *ускорение \vec{g} является напряженностью поля земного тяготения*.

Напряженность поля, связанного с точкой массой M на расстоянии \vec{R} от нее

$$\vec{\Gamma} = -G \frac{M}{R^3} \vec{R}. \quad (12.4)$$

В поле, связанном с телом данной массы M , напряженность поля тяготения зависит только от координат рассматриваемой точки поля. Поэтому напряженность называют «функцией точки». Разность напряженности

$$\dim \Gamma = \text{LT}^{-2}\text{M}^0.$$

В любом поле можно провести линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором напряженности в данной точке; такая линия называется *линией напряженности*. По определению, направление линий напряженности считается совпадающим с

направлением вектора напряженности. Например, линии напряженности поля тяготения, связанного с материальной точкой, начинаются в бесконечности и кончаются в этой точке.

Если в какую-либо точку поля поместить пробное тело, не имеющее начальной скорости, то оно придет в движение вдоль линий напряженности $\vec{\Gamma}$ (капли тающей ледяной сосульки падают вертикально).

Если же тело имело начальную скорость, не совпадающую по направлению с вектором $\vec{\Gamma}$, то его движение будет более сложным (струя воды из трубы, расположенной наклонно, образует параболу).

Условимся проводить через каждый элемент поверхности, нормальной к вектору напряженности, число линий, пропорциональное значению последней. Тогда получится удобный графический способ представления поля: оно тем сильнее, чем гуще располагаются линии напряженности.

Очевидно, что если силы подчиняются принципу суперпозиции, то это относится и к напряженностям: суммарная напряженность в данной точке поля находится векторным суммированием напряженностей:

$$\vec{\Gamma} = \sum_i \vec{\Gamma}_i.$$

В гравитационном поле, связанном с уединенной материальной точкой A массой M , все векторы напряженности направлены в эту точку. Такие поля называются полями центральных сил. Так как модуль напряженности в данном случае зависит только от расстояния между точкой A и пробным телом, то это поле обладает шаровой симметрией, а в каждом сечении, проходящем через точку A , поле имеет круговую симметрию (рис. 12.4, $a, б$).

Если поле связано с несколькими (или многими) материальными точками, то шаровой симметрии уже не будет. Так, поле, связанное с длинным бесконечно тонким стержнем, расположенным вдоль оси X (рис. 12.5, $a, б$), обладает круговой симметрией в сечениях, перпендикулярных оси стержня, но не имеет составляющей вдоль его оси. Наконец, поле, связанное с произвольно расположенными материальными точками, не обладает симметрией вообще.

Скалярная величина $dN = \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S}$ называется *элементарным потоком вектора напряженности* через элемент поверхности, характеризуемый вектором $d\vec{S}$, нормальным к элементу ($d\vec{S}$ представляет собой единичный вектор \vec{n} , умноженный на скаляр dS , равный площади поверхности элемента). *Поток вектора напряженности через поверхность конечных размеров*

$$N = \int_S \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} \quad (12.5)$$

определяет число линий напряженности, пронизывающих последнюю. Размерность потока есть:

$$\dim N = L^3 T^{-2} M^0.$$

Выбор положительного направления вектора $d\vec{S}$, вообще говоря, произволен. Если в поле выделяется элемент объема, охваченный некоторой замкнутой поверхностью, то за положительное направление $d\vec{S}$ принимается направление внешней нормали. Поэтому поток положителен, когда линии напряженности «выходят» наружу из элемента, ограниченного рассматриваемой поверхностью.

Окружим точку массой M шаровой поверхностью площадью S радиусом R с центром в этой точке (рис. 12.6).

Поток вектора напряженности в этом случае равен:

$$N = \int_S \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM, \quad (12.6)$$

так как векторы $\vec{\Gamma}$ и $d\vec{S}$ везде противоположны друг другу. Таким образом, поток вектора напряженности через шаровую поверхность, определяющий число линий напряженности, пронизывающих эту поверхность, в данном случае пропорционален массе M точки.

Построим теперь произвольную замкнутую поверхность площадью S_1 , охватывающую эту точку и ранее построенную шаровую поверхность площадью S (см. рис. 12.6). Из рисунка видно, что поток через обе поверхности одинаков, так как все линии, пронизывающие первую поверхность площадью S , пересекут и вторую поверхность площадью S_1 . Если какая-либо линия пересекает первую поверх-

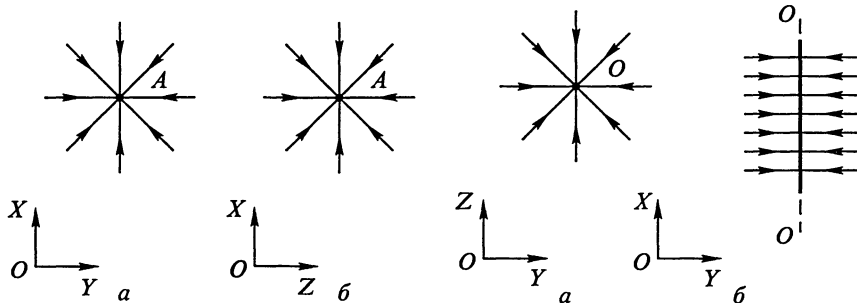


Рис. 12.4

Рис. 12.5

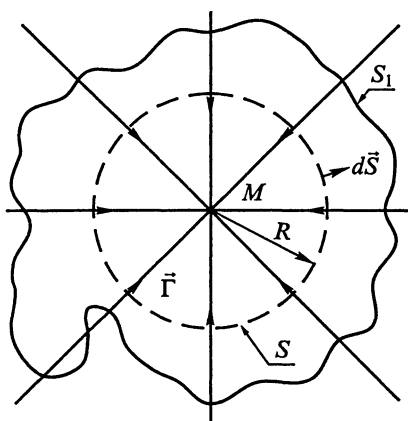


Рис. 12.6

ность несколько раз, то обязательно нечетное число раз, так что положительные и отрицательные слагаемые будут попарно уничтожаться и в сумме (12.5) каждая линия напряженности будет учтена лишь один раз.

Если внутри поверхности имеется несколько тел, то создаваемые ими напряженности в каждой точке суммируются векторно, а потоки через элемент поверхности – скалярно. Тела, расположенные вне замкнутой поверхности, дадут через нее нулевой поток; однако они создадут в каждой точке внутри поверхности некоторую

напряженность поля. Все указанные свойства потока объединяются в одной из важнейших теорем теории поля, принадлежащей Остроградскому и Гауссу. Эта теорема гласит: если в поле, связанном со многими телами массами M_k , выделить произвольную замкнутую поверхность площадью S , то поток вектора напряженности через эту поверхность

$$N = \int_S \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \sum_k M_k, \quad (12.7)$$

где в сумму входят только массы точек, расположенных внутри поверхности.

Эта теорема позволяет легко находить напряженность поля при симметричном расположении материальных тел. Так, однородный шар создает во внешнем пространстве такое же поле, как материальная точка, помещенная в центре шара. Это легко получить, исходя из симметрии распределения поля.

Найдем напряженность поля однородного шара массой M и радиусом R_0 . Выбрав внутри шара произвольную точку, отстоящую от центра на расстояние r_1 , проведем через эту точку поверхность площадью S_1 . Применяя к ней теорему Остроградского – Гаусса, получим:

$$N = \int_{S_1} \vec{\Gamma}_1 \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_1,$$

где M_1 – масса тел, охваченных сферой радиусом r_1 . Но так как

$$\frac{M_1}{M} = \frac{r_1^3}{R_0^3},$$

а модуль напряженности во всех точках поверхности одинаков (из-за симметрии задачи) и

$$\int_{S_1} dS = 4\pi r_1^2,$$

то напряженность поля внутри однородного шара оказывается равной

$$\vec{\Gamma}_1 = -G \frac{M}{R_0^3} \vec{r}_1. \quad (12.8)$$

При $r = R_0$ получаем, как и следовало ожидать:

$$\vec{\Gamma}_0 = -GM \frac{1}{R_0^3} \vec{R}_0.$$

При $r = R > R_0$ находим:

$$\vec{\Gamma} = -G \frac{M}{R^3} \vec{R},$$

что совпадает с (12.4).

В случае шарового слоя, имеющего радиусы r и R_0 (рис. 12.7), плотность ρ и, следовательно, массу

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho (R_0^3 - r^3),$$

для нахождения напряженности следует построить внутри слоя сферическую поверхность Остроградского–Гаусса (радиусом R). Внутри ее сосредоточена масса

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho (R^3 - r^3).$$

В силу симметрии поток вектора напряженности через эту поверхность равен:

$$-4\pi R^2 \Gamma = 4\pi G m.$$

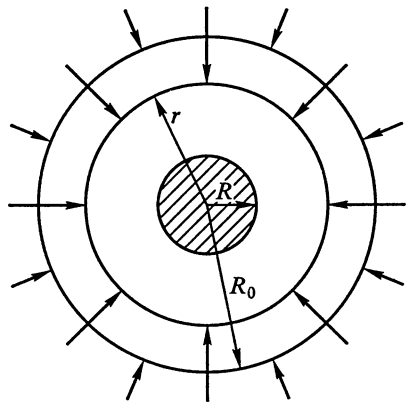


Рис. 12.7

Поэтому напряженность внутри слоя

$$\vec{\Gamma} = -\frac{Gm}{R^3}\vec{R} = -\frac{4}{3}\pi\rho\frac{G}{R^3}(R^3 - r^3)\vec{R}.$$

При $R = R_0$ получаем, как и в случае шара,

$$\vec{\Gamma} = -\frac{GM}{R_0^3}\vec{R}_0.$$

Снаружи слоя ($R > R_0$) напряженность, как и в случае шара,

$$\vec{\Gamma} = -\frac{GM}{R^3}\vec{R}.$$

Внутри шарового слоя ($R < r$) нет никаких тел. Поэтому поток вектора напряженности через сферическую поверхность радиусом $R \leq r$ равен:

$$N = \int_S \vec{\Gamma} \cdot d\vec{S} = 4\pi R^2 \Gamma = 0.$$

В силу симметрии все слагаемые под знаком интеграла имеют одинаковые знаки. Следовательно, напряженность внутри слоя равна нулю:

$$\vec{\Gamma}_{\text{зн}} = \vec{0}. \quad (12.9)$$

Зависимость напряженности Γ от расстояния для всех рассмотренных случаев показана на рис. 12.8, а.

Если полость внутри однородного шара расположена несимметрично, то поле в ней существует. Действительно, пусть в однородном шаре имеется сферическая полость; центры шара O и полости O_1 смещены на отрезок Δ (рис. 12.9).

Так как внутри полости нет тел, то поток вектора напряженности через любую замкнутую поверхность, построенную внутри полости, равен нулю. Но это не значит, что отсутствует и поле, так как отдельные элементарные потоки $dN = \vec{\Gamma}_0 \cdot d\vec{S}$ из-за отсутствия симметрии могут иметь разные знаки.

Для произвольной точки P искомая напряженность равна сумме напряженностей полей двух шаров: большого (радиусом r_0 , плотностью ρ) и малого (радиусом r , с отрицательной плотностью $-\rho$) (так как внутри шара поле создается только той частью шара, на поверхности которого лежит точка P). По принципу суперпозиции получаем:

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_0 + \vec{\Gamma}_1 = -\frac{4}{3}\pi\rho(\vec{r}_0 - \vec{r})G = \frac{4}{3}\pi\rho G\vec{\Delta},$$

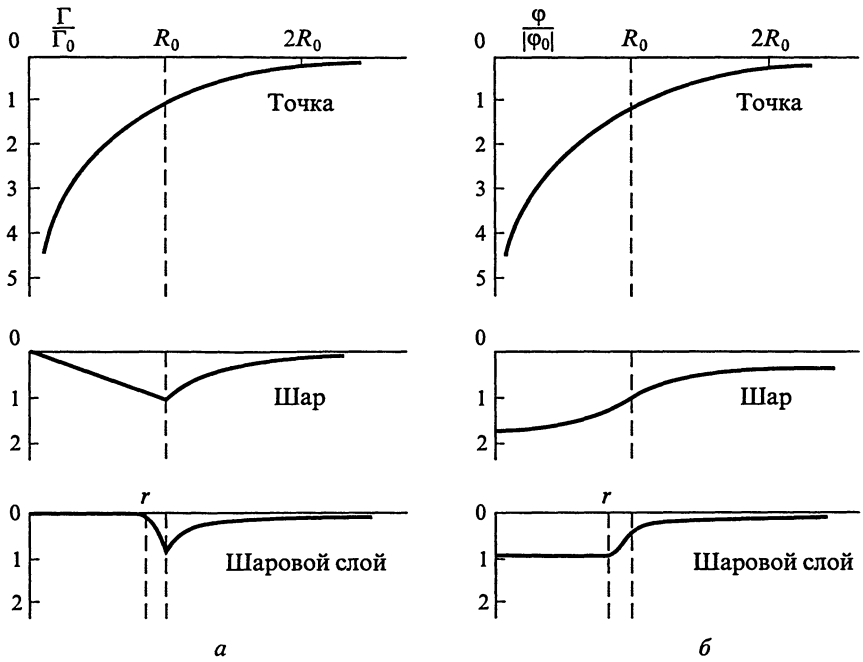


Рис. 12.8

где $\vec{\Delta} = \vec{r} - \vec{r}_0$ – вектор, направленный от центра малого шара O_1 к центру большого шара O . Таким образом, поле в полости оказывается одинаковым во всех точках.

На рис. 12.10 изображены линии поля (сплошные кривые), связанного с двумя материальными точками равных масс. Очень важно уяснить, что картина поля определяет силу, испытываемую третьим (пробным) телом, помещенным в данном поле, но никак не отражает взаимодействия тел, определяющих направленность поля (так, для рис. 12.10 они, конечно, притягиваются друг к другу)¹.

Пусть массы равномерно распределены в протяженном теле, ограниченном сверху горизонтальной плоскостью, пересекающей плоскость чертежа по линии AA (рис. 12.11). В этом случае поле во внешнем пространстве (над плоскостью AA) распределено, как показано на рисунке.

На расстояниях, достаточно малых по сравнению с длиной и шириной поверхности тела, напряженность поля одинакова во всех

¹ Значение пунктирных кривых на рис. 12.10 и 12.11 и стоящих около них чисел будет пояснено в § 12.5.

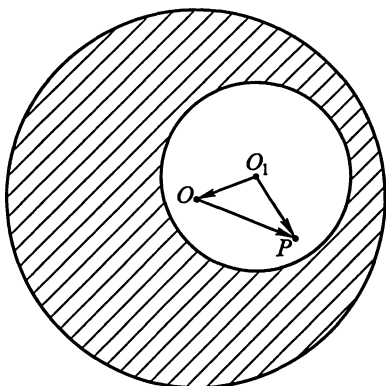


Рис. 12.9

точках; эта область выделена на рисунке; подобное поле называется *однородным*.

Поле земного тяготения можно считать однородным в пределах небольшой области, примыкающей к поверхности Земли, когда можно не считаться с кривизной Земли.

Во всяком однородном поле напряженность постоянна во всех точках:

$$\vec{\Gamma} = \text{const.}$$

Гравитационная сила (12.1) обладает еще одной замечательной особенностью. Как показывает уравнение (12.4), хотя напряженность при возрастании расстояния от центральной точки поля убывает до нуля, но все же поток напряженности (12.7) остается постоянным. Это объясняется тем, что площадь поверхности интегрирования (при использовании теоремы Остроградского–Гаусса) возрастает пропорционально квадрату расстояния, а напряженность убывает обратно пропорционально ему же.

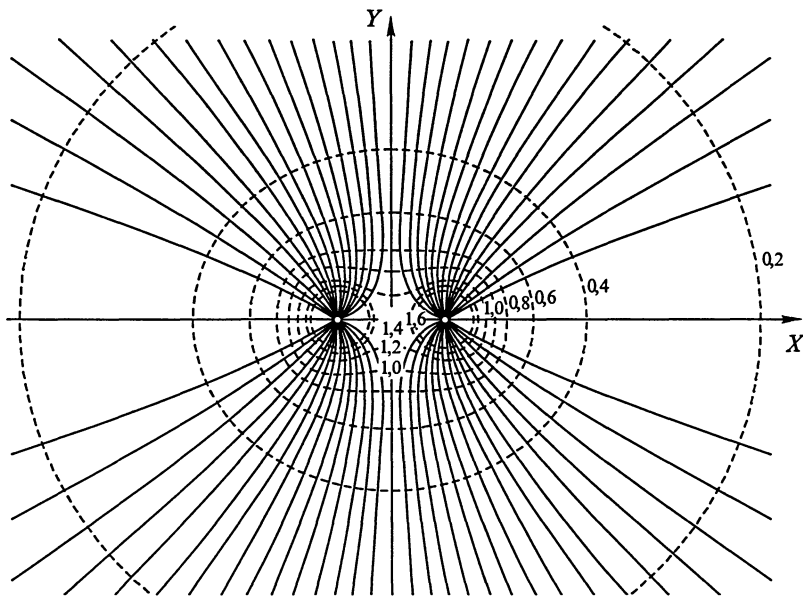


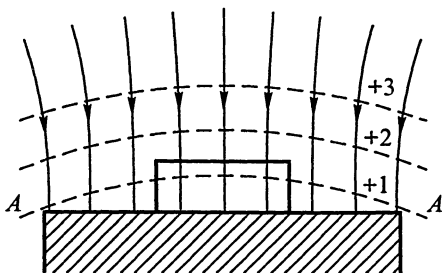
Рис. 12.10

Силы, обладающие этим свойством (например, сила Кулона, описывающая взаимодействие между точечными электрическими зарядами), называются *дальнодействующими*.

Если центральная (не гравитационная) сила меняется по закону

$$F \sim \frac{1}{R^{n+2}},$$

Рис. 12.11



где $n > 0$, то вследствие симметрии поток напряженности

$$N \sim \frac{1}{R^n}$$

будет убывать с расстоянием, стремясь к нулю тем быстрее, чем больше значение n . Такие силы в природе существуют (например, ядерные). Их называют *короткодействующими*.

12.5. Работа силы тяготения. Потенциал поля тяготения. Потенциальная энергия. Связь потенциала с напряженностью

Кроме векторной характеристики поля – его напряженности, определяющей силовое действие поля, вводится скалярная характеристика поля, связанная с работой сил поля. Эта характеристика называется *потенциалом* данной точки поля.

Рассмотрим работу сил тяготения в поле материальной точки массой M (рис. 12.12). Пусть пробное тело массой m перемещается по произвольному пути между точками 1 и 2. При этом движении, судя по форме траектории, на точку массой m действуют и какие-то иные силы. Но на основании принципа суперпозиции можно утверждать, что их действие не скажется на работе сил тяготения; эта работа

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -GMm \int_1^2 \frac{dl}{R^2} \cos(\widehat{d\vec{l}}, \vec{F});$$

но

$$dl \cos(\widehat{d\vec{l}}, \vec{F}) = dR;$$

ПОЭТОМУ

$$A = GMm \left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = m(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (12.10)$$

Функции φ_1 и φ_2 в поле материальной точки массой M зависят только от R_1 и R_2 :

$$\varphi_i = -G \frac{M}{R_i} + \text{const}. \quad (12.11)$$

Работа сил тяготения A оказалась *независимой от формы пути*; она полностью определяется положением начальной и конечной точек.

Раньше уже указывалось, что так бывает далеко не всегда; например, работа сил трения зависит от формы пути, так как сила трения в любой точке противодействует движению и зависит от скорости, а не от координат.

Функцию

$$\varphi = -\frac{GM}{R} + \text{const}$$

называют *потенциальной функцией* (или просто *потенциалом*) точек поля, созданного материальной точкой массой M . Потенциал, как и напряженность, является «функцией точки», т. е. зависит лишь от координат.

Из уравнения (12.10) следует, что *работа сил поля не зависит от выбора постоянной в выражении* (12.11). Эта постоянная не играет

роли ни в каких физических приложениях потенциала, поэтому ее можно выбрать произвольно — всегда важна лишь разность потенциалов. В рассматриваемом случае разумно выбрать потенциал равным нулю на бесконечности ($\varphi(R) = 0$).

Тогда выражение $\lim_{R \rightarrow \infty} \varphi(R) = 0$ для потенциала точек поля упрощается и примет вид

$$\varphi = -\frac{GM}{R}; \quad \dim \varphi = L^2 T^{-2}. \quad (12.12)$$

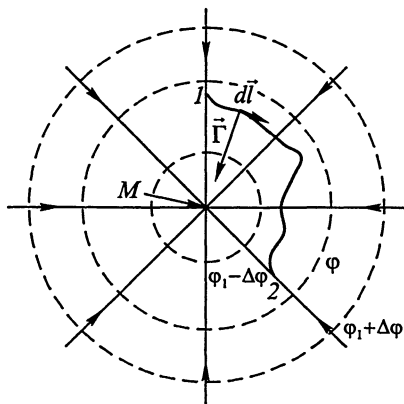


Рис. 12.12

При этом потенциалы всех точек этого поля – отрицательны. Далее, из уравнения (12.10) следует, что работа сил тяготения по любой замкнутой траектории равна нулю:

$$A = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = m \oint \vec{\Gamma} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (12.13)$$

Интеграл, стоящий в уравнении (12.13), представляет собой циркуляцию вектора $\vec{\Gamma}$ (см. § 7.7). Итак, циркуляция вектора напряженности поля тяготения равна нулю (независимо от формы выбранной замкнутой траектории).

В силу принципа суперпозиции уравнение (12.10) верно и для поля, созданного любой системой материальных точек массами M_k , причем под ϕ следует понимать скалярную сумму

$$\phi = \sum_k \phi_k = -G \sum_k \frac{M_k}{R_k}.$$

Пользуясь (12.11), потенциал некоторой точки поля тяготения можно определить как отношение работы, совершаемой силами поля при перемещении материальной точки массой m из данной точки в бесконечность, к этой массе. Следует отметить, что эта работа отрицательна, так как силы тяготения препятствуют удалению точки массой m .

Силы, подчиняющиеся условию (12.13), называются *консервативными*. Это же название присваивается системам, где действуют только консервативные силы (см. гл. 2).

К силам, не подчиняющимся условию (12.13), например силам трения, понятие потенциала неприменимо.

В поле можно построить *поверхности, содержащие точки с одинаковым потенциалом (экипотенциальные поверхности)*. В поле, созданном материальной точкой, эти поверхности являются шаровыми поверхностями; центр поверхностей совпадает с самой точкой (см. рис. 12.12, где пересечения поверхностей равного потенциала с плоскостью чертежа показаны пунктиром).

В полости, охваченной шаровым слоем, напряженность поля равна нулю, а потенциал постоянен (по всему объему полости). В самом шаровом слое, а также внутри сплошного шара поверхности равного потенциала также шаровые. На рис. 12.13 показано сечение однородного шара плоскостью, проходящей через его центр. Следы экипотенциальных поверхностей на этой плоскости представляют собой окружности. Потенциал на поверхности шара принят равным -1 Дж/кг.

Пунктирные кривые на рис. 12.10 также представляют собой сечения плоскостью чертежа экипотенциальных поверхностей; зна-

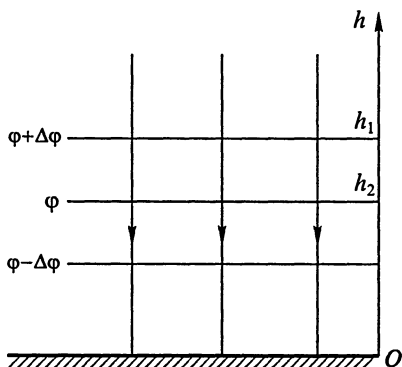


Рис. 12.13

чения потенциалов, выраженные в джоулях на килограмм, соответствуют числам, стоящим у кривых.

В однородном поле поверхности равного потенциала — это плоскости, перпендикулярные линиям напряженности (средняя часть рис. 12.11 и 12.14). Заметим, что здесь нельзя говорить о потенциале бесконечно удаленных точек (ведь область однородного поля всегда ограничена!). Например, вблизи земной поверхности поле тяготения можно считать однородным в

объеме с основанием в несколько сот квадратных метров и высотой 100–200 м.

У поверхности Луны (ее радиус в 3,7 раза меньше радиуса Земли) размеры области однородного поля соответственно уменьшаются в 3,7 раза. Чем более точны проводимые физиком измерения сил тяготения, тем меньше область поля, в которой оно может считаться однородным. В случае однородного поля за нулевой потенциал обычно принимают потенциал на поверхности тела, связанного с полем (например, на поверхности Земли). Тогда потенциалы всех точек поля вне тела положительны.

Эта условность в выборе нулевого значения потенциала и связанная с ней условность знаков, приписываемых потенциалу, не должна смущать читателя: во всех расчетах важно лишь изменение потенциала (разность потенциалов), а не его абсолютное значение; изменения же, конечно, не зависят от выбора нулевых значений.

Если материальная точка массой m находится в поле, связанном с другими телами, то в точке B с потенциалом φ ее потенциальная энергия

$$U = m\varphi.$$

Если на бесконечности $\varphi = 0$, то $U < 0$, так как силы поля должны были совершить положительную работу при перемещении данной материальной точки из бесконечности в точку B . Конечно, при этом материальная точка приобрела кинетическую энергию.

Уравнение (12.10) можно представить в виде

$$A = K_2 - K_1 = \Delta K = m(\varphi_1 - \varphi_2) = U_1 - U_2 = -\Delta U.$$

Итак, работа сил тяготения при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2 равна приросту кинетической энергии этой точки или убыли ее потенциальной энергии:

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2.$$

Так что полная механическая энергия точки

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 = \text{const.} \quad (12.14)$$

Энергия в поле консервативных сил не меняется. С частным случаем этого закона мы встречались в динамике.

В однородном поле тяготения (см. рис. 12.14) значения потенциала тем больше, чем дальше расположена точка поля от выбранной в этом случае поверхности нулевого потенциала, причем потенциал пропорционален этому расстоянию, так что работа сил поля при перемещении точки массой m на расстояние $h_2 - h_1$

$$A = m(\varphi_1 - \varphi_2) = m\Delta\varphi = m\Gamma(h_1 - h_2) = -\Delta U \quad (12.15)$$

равна, как и раньше, убыли потенциальной энергии точки.

Так как вектор силы, действующей на тело, помещенное в поле тяготения, направлен по касательной к линии напряженности, а работа сил тяготения при перемещении по эквипотенциальной поверхности равна нулю, то *пересечения линий напряженности и поверхностей равного потенциала происходят всегда под прямым углом* (см. рис. 12.10–12.12, 12.14).

Если условиться строить поверхности равного потенциала со значениями, отличающимися друг от друга на одну и ту же величину $\Delta\varphi$, то семейство эквипотенциальных поверхностей будет наглядно характеризовать свойства поля: чем ближе друг к другу поверхности, тем больше модуль напряженности поля. При этом *вектор напряженности направлен по нормали в сторону убывания потенциала*.

Из уравнения (12.11) следует, что потенциал и напряженность связаны между собой. Действительно, для поля, созданного материальной точкой массой M ,

$$\varphi = -G \frac{M}{R}; \quad \vec{\Gamma} = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{\vec{R}}{R} = -G \frac{M}{R^3} \vec{R}. \quad (12.16)$$

В этом случае вдоль радиуса происходит самое быстрое изменение потенциала с расстоянием; в то же время радиус является нормалью к поверхности равного потенциала. Напомним, что начало радиус-вектора \vec{R} совпадает с началом координат, т. е. с точкой массой M .

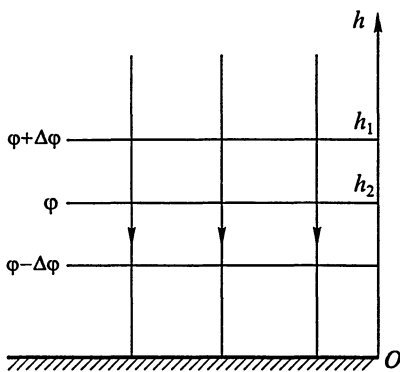


Рис. 12.14

В векторном анализе вводится векторная функция – градиент потенциала:

$$\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dn} \vec{n}_0, \quad (12.17)$$

где \vec{n}_0 – единичный вектор, направленный в сторону быстрого изменения потенциала.

В прямоугольной системе координат вектор $\text{grad } \varphi$ выражается так:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}, \quad (12.18)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы.

Выражения (12.16) можно представить в следующем виде:

$$\vec{\Gamma} = -\text{grad } \varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \vec{n}_0; \quad \varphi = -\int \vec{\Gamma} \cdot d\vec{n} + C. \quad (12.19)$$

Эти соотношения являются общими для всех гравитационных полей. Пользуясь ими, найдем распределение потенциала внутри однородного шара, имеющего радиус R_0 и массу M . Ранее было найдено, что во внешнем пространстве ($r > R_0$) потенциал

$$\varphi = -\frac{GM}{r},$$

причем постоянная интегрирования принята равной нулю. На поверхности шара получается:

$$\varphi_0 = -\frac{GM}{R_0}.$$

Так как $\vec{n}_0 dn = -d\vec{r}$, то, пользуясь (12.19) и (12.18), находим, что внутри шара ($r < R_0$)

$$\varphi = \int \frac{GM}{R_0^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{GM}{R_0^3} \frac{r^2}{2} + C_1.$$

Постоянная C_1 уже не является произвольной. Она определяется из известного значения потенциала на поверхности шара. Так как при $r = R_0$ должно быть:

$$\varphi = \varphi_0 = -\frac{GM}{R_0},$$

то получаем:

$$C_1 = -\frac{3}{2} \frac{GM}{R_0},$$

и потенциал внутри шара определяется выражением

$$\varphi = -\frac{3}{2} \frac{GM}{R_0} + \frac{GM}{2R_0^3} r^2.$$

Аналогично вычисляется и потенциал внутри шарового слоя. При этом в полости слоя ($R < r < R_0$) потенциал постоянен и его значение равно значению потенциала при $r = R$.

Распределение потенциала для всех рассмотренных случаев показано справа на рис. 12.8, б, где его удобно сопоставить с распределением напряженности.

В § 6.5 мы нашли, что работа сил упругости, так же как и сил тяготения, определяется лишь начальной и конечной точками пути; позже мы узнаем, что таким же свойством обладают кулоновские силы взаимодействия между неподвижными электрическими зарядами. *Поля, характеризующиеся потенциалом, называются потенциальными, или безвихревыми, полями* в отличие от вихревых полей, где линии напряженности являются замкнутыми кривыми (примером вихревого поля служит магнитное поле электрического тока).

Сведения, полученные при рассмотрении гравитационного поля, позволяют глубже понять сформулированный в гл. 2 закон сохранения и превращения механической энергии.

Рассматривая движение тела под действием гравитационных сил, мы убедились в том, что его полная механическая энергия не меняется. Сохранение механической энергии при движении тела в гравитационном поле обусловлено особым свойством этого поля – независимостью работы сил поля от формы и длины пути (или, что то же, равенством нулю циркуляции вектора напряженности по любому контуру). При этом предполагается отсутствие сил трения и потерь энергии на их преодоление. Поэтому теперь можно уточнить закон *сохранения механической энергии* (2.42), дав следующую его формулировку: **если в системе действуют только консервативные силы, то энергия системы является чисто механической и сохраняется во времени:**

$$E = K + U = \text{const.}$$

Многие реальные механические движения сопровождаются трением. Силы трения не являются консервативными, так как их работа зависит от формы и длины пути, а также от скорости движения. Следовательно, в системе с трением механическая энергия не остается постоянной. Она при движении уменьшается; часть механической энергии переходит во внутреннюю энергию движущихся тел (они нагреваются). В этом случае закон сохранения энергии формулируется в более общей форме (2.39).

В § 2.9 закон сохранения энергии применялся к замкнутым системам, содержащим все взаимодействующие тела. Для таких систем в любой инерциальной системе отсчета центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно.

Если одно из двух взаимодействующих тел весьма значительно превосходит по массе второе тело, то первое можно считать неподвижным, т. е. считать, что его центр масс есть в то же время и центр масс системы.

Так мы рассуждаем, например, когда рассматриваем падение предметов на Землю под действием ее притяжения, пренебрегая собственным смещением Земли из-за взаимодействия с этими телами, и в ряде других случаев (см. также § 8.6).

Так можно поступить и при изучении взаимодействия Земли со спутником. Но при строгом изучении взаимодействия Земли с Лунной или Солнца с планетой следует учитывать, что оба тела движутся относительно их общего центра масс.

12.6. Собственная потенциальная энергия

В предыдущем параграфе рассматривалась потенциальная энергия тел, находящихся в поле тяготения, связанном с другими телами. Но любое макроскопическое тело, находясь в поле тяготения, связанном с ним самим, также обладает потенциальной энергией (ее называют *собственной энергией* U_s). Существование этой энергии объясняется тем, что каждая частица макроскопического тела находится в поле тяготения всех других частиц, образующих это тело.

Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Образование макроскопического тела и связанного с ним поля тяготения можно истолковать так: элементарные массы, составляющие тело, поочередно доставляются из бесконечности к началу координат ($\vec{r} = 0$), где это тело образуется. Первая масса dm доставляется без совершения работы сил тяготения; вторая, двигаясь в поле тяготения первой массы, подвергается действию ее сил притяжения, совершающих положительную работу, и т. д.

Пусть эти элементарные массы (плотности ρ) образуют шар, радиус r которого растет от нуля до R_0 , а масса – от нуля до M .

Когда радиус станет равным r , то потенциал на поверхности шара примет значение

$$\varphi = -\frac{Gm}{r},$$

где

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \text{есть масса шара.}$$

Очередная приносимая элементарная масса

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr.$$

Элементарная работа сил тяготения по переносу этой массы составляет:

$$dA = -\varphi dm.$$

Полная работа, совершаемая при образовании шара, равная убыли потенциальной энергии его частиц, есть

$$A = -U_c = \int_0^A dA = -\frac{16\pi^2}{3}\rho^2 G \int_0^{R_0} r^4 dr = -\frac{3}{5}G \frac{M^2}{R_0} = \frac{3}{5}M\varphi_0, \quad (12.20)$$

где φ_0 – конечное значение потенциала на поверхности шара.

В результате рассмотренного процесса образовался шар и в окружающем его пространстве возникло поле тяготения, каждая точка которого ($r > R_0$) характеризуется потенциалом

$$\varphi = -\frac{Gm}{r}$$

и напряженностью

$$\vec{\Gamma} = -\frac{Gm}{r^3} \vec{r}.$$

Поскольку поле материально, мы вправе полагать, что потенциальная энергия (12.20) присуща как шару ($U_{ш}$), так и полю ($U_{п}$), причём

$$U_{п} + U_{ш} = U_c.$$

Распределение энергии в пространстве в физике характеризуют ее *объемной плотностью* w , по определению равной

$$w = \frac{dU}{dV}, \quad (12.21)$$

где U – энергия, заключенная в объеме V .

В нашей задаче удобно представить w в виде

$$w = Bf(r),$$

где r – радиус, проведенный к элементу объемом dV , а B – постоянная, не зависящая от r . Вид функции $f(r)$ пока неизвестен.

Выделим в поле ($r > R_0$) шаровой слой толщиной dr (рис. 12.15). Благодаря симметрии слоя плотность энергии в нем постоянна. Поэтому энергия, сосредоточенная во всем объеме поля,

$$U_{\text{п}} = \int_{R_0}^{\infty} 4\pi r^2 w dr = 4\pi B \int_{R_0}^{\infty} r^2 f(r) dr. \quad (12.22)$$

Но так как в поле шара энергия пропорциональна $\frac{1}{r}$, то должно быть:

$$f(r) = r^{-4}.$$

Интегрируя (12.22), получаем:

$$U_{\text{п}} = 4\pi \frac{B}{R_0}.$$

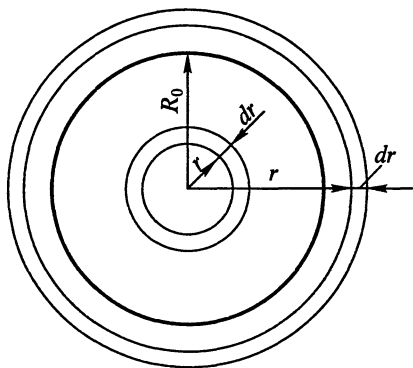


Рис. 12.15

Учитывая (12.4), выразим $w(r)$ через напряженность $\Gamma(r)$:

$$w(r) = \frac{B}{G^2 M^2} \Gamma^2(r)$$

и используем это выражение для вычисления плотности энергии внутри шара ($r < R_0$), где напряженность поля определяется выражением (12.8). Находим:

$$w(r) = \frac{B}{G^2 M^2} \frac{G^2 M^2}{R_0^6} r^2 = B \frac{r^2}{R_0^6}.$$

Выбрав по-прежнему шаровой слой, найдем энергию внутри шара:

$$U_{\text{ш}} = \int_0^R 4\pi r^2 \frac{B}{R_0^6} r^2 dr = \frac{4}{5} \pi B \frac{1}{R_0}. \quad (12.23)$$

Поэтому собственная энергия

$$U_c = U_{\text{п}} + U_{\text{ш}} = 4\pi \frac{B}{R_0} + \frac{4\pi}{5} \frac{B}{R_0} = 0,6 M\varphi_0.$$

Следовательно, распределение энергии таково:

$$U_{\text{п}} = 0,5 M\varphi_0; \quad U_{\text{ш}} = 0,1 M\varphi_0.$$

Далее, из (12.23) следует, что

$$B = \frac{M\varphi_0}{10} \frac{5R_0}{4\pi} = -\frac{1}{8\pi} GM^2.$$

Поэтому плотность энергии

$$w(r) = \frac{B}{r^4} = -\frac{1}{8\pi G} \Gamma^2(r). \quad (12.24)$$

Соотношение (12.24) является общим для любых полей тяготения.

Итак, в поле шара сконцентрировано $5/6$ всей собственной потенциальной энергии, причем большая часть ее сосредоточена вблизи шара. Так, 95% энергии поля тяготения Солнца ($R_c = 7 \cdot 10^8$ м) сосредоточено в шаровом слое с наружным радиусом

$$R = 7 \cdot 10^8 \cdot 20 \text{ м} = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ м},$$

что всего в 4 раза больше радиуса орбиты Меркурия и в 360 раз меньше радиуса орбиты Плутона.

Согласно СТО (см. §9.7), между массой покоя m_0 физического тела и его энергией покоя E_0 существует фундаментальная связь

$$E_0 = m_0 c^2.$$

Интересно сравнить собственную потенциальную энергию шара и связанного с ним поля с энергией покоя шара:

$$\alpha = 0,6 \frac{GM_0^2}{R_0 M_0 c^2} = 4,5 \cdot 10^{-28} \frac{M_0}{R_0} = 1,9 \cdot 10^{-27} R_1$$

Таблица 12.1

Объект	M_0 , кг	R_0 , м	ρ , кг/м ³	α
Нейтрон	$1,7 \cdot 10^{-27}$	$1,5 \cdot 10^{-15}$	$1,2 \cdot 10^{17}$	$5,1 \cdot 10^{-40}$
Земля	$6,0 \cdot 10^{24}$	$6,4 \cdot 10^6$	$5,5 \cdot 10^4$	$4,4 \cdot 10^{-10}$
Солнце	$2,0 \cdot 10^{30}$	$7,0 \cdot 10^8$	$1,4 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
Звезда типа «белый карлик»	$6 \cdot 10^{29}$	$2,2 \cdot 10^4$	$1,4 \cdot 10^{16}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$

Как видно из табл. 12.1, обычно $\alpha \ll 1$ и приближается к ней лишь в некоторых космических объектах.

12.7. Космические скорости. Искусственные спутники

Одной из задач, рассматриваемых в классической механике, является «задача двух тел» – изучается движение двух тел массой M и m , взаимодействующих друг с другом по закону всемирного тяготения (12.1). Так как состояние движения центра масс этой системы, которая считается замкнутой, не может быть изменено действием сил тяготения (внутренних сил), то система отсчета, связанная с центром масс, является инерциальной; именно в ней и удобно решать указанную задачу. Если существует сильное неравенство $M \gg m$, то центр масс практически совпадает с центром масс большего тела. Поэтому система отсчета, связанная с этим телом, будет практически инерциальной. Так, при рассмотрении движения искусственного спутника систему, связанную с Землей, можно считать инерциальной и выбрать начало координат в центре Земли.

Влияние атмосферы на движение спутников здесь не учитывается. Предсказанная К. Э. Циолковским эра космических полетов, для осуществления которой в СССР трудились коллективы ученых под руководством академика С. П. Королева (1906–1966) и академика М. В. Келдыша (1911–1978), наступила 4 октября 1957 г., когда был запущен первый в мире искусственный спутник Земли. Следующее крупнейшее достижение – первый облет Земли Юрием Алексеевичем Гагариным, совершенный 12 апреля 1961 г., останется навеки незабываемым в истории космонавтики. К сожалению, в рамках общего курса физики можно лишь кратко рассказать об основах космонавтики, совершенно не касаясь той громадной пользы, какую она, используемая в мирных целях, уже приносит науке и народному хозяйству.

Вернемся к изучению движения спутников.

1. Если скорость спутника равна v , а расстояние от центра Земли до спутника составляет R_0 , то полная энергия системы, складывающаяся из потенциальной и кинетической,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + m\varphi = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R_0}. \quad (12.25)$$

Пусть начальная скорость \vec{v}_0 направлена от поверхности Земли вдоль радиуса; при начальных отрицательных значениях полной энергии (т. е. при $v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{R_3}}$, где R_3 – радиус Земли) спутник удалится бы от центра Земли на расстояние

$$R = R_3 \frac{1}{1 - \frac{v^2 R_3}{2GM}}$$

и затем упал бы на нее, двигаясь ускоренно. На рис. 12.16 изображена гипербола, характеризующая потенциальную энергию системы. Отрезок AB представляет кинетическую энергию K спутника, находящегося на расстоянии R , полная энергия E при этом отрицательна.

При положительных значениях полной энергии спутник выходит за пределы действия земного притяжения.

2. Если спутнику, находящемуся в точке A на небольшой высоте h над поверхностью Земли, сообщить незначительную скорость \vec{v}_0 , направленную перпендикулярно радиусу Земли, то, двигаясь по

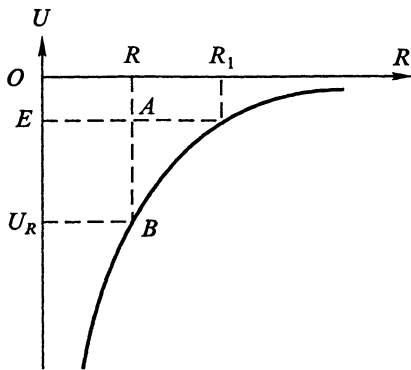


Рис. 12.16

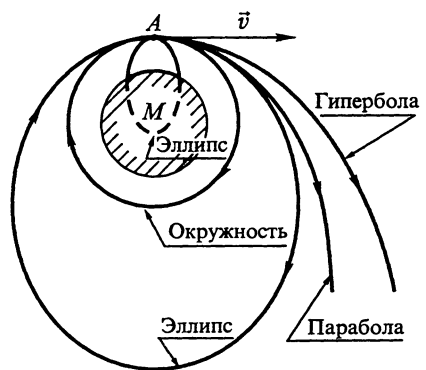


Рис. 12.17

малому эллипсу (рис. 12.17), он опишет небольшую дугу эллипса и упадет на Землю. Так как малый участок эллипса почти не отличается от малого участка параболы, то (при очень малых h), считая \vec{G} постоянным и равным \vec{g} , получаем результаты, найденные ранее при решении задачи 2 из § 1.7.

Когда скорость \vec{v}_1 такова, что сила притяжения Земли $\vec{F} = m\vec{g}$ как раз обеспечивает центростремительное ускорение движения спутника, т. е.

$$\frac{mv_1^2}{R_3 + h} = mg,$$

он будет двигаться по круговой орбите радиусом

$$R_3 + h = \frac{v_1^2}{g};$$

отсюда

$$v_1 = \sqrt{g(R_3 + h)}.$$

Считая $h \ll R_3$, находим значение скорости, называемой *первой космической скоростью*:

$$v_1 = \sqrt{gR_3} = 7,9 \text{ км/с}.$$

3. При увеличении начальной скорости можно добиться того, чтобы спутник неподвижно висел над земной поверхностью. Для этого, очевидно, нужно, чтобы его угловая скорость равнялась угловой скорости вращения Земли. Пусть спутник движется в плоскости земного экватора. Уравнение для определения необходимой скорости спутника таково:

$$G \frac{M}{(R_3 + h)^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} (R_3 + h) = \frac{v_2^2}{(R_3 + h)},$$

где T – период вращения Земли вокруг своей оси.

Решение уравнения относительно $R_3 + h$ дает:

$$R_3 + h = 42\,000 \text{ км, откуда } h = 35\,600 \text{ км}.$$

Спутник, движущийся по круговой орбите радиусом R , находясь только под действием силы притяжения к Земле, обладает вполне определенной скоростью v , определяемой из условия

$$G \frac{M}{R^2} = \frac{v^2}{R}; \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Так как при этом его потенциальная энергия относительно Земли составляет:

$$U = -\frac{GmM}{R},$$

а кинетическая:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GmM}{R},$$

то полная энергия спутника оказывается равной

$$E = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}G \frac{Mm}{R}. \quad (12.26)$$

Управление космическим кораблем имеет свои особенности. Так, если нужно перевести спутник с орбиты радиусом R_1 на орбиту меньшего радиуса R_2 , то нельзя просто увеличить тангенциальную составляющую скорости (двигателями, имеющимися на спутнике). Действительно, при увеличении скорости сила тяготения не сможет обеспечить необходимого центростремительного ускорения и спутник начнет удаляться от Земли, а орбита сделается эллиптической. Если же при помощи двигателей уменьшить скорость спутника, то сила тяготения превысит (по модулю) силу, необходимую для обеспечения центростремительного ускорения, появится радиальное ускорение, направленное к Земле, кинетическая энергия начнет увеличиваться.

Управляя направлением полной скорости спутника, можно сделать ее нормальной к радиусу в тот момент, когда она будет равняться скорости, при которой возможно обращение по орбите только за счет сил тяготения; после этого будет происходить устойчивое движение по орбите уменьшенного радиуса. Согласно выражению (12.26) полная энергия при этом станет меньше, чем до начала маневра. Соответствующая часть энергии будет унесена уходящими газами.

Еще более поучителен другой пример: пусть спутник имеет импульс \vec{p}_0 и требуется повернуть вектор его импульса на 90° . Это можно сделать, создав добавочный импульс \vec{p} (рис. 12.18). Так как масса корабля при этом уменьшится за счет уходящих газов, то конечный импульс \vec{p}_1 будет несколько меньше первоначального, а управляющий импульс окажется больше его.

Вернемся к рис. 12.16 и 12.17 и уравнению (12.25). При $v > v_1$ и $h \ll R_3$, пока полная энергия спутника отрицательна, он движется

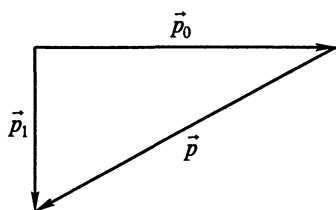


Рис. 12.18

по одной из эллиптических орбит, внутри которых располагается круговая орбита. Когда же полная энергия обращается в нуль, то, так как начальная скорость была перпендикулярна радиусу, спутник уйдет из сферы земного притяжения, но двигаясь по параболе, причем его скорость на бесконечности стремится к нулю.

Необходимая для этого случая начальная скорость, называемая *второй космической скоростью*, равняется:

$$v_2 = \sqrt{2gR_3} = 11,2 \text{ км/с.} \quad (12.27)$$

При дальнейшем увеличении начальной скорости спутник будет двигаться по гиперболическим орбитам, уходя за пределы действия земного тяготения. Теперь уже следует учесть влияние Солнца. Перенесем начало координат в центр Солнца. Энергия спутника будет теперь определяться выражением

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - Gm \frac{M_3}{R_3} - Gm \frac{M_C}{R_C} = \frac{1}{2}mv^2 - Gm \frac{M_3}{R_3} \left(1 + \frac{M_C R_3}{M_3 R_C} \right),$$

где индексы «3» относятся к его взаимодействию с Землей, а индексы «С» – с Солнцем; уравнение написано для момента запуска спутника; v – его скорость (относительно Солнца); расстояние до Солнца $R_C = 1,5 \cdot 10^8$ км; расстояние до центра Земли $R_3 = 6,4 \cdot 10^3$ км; масса Солнца $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг; масса Земли $M_3 = 6 \cdot 10^{24}$ кг.

Но

$$Gm \frac{M_3}{R_3} = mgR_3,$$

где $g = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ км/с}^2$ – ускорение в поле тяжести у земной поверхности. Поэтому для полной энергии (после подстановки числовых значений) получим:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - 15mgR_3.$$

При $E > 0$ спутник сможет покинуть пределы Солнечной системы. Для этого нужно выполнить условие

$$v > v_3 = \sqrt{30gR_3} \approx 43 \text{ км/с.} \quad (12.28)$$

Скорость v_3 называют *третьей космической скоростью*. Так как направление начальной скорости произвольно, то можно начальную скорость, сообщаемую космическому кораблю, сделать параллельной мгновенной скорости движения Земли вокруг Солнца (29,5 км/с). Тогда необходимая дополнительная скорость относительно Земли составит всего лишь 13,5 км/с.

Если скорость v превышает вторую космическую скорость, но полная энергия спутника (с учетом его взаимодействия с Солнцем) отрицательна, то спутник останется в Солнечной системе и будет обращаться вокруг Солнца.

Такова, например, судьба космических аппаратов «Вега», летевших мимо Венеры на встречу с кометой Галлея.

Создание искусственных спутников Солнца ныне стало реальностью. По-видимому, не представит особых затруднений и вывод космического корабля за пределы Солнечной системы.

Что же касается кораблей для межзвездных полетов, то можно определенно утверждать, что на современных видах топлива они невозможны.

Действительно, предельная скорость u газов, покидающих ракетный двигатель (относительно ракеты), близка к 5 км/с. Расстояние до ближайшей звезды равно 4 св. годам (1 св. год $\approx 9,5 \cdot 10^{15}$ м). Если космический корабль должен будет долететь до звезды за 1000 лет, то его скорость должна равняться:

$$v = 1,2 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Тогда по уравнению Циолковского отношение начальной массы m_0 к конечной массе m составит:

$$\frac{m_0}{m} = \exp 240 = 10^{100}.$$

Уже при $m = 1$ кг начальная масса превысит на много порядков массу Земли.

Обсуждаемые в популярной литературе гипотетические фотонные ракеты, где роль отходящих газов выполняет фотонный пучок, при современном уровне техники неосуществимы.

12.8. Вес тела

Уточним теперь широко распространенное понятие *вес тела*. Весом \vec{P} называют силу, с которой тело массой m действует на неподвижную относительно него опору (или неподвижный относи-

тельно него подвес), причем причиной этого действия является притяжение этого тела Землей, описываемое законом тяготения Ньютона:

$$\vec{F} = -m \frac{GM}{R^3} \vec{R} = m\vec{g}.$$

Сила \vec{P} может быть непосредственно измерена, например, при помощи пружинных весов. Так как весы могли быть проградуированы не там, где ими пользуются, а ускорение свободного падения в разных местах земного шара различно, то при равных показаниях пружинных весов

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}_1 = \vec{P}_2 = m_2 \vec{g}_2$$

массы взвешиваемых тел не вполне одинаковы. Различие это мало, и в практических условиях им пренебрегают.

Если же взвешивание производится на рычажных весах (модуль \vec{g} на близко расположенных чашках, конечно, одинаков), то результат взвешивания не зависит от места, где оно производилось: равновесие весов наступает при равенстве сравниваемых масс. Поэтому в торговле следовало бы пользоваться только рычажными весами.

Вес тела не всегда равен по модулю $F = mg$. Так, пусть опора, например дно кабины лифта, вместе с покоящимся на ней телом движется вертикально вниз с ускорением \vec{a} (это значит, что кроме \vec{F} действуют внешние силы). Примем направление вниз за положительное, и пусть проекция \vec{a} на это направление положительна. С таким же ускорением движется и тело, на которое (кроме силы \vec{F}) действует сила реакции опоры \vec{N} , направленная вверх и равная по модулю весу тела (в условиях движения): $\vec{N} = -\vec{P}$. По второму закону Ньютона движение тела описывается уравнением

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{g} - \vec{P}.$$

Поэтому получается:

$$\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}.$$

Так как все векторы направлены вниз, то можно написать:

$$P = m(g - a) < P_0 = mg. \quad (12.29)$$

При $a = 0$, как и должно быть, $P = P_0$.

При $a = g$ давление на опору исчезает. Это состояние тела принято называть *невесомостью*. Оно не изменится, если опору убрать.

При движении космических кораблей и спутников по околоземным орбитам (если двигатели корабля выключены) все части корабля и находящиеся в нем предметы находятся в состоянии невесомости – взаимодействие тел с опорами исчезает, так как все тела и опоры «свободно падают» на Землю.

Если же опора, подверженная действию внешних сил, получает ускорение, направленное вниз и большее по модулю, чем g , то тело отстает от опоры и продолжает падать с ускорением \vec{g} . Так как опоры нет, то вопрос о весе отпадает. При ускорении лифта, большем по модулю g , тело оторвется от пола лифта и достигнет потолка. Оно будет давить на него с силой

$$F = m(a - g),$$

направленной вверх. Иногда говорят, что при этом «вес изменил направление». Это, конечно, неверно, так как потолок не мешает телу двигаться под действием силы тяжести, т. е. потолок не является опорой (в первоначальном смысле этого слова).

В случае движения лифта вниз замедленно (проекция ускорения \vec{a} отрицательна), выражение (12.29) примет вид:

$$P = m(g + a) > P_0,$$

т. е. вес превышает P_0 .

Заметим, что при движении лифта вверх ускоренному движению соответствует $P > P_0$, а замедленному $P < P_0$.

Равномерное прямолинейное движение тела и опоры, конечно, никак не сказывается на значении веса, так как оно вообще не изменяет силовых взаимодействий.

Изменение веса происходит и при ускоренном движении тела и опоры в направлении, не совпадающем с вертикалью.

Так, в § 5.3 было выяснено: тело, лежащее на поверхности Земли, участвует во вращении вокруг земной оси благодаря тому, что за счет силы тяготения $\vec{F} = m\vec{g}$ и реакции опоры возникает центростремительное ускорение

$$\vec{a}_{\text{цс}} = -\omega^2 \vec{\rho}$$

(ω – угловая скорость вращения Земли, ρ – радиус круга широты, проходящего через точку, где лежит тело) и вес тела оказывается равным:

$$\vec{P} = \vec{F} + m\vec{a}_{\text{цс}} = m\vec{g} - m\omega^2 \vec{\rho}.$$

На полюсе изменения веса не происходит:

$$\vec{P} = \vec{F}.$$

12.9. Инертная и гравитационная массы. Границы применимости классической теории тяготения

В заключение уточним понятие массы. Во втором законе Ньютона масса выступает как мера инертности тела; ее принято называть *инертной массой* m . В законе тяготения сила определяется массами взаимодействующих тел; назовем их *тяготеющими*, или *гравитационными, массами* M . Каково соотношение между m и M у некоторого тела? Ответ на этот вопрос мог дать только опыт.

Первые опыты подобного рода (не владея еще понятием массы) производил Галилей, давая телам падать с башни и измеряя время их падения. Он вывел из этих опытов заключение о постоянстве ускорения свободного падения для всех тел (в данном месте земной поверхности).

Теория тяготения объяснила, почему в данном месте ускорение свободного падения \vec{g} должно быть одинаковым для всех тел.

Конечно, опыты Галилея были несовершенны. Сам Ньютон провел точные опыты, изучая колебания однородных физических маятников одинаковой формы, сделанных из разных материалов.

Как известно из теории колебаний, период физического маятника зависит от отношения действующей на него силы тяжести (пропорциональной гравитационной массе M) к моменту инерции маятника, зависящему от его инертной массы m , испытывающей ускорение. Поэтому, измеряя периоды маятников, можно судить об отношении гравитационной массы к инертной. Ньютон нашел, что независимо от материала маятников и их формы всегда получалось

$$\frac{M}{m} = \text{const.}$$

Выбрав для обеих масс одинаковые единицы, Ньютон нашел:

$$\frac{M}{m} = 1 \pm 10^{-3}.$$

Позже точность опытов была существенно повышена. Так, Этвеш (1899 г.) подтвердил равенство масс с точностью до 10^{-8} , Дикке с сотрудниками (1964 г.) – до $\sim 3 \cdot 10^{-11}$ и, наконец, Брагинский и Панов (1971 г.) – до 10^{-12} . Дальнейшие исследования в этом направлении продолжают.

В настоящее время пользуются единым понятием массы покоя m_0 – меры инертности и тяготения физических тел (и материальных точек), неразрывно связанной с собственной энергией тела (точки) E_0 фундаментальным соотношением Эйнштейна

$$E_0 = m_0 c^2.$$

А. Эйнштейн обратил внимание на одну особенность сил инерции: каждая из них сообщает ускорение, не зависящее от массы тела (напомним, что «силы инерции» есть только в НИСО!). Но такой же особенностью обладает и сила тяготения.

Эта особенность позволяет подойти к тяготению с новой точки зрения. Представим себе наблюдателя, находящегося в лифте, неподвижном относительно Земли. Он замечает, что все тела, будучи подняты над полом и предоставлены самим себе, падают с одинаковым ускорением \vec{g} . Тела же, достигшие пола, давят на него с силами, пропорциональными g . Если теперь лифт привести в ускоренное движение вниз в вертикальном направлении (с ускорением \vec{a} относительно системы координат, связанной с Землей), то наблюдатель в кабине обнаружит, что ускорения всех свободных тел (относительно лифта) стали равны:

$$a_1 = g - a$$

и силы давления на пол лифта также стали пропорциональны a_1 (так как инертная масса равна тяготеющей).

Если лифт будет падать свободно (с ускорением \vec{g} относительно Земли), то для наблюдателя, находящегося в лифте, проявления силы тяжести полностью исчезнут.

При этом никакими физическими опытами (внутри лифта) невозможно определить, что же произошло: изменилось тяготение или возникла сила инерции, противонаправленная силе тяготения (поле тяготения предполагается однородным).

Так как однородные поля можно создать только в ограниченной области пространства, то и эквивалентность сил тяготения и сил инерции существует только в ограниченной области. Идея об эквивалентности сил тяготения и сил инерции положена Эйнштейном в основу общей теории относительности, представляющей собой более совершенную теорию тяготения, чем теория Ньютона; общая теория относительности справедлива и для НИСО.

Классические представления о тяготении, строго говоря, применимы лишь к неподвижным телам.

Действительно, если расстояние между взаимодействующими телами меняется, то должно меняться и взаимодействие. Но согласно теории относительности скорость передачи взаимодействия конечна: она не может превышать скорости света в вакууме. Это значит, что если в данном месте тело переместится сейчас, то в удаленной точке его поле изменится несколько позже. Этого запаздывания теория Ньютона не учитывает. Так как она все же приводит к правиль-

ным результатам, то следует заключить, что скорости перемещения тел очень малы по сравнению со скоростью передачи тяготения. Эта скорость еще не измерена, но есть основания думать, что она равна скорости света в вакууме. При ускоренном движении некоторого массивного тела вокруг него должны создаваться изменения поля тяготения – гравитационные волны. Их сейчас пытаются обнаружить, но достоверных результатов пока не получено.

Учет возможной нестационарности поля тяготения характерен для теории Эйнштейна. Есть в ней и еще важная особенность. Классические представления, кроме допущения бесконечной скорости распространения взаимодействия, основаны на том, что поле тяготения, связанное с любым телом, само совершенно не зависит от наличия других тел. Это приводит к линейности уравнений, связывающих силы взаимодействия с массами тел, и как следствие – к применимости принципа суперпозиции, позволяющего складывать как векторы напряженности нескольких полей тяготения. В новой теории тяготения учтен возможный нелинейный характер взаимодействий, т. е. утверждается, что достаточно сильные поля не подчиняются принципу суперпозиции, что, конечно, делает теорию очень сложной. В предельном случае малых скоростей взаимодействующих тел и не слишком больших сил тяготения теория Эйнштейна переходит в ньютоновскую.

В рамках общего курса физики обсуждение общей теории относительности и следствий из нее невозможно. В настоящее время накоплено довольно много экспериментальных данных, подтверждающих новую теорию. Так, например, теория относительности показывает, что в очень сильных полях тяготения пространство теряет свою однородность, что должно, в частности, сказаться на условиях распространения света. Наблюдения звезд во время солнечного затмения (когда они кажутся лежащими у края солнечного диска) и радиолокация Меркурия подтвердили теоретические предсказания (искривление траектории лучей и изменение скорости распространения света) с достаточной точностью.

Дальнейшее развитие идей общей теории относительности приводит к новым представлениям о строении Вселенной и ее развитии.

Нужно отметить, однако, что недостаточная полнота сведений о процессах во Вселенной и громадные математические трудности, возникающие при решении столь сложных вопросов, не позволяют получить их однозначного решения. Кроме того, создаваемые модели Вселенной существенно зависят от средней плотности вещества в ней, а ее значение известно недостаточно точно. Наблюдательный материал, накопленный современной астрономией и астрофизикой, также недостаточен пока для однозначного решения вопроса о строении Вселенной и ее развитии.

Заключение

Впечатляющие успехи механики при объяснении широкого круга природных явлений привели к формированию определенной системы взглядов на окружающий мир. С точки зрения механики весь окружающий человека мир состоит из отдельных тел, взаимодействующих друг с другом. Тела могут рассматриваться как совокупность еще меньших частиц, также участвующих во взаимодействиях друг с другом. Деление частиц на все более мелкие составляющие ограничено физическими причинами. Самые мелкие частицы являются бесструктурными атомами. Положение частиц друг относительно друга меняется в пространстве со временем, которое течет одинаково во всех системах отсчета. Эти изменения можно определить, используя законы Ньютона для описания движения тел. При этом взаимодействия описываются с помощью сил, зависящих только от взаимного расположения тел и в некоторых случаях от их относительной скорости, как, например, для случая вязкого трения. Знание начальных условий, т. е. положения тел и их скоростей в начальный момент времени, и сил, действующих между телами, позволяет рассчитать с помощью второго закона Ньютона положение тел и их скорости в любой момент времени. Силы, действующие между телами, могут быть различной природы. Для описания движения важно знать лишь зависимость силы от взаимного расположения тел и от их скорости без объяснения их происхождения. Примером такого подхода является описание взаимодействия Солнца и планет Солнечной системы с помощью закона всемирного тяготения. Взаимодействия между телами передаются мгновенно с бесконечно большой скоростью.

С точки зрения механики задачей научного описания окружающего мира является представление всех тел в виде совокупности отдельных, взаимодействующих друг с другом, частиц – материальных точек, определение характера взаимодействия между ними в виде законов для сил взаимодействия и установления начальных условий. Окружающий мир с точки зрения механики выглядит достаточно унылым – в нем господствует механический детерминизм. Будущее мира однозначно определено его прошлым. Успехи механики в описании природных явлений были так велики, что механический детерминизм на протяжении нескольких столетий стал примером для построения научного описания других явлений, по своей природе далеких от механики. К счастью, дальнейшее развитие на-

уки показало, что область применимости механики ограничена. Изучение явлений распространения света, движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, привело к изменению представлений о пространстве и времени, законов, описывающих механическое движение. Законы классической механики оказались неприменимыми также для описания движения микроскопических объектов, положение и скорость которых, как оказалось, нельзя определить одновременно. Для описания движения тел в микромире была разработана квантовая механика. Но и специальная теория относительности, и квантовая механика при соответствующем предельном переходе приводят к законам классической механики. Таким образом, механику следует рассматривать как физическую теорию, имеющую свою область и границы применимости.

Приложение

Важнейшие механические величины, их размерности и единицы СИ

Наименование	Величина			Единица	
	Обозначение	Определяющее уравнение	Размерность	Наименование	Обозначение
Время (с ¹)	t, T	Основная величина	T	секунда	с
Длина (с)	l, L	»	L	метр	м
Масса (с)	m	»	M	килограмм	кг
Температура (с)	T	»	Θ	кельвин	К
Количество вещества (с)	ν	»	N	моль	моль
Площадь (с)	S	$S = l^2$	L ²	квадратный метр	м ²
Объем (с)	V	$V = l^3$	L ³	кубический метр	м ³
Перемещение (в)	$s, \Delta R$	-	L	метр	м
Скорость (в)	v	$v = \frac{dl}{dt}$	LT ⁻¹	метр в секунду	м/с
Ускорение (в)	a	$a = \frac{dv}{dt}$	LT ⁻²	метр на секунду в квадрате	м/с ²
Импульс (количество движения) (в)	p	$p = mv$	LMT ⁻¹	килограмм-метр в секунду	кг·м/с
Сила (в)	F	$F = \frac{dp}{dt}$	LMT ⁻²	ньютон	Н
Период (с)	T	-	T	секунда	с
Угол плоский	α, β, γ	$\alpha = \frac{l}{R}$	1	радиан	рад
Угол телесный	ω, Ω	$\Omega = \frac{S}{R^2}$	1	стерадиан	ср
Частота (с)	ν, f	$f = \frac{1}{T}$	T ⁻¹	герц	Гц
Угловое перемещение	α	-	1	радиан	рад
Угловая скорость (в)	ω	$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$	T ⁻¹	радиан в секунду	рад/с
Угловое ускорение (в)	ε, α	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$	T ⁻²	радиан на секунду в квадрате	рад/с ²
Момент инерции (с)	I	$I = mR^2$	L ² M	килограмм-метр в квадрате	кг·м ²
Момент силы (в)	M	$M = FR$	L ² MT ⁻²	ньютон-метр	Н·м
Момент импульса (момент количества движения) (в)	L	$L = pR$	L ² MT ⁻¹	килограмм-метр в квадрате на секунду	кг·м ² /с

¹ Буквы «с» и «в» обозначают соответственно «скаляр» и «вектор».

Наименование	Величина			Единица	
	Обозначение	Определяющее уравнение	Размерность	Наименование	Обозначение
Работа (с)	A	$A = Fl$	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
Мощность (с)	N	$N = \frac{A}{t}$	L^2MT^{-3}	ватт	Вт
Энергия (с)	K, U, E	$E = mc^2$	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
Плотность энергии (с)	w	$w = \frac{E}{V}$	$L^{-1}MT^{-2}$	джоуль на кубический метр	Дж/м ³
Плотность (с)	ρ	$\rho = \frac{m}{V}$	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	кг/м ³
Давление (с)	p	$p = \frac{F}{S}$	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па
Напряженность поля тяготения (в)	Γ	$\Gamma = \frac{F}{m}$	LT^{-2}	ньютон на килограмм	Н/кг
Потенциал поля тяготения (с)	ϕ	$\phi = \frac{A}{m}$	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг

Напомним, что *радиан* равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу:

$$1 \text{ радиан} = 57^\circ 17' 45''.$$

Стерadian равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Полный телесный угол, описанный вокруг точки, равен 4π ср.

Множители и приставки СИ для образования кратных и дольных единиц

Множитель	Обозначение приставки	Наименование приставки	Множитель	Обозначение приставки	Наименование приставки
10^{18}	Э	экса	10^{-1}	д	деци
10^{15}	П	пета	10^{-2}	с	сантиметры
10^{12}	Т	тера	10^{-3}	м	милли
10^9	Г	гига	10^{-6}	мк	микро
10^6	М	мега	10^{-9}	н	нано
10^3	к	кило	10^{-12}	п	пико
10^2	г	гекто	10^{-15}	ф	фемто
10^1	да	дека	10^{-18}	а	атто

Содержание

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Кинематика материальной точки	11
1.1. Механическое движение. Относительность механического движения	11
1.2. Материальная точка. Система отсчета. Перемещение тела	14
1.3. Пространство и время в механике	18
1.4. Скорость	25
1.5. Ускорение	29
1.6. Скорость и ускорение при движении материальной точки по окружности	31
1.7. Решение задач в кинематике	36
1.8. Гармоническое колебательное движение. Сложение гармонических колебаний	40
1.9. Метод комплексных амплитуд	47
1.10. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний	49
Глава 2. Динамика материальной точки	53
2.1. Первый закон Ньютона. Инерциальная система отсчета. Сила	53
2.2. Масса. Импульс. Второй закон Ньютона	57
2.3. Третий закон Ньютона	63
2.4. Система физических величин, их единицы и размерности	65
2.5. Силы в механике Ньютона	69
2.6. Преобразования и принцип относительности Галилея	72
2.7. Основные задачи динамики материальной точки (простейшие примеры)	75
2.8. Работа и кинетическая энергия	79
2.9. Потенциальная энергия. Закон сохранения и превращения механической энергии	82
2.10. Момент импульса материальной точки. Момент силы. Уравнение моментов	88
Глава 3. Некоторые применения законов механики материальной точки	93
3.1. Простейшие примеры задач по механике	93
3.2. Движение электронов в электронно-лучевой трубке	99
3.3. Равновесие материальной точки. Степени свободы	103
3.4. Проявление трения	105

Глава 4. Динамика системы материальных точек.	
Законы сохранения	112
4.1. Замкнутые механические системы. Закон сохранения механического импульса	112
4.2. Момент импульса механической системы. Закон сохранения момента импульса	117
4.3. Энергия системы материальных точек. Закон сохранения энергии в механической системе	121
4.4. Движение тела переменной массы	125
4.5. Соударения тел и частиц	128
Глава 5. Механика твердого тела	137
5.1. Модель абсолютно твердого тела. Виды движения твердого тела	137
5.2. Динамика поступательного движения твердого тела	140
5.3. Динамика вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции твердого тела относительно оси вращения	142
5.4. Определение момента инерции твердого тела. Теорема Штейнера	146
5.5. Рычаги. Пара сил	149
5.6. Маятники	152
5.7. Динамика плоского движения твердого тела	155
5.8. Мгновенные оси вращения	156
5.9. Динамика твердого тела, закрепленного в одной точке	167
5.10. Динамика свободного движения твердого тела	171
5.11. Условия равновесия твердого тела	172
5.12. Законы Ньютона и законы сохранения в механике	174
Глава 6. Механика упругих тел	177
6.1. Упругие тела. Виды упругих деформаций	177
6.2. Упругие напряжения	179
6.3. Закон Гука. Предел упругости и предел прочности	181
6.4. Неоднородные упругие деформации	183
6.5. Энергия упругой деформации. Вектор Умова	185
Глава 7. Гидроаэродинамика	190
7.1. Давление в жидкостях и газах. Закон Паскаля	190
7.2. Архимедова сила. Закон Архимеда	193
7.3. Слоистое (ламинарное) и турбулентное течение. Уравнение непрерывности струи	198
7.4. Уравнение Бернулли. Импульс струи	201
7.5. Трение в движущейся реальной жидкости. Уравнение Пуазейля	211
7.6. Число Рейнольдса	214
7.7. Движение твердых тел в жидкости и газе. Циркуляция скорости. Подъемная сила	216

Глава 8. Движение в неинерциальных системах отсчета	224
8.1. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции	224
8.2. Равномерно вращающаяся система отсчета. Центробежная сила инерции	227
8.3. Силы инерции в произвольно движущейся НИСО	229
8.4. Проявление сил инерции на Земле	232
8.5. Эквивалентность сил инерции и сил тяготения	236
8.6. Законы сохранения в НИСО	237
Глава 9. Элементы специальной теории относительности	239
9.1. Границы применимости классической механики	239
9.2. Механика Ньютона и принцип относительности Галилея	242
9.3. Принцип относительности Эйнштейна	244
9.4. Относительность длин и длительностей. Интервал	246
9.5. Элементы релятивистской механики	254
9.6. Релятивистская связь между массой и энергией	259
9.7. Соударения при релятивистских скоростях	262
Глава 10. Механические колебания	267
10.1. Колебательные системы. Уравнения колебательного движения	267
10.2. Свободные колебания. Добротность колебательной системы	271
10.3. Вынужденные колебания. Резонанс	278
10.4. Рассмотрение вынужденных колебаний методом комплексных амплитуд	286
10.5. Колебания в нелинейных системах	287
Глава 11. Механические волны	292
11.1. Колебания в связанных системах. Образование волн	292
11.2. Бегущие волны. Скорость распространения волны	296
11.3. Энергия волны	302
11.4. Интерференция волн. Стоячие волны	306
11.5. Отражение волн	311
11.6. Принцип Гюйгенса	315
11.7. Звук. Волновая природа звука	317
11.8. Источники и приемники звука	320
11.9. Физиологическая акустика	324
11.10. Эффект Доплера	328
11.11. Ультразвуки и инфразвуки	330
Глава 12. Всемирное тяготение	333
12.1. Взаимодействие тел. Вещество и поле	333
12.2. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения	334
12.3. Постоянная тяготения. Примеры применения закона всемирного тяготения	338
12.4. Поле тяготения. Напряженность поля. Теорема	

Остроградского–Гаусса	340
12.5. Работа силы тяготения. Потенциал поля тяготения. Потенциальная энергия. Связь потенциала с напряженностью	349
12.6. Собственная потенциальная энергия	356
12.7. Космические скорости. Искусственные спутники	360
12.8. Вес тела	365
12.9. Инертная и гравитационная массы. Границы применимости классической теории тяготения	368
Заключение	371
Приложение	373

Учебное издание

**Гершензон Евгений Михайлович
Малов Николай Николаевич
Мансуров Андрей Николаевич**

Механика

Учебное пособие

*Редактор В. А. Обменина
Технический редактор Е. Ф. Коржуева
Компьютерная верстка: Е. В. Поляченко
Корректор Э. Г. Юрга, А. П. Сизова*

Диaposитивы предоставлены издательством

Подписано в печать 25.06.2001. Формат 60×90/16. Гарнитура «Таймс».
Печать офсетная. Бумага тип. № 2. Усл. печ. л. 24,0.
Тираж 30 000 экз. (1-й завод 1 – 5 500 экз.). Заказ № 643.

Лицензия ИД № 02025 от 13.06.2000. Издательский центр «Академия».
105043, Москва, ул. 8-я Парковая, 25. Тел./факс: (095)165-4666, 367-0798, 305-2387.

Отпечатано с готовых диaposитивов на Саратовском полиграфическом комбинате.
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.